T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FİBONACCİ VE LUCAS SAYI DİZİLERİNİN GENELLEMESİ

Ayşe YALÇIN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2022

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FİBONACCİ VE LUCAS SAYI DİZİLERİNİN GENELLEMESİ

Ayşe YALÇIN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2022

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ VE LUCAS SAYI DİZİLERİNİN GENELLEMESİ

Ayşe YALÇIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 10/06/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Dr. Öğr. Üyesi Neslihan KILAR Neslihan K.

ÖZET

FİBONACCİ VE LUCAS SAYI DİZİLERİNİN GENELLEMESİ

Ayşe YALÇIN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof.Dr. Mustafa ALKAN

Haziran 2022; 47 sayfa

Bu çalışmada, lineer cebir yöntemleri ve matris cebiri kullanılarak Fibonacci ve Lucas sayıları için daha genel bağıntılar elde edilmesi amaçlanmaktadır. Bunun için ilk olarak Fibonacci ve Lucas sayılarının temel özellikleri ile bu sayı dizileri arasındaki ilişkiler lineer cebir yöntemleriyle ele alınmıştır. Ardından Fibonacci ve Lucas sayılarının genellemesi yapılarak, lineer cebir yöntemleri yardımıyla bu sayı dizileri için bazı özdeşlikler incelenmiştir. Burada bulunan özdeşlikler, Fibonacci ve Lucas sayılarına indirgenerek yeni özdeşlikler elde edilmiştir. Bu tez çalışması ile elde edilen sonuçlar hem matematik hem de diğer bilim dalları için kullanılabilir niteliktedir.

ANAHTAR KELİMELER: Altın oran, Fibonacci sayıları, Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, Genelleştirilmiş Lucas sayıları, Lucas sayıları.

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Dr. Öğr. Üyesi Neslihan KILAR

ABSTRACT

ON A GENERALIZATION OF FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS

Ayşe YALÇIN

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor : Prof.Dr. Mustafa ALKAN

June 2022; 47 pages

In this study, it is aimed to obtain more general relations for Fibonacci and Lucas numbers by using linear algebra methods and matrix algebra. For this, first of all, the basic properties of Fibonacci and Lucas numbers and the relations between these number sequences are discussed with linear algebra methods. Then, by generalizing Fibonacci numbers and Lucas numbers, some identities for these number sequences were obtained with the help of linear algebra methods. The identities obtained here are reduced to Fibonacci and Lucas numbers and new identities are obtained. The results obtained with this thesis study can be used for both mathematics and other branches of science.
KEYWORDS: Golden ratio, Fibonacci numbers, Generalized Fibonacci numbers, Generalized Lucas numbers, Lucas numbers.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Asst. Prof. Dr. Neslihan KILAR

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması boyunca bilgisi ve tecrübesi ile her zaman destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ALKAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Maddi ve manevi desteğini hiç bir zaman esirgemeyen sevgili aileme çok teşekkür ediyorum. Ayrıca bu çalışmanın her sürecinde beni yüreklendiren, tecrübesiyle destek veren, gökyüzündeki yıldız misali yol gösteren güzel yüreklime sonsuz teşekkürler. İyi ki*

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Fibonacci ve Lucas Sayı Dizilerinin Genellemesi" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

10/06/2022

Ayşe YALÇIN

SİMGELER

Simgeler

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

F_n : n. Fibonacci sayısı

L_n : n. Lucas sayısı

G_n : Genelleştirilmiş n.Fibonacci sayısı

H_n : Genelleştirilmiş n.Lucas sayısı

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Fibonacci sayı dizisi ve Fibonacci tipli sayı dizileri, sayılar teorisinde büyük öneme sahip olmasının yanı sıra, matematiğin diğer dallarında, mühendislik, fizik ve hatta sanat biliminin de bir çok dalında sıklıkla kullanılan ve uygulama alanı bulan sayı dizileridir. Bu tez çalışmasında lineer cebir yöntemleri ve matris cebiri kullanılarak Fibonacci ve Lucas sayıları için daha genel bağıntılar elde edilmiştir. Bunun için Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin genellemesi yapılmış ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışması sırasıyla Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma, Sonuçlar bölümünden oluşmaktadır.

Kaynak Taraması bölümünde; ilk olarak Fibonacci sayılarına adını veren Leonardo Fibonacci hakkında bazı bilgilere, meşhur tavşan problemine, Fibonacci sayı dizisinin tanımına, Altın oranın doğadaki ve sanattaki örneklerine yer verilmiştir. Ardından Lucas sayıları ile bilinen François Edouard Anatole Lucas'ın hayatı hakkında bazı bilgiler ve Lucas sayı dizisinin tanımı verilmiştir. Son olarak Fibonacci ve Lucas sayılarının temel özellikleri ile bu sayı dizileri arasındaki bağıntılar incelenmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde; özdeğer ve özvektörlerin uygulaması olarak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin köşegen matrisi hesaplanmıştır. Ardından tümevarım yöntemi ile A matrisinin n. kuvveti bulunarak Fibonacci sayılarının matris gösterimi olan

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilmiştir. Bu matris gösterimi yardımıyla da d'Ocagne Özdeşliği'nin ve Honsberger Formülü'nün ispatı yapılmıştır.

Bulgular ve Tartışma bölümünde; Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin genellemesi yapılarak G_n ve H_n sayı dizileri elde edilmiştir. A matrisinin genel hali olan

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi alınarak özdeğer ve özvektörler yardımıyla D köşegen matrisi bulunmuştur. Ayrıca özel olarak oluşturulan

$$S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a & \Delta \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

matrisi kullanılarak G_n ve H_n sayı dizilerinin ortak matris gösterimi olan

$$S^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_n & \triangle G_n \\ G_n & H_n \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilmiştir. S^n matrisi yardımıyla G_n ve H_n sayı dizileri için Binet formülleri aynı sonuçta hesaplanabilmiştir. Bununla birlikte S^n matrisi, Binet formülleri ve matris cebiri yardımıyla G_n ve H_n sayı dizileri için bir çok özdeşlik incelenmiş ve bunlara dair sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlar Fibonacci ve Lucas sayılarına indirgenerek yeni özdeşlikler elde edilmiştir.

Sonuçlar bölümünde; bu çalışmada elde edilen genel bağıntılar Fibonacci ve Lucas sayı dizilerine indirgenerek yeni bağıntılar verilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde tez çalışması boyunca sıkça kullanılan Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin tanımları verilecektir. Ardından bu sayı dizilerinin temel özellikleri ve birbirleriyle olan ilişkileri incelenecektir. Bu bölümdeki temel kavramlar Koshy (2001) kitabından derlenmiştir.

2.1. Fibonacci Sayıları

Rönesans öncesi Avrupası'nın en önde gelen matematikçilerinden biri Leonardo Fibonacci olarak bilinmektedir. Fibonacci'nin hayatı ile ilgili matematik yazıları haricinde pek az şey bilinmektedir. Bilinen ilk ve en iyi kitabı olan Liber Abaci'nin yazıldığı 1202 tarihine bakıldığında, 1170 yılı civarında doğmuş olabileceği sanılmaktadır. Pek kanıt olmamasına karşın İtalya'nın Pisa kentinde doğmuş olma olasılığı vardır. Pisa'lı bir tüccar olan babası Guglielmo, Fibonacci henüz çocuk yaştayken Pisalı tüccarların yaşadığı Bugia adlı Kuzey Afrika limanına Konsül olarak atanmıştır. Burada babası Fibonacci'nin hesap öğrenmesi için bir Arap hocadan ders almasını sağlamıştır. Fibonacci sonrasında Liber Abaci adlı kitabında hocasından "Dokuz Hint Rakamının Sanatını" öğrenirken duyduğu mutluluğu anlatmıştır. Hindu-Arap sayıları Avrupa'da Harzemli Muhammed Bin Musa'nın eserlerine ait çevirileri okuyabilmiş bir kaç "aydın" dışında, Fibonacci'nin Liber Abaci adlı kitabının yayınlandığı senelerde bilinmemektedir. Liber Abaci'de Fibonacci bu rakamları şu şekilde anlatmıştır: Dokuz Hint Rakamı 9 8 7 6 5 4 3 2 1 dir. Bu dokuz rakama "0" işaretinin de eklenmesi ile birlikte, herhangi bir sayı yazılabildiği görülmüştür.

13.yy. Avrupa'sında büyük ilgi gören Liber Abaci, çok sayıda kopya edilmiş ve Arap sayıları kilisenin yasaklarına karşın İtalyan tüccarlar arasında yayılmıştır. Liber Abaci adlı kitap bilime düşkün ve bilim adamlarını koruyan bir imparator olan Kutsal Roma İmparatoru II. Frederick'in dikkatini çekmiştir. Bu sebeple kendisine Stupor Mudi (Dünya Harikası) denilmektedir. Fibonacci 1220 senesinde imparatorun huzuruna çağrılmış ve Frederick'in bilim adamlarının biri tarafından sınava tabi tutulmuştur. Sonunda göze giren Fibonacci yıllar boyu imparatorla ve imparatorun dostlarıyla yazışmıştır. M.S. 1225 yılında yazdığı Liber Quadratornum adlı kitabını imparatora ithaf etmiştir (Koshy 2001).

Arap Matematiği'nin kullanışlı Hindu-Arap sayılarını Batı'ya tanıtmakta çok büyük katkıda bulunan Leonardo Fibonacci çağımız matematikçileri tarafından daha çok, Liber Abaci adlı kitabında yer alan bir problem ile ortaya çıkan bir sayı dizisi sebebiyle bilinmektedir. Liber Abaci kitabındaki bu problemin metni aşağıdaki gibidir:

-Adamın biri, dört bir yanı duvarla çevrili yere bir çift tavşan koymuş. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan doğurduğu, her yeni çiftin de ergenleşmesi için bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği var sayılırsa, 100 ay sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?-

Tavşan problemi olarak da bilinen problem Koshy (2001) kitabında aşağıdaki şekilde incelenmiştir.

Biri dişi, biri erkek olan yeni doğmuş iki tavşan olduğu farzedelim.

1) Her çiftin olgunlaşması için bir ay gerektiği,

2) 2.aydan itibaren her çiftin, her ay bir çift tavşan doğurduğu,

3) Yıl boyunca hiçbir tavşanın ölmediği,

koşulları altında yılda doğan tavşan çiftlerinin sayısını bulalım.

İlk tavşan çiftinin 1 Ocak'ta doğduğunu farzedelim. Bu ilk tavşan çiftinin olgunlaşması bir ay alır. Bu yüzden 1 Şubat'ta, hâlâ, yalnız bir çift vardır. 1 Mart'ta bu tavşan çifti iki aylıktır ve yeni bir çift doğururlar. Toplamda iki çift olur. Bu şekilde devam ederek, 1 Nisan'da 3 çift olacak, 1 Mayıs'ta 5 çift olacaktır. Bu durum aşağıdaki Çizelge 2.1.1 ile sunulmuştur:

Çizelge 2.1.1. Aylara göre tavşan çiftlerinin sayıları

Çiftlerin sayısı	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz
Bebekler	1	0	1	1	2	3	5
Yetişkinler	0	1	1	2	3	5	8
Toplam	1	1	2	3	5	8	13

Buradan,

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...\}$$

sayı dizisi elde edilir. Bu diziliş dikkatle incelendiğinde, ilk iki terim haricindeki her bir terimin, kendinden önceki ardışık iki terimin toplamı olduğu görülmektedir. Bu sayı dizisi istenildiği kadar genişletilebilir ve sonsuz bir sayı dizisi elde edilebilir.

Tanım 2.1. *F_n , n. Fibonacci sayısını göstermek üzere, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 1$ tam sayısı için,*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{2.1}$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine Fibonacci sayı dizisi denir (Vajda 1989; Koshy 2001).

(2.1) bağıntısı kullanılarak elde edilen Fibonacci sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki Çizelge 2.1.2 ile sunulmuştur:

Çizelge 2.1.2. F_n için bazı sayısal değerler

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21

2.1.1. Altın Oran

Fibonacci sayılarının birbirlerine oranının oldukça önemli bir yere sahip olduğu bilinmektedir. Her bir Fibonacci sayısının kendisinden hemen önce gelen sayıya bölünerek elde edilen oranlara bakıldığında, bu sayıların giderek $1,618$ değerine yaklaştığı görülmektedir. Bu değer "Altın oran" olarak adlandırılmaktadır (Lines 1990). Ayrıca Altın oran aşağıdaki karakteristik denklemin pozitif köküdür:

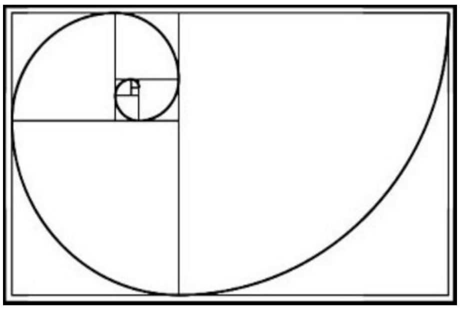
$$x^2 = x + 1$$

Buna Altın bölüm denklemi de denir. Bu denklemin iki reel kökü vardır. Bunlar

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir (Stakhov ve Rozin 2006).

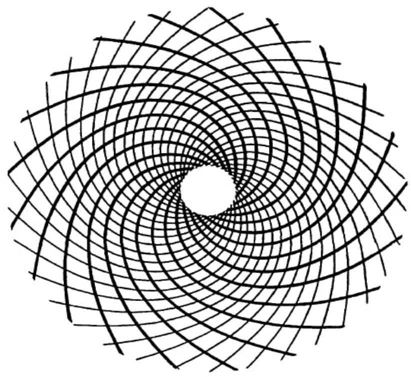
Altın orana olan ilgi 2000 yıldan daha fazla eskiye dayanmaktadır. Bir çok mimari ve sanat eserinde göze güzel göründüğü için altın oran sıkça kullanılmıştır. Eski Yunan Mimarisinden Rubens, Raphael, Leonardo Da Vinci, Boticelli gibi ünlü ressamların resimlerinde altın oranı kullandığı bilinmektedir. Mısır piramitlerinde de bu orana rastlanmıştır (Koshy 2001). Eski Yunan'da uzun kenarının kısa kenarına oranı altın oran kadar olan "Altın dikdörtgene" Kutsal Kesit adı verilmiştir. Altın dikdörtgenin bir kare ile daha küçük bir dikdörtgene bölünmesiyle elde edilen küçük dikdörtgenin de 'Altın dikdörtgen' olduğu görülür. Aynı şekilde devam edildiğinde bu küçük dikdörtgen de bir kare ile daha küçük bir dikdörtgene bölündüğünde elde edilen dikdörtgen yine altın dikdörtgendir. Bu durum benzer şekilde uygulandığında giderek küçülen altın dikdörtgenler ve kareler ortaya çıkar. Bu dikdörtgen ve kareler köşegenlerinden geçen düzgün bir eğriyle birleştirildiğinde altın sarmal olarak bilinen bir sarmal elde edildiği görülür. Bu düzgün eğri bir sarmal oluşturarak sonuç olarak bir noktaya yönelir (Lines 1990).



Şekil 2.1: Altın Sarmal (Anonymous 2008)

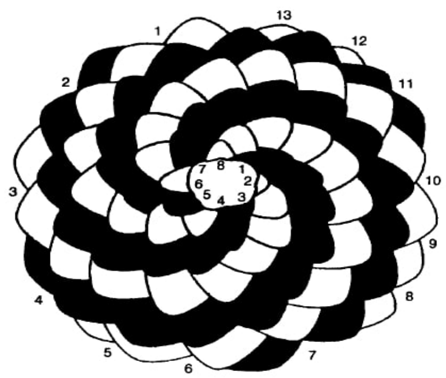
Bu eğrinin matematikteki adı eşit açılı sarmal ya da logaritmik sarmaldır. Bu özel sarmal doğada bir çok yerde bulunur. Deniz kabukluları, ayçiçeği sarmalı, salyangozlar, boğanın boynuzları, pençeleri ve uzun azı dişleri logaritmik sarmaldan oluşur. Ayrıca galaksilerin de dışa doğru dönen yıldızlardan oluşan dev boyuta sahip eşit açılı sarmal kolları bulunmaktadır. Bu örneklerden de görüldüğü üzere altın oran oldukça önemli bir sayı olmakla birlikte sahip olduğu özellikler nedeniyle hem matematikçileri hem de diğer bilim dallarıyla uğraşan insanları da etkilemeyi başarmıştır (Lines 1990) .

Fibonacci sayıları doğada da beklenmeyen yerlerde ve şekillerde karşımıza çıkmaktadır. Bazı bitki ve ağaç türleri incelendiğinde doğada Fibonacci sayılarıyla karşılaşıldığı görülebilir. Farklı bitkiler ve ağaçlar için yapraklarından biri başlangıç noktası olarak alınıp, başlangıç noktasının tam olarak altında ya da üstünde bir yaprak bulunana kadar sayma işlemi yapıldığında elde edilen sayı her zaman bir Fibonacci sayısıdır. Üstelik yaprakları sayarken süreç kendini tamamlamadan önce yapılan devir sayısı da bir Fibonacci sayısıdır. Ayrıca papatyaların da bir Fibonacci sayısı kadar taç yaprağı bulunmaktadır. Bir papatyanın yaprak sayısı genel olarak Fibonacci sayılarından $21, 34, 55$ ve 89'dur. Doğada karşımıza çıkan Fibonacci sayılarıyla ilgili en bilinen örneklerden biri de ayçiçek örneğidir. Ayçiçeğinin çiçek kısmında baklavaya benzer bölmelerde tohumları vardır. Bu bölmelerin sınırları merkezden başlayarak çiçeğin dış kısmına doğru giden sarmal eğriler şeklindedir. Bu şekilde bir modelde saat yönünde olan ve olmayan sarmallar sayıldığında Fibonacci dizisindeki ard arda gelen sayılarla karşılaşıldığı görülür (Lines 1990).



Şekil 2.2: Ayçiçeği Sarmalları (Koshy 2001)

Bir çok çiçeğin tohum başı, ananas ve çam kozalaklarının kat kat kabukları, bir soğanın katmanları, bir kıvırcığın yaprakları gibi bitkisel şekillerin çoğu da Fibonacci sarmallarını içermektedir.



Şekil 2.3: Çamkozalağı Sarmalları (Koshy 2001)

2.2. Lucas Sayıları

Lucas sayılarına adını veren François Edouard Anatole Lucas 1842'de Fransa'nın Amiens kentinde doğmuştur. Lucas École Normale Supérieure de eğitimini tamamlamış ve Paris Rasathanesinde asistan olarak çalışmıştır. Rusya ile Fransa arasındaki Prusya savaşında topçu subay olarak görev almıştır. Paris Charlemagne lisesinde öğretmenlik yapmış ve sonrasında Paris'te matematik profesörü olmuştur. Lucas'ın bir bilgisayar için planlar geliştirdiği fakat gerçekleştiremediği bilinmektedir. Bunun yanında Lucas, sayılar teorisine katkıları ve oyun matematiği üzerine Récréations Mathématiques (1882-94) isimli dört ciltlik klasiği ile tanınmaktadır. Günümüzde Hanoi Kuleleri adıyla bilinen Brahma Kulesi oyununu 1883 yılında icat etmiştir. Lucas bir şölende yanağından yaralanıp enfeksiyon kaparak 3 Ekim 1891'de talihsiz bir kaza sonucu ölmüştür (Koshy 2001).

Fibonacci özyineleme bağıntısında farklı başlangıç koşullarını alarak Fibonacci dizisine benzer bir sayı dizisi olan Lucas sayı dizisini elde etmiştir.

Tanım 2.2. L_n *, n. Lucas sayısını göstermek üzere,* $L_0 = 2$ *ve* $L_1 = 1$ *başlangıç koşulları ve her* $n \geq 1$ *tamsayısı için,*

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \tag{2.2}$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine Lucas sayı dizisi denir (Vajda 1989; Koshy 2001).

(2.2) bağıntısı kullanılarak elde edilen Lucas sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki Çizelge 2.2.1 ile sunulmuştur:

Çizelge 2.2.1. L_n için bazı sayısal değerler

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47

2.3. Fibonacci Sayıları İle İlgili Özdeşlikler

Fibonacci sayıları ile ilgili bazı özelliklere aşağıda yer verilmiştir (Koshy 2001). Her n pozitif tam sayısı için

1. $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1,$
2. $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n},$
3. $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1,$

4. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_i = F_{2n}$,

5. $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$,

6. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i F_i = (-1)^{n-1} F_n$,

7. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k = F_{3n}$,

8. (Cassini Formülü)

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{2.3}$$

9. $x^2 - x - 1 = 0$ ikinci derece denkleminin kökü α olmak üzere

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1} \tag{2.4}$$

10. $x^2 - x - 1 = 0$ ikinci derece denkleminin kökü β olmak üzere

$$\beta^n = \beta F_n + F_{n-1} \tag{2.5}$$

11. (Fibonacci Binet Teoremi) $x^2 - x - 1 = 0$ ikinci derece denkleminin kökleri α ve β olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.6}$$

12.

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

13. (Catalan Özdeşliği) Her n ve k pozitif tam sayısı için, $n \geq k$ olmak üzere

$$F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1} F_k^2$$

14. (d'Ocagne Özdeşliği) Her n ve m pozitif tam sayısı için, $m \geq n$ olmak üzere

$$F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1} = (-1)^n F_{m-n}$$

15. (Honsberger Formülü) Her $n \geq 0$ ve $m \geq 1$ tam sayısı için

$$F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_n F_{m-1}$$

Bunlardan bazılarının ispatına aşağıda yer verilmiştir.

1) n üzerinden tümevarım ile ispatı yapılacaktır.

$n = 1$ için $F_1 = F_3 - 1$, $F_1 = 1$ ve $F_3 = 2$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ doğru olsun. $n+1$ için

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} F_i &= \sum_{i=1}^{n} F_i + F_{n+1} \\ &= F_{n+2} - 1 + F_{n+1} \\ &= F_{n+3} - 1\end{aligned}$$

bulunur ve $n+1$ için iddia doğru olduğundan ispat tamamlanır.

2) n üzerinden tümevarım yöntemi ile ispatı yapılacaktır.

$n = 1$ için $F_1 = F_2$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$ doğru olsun. $n+1$ için

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i-1} &= \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} + F_{2(n+1)-1} \\ &= F_{2n} + F_{2n+1} \\ &= F_{2n+2}\end{aligned}$$

bulunur ve $n+1$ için iddia doğru olduğundan ispat tamamlanır.

3) n üzerinden tümevarım ile ispatı yapılacaktır.

$n = 1$ için $F_2 = F_3 - 1$ dir. $F_2 = 1$ ve $F_3 = 2$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$ doğru olsun. $n+1$ için

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i} &= \sum_{i=1}^{n} F_{2i} + F_{2n+2} \\ &= F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} \\ &= F_{2n+3} - 1\end{aligned}$$

bulunur ve $n+1$ için iddia doğru olduğundan ispat tamamlanır.

5) n üzerinden tümevarım ile ispatı yapılacaktır.

$n = 1$ için $F_1^2 = F_1 F_2$ dir. $F_1 = F_2 = 1$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ eşitliği doğru olsun. $n+1$ için

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} F_i^2 + F_{n+1}^2 \\ &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1} F_{n+2}\end{aligned}$$

bulunur ve $n+1$ için iddia doğru olduğundan ispat tamamlanır.

8) n üzerinden tümevarım ile ispatı yapılacaktır.

$n = 1$ için $F_0 F_2 - F_1^2 = 0.1 - 1 = (-1)^1$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ eşitliği doğru olsun. $n+1$ için

$$\begin{aligned}F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 \\ &= F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1} - [F_n^2 + (-1)^n] \\ &= F_n F_{n+1} - F_n(F_{n-1} + F_n) + (-1)^{n+1} \\ &= F_n F_{n+1} - F_n F_{n+1} + (-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{n+1}\end{aligned}$$

bulunur ve $n+1$ için iddia doğru olduğundan ispat tamamlanır.

9) n üzerinden tümevarım ile ispatı yapılacaktır.

$n = 1$ için $\alpha = \alpha F_1 + F_0 = \alpha.1 + 0 = \alpha$ olduğundan iddia doğrudur.

n için $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ eşitliği doğru olsun. $n+1$ için

$$\begin{aligned}\alpha^{n+1} &= \alpha\alpha^n \\ &= \alpha(\alpha F_n + F_{n-1}) \\ &= (\alpha + 1)F_n + \alpha F_{n-1} \\ &= \alpha(F_n + F_{n-1}) + F_n \\ &= \alpha F_{n+1} + F_n\end{aligned}$$

bulunur ve $n+1$ için iddia doğru olduğundan ispat tamamlanır.

10) $\alpha\beta = -1$ olduğundan $\beta = \frac{-1}{\alpha}$ dır. Eşitlik (2.3) ve (2.4) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\beta^n &= \frac{(-1)^n}{\alpha^n} \\
&= \frac{(-1)^n}{\alpha F_n + F_{n-1}} \\
&= \frac{(-1)^n(\beta F_n + F_{n-1})}{(\alpha F_n + F_{n-1})(\beta F_n + F_{n-1})} \\
&= \frac{(-1)^n(\beta F_n + F_{n-1})}{-F_n^2 + F_{n-1}(F_n + F_{n-1})} \\
&= \frac{(-1)^n(\beta F_n + F_{n-1})}{(-1)^n} \\
&= \beta F_n + F_{n-1}
\end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

11) Eşitlik (2.4) ve (2.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\alpha^n - \beta^n &= (\alpha F_n + F_{n-1}) - (\beta F_n + F_{n-1}) \\
&= F_n\,(\alpha - \beta)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

elde edilir.

12) $\alpha\beta = -1$ olmak üzere Eşitlik (2.6) yardımıyla gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
F_{-n} &= \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1}\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\
&= (-1)^{n+1}F_n
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.4. Lucas Sayıları İle İlgili Özdeşlikler

Lucas sayıları ile ilgili bazı özelliklere aşağıda yer verilmiştir (Koshy 2001). Her n pozitif tam sayısı için

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3,$
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2,$

3. $\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1,$

4. $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1},$

5. (Lucas Binet Teoremi) $x^2 - x - 1 = 0$ ikinci derece denkleminin kökleri α ve β olmak üzere

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \tag{2.7}$$

6. $L_{-n} = (-1)^n L_n,$

7. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} L_i = L_{2n},$

8. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i L_i = (-1)^n L_n.$

Aşağıda bazılarının ispatı verilmiştir.

1) n üzerinden tümevarım ile ispatı yapılacaktır.

$n = 1$ için $L_1 = 1$ ve $L_3 = 4$ olduğundan, $L_1 = L_3 - 3$ sağlanır ve iddia doğrudur. n için $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$ eşitliği doğru olsun. $n+1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} L_i &= \sum_{i=1}^{n} L_i + L_{n+1} \\ &= L_{n+2} - 3 + L_{n+1} \\ &= L_{n+3} - 3 \end{aligned}$$

bulunur ve $n+1$ için iddia doğru olduğundan ispat tamamlanır.

2) n üzerinden tümevarım ile ispatı yapılacaktır.

$n = 1$ için $L_1 = 1$ ve $L_2 = 3$ olduğundan, $L_1 = L_2 - 2$ sağlanır ve iddia doğrudur. n için $\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2$ eşitliği doğru olsun. $n+1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} L_{2i-1} &= \sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} + L_{2n+1} \\ &= L_{2n} - 2 + L_{2n+1} \\ &= L_{2n+2} - 2 \end{aligned}$$

bulunur ve $n+1$ için iddia doğru olduğundan ispat tamamlanır.

3) n üzerinden tümevarım ile ispatı yapılacaktır.

$n = 1$ için $L_2 = 3$ ve $L_3 = 4$ olduğundan, $L_2 = L_3 - 1$ sağlanır ve iddia doğrudur.

n için $\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1$ eşitliği doğru olsun. $n + 1$ için

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} L_{2i} &= \sum_{i=1}^{n} L_{2i} + L_{2n+2} \\ &= L_{2n+1} - 1 + L_{2n+2} \\ &= L_{2n+3} - 1\end{aligned}$$

bulunur ve $n + 1$ için iddia doğru olduğundan ispat tamamlanır.

5) $n = 1$ için $L_1 = 1 = \alpha + \beta$ dir.

$n = 2$ için $L_2 = 3 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$ bulunur.

$n \geq 3$ için $L_n = \alpha^n + \beta^n$, $L_{n-1} = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}$ ve $L_{n-2} = \alpha^{n-2} + \beta^{n-2}$ olduğundan $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}L_{n-1} + L_{n-2} &= \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + \alpha^{n-2} + \beta^{n-2} \\ &= \alpha^{n-2}(\alpha + 1) + \beta^{n-2}(\beta + 1) \\ &= \alpha^{n-2}\alpha^2 + \beta^{n-2}\beta^2 \\ &= \alpha^n + \beta^n \\ &= L_n\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

2.5. Fibonacci ve Lucas Sayıları ile İlgili Özdeşlikler

Fibonacci sayılarıve Lucas sayıları arasındaki bazı temel özelliklere aşağıda yer verilmiştir (Koshy 2001). Her n pozitif tam sayısı için

1. $F_{2n} = F_n L_n$,
2. $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$,
3. $L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$,
4. $5F_n^2 = L_n^2 - 4(-1)^n$,
5. $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$,

6. $5F_{2n+1} = L_n^2 + L_{n+1}^2$,

7. $L_{2n} = 5F_n^2 + 2(-1)^n$.

Bazılarının ispatına aşağıda yer verilmiştir.

1) Eşitlik (2.6) ve (2.7) yardımıyla

$$\begin{aligned} F_n L_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}(\alpha^n + \beta^n) \\ &= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \\ &= F_{2n} \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

2) Eşitlik (2.6) ve $\alpha\beta = -1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_{n-1} + F_{n+1} &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{-(\alpha\beta)\alpha^{n-1} + (\alpha\beta)\beta^{n-1} + \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n(-\beta + \alpha) + \beta^n(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} \\ &= \alpha^n + \beta^n \\ &= L_n \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

3) Eşitlik (2.6), $(\alpha\beta)^2 = 1$ ve $\alpha + \beta = 1$ kullanıldığında

$$\begin{aligned} F_{n+2} - F_{n-2} &= \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} - \alpha^{n-2} + \beta^{n-2}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} - (\alpha\beta)^2\alpha^{n-2} + (\alpha\beta)^2\beta^{n-2}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n(\alpha^2 - \beta^2) + \beta^n(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha - \beta} \\ &= (\alpha^n + \beta^n)(\alpha + \beta) \\ &= \alpha^n + \beta^n \\ &= L_n \end{aligned}$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanır.

4) Eşitlik (2.7), $\alpha\beta = -1$ ve $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_n^2 - 4(-1)^n &= (\alpha^n + \beta^n)^2 - 4(-1)^n \\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n - 4(-1)^n \\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n \\ &= (\alpha^n - \beta^n)^2 \\ &= 5F_n^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanır.

5) Eşitlik (2.6), $\alpha\beta = -1$ ve $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} 5F_n &= (\alpha - \beta)^2 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha^n - \beta^n) \\ &= (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \\ &= \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} \\ &= L_{n-1} + L_{n+1} \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, Koshy (2001) kitabından yararlanarak tez çalışması boyunca sık kullanılacak olan ve lineer cebirin en temel konularından olan özdeğer, özvektör ve köşegenleştirme kavramları hatırlanacaktır. Bu kavramlar yardımıyla Fibonacci sayılarının bazı temel özelliklerinin rahatlıkla ispatlanabileceği görülecektir. İlk önce, Fibonacci sayılarına karşılık gelen kare matrisin köşegen matrisi bulunacak ve ardından bu matrisin n. kuvveti ile n. Fibonacci sayıları arasındaki ilişki görülecektir. Son olarak da Fibonacci sayılarının matris gösterimi iki önemli özellik olan d'Ocagne Özdeşliği'nin ve Honsberger Formülü'nün ispatları tekrarlanacaktır.

Bu bölüm boyunca A matrisi, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir. A'nın karakteristik polinomu

$$\det(xI - A) = x^2 - x - 1$$

dir. A matrisinin özdeğerleri ve karakteristik polinomunun kökleri olan

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir. x_1 özdeğerine karşılık gelen özvektör uzayı tanımı gereğince

$$W_{x_1} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 I - A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

dır. Buradan uygun satır işlemleri ile

$$\begin{bmatrix} 1 & -x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. x_1 özdeğerine ait özvektör

$$v_1 = (x_1, 1)$$

ve $x_1$özdeğerine ait özvektör uzayı

$$W_{x_1} = \{x(x_1, 1) : x \in \mathbb{R}\}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde x_2 özdeğerine ait özvektör

$$v_2 = (x_2, 1)$$

ve x_2 özdeğerine ait özvektör uzayı

$$W_{x_2} = \{x\,(x_2, 1) : x \in \mathbb{R}\}$$

olarak bulunur. Buradan öz vektörler yardımıyla

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi şeklinde tanımlanırsa

$$P^{-1} = \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{bmatrix} 1 & -x_2 \\ -1 & x_1 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Böylece

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

köşegen matrisi elde edilir.

Teorem 3.1. *Her n pozitif tam sayısı için*

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir (Koshy 2001).

İspat n pozitif tam sayısı üzerinden tümevarım ile ispatı yapılacaktır.

$n = 1$ için $A = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan iddia doğrudur.

n için doğru kabul edelim. $n+1$ için

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur ve $n+1$ için de iddia doğru olduğundan ispat tamamlanır. □

Ayrıca n pozitif tam sayısı için

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{x_1 - x_2}\begin{bmatrix} x_1^{n+1} - x_2^{n+1} & x_1^n - x_2^n \\ x_1^n - x_2^n & x_1^{n-1} - x_2^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Matris eşitliğinden Binet teoremi

$$F_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$$

kolaylıkla elde edilir (Koshy 2001).

Teorem 3.2. *(d'Ocagne Özdeşliği) Her n, m pozitif tam sayısı için, $m \geq n$ olmak üzere*

$$F_mF_{n+1} - F_nF_{m+1} = (-1)^nF_{m-n}$$

dir (Koshy 2001).

İspat Her n, m pozitif tam sayısı için, $m \geq n$ olmak üzere Teorem 3.1'den

$$A^{m-n} = \begin{bmatrix} F_{m-n+1} & F_{m-n} \\ F_{m-n} & F_{m-n-1} \end{bmatrix}$$

dir. Matris çarpımından

$$A^mA^{-n} = \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \frac{1}{F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2} \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}$$

dır. Eşitlik (2.3) kullanılarak

$$A^mA^{-n} = \frac{1}{(-1)^n} \begin{bmatrix} F_{m+1}F_{n-1} - F_mF_n & F_mF_{n+1} - F_nF_{m+1} \\ F_mF_{n-1} - F_nF_{m-1} & F_{m-1}F_{n+1} - F_nF_m \end{bmatrix}$$

bulunur. Matris eşitliğinden

$$F_mF_{n+1} - F_nF_{m+1} = (-1)^nF_{m-n}$$

elde edilir. □

Teorem 3.3. *(Honsberger Formülü) Her $n \geq 0$ ve $m \geq 1$ tam sayısı için*

$$F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$$

dir (Koshy 2001).

İspat Her $n \geq 0$ ve $m \geq 1$ tam sayısı için Teorem 3.1'den

$$A^{n+m} = \begin{bmatrix} F_{n+m+1} & F_{n+m} \\ F_{n+m} & F_{n+m-1} \end{bmatrix}$$

dir. Diğer taraftan matris çarpımından

$$\begin{aligned} A^nA^m &= \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{n+1}F_{m+1} + F_nF_m & F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} \\ F_nF_{m+1} + F_{n-1}F_m & F_nF_m + F_{n-1}F_{m-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Matris eşitliğinden

$$F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$$

elde edilir. □

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin bir genellemesi yapılarak, matris cebiri ve lineer cebir yöntemleri yardımıyla bu sayı dizileri için bazı eşitlikler elde edilecektir. Böylece Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için de bu yöntemlerle eşitlikler bulunmuş olacaktır.

Tanım 4.1. *a,$b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ tam sayısı için*

$$G_n = aG_{n-1} + bG_{n-2} \tag{4.8}$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine G_n sayı dizisi denir ve $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilir (Horadam 1965).

(4.8) bağıntısı kullanılarak elde edilen G_n sayılarının aldığı bazı değerler Çizelge 4.1 ile sunulmuştur:

Çizelge 4.1: G_n için bazı değerler

n	0	1	2	3	4	5
G_n	0	1	a	a^2+b	a^3+2ab	$a^4+3a^2b+b^2$

Bundan sonra tez çalışması boyunca a ve b reel sayıları G_n sayı dizisi için sabit olarak kabul edilecektir. Ayrıca $b = 0$ iken geometrik seri elde edileceğinden b reel sayısı da sıfırdan farklı kabul edilecektir.

Fibonacci sayılarından yararlanarak Lucas sayıları tanımlandığı gibi, G_n sayılarından yararlanarak da aşağıdaki özyineleme bağıntısı verilebilir.

Tanım 4.2. *$H_0 = 2$, $H_1 = a$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 1$ tam sayısı için*

$$H_n = G_{n+1} + bG_{n-1} \tag{4.9}$$

özyineleme bağıntısı ile tanımlanan sayı dizisine G-Lucas sayı dizisi denir ve $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilir (Horadam 1965).

(4.9) bağıntısı kullanılarak elde edilen H_n sayılarının aldığı bazı değerler Çizelge 4.2 ile sunulmuştur:

Çizelge 4.2: H_n için bazı değerler

n	0	1	2	3	4
H_n	2	a	a^2+2b	a^3+3ab	$a^4+4a^2b+2b^2$

$a=b=1$ olması durumunda Fibonacci ve Lucas sayılarının elde edildiği açıktır.

Önerme 4.3. *Her $n \geq 2$ tam sayısı için*

$$H_n = aH_{n-1} + bH_{n-2} \tag{4.10}$$

dir. Burada $H_0 = 2$ ve $H_1 = a$ dır (Horadam 1965).

İspat Her $n \geq 2$ tam sayısı için (4.8) ve (4.9) bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned} H_n &= G_{n+1} + bG_{n-1} \\ &= (aG_n + bG_{n-1}) + b\,(aG_{n-2} + bG_{n-3}) \\ &= a\,(G_n + bG_{n-2}) + b\,(G_{n-1} + bG_{n-3}) \\ &= aH_{n-1} + bH_{n-2} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Fibonacci sayılarının matris gösteriminin bir genellemesi elde edilerek lineer cebir yöntemleri yeni sayı dizilerinde de kullanılabilir. (4.8) ve (4.9) bağıntısı yardımıyla $T = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi tanımlanabilir. Bu tez çalışmasının devamında da T matris gösterimi kullanılacaktır.

Önerme 4.4. *Her n pozitif tam sayısı için*

1. $\begin{bmatrix} G_{n+1} \\ G_n \end{bmatrix} = T^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

2. $\begin{bmatrix} bG_n \\ bG_{n-1} \end{bmatrix} = T^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *dir.*

İspat 1) n üzerinden tümevarım ile ispat yapılacaktır. $n=1$ için iddianın doğru olduğu açıktır. n için

$$T^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{n+1} \\ G_n \end{bmatrix}.$$

doğru olsun. $n+1$ için

$$\begin{aligned} T^{n+1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= TT^{n}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= T\begin{bmatrix} G_{n+1} \\ G_{n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_{n+1} \\ G_{n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{n+2} \\ G_{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur ve $n+1$ için iddia doğrudur.

2) Tekrar n üzerinden tümevarım ile ispat yapılacaktır. $n=1$ için doğru olduğu açıktır. n için

$$T^{n}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bG_{n} \\ bG_{n-1} \end{bmatrix}$$

doğru olsun. $n+1$ için

$$\begin{aligned} T^{n+1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= T\begin{bmatrix} bG_{n} \\ bG_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b(aG_{n}+bG_{n-1}) \\ bG_{n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} bG_{n+1} \\ bG_{n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur ve $n+1$ için iddia doğru olduğundan ispat tamamlanır. □

Önerme 4.5. *Her n pozitif tam sayısı için*

$$\begin{bmatrix} G_{n+1} \\ G_{n} \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} G_{n} \\ G_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir.

İspat (4.8) bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned} T\begin{bmatrix} G_n \\ G_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} aG_n + bG_{n-1} \\ G_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{n+1} \\ G_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.6. *Her n pozitif tam sayısı için*

$$T^n = \begin{bmatrix} G_{n+1} & bG_n \\ G_n & bG_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir.

İspat n pozitif tamsayısı üzerinden tümevarım uygulanacaktır. $n = 1$ için doğru olduğu açıktır. n için doğru kabul edelim. $n + 1$ için

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= TT^n \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{n+1} & bG_n \\ G_n & bG_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} aG_{n+1} + bG_n & b(aG_n + bG_{n-1}) \\ G_{n+1} & bG_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{n+2} & bG_{n+1} \\ G_{n+1} & bG_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur ve $n + 1$ için iddia doğru olduğundan ispat tamamlanır. □

Önerme 4.7. *T matrisi için, $D = P_1^{-1}TP_1$ olacak şekilde D köşegen matrisi vardır.*

İspat T matrisinin karakteristik polinomu

$$\det(xI - T) = x^2 - ax - b$$

dır. $\det(xI - T)$ nin kökleri olan T matrisinin özdeğerleri

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \text{ ve } x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

şeklinde kolaylıkla hesaplanır. x_1 özdeğeri için özvektör uzayı tanımı

$$W_{x_1} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 I - T) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

olduğunu tekrar hatırlayalım. Uygun satır işlemleriyle $x_1$özdeğerine ait özvektör

$$v_1 = \left(1, \frac{-x_2}{b}\right)$$

ve x_1 özdeğerine ait özvektör uzayı

$$W_{x_1} = \left\{ x \left(1, \frac{-x_2}{b}\right) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde x_2 özdeğerine ait özvektör uzayı

$$W_{x_2} = \left\{ x \left(1, \frac{-x_1}{b}\right) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak bulunur. Buradan özvektörler yardımıyla

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-x_2}{b} & \frac{-x_1}{b} \end{bmatrix}$$

matrisi şeklinde tanımlanırsa, P_1 matrisinin tersi

$$P_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}} \begin{bmatrix} x_1 & b \\ -x_2 & -b \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Böylece

$$\begin{aligned} D &= P_1^{-1} T P_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}} \begin{bmatrix} x_1 & b \\ -x_2 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-x_2}{b} & \frac{-x_1}{b} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

köşegen matrisi elde edilir. $\square$

$\Delta = a^2 + 4b$ olmak üzere,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} & \frac{-1}{\sqrt{\Delta}} \end{bmatrix}$$

matrisi ve Önerme 4.7'deki gösterimler ile $S = PDP^{-1}$ matrisini hesaplayalım.

P matrisinin tersi

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\Delta} \\ 1 & -\sqrt{\Delta} \end{bmatrix}$$

dir. Buradan gerekli matris işlemleri ile

$$\begin{aligned} S &= PDP^{-1} = \left(PP_1^{-1}\right) T \left(P_1 P^{-1}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a}{\Delta} & \frac{2b}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-a}{2b} & \frac{\Delta}{2b} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & \Delta \\ 1 & a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan sonrada tez çalışmasının devamında $\alpha = x_1$, $\beta = x_2$, $\Delta = a^2 + 4b$ ve $S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & \Delta \\ 1 & a \end{bmatrix}$ gösterimleri kullanılacaktır. Bu çalışmanın G_n ve H_n sayı dizileri arasındaki ilişkiyi veren en önemli sonucunu ispatlayabiliriz.

Teorem 4.8. *Her n pozitif tam sayısı için*

$$S^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_n & \triangle G_n \\ G_n & H_n \end{bmatrix}$$

dir.

İspat Her n pozitif tam sayısı için $S = PDP^{-1}$ olduğundan $S^n = PD^nP^{-1}$ açıktır. Ayrıca Önerme 4.7'de $D = P_1^{-1}TP_1$ olduğundan $D^n = P_1^{-1}T^nP_1$ olacaktır. Burada (4.8) ve (4.9) bağıntısı kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
S^n &= PD^nP^{-1} \\
&= P\left(P_1^{-1}T^nP_1\right)P^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a}{\Delta} & \frac{2b}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{n+1} & bG_n \\ G_n & bG_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-a}{2b} & \frac{\Delta}{2b} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2G_{n+1} - aG_n & \Delta G_n \\ \frac{4bG_n - a^2G_n + 2aG_{n+1} - 2abG_{n-1}}{\Delta} & aG_n + 2bG_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\left(aG_n + bG_{n-1}\right) - aG_n & \Delta G_n \\ \frac{4bG_n - a^2G_n + 2a(G_{n+1} - bG_{n-1})}{\Delta} & aG_n + bG_{n-1} + bG_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} G_{n+1} + bG_{n-1} & \Delta G_n \\ \frac{4bG_n - a^2G_n + 2a.aG_n}{\Delta} & G_{n+1} + bG_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_n & \Delta G_n \\ G_n & H_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

S matrisi yardımıyla G_n ve H_n sayı dizileri için Binet Teoremlerini aynı anda elde edebiliriz.

Teorem 4.9. *(G_n ve H_n için Binet Teoremi) Her n pozitif tam sayısı için*

$$
\begin{aligned}
G_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{\Delta}} \\
H_n &= \alpha^n + \beta^n
\end{aligned}
$$

dir.

İspat $S = PDP^{-1}$ ve Önerme 4.7 yardımıyla $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
S^n &= PD^nP^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} & \frac{-1}{\sqrt{\Delta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\Delta} \\ 1 & -\sqrt{\Delta} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha^n + \beta^n & \sqrt{\Delta}\left(\alpha^n - \beta^n\right) \\ \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{\Delta}} & \alpha^n + \beta^n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

bulunur. Matris eşitliğinden de

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{\Delta}} \\ H_n &= \alpha^n + \beta^n \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.9'un sonucu olarak Fibonacci ve Lucas sayıları için Binet teoremi hemen elde edilebilir.

Sonuç 4.10. *Her n pozitif tam sayısı için*

1. $G_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{b^n} G_n$,

2. $H_{-n} = \frac{(-1)^n}{b^n} H_n$ *dir.*

İspat 1) Teorem 4.9'dan

$$\begin{aligned} G_{-n} &= \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\sqrt{\Delta}} = \frac{\beta^{-n} - \alpha^{-n}}{(\alpha\beta)^n \sqrt{\Delta}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{b^n} G_n \end{aligned}$$

dir.

2) Teorem 4.9'dan

$$\begin{aligned} H_{-n} &= \alpha^{-n} + \beta^{-n} = \frac{\alpha^n + \beta^n}{(\alpha\beta)^n} \\ &= \frac{(-1)^n}{b^n} H_n \end{aligned}$$

dir. □

Teorem 4.11. *Her n pozitif tam sayısı için*

$$H_n^2 - \Delta G_n^2 = 4\,(-b)^n$$

dir.

İspat S matrisinin tanımından $\det(S) = -b$ olarak hesaplanır. Determinant özelliği ve Teorem 4.8 kullanılarak da

$$\det(S^n) = \frac{1}{4}(H_n^2 - \Delta G_n^2) = (-b)^n$$

bulunur. □

Teorem 4.12. *Her n ve m pozitif tam sayısı için*

$$\begin{aligned} 2H_{n+m} &= H_nH_m + \Delta G_nG_m \\ 2G_{n+m} &= G_nH_m + H_nG_m \end{aligned}$$

dir.

İspat Teorem 4.8'den

$$S^{n+m} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_{n+m} & \Delta G_{n+m} \\ G_{n+m} & H_{n+m} \end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca matris çarpımından

$$\begin{aligned} S^{n+m} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_n & \Delta G_n \\ G_n & H_n \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_m & \Delta G_m \\ G_m & H_m \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} H_nH_m + \Delta G_nG_m & \Delta\left(G_nH_m + H_nG_m\right) \\ G_nH_m + H_nG_m & H_nH_m + \Delta G_nG_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Matris eşitliğinden de

$$\begin{aligned} 2H_{n+m} &= H_nH_m + \Delta G_nG_m \\ 2G_{n+m} &= G_nH_m + H_nG_m \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.12'de $n = m$ alınırsa aşağıdaki Eşitlik 1 ve 2, Teorem 4.12'de $n = m + 1$ alınırsa da aşağıdaki Eşitlik 3 ve 4 elde edilir.

Sonuç 4.13. *Her m pozitif tam sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur;*

1. $2H_{2m} = H_m^2 + \Delta G_m^2,$
2. $G_{2m} = G_mH_{m,}$
3. $2H_{2m+1} = H_{m+1}H_m + \Delta G_{m+1}G_m,$
4. $2G_{2m+1} = G_{m+1}H_m + H_{m+1}G_{m.}$

Sonuç 4.13 kullanılarak Koshy (2001)'deki sayfa 91'de Eşitlik 83 ve 84, sayfa 96'da Eşitlik 29 (Eşitlik 1, 2 ve 4) hemen görülebilir.

Sonuç 4.14. *Her n, m pozitif tam sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur;*

1. $2L_{n+m} = L_n L_m + 5F_n F_m$,
2. $2F_{n+m} = F_n L_m + L_n F_m$,
3. $2L_{2m} = L_m^2 + 5F_m^2$,
4. $F_{2m} = F_m L_m$,
5. $2L_{2m+1} = L_{m+1} L_m + 5F_{m+1} F_m$,
6. $2F_{2m+1} = F_{m+1} L_m + L_{m+1} F_m$.

İspat (4.8) ve (4.10) bağıntısında $a = b = 1$ olduğunda, $G_n = F_n$ ve $H_n = L_n$ dir. Teorem 4.12 ve Sonuç 4.13'ten istenilen eşitlikler elde edilir. □

Teorem 4.15. *Her n ve m pozitif tam sayısı için*

$$\begin{aligned} 2(-b)^m H_{n-m} &= H_n H_m - \Delta G_n G_m \\ 2(-b)^m G_{n-m} &= G_n H_m - H_n G_m \end{aligned}$$

dir.

İspat Teorem 4.8'den S^m matrisin tersi hesaplanırsa

$$S^{-m} = \frac{1}{(-b)^m} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_m & -\Delta G_m \\ -G_m & H_m \end{bmatrix}$$

olacaktır. Matris çarpma işleminden

$$\begin{aligned} S^{n-m} &= S^n S^{-m} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_n & \Delta G_n \\ G_n & H_n \end{bmatrix} . \frac{1}{(-b)^m} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_m & -\Delta G_m \\ -G_m & H_m \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4(-b)^m} \begin{bmatrix} H_n H_m - \Delta G_n G_m & \Delta (G_n H_m - H_n G_m) \\ G_n H_m - H_n G_m & H_n H_m - \Delta G_n G_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Matris eşitliğinden

$$\begin{aligned} 2(-b)^m H_{n-m} &= H_n H_m - \Delta G_n G_m \\ 2(-b)^m G_{n-m} &= G_n H_m - H_n G_m \end{aligned}$$

elde edilir. □

Benzer şekilde n ve m'nin özel değerleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.16. *Her m pozitif tam sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur;*

1. $4(-b)^m = H_m^2 - \Delta G_m^2$,
2. $2a(-b)^m = H_{m+1}H_m - \Delta G_{m+1}G_m$,
3. $2(-b)^m = G_{m+1}H_m - H_{m+1}G_m$.

İspat Teorem 4.15'te $n = m$ alınırsa Eşitlik 1 ve Teorem 4.15'te $n = m + 1$ alınırsa da Eşitlik 2 ve 3 elde edilir. □

Sonuç 4.16 kullanılarak Koshy (2001)'deki sayfa 97'de Eşitlik 39 (Eşitlik 3) hemen görülebilir.

Sonuç 4.17. *Her n, m pozitif tam sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur;*

1. $2(-1)^m L_{n-m} = L_nL_m - 5F_nF_m$,
2. $2(-1)^m F_{n-m} = F_nL_m - L_nF_m$,
3. $4(-1)^m = L_m^2 - 5F_m^2$,
4. $2(-1)^m = L_{m+1}L_m - 5F_{m+1}F_m$,
5. $2(-1)^m = F_{m+1}L_m - L_{m+1}F_m$.

İspat (4.8) ve (4.10) bağıntısında $a = b = 1$ olduğunda, $G_n = F_n$ ve $H_n = L_n$ dır. Teorem 4.15 ve Sonuç 4.16'dan istenilen eşitlikler elde edilir. □

Teorem 4.18. *Her n ve m pozitif tam sayısı için*

$$\begin{aligned} H_nH_m &= (-b)^m H_{n-m} + H_{n+m} \\ G_nH_m &= (-b)^m G_{n-m} + G_{n+m} \end{aligned}$$

dir.

İspat Her n ve m pozitif tam sayısı için, Teorem 4.8'den

$$S^{n+m} + (-b)^m S^{n-m} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_{n+m} + (-b)^m H_{n-m} & \Delta \left(G_{n+m} + (-b)^m G_{n-m} \right) \\ G_{n+m} + (-b)^m G_{n-m} & H_{n+m} + (-b)^m H_{n-m} \end{bmatrix}$$

hesaplanır. Matris işlemleri yapılarak

$$\begin{aligned} S^{n+m} + (-b)^m S^{n-m} &= S^n \left[S^m + (-b)^m (S^m)^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_n & \Delta G_n \\ G_n & H_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_m & 0 \\ 0 & H_m \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_n H_m & \Delta G_n H_m \\ G_n H_m & H_n H_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Matris eşitliği de kullanılırsa

$$\begin{aligned} H_n H_m &= (-b)^m H_{n-m} + H_{n+m} \\ G_n H_m &= (-b)^m G_{n-m} + G_{n+m} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.19. *Her m pozitif tam sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur;*

1. $H_m^2 = 2(-b)^m + H_{2m}$,
2. $G_m H_m = G_{2m}$,
3. $H_{m+1} H_m = a(-b)^m + H_{2m+1}$,
4. $G_{m+1} H_m = (-b)^m + G_{2m+1}$.

İspat Teorem 4.18'de $n = m$ alınırsa Eşitlk 1 ve 2, Teorem 4.18'de $n = m + 1$ alınırsa da Eşitlik 3 ve 4 elde edilir. □

Sonuç 4.19 kullanılarak Koshy (2001)'de sayfa 90 da Eşitlik 63 ve sayfa 92 de Eşitlik 105 (Eşitlik 2 ve 5) hemen görülebilir.

Sonuç 4.20. *Her n, m pozitif tam sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur;*

1. $L_n L_m = (-1)^m L_{n-m} + L_{n+m}$,

2. $F_n L_m = (-1)^m F_{n-m} + F_{n+m}$,

3. $L_m^2 = 2(-1)^m + L_{2m}$,

4. $F_m L_m = F_{2m}$,

5. $L_{m+1} L_m = (-1)^m + L_{2m+1}$,

6. $F_{m+1} L_m = (-1)^m + F_{2m+1}$.

İspat (4.8) ve (4.10) bağıntısında $a = b = 1$ olduğunda, $G_n = F_n$ ve $H_n = L_n$ dir. Teorem 4.18 ve Sonuç 4.19'dan istenilen eşitlikler elde edilir. □

Teorem 4.21. *Her m pozitif tam sayısı için,*

$$H_{2m+1} = a\left(\sum_{i=0}^{m} H_i^2 b^{m-i}\right) + 2ab^m - a(-b)^m$$

dir.

İspat Sonuç 4.19'dan $H_{m+1}H_m = a(-b)^m + H_{2m+1}$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca (4.10) bağıntısı kullanılarak $H_{m+1}H_m$ de hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
H_{m+1}H_m &= (aH_m + bH_{m-1})H_m \\
&= aH_m^2 + b(aH_{m-1} + bH_{m-2})H_{m-1} \\
&= a\left(H_m^2 + bH_{m-1}^2\right) + b^2(aH_{m-2} + bH_{m-3})H_{m-2} \\
&= a\left(H_m^2 + bH_{m-1}^2 + b^2H_{m-2}^2\right) + b^3H_{m-2}H_{m-3} \\
&= a\left(H_m^2 + bH_{m-1}^2 + b^2H_{m-2}^2 + ... + b^{m-2}H_2^2\right) + b^{m-1}H_2H_1 \\
&= a\left(H_m^2 + bH_{m-1}^2 + b^2H_{m-2}^2 + ... + b^{m-2}H_2^2\right) + b^{m-1}(aH_1 + bH_0)H_1 \\
&= a\left(b^0H_m^2 + b^1H_{m-1}^2 + b^2H_{m-2}^2 + ... + b^{m-2}H_2^2 + b^{m-1}H_1^2\right) + 2ab^m
\end{aligned}$$

bulunur. Her iki eşitlikten;

$$\begin{aligned}
H_{2m+1} &= a\left(b^0H_m^2 + b^1H_{m-1}^2 + b^2H_{m-2}^2 + ... + b^{m-2}H_2^2 + b^{m-1}H_1^2\right) \\
&\quad +2ab^m - a(-b)^m \\
&= a\left(\sum_{i=1}^{m} H_i^2 b^{m-i}\right) + 2ab^m - a(-b)^m
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.22. *Her m pozitif tamsayısı için,*

$$L_{2m+1} = \left(\sum_{i=1}^{m} L_i^2\right) + 2 - (-1)^m$$

dir.

İspat (4.10) bağıntısında $a = b = 1$ olduğunda, $H_n = L_n$ dir. Teorem 4.21'den istenilen eşitlik elde edilir. □

Teorem 4.23. *Her n, m ve k pozitif tam sayısı için*

$$\begin{aligned}
4G_{n+m+k} &= G_n H_m H_k + H_n G_m H_k + H_n H_m G_k + \Delta G_n G_m G_k \\
4H_{n+m+k} &= H_n H_m H_k + \Delta\left(G_n G_m H_k + G_n H_m G_k + H_n G_m G_k\right)
\end{aligned}$$

dir.

İspat Teorem 4.8'den

$$S^{n+m+k} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_{n+m+k} & \Delta G_{n+m+k} \\ G_{n+m+k} & H_{n+m+k} \end{bmatrix}$$

dir. Matris işlemlerinden

$$\begin{aligned}
S^{n+m+k} &= S^{n+m} S^k \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_{n+m} & \Delta G_{n+m} \\ G_{n+m} & H_{n+m} \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_k & \Delta G_k \\ G_k & H_k \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} H_{n+m}H_k + \Delta G_{n+m}G_k & \Delta\left(H_{n+m}G_k + G_{n+m}H_k\right) \\ H_{n+m}G_k + G_{n+m}H_k & H_{n+m}H_k + \Delta G_{n+m}G_k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur. Matris eşitliğinden

$$\begin{aligned}
2G_{n+m+k} &= G_{n+m}H_k + H_{n+m}G_k \\
2H_{n+m+k} &= H_{n+m}H_k + \Delta G_{n+m}G_k
\end{aligned}$$

dır. Burada Teorem 4.12 yardımıyla

$$\begin{aligned}
2G_{n+m+k} &= G_{n+m}H_k + H_{n+m}G_k \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(G_n H_m + H_n G_m\right) H_k + \left(H_n H_m + \Delta G_n G_m\right) G_k\right]
\end{aligned}$$

bulunur ve

$$4G_{n+m+k} = G_nH_mH_k + H_nG_mH_k + H_nH_mG_k + \Delta G_nG_mG_k$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 4.12'den

$$\begin{aligned} 2H_{n+m+k} &= H_{n+m}H_k + \Delta G_{n+m}G_k \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(H_nH_m + \Delta G_nG_m\right)H_k + \Delta\left(G_nH_m + H_nG_m\right)G_k\right] \end{aligned}$$

bulunur ve

$$4H_{n+m+k} = H_nH_mH_k + \Delta\left(G_nG_mH_k + G_nH_mG_k + H_nG_mG_k\right)$$

elde edilir. □

Teorem 4.23 için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.24. *Her m pozitif tam sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur;*

1. $4G_{3m} = G_m(3H_m^2 + \Delta G_m^2)$,
2. $4G_{3m+1} = 2G_mH_mH_{m+1} + G_{m+1}\left(H_m^2 + \Delta G_m^2\right)$,
3. $4G_{3m+2} = 2G_{m+1}H_mH_{m+1} + G_m\left(H_{m+1}^2 + \Delta G_{m+1}^2\right)$,
4. $4H_{3m} = H_m^3 + 3\Delta G_m^2H_m$,
5. $4H_{3m+1} = H_m^2H_{m+1} + \Delta G_m(G_mH_{m+1} + 2H_mG_{m+1})$,
6. $4H_{3m+2} = H_mH_{m+1}^2 + \Delta G_{m+1}(G_{m+1}H_m + 2H_{m+1}G_m)$.

İspat Teorem 4.23'te $n = m = k$ alınırsa Eşitlik 1 ve 4 elde edilir. Teorem 4.23'te $n = m$ ve $k = m + 1$ alınırsa Eşitlik 2 ve 5, yine Teorem 4.23'te $n = k = m + 1$ alınırsa da Eşitlik 3 ve 6 elde edilir. □

Sonuç 4.25. *Her m pozitif tam sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur;*

1. $4F_{3m} = F_m(3L_m^2 + 5F_m^2)$,
2. $4F_{3m+1} = 2F_mL_mL_{m+1} + F_{m+1}\left(L_m^2 + 5F_m^2\right)$,

3. $4F_{3m+2} = 2F_{m+1}L_mL_{m+1} + F_m\left(L_{m+1}^2 + 5F_{m+1}^2\right),$

4. $4L_{3m} = L_m^3 + 15F_m^2L_m,$

5. $4L_{3m+1} = L_m^2L_{m+1} + 5F_m(F_mL_{m+1} + 2L_mF_{m+1}),$

6. $4L_{3m+2} = L_mL_{m+1}^2 + 5F_{m+1}(F_{m+1}L_m + 2L_{m+1}F_m).$

İspat (4.8) ve (4.10) bağıntısında $a = b = 1$ olduğunda, $G_n = F_n$ ve $H_n = L_n$ dir. Teorem 4.23 ve Sonuç 4.24'ten istenilen eşitlikler elde edilir. □

Teorem 4.26. *Her n, m ve k pozitif tam sayısı için,*

$$(-1)^{m+k}\, b^{2n+m-k}H_{k-n}^2 = H_{n+m}^2 + \Delta\,(-1)^{n+k}\, b^{n-k}G_{m+k}(G_{k-n}H_{n+m} - G_{m+k})$$

dir.

İspat Teorem 4.12 yardımıyla,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} H_{n+m} \\ G_{m+k} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_nH_m + \Delta G_nG_m \\ G_kH_m + H_kG_m \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_n & \Delta G_n \\ G_k & H_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_m \\ G_m \end{bmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. O halde n ve k pozitif tam sayıları için

$$B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_n & \Delta G_n \\ G_k & H_k \end{bmatrix}$$

matrisini tanımlayalım. Şimdi Teorem 4.15 kullanılarak B matrisinin determinantı

$$\begin{aligned}\det(B) &= \frac{1}{4}\,(H_kH_n - \Delta G_kG_n) \\ &= \frac{1}{2}\,(-b)^n\, H_{k-n}\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\det(B) \neq 0$ olduğundan B matrisinin tersi vardır. Buradan

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} H_m \\ G_m \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_n & \Delta G_n \\ G_k & H_k \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} H_{n+m} \\ G_{m+k} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\,(-b)^n\, H_{k-n}}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_k & -\Delta G_n \\ -G_k & H_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_{n+m} \\ G_{m+k} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(-b)^n\, H_{k-n}}\begin{bmatrix} H_kH_{n+m} - \Delta G_nG_{m+k} \\ -G_kH_{n+m} + H_nG_{m+k} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

dir. Matris eşitliğinden

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{1}{(-b)^n H_{k-n}} (H_k H_{n+m} - \Delta G_n G_{m+k}) \\ G_m &= \frac{1}{(-b)^n H_{k-n}} (H_n G_{m+k} - G_k H_{n+m}) \end{aligned}$$

dir. Teorem 4.11 ve Teorem 4.15 yardımıyla

$$\begin{aligned} 4(-b)^m &= \frac{\left[(H_k H_{n+m} - \Delta G_n G_{m+k})^2 - \Delta (H_n G_{m+k} - G_k H_{n+m})^2 \right]}{(-b)^{2n} H_{k-n}^2} \\ 4(-b)^{2n+m} H_{k-n}^2 &= H_{n+m}^2 \left(H_k^2 - \Delta G_k^2 \right) + 2\Delta G_{m+k} H_{n+m} (H_n G_k - G_n H_k) \\ &\quad + \Delta G_{m+k}^2 \left(\Delta G_n^2 - H_n^2 \right) \\ &= H_{n+m}^2 4(-b)^k + 2\Delta G_{m+k} H_{n+m} 2(-b)^n G_{k-n} \\ &\quad + \Delta G_{m+k}^2 (-4)(-b)^n \\ 4(-1)^{2n+m} b^{2n+m} H_{k-n}^2 &= H_{n+m}^2 4(-1)^k b^k + 4\Delta (-1)^n b^n G_{k-n} G_{m+k} H_{n+m} \\ &\quad - 4(-1)^n b^n \Delta G_{m+k}^2 \end{aligned}$$

olur. Buradan eşitliğin her iki tarafı $\frac{(-1)^k}{4b^k}$ ile çarpılıp düzenlenirse

$$(-1)^{m+k} b^{2n+m-k} H_{k-n}^2 = H_{n+m}^2 + \Delta (-1)^{n+k} b^{n-k} G_{m+k} (G_{k-n} H_{n+m} - G_{m+k})$$

elde edilir. □

Sonuç 4.27. *Her m pozitif tam sayısı için,*

1. $4(-b)^{2m} = H_{2m}^2 - \Delta G_{2m}^2$,
2. $a^2 b^{2m-1} = \frac{\Delta}{b} G_{2m+1}(H_{2m} - G_{2m+1}) - H_{2m}^2$,
3. $4(-b)^{2m+1} = H_{2m+1}^2 - \Delta G_{2m+1}^2$.

İspat Teorem 4.26'da $n = m = k$ alınırsa Eşitlik 1, yine Teorem 4.26'da $n = m$, $k = m + 1$ alınırsa Eşitlik 2 ve Teorem 4.26'da $n = k = m + 1$ alınırsa da Eşitlik 3 elde edilir. □

Sonuç 4.28. *Her m pozitif tam sayısı için aşağıdaki ifadeler doğrudur;*

1. $L_{2m}^2 = 5F_{2m}^2 + 4,$
2. $L_{2m}^2 + 1 = 5F_{2m+1}(L_{2m} - F_{2m+1}),$
3. $5F_{2m+1}^2 = L_{2m+1}^2 + 4.$

İspat (4.8) ve (4.10) bağıntısında $a = b = 1$ olduğunda, $G_n = F_n$ ve $H_n = L_n$ dir. Teorem 4.26 ve Sonuç 4.27'den istenilen eşitlikler elde edilir. □

Teorem 4.29. *Her n, m, k pozitif tamsayısı ve $n \neq k$ olmak üzere*

$$(-1)^{m+k+1} b^{2n+m-k} \Delta G_{k-n}^2 = H_{n+m}^2 - (-1)^{n+k} b^{n-k} H_{m+k}(H_{k-n}H_{n+m} - H_{m+k})$$

dir.

İspat Teorem 4.12 yardımıyla,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} H_{n+m} \\ H_{m+k} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_nH_m + \Delta G_nG_m \\ H_mH_k + \Delta G_mG_k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_n & \Delta G_n \\ H_k & \Delta G_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_m \\ G_m \end{bmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. O halde n ve k pozitif tam sayıları için

$$B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_n & \Delta G_n \\ H_k & \Delta G_k \end{bmatrix}$$

matrisini tanımlayalım. Şimdi Teorem 4.15 kullanılarak B matrisinin determinantı

$$\begin{aligned}\det(B) &= \frac{1}{4}\Delta(G_kH_n - G_nH_k) \\ &= \frac{1}{2}\Delta(-b)^n G_{k-n}\end{aligned}$$

olarak bulunur. $n \neq k$ olduğundan $\det(B) \neq 0$ dır ve B matrisinin tersi vardır. Buradan

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} H_m \\ G_m \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} H_n & \Delta G_n \\ H_k & \Delta G_k \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} H_{n+m} \\ H_{m+k} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\Delta(-b)^n G_{k-n}}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \Delta G_k & -\Delta G_n \\ -H_k & H_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_{n+m} \\ H_{m+k} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(-b)^n G_{k-n}}\begin{bmatrix} G_kH_{n+m} - G_nH_{m+k} \\ \frac{H_nH_{m+k} - H_kH_{n+m}}{\Delta} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

dır. Matris eşitliğinden de

$$
\begin{aligned}
H_m &= \frac{G_k H_{n+m} - G_n H_{m+k}}{(-b)^n G_{k-n}} \\
G_m &= \frac{H_n H_{m+k} - H_k H_{n+m}}{\Delta (-b)^n G_{k-n}}
\end{aligned}
$$

dır. Teorem 4.11 ve Teorem 4.15 yardımıyla da

$$
\begin{aligned}
4(-b)^m &= \frac{(G_k H_{n+m} - G_n H_{m+k})^2}{(-b)^{2n} G_{k-n}^2} - \frac{\Delta (H_n H_{m+k} - H_k H_{n+m})^2}{\Delta^2 (-b)^{2n} G_{k-n}^2} \\
4(-b)^{2n+m} \Delta G_{k-n}^2 &= H_{n+m}^2 \left(\Delta G_k^2 - H_k^2\right) + 2H_{n+m} H_{m+k} \left(H_k H_n - \Delta G_k G_n\right) \\
&\quad + H_{m+k}^2 \left(\Delta G_n^2 - H_n^2\right) \\
&= H_{n+m}^2 (-4)(-b)^k + 4(-b)^n H_{k-n} H_{n+m} H_{m+k} \\
&\quad - 4(-b)^n H_{m+k}^2 \\
4(-1)^{2n+m} b^{2n+m} \Delta G_{k-n}^2 &= H_{n+m}^2 4(-1)^{k+1} b^k + 4(-1)^n b^n H_{k-n} H_{n+m} H_{m+k} \\
&\quad + 4(-1)^{n+1} b^n H_{m+k}^2
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan eşitliğin her iki tarafı $\frac{(-1)^{k+1}}{4b^k}$ ile çarpılıp düzenlendiğinde

$$
(-1)^{m+k+1} b^{2n+m-k} \Delta G_{k-n}^2 = H_{n+m}^2 - (-1)^{n+k} b^{n-k} H_{m+k}(H_{k-n} H_{n+m} - H_{m+k})
$$

elde edilir. □

Sonuç 4.30. *Her m pozitif tam sayısı için $n \neq k$ olmak üzere*

$$
\Delta b^{2m-1} = H_{2m}^2 - H_{2m+1} H_{2m-1}
$$

dir.

İspat Teorem 4.29'da $n = m$ ve $k = m + 1$ alınırsa Önerme 4.10 yardımıyla istenilen eşitlik elde edilir. □

Sonuç 4.31. *Her m pozitif tam sayısı için*

$$
L_{2m}^2 = L_{2m+1} L_{2m-1} + 5
$$

dir.

İspat Önerme 4.10'da $a = b = 1$ olduğunda, $H_n = L_n$ dir. Teorem 4.29 ve Sonuç 4.30'dan istenilen eşitlik elde edilir. □

Teorem 4.32. *Her n, m, k tamsayısı için $n \neq k$ olmak üzere,*

$$(-1)^{m+k} b^{m+k} G_{n-k}^2 = G_{n+m}^2 - H_{n-k} G_{n+m} G_{m+k} + (-1)^{n+k} b^{n-k} G_{m+k}^2$$

dir.

İspat Teorem 4.12 yardımıyla,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_{n+m} \\ G_{m+k} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} G_n H_m + H_n G_m \\ G_m H_k + H_m G_k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} G_n & H_n \\ G_k & H_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_m \\ G_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde n ve k pozitif tam sayıları için

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} G_n & H_n \\ G_k & H_k \end{bmatrix}$$

matrisini tanımlayalım. Teorem 4.15 kullanılarak B matrisinin determinantı

$$\begin{aligned} \det(B) &= \frac{1}{4} (G_n H_k - H_n G_k) \\ &= \frac{1}{2} (-b)^k G_{n-k} \end{aligned}$$

dır. $n \neq k$ olduğundan $\det(B) \neq 0$ dır. O halde B matrisinin tersi vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_m \\ G_m \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} G_n & H_n \\ G_k & H_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_{n+m} \\ G_{m+k} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(-b)^k G_{n-k}} \begin{bmatrix} H_k G_{n+m} - H_n G_{m+k} \\ G_n G_{m+k} - G_k G_{n+m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Matris eşitliğinden

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{H_k G_{n+m} - H_n G_{m+k}}{(-b)^k G_{n-k}} \\ G_m &= \frac{G_n G_{m+k} - G_k G_{n+m}}{(-b)^k G_{n-k}} \end{aligned}$$

dir. Teorem 4.11 ve Teorem 4.15'ten

$$\begin{aligned}
4(-b)^m &= \frac{\left(H_k G_{n+m} - H_n G_{m+k}\right)^2 - \Delta\left(G_n G_{m+k} - G_k G_{n+m}\right)^2}{(-b)^{2k} G_{n-k}^2} \\
4(-b)^{m+2k} G_{n-k}^2 &= G_{n+m}^2\left(H_k^2 - \Delta G_k^2\right) + 2G_{n+m}G_{m+k}\left(\Delta G_n G_k - H_n H_k\right) \\
&\quad + G_{m+k}^2\left(H_n^2 - \Delta G_n^2\right) \\
&= 4(-b)^k G_{n+m}^2 - 4(-b)^k H_{n-k} G_{n+m} G_{m+k} \\
&\quad + 4(-b)^n G_{m+k}^2 \\
4(-1)^{m+2k} b^{m+2k} G_{n-k}^2 &= 4(-1)^k b^k G_{n+m}^2 - 4(-1)^k b^k H_{n-k} G_{n+m} G_{m+k} \\
&\quad + 4(-1)^n b^n G_{m+k}^2
\end{aligned}$$

hesaplanır. Buradan her iki taraf $\frac{(-1)^k}{4b^k}$ ile çarpılıp düzenlenirse

$$(-1)^{m+k} b^{m+k} G_{n-k}^2 = G_{n+m}^2 - H_{n-k} G_{n+m} G_{m+k} + (-1)^{n+k} b^{n-k} G_{m+k}^2$$

elde edilir. □

Sonuç 4.33. *Her m pozitif tam sayısı için*

$$b^{2m} = G_{2m+1}^2 - aG_{2m}G_{2m+1} - bG_{2m}^2$$

dır.

İspat Teorem 4.32'de $n = m$, $k = m + 1$ alınıp Sonuç 4.10 yardımıyla da istenilen eşitlik elde edilir. □

Teorem 4.32'de $n = m + 1$ ve $k = 0$ alınırsa da aşağıdaki eşitlik elde edilir.

Sonuç 4.34. *Her m pozitif tam sayısı için*

$$(-1)^m b^m G_{m+1}^2 = G_{2m+1}^2 - H_{m+1} G_{2m+1} G_m + (-1)^{m+1} b^{m+1} G_m^2$$

dır.

Sonuç 4.35. *Her m pozitif tam sayısı için*

$$F_{2m+1}^2 = F_{2m}F_{2m+2} + 1$$

dır.

İspat (4.8) bağıntısında $a = b = 1$ olduğunda, $G_n = F_n$ dir. Teorem 4.32 ve Sonuç 4.33'ten

$$1 = F_{2m+1}^2 - F_{2m}F_{2m+1} - F_{2m}^2$$

bulunur. (2.1) bağıntısına göre gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$F_{2m+1}^2 = F_{2m}F_{2m+2} + 1$$

elde edilir. □

5. SONUÇLAR

Bu tezde, Fibonacci ve Lucas sayılarının genellemesi olan G_n ve H_n sayı dizilerinin temel özellikleri araştırılmıştır. Lineer cebir yöntemleri ve matris cebiri yardımıyla, bu sayı dizileri için bazıeşitlikler bulunmuştur. Fibonacci ve Lucas sayı dizilerine indirgenerek eşitliklerden bazıları aşağıda listelenmiştir. Her n, m pozitif tam sayısı için

1. $2L_{n+m} = L_n L_m + 5F_n F_m$,
2. $2F_{n+m} = F_n L_m + L_n F_m$,
3. $2L_{2m} = L_m^2 + 5F_m^2$,
4. $F_{2m} = F_m L_m$,
5. $2L_{2m+1} = L_{m+1} L_m + 5F_{m+1} F_m$,
6. $2F_{2m+1} = F_{m+1} L_m + L_{m+1} F_m$,
7. $2(-1)^m L_{n-m} = L_n L_m - 5F_n F_m$,
8. $2(-1)^m F_{n-m} = F_n L_m - L_n F_m$,
9. $4(-1)^m = L_m^2 - 5F_m^2$,
10. $2(-1)^m = L_{m+1} L_m - 5F_{m+1} F_m$,
11. $2(-1)^m = F_{m+1} L_m - L_{m+1} F_m$,
12. $L_n L_m = (-1)^m L_{n-m} + L_{n+m}$,
13. $F_n L_m = (-1)^m F_{n-m} + F_{n+m}$,
14. $L_m^2 = 2(-1)^m + L_{2m}$,
15. $L_{m+1} L_m = (-1)^m + L_{2m+1}$,
16. $F_{m+1} L_m = (-1)^m + F_{2m+1}$,
17. $4F_{3m} = F_m(3L_m^2 + 5F_m^2)$,

18. $4F_{3m+1} = 2F_m L_m L_{m+1} + F_{m+1}\,(L_m^2 + 5F_m^2)$,

19. $4F_{3m+2} = 2F_{m+1} L_m L_{m+1} + F_m\,\left(L_{m+1}^2 + 5F_{m+1}^2\right)$,

20. $4L_{3m} = L_m^3 + 15F_m^2 L_m$,

21. $4L_{3m+1} = L_m^2 L_{m+1} + 5F_m(F_m L_{m+1} + 2L_m F_{m+1})$,

22. $4L_{3m+2} = L_m L_{m+1}^2 + 5F_{m+1}(F_{m+1} L_m + 2L_{m+1} F_m)$,

23. $L_{2m}^2 = 5F_{2m}^2 + 4$,

24. $L_{2m}^2 + 1 = 5F_{2m+1}(L_{2m} - F_{2m+1})$,

25. $5F_{2m+1}^2 = L_{2m+1}^2 + 4$,

26. $L_{2m}^2 = L_{2m+1} L_{2m-1} + 5$,

27. $F_{2m+1}^2 = F_{2m} F_{2m+2} + 1$.

6. KAYNAKLAR

Alkan, M. 2021. *The generalized Fibonacci sequences on an integral domain. Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics,* 3(2): 60-69.

Anonymous: https://www.shootpetals.com/golden-ratio.html. [Son erişim tarihi: 09.04.2022].

Becker, P. G. 1994. *K-regular power series and Mahler-type functional equations, J. Number Theory,* 49 (3): 269-286.

Borevich, A. I. and Shafarevich, I. R. 1966. Number Theory, Academic Press, New York.

Bowen, R. and Landford, O. E. 1970. *Zeta functions of restrictions of the shift transformation. Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc, Providence, R.I.,* 43-49.

Carlitz, L. 1962. *Generating functions for powers of certain sequences of numbers. Duke Mathematical Journal,* 29(4): 521-537.

Denef, J. 1984. *The rationality of the Poincare series associated to the p-adic points on a variety. Invent. Math.,* 77 (1): 1-23.

Er, M. C. 1984. *Sums of Fibonacci numbers by matrix method. Fibonacci Quarterly,* 22 (3): 204-207.

Falcon, S. and Plaza, A. 2007. *On the Fibonacci k-numbers. Chaos, Solitons and Fractals,* 32 (5): 1615-1624.

Filipponi, P. and Horadam, A. F. 1988. *A matrix approach to certain identities. The Fibonacci Quarterly,* 26 (2): 115-126.

Godase, A. D. and Dhakne, M. B. 2014. *On the properties of k-Fibonacci and k-Lucas numbers. International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics,* 2 (1): 100-106.

Gould, H. W. 1981. *A history of the Fibonacci g-matrix and a higher-dimensional problem. The Fibonacci Quarterly,* 19 (3): 50-57.

Hinkkanen, A. 1994. *Zeta functions of rational functions are rational. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.,* 19 (1): 3-10.

Horadam, A. F. 1965. *Basic properties of a certain generalized sequence of numbers. The Fibonacci Quarterly,* 3 (3): 161-176.

Horadam, A. F. 1996. *Jacobsthal representation numbers. Fib. Quart.,* 34: 40- 54.

Horadam, A. F. 1997. *Jacobstal representation of polynomials. The Fibonacci Quarterly,* 35 (2): 137-148.

Kalman, D. 1982. *Generalized Fibonacci numbers by matrix method. Fibonacci Quarterly,* 20 (1): 73-76.

Karaduman, E. 2004. *An application of Fibonacci numbers in matrices. Applied Mathematics and Computation,* 147: 903-908.

King, C. H. 1960. Some Further Properties of the Fibonacci Numbers. San Jose: CA: San Jose State.

Kolman, B. and Hill, D. R. 2000. Elementary Linear Algebra, Prentice Hall.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. WileyInterscience Publ, Canada, 652 p.

Lines, M.E. 1990. Think of a Number. CRC Press, Florida, 163 p.

Mezo, I. 2009. *Several generating functions for second-order recurrence sequences. J. Integer Seq,* 12(3).

Ozdemir G., Simsek Y. 2016. *Generating functions for two-variable polynomials related to a family of Fibonacci type polynomials and numbers. Filomat,* 30(4): 969-975.

Ozdemir, G., Simsek,Y. and Milovanovic, V. G. 2017. *Generating functions for special polynomials and numbers including Apostol-type and Humbert-type polynomials. Mediterr. J. Math.,* 14(3): 1-17.

Stakhov, A. and Rozin, B. 2006. *Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers. Chaos, Solitons & Fractals,* 27(5): 1162-1177.

Stanica, P. 2000. *Generating functions, weighted and non-weighted sums for powers of second-order recurrence sequences.* Arxiv preprint math/0010149.

Strang, G. 2003. Introduction to Linear Algebra,Wellesley-Cambridge:Wellesley, MA Pub.

Vajda, S. 1989. Fibonacci and Lucas Numbers, And The Golden Section: Theory And Applications. Ellis Horwood Limited, Chichester, England, 189 p.

Waddill, M.E. 1974. *Matrices and generalized Fibonacci sequences. The Fibonacci Quarterly,* 55 (12.4): 381-86.

ÖZGEÇMİŞ

AYŞE YALÇIN

ayseyalcin1401@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2018-2022	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2015-2017	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya