T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

TAM SAYI DİZİLERİNİN KÜMELER TEORİSİ İLE OLAN İLİŞKİSİ

DENİZ NARİN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2023

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAM SAYI DİZİLERİNİN KÜMELER TEORİSİ İLE OLAN İLİŞKİSİ

DENİZ NARİN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 23/01/2023 tarihinde jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ALKAN (Danışman)
Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Dr. Öğr. Üyesi Neslihan KILAR

ÖZET

TAM SAYI DİZİLERİNİN KÜMELER TEORİSİ İLE OLAN İLİŞKİSİ

DENİZ NARİN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Ocak 2023, 49 sayfa

Çalışmamda, tam sayı dizileri ve bu dizilerin kümeler teorisi olan ilişkisi incelendi. Kümeler teorisinde bazı problemlerin çözümlerinin genellemesinin verilmediği yapılan literatür taramalarında fark edildi ve bu problemlere çözüm aramaya çalışıldı. Kümeler konusunda alt küme elemanlarının birbirileri ile olan ilişkilerinin incelemesi yapıldı. Diziler konusu ile kümeler konusu harmanlanarak problemler incelendi. Dört farklı formül üretilerek problemlere genel çözümler üretildi. Çözümlerin üretim aşamalarında Fibonacci tavşan diyagramı farklı bir bakış açısı ile ele alındı. Tablo, çizelge ve diyagramlarla yapılan çalışma desteklendi.

Birinci bölümde Fibonacci, Lucas, Cassini ve tam sayı dizilerinden bahsedildi. Birbirleri ile olan ilişkiler incelendi.

Çalışmamın ikinci bölümünde kümeler teorisinden ve çalışmamın havacılık sektöründeki bir probleme nasıl çözüm bulabileceğinden söz edildi.

Çalışmamın üçüncü bölümünde kümeler teorisindeki iki ayrı problem genellendi ve çözümler elde edildi. Çözümler elde edilirken tam sayı dizileri ile olan ilişki ortaya çıkarıldı.

Dördüncü bölümde ise problemlerin daha da farklı boyutlarda nasıl incelenebileceği ve yeni çalışmalarda nasıl kullanılacağı ile ilgili bilgiler verildi. Ayrıca problemin çözümünden çıkan yeni bir problemden bahsedildi. Yeni problemin gelecekte çözümü yapılırken çalışmamın katkılarından bahsedildi.

ANAHTAR KELİMELER: Aritmetik Dizi, Fibonacci Dizisi, Geometrik Dizi, Kümeler

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ALKAN (Danışman)

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Dr. Öğr. Üyesi Neslihan KILAR

ABSTRACT

THE RELATİON BETWEEN INTEGER SEQUENCES AND SET THEORY

DENİZ NARİN

MSc Thesis in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ALKAN

January 2023, 49 pages

In my work, sequences of integers and their relation to set theory were examined. It was noticed in the literature review that the generalization of the solutions of some problems in set theory was not given, and it was tried to find solutions to these problems. In the subject of clusters, the relations of the subset elements with each other were examined. The problems were examined by blending the subject of arrays with the subject of sets. General solutions to the problems were produced by producing four different formulas. During the production stages of the solutions, the Fibonacci rabbit diagram was handled from a different perspective. Working with tables, charts and diagrams was supported.

In the first chapter, Fibonacci, Lucas, Cassini and integer sequences were mentioned. Relationships with each other were examined.

In the second part of my work, set theory and how my work can find a solution to a problem in the aviation industry were mentioned.

In the third part of my work, two different problems in set theory were generalized and solutions were obtained. While obtaining the solutions, the relationship with the integer sequences was revealed.

In the fourth chapter, information was given about how the problems can be analyzed in different dimensions and how they can be used in new studies. In addition, a new problem that emerged from the solution of the problem was mentioned. The contributions of my work were mentioned when solving the new problem in the future.

KEYWORDS: Arithmetic Sequence, Fibonacci Sequences, Geometric Sequences, Sets

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ALKAN (Danışman)

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Dr. Öğr. Üyesi Neslihan KILAR

ÖNSÖZ

Daha çok Fibonacci olarak bilinen Pisa’lı Leonard'ın keşifleri Matematik dünyasına katkıları açısından devrim niteliğindedir. Bunlardan en bilineni Fibonacci dizileridir. Bu dizideki sayılar doğada birçok bitki ve hayvanın form ve tasarımlarında ve ayrıca sanatta, mimaride ve müzikte çeşitli biçimlerde gözlemlenmiştir. Matematikçi Pisa'lı Leonardo'nun matematiğe katkıları her zaman merak uyandırdı ve ilham verdi. Yüzyıllar boyunca insanlar matematik dünyasına daha derinden bakmaya çalışırken onun verdiği ilhamı kullandı. Çalışmamda Fibonacci dizilerini de inceleyerek sayı dizileri arasındaki bağıntılarla alt kümeler arasında ilişkiler bulmaya çalıştım. Yaptığım çalışmanın daha da ilerletilebileceğini ve gelecekte bu konuda çalışmalarda kullanılabileceğini düşünüyorum. Günümüzde havacılıkla ilgili bazı problemlerin çözümünde de ışık olacağına inanıyorum.

Çalışmam ve aldığım eğitim boyunca beni yönlendiren her zaman bana yardımcı olup katkılarını esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Mustafa ALKAN’a teşekkür ederim. Ayrıca yoğun çalışma tempomda her zaman yanımda olan sevgili eşime sonsuz teşekkürler.

Yaptığım tüm çalışmalar Ada ve Yağız Ali için.

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “TAM SAYI DİZİLERİNİN KÜMELER TEORİSİ İLE OLAN İLİŞKİSİ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

23/01/2023

DENİZ NARİN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$2N$: Çift Doğal Sayılar Kümesi

N : Doğal Sayılar Kümesi

F_i : i'nci Fibonacci Sayısı

N^+ : Pozitif Tam Sayılar Kümesi

Z^+ : Pozitif Tam Sayılar Kümesi

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$: Pozitif ve Negatif Reel Sayılar

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar Kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

On üçüncü yüzyıl başlarında, Avrupa Karanlık Çağlardan uyanmaya başladı ve Rönesans'a doğru ilerleyen süreç başladı. Karanlık Çağların boğucu etkileri kalkmaya başladıkça yerini bilim dünyasına, sanatçılara, akademisyenlere, mimarlara artan bir ilgi aldı. Bilim adamları ve matematikçiler devrim niteliğinde keşifler ve ilerlemeler yapmaya başladılar. İşte o dönemlerde katkı sağlayan kişilerden birisi de en çok Pisa'ya katkıda bulunan Leonardo'ydu.

Fibonacci'nin çalışmaları oldukça iyi bilinmesine rağmen, şaşırtıcı bir şekilde hayatı hakkında çok az şey biliniyor. Ne doğum tarihi ne de yeri kesin olarak bilinmemekle birlikte, muhtemelen 1170 yılı civarında İtalya'nın Pisa kenti yakınlarında doğduğu biliniyor. İnsanlar o zaman doğduğu yerleri isimlerinde taşıdıkları için Pisa'lı Leonardo yani Leonardo Pisano adını aldı. Fakat herkes onu "Bonacci'nin evi" anlamına gelen, Fibonacci olarak biliyordu. Babası Guilielmo Bonacci, Pisa'lı bir tüccardı. O zamanlar Pisa gelişen bir merkezdi. Uluslararası ticaret ve tüccarların uğrak yeriydi. Fibonacci'nin yaşadığı dönemler Karanlık Çağlar sona ermiş, ticarete ilgi yeniden canlanmıştı. Avrupa ülkeleri yeniden gelişmeye ve canlanmaya başlamıştı (Keith 2011). Leonardo ticaretin koşuşturmacasıyla çevrili bir hayatta büyüdü. Leonardo bir gençken, babası günümüz Cezayir'inde bulunan Kuzey Afrika kıyısındaki Bugia'ya temsil görevine atandı. Bugia'da güçlü bir Arap varlığı vardı. Karanlık Çağlarda kapana kısılmış ve çok az bilimsel çalışma yapmış Avrupalılara Arap Matematikçiler bilgilerin çoğunu bu ticaret ilişkileri yardımıyla aktarabildiler (Henderson 2007). Leonardo eğitim gördüğü ve hesaplama becerisini öğrendiği Bugia'da tüccar olmaya başladı. Bu hesaplama becerisi her cumhuriyette farklı bir para birimi kullanıldığından para birimleri arasında dönüştürme yapmak için gerekli bir beceriydi. Bu yeteneği iş görüşmelerini yürütmesi açısından çok önemliydi. Leonardo, oradaki eğitimi sırasında ilk önce Hintçe 1-9 rakamlarını ve Arap rakamı 0'ı öğrendi (Posamentier & Lehmann 2007). O zamanlar Avrupa'nın çoğu Roma rakamlarını kullanıyordu ancak Leonardo Arap tüccarlar tarafından da kullanılan bu yeni numaralandırma sistemini tanıdı. Bu sayılarla çalışmanın çok daha verimli ve daha kolay olduğunu düşünüyordu. Roma rakamları ile hesaplamaların fazlasıyla uğraştırıcı olduğunu biliyordu. Toplama ve çıkarma zaman alıcıydı ve çarpma ve bölme çok karmaşıktı. Bu yeni Hindu-Arap numaralandırma sistemiyle hesaplamalar çok daha verimliydi. Leonardo'ya bu eğitimi İranlı Müslüman matematikçinin yazdığı bir kitap üzerinden yine Müslüman bir öğretmen verdi. Bu eğitimde sadece klasik Yunan matematiğini değil, aynı zamanda Hintli ve Arap sistemler üzerinden eğitim aldı. Bu eğitimde cebir ile tanıştı (Bradley 2006). Leonardo'nun matematikte sağlam bir geçmişi olması onun bu konuya olan ilgisini daha da artırdı. Daha sonra da onun ömür boyu tutkusu haline geldi.

1.1. Fibonacci’nin Matematiksel Çalışmaları

Hayatı boyunca Fibonacci, Liber Abaci de dahil olmak üzere birçok kitap yazdı. Hindu rakamlarının avantajlarını yayınlayan ve çeşitli konuları tartışan matematik problemleri, trigonometri ve ispatları içeren bir geometri kitabı, çiçekler üzerine ve sayı teorisi üzerine de ayrıca kitaplar yazdı. Son derece yetenekli bir matematikçi olan Leonardo’nun açık arayla eserlerinin en bilineni Liber'dir. “Hesap kitabı” anlamına gelen Abaci kelimesini içerir. Bu kitap muhtemelen Orta Çağ'ın en etkili matematik eserlerinden biriydi. Latince el yazısıyla yazılan Liber Abaci, ilk olarak 1202'de yayınlandı ve daha sonra 1228'de revize edildi (Posamentier & Lehmann 2007). Kitabın ilk yedi bölümünde Hindu-Arap rakamlarını tanıtımı ve çeşitli işlemleri gerçekleştirmek için bunların nasıl kullanılacağını gösteren ifadeler yer alıyordu. Sayıların verimliliklerini ve kullanım kolaylığını gösteren matematiksel hesaplamalar ağırlıkla kitapta yer aldı. Fibonacci ilk olarak sayıların nasıl okunup yazılacağını ve ardından toplama, çıkarma, çarpma ve tam sayılar ve kesirler kullanarak bölme işlemlerinin nasıl yapılacağını anlattı (Bradley 2006). Bu pratik problem çözme teknikleri ile tüccarlara karı nasıl hesaplayacaklarını ve bir para biriminden diğerine nasıl çevireceklerini öğretti. Liman kentlerinde ticaret yapan tüccarlar, hesaplarında herhangi bir sayıda para birimine sahip olabileceğinden bu hesaplamalara ihtiyaç duyuyorlardı. Malları ölçmek için kullanılan ağırlıklar da standardize edilmemişti bu yüzden bu tür hesaplamaları bilmek gerekiyordu (Henderson, 2007). Kitabın son dört bölümde ise cebir de dahil olmak üzere matematiğin çeşitli dallarından tekniklerle uğraştı, geometri ve sayı teorisi ve bir dizi problem ve bulmaca sundu (Bradley 2006).

Fibonacci'nin kapsamlı ve ayrıntılı açıklamaları ve çok sayıda örnek yeni numaralandırma sistemi ile ilgili olarak hesaplamalara geniş çapta katkıda bulundu.

Fibonacci’nin kitabındaki bir tavşan probleminin çözümünden elde edilen sayıların özellikleri, sonraki matematikçiler tarafından fark edilmiştir. Fibonacci sayılarına ait tekrarlı bağıntı, ilk kez 17’nci yüzyılda Fransız matematikçi Albert Girard tarafından kullanılmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Diziler

Tanım kümesi pozitif tamsayılar kümesi olan bir fonksiyona dizi denir.

Dizileri fonksiyon notasyonu yerine alt indis notasyonu ile gösterilir. Yani,

$(f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots.)$ yerine $(a_1, a_2, a_2, \dots, a_n, \dots)$ biçiminde gösterilir.

$a_1, a_2, a_2, \dots, a_n,$ ... sayılarına dizinin terimleri ve n'ye bağlı bir ifade olan a_n'ye ise dizinin genel terimi denir(Evans 2011).

2.2. Aritmetik Dizi

Ardışık her iki terimi arasındaki fark sabit olan diziye, aritmetik dizi denir.

Yani $r \in R$ olmak üzere $\forall n \in N^+$ için

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_{n+1} - a_n = r$$

ise (a_n) bir aritmetik dizidir. r gerçek sayısı da bu aritmetik dizinin ortak farkıdır. İlk terimi a_1 ve ortak farkı r olan (a_n) aritmetik dizisinin genel terimi $a_n = a_1 + (n-1)r$ 'dir (Evans 2011).

2.3. Geometrik Dizi

Ardışık iki teriminin oranı aynı olan diziye geometrik dizi denir.

Yani $r \in R - \{0\}$ olmak üzere $\forall n \in N^+$ için

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

ise (a_n) bir geometrik dizidir. r gerçek sayısı ise bu geometrik dizinin ortak çarpanıdır.

İlk terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinin genel terimi

$$a_n = a_1 . r^{n-1} \text{ ‘dir}$$

(Evans 2011).

2.4. Fibonacci Dizisi

$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1$ başlangıç değerleri ve 2≤ n ve $n \in Z^+$ için,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (1.1)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı diziye ‘’Fibonacci Dizisi’’ denir (Koshy 2001). Fibonacci dizisi bir homojen yineleme bağıntısıdır. Fibonacci dizisinin ortaya çıkışı bir tavşan problemi ile ortaya çıkmıştır.

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,…

sayıları Fibonacci sayılarının bazılarıdır.

2.4.1. Lemma: x bir reel sayı ve F_n sayısı Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 1 = 0$$

denklemini sağlayan x değerleri

$$\mathrm{x}^{\mathrm{n}} - \mathrm{x}F_n - F_{n-1} = 0 \qquad (1.2)$$

eşittliğini $n \geq 1$ iken sağlar.

İspat: $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere tümevarım kullanarak ispat yapılırsa,

$n = 1$ için $\mathrm{x}^1 - \mathrm{x} - 0 = 0$ eşitliği doğru olur.

$n = 2$ için $F_2 = 1$ ve $F_1 = 1$ olduğundan $\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}F_2 - F_1 = 0$ ifadesi
$\mathrm{x}^2 = \mathrm{x} + 1$ eşitliğini verir.

Lemmada verilen ifadenin herhangi bir n değeri için doğru olduğunu kabul edildi.

$n + 1$ için doğruluğu incelenirse,

$$\mathrm{x}^{\mathrm{n}+1} - \mathrm{x}F_{n+1} - F_n = 0$$

eşitliğine ulaşılması gerekir. Kabuldeki $\mathrm{x}^{\mathrm{n}} - \mathrm{x}F_n - F_{n-1} = 0$ ifadesinin her iki tarafı x ile çarpıldı.

$$\mathrm{x}^{\mathrm{n}+1} - \mathrm{x}^2 F_n - xF_{n-1} = 0 \tag{1.2}$$

eşitliği elde edildi. $n = 2$ için elde edilden $\mathrm{x}^2 = x + 1$ eşitliği (1.2)'de yerine konur ve

$$\mathrm{x}^{\mathrm{n}+1} - (x + 1)F_n - xF_{n-1} = 0$$

elde edilir. $(x + 1)$ ifadesi dağıtılıp tekrar (x) parantezine alınır ve

$$\mathrm{x}^{\mathrm{n}+1} - x(F_n + F_{n-1}) + F_n = 0 \tag{1.3}$$

eşitliği elde edilir. $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ eşitliği (1.3)'te yerine yazılırsa istenen

$$\mathrm{x}^{\mathrm{n}+1} - \mathrm{x}F_{n+1} - F_n = 0 \tag{1.4}$$

sonucuna ulaşılır.

Fransız matematikçi Jacques Philippe Marie Binet 1843 yılında Fibonacci sayıları için 'Binet Formülü'olarak bilinen formülü yazmıştır.

2.4.2. Fibonacci Sayıları İçin Binet Formülü

$\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 1 = 0$ denkleminin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ve F_n Fibonacci sayısı olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

eşitliği sağlanır (Koshy 2001).

İspat: Lemmadan elde edilen eşitliğe göre $\alpha \;\; ve \;\; \beta$ sayıları

$$\alpha^{\mathrm{n}} - \alpha F_n - F_{n-1} = 0$$

$$\beta^{\mathrm{n}} - \beta F_n - F_{n-1} = 0$$

eşitliklerini sağlar. Her iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\alpha^{\mathrm{n}} - \beta^{\mathrm{n}} = F_n(\alpha - \beta)$$

ve $(\alpha - \beta)$ ifadesi karşı tarafa atılırsa,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ifadesi elde edilir (Koshy 2001).

2.4.3. Fibonacci Sayıları için Üreteç Fonksiyonu

Fibonacci sayıları için üreteç fonksiyonu oluşturuldu. Tam sayı dizilerinde kullanılan yöntemle,

$$F(x) = F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + \cdots + F_nx^n + \cdots$$

olsun. O halde,

$$(1 - \mathrm{x} - \mathrm{x}^2)F(x) = F(x) - xF(x) - x^2F(x)$$

$$F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^44 + \cdots$$

$$-F_1x^2 - F_2x^3 - F_3x^4 - F_4x^5 - \cdots$$

$$-F_1x^3 - F_2x^4 - F_3x^5 - F_4x^6 - \cdots$$

olup ortak paranteze alma işlemleri yapılırsa,

$$(1 - \mathrm{x} - \mathrm{x}^2)F(x) = F_1x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 +$$

$$(F_4 - F_3 - F_2)x^4 + (F_5 - F_4 - F_3)x^5 + \cdots +$$

$$(F_{n-1} - F_{n-2} - F_{n-3})x^{n-1} + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n + \cdots$$

ve ifadesinde Fibonacci sayılarının (1.1) tanımı kullanılarak

$$(1 - \mathrm{x} - \mathrm{x}^2)F(x) = F_1 x = x$$

eşitliği bulunur. Yukarıdaki işlemlerden Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - \mathrm{x} - \mathrm{x}^2}$$

elde edilir (Horadam 1965).

2.4.4. Fibonacci Sayılarının Matrislerle İlişkisi

Fibonacci sayıları ve matrisler arasındaki ilişki Fibonacci Q matrisi ile ilişkilendirilir.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Q matrisinin kuvvetleri alındığında matrisin içindeki sayıların Fibonacci sayıları olduğu görülür.

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

elde edlilir.

Bu ifadenin genel hali aşağıdaki teoremde tümevarımla ispatlandı.

2.4.5. Teorem: $n \geq 1$ için $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmk üzere

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \text{‘dir.}$$

İspat: Tümevarım ilkesi ile ispat yapılırsa,

$n = 1$ için iddia $Q^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$ doğrudur. Şimdi $n = k$ için iddianın doğruluğu kabul edilir.

$n = k + 1$ için de doğru olduğunu görelim.

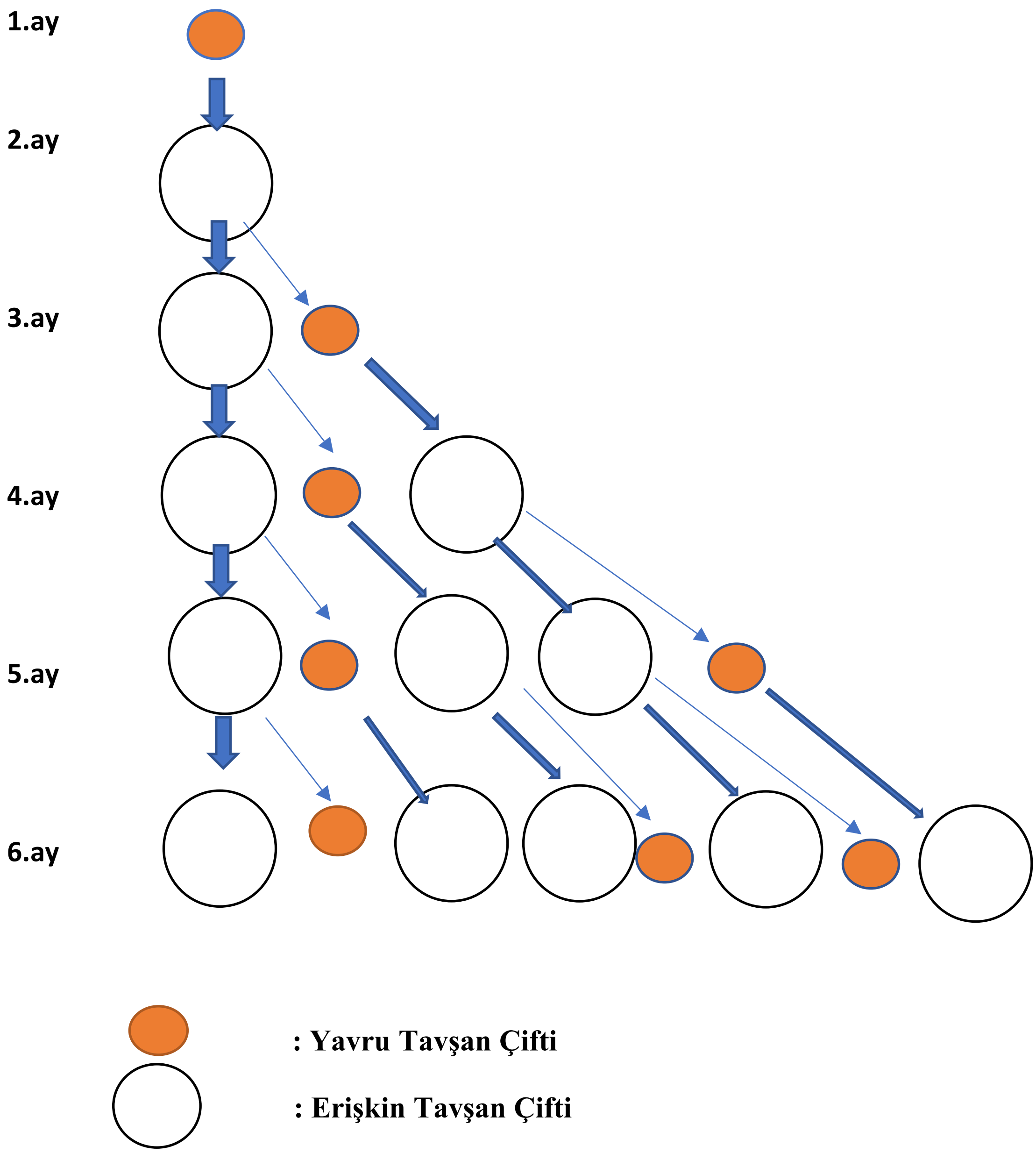
$$Q^{k+1} = Q^k Q = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

elde edilir. $n = k + 1$ için ifadenin doğruğu gösterildi.

2.4.6. Tavşan Problemi

Ergin bir tavşan çiftinin her ay yeni bir yavru çift verdikleri ve yeni doğan çiftin bir ay zarfında tam ergenliğe eriştikleri varsayımı ile, yavru olan bir tavşan çiftinden başlayıp, ilerleyen aylarda çiftlerin sayısı ne olur?

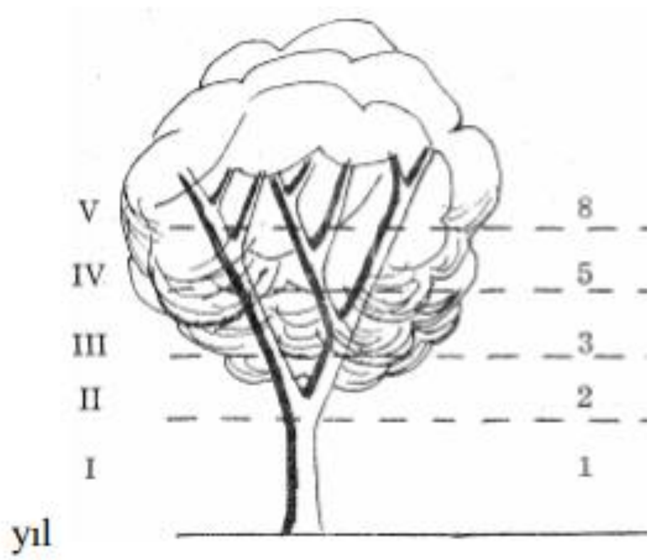
2.4.7. Fibonacci Tavşan Diyagramı



Şekil 2.1: Fibonacci Tavşan Diyagramı

2.4.8. Doğada Fibonacci

Fibonacci sayıları, doğa ile matematiğin ilişkisini somut olarak gösteren nadir araştırma konularından biri olmuştur. Bitkilerde ve doğada birçok yerde bu sayılara rastlanır. Bu sayıların en önemli özelliklerinden biri de çok eski çağlarda mimari ve resimde sıkça rastlanan 'Altın Oran' ile olan ilişkisidir. Ardışık iki Fibonacci sayısının bölümü, altın oran olarak bilinen $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033\ldots$ sayısına yakınsar (Akyüz 2013).



Şekil 2.2: Fibonacci Ağacı

2.4.9. Fibonacci ve Dünya

Fibonacci sayılarını nerelerde görebiliriz? Zerger ekvatorun dünyanın mil cinsinden çapının yaklaşık olarak iki Fibonacci sayısının çarpımı olarak bulunabildiğini fark etmiş. Bu sayılara hem mil hem kilometre cinsinden Fibonacci sayıları ile ulaşmış.

Fibonacci sayıları:

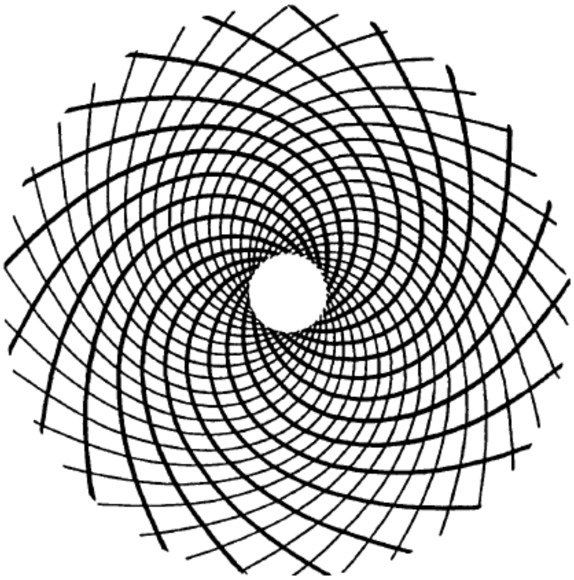
$55 \cdot 144 = 7920$ mil ve $89 \cdot 144 = 12.816$ kilometre (Koshy 2001).

2.4.10. Fibonacci ve Çiçekler

Birçok çiçeğin taç yapraklarının sayısı genellikle bir Fibonacci sayısıdır. Örneğin Şekil-1'de gösterilen çiçeklerdeki yaprak sayısı. Enchanter'ın itüzümünün iki yaprağı vardır, iris ve trillium üç, yabani gül beş ve delphinium ve kozmosun sekiz yaprağı vardır. Çoğu papatyanın 13, 21 veya 34 yaprağı vardır. 55 ve 89'lu yaprakları olan papatyalar bile vardır. Buradaki sayılar Fibonacci sayılarıdır.

Şekil 2.3: Çiçeklerde Fibonacci

Çam kozalakları, enginarlar ve ananaslardaki ölçek desenleri mükemmel Fibonacci sayılarına örneklerden bazılarıdır. Ölçekler aslında yakından paketlenmiş modifiye yapraklardır. Kısa saplarda bulunurlar ve parastichie adı verilen iki spiral kümesi oluştururlar. Bazı spiraller ayçiçeğinde olduğu gibi saat yönünde, diğerleri saat yönünün tersindedir. Sarmal sayılar genellikle bitişik Fibonacci sayılarıdır. Bazı konilerin saat yönünde 3 spirali vardır ve 5 adet saat yönünün tersine spiral; bazılarında 5 ve 8; bazılarında 8 ve 13 adet bulunur. Şekil-2.3'te ayçiçeğindeki sarmal desen üzerindeki ölçek desenlerini göstermektedir.



Şekil 2.4: Ayçiçeğindeki sarmal desen

Fibonacci sayılarının bazı terimleri yardımı ile başka diziler de tanımlanmıştır.

2.5. Lucas Teoremi

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1\ \ ve\ \ n > 1 \text{ olmak üzere}$$

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

ile tanımlanan $\{L_n\}$ $n \in N$ sayı dizisine Lucas sayı dizisi denir. Lucas için de binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir (Koshy 2001).

2.5.1. Teorem(Lucas Özdeşliği):

n pozitif tam sayı ve F_i Fibonacci dizisinin i. terimi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

eşitliği sağlanır (Koshy 2001).

İspat: Fibonacci yineleme bağıntısını (1.1) kullanılarak;

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

.

.

.

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

eşitlikleri alt alta toplanırsa;

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

elde edilir.

2.5.2. Teorem (2.Lucas Özdeşliği):

n pozitif tam sayı ve F_i Fibonacci dizisinin i. terimi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$$

eşitliği sağlanır (Koshy 2001).

İspat: İspatta tümevarım kullanıldı.

$n = 1$ için $F_1 = F_2$ ifadesi doğrudur.

$n = k$ için eşitlik doğru kabul edillir.

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2k-1} = F_{2k}$$

eşitliği sağlanır. $n = k + 1$ için verilen eşitlik sağlanır mı?

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2k-1} + F_{2k+1} &= F_{2k} + F_{2k+1} \\ &= F_{2k+2} \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Örneğin;

$$\sum_{i=1}^{10} F_{2i-1} = F_{20} = 6765$$

sayısına ulaşılır.

2.5.3. Sonuç (Lucas): n pozitif tam sayı ve F_i Fibonacci dizisinin i. terimi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

eşitliği sağlanır (Koshy 2001).

İspat: n pozitif tam sayı ve F_i Fibonacci dizisinin i. terimi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = \sum_{i=1}^{2n} F_i - \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}$$

$$= (F_{2n+2} - 1) - F_{2n}$$

(1.12 ve 1.13'ten dolayı)

$$= (F_{2n+2} - F_{2n}) - 1$$

$$= F_{2n+1} - 1$$

2.6. Cassini Teoremi

n pozitif tam sayı ve F_i Fibonacci dizisinin i. terimi olmak üzere,

$$F_{n-1}F_{n+1} - {F_n}^2 = (-1)^n \qquad , \; n \geq 1$$

eşitliği sağlanır (Koshy 2001).

İspat: n pozitif tam sayı ve F_i Fibonacci dizisinin i. terimi olmak üzere,

$$F_0F_2 - {F_1}^2 = 0.1 - 1 = -1 = (-1)^1$$

eşitliğinin doğruluğu $n = 1$ için açıktır. Herhangi bir k pozitif sayısı için doğru olsun,

$$F_{k-1}F_{k+1} - {F_k}^2 = (-1)^k$$

daha sonra,

$$F_kF_{k+2} - F^2{}_{k+1} = (F_{k+1} - F_{k-1})(F_k + F_{k+1}) - F^2{}_{k+1}$$

$$= F_kF_{k+1} + F^2{}_{k+1} - F_kF_{k-1} - F_{k-1}F_{k+1} - F^2{}_{k+1}$$

$$= F_kF_{k+1} - F_kF_{k-1} - F^2{}_k - (-1)^k$$

$$= F_kF_{k+1} - F_k(F_{k-1} + F_k) + (-1)^{k+1}$$

$$= F_kF_{k+1} - F_kF_{k+1} + (-1)^{k+1}$$

$$= (-1)^{k+1}$$

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Kümeler

Var olduğundan beri insanoğlu matematikte olmasa da günlük yaşamında küme kavramıyla aşinaydı elbette, örneğin koyun sürüsü, buğday tarlası, kabile, bir sepet yumurta gibi sözler küme fikrinin çeşitli tezahürleridir. Ancak matematiksel anlamda kümenin oldukça yakın bir geçmişi vardır. Kümelerden açık açık ilk kez 1847'de şimdiki Çek Cumhuriyeti'nin başkenti Prag'da yaşamış olan matematikçi Bolzano (1781-1848) söz etmiştir. O zamanlar sonsuz sayıda ögesi olan kümelerin çelişki içereceğinden, yani matematikte bir çelişkiye yol açacağından korkuluyordu. Örneğin doğal sayılarla çift doğal sayıların kuralıyla eşleştirilebilmesi bilim insanlarını korkutuyordu ne de olsa 2N kümesinde N kümesinden daha az sayı olmalıydı, yarısı kadar! 19'uncu yüzyılın sonlarına doğru, yani bundan 100 küsur yıl önce, Alman matematikçi Georg Cantor (1845-1918) sonsuz kümelerden korkmamış tam tersine üstlerine üstlerine gitmiş, onları anlamaya çalışmış. Örneğin N ile 2N kümesinin (yukarıdaki eşlemeden dolayı) aynı sayıda ögesi olduğuna hükmetmiş ve bugünkü matematiksel anlamına çok yakın bir kümeler kuramını matematik camiasının ağır baskılarına karşı koyarak neredeyse tek başına geliştirmiştir. Nitekim zamanın birçok ünlü matematikçisi kümeler kuramını gereksiz bir uğraş olarak görmüştür. Kümeler kuramıyla gençlik gerçek matematikten uzaklaştırılıp, gereksiz ve eften püften düşüncelere yönlendiriliyor diye düşünülüyordu (Nesin 2017).

Kümeler kuramını ciddiye alanlar matematiği getirisi olmayan bir alana sürüklemekle suçlanıyordu. O çağın en ünlü ve en etkin iki matematikçisi Alman David Hilbert ve Fransız Henri Poincar´e matematiğin özüyle ilgili bu savaşta ayrı cephelerde yer almıştır. Savaşı Hilbert kazanmıştır; bugün kümeler kuramı matematikte merkezi bir konuma gelmiştir. Matematiğin klasik dallarının birçok önemli problemi çözümünü kümeler kuramında bulmuştur.

Kümeler kuramı varlığını sonsuz kümelere borçludur. Cantor'dan önce sonsuz kümelerin varlığından kuşkulanılıyordu, kuşkulanmayanlar da sonsuz kümelerle işlem yapmaya çekiniyorlardı ya da iki sonsuz küme arasında matematiksel olarak (ögeleri dışında) bir fark göremiyorlardı. Cantor 1874'te yayımladığı bir makalesinde iki sonsuz küme arasında (öge sayısı açısından mesela) derin farklar olabileceğini göstererek matematikte bir çığır açmıştır. Kümeler kuramının gelişimi on yıllar boyunca matematik dünyasında matematiksel ve felsefi düzeyde sert tartışmalara, hatta bilimsel kavgalara neden olmuştur.

Cantor'un (matematiksel olduğu hiç iddia edilmeyen) küme tanımı şöyleydi: "Küme, algımızın ya da düşüncemizin açık ve net nesnelerinden oluşan bir topluluktur". Oysa günümüzün matematiğinde "küme" kavramı ve "bir kümenin öğesi olmak" ilişkisi matematiksel olarak tanımlanmadan kabul edilmesi gereken kavramlar olarak kabul edilir. Matematiğin diğer tüm kavramları bu iki kavrama dayandırılarak tanımlanabilir. Bunu şöyle algılayabiliriz: Tek bir kelime bilmediğiniz bir yabancı dilden, örneğin Macarcadan bir kelimenin anlamını Macarcadan Macarcaya bir sözlüğe bakarak anlayamazsınız; biraz Macarca bilmelisiniz ki bir kelimenin anlamını sözlüğe bakarak anlayabilesiniz. ˙İşte "küme" ve $\in$ simgesiyle gösterilen "öğesi olmak" kavramları, matematikçenin tanımlanmadan bilindiği varsayılan kavramlarıdır. Bu iki kavram kullanılarak matematiğin diğer tüm kavramları karışıklığa yer vermeyecek biçimde tanımlanabilirler.

Alman matematikçi Georg Cantor (1845-1918) 1878 yılında yayımladığı makalesinde kümeyi, ''iyi tanımlanmış birbirinden farklı nesneler topluluğu'' şeklinde tanımlamıştır. Tanımda verilen ''iyi tanımlama'' ifadesi ortak özellikleri ile verilen bir kümedeki nesnelerin herkes tarafından aynı şekilde anlaşılması anlamına gelir (Nesin 2017).

3.1.1. Alt Küme Kavramı

Bir A kümesinin bütün elemanları bir B kümesinin de elemanı ise A kümesine B kümesinin alt kümesi denir. $A \subset B$ ile gösterilir.

Alt kümelerin durumlarının incelenmesi matematikte her zaman yeni problemler ve cevaplar doğurmuştur.

Bir sınıftaki n tane öğrenciye teneffüste isteyen dışarı çıkabilir denildiğide teneffüs anında sınıfta bulunan öğrenci(ler) kaç farklı durum oluşturur? Her öğrencinin 2 şansı vardır. Ya içeride kalacaktır ya da dışarı çıkacaktır. Dolasıyla n tane 2 farklı durumun çarpımı ile sınıfta farklı görüntüler oluşacaktır. Bu görüntülerin her biri ilk durumdaki sınıfın alt kümelerini oluşturacaktır. Çünkü teneffüste sınıfta olan görüntü ders anında olanlardan biridir. Örneğin herkes dışarı çıkmak isterse sınıf boş kalacaktır ki bu da boş sınıfa yani boş kümeye eşit olacaktır. Her durumda sınıfta sadece bir kişinin kalması bir elemanlı alt kümeleri temsil edecektir. Bu şekilde tüm durumlar incelenebilir. Durum sayısının her biri sınıfın alt kümesi olarak nitelendirilir. Bu durumların sayısı kombinasyon işlemleri ile de bulunur.

Öğrencilerin sınıftaki durumlarını daha özel incelemek istersek bunu yine sayma metotları ile yapabiliriz. Bir sınıftaki n tane öğrencinin teneffüste dışarı çıkmak istemesi örneğini tekrar ele alalım. Sınıfta yalnızca (k) tane öğrencin kalmasını isteyelim. Dolayısıyla sınıfta k tane sandalye bırakalım. İlk sandalye için n farklı öğrencinin oturma şansı vardır. İkinci sandalye için $(n-1)$ tane, üçüncü sandalye için $(n-2)$ tane öğrencinin oturma şansı vardır. Bu şekilde devam edersek k. sandalye için $(n-k+1)$ tane öğrencinin oturma şansı olur. Sınıftaki k tane sandalyede

$$(n)(n-1)\ (n-2)(n-3)\ \dots\ (n-k+1)$$

tane farklı durum oluşur. k tane öğrencinin kendi içinde yer değiştirmeleri sınıftaki öğrencilerin kimliğini değiştirmeyeceği için yukarıdaki durum sayısını $(k!)$'ya bölerek

$$\frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)\ \dots\ (n-k+1)}{k!}$$

sınıfta teneffüste olabilecek (k) tane farklı öğrenci sayısını buluruz. Bu işlem sınıfta teneffüste kaç farklı şekilde sınıfta k tane öğrencinin bulunacağını bize verir. Sınıfta bulunan öğrencilerin durumlarının her birinin sınıfın alt kümesi olduğu belirtilmişti. Dolayısıyla $'n'$ elemanlı bir kümenin (k) elemanlı alt küme sayısı;

$$\frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)\ \dots\ (n-k+1)}{k!}$$

kadardır. Bu eşitlik de aynı zamanda $\binom{n}{k}$ ifadesine eşittir. Bu yüzden kümeler kuramında alt küme sayıları kombinasyon hesabı ile bulunabilir.

Alt kümelerin istenilen sayıda bulunabilmesinin yanı sıra elemanların arasındaki ilişkilere dayalı daha özel alt kümeler problemleri de doğmuştur. Örneğin $1'den\ n'e$ kadar doğal sayıların bulunduğu bir kümede elemanlar arasında özel şartlar istenilen alt kümeler aranmıştır. Bunlar;

i) Elemanların sadece tek olması,

ii) Elemanların sadece çift olması,

iii) Elemanlar arası belirli bir farkın olması

iv) Elemanlar arası belirli bir farkın olmaması

gibi olabilir. Bu tarz problemlerin çözümleri aynı zamanda günlük hayatta karşılaşabileceğimiz bazı problemlerin çözümünde kullanılan tekniklerdir.

Çalışmamda tam sayı dizilerinin kümeler teorisi ile olan ilişkisi kullanılarak günlük hayatta karşılaşılan bir probleme çözüm aranıldı. Havacılık sektöründe günümüzde yaşanan bir problemi ele alındı. Havaalanlarında uçakların iniş ve kalkış esnasında izledikleri kuralları incelendi. Bu kurallar hava kontrol merkezinde bulunun kontrolörler tarafından denetlenen uçakların bazı özelliklerine göre belirlenen kurallardır. Uçağın büyüklüğü, kapasitesi, kanat genişliği, ağırlığı, motor gücü gibi bazı özellikler kendinden önce veya sonra gelen uçağın kalkışını veya inişini belirleyen etkenlerdir. Bu etkenler kontrolörün belirlediği öncelik sırasına göre işleme alınan etkenlerdir.

Resim 2.3: Havaalanında iniş kalkış sırasında uçaklar

Pilotlardan uçakların iniş ve kalkışta hangi şartlara göre havada ya da yerde sıralanmaları gerektiği öğrenildi. Her uçağın davranışının farklı olduğunu görüldü. Uçaklar ağırlık genişlik ve motor güçleri gibi faklı boyutlara göre arkasındakinin kalkış için ne kadar süre ya da mesafe bırakmaları gerektiğini belirleyen etkenler olduğu ve bu aradaki kalan mesafeleri ya da süreyi çalışmada istenmeyen fark olarak ele alınabileceği fark edildi. Genellemesi yapılan problemin çözümünün bir havaalanının belli bir zaman diliminde kaç farklı şekilde kaç farklı uçak çeşidine iniş ya da kalkışa izin verebileceğine yardımcı olacak bir çözüm olacağı düşünüldü.

3.1.2. Teorem (Alt Küme Sayısı): $n \geq 0$ ve n bir doğal sayı olmak üzere n elemanlı bir kümenin alt küme sayısı 2^n'dir.

İspat: $A = \{1,2,3,4, \dots, \mathrm{n}\}$ kümesinin alt kümeleri;

0 elemanlı alt kümeleri : $\emptyset$ **:** $\mathrm{C(n,0)}$

1 elemanlı alt kümeleri : $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$ **:** $\mathrm{C(n,1)}$

2 elemanlı alt kümeleri : $\{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{n-1, n\}$: $C(n,2)$.

.

.

n elemanlı alt kümeleri : $\{1,2,3,4, \dots, n\}$ **:** $\mathrm{C(n,n)}$

Alt kümelerin toplamı : $C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,n)$ olur.

Binom açılımındaki

$$(1+\mathrm{x})^{\mathrm{n}} = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1} + C(n,2)x^{n-2} + \cdots + C(n,0)x^0$$

eşitlikte $x = 1$ yazılırsa

$$(1+1)^{\mathrm{n}} = \mathrm{C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,n)}$$

eşitliğini elde edilir. Buradan

$$C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,n) = 2^n$$

olur.

Örnek 1. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ kümesinin alt küme sayısı $2^{10} = 1024$ olur.

Örnek 2. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ kümesinin,

i) 3 elemanlı $n = 10$ için $C(10,3) = 120$ alt kümesi vardır.

ii) 4 elemanlı $n = 10$ için $C(10,4) = 210$ alt kümesi vardır.

iii) 6 elemanlı $n = 10$ için $C(10,6) = 210$ alt kümesi vardır.

3.bölümde n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin birbirleri ile olan ilişkileri daha detaylı olarak incelendi.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde elemanları aritmetik veya geometrik dizi oluşturan bir kümede alt küme elemanlarının farklarının durumlarının tam sayı dizileri ile olan ilişkilerinin incelenmesi detaylı bir şekilde yapıldı. İkinci bölümdeki verilen sınıf örneğinde,sınıfta belli sayıda öğrenci belirlenip öğrencilere numara verildi. Öğrenci numaraları 1'den 100'e kadar verilirse ve sınıfta teneffüste kalması gereken üç öğrenci istnilip öğrenci numaraları aritmetik dizi olan kaç durum vardır sorusu incelendi.

4.1. Elemanları Aritmetik veya Geometrik Bir Dizi Oluşturan Kümelerin Alt Küme Elemanlarının İncelenmesi

4.1.1.Problem: $A = \{1,2,3,\ldots,100\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde, alt kümelerin elemanları bir aritmetik dizi oluşturur?

Çözüm:

Elemanları $a < b < c$ ile gösterilsin. Buna göre $r \in Z^{+}$ için,

$$a, b = a + r, c = a + 2r$$

şeklinde olmalıdır.

$$a + 2r \leq 100 \quad \Rightarrow \quad a \leq 100 - 2r \quad \text{olmalıdır.}$$

$$a = 1 \text{ ve } a = 2 \quad \text{ise,} \quad r \in \{1,2,\ldots,49\}$$

$$a = 3 \text{ ve } a = 4 \quad \text{ise,} \quad r \in \{1,2,\ldots,48\}$$

$$a = 5 \text{ ve } a = 6 \quad \text{ise,} \quad r \in \{1,2,\ldots,47\}$$

.

.

.

$$a = 97 \text{ ve } a = 98 \quad \text{ise,} \quad r \in \{1\} \text{ olmalıdır.}$$

İstenilen alt küme sayısı

$$2(49 + 48 + 47 + \ldots + 1) = 2.\frac{49.50}{2} = 2450 \quad \text{bulunur.}$$

4.1.2. Problem: 17 kişilik bir sınıfta teneffüste sınıfta kalacak öğrencilerden herhangi ikisinin numaraları arasındaki farkın dört olmadığı kaç farklı durum vardır?

Çözüm: Soru P=$\{1,2,3,\ldots,17\}$ kümesinin, farkları 4 olan herhangi iki eleman içermeyen kaç alt kümesi vardır? Sorusu ile aynı yapıdadır.

$$A = \{1,5,9,13,17\}$$
$$B = \{2,6,10,14\}$$
$$C = \{3,7,11,15\}$$
$$D = \{4,8,12,16\}$$

şeklinde aralarındaki fark 4 olacak şekilde 4 gruba ayrılsın.

Önce A kümesinden, istenen şekilde seçilebilecek alt kümelerin sayısı bulundu.

Sıfır elemanlı : $\emptyset$

Bir elemanlı : $\{1\},\{5\},\{9\},\{13\},\{17\}$

İki elemanlı : $\{1,9\},\{1,13\},\{1,17\},\{5,13\},\{5,17\},\{9,17\}$

Üç elemanlı : $\{1,9,17\}$

Yani A kümesinden $1+5+6+1=13$ tane küme, koşulu sağlar.

Benzer şekilde B kümesi için bakılırsa,

Sıfır elemanlı : $\emptyset$

Bir elemanlı : $\{2\},\{6\},\{10\},\{14\}$

İki elemanlı : $\{2,10\},\{2,14\},\{6,14\}$

olmak üzere 8 küme koşulu sağlar. C ve D kümelerinin her biri de 4 elemanlı olduğundan, bu iki kümenin her biri de aynı şekilde koşulu sağlar. Dolayısı ile bu kümelerin herhangi birleşimleri de koşulu sağlayacağından, istenen şekilde

$$13.8.8.8 = 6656$$

tane alt küme vardır.

Sonraki aşamada problemlerin genel halleri tanımlanıp ispatları yapılmıştır.

4.1.3. Teorem: $\mathrm{n} = (\mathrm{m}-1)\mathrm{k}+\mathrm{j}\,,\mathrm{j} = 0,1,2,3,\dots,(\mathrm{m}-2)$ olmak üzere $A = \{1,2,3,\dots,n\}$ kümesinin elemanları aritmetik dizi oluşturan $m\ (m \geq 2)$ elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$\frac{(\mathbf{n}-\mathbf{j}).\left[\mathbf{n}-\left(\mathbf{m}-(\mathbf{j}+\mathbf{1})\right)\right]}{\mathbf{2}.\,(\boldsymbol{m}-\mathbf{1})}$$

tanedir.

İspat: Elemanları $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ olarak gösterisin. $m = 1$ olursa sorunun cevabı n olur. Bu yüzden $1 < m \leq n$ için, elemanlar

$$a_1 = a\ ,\ a_2 = a + r\ ,\ a_3 = a + 2r\ ,\ \dots\ ,\ a_m = a + (m-1)r$$

şeklinde olmalıdır. n sayısı ve m sayısı arasında aşağıdakilerden birisi gibi bir ilişki vardır.

$n = (m-1)k$, $n = (m-1)k + 1$,$n = (m-1)k + 2$, … , n=$(m-1)k + (m-2)$

$2 \leq k$ ve $k \in Z^+$ şeklindedir.

Bu durumlar ayrı ayrı incelenirse;

i) $n = (m-1)k$ olsun. Bu durumda

$A = \{1,2,3,\ldots,(m-1)k\}$ $r \in Z^+$için $a, a+r, a+2r, \ldots, a+(m-1)r$ şeklinde yazılabilen elemanların en büyüğü olan,

$$a + (m-1)r \leq (m-1)k$$

olmalıdır.

$a = 1$ ise $r = \{1,2,3,\ldots,k-1\}$

$a = 2$ ise $r = \{1,2,3,\ldots,k-1\}$

$a = 3$ ise $r = \{1,2,3,\dots,k-1\}$

.

.

.

$a = m-1$ ise $r = \{1,2,3,\ldots,k-1\}$

$a = m$ ise $r = \{1,2,3,\ldots,k-2\}$

$a = m + 1$ ise $r = \{1,2,3,\dots,k-2\}$

$a = m + 2$ ise $r = \{1,2,3,\dots,k-2\}$

.

.

.

$a = 2m - 2$ ise $r = \{1,2,3,\dots,k-2\}$

.

.

.

$a = n - (2m - 3)$ ise $r = \{1\}$

$a = n - (2m - 4)$ ise $r = \{1\}$

$a = n - (2m - 5)$ ise $r = \{1\}$

.

.

.

$a = n - (m - 1)$ ise $r = \{1\}$

$n = (m-1)k$ şeklinde iken A kümesinin istenen özellikteki alt küme sayısı, $(m-1)$ tane $1 + 2 + 3 + \dots + (k-1)$ sayısı kadardır. Yani

$$(m-1)\frac{(k-1)k}{2}$$

ii) $n = (m-1)k + 1$ olsun. Bu durumda

$$A = \{1,2,3,\dots,(m-1)k+1\}$$

$r \in Z^{+}$ için $a, a+r, a+2r, \dots, a+(m-1)r$ için

$$a + (m-1)r \leq (m-1)k + 1$$

olmalıdır.

$a = 1$ ise $r = \{1,2,3,\dots,k-1,k\}$

$a = 2$ ise $r = \{1,2,3,\dots,k-1\}$

$$a = 3 \qquad \text{ise} \qquad r = \{1,2,3,\ldots,k-1\}$$

.

.

.

$$a = m - 1 \qquad \text{ise} \qquad r = \{1,2,3,\ldots,k-1\}$$

$$a = m \qquad \text{ise} \qquad r = \{1,2,3,\ldots,k-1\}$$

$$a = m + 1 \qquad \text{ise} \qquad r = \{1,2,3,\ldots,k-2\}$$

$$a = m + 2 \qquad \text{ise} \qquad r = \{1,2,3,\ldots,k-2\}$$

$$a = m + 3 \qquad \text{ise} \qquad r = \{1,2,3,\ldots,k-2\}$$

.

.

.

$$a = 2m - 1 \qquad \text{ise} \qquad r = \{1,2,3,\ldots,k-2\}$$

.

.

.

$$a = n - (2m - 3) \qquad \text{ise} \qquad r = \{1\}$$

$$a = n - (2m - 4) \qquad \text{ise} \qquad r = \{1\}$$

$$a = n - (2m - 5) \qquad \text{ise} \qquad r = \{1\}$$

.

.

.

$$a = n - (m - 1) \qquad \text{ise} \qquad r = \{1\}$$

$n = (m-1)k + 1$ şeklinde iken A kümesinin istenen özellikteki alt küme sayısı,

$(m-1)$ tane $1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1)$

1 tane k

sayılarının toplamı kadardır. Yani

$$(m-1)\frac{(k-1)k}{2}+k$$

iii) $n=(m-1)k+2$ olsun. Bu durumda

$$A=\{1,2,3,\ldots,(m-1)k+2\}$$

$r\in Z^{+}$ için $a,a+r,a+2r,\ldots,a+(m-1)r$ şeklindeki elemanların en büyüğü olan,

$$a+(m-1)r\leq(m-1)k+2$$

olmalıdır.

$a=1$ ise $r=\{1,2,3,\ldots,k\}$

$a=2$ ise $r=\{1,2,3,\ldots,k\}$

$a=3$ ise $r=\{1,2,3,\ldots,k-1\}$

$a=4$ ise $r=\{1,2,3,\ldots,k-1\}$

.

.

.

$a=m$ ise $r=\{1,2,3,\ldots,k-1\}$

$a=m+1$ ise $r=\{1,2,3,\ldots,k-1\}$

$a=m+2$ ise $r=\{1,2,3,\ldots,k-2\}$

$a=m+3$ ise $r=\{1,2,3,\ldots,k-2\}$

$a=m+4$ ise $r=\{1,2,3,\ldots,k-2\}$

.

.

.

$a=2m$ ise $r=\{1,2,3,\ldots,k-2\}$

.

.

.

$a = n - (2m-3)$ ise $r = \{1\}$

$a = n - (2m-4)$ ise $r = \{1\}$

$a = n - (2m-5)$ ise $r = \{1\}$

.

.

.

$a = n - (m-1)$ ise $r = \{1\}$

$n = (m-1)k + 2$ şeklinde iken A kümesinin istenen özellikteki alt küme sayısı,

$(m-1)$ tane $1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1)$ ve 2 tane k sayılarının toplamı kadardır.

Yani $(m-1)\frac{(k-1)(k)}{2} + 2k$ istenen formüldür.

.

.

.

iv) $n = (m-1)k + (\mathrm{m}-2)$ olsun. Bu durumda

$$A = \{1,2,3, \ldots (m-1)k + (m-2)\}$$

$r \in Z^{+}$ için $a, a+r, a+2r, \ldots, a+(m-1)r$ şeklindeki elemanların en büyüğü olan

$$a + (m-1)r \leq (m-1)k + (m-2)$$

olmalıdır.

$a = 1$ ise $r = \{1,2,3, \ldots, k\}$

$a = 2$ ise $r = \{1,2,3, \ldots, k\}$

$a = 3$ ise $r = \{1,2,3, \ldots, k\}$

.

.

.

$a = m - 2$ ise $r = \{1,2,3, \dots, k\}$

$a = m - 1$ ise $r = \{1,2,3, \dots, k - 1\}$

$a = m$ ise $r = \{1,2,3, \dots, k - 1\}$

.

.

.

$a = 2m - 3$ ise $r = \{1,2,3, \dots, k - 1\}$

$a = 2m - 2$ ise $r = \{1,2,3, \dots, k - 2\}$

$a = 2m - 1$ ise $r = \{1,2,3, \dots, k - 2\}$

$a = 2m$ ise $r = \{1,2,3, \dots, k - 2\}$

.

.

.

$a = 3m - 4$ ise $r = \{1,2,3, \dots, k - 2\}$

.

.

.

$a = n - (2m - 3)$ ise $r = \{1\}$

$a = n - (2m - 4)$ ise $r = \{1\}$

$a = n - (2m - 5)$ ise $r = \{1\}$

.

.

.

$a = n - (m - 1)$ ise $r = \{1\}$

$n = (m - 1)k + (m - 2)$ şeklinde iken A kümesinin istenen özellikteki alt küme sayısı,

$(m - 1)$ tane $1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1)$

$(m-2)$ tane k

sayılarının toplamı kadardır.

Yani $(m-1)\frac{(k-1)(k)}{2}+(m-2)k$ istenilen formüldür.

$A=\{1,2,3,\ldots,n\}$ kümesinin m elemanlı alt kümelerinin elemanları aritmetik dizi oluşturanların sayısını veren formül tablosu oluşturuldu.

m, n, $k \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $2 \leq k$, $1<m<n$ olmak üzere eleman sayısı formatı ile alt küme sayısı arasındaki ilişkiyi veren bir tablo oluşturuldu. (m=1 için n, n=1 için 1'dir)

Eleman Sayısı Formatı	**Alt küme sayısı**
$n=(m-1)k$	$\frac{(m-1)k(k-1)}{2}$
$n=(m-1)k+1$	$\frac{(m-1)k(k-1)}{2}+k$
$n=(m-1)k+2$	$\frac{(m-1)k(k-1)}{2}+2k$
. . .	. . .
$n=(m-1)k+(m-2)$	$\frac{(m-1)k(k-1)}{2}+(m-2)k$

Çizelge 4.1: Formül Tablosu

Tablonun genel hali $\mathrm{n}=(\mathrm{m}-1)\mathrm{k}+\mathrm{j}$, $\mathrm{j}=0,1,2,3,\ldots,(\mathrm{m}-2)$ olmak üzere $A=\{1,2,3,\ldots,n\}$ kümesinin elemanları aritmetik dizi oluşturan m $(m\geq 2)$ elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$\frac{(\mathbf{n}-\mathbf{j}).\left[\mathbf{n}-\left(\mathbf{m}-(\mathbf{j}+\mathbf{1})\right)\right]}{\mathbf{2}.(\boldsymbol{m}-\mathbf{1})}$$

biçimindedir.

Tabloya bazı örnekler;

Örnek 3. $A = \{1,2,3,\ldots,60\}$ kümesinin 3elemanlı alt kümelerinin, elemanları aritmetik dizi oluşturanların sayısı kaçtır?

Çözüm: $n = 60, m = 3$ için formülde yerine konulursa,

$n = 60 = (3-1)30$ şeklinde bulunur.

$k = 30, m = 3$ için,

$\frac{(m-1)k(k-1)}{2} = \frac{(3-1).30.29}{2} = 870$ olur.

Örnek 4. $A = \{1,2,3,\ldots,30\}$ kümesinin 5 elemanlı alt kümelerinin, elemanları aritmetik dizi oluşturanların sayısı kaçtır?

Çözüm: $n = 30, m = 5$

$n = 30 = (5-1).7 + 2$

$k = 7,\ m = 5$ için,

$\frac{(m-1)k(k-1)}{2} + 2k = \frac{4.7.6}{2} + 14 = 98$ olur.

Örnek 5. $A = \{1,2,3,\ldots,95\}$ kümesinin 7elemanlı alt kümelerinin, elemanları aritmetik dizi oluşturanların sayısı kaçtır?

Çözüm: $n = 95, m = 7$

$n = 95 = (7-1).15 + 5$

$k = 15, m = 7$ için,

$\frac{(m-1)k(k-1)}{2} + 5k = \frac{6.15.14}{2} + 5.15 = 705$

olur.

Bir kümenin elemanları 1'den başlama şartı olmadan aritmetik veya geometrik dizi oluştururken kümenin alt kümeleri arası benzer ilişkiler incelendi. İlk olarak elemanları aritmetik dizi oluşturan sonlu bir kümenin elemanları aritmetik dizi oluşturan istenilen sayıda elemanlı alt kümelerin sayısı bulundu.

4.2. Elemanları Aritmetik Dizi Oluşturan Sonlu Bir Kümenin Elemanları Aritmetik Dizi Oluşturan İstenilen Sayıda Elemanlı Alt Küme Sayılarının Bulunması

4.2.1.Teorem : s,r reel sayılar ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$A = \{\mathrm{s}, \mathrm{s} + \mathrm{r}\,, \mathrm{s} + 2\mathrm{r}\,, \mathrm{s} + 3\mathrm{r}\,, \dots, \mathrm{s} + (\mathrm{n} - 1)\mathrm{r}\,\}$$

kümesinde $j = 1,2,3,4,,\dots.,k$ için ilk terimi s+$(a-1)r$ ve ortak farkı dr olan

$$(s + (a-1)r) + (j-1)(dr)$$

ifadesi bir aritmetik dizidir.

İspat: s,r reel sayılar ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$A = \{\mathrm{s}, \mathrm{s} + \mathrm{r}\,, \mathrm{s} + 2\mathrm{r}\,, \mathrm{s} + 3\mathrm{r}\,, \dots, \mathrm{s} + (\mathrm{n} - 1)\mathrm{r}\,\}$$

kümesinin elemanlarını

$$B = \{1,2,3,4, \dots, \mathrm{n}\,\}$$

kümesinin elemanları ile

s$\rightarrow 1$, $s + r \rightarrow 2$, $s + 2r \rightarrow 3$, $s + 3r \rightarrow 4, \dots, s + (n-1)r \rightarrow n$

biçiminde eşleştirme yapıldı. B kümesinden terimleri aritmetik dizi oluşturan bir alt küme alındığında, belirtilen bu eşleşme sonucunda bu alt kümenin, A kümesinde elemanları aritmetik dizi oluşturan bir alt küme ile eşleştiği gösterildi.

$d \in Z^+, j = 1,2,3,4,,\dots,k$ için $a + (j-1)d \in B$ olmak üzere

B kümesinden $K = \{a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+(k-1)d\}$ bir alt küme alındı.

a	$\Rightarrow$	$s+(a-1)r$	$=$	$s+(a-1)r$
$a+d$	$\Rightarrow$	$s+(a+d-1)r$	$=$	$s+(a-1)r+dr$
$a+2d$	$\Rightarrow$	$s+(a+2d-1)r$	$=$	$s+(a-1)r+2dr$
$a+3d$	$\Rightarrow$	$s+(a+3d-1)r$	$=$	$s+(a-1)r+3dr$
$\vdots$		$\vdots$		
$a+(k-1)d$	$\Rightarrow$	$s+(a+(k-1)d-1)r$	$=$	$s+(a-1)r+(k-1)dr$

Eşleşmesinde a ve d pozitif tamsayılar olduğundan $j = 1,2,3,4,,\dots,k$ için

$s+(a+(k-1)d-1)r$ doğal sayı olup

$s+(a+(j-1)d-1)r$ sayısı A kümesinin bir elemanıdır.

Ayrıca $j = 1,2,3,4,,\dots,k$ için ilk terimi s+$(a-1)r$ ve ortak farkı dr olan

$$(s+(a-1)r)+(j-1)(dr)$$

ifadesi bir aritmetik dizidir.

Sıradaki incelemede ise elemanları geometrik dizi oluşturan sonlu bir kümenin elemanları geometrik dizi oluşturan istenilen sayıda elemanlı alt küme sayısı bulundu.

4.3. Elemanları Geometrik Dizi Oluşturan Sonlu Bir Kümenin Elemanları Geometrik Dizi Oluşturan İstenilen Sayıda Elemanlı Alt Küme Sayılarının Bulunması

4.3.1. Teorem: m, r reel sayılar ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$A = \{m, m.r, m.r^2, m.r^3, \dots, m.r^{n-1}\}$$

Kümesinde $j = 1,2,3,4,,\dots,k$ için

ilk terimi $m.r^{a-1}$ ve ortak çarpanı r^d olan

$$(m.r^{a-1})(r^d)^{j-1}$$

ifadesi bir geometrik dizidir.

İspat: m, r reel sayılar ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$A = \{m, m.r, m.r^2, m.r^3, \ldots, m.r^{n-1}\}$$

kümesinin elemanlarını

$$B = \{1,2,3,4, \ldots, \mathrm{n}\}$$

kümesinin elemanları ile

m$\rightarrow$ 1 , $m.r \rightarrow 2$, $mr^2 \rightarrow 3$, $mr^3 \rightarrow 4, \ldots,$ $mr^{n-1} \rightarrow n$

biçiminde eşleştirme yapıldı. B kümesinden terimleri aritmetik dizi oluşturan bir alt küme alındığında belirtilen bu eşleşme sonucunda bu alt kümenin, A kümesinde elemanları geometrik dizi oluşturan bir alt küme ile eşleştiği gösterildi.

$d \in Z^+, j = 1,2,3,4,, \ldots.,k$ için $a + (j-1)d \in B$

B kümesinden $K = \{a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots, a+(k-1)d\}$ alt kümesi alındı.

a	$\Rightarrow$ $m.r^{a-1}$	=	$m.r^{a-1}$
$a+d$	$\Rightarrow$ $m.r^{a+d-1}$	=	$m.r^{a-1}.r^d$
$a+2d$	$\Rightarrow$ $m.r^{a+2d-1}$	=	$m.r^{a-1}.(r^d)^2$
$a+3d$	$\Rightarrow$ $m.r^{a+3d-1}$	=	$m.r^{a-1}.(r^d)^3$
⋮		⋮	
$a+(k-1)d$	$\Rightarrow$ $m.r^{a+(k-1)d-1}$	=	$m.r^{a-1}.(r^d)^{k-1}$

Eşleşmesinde a ve d pozitif tam sayılar olduğundan $j = 1,2,3,4,, \ldots, k$ için

$m.r^{a+(j-1)d-1}$ = $m.r^{a-1}.(r^d)^{j-1}$ sayısı A kümesinin bir elemanıdır.

Ayrıca $j = 1,2,3,4,, \ldots, k$ için

ilk terimi $m.r^{a-1}$ ve ortak çarpanı r^d olan

$$(m.r^{a-1})(r^d)^{j-1}$$

ifadesi bir geometrik dizidir.

Çalışmada problemin genel halinin incelenmesi için 3.1.2'deki Problem'in kaynakta kullanılan hali ve çözüm yöntemi gösterildi.

4.3.2. Problem: P=$\{1,2,3,\ldots,17\}$ kümesinin, farkları 4 olan herhangi iki eleman içermeyen kaç alt kümesi vardır?

Çözüm: Kümeyi,

$$A = \{1,5,9,13,17\}$$
$$B = \{2,6,10,14\}$$
$$C = \{3,7,11,15\}$$
$$D = \{4,8,12,16\}$$

şeklinde aralarındaki fark 4 olacak şekilde 4 gruba ayrıldı.

Önce A kümesinden, istenen şekilde seçilebilecek alt kümeler bulundu.

Sıfır elemanlı : $\emptyset$

Bir elemanlı : $\{1\},\{5\},\{9\},\{13\},\{17\}$

İki elemanlı : $\{1,9\},\{1,13\},\{1,17\},\{5,13\},\{5,17\},\{9,17\}$

Üç elemanlı : $\{1,9,17\}$

Yani A kümesinden $1+5+6+1=13$ tane küme, koşulu sağlar.

Benzer şekilde B kümesi için bakıldı,

Sıfır elemanlı : $\emptyset$

Bir elemanlı : $\{2\}, \{6\}, \{10\}, \{14\}$

İki elemanlı : $\{2,10\}, \{2,14\}, \{6,14\}$

olmak üzere 8 küme koşulu sağlar. C ve D kümelerinin her biri de 4 elemanlı olduğundan, bu iki kümenin her biri de aynı şekilde koşulu sağlar. Dolayısı ile bu kümelerin herhangi birleşimleri de koşulu sağlayacağından, istenen şekilde

$$13.8.8.8 = 6656$$

tane alt küme vardır.

Kümelerin, istenilen alt küme sayılarını genelleştirmek için, indirgemeli bir dizi olan Fibonacci Dizisinin nasıl kullanılacağı gösterildi.

4.3.3. Alt kümeler ile Fibonacci Sayılarının İlişkisini Ortaya Çıkarılması

$A = \{1,2,3,4,5, \ldots, n\}$ kümesinin ardışık tam sayı içermeyen tüm altkümelernin sayısını aşağıdaki adımlar izlenilerek bulundu.

İlk olarak n elemanlı A kümesinin iki tane ardışık tamsayı içermeyen altkümelerinin sayısını a_n ile gösterildi. A kümesinin tüm alt kümelerini son elemanının olup olmamasına göre sınıflandırıldı. Bunlar;

i. n'nin olup $(n-1)$'in olmadığı alt kümeler :

Bu durumdaki alt kümelerden iki tane ardışık tam sayı içermeyenlerin sayısı

$$\{1,2,3,4,5, \ldots, n-2\}$$

kümesinin iki tane ardışık tamsayı içermeyen alt kümelerinin sayısı kadardır. Yani a_{n-2} kadardır.

ii. n'nin olmadığı alt kümeler :

Bu durumdaki alt kümelerden iki tane ardışık tamsayı içermeyenlerin sayısı

$$\{1,2,3,4,5, \ldots, n-1\}$$

kümesinin iki tane ardışık tam sayı içermeyen alt kümelerinin sayısı kadardır. Yani a_{n-1} kadardır.

Böylece , A kümesinin tüm alt kümeleri bu iki sınıftan birinde yer alacağından

$$A = \{1,2,3,4,5, \dots, n\}$$

kümesinin iki tane ardışık tamsayı içermeyen alt kümelerinin sayısı

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

tane olacaktır. Buna göre,

$A = \{1\}$ kümesinin ardışık tamsayı içermeyen alt kümeleri $\emptyset$ $ve\{1\}$ 'dir. $a_1 = 2$

$A = \{1,2\}$ kümesinin ardışık tamsayı içermeyen alt kümeleri $\emptyset$, $\{1\}, \{2\}$ 'dir. $a_2 = 3$

Böylece

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

eşitliği ve $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ kullanılarak istenilen $A = \{1,2,3,4,5, \dots, n\}$ kümesinin ardışık tamsayı içermeyen altkümelerinin sayısı bulunabilir. Burada elde edilen dizi de Fibonacci dizisidir.

Alt küme sayılarını oluştururken kullanılan metot, Leonardo Fibonacci'nin ''Tavşan Problemi''nde kullandığı sayma metodu ile ilişkilendirildi. Tavşan diyagramını daha önce gösterilmişti. Burada o diyagramın alt kümelerle olan ilişkisi tekrar ele alındı.

Aylar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Çiftlerin Sayısı	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Çizelge 4.2: Tavşan Çiftlerinin Sayılarının Aylara Göre Gösterimi

Aynı tarz sayma metodu, aranılan alt kümeleri sayarken de karşımıza çıkar. Fibonacci'deki tavşanlarla alt kümeler arası bir ilişki kuruldu.

Bunu yapılırken de sadece yavru tavşan çiftlerimizi sayıldı. Fibonacci diyagramında bulunan ilginç durumlardan biri de kaçıncı ayda bulunursanız o aydaki tavşan çiftlerinin sayısı o ana dek olan bulunmuş ve bulunan toplam yavru çift sayısına eşittir. Örneğin Diyagram-1'de 3.ayda 2 tavşan çifti bulunur ve 3.aya kadar diyagramda toplam 2 yavru tavşan çifti vardır. 5.ayda toplam 5 tavşan çifti bulunur ve 5.aya kadar diyagramda toplam 5 yavru tavşan çifti bulunur. Diyagram-1'de turuncu renkli yavru tavşan sayısı ile bunu görüldü. Bu bilgi ile yavru tavşan sayılarını veren bir tablo oluşturuldu.

n	**n. aydaki toplam tavşan çifti sayısı**	**n. ay dahil diyagramdaki toplam yavru tavşan çifti ( ) sayısı**
1	1	1
2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	5	5
6	8	8
…	…	…
n	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Çizelge 4.3: Erişkin Tavşan Sayısı, Yavru Tavşan Sayısı ve Aylar Arasındaki İlişki

Sıradaki işlemde herhangi bir kümenin istenilen özellikleri sağlayan alt kümeleri yukarıdaki diyagramla eşleştirildi.

Problem-2'nin çözümünde tanımlanan $A = \{1,5,9,13,17\}$ kümesinin istenilen özellikteki alt kümeleri

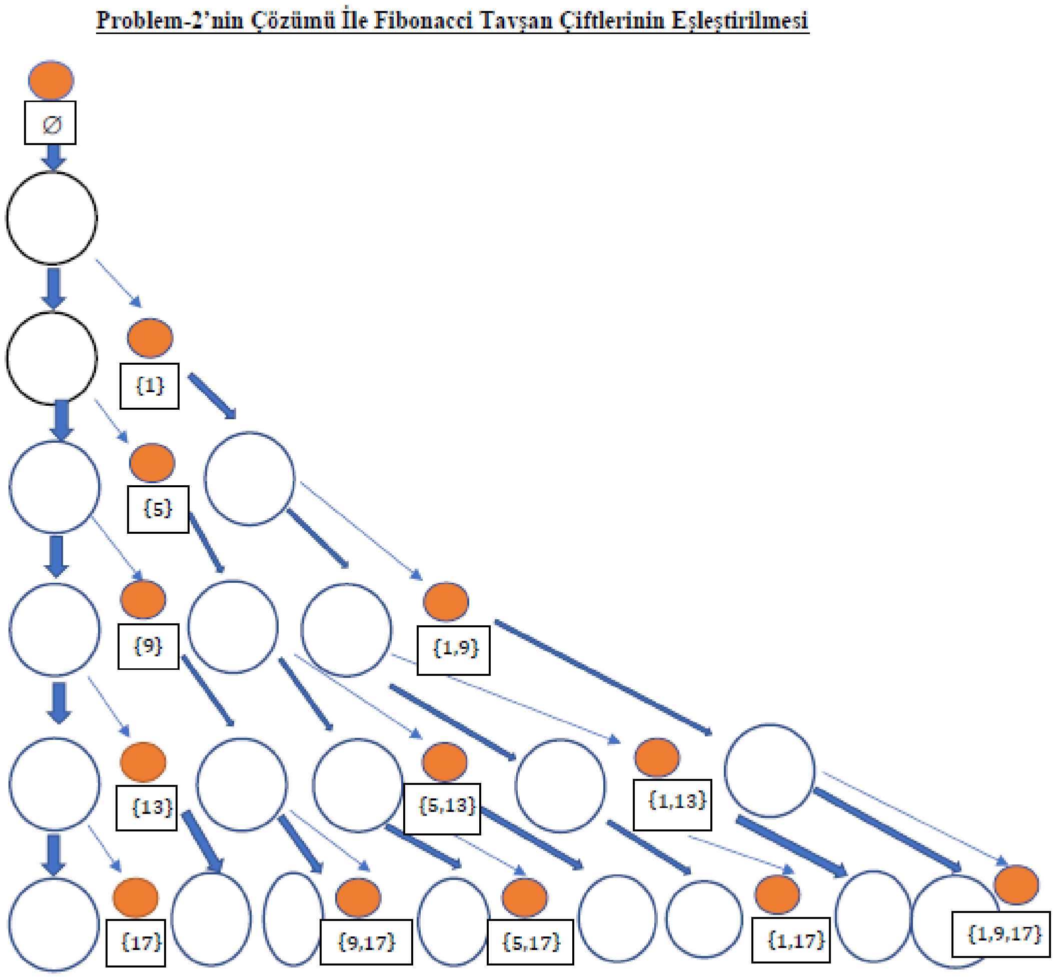
Sıfır elemanlı : $\emptyset$

Bir elemanlı : $\{1\}, \{5\}, \{9\}, \{13\}, \{17\}$

İki elemanlı : $\{1,9\},\{1,13\},\{1,17\},\{5,13\},\{5,17\},\{9,17\}$

Üç elemanlı : $\{1,9,17\}$

olacak şekilde 13 adet bulunmuştu. Buradaki alt kümeler Fibonacci'nin tavşan diyagramında yavru tavşan çiftleri ile eşleştirilerek gösterildi.



Şekil 4.4: Fibonacci Tavşan Diyagramı ve Alt Kümeler Arası İlişki

- Diyagramda kümenin elemanları yavru tavşan çiftleri ile adlandırıldı.
- Boş küme ilk yavru tavşan çifti olarak belirlendi.
- Bir elemanlı alt kümeler ilk tavşan çifti yetişkin olduktan sonra onun yavruladığı çiftler olarak tanımlandı.

- İki elemanlı alt kümeleri bir sonraki satır hariç sonraki tüm elamanlarla eşleştirilerek elde edildi çünkü bir sonraki elemanla birlikte aynı kümede bulunmama kuralı Fibonacci problemindeki yetişkin olma süresi ile eşleştiği görüldü.

- Bu iki bilgi birbiri ile örtüştürülerek problem Fibonacci dizisinin sayılarını kullanarak genelleştirildi. Yukarıdaki diyagramda alt kümeler ile yavru tavşan çiftleri adlandırılarak bir örnek gösterildi.

Fibonacci problemindeki tablo ile problemdeki kümelerin eleman sayıları arasında ilişki için bir çizelge oluşturuldu.

Fibonacci Fonksiyonu	Ortamdaki Tavşan Çifti Sayısı	İstenilen Alt Küme Sayısı	Kümenin Eleman Sayısı
F_1	1	1	0
F_2	1	1	0
F_3	2	2	1
F_4	3	3	2
F_5	5	5	3
F_6	8	8	4
F_7	13	13	5
. . .	. . .	. . .	. . .
F_n	$F_{n-1} + F_{n-2}$	$F_{n-1} + F_{n-2}$	$n-2$
F_{n+1}	$F_n + F_{n-1}$	$F_n + F_{n-1}$	$n-1$
F_{n+2}	$F_{n+1} + F_n$	$F_{n+1} + F_n$	n

Çizelge 3.3: Fibonacci Sayıları ve Alt Küme Sayıları Arası İlişki

Bu çizelge yardımı ile problemin genel hali yazılıp genel bir çözüm elde edildi.

4.3.4.Teorem: $A = \{1,2,3,4,5,\dots,n\}$ ve$n = m.r + k$, $k < m$ ve $m,r,k \in Z^+$ olmak üzere A kümesinin farkları m olan herhangi iki eleman içermeyen

$$\left[F_{(r+3)}\right]^k.\left[F_{(r+2)}\right]^{m-k}$$

tane alt kümesi bulunur.

İspat: A kümesi $n = m.r + k$, $k < m$ ve $m, r, k \in Z^+$ olmak üzere farklı kümelere bölündü;

$$A_1 = \{1, m+1, 2m+1, \ldots, m(r-1)+1, mr+1\}$$

$$A_2 = \{2, m+2, 2m+2, \ldots, m(r-1)+2, mr+2\}$$

$$A_3 = \{3, m+3, 2m+3, \ldots, m(r-1)+3, mr+3\}$$

.

.

.

$$A_k = \{k, m+k, 2m+k, \ldots, m(r-1)+k, mr+k\}$$

.

.

.

$$A_m = \{ m, 2m, 3m, \ldots, mr \}$$

Şeklinde aralarındaki fark m olacak biçimde m gruba ayrıldı.

A_1 kümesi $(r+1)$ elemanlı olduğundan istenilen özellikte alt küme sayısı Tablo-4'e göre: $F_{(r+3)}$ tane

A_2 kümesi $(r+1)$ elemanlı olduğundan istenilen özellikte alt küme sayısı Tablo-4'e göre: $F_{(r+3)}$ tane

.

.

.

A_k kümesi $(r+1)$ elemanlı olduğundan istenilen özellikte alt küme sayısı Tablo-4'e göre: $F_{(r+3)}$tane

A_{k+1} kümesi r elemanlı olduğundan istenilen özellikte alt küme sayısı Tablo-4'e

göre: $F_{(r+2)}$ tane

.

.

.

A_m kümesi r elemanlı olduğundan istenilen özellikte alt küme sayısı Tablo-4'e

göre: $F_{(r+2)}$ tanedir.

Kümelerin herhangi birleşimleri de istenilen koşulu sağlayacağından,

$$\underbrace{F_{(r+3)}F_{(r+3)}.\dots.F_{(r+3)}}_{k\text{ tane}}.\underbrace{F_{(r+2)}F_{(r+2)}.\dots.F_{(r+2)}}_{(m-k)\text{ tane}}$$

Yani

$$\left[F_{(r+3)}\right]^k.\left[F_{(r+2)}\right]^{m-k}$$

tane istenilen koşulu sağlayan alt küme sayısı bulunur.

Problem-2'nin genel çözümüne bazı örnekler:

Örnek 6. $A = \{1,2,3, \ldots ,17\}$ kümesinin, farkları 4 olan herhangi iki elemanı içermeyen kaç alt kümesi bulunur?

Çözüm: $n = 17, m = 4$

$n = 4.4 + 1$ olduğundan,

$k = 1, r = 4$ olur. Formülde yerine konulursa,

$[F_7]^1.[F_6]^3 = 13.8^3 = 6656$ bulunur.

Örnek 7. $A = \{1,2,3, \ldots ,34\}$ kümesinin, farkları 5 olan herhangi iki elemanı içermeyen kaç alt kümesi bulunur?

Çözüm: $n = 34, m = 5$

$n = 5.6 + 4$ olduğundan,

$k = 4, r = 6$ olur. Formülde yerine konulursa,

$[F_9]^4.[F_8]^1 = 34^4.21 = 28063056$ bulunur.

Örnek 8. $A = \{1,2,3, \ldots ,47\}$ kümesinin, farkları 8 olan herhangi iki elemanı içermeyen kaç alt kümesi bulunur?

Çözüm: $n = 47, m = 8$

$n = 8.5 + 7$ olduğundan,

$k = 7, r = 5$ olur. Formülde yerine konulursa,

$[F_8]^7.[F_7]^1 = 21^7.13 = 23414151033$

bulunur.

5. SONUÇ

Bulgular kısmında A= {1,2,3, … , n} kümesinde farkları ‘m’ olan herhangi iki eleman içermeyen alt küme sayıları bulunurken özel alt küme sayıları seçilmedi. Tüm alt küme sayıları üzerinde çalışıldı. Çalışmada görüldü ki bu konu daha da derinleştirilebilir. A kümesinden istenilen sayıda eleman seçilerek herhangi iki eleman arası belli bir fark içermeyen alt küme sayıları bulunabilir.

5.1.İddia

A= {1,2,3, …, n} kümesinin farkları m olan herhangi eleman içermeyen ‘i’ elemanlı kaç alt küme bulunur?

Önerme alt bölümlere dağıtılarak incelenebilir. m=1 için önerimizin ilk kısmını inceleyelim.

m=1 için ‘i’ elemanlı kaç alt küme vardır?

0 elemanlı = $\binom{n}{0}$

1 elemanlı = $\binom{n}{1}$

2 elemanlı = $\binom{n-1}{2}$

3 elemanlı = $\binom{n-2}{3}$

n çift ise : n tek ise:

$$\binom{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}} \qquad \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n+1}{2}}$$

A kümesinin ‘i’ elemanlı alt kümeleri

$1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ (n çift)

$1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$ (n tek) olmak üzere

$$\binom{n-(i-1)}{i}$$

kadardır.

A={1,2,3, … ,n} kümesinin farkları m olan herhangi eleman içermeyen ‘i’ elemanlı kaç alt küme bulunur?

Sorusunda m sayısı ve i sayısı ile ilgili genellemeler üzerinde çalışılabileceğini düşünüyorum. Kısmi incelemeler yaptığımda Parçalanış Sayılarının alt kümelerine ihtiyaç duyduğumu fark ettim. Parçalanış Sayıları ile birlikte tezimin devamı niteliğinde güzel bir çalışma yapılabileceğini düşünüyorum.

5.2 Sonuçlar

5.2.1. Sonuç: $\mathrm{n} = (\mathrm{m}-1)\mathrm{k}+\mathrm{j}$, $\mathrm{j} = 0,1,2,3, \dots, (\mathrm{m}-2)$ olmak üzere $A = \{1,2,3, \dots, n\}$ kümesinin elemanları aritmetik dizi oluşturan $m\ (m \geq 2)$ elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$\frac{(\mathrm{n}-\mathrm{j}).\left[\mathrm{n}-\left(\mathrm{m}-(\mathrm{j}+1)\right)\right]}{2.(m-1)}$$

biçimindedir.

5.2.2. Sonuç: s,r reel sayılar ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$A = \{s, s + r , s + 2r , s + 3r , \dots , s + (n - 1)r \}$$

kümesinin elemanlarını

$$B = \{1,2,3,4, \dots , n \}$$

kümesinin elemanları ile

s$\rightarrow 1$, $s + r \rightarrow 2$, $s + 2r \rightarrow 3$, $s + 3r \rightarrow 4$ ……………, $s + (n - 1)r \rightarrow n$

biçiminde eşleştirme yapabiliriz. B kümesinden terimleri aritmetik dizi oluşturan bir alt küme alındığında, belirtilen bu eşleşme sonucunda bu alt kümenin, A kümesinde elemanları aritmetik dizi oluşturan bir alt küme ile eşleşir.

Ayrıca $j = 1,2,3,4,, \dots.., k$ için ilk terimi s+$(a - 1)r$ ve ortak farkı dr olan

$$(s + (a - 1)r) + (j - 1)(dr)$$

ifadesi bir aritmetik dizidir.

5.2.3. Sonuç: m, r reel sayılar ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$A = \{m, m.r, m.r^2, m.r^3, \dots.., m.r^{n-1} \}$$

kümesinin elemanlarını

$$B = \{1,2,3,4, \dots , n \}$$

kümesinin elemanları ile

m$\rightarrow 1$, $m.r \rightarrow 2$, $mr^2 \rightarrow 3$, $mr^3 \rightarrow 4$ ……………, $mr^{n-1} \rightarrow n$

biçiminde eşleştirme yapabiliriz. B kümesinden terimleri aritmetik dizi oluşturan bir alt küme alındığında belirtilen bu eşleşme sonucunda bu alt kümenin, A kümesinde elemanları geometrik dizi oluşturan bir alt küme ile eşleşir.

Ayrıca $j = 1,2,3,4,, ..., k$ için

ilk terimi $m.r^{a-1}$ ve ortak çarpanı r^d olan

$$(m.r^{a-1})(r^d)^{j-1}$$

ifadesi bir geometrik dizidir.

5.2.4. Sonuç: $A = \{1,2,3,4,5, \dots, n\}$ ve$n = m.r + k$, $k < m$ ve $m, r, k \in Z^+$ olmak üzere A kümesinin farkları m olan herhangi iki eleman içermeyen

$$[F(r+3)]^k . [F(r+2)]^{m-k}$$

tane alt kümesi bulunur.

5.2.5. Sonuç: A={1,2,3, … ,n} kümesinin farkları m olan herhangi eleman içermeyen ‘i’ elemanlı

$1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ (n çift)

$1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$ (n tek) olmak üzere

$$\binom{n-(i-1)}{i}$$

kadardır.

6. KAYNAKLAR

Akyüz, Z. 2013. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimlerini içeren bazı özdeşlikler ve fibonacci tipi polinomlar, Doktora tezi, Sakarya Üniversitesi, Sakarya, 1 s.

Bradley, M. J. 2006. The birth of mathematics: Ancient times to 1300. New York, NY: Chelsea House.

Devlin, K. 2011. The man of numbers: Fibonacci's arithmetic revolution. New York, NY: Walker.

Evans, M. 2011. AMSI Associate Professor David Hunt, University of NSW,Dr Daniel Mathews, Monash University-Published by Education Services Australia: 8 p.

Evans, M. 2011. AMSI Associate Professor David Hunt, University of NSW,Dr Daniel Mathews, Monash University-Published by Education Services Australia: 9 p.

Feinberg, M. 1963. Fibonacci-Tribonacci. The Fibonacci Quarterly, 1(3): 70-74.

Feinberg, M. 1963. Fibonacci-Tribonacci. The Fibonacci Quarterly, 1(3): 70-74.

Henderson, H. 2007. Mathematics: Powerful patterns in nature and society. New York, NY: Chelsea House.

Horadam A.F., 1965, Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers, Duke Math. J., 32, 437-446.

Kocer E.G., Tuglu N. and Stakhov A., 2009, On the m-extension of the Fibonacci and Lucas p-numbers, Science Direct, 40, 1890-1906.

Koshy T., 2007, Elementary Number Theory with Applications, Academic Press, 2nd edition, Burlington, MA.

Koshy T., 2014, Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications, Springer Science+Business Media, New York

Koshy,T. 2001. Fibonacci and Lucas numbers with applications., A Wiley-Interscience publication: 45-50 p.

Koshy,T. 2001. Fibonacci and Lucas numbers with applications., A Wiley-Interscience publication: 6 p.

Koshy,T. 2001. Fibonacci and Lucas numbers with applications., A Wiley-Interscience publication: 16 p.

Nesin, Ali. 2010. Kümeler Kuramı 1. Nesin Yayıncılık: 21-22 s.

Posamentier, A. S., & Lehmann, I. 2007. The fabulous Fibonacci numbers. Amherst, NY: Prometheus Books.

ÖZGEÇMİŞ

Deniz NARİN

deniz-narin@hotmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Lisans 2004-2009	Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara
Pedagojik Formasyon 2014	Akdeniz Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen 2015-Devam Ediyor	Bilfen Eğitim Kurumları Matematik Bölümü, Antalya
Öğretmen 2010-2015	Vahap Yılmaz Dershanesi Matematik Bölümü, Antalya