T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

STIRLING KATSAYILI POLİNOM AİLELERİ

Yeliz YILDIZ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2022

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

STIRLING KATSAYILI POLİNOM AİLELERİ

Yeliz YILDIZ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2022

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STIRLING KATSAYILI POLİNOM AİLELERİ

Yeliz YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 07/02/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Levent KARGIN (Danışman)

Doç. Dr. Mümün CAN

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

STIRLING KATSAYILI POLİNOM AİLELERİ

Yeliz YILDIZ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Levent KARGIN
Şubat 2022; 51 sayfa

Bu tez çalışmasında Stirling katsayılı yeni bir polinom ailesi tanımlanmıştır. Bu polinom ailesinin, sayılar teorisinde önemli bir yere sahip Bernoulli ve Euler sayıları ile bu sayıların bazı genellemelerine, bununla birlikte geometrik polinomlara ve yüksek mertebeden geometrik polinomlara indirgendiği tespit edilmiştir. Bu yeni polinom ailesinin özelliklerini elde etmek için bu polinom ailesinin üreteç fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar türünden hesaplanmıştır. Hipergeometrik fonksiyonların sağladığı bazı özellikler kullanılarak bu polinom ailesinin özellikleri incelenmiştir. Özel durumlarda yukarıda bahsi geçen sayı ve polinom aileleri için yeni ve bilinen bağıntılara ulaşılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: II. tip Stirling sayıları, II. tip r-Stirling sayıları, Hipergeometrik fonksiyonlar, Bernoulli sayıları, Euler sayıları, p-Bernoulli sayıları, Euler zigzag sayıları, Apostol-Bernoulli sayıları, Apostol-Euler sayıları, Geometrik polinomlar.

JÜRİ: Doç. Dr. Levent KARGIN
Doç. Dr. Mümün CAN
Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

FAMILIES OF POLYNOMIAL WITH STIRLING COEFFICIENT

Yeliz YILDIZ

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Levent KARGIN
February 2022; 51 pages

In this thesis, a new family of polynomial with Stirling coefficients is defined. It is determined that family of polynomials is reduced to Bernoulli and Euler numbers and some generalizations of these numbers, which have an important place in number theory, along with geometric polynomials and higher order geometric polynomials. To obtain the properties of this new polynomial, its generating function is calculated in terms of hypergeometric functions. The properties of polynomial family are investigated by using some properties provided by the hypergeometric functions. In particular cases, new and known relations for the aforementioned number and polynomial families are reached.

KEYWORDS: Stirling numbers of the second kind, r-Stirling numbers of the second kind, Hypergeometric functions, Bernoulli numbers, Euler numbers, p-Bernoulli numbers, Euler zigzag numbers, Apostol-Bernoulli numbers, Apostol-Euler numbers, Geometric polynomials.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Levent KARGIN
Assoc. Prof. Dr. Mümün CAN
Assoc. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma, Sonuçlar olmak üzere beş ana bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde II. tip Stirling sayılarının ve II. tip Stirling sayıları türünden yazılan birçok polinom ve sayı ailelerinin genel bir tarihçesi verilmiştir. Bu polinom ve sayı ailelerinin bu tez çalışması ve literatürdeki yeri ve öneminden bahsedilmiştir. Bu tez çalışmasının amacı, kapsam ve yöntemi hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

Kaynak Taraması bölümünde çalışmayı iyi özümsemek ve bağlantıları iyi ilişkilendirmek için temel kavramlar ve gösterimlere yer verilmiştir. Bu kapsamda I. ve II. tip Stirling sayıları tanıtılmış ve bu sayıların sağladığı bazı özellikleri verilmiştir. Bununla birlikte bu sayıların bir genellemesi olan I. tip r-Stirling ve II. tip r-Stirling sayıları tanıtılmış ve bilinen bazı temel özellikleri verilmiştir. II. tip Stirling sayıları ile yakın ilişkili olan Bernoulli sayıları ve bu sayıların p-Bernoulli ve Apostol-Bernoulli sayıları gibi bazı genellemeleri tanıtılmıştır. Ayrıca Euler sayıları, bu sayıların bazı genellemeleri ve Euler zigzag sayıları, bazı özellikleri ile birlikte verilmiştir. Son yıllarda üzerinde kapsamlı çalışmalar yapılan geometrik polinomlar ve yüksek mertebeden geometrik polinomlar tanımlanarak bu polinomların bazı temel özellikleri özetlenmiştir.

Materyal ve Metot bölümü hipergeometrik fonksiyonlara ayrılmıştır. Bu fonksiyonların sağladığı dönüşüm formülleri, türev bağıntıları ve integral temsili gibi özellikleri verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde Giriş ve Kaynak Taraması bölümlerinde ayrıntılı olarak ele alınan sayı ve polinom ailelerini genelleyen yeni bir polinom ailesi tanımlanmıştır. Hipergeometrik fonksiyonların özellikleri kullanılarak bu polinomların bazı özellikleri incelenmiştir. Özel durumlarda bilinen polinom ve sayı aileleri için yeni ve bilinen bağıntılar elde edilmiştir Tezin diğer bölümleri Sonuçlar ve Kaynaklar bölümleri olup, bu tez çalışması Özgeçmiş ile bitmektedir.

Bu çalışmanın bu alana katkı sağlayacağı ve diğer akademik çalışmalar için fikir ve ilham vereceği inancındayım.

Bu tez çalışması boyunca bilgi ve tecrübelerini eksik etmeyen ve çalışmaya her koşulda zaman ayıran sayın danışmanım Doç. Dr. Levent Kargın'a teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans eğitimimde emeği geçen tüm bölüm hocalarıma, her zaman varlıkları

ile yanımda olduklarını hissettiren ve beni destekleyen aileme ve kıymetli dostlarıma ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

ÖNSÖZ iii

AKADEMİK BEYAN v

SİMGELER vi

1. GİRİŞ 1

2. KAYNAK TARAMASI 4

   2.1. Temel Kavramlar ve Gösterimler 4

   2.2. I. Tip Stirling Sayıları ve Genellemeleri 6

   2.3. II. Tip Stirling Sayıları ve Genellemeleri 8

   2.4. Bernoulli Sayıları ve Genellemeleri 12

   2.5. Euler Polinomları ve Genellemeleri 17

   2.6. Geometrik Polinomlar ve Genellemeleri 22

3. MATERYAL VE METOT 28

   3.1. Hipergeometrik Fonksiyonlar 28

4. BULGULAR VE TARTIŞMA 31

   4.1. Türev Bağıntıları 33

   4.2. Rekürans Bağıntıları ve Açık Gösterimler 34

5. SONUÇLAR 47

6. KAYNAKLAR 48

ÖZGEÇMİŞ

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum "Stirling Katsayılı Polinom Aileleri" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

07/02/2022

Yeliz YILDIZ

SİMGELER

Simgeler:

$\mathbb{N}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: Negatif olmayan tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\Re(z)$	: z kompleks sayısının reel kısmı
$(z)^{\overline{k}}$, $(z)^{\underline{k}}$	: Artan faktöriyel (Pochhammer sembolü), Azalan faktöriyel
$\delta_{n,k}$	: Kronecker delta fonksiyonu
$\Gamma(z)$	: Gamma fonksiyonu
$\beta(x,y)$	: Beta fonksiyonu
$\binom{z}{k}$	: Binom katsayıları
$\binom{2k}{k}$	: Merkezi binom katsayıları
$\left\{ {n \atop k} \right\}$, $\left[{n \atop k} \right]$	: II. tip Stirling sayıları, I. tip Stirling sayıları
$S(n,i;j)$	: II. tip merkezi olmayan Stirling sayıları
$\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r$, $\left[{n+r \atop k+r} \right]_r$	: II. tip r-Stirling sayıları ve I. tip r-Stirling sayıları
${}_2F_1(a,b;c;z)$	: Hipergeometrik fonksiyonlar
B_n	: Bernoulli sayıları
$E_n(x)$, E_n	: Euler polinomları ve Euler sayıları
A_n	: Euler zigzag sayıları
$w_n(x)$, w_n	: Geometrik polinomlar ve Geometrik sayılar
$\beta_n(\lambda)$	: Apostol-Bernoulli sayıları
$\mathcal{E}_n(\lambda)$	: Apostol-Euler sayıları
$B_{n,p}(x)$	: p-Bernoulli polinomları
$B_{n,p}$	: p-Bernoulli sayıları
$E_n^{(r)}$	: r. mertebeden Euler sayıları
$w_n^{(r)}(x)$	: r. mertebeden geometrik polinomlar
$w_n^{(r)}$	: r. mertebeden geometrik sayılar
$\beta_n^{(r)}(\lambda)$	: r. mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları
$\mathcal{E}_n^{(r)}(\lambda)$	: r. mertebeden Apostol-Euler sayıları

1. GİRİŞ

1700'lü yılların matematikçilerinden biri olan James Stirling'den ismini alan II. tip Stirling sayıları, ilk olarak 1730 yılında Stirling tarafından Methodus Differantialis adlı çalışmasında tanıtılmıştır. Masanobu Saka, bu sayılara özel bir merak duyduğu için 1782 yılında Sanpō-Gakkai adlı eserinde bu sayıları kombinatorik olarak çalışmıştır (Knuth 2005). II. tip Stirling sayıları, kombinatorik olarak n ve k herhangi bir doğal sayı olmak üzere n elemanlı bir kümenin k elemanlı boştan farklı ve ikili ayrık altkümeye parçalanış sayısını verir. $\left\{ {n \atop k} \right\}$ ile gösterilir. Daha derin bir tarihsel incelemesi yapıldığında II. tip Stirling sayılarının ilk kez küme parçalanışları ile Japon halkı tarafından 1500'lü yıllarda özel ismi Genji-ko olan tütsü oyunlarının çözümlerinde kullanıldığı görülebilinir (Knuth 2005). İlk kez Stirling ile 1730'lü yıllarda başlayan bu serüven, yapılan köklü ve birbirinden değerli çalışmalarla geliştirilmiştir (Jordan 1950; Nielsen 1965; Riordan 1968; Comtet 1974; Knuth 1992; Graham vd. 1994). Yapılan güncel çalışmalar ile II. tip Stirling sayıları ilgisini devam ettirmiştir. Bu konuda değerli eserler verilmiştir (Bona 2005; Brualdi 2009; Mazur 2009; Stanley 2011; Boyadzhiev 2012; Quaintance ve Gould 2016; Mansour ve Schork 2016). Stirling sayıları ve notasyonları hakkında köklü ve öğretici bir çalışma da Knuth 1992'dir.

Kombinatorik anlamıyla önemli bir değer kazanan ve geniş bir araştırma alanı sunan II. tip Stirling sayıları, ilerleyen zamanlarda sayılar teorisi, uygulamalı matematik ve lineer cebir gibi matematiğin farklı alanlarında karşımıza çıkmaktadır. Özellikle sayılar teorisinde birçok önemli sayı ve polinom ailelerinin hesaplama formüllerinde kolaylıklar sağlamaktadır. Örneğin Bernoulli ve Euler sayıları sırasıyla

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{k!}{k+1},\ E_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{k!}{2^k}$$

açık gösterimlerine sahiptir (Comtet 1974; Luo 2006a). Bundan başka n elemanlı bir kümenin tüm parçalanışlarının sayısını veren ve Φ_n ile gösterilen Bell (üstel) sayıları aşağıdaki gibi II. tip Stirling sayıları türünden ifade edilir:

$$\Phi_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

(Comtet 1974; Boyadzhiev 2005; Pippenger 2010; Quaintance ve Gould 2016). Ayrıca, Wilf'in varsayımının bir parçası olan olan tamamlayıcı Bell Sayıları, II. tip Stirling sayıları türünden yazılmaktadır:

$$dn = \tilde{B}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

(Tewodros vd. 2013). Bu sayılar aynı zamanda Rao Uppuluri Carpenter sayıları olarak da bilinir (Quaintance ve Gould 2016). A_n ile sembolize edilen Euler zigzag sayısı, n elemanlı bir kümenin alternatif permütasyonlarının sayısıdır ve

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}(1+2^{-n}), & n \text{ tek} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ çift} \end{cases}$$

olmak üzere

$$A_n = \frac{-4^n}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\bar{k}}}{k+1}$$

olarak ifade edilirler (Jha 2019). Kombinatorik anlamı olan bir başka sayı ailesi ise geometrik sayılardır ve II. tip Stirling sayıları türünden

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k!$$

şeklinde hesaplanabilmektedir (Tanny 1975; Boyadzhiev 2005). Geometrik sayıların polinom genellemesi olan ve

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k! x^k$$

olarak tanımlanan geometrik polinomlar üzerine çalışmaları Euler zamanına dayanmaktadır (Schwatt 1924). Geometrik polinomlar geometrik serilerle aşağıdaki ilişkiye sahiptir:

$$\left(x\frac{d}{dx} \right)^n \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k = \frac{1}{1-x} w_n \left(\frac{x}{1-x} \right).$$

(Boyadzhiev 2005). Yukarıdaki serinin bir genel hali ise aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r}{k} k^n x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}} w_n^{(r+1)} \left(\frac{x}{1-x} \right).$$

(Boyadzhiev ve Dil 2016). Burada, $w_n^{(r+1)}(x)$ yüksek mertebeden geometrik polinomlardır ve

$$w_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \binom{\alpha+k-1}{k} k! x^k$$

olarak tanımlanır (Boyadzhiev 2005).

Bu tez çalışmasında, sayılar teorisi ve kombinatorikte çok önemli yere sahip olan ve yukarıda kısaca bahsedilen sayılar ve polinomlar daha genel bir bakış açısıyla ele alınmak istenmiştir. Bu amaç doğrultusunda

$$Y_n(a,b;c;x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{(a)^{\overline{k}}(b)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}} x^k$$

şeklinde bir II. tip Stirling katsayılı polinom tanımlanmıştır. Burada

$$(x)^{\overline{k}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)$$

artan faktöriyel fonksiyonudur. Yukarıdaki formülde özel parametre seçimleriyle bahsi geçen sayılara ve polinomlara kolaylıkla ulaşılmıştır. II. tip Stirling katsayılı bu polinom ailesinin özelliklerini daha iyi analiz edebilmek için ilk olarak hipergeometrik fonksiyonlar türünden bir üreteç fonksiyonu elde edilmiştir. Hipergeometrik fonksiyonların temel özellikleri kullanılarak $Y_n(a,b;c;x)$ polinomu için yüksek mertebeden türevler için kapalı bir formül, rekürans bağıntıları, açık gösterimler ve integral temsili gibi birçok formüle ulaşılmıştır. Elde edilen bu formüllerde özel parametre seçimleri yapılarak bahsi geçen özel sayılar ve polinomlar için daha önceden bilinen birçok bağıntıya ulaşıldığı gibi bu sayılar ve polinomlar için birçok yeni formüllere de ulaşılmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Temel Kavramlar ve Gösterimler

Bu bölümde, bu tez çalışmasında kullanılan bazı tanımlar, temel bağıntılar ve formüller verilecektir. Temel kavram ve gösterimler için Rainville 1960, Comtet 1974, Graham vd. 1994, Wilf 1994, Quaintance ve Gould 2016 kaynaklarından yararlanılmıştır. Daha açık ve kapsamlı bilgilere ulaşmak için tezin kaynakça bölümündeki ilgili kaynaklar incelenebilinir.

Tanım 2.1. *(Comtet 1974; Graham vd. 1994) $z \in \mathbb{C}$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ olsun. $(z)^{\overline{0}} = (z)^{\underline{0}} = 1$ olmak üzere*

$$(z)^{\overline{k}} = z(z+1)(z+2)\dots(z+k-1)$$

$$(z)^{\underline{k}} = z(z-1)(z-2)\dots(z-k+1)$$

eşitlikleri sırası ile artan faktöriyel (Pochhammer sembolü) ve azalan faktöriyel olarak adlandırılır.

Artan ve azalan faktöriyelin bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

1) $\binom{z}{k}$ binom katsayılarını temsil etmek üzere

$$\binom{z}{k} = \frac{z^{\underline{k}}}{k!}$$

şeklinde bir ilişki vardır.

2) $\binom{2k}{k}$ merkezi binom katsayılarını temsil etmek üzere

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\overline{k}} = \binom{2k}{k}\frac{k!}{2^{2k}} \tag{2.1}$$

dır (Comtet 1974; Graham vd. 1994; Quaintance ve Gould 2016).

Tanım 2.2. *(Rainville 1960) $\Re(z) > 0$ için $\Gamma(z)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \tag{2.2}$$

ile tanımlanır.

(2.2)'den $\Gamma(1) = 1$ olmak üzere $a \in \mathbb{N}$ iken

$$\Gamma(a+1) = a!$$

olduğu açıktır.(Rainville 1960). Artan faktöriyel ile Gamma fonksiyonu arasında $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^{-} \cup \{0\}$ iken

$$(a)^{\overline{k}} = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \tag{2.3}$$

şeklinde bir ilişki vardır (Rainville 1960).

Tanım 2.3. *(Rainville 1960) $\Re(x) > 0$, $\Re(y) > 0$ olmak üzere $\beta(x,y)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{2.4}$$

integrali ile tanımlanır.

Beta fonksiyonunun özellikleri aşağıdaki gibidir:

$1)$ Beta ve Gamma fonksiyonu, $\Re(x) > 0$, $\Re(y) > 0$ iken

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.5}$$

şeklinde hesaplanır.

$2)$ $y \in \mathbb{N}_0$ için Beta fonksiyonunun artan faktöriyel ile

$$\beta(x,y+1) = \frac{y!}{(x)^{\overline{y+1}}}$$

şeklinde bir ilişkisi vardır.

$3)$ Beta fonksiyonu

$$\beta(x,y) = \beta(x+1,y) + \beta(y,x+1)$$

bağıntısını sağlar (Rainville 1960).

Tanım 2.4. *(Wilf 1994; Graham vd. 1994) Herhangi bir $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin üstel üreteç fonksiyonu olan f,*

$$f = f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

şeklinde bir kuvvet serisi ile tanımlanır. f, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini üretir denir.

Teorem 2.5. *(Wilf 1994; Graham vd. 1994) f, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini ve g, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini üretsin. O halde*

$$fg, \quad \left\{ \sum_r \binom{n}{r} a_r b_{n-r} \right\}_{n=0}^{\infty} \tag{2.6}$$

dizisini üretir.

İspat $\{a_r\}_{r=0}^{\infty}$ve $\{b_s\}_{s=0}^{\infty}$ herhangi iki dizi olsun. f, $\{a_r\}_{r=0}^{\infty}$ dizisini ve g, $\{b_s\}_{s=0}^{\infty}$ dizisini üretsin.

$$\begin{aligned} fg &= \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r t^r}{r!} \right\} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s t^s}{s!} \right\} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_r b_s}{r!s!} t^{r+s} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left\{ \sum_{r+s=n} \frac{a_r b_s}{r!s!} \right\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

dir. fg çarpımındaki $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları

$$\left[\frac{t^n}{n!} \right] (fg) = c_n$$

şeklinde temsil edilsin. Buna göre (2.7)'den

$$\left[\frac{t^n}{n!} \right] (fg) = \sum_{r+s=n} \frac{a_r b_s n!}{r!s!}$$

elde edilir. Binom katsayılarının aşağıdaki temel özdeşliği

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

kullanılarak

$$c_n = \sum_r \binom{n}{r} a_r b_{n-r}$$

elde edilir. İspat tamamlanır (Wilf 1994). □

2.2. I. Tip Stirling Sayıları ve Genellemeleri

I. tip Stirling sayıları ve genellemelerinin tanımları ve elementer özellikleri için Comtet 1974, Broder 1984, Wilf 1994, Graham vd. 1994, Quaintance ve Gould 2016 kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.6. *(Comtet 1974; Graham vd. 1994; Quaintance ve Gould 2016) $n \in \mathbb{N}_0$ ve $x \in \mathbb{C}$ iken I. tip Stirling sayıları, $\left[{n \atop k} \right]$ ile temsil edilir ve*

$$x(x-1)\dots(x-n+1) = n!\binom{x}{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] x^k \tag{2.8}$$

ile tanımlanır.

Tanımdan görüleceği üzere $\left[{n \atop n} \right] = 1$'dir. $n, k \in \mathbb{N}$ iken $\left[{n \atop 0} \right] = \left[{0 \atop k} \right] = 0$'dır. $1 \leq n < k$ iken ise $\left[{n \atop k} \right] = 0$'dır (Comtet 1974). Bundan başka (2.8) ve aşağıdaki binom özdeşliği

$$(n+1)!\binom{x}{n+1} = n!\binom{x}{n}x - n!\binom{x}{n}n$$

kullanılarak $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere I. tip Stirling sayıları,

$$\left[{n+1 \atop k} \right] = \left[{n \atop k-1} \right] + n \left[{n \atop k} \right] \tag{2.9}$$

rekürans bağıntısını sağlar (Graham vd. 1994; Quaintance ve Gould 2016).

Teorem 2.7. *(Wilf 1994; Quaintance ve Gould 2016) $k \in \mathbb{N}_0$ iken I. tip Stirling sayılarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left[{n \atop k} \right] \frac{t^n}{n!} = (-1)^k \frac{(\ln(1-t))^k}{k!}.$$

İspat $\alpha \in \mathbb{C}$ iken (2.8) kullanılarak

$$\begin{aligned}(1-t)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! \binom{\alpha}{n} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[{n \atop k} \right] \frac{t^n}{n!} \alpha^k\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$(1-t)^\alpha = e^{\alpha \ln(1-t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln(1-t))^k}{k!} \alpha^k$$

dır. Bu durumda α^k'nın katsayıları karşılaştırılarak ispat tamamlanır (Quaintance ve Gould 2016). □

Literatürde I. tip Stirling sayılarının birçok genelleştirmesi vardır. Şimdi ileride ihtiyaç duyacağımız I. tip r-Stirling sayılarının tanımını verelim.

Tanım 2.8. *(Broder 1984) $r \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ olsun. $\left[{n+r \atop k+r}\right]_r$ ile gösterilen I. tip r-Stirling sayıları,*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left[{n+r \atop k+r}\right]_r \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{1-t}\right)^r \left(\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)\right)^k \tag{2.10}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Aşağıda I. tip r-Stirling sayılarının I. tip Stirling sayıları ile ilişkileri verilmiştir:

$$\left[{n \atop k}\right]_0 = \left[{n \atop k}\right] \text{ ve } \left[{n+1 \atop k+1}\right]_1 = \left[{n+1 \atop k+1}\right].$$

(Broder 1984). Bundan başka $\left[{n+r \atop n+r}\right] = 1$, $k > n$ iken $\left[{n+r \atop k+r}\right]_r = 0$ ve $\left[{n+r \atop r}\right]_r = r^{\overline{n}}$'dır (Broder 1984).

2.3. II. Tip Stirling Sayıları ve Genellemeleri

Bu alt bölümde II. tip Stirling sayılarının tanımı ve elementer özellikleri için Comtet 1974, Wilf 1994, Graham vd. 1994, Bona 2005, Mazur 2009, Stanley 2011, Quaintance ve Gould 2016'dan yararlanılmıştır. Bu çalışmanın önemli bir parçası olan II. tip r-Stirling sayılarının tanımı ve elementer özellikleri için ise Broder 1984'ten yararlanılmıştır.

Gould 2016'ya göre II. tip Stirling sayısını tanıtmak, ona kombinatorik bir anlam yüklemek ve bu anlamı geliştirmek için aşağıda verilen küme parçalanışları tanımına ihtiyaç vardır.

Tanım 2.9. *(Comtet 1974; Quaintance ve Gould 2016) En az bir elemanlı S kümesinin en az 1 elemanlı ve kesişimleri boş küme olan alt kümelerden oluşan parçalanma sayısına S'nin küme parçalanışı denir.*

Tanım 2.10. *(Wilf 1994; Quaintance ve Gould 2016) n, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin k alt kümelerden oluşan küme parçalanışlarına II. tip Stirling sayısı denir. Bu sayı ailesi, $\left\{{n \atop k}\right\}$ ile sembolize edilir.*

Örneğin; $S = \{a, b, c\}$ olsun. Üç elemanlı S kümesinin, üç altkümeye $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ olmak üzere bir tane parçalanışı mümkündür. Çünkü yukarıdaki tanımda bahsedildiği üzere $\{a\} \cap \{b\} = \{b\} \cap \{c\} = \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$ ve $S = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$ şeklindeki küme parçalanışı koşullarını sağlar. O halde $\left\{{3 \atop 3}\right\} = 1$'dir. S kümesinin, iki alt kümeden oluşan toplamda üç tane parçalanışı vardır: $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{b\}, \{a, c\}\}$, $\{\{c\}, \{a, b\}\}$. Gerçekten de $\{a\} \cap \{b,c\} = \{b\} \cap \{a,c\} = \{c\} \cap \{a,b\} = \emptyset$'dur ve $\{a\} \cup \{b,c\} = \{b\} \cup \{a,c\} = \{c\} \cup \{a,b\} = S$'dir O halde $\left\{ {3 \atop 2} \right\} = 3$'tür. Benzer şekilde S kümesi, bir alt kümeye $\{\{a,b,c\}\}$ şeklinde 1 tane parçalanışı mümkündür. Bu durumda $\left\{ {3 \atop 1} \right\} = 1$ olur. Sonuç olarak üç elemanlı bir kümenin toplamda beş küme parçalanışı olduğu kolaylıkla görülür. (Quaintance ve Gould 2016).

II. tip Stirling sayılarının tanımından görüleceği üzere bu sayılar, negatif olmayan değerler alır. $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$'dir. $n,\ k \in \mathbb{N}$ iken$\left\{ {n \atop 0} \right\} = \left\{ {0 \atop k} \right\} = 0$'dır. $1 \leq n < k$ iken $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$'dır (Comtet 1974). Bundan başka II. tip Stirling sayıları aşağıdaki rekürans bağıntısı yardımıyla hesaplanabilir.

Teorem 2.11. *(Comtet 1974; Graham vd. 1994; Quaintance ve Gould 2016) $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$ için*

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n \atop k} \right\} \tag{2.11}$$

dır.

İspat $n+1$ tane elemanın, k tane alt kümeye ayrıldığını varsayalım. Eğer $n+1$ elemanı bir alt küme oluşturuyorsa geriye kalan n eleman, $k-1$ kümeye $\left\{ {n \atop k-1} \right\}$ şekilde parçalanır. $n+1$ elemanın kendisi bir alt küme oluşturmuyorsa ve diğer elemanlarla beraber bir kümede bulunuyorsa n eleman k kümeye$\left\{ {n \atop k} \right\}$ şekilde parçalanır. Ayrıca bu elemanı, n tane kümelerden birine yerleştirmenin toplamda k tane yolu vardır. O halde toplam $k\left\{ {n \atop k} \right\}$ yol vardır. İspat tamamlanır (Quaintance ve Gould 2016). □

II. tip Stirling sayıları aşağıdaki teoremde verilen üç temel özelliği sağlar.

Teorem 2.12. *(Comtet 1974; Graham vd. 1994; Quaintance ve Gould 2016) $n,\ k \in \mathbb{N}_0$ iken*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \left\{ {n \atop k} \right\} k!, \tag{2.12}$$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} i^n, \tag{2.13}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{t^n}{n!} = \frac{(e^t-1)^k}{k!} \tag{2.14}$$

dır.

İspat İlk olarak (2.12)'in ispatı ile başlayalım.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} C(n,k)k!$$

açılımındaki $\{C(n,k)\}_{k=0}^{n}$, herhangi bir sayı dizisi olsun. $C(n,k)$'nın rekürans bağıntısının $S(n,k)$'nın rekürans bağıntısına eşit olduğu gösterilirse $C(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$ olduğu kolaylıkla anlaşılır. Başlangıç koşulları gereği $C(0,0) = 1$'dir. $k > n$ ise $C(n,k) = 0$'dır. Şimdi

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{x}{k} C(n+1,k)k!$$

bağıntısında $x = (x-k)+k$ alınarak

$$x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (x-k+1) \binom{x}{k-1} (k-1)! C(n,k-1) + \sum_{k=0}^{n} k \binom{x}{k} k! C(n,k)$$

elde edilir. Burada

$$(x-k+1) \binom{x}{k-1} (k-1)! = \binom{x}{k} k!$$

bağıntısı kullanılırsa

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left[C(n,k-1) + kC(n,k) \right] k! \binom{x}{k}$$

olduğu görülür. $k!\binom{x}{k}$'nın katsayıları karşılaştırılarak

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + kC(n,k)$$

elde edilir. Bu tam anlamı ile $\left\{ {n \atop k} \right\}$ tarafından sağlanan bir rekürans bağıntısıdır. $C(0,0) = 1 = \left\{ {0 \atop 0} \right\}$ ve $k > n$ ise $C(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ başlangıç koşulları ile $n, k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $C(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$ olduğu anlaşılır. İspat tamamlanır (Quaintance ve Gould 2016).

(2.13)'ün ispatına geçelim.

$$f(n,k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} i^n \tag{2.15}$$

olsun. $n = 1$ için

$$f(1,k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} i = \begin{cases} 1 & \text{eğer} \quad k = 1 \\ 0 & \text{eğer} \quad k \neq 1 \end{cases}$$

yazılabilir. O halde

$$f(1,k) = \left\{ {1 \atop k} \right\}$$

dır. $f(0,0) = 1 = \left\{ {0 \atop 0} \right\}$ olduğu açıktır. (2.15) bağıntısı ve

$$\frac{k}{i}\left[\binom{k}{i} - \binom{k-1}{i}\right] = \binom{k}{i}$$

kullanılarak

$$\begin{aligned} f(n+1,k) &= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left\{\binom{k}{i} - \binom{k-1}{i}\right\} i^n \\ &= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i} i^n - \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i} i^n \\ &= kf(n,k) + f(n,k-1) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $f(0,0) = 1$ ve $f(1,k) = 1$ olmak üzere, elde edilen reküran bağıntısı, II. tip Stirling sayısının reküran bağıntısıdır.

$$f(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$$

olur. İspat tamamlanır (Quaintance ve Gould 2016).

Şimdi (2.14)'ün ispatını verelim. $(e^t - 1)^k$'nın binom açılımı kullanılarak

$$(e^t - 1)^k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} e^{kt}$$

elde edilir

$$e^{kt} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kt)^n}{n!}$$

olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} (e^t - 1)^k &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kt)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} k^n \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntıda (2.13) kullanılarak II. tip Stirling sayılarının üreteç fonksiyonu elde edilir (Quaintance ve Gould 2016). □

(2.12) ve (2.13) bağıntılarının ispatları için bu tez çalışmasında (2.11) bağıntısından yararlanılmıştır. (2.12) ve (2.13) bağıntılarını incelemek için kaynakça bölümünden Mazur 2009 ve Stanley 2011 kaynaklarına bakılabilinir. (2.14)'ün farklı bir ispatı için Boyadzhiev 2012 kaynağı incelenebilinir.

Şimdi II. tip Stirling sayılarının bir genellemesini verelim.

Tanım 2.13. *(Broder 1984) $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r$ ile gösterilen II. tip r-Stirling sayıları $k \in \mathbb{N}_0$ iken*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r \frac{t^n}{n!} = \frac{(e^t-1)^k e^{rt}}{k!} \tag{2.16}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

II. tip r-Stirling sayıları, $r = 0$ ve $r = 1$ durumunda II. tip Stirling sayılarına indirgenir:

$$\left\{ {n \atop k} \right\}_0 = \left\{ {n \atop k} \right\} \text{ ve } \left\{ {n+1 \atop k+1} \right\}_1 = \left\{ {n+1 \atop k+1} \right\}.$$

(Broder 1984). Bundan başka

$$\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r = k \left\{ {n-1+r \atop k+r} \right\}_r + \left\{ {n-1+r \atop k-1+r} \right\}_r$$

üçlü rekürans bağıntısını sağlar (Broder 1984). Ayrıca $\left\{ {n+r \atop n+r} \right\}_r = 1$, $k > n$ iken $\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r = 0$ ve $\left\{ {n+r \atop r} \right\}_r = r^n$'dir (Broder 1984).

2.4. Bernoulli Sayıları ve Genellemeleri

Bu alt bölümde Bernoulli sayıları, Apostol-Bernoulli sayıları ve p-Bernoulli sayılarının tanımları ve bağıntıları verilmiştir. Apostol 1951, Abramowitz ve Stegun 1972, Comtet 1974, Graham vd. 1994, Luo ve Srivastava 2005, Boyadzhiev 2007, Olver vd. 2010, Srivastava ve Choi 2012, Rahmani 2015, Quaintance ve Gould 2016 kaynaklarından yararlanılmıştır.

Jacques Bernoulli, sayıların kuvvetler toplamı üzerine yapmış olduğu ünlü çalışmalarıyla bilinen on yedinci yüzyıl matematikçilerinden biridir. Verdiği ilham ve fikirler ile zihinlerde yer edinmeyi başarmıştır. Yaptığı çalışmalar onu Bernoulli sayıları adı verilen rasyonel sayı dizilerini keşfetmeye sürüklemiştir (Quaintance ve Gould 2016).

Tanım 2.14. *(Comtet 1974; Quaintance ve Gould 2016) $|t| < 2\pi$ olmak üzere B_n ile sembolize edilen n. Bernoulli sayısı*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1} \tag{2.17}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Bernoulli sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$B_0 = 1,\, B_1 = \frac{-1}{2},\; B_2 = \frac{1}{6},\, B_4 = \frac{-1}{30},\, B_6 = \frac{1}{42},\, B_8 = -\frac{1}{30}.$$

Bernoulli sayıları aşağıdaki özellikleri ve bağıntıları sağlar:

1) $n \geq 1$ için

$$B_{2n+1} = 0$$

dır. İspatı için Graham vd. 1994 kaynağına bakılabilinir.

2) $n \in \mathbb{N}$ iken çift indisli Bernoulli sayıları için

$$(-1)^{n+1} B_{2n} > 0$$

olduğu kolaylıkla görülür.

3) $B_0 = 1$ ve $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ için Bernoulli sayıları,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = B_n$$

rekürans bağıntısını sağlar.

4) $n \in \mathbb{N}$ iken Bernoulli sayıları,

$$B_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{\binom{n+1}{k-j}}{\binom{n}{k}}$$

açık gösterimine sahiptir.

5) Bernoulli sayıları için $n \in \mathbb{N}$ iken

$$\sum_{k=0}^{n} B_k B_{n-k} = (1-n) B_n - n B_{n-1}$$

bağıntısı sağlanır. (Abramowitz ve Stegun 1972; Graham vd. 1994; Olver vd. 2010; Quaintance ve Gould 2016).

Şimdi Bernoulli sayılarının II. tip Stirling sayıları türünden bir açık formülünü verelim:

Teorem 2.15. *(Comtet 1974; Quaintance ve Gould 2016) n negatif olmayan herhangi bir tamsayı olmak üzere*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{k!}{k+1} \tag{2.18}$$

dir.

İspat (2.17)'da $t = \ln e^t$ olarak düşünülsün. O halde $t = \ln\{1 + (e^t - 1)\}$ düzenlemesi yapılarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} &= \frac{\ln\{1 + (e^t - 1)\}}{e^t - 1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (e^t - 1)^k \\ &\overset{(2.13)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{k+1} \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{k!}{k+1} \right] \end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla anlaşılır. İspat tamamlanır. (Comtet 1974; Quaintance ve Gould 2016).
□

Bu teoremin alternatif kanıtları için Qi ve Guo 2014 kaynağı incelenebilinir.

Bernoulli sayılarının bazı genellemelerini tanıtalım. İlk genelleme Apostol 1951 tarafından verilen Apostol-Bernoulli sayılarıdır.

Tanım 2.16. *(Apostol 1951; Srivastava ve Choi 2012) $\beta_n(\lambda)$ ile gösterilen n. Apostol-Bernoulli sayısı, $\lambda = 1$ iken $|t| < 2\pi$ ve $\lambda \neq 1$ iken $|t| < |\log \lambda|$ iken*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(\lambda) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{\lambda e^t - 1}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Apostol-Bernoulli sayılarının ilk birkaç değeri aşağıdaki gibi listelenebilir:

$$\begin{aligned} &\beta_0(\lambda) = 0,\ \beta_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda - 1},\ \beta_2(\lambda) = -\frac{2\lambda}{(\lambda - 1)^2},\ \beta_3(\lambda) = \frac{3\lambda(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)^3}, \\ &\beta_4(\lambda) = -\frac{4\lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 1)}{(\lambda - 1)^4},\ \beta_5(\lambda) = \frac{5\lambda(\lambda^3 + 11\lambda^2 + 11\lambda + 1)}{(\lambda - 1)^5}. \end{aligned}$$

Herhangi negatif olmayan n tamsayısı için Apostol-Bernoulli sayıları $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ iken

$$\beta_n(\lambda) = n\sum_{k=0}^{n-1}\left\{ {n-1 \atop k} \right\}\frac{k!(-\lambda)^k}{(\lambda-1)^{k+1}},\ \lambda \neq 1 \tag{2.19}$$

şeklinde II. tip Stirling sayıları türünden hesaplanır (Apostol 1951; Boyadzhiev 2007). (2.19) bağıntısının kanıtı için Apostol 1951 kaynağı incelenebilinir.

Bernoulli sayılarının bir diğer genellemesi $\beta_n^{(r)}(\lambda)$ ile gösterilen yüksek mertebeden Apostol-Bernoulli sayılarıdır (Luo ve Srivastava 2005).

Tanım 2.17. *(Luo ve Srivastava 2005; Srivastava ve Choi 2012) $\lambda \in \mathbb{C}$ ve r herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere yüksek mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları $\lambda = 1$ iken $|t| < 2\pi$ ve $\lambda \neq 1$ iken $|t| < |\log \lambda|$ olmak üzere*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n^{(r)}(\lambda)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{\lambda e^t - 1}\right)^r \tag{2.20}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Yüksek mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları II. tip Stirling sayıları türünden n, r $\in \mathbb{N}_0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ iken

$$\beta_n^{(r)}(\lambda) = r!\binom{n}{r}\sum_{k=0}^{n-r}\binom{r+k-1}{k}\left\{ {n-r \atop k} \right\}\frac{k!(-\lambda)^k}{(\lambda-1)^{k+r}} \tag{2.21}$$

şeklinde hesaplanır (Srivastava ve Choi 2012). Bunlardan başka aşağıdaki özellikleri ve bağıntıları sağlar:

1) $\beta_0^{(0)}(\lambda) = 1$ iken $n > 0$ için $\beta_n^{(0)}(\lambda) = 0$'dır. $r = 1$ için

$$\beta_n^{(1)}(\lambda) = \beta_n(\lambda)$$

olur.

2) $n \in \mathbb{N}_0$ iken

$$\beta_n^{(r)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_{n-k}^{(r-1)}(\lambda)\beta_k(\lambda)$$

dır.

3) $n \in \mathbb{N}$ ve r, $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\beta_n^{(r+1)}(\lambda) = \left(1 - \frac{n}{r}\right)\beta_n^{(r)}(\lambda) - n\beta_{n-1}^{(r)}(\lambda)$$

rekürans bağıntısını sağlar (Luo ve Srivastava 2005; Srivastava ve Choi 2012).

Aşağıdaki tanımı vermeden önce materyal metod bölümünde ayrıntılı olarak bahsedeceğimiz hipergeometrik fonksiyonların tanımını verelim.

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)^{\overline{n}}(b)^{\overline{n}}}{(c)^{\overline{n}}} \frac{z^n}{n!} $$

(Rainville 1960).

Tanım 2.18. *(Rahmani 2015) $p \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ için $B_{n,p}$ ile gösterilen p-Bernoulli polinomları*

$$ {}_2F_1(1,1;p+2;(1-e^t))e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,p}(x) \frac{t^n}{n!} $$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

p-Bernoulli polinomlarının ilk birkaç değeri aşağıdaki gibi listelenebilir:

$$ \begin{aligned} B_{0,p}(x) &= 1, \\ B_{1,p}(x) &= x - \frac{1}{p+2}, \\ B_{2,p}(x) &= x^2 - \frac{2x}{p+2} - \frac{p-1}{(p+2)(p+3)}, \\ B_{3,p}(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{p+2} - \frac{3(p-1)x}{(p+2)(p+3)} - \frac{p(p-5)}{(p+2)(p+3)(p+4)}, \\ B_{4,p}(x) &= x^4 - \frac{4x^3}{p+2} - \frac{6p(p-5)x}{(p+2)(p+3)(p+4)} - \frac{(p-1)(p^2-15p-4)}{(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)}. \end{aligned} $$

p-Bernoulli polinomlarının $x = 0$ durumu p-Bernoulli sayılarıdır. Yani $B_{n,p}(0) = B_{n,p}$ olur (Rahmani 2015).

p-Bernoulli sayıları

$$ B_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{k+p+1}{k}^{-1} \left\{ {n \atop k} \right\} k! \tag{2.22} $$

açık gösterimi ile hesaplanırlar (Rahmani 2015). Buradan p-Bernoulli sayıları $p = 0$ durumunda Bernoulli sayılarına indirgenir (Rahmani 2015). Ayrıca $p = -1$ için $B_{n,-1} = (-1)^n$'dir. (Rahmani 2015).

p-Bernoulli sayıları ve polinomları aşağıdaki özellikleri ve bağıntıları sağlar:

1) $n \geq 1$ ve $p \geq 0$ iken aşağıdaki rekürans bağıntısını sağlar:

$$ \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_{k,p} = -pB_{n,p} \tag{2.23} $$

2) $p \geq 0$ iken $B_{0,p} = 1$ olmak üzere;

$$B_{n+1,p} = pB_{n,p} - \frac{(p+1)^2}{(p+2)} B_{n,p+1} \tag{2.24}$$

dır.

3) $p \geq 0$ iken ile II. tip r-Stirling sayıları türünden aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$B_{n,p} = \frac{p+1}{p!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n+p \\ k+p \end{matrix} \right\}_p \frac{(k+p)!}{k+p+1} \tag{2.25}$$

4) $n, p \geq 0$ için

$$B_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{k,p} x^{n-k} \tag{2.26}$$

ve

$$B_{n,p}(x+1) - B_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_{k,p}(x)$$

dir (Rahmani 2015; Kargın 2018).

Bu özellikler ve daha fazlaları Rahmani 2015 ve Kargın 2018 kaynaklarından bulunabilir.

2.5. Euler Polinomları ve Genellemeleri

Bu alt bölümde Euler sayı aileleri ve bu sayı ailelerinin polinom genellemesi, yüksek merteden Euler sayıları, Apostol-Euler sayıları ve yüksek mertebeden Apostol-Euler sayıları tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

Tanım 2.19. *(Comtet 1974; Quaintance ve Gould 2016) $E_n(x)$ ile sembolize edilen Euler polinomları*

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2e^{xt}}{e^t + 1}, \quad |t| < \pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Euler polinomlarının ilk birkaç değeri

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 1, \\ E_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ E_2(x) &= x^2 - x, \\ E_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$E_4(x) = x^4 - 2x^3 + x,$$
$$E_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

dir.

Euler polinomları $n \in \mathbb{N}_0$ iken aşağıdaki özellikleri ve bağıntıları sağlar:

1) Euler polinomları

$$E_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k E_{n-k}(y)$$

rekürans bağıntısını sağlar.

2) $E_k\left(\frac{1}{2}\right) = \tilde{E}_k$ II.tip Euler sayıları olmak üzere Euler polinomları

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{E_k\left(\frac{1}{2}\right)}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

açık gösterimine sahiptir.

3) Euler polinomları

$$E_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n+1}{k} (x+j)^n$$

şeklinde hesaplanır.

4) $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x)$$

bağıntısını sağlar (Abramowitz ve Stegun 1972; Olver vd. 2010; Quaintance ve Gould 2016).

Tanım 2.20. *(Comtet 1974; Quaintance ve Gould 2016) E_n ile sembolize edilen Euler sayıları*

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + 1}, \quad |t| < \pi \tag{2.27}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Euler sayılarının ilk birkaç değeri aşağıdaki gibidir:

$$E_0 = 1, E_1 = \frac{-1}{2}, E_3 = \frac{1}{4}, E_5 = \frac{-1}{2}, E_7 = \frac{17}{8}.$$

Euler sayıları aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $E_n(0) = E_n$ olduğu açıktır.

2) $E_0 = 1$ olmak üzere, $n \in \mathbb{N}$ iken çift indisli Euler sayıları için $E_{2n} = 0$'dır.

3) $E_0 = 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ iken Euler sayıları

$$E_n = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k \tag{2.28}$$

rekürans bağıntısını sağlar.

4) $n \in \mathbb{N}$ iken Euler sayıları ve Bernoulli sayıları

$$E_n = \frac{2\left(1 - 2^{n+1}\right)}{n+1} B_{n+1}$$

ile hesaplanır.

5) Euler sayıları,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k E_{n-k} = 2E_{n+1} - E_n$$

şeklindeki bir rekürans bağıntısını sağlar (Abramowitz ve Stegun 1972; Olver vd. 2010; Quaintance ve Gould 2016).

Teorem 2.21. *(Luo 2006a; Quaintance ve Gould 2016) Euler sayıları II. tip Stirling sayıları türünden aşağıdaki gibi hesaplanır:*

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{k!}{2^k}. \tag{2.29}$$

İspat (2.27) gereği

$$\begin{aligned} \frac{2}{e^t + 1} &= \left(1 + \frac{e^t - 1}{2}\right)^{-1} \\ &\overset{(2.14)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{2^k} \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. İspat tamamlanır. Yukarıdaki teoremin farklı bir kanıtı için Luo 2006a kaynağından yararlanılabilinir. □

Tanım 2.22. *(Srivastava ve Choi 2012) $r \in \mathbb{C}$ olmak üzere $E_n^{(r)}$ ile gösterilen yüksek mertebeden Euler sayıları*

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(r)} \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^t + 1}\right)^r, \ |t| < \pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Yüksek mertebeden Euler sayıları aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $E_0^{(0)} = 1$ iken $n \in \mathbb{N}$ için $E_n^{(0)} = 0$'dır.

2) $r = 1$ için $E_n^{(1)} = E_n$'dir.

3) $r \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$ iken yüksek mertebeden Euler sayıları ve Bernoulli sayıları arasında

$$E_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k+1} \binom{n}{k} \left[E_{k+1}^{(r-1)} - E_{k+1}^{(r)} \right] B_{n-k}$$

şeklinde bir ilişki vardır.

4) n negatif olmayan herhangi bir tamsayı olmak üzere yüksek mertebeden Euler sayıları

$$E_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{(r)^{\overline{k}}}{k!} \tag{2.30}$$

şeklinde bir açık gösterime sahiptir (Luo 2009; Srivastava ve Choi 2012).

Klasik Euler sayıları ve yüksek mertebeden Euler sayılarının Apostol anlamında genelleştirmeleri aktif olarak çalışılan sayı ailelerinden ikisidir.

Tanım 2.23. *(Luo 2006b; Srivastava ve Choi 2012) Sırasıyla $\mathcal{E}_n(\lambda)$ ve $\mathcal{E}_n^{(r)}(\lambda)$ ile gösterilen Apostol-Euler sayıları ve yüksek mertebeden Apostol-Euler sayıları*

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t + 1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n(\lambda) \frac{t^n}{n!}$$

$$\left(\frac{2}{\lambda e^z + 1} \right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(r)}(\lambda) \frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonları ile tanımlanır Burada $\lambda = 1$ iken $|t| < |\pi|$ ve $\lambda \neq 1$ iken $|t| < |\log(-\lambda)|$'dir. (Luo 2006b; Srivastava ve Choi 2012).

İlk birkaç Apostol-Euler sayıları

$$\mathcal{E}_0(\lambda) = \frac{2}{\lambda+1},\ \mathcal{E}_1(\lambda) = -\frac{2\lambda}{(\lambda+1)^2},\ \mathcal{E}_2(\lambda) = -\frac{2\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)^3},$$
$$\mathcal{E}_3(\lambda) = -\frac{2\lambda(\lambda^2-4\lambda+1)}{(\lambda+1)^4},\ \mathcal{E}_4(\lambda) = \frac{2\lambda(\lambda^3-11\lambda^2+11\lambda-1)}{(\lambda+1)^5}.$$

şeklinde hesaplanır.

Bu iki sayı ailesi aşağıdaki açık gösterimlere sahiptir:

$$\mathcal{E}_n(\lambda) = \frac{2}{\lambda+1} \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! \left(\frac{-\lambda}{\lambda+1} \right)^k, \tag{2.31}$$

$$\mathcal{E}_n^{(r)}(\lambda) = \left(\frac{2}{\lambda+1}\right)^r \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \binom{r+k-1}{k} k! \left(\frac{-\lambda}{\lambda+1}\right)^k. \tag{2.32}$$

(Luo 2006b).

Tanım 2.24. *(Andre 1881; Stanley 2011) A_n ile gösterilen Euler zigzag sayıları,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{t^n}{n!} = \sec t + \tan t$$

şeklinde üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Buradan ilk birkaç Euler zigzag sayısı,

$$A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 2, A_4 = 5, A_5 = 16.$$

şeklindedir.

Bu sayı aileleri A_{2n} için sekant ve A_{2n+1} için tanjant sayıları ismini de alır (Stanley 2011). Sekant ve tanjant sayıları sırası ile zig ve zag sayıları olarak da isimlendirilir (Brent ve Harvey 2013).

Euler zigzag sayıları aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $n \in \mathbb{N}$ iken Euler zigzag sayıları,

$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k}$$

rekürans bağıntısını sağlar.

2)Euler zigzag sayı ailesi,

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}(1+2^{-n}), & n \text{ tek} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ çift} \end{cases} \tag{2.33}$$

olmak üzere

$$A_n = \frac{-4^n}{a_n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\overline{k}}}{k+1} \tag{2.34}$$

II. tip Stirling sayıları türünden bir açık gösterimi vardır.

3) Euler zigzag sayılarının çift indisli Bernoulli sayıları ile

$$B_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{2n}{4^{2n} - 2^{2n}} A_{2n-1}$$

ilişkisi vardır.

$4)$ Çift indisli Euler sayıları türünden ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E_{2n} = (-1)^n A_{2n}.$$

$5)$(2.33)'de verildiği üzere; $n = 2k+1$ için A_{2k+1} tanjant sayısı ve $n = 2k$ için A_{2k} sekant sayısıdır (Stanley 2011; Brent ve Harvey 2013; Jha 2019). Bu sayı aileleri, Stanley 2011 tarafından sadece Euler sayısı olarak da adlandırılmıştır.

2.6. Geometrik Polinomlar ve Genellemeleri

Bu alt bölümde geometrik polinomlar ve sayıları ile yüksek mertebeden geometrik polinomlar ve sayıları tanıtılmış ve bazı özellikleri sunulmuştur.

Teorem 2.25. *(Boyadzhiev 2005) $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $g(x)$, n kere türevlenebilir bir fonksiyon ve $D = \frac{d}{dx}$ olmak üzere*

$$(xD)^n g(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k g^{(k)}(x) \tag{2.35}$$

dir.

İspat $n = 0$ durumu açıktır. $n = 1$ için

$$(xD)' g(x) = \sum_{k=0}^{1} \left\{ {1 \atop k} \right\} x^k g^{(k)}(x) = xg'(x)$$

dır. n için doğru olduğunu varsayalım. Son bağıntıdan

$$(xD)^{n+1}(g(x)) = (xD)\left[(xD)^n g(x)\right]$$

yazılır. (2.35) kullanılarak

$$\begin{aligned}
(xD)^{n+1}(g(x)) &= (xD)\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (x^k g^{(k)}(x)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[kx^k g^{(k)}(x) + g^{(k+1)}(x)x^{k+1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} kx^k g^{(k)}(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ {n \atop k-1} \right\} x^k g^{(k)}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.11) ve

$$\left\{ {n \atop -1} \right\} = \left\{ {n \atop n+1} \right\} = 0$$

bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned} (xD)^{n+1}(g(x)) &= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\left\{ {n \atop k} \right\} k + \left\{ {n \atop k-1} \right\} \right] x^k g^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ {n+1 \atop k} \right\} x^k g^{(k)}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde tümevarım gereği ispat tamamlanır (Riordan 1968; Boyadzhiev 2005).
□

(2.35)'da

$$g(x) = \frac{1}{1-x}$$

alınırsa

$$g^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} g(x) = \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

elde edilir (Boyadzhiev 2005). O halde

$$\begin{aligned} (xD)^n \left(\frac{1}{1-x} \right) &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k! \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \left(\frac{x}{1-x} \right)^k . \end{aligned}$$

olur (Quaintance ve Gould 2016). Eğer $w_n(x)$ ile

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k! x^k \tag{2.36}$$

gösterecek olursak

$$(xD)^n \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x} w_n \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

olur (Boyadzhiev 2005). Buradan da

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k = \frac{1}{1-x} w_n \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

hesaplama formülüne ulaşılabilir (Boyadzhiev 2005). Geometrik serilerle olan bu ilişkisinden dolayı $w_n(x)$'e geometrik polinomlar denilir (Boyadzhiev 2005).

Geometrik polinomların ilk birkaç tanesi

$$w_0(x) = 1,$$
$$w_1(x) = x,$$
$$w_2(x) = 2x^2 + x,$$
$$w_3(x) = 6x^3 + 6x^2 + x,$$
$$w_4(x) = 24x^4 + 36x^3 + 14x^2 + x.$$

Teorem 2.26. *(Boyadzhiev 2005) Geometrik polinomların üstel üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-x(e^t-1)}, \left|x(e^t-1)\right| < 1 \tag{2.37}$$

şeklinde hesaplanır.

İspat (2.36) ifadesinde $\frac{t^n}{n!}$kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}x^k k!\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k(e^t-1)^k\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır. □

(2.36)'de $x = 1$ alınırsa geometrik sayılar olarak adlandırılan ve

$$w_n(1) = w_n = \sum_{k=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}k!$$

açık gösterimine sahip sayı ailesi elde edilir (Boyadzhiev 2005). İlk birkaç geometrik sayısı ise

$$w_0 = 1, w_1 = 1, w_2 = 3, w_3 = 13, w_4 = 75$$

şeklindedir. (2.37)'den geometrik sayıların üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2-e^t}$$

dir (Comtet 1974; Boyadzhiev 2005).

(2.37)'de $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{\lambda}{\lambda-1}$ ve $x = -\frac{\lambda}{\lambda+1}$ iken

$$w_n\left(\frac{-1}{2}\right) = E_n$$

$$w_n\left(\frac{-\lambda}{\lambda-1}\right)=\frac{B_{n+1}(\lambda)(\lambda-1)}{n+1}$$
$$w_n\left(\frac{-\lambda}{\lambda+1}\right)=\frac{\lambda+1}{2}\mathcal{E}_n(\lambda)$$

hesaplanır (Boyadzhiev 2007; Boyadzhiev 2012). Böylece Euler, Apostol-Bernoulli ve Apostol-Euler sayılarına ait bir çok özelliğe geometrik polinomlar yardımıyla ulaşılabilir.

(2.35) bağıntısında

$$g(x)=\frac{1}{(1-x)^r}$$

alınırsa

$$(xD)^n\left(\frac{1}{1-x}\right)^r=\sum_{k=0}^{n}\left\{ n \atop k \right\}x^k(r)^{\overline{k}}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{k+r}$$

olur. Eğer $w_n^{(r)}(x)$ ile

$$w_n^{(r)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{ n \atop k \right\}(r)^{\overline{k}}x^k \tag{2.38}$$

gösterecek olursak

$$(xD)^n\left\{\frac{1}{(1-x)^r}\right\}=\frac{1}{(1-x)^r}w_n^{(r)}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

olur (Boyadzhiev 2005). Böylece

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{k}k^nx^k=\frac{1}{(1-x)^r}w_n^{(r)}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

gösterimi elde edilir (Boyadzhiev 2005).

İlk birkaç terimi

$$w_0^{(r)}(x)=1,$$
$$w_1^{(r)}(x)=rx,$$
$$w_2^{(r)}(x)=r(r+1)x^2+rx,$$
$$w_3^{(r)}(x)=r(r+1)(r+2)x^3+3r(r+1)x^2+rx,$$
$$w_4^{(r)}(x)=r(r+1)(r+2)(r+3)x^4+6r(r+1)(r+2)x^3+7r(r+1)x^2+rx$$

şeklindedir.

(2.38)'dan $r=1$ için $w_n^{(1)}(x)=w_n(x)$ olduğu açıktır. Bu nedenle $w_n^{(r)}(x)$ polinomuna yüksek mertebeden geometrik polinomlar denir. (2.38)'dan negatif üst indisli geometrik polinomlar

$$w_n^{(-r)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{ n \atop k \right\}(-1)^k(r)^{\underline{k}}x^k$$

şeklinde hesaplanabilir. (Boyadzhiev 2005).

Teorem 2.27. *(Boyadzhiev 2005) Yüksek mertebeden geometrik polinomların üreteç fonksiyonu,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{1}{1-x(e^t-1)}\right)^r \tag{2.39}$$

şeklindedir.

İspat (2.38) bağıntısında $\frac{t^n}{n!}$ kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{ n \atop k \right\} x^k (r)^{\overline{k}}\frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k (e^t-1)^k \frac{(r)^{\overline{k}}}{k!}\end{aligned}$$

olur. İspat tamamlanır. □

Yüksek mertebeden geometrik polinomlar aşağıdaki özellikleri ve bağıntıları sağlar:

$1)$ $r=0$ için $w_n^{(0)}(x) = \delta_{n,0}$'dır.

$2)$ $n \in \mathbb{N}_0$ ve $r > 0$ iken

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} w_k^{(r+1)}(y) = \frac{1}{ry} w_{n+1}^{(r)}(y) \tag{2.40}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} w_k^{(r)}(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right) w_n^{(r)}(x) - \frac{1}{x} w_n^{(r-1)}(x) \tag{2.41}$$

rekürans bağıntılarına sahiptir.

$3)$ $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$w_n^{(r)}(y) = \sum_{k=0}^{n}\left\{ n+r \atop k+r \right\}_r (-1)^{n+k}(r)^{\overline{k}}(y+1)^k \tag{2.42}$$

şeklinde hesaplanabilir.

$4)$ Tüm negatif olmayan m, n, r'ler için

$$w_{n+m}^{(r)}(y) = \sum_{k=0}^{m}\left\{ m+r \atop k+r \right\}_r (r)^{\overline{k}}(-1)^{m+k}(y+1)^k w_n^{(r+k)}(y) \tag{2.43}$$

ve

$$w_{n+m}^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{k}\left\{ m \atop j \right\}(r)^{\overline{j}} j^{n-k} x^j w_k^{(r+j)}(x) \tag{2.44}$$

şeklinde hesaplanabilir (Boyadzhiev ve Dil 2016; Kargın ve Cenkci 2019).

(2.38)'te $x = 1$ alınarak yüksek mertebeden geometrik sayılara ulaşılır:

$$w_n^{(r)}(1) = w_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (r)^{\overline{k}}.$$

Böylece (2.39)'ten $w_n^{(r)}$ sayıları için

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(r)} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2 - e^t}$$

üreteç fonksiyonu elde edilir (Boyadzhiev 2005).

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Hipergeometrik Fonksiyonlar

Bu alt bölümde Rainville 1960, Lebedev ve Silverman 1972, Andrews vd. 1999, Abramowitz ve Stegun 1972 kaynaklarından derlenmiştir.

Tanım 3.1. *(Rainville 1960) a, $b \in \mathbb{C}$ ve $c \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ olmak üzere hipergeometrik seriler*

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)^{\overline{n}}\,(b)^{\overline{n}}}{(c)^{\overline{n}}} \frac{z^n}{n!} \tag{3.1} $$

olarak tanımlanır.

(Rainville 1960)'a göre hipergeometrik serilerin yakınsaklık koşulu için hazırlıklarımızı yapalım. (3.1) bağıntısının

$$ u_n = \frac{(a)^{\overline{n}}\,(b)^{\overline{n}}}{(c)^{\overline{n}}} \frac{z^n}{n!} $$

olduğunu varsayalım. Oran Testi gereği

$$ \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(a+n)(b+n)z}{(c+n)(n+1)} \right| = |z| $$

olur. $|z| < 1$ iken seri yakınsaktır. Ayrıca a veya b, 0 iken seri 1 olur a veya b herhangi bir negatif tamsayı ise sınırlı bir toplama döner. $|z| = 1$ yakınsaklık bölgesi sınırında serinin mutlak yakınsaması için genel şart ise $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$'dır.

Euler, bu fonksiyonun birçok özelliğini elde etmiştir. Gauss ise daha sistematik ve detaylı çalışmalar yaparak bu fonksiyonlar hakkında daha fazla bilgiye ulaşılmasını sağlamıştır (Rainville 1960).

Şimdi hipergeometrik fonksiyonların türev bağıntıları, integral temsili ve dönüşüm formülü özelliklerini verelim.

Öncelikle hipergeometrik fonksiyonların n. mertebeden türevi aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2. *(Lebedev ve Silverman 1972) Hipergeometrik fonksiyonların n. mertebeden türev bağıntısı*

$$ \frac{d^n}{dz^n}\, {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{(a)^{\overline{n}}(b)^{\overline{n}}}{(c)^{\overline{n}}} F(a+n, b+n; c+n; z) \tag{3.2} $$

İspat Matematiksel tümevarım yöntemi kullanılır. □

Teorem 3.3. *(Rainville 1960)* $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$ *olmak üzere hipergeometrik fonksiyonun bir integral temsili aşağıdaki gibidir:*

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dz. \quad (3.3)$$

İspat $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $\frac{(b)^{\overline{n}}}{(c)^{\overline{n}}}$ ifadesinde (2.3) kullanılarak

$$\frac{(b)^{\overline{n}}}{(c)^{\overline{n}}} = \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Bir beta integrali elde etmek amacıyla yukarıdaki eşitlik

$$\frac{(b)^{\overline{n}}}{(c)^{\overline{n}}} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(n+c)}$$

şeklinde düzenlensin. (2.5) ve (2.4) kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{(b)^{\overline{n}}}{(c)^{\overline{n}}} &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \beta(n+b, c-b) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1} dt \end{aligned}$$

elde edilir. $|z| < 1$ iken (3.1) kullanılarak

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (a)^{\overline{n}} \frac{(zt)^n}{n!} \right) dt$$

bulunur. Burada

$$(1-zt)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} (a)^{\overline{n}} \frac{(zt)^n}{n!}$$

olduğu kullanılırsa istenen elde edilir. (Rainville 1960; Lebedev ve Silverman 1972; Andrews vd. 1999). □

Pfaff ve Euler dönüşümlerini hesaplayalım ve yukarıdaki integral temsili yardımı ile bu dönüşümleri ispatlayalım.

Teorem 3.4. *(Andrews vd.1999)* $\mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}$ *iken Pfaff dönüşümleri aşağıdaki gibi hesaplanır:*

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-a} \, {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{-z}{1-z}\right). \quad (3.4)$$

İspat (3.3)'de t yerine $1-s$ alınarak

$$_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1(1-s)^{b-1}s^{c-b-1}(1-z+zs)^{-a}ds$$

hesaplanabilinir. Son integral bağıntısında

$$(1-z+zs)\frac{(1-z)}{(1-z)}=(1-z)\left(1-\frac{zs}{z-1}\right)$$

düzenlemesi yapılırsa

$$_2F_1(a,b;c;z)=\frac{(1-z)^{-a}\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\left(1-\frac{zs}{z-1}\right)^{-a}s^{c-b-1}(1-s)^{b-1}ds$$

elde edilir. İspat tamamlanır (Andrews vd. 1999). □

Not 3.5. *Pfaff dönüşümünün farklı bir kanıtı için Rainville 1960 ve Andrews vd. 1999 kaynaklarına bakılabilinir.*

Teorem 3.6. *(Andrews vd. 1999) Euler dönüşümü*

$$_2F_1(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,c-b;c;z) \tag{3.5}$$

dir.

İspat Hipergeometrik fonksiyonlar, a ve b parametrelerinde simetrik olduğundan Pfaff dönüşümü gereği

$$_2F_1(a,b;c;z)=(1-z)^{-a}\left(1-\frac{z}{z-1}\right)^{-c+b}{}_2F_1\left(c-a,c-b;c;z\right)$$

yazılabilinir. Bu şart $\mathrm{Re}\,(z)<\frac{1}{2}$ iken sağlanır (Andrews vd. 1999). □

Ayrıca bu çalışmada kullanılacak olan iki kuadratik dönüşüm aşağıdaki gibidir.

1) $|z|<1$ ve $a-b+1>0$ olmak üzere

$$_2F_1(a,b;a-b+1;z)=(1+z)^{-a}{}_2F_1\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};a-b+1;\frac{4z}{(1+z)^2}\right) \tag{3.6}$$

dır.

2) $\mathrm{Re}(z)<\frac{1}{2}$ ve $\frac{a+b+1}{2}>0$ olmak üzere

$$_2F_1\left(a,b;\frac{.(a+b+1)}{2};z\right)={}_2F_1\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2};\frac{(a+b+1)}{2};4z(1-z)\right) \tag{3.7}$$

dır (Lebedev ve Silverman 1972; Abramowitz ve Stegun 1972).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

a, b keyfi reel sayılar, c keyfi pozitif bir reel sayı için $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere II. tip Stirling katsayılı yeni bir polinom ailesi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$Y_n(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{(a)^{\overline{k}}(b)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}} x^k. \tag{4.1}$$

(4.1) gösteriminde özel a,b ve c parametreleri alınarak bilinen sayı aileleri ve bu sayı ailelerin polinom genellemeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

i) $a = b = 1$, $c = 2$ ve $x = -1$ alınırsa (2.18) gereğince

$$Y_n(1, 1; 2; -1) = B_n$$

dir.

ii) $a = 1$, $b = c$, $x = -\frac{\lambda}{\lambda-1}$ alınarak ve (2.19) bağıntısı kullanılarak $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ iken

$$Y_n(1, b; b; -\frac{\lambda}{\lambda - 1}) = \frac{\beta_{n+1}(\lambda)(\lambda - 1)}{n + 1}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

iii) $a = r$, $b = c$, $x = -\frac{\lambda}{\lambda-1}$ alınarak ve (2.21) bağıntısı kullanılarak $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ ve $r \in \mathbb{N}$ iken

$$Y_n\left(r, b; b; -\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right) = \frac{\beta_{n+r}^{(r)}(\lambda)(\lambda - 1)^r}{(n + r)^{\underline{r}}}$$

dir.

iv) $a = b = 1$, $c = p + 2$, $x = -1$ alınarak, (2.22) gereği

$$Y_n(1, 1; p + 2; -1) = B_{n,p}$$

dir.

v) $a = 1$, $b = c$, $x = \frac{-1}{2}$ alınırsa (2.29) gereği

$$Y_n\left(1, b; b; \frac{-1}{2}\right) = E_n$$

dir.

vi) $a = r$, $b = c$, $x = \frac{-1}{2}$ alınırsa (2.30) gereği

$$Y_n\left(r, b; b; \frac{-1}{2}\right) = E_n^{(r)}$$

dir.

vii) $a = 1$, $b = c$, $x = -\frac{\lambda}{\lambda+1}$ özel seçimleri ve (2.31) bağıntısı kullanılarak

$$Y_n\left(1, b; b; -\frac{\lambda}{\lambda+1}\right) = \frac{\lambda+1}{2}\mathcal{E}_n(\lambda)$$

dır.

viii) $a = r$, $b = c$, $x = -\frac{\lambda}{\lambda+1}$ alınarak ve (2.32) bağıntısı kullanılarak

$$Y_n\left(r, b; b; -\frac{\lambda}{\lambda+1}\right) = \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^r \mathcal{E}_n^{(r)}(\lambda)$$

dır.

ix) $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$, $c = 2$, $x = -1$ alınarak ve (2.34) kullanılarak

$$Y_n\left(1, \frac{3}{4}; 2; -1\right) = -A_n\frac{a_n}{4^n}$$

olduğu kolaylıkla anlaşılır. Burada a_n, (2.33)'de verildiği gibidir. Özel olarak A_{2k+1} tanjant sayısı olmak üzere

$$Y_{2k+1}\left(1, \frac{3}{4}; 2; -1\right) = -A_{2k+1}\frac{a_{2k+1}}{4^{2k+1}}$$

ve A_{2k} sekant sayısı olmak üzere

$$Y_{2k}\left(1, \frac{3}{4}; 2; -1\right) = -A_{2k}\frac{(-1)^k}{4^{2k}}$$

dır.

x) $a = 1$, $b = c$ alınarak ve (2.36) kullanılarak

$$Y_n(1, b; b; x) = w_n(x)$$

dır.

xi) $a = r$, $b = c$ alınarak ve (2.38) kullanılarak

$$Y_n(r, b; b; x) = w_n^{(r)}(x)$$

dır.

$Y_n(a, b; c; x)$ polinomunun üreteç fonksiyonu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.1. *a ve b keyfi reel sayılar ve c herhangi pozitif bir reel sayı olmak üzere*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(a, b; c; x)\frac{t^n}{n!} = {}_2F_1(a, b; c; -x(1-e^t)), \quad \left|-x(1-e^t)\right| < 1 \qquad (4.2)$$

dir.

İspat (4.1) eşitliğinin her iki tarafında $\frac{t^n}{n!}$ kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(a,b;c;x)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left[\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}\frac{(a)^{\overline{k}}(b)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}}x^k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)^{\overline{k}}(b)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}}x^k\sum_{n=k}^{\infty}\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

olur. (2.14) kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(a,b;c;x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)^{\overline{k}}(b)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}}\frac{x^k(e^t-1)^k}{k!}, \quad \left|-x(1-e^t)\right| < 1$$

elde edilir. (3.1) bağıntısı yardımıyla ispat tamamlanır. □

4.1. Türev Bağıntıları

Teorem 4.2. $n \geq 0$ *iken*

$$\frac{(c)^{\overline{n}}}{(a)^{\overline{n}}\,(b)^{\overline{n}}}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}Y_m(a,b;c;x) = \sum_{k=n}^{m}\binom{m}{k}\begin{Bmatrix} k \\ n \end{Bmatrix}Y_{m-k}(a+n,b+n;c+n;x) \tag{4.3}$$

dır.

İspat (3.2) bağıntısından $n \geq 0$ iken

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^n}{\partial x^n}\,{}_2F_1(a,b;c;-x(1-e^t)) \\ &= (e^t-1)^n\frac{(a)^{\overline{n}}(b)^{\overline{n}}}{(c)^{\overline{n}}}\,{}_2F_1(a+n,b+n;c+n;-x(1-e^t))\end{aligned} \tag{4.4}$$

olduğu açıktır. Bu durumda (4.2) ve (2.14) kullanılarak

$$\begin{aligned}&\frac{(c)^{\overline{n}}}{(a)^{\overline{n}}(b)^{\overline{n}}}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d^n}{dx^n}Y_m(a,b;c;x)\frac{t^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{m}\begin{Bmatrix} k \\ n \end{Bmatrix}Y_{m-k}(a+n,b+n;c+n;x)\frac{t^m}{(m-k)!k!}\frac{m!}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{k=n}^{m}\binom{m}{k}\begin{Bmatrix} k \\ n \end{Bmatrix}Y_{m-k}(a+n,b+n;c+n;x)\right]\frac{t^m}{m!}\end{aligned}$$

gelir. Son bağıntıda $\frac{t^m}{m!}$ katsayıları karşılaştırılarak ispat tamamlanır. □

(4.3)'de $a = r$, $b = c$ alınıp

$$Y_m(r,b;b;x) = w_m^{(r)}(x)$$

$$Y_m(r+n, b+n; b+n; x) = w_m^{(n+r)}(x)$$

oldukları kullanılırsa yüksek mertebeden geometrik polinomların yüksek mertebeden türevleri için bir kapalı formül elde edilmiş olunur.

Teorem 4.3. *$n \geq 0$ için*

$$\frac{1}{(r)^{\overline{n}}}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}w_m^{(r)}(x) = \sum_{k=n}^{m}\binom{m}{k}\left\{ {k \atop n} \right\} w_{m-k}^{(n+r)}(x)$$

dir.

Not 4.4. *Boyadzhiev ve Dil 2016 çalışmasında yüksek mertebeden geometrik polinomların ilk birkaç türevi yine yüksek mertebeden geometrik polinomlar cinsinden yazılmış ancak genel bir formül verilmemiştir.*

4.2. Rekürans Bağıntıları ve Açık Gösterimler

Bu alt bölümde hipergeometrik fonksiyonların Euler ve Pfaff dönüşümleri ve integral temsili kullanılarak $Y_n(a, b; c; x)$ polinomu için birçok rekürans bağıntısı ve açık gösterim elde edilmiştir. Elde edilen bağıntıların özel durumları incelenerek literatürde bilinen birçok polinom ve sayı ailesi için yeni ve eski bağıntılara ulaşılmıştır.

İlk olarak Y_n polinomu ile yüksek mertebeden geometrik polinomları ilişkilendiren aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 4.5. *n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere,*

$$Y_n(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y_{n-k}(c-a, c-b; c; x)w_k^{(a+b-c)}(x) \tag{4.5}$$

dir.

İspat (3.5)'te $z = -x(1-e^t)$ alınsın. O halde

$${}_2F_1(a, b; c; -x(1-e^t)) = (1 + x(1-e^t))^{c-a-b}\ {}_2F_1(c-a, c-b; c; -x(1-e^t))$$

elde edilir. (4.2) ve (2.6) kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(a, b; c; x)\frac{t^n}{n!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{Y_{n-k}(c-a,c-b;c;x)}{(n-k)!} \frac{w_k^{(a+b-c)}(x)}{k!} n! \right] \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Y_{n-k}(c-a,c-b;c;x) w_k^{(a+b-c)}(x) \right] \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son bağıntıda $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılarak ispat tamamlanır. □

Teorem 4.6. *n negatif olmayan bir tamsayı ve c pozitif bir reel sayı olmak üzere,*

$$
Y_n(a,b;c;x) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{m} \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \frac{(b)^{\overline{k}}(c-a)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}} w_{n-m}^{(k+b)}(x) x^k \tag{4.6}
$$

dır.

İspat (3.4)'de $z = -x(1-e^t)$ alınsın. O halde

$$
{}_2F_1(a,b;c;-x(1-e^t)) = (1+x(1-e^t))^{-b} {}_2F_1\left(b, c-a; c; \frac{x(1-e^t)}{1+x(1-e^t)}\right)
$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntıda (2.14) ve (2.39) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1(a,b;c;-x(1-e^t)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(b)^{\overline{k}}(c-a)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}} x^k \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{t^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} w_m^{(k+b)}(x) \frac{t^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(b)^{\overline{k}}(c-a)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k \right] \sum_{m=0}^{\infty} w_m^{(k+b)}(x) \frac{t^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(b)^{\overline{k}}(c-a)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k \right] w_m^{(k+b)}(x) \frac{t^{n+m}}{n!m!}
\end{aligned}
$$

elde edilir. (2.6) ve (4.2) aracılığı ile

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(a,b;c;x) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \frac{(b)^{\overline{k}}(c-a)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}} x^k \left\{ \begin{matrix} n-m \\ k \end{matrix} \right\} w_m^{(k+b)}(x) \right] \frac{t^n n!}{(n-m)!m!n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n}{m} \left\{ \begin{matrix} n-m \\ k \end{matrix} \right\} \frac{(b)^{\overline{k}}(c-a)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}} w_m^{(k+b)}(x) x^k \right] \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

olduğu anlaşılır. $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılarak ispat tamamlanır. □

(4.6) bağıntısında $a = r$ ve $b = c$ alınarak yüksek mertebeden geometrik polinomlar için aşağıdaki rekürans bağıntısına ulaşılır.

$$w_n^{(r)}(x) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{m}\left\{ m \atop k \right\}k!x^k w_{n-m}^{(k+r+1)}(x)$$

Benzer şekilde (4.6) bağıntısında $a = r, b = c$ ve $x = -\frac{1}{2}$ alınarak

$$E_n^{(r)} = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\left\{ m \atop k \right\}\frac{k!}{2^k}E_{n-m}^{(k+r+1)},$$

$a = r, b = c$ ve $x = -\frac{\lambda}{\lambda+1}$ alınarak

$$\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^r \mathcal{E}_n^{(r)}(\lambda) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\left\{ m \atop k \right\}k!\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^{r+1}\mathcal{E}_{n-m}^{(k+r+1)}(\lambda),$$

$a = r, b = c$ ve $x = -\frac{\lambda}{\lambda-1}$ alınarak

$$\frac{\beta_{n+r}^{(r)}(\lambda)(\lambda-1)^r}{(n+r)^{\underline{r}}} = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\left\{ m \atop k \right\}\frac{k!\lambda^k\beta_{n-m+k+r+1}^{(k+r+1)}(\lambda)(\lambda-1)^{r+1}}{(n-m+r+k+1)^{\underline{k+r+1}}}.$$

reküans bağıntılarına ulaşılır. Ayrıca (4.6) bağıntısında uygun seçimlerle Bernoulli, p-Bernoulli ve Euler zigzag sayıları için açık gösterimler elde edilebilir.

$a = b = 1, c = 2$ ve $x = -1$ alınarak Bernoulli sayıları için,

$$B_n = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{n-m}\binom{n}{m}\left\{ m \atop k \right\}k!(k+1)^{n-m-1},$$

$a = b = 1, c = p+2$ ve $x = -1$ alınarak p-Bernoulli sayıları için

$$\frac{1}{p+1}B_{n,p} = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{n-m}\binom{n}{m}\left\{ m \atop k \right\}\frac{k!}{(p+k+1)}(k+1)^{n-m},$$

$a = 1, b = \frac{3}{4}, c = 2$ ve $x = -1$ alınarak Euler zigzag sayıları için

$$-A_n\frac{a_n}{4^n} = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{n-m}\binom{n}{m}\left\{ m \atop k \right\}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\overline{k}}}{k+1}\left(k+\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

sonuçlarına ulaşılır.

Aşağıdaki teoremde Y_n polinomlarının yüksek mertebeden geometrik polinomlar cinsinden ifadeleri verilecektir.

Teorem 4.7. *n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere*

$$Y_n(a,b;a-b+1;x) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\left\{ m \atop k \right\}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{a+1}{2}\right)^{\overline{k}}}{(a-b+1)^{\overline{k}}}(4x)^k w_{n-m}^{(2k+a)}(-x) \tag{4.7}$$

dir.

İspat (3.6)'da $z = -x(1-e^t)$ için

$$\begin{aligned}&{}_2F_1(a,b;a-b+1;-x(1-e^t))\\&\quad = (1-x(1-e^t))^{-a}\,{}_2F_1\left(\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};a-b+1;\frac{-4x(1-e^t)}{[1-x(1-e^t)]^2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1) ve (2.39) kullanılarak

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(a,b;a-b+1;x)\frac{t^n}{n!}\\&\quad=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{a+1}{2}\right)^{\overline{k}}}{(a-b+1)^{\overline{k}}}\frac{(4x)^k(e^t-1)^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}w_m^{(2k+a)}(-x)\frac{t^m}{m!}\end{aligned}$$

elde edilir. (2.14) gereğince

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(a,b;a-b+1;x)\frac{t^n}{n!}\\&\quad=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{a+1}{2}\right)^{\overline{k}}}{(a-b+1)^{\overline{k}}}(4x)^k\sum_{n=k}^{\infty}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{t^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}w_m^{(2k+a)}(-x)\frac{t^m}{m!}\\&\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{a+1}{2}\right)^{\overline{k}}}{(a-b+1)^{\overline{k}}}\left\{{n \atop k}\right\}(4x)^k\sum_{m=0}^{\infty}w_m^{(2k+a)}(-x)\frac{t^m}{m!}\\&\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{a+1}{2}\right)^{\overline{k}}}{(a-b+1)^{\overline{k}}}\left\{{n \atop k}\right\}(4x)^k w_m^{(2k+a)}(-x)\frac{t^{m+n}}{m!n!}\end{aligned}$$

dir. (2.6) ve (4.2) kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(a,b;a-b+1;x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-m}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{a+1}{2}\right)^{\overline{k}}}{(a-b+1)^{\overline{k}}}\binom{n}{m}\left\{{n-m \atop k}\right\}(4x)^k w_m^{(2k+a)}(-x)\frac{t^n}{n!}$$

hesaplanır. Son bağıntıda m yerine $n-m$ alınarak ve bu bağıntının $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılarak istenen elde edilir. □

(4.7)'de $a = r$, $b = \frac{r+1}{2}$ ve $c = a-b+1 = \frac{r+1}{2}$ alınarak

$$w_n^{(r)}(x)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\left\{{m \atop k}\right\}\left(\frac{r}{2}\right)^{\overline{k}}(4x)^k w_{n-m}^{(2k+r)}(-x)$$

ve $a = r$, $b = \frac{r+1}{2}$, $c = a-b+1 = \frac{r+1}{2}$ ve $x = \frac{-1}{2}$ alınarak

$$E_n^{(r)}=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-2)^k\binom{n}{m}\left\{{m \atop k}\right\}\left(\frac{r}{2}\right)^{\overline{k}}w_{n-m}^{(2k+r)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

elde edilir.

(4.7) denkleminde $a = 1, b = c$ alınarak ve (2.1) kullanılarak

$$w_n(x) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\left\{\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right\}\binom{2k}{k}k!x^k w_{n-m}^{(2k+1)}(-x)$$

elde edilir.

Benzer şekilde (4.7) denkleminde $a = r$, $b = \frac{r+1}{2}$ ve $c = a - b + 1 = \frac{r+1}{2}$ve sırasıyla $x = \frac{-\lambda}{\lambda-1}$ ve $x = \frac{-\lambda}{\lambda+1}$ alınarak

$$\frac{\beta_{n+r}^{(r)}(\lambda)(\lambda-1)^r}{(n+r)^{\underline{r}}} = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\left\{\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right\}\left(\frac{r}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{-4\lambda}{\lambda-1}\right)^k w_{n-m}^{(2k+r)}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)$$

ve

$$\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^r \mathcal{E}_n^{(r)}(\lambda) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\left\{\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right\}\left(\frac{r}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{-4\lambda}{\lambda+1}\right)^k w_{n-m}^{(2k+r)}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$$

elde edilir.

Aşağıdaki teoremde Y_n polinomları bu sefer negatif üst indisli geometrik polinomlar cinsinden ifade edilmiştir.

Teorem 4.8. *n negatif olmayan herhangi bir tamsayı olmak üzere*

$$Y_n\left(a, b; \frac{a+b+1}{2}; x\right) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\left\{\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right\}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\overline{k}}}{\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^{\overline{k}}}(4x)^k w_{n-m}^{(-k)}(x) \qquad (4.8)$$

dır.

İspat (3.7)'de z yerine $-x(1-e^t)$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} &{}_2F_1\left(a, b; \frac{(a+b+1)}{2}; -x(1-e^t)\right) \\ &= {}_2F_1\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}; \frac{(a+b+1)}{2}; -4x(1-e^t))[1+x(1-e^t)]\right) \\ &\overset{(3.1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\overline{k}}}{\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^{\overline{k}}}(4x)^k\frac{(e^t-1)^k}{k!}[(1-x(e^t-1))]^k \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda (2.14) ve (2.39) kullanılarak

$$\begin{aligned} &{}_2F_1\left(a, b; \frac{(a+b+1)}{2}; -x(1-e^t)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\overline{k}}}{\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^{\overline{k}}}(4x)^k\right]\frac{t^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}w_m^{(-k)}(x)\frac{t^m}{m!} \end{aligned}$$

hesaplanır. (2.6) ve (4.2) kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n\left(a,b;\frac{a+b+1}{2};x\right)\frac{t^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n}{m}\left\{\begin{matrix} n-m \\ k \end{matrix}\right\}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\overline{k}}}{\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^{\overline{k}}}(4x)^k w_m^{(-k)}(x)\right]\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Son bağıntıda $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılarak

$$Y_n\left(a,b;\frac{a+b+1}{2};x\right)$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n}{m}\left\{\begin{matrix} n-m \\ k \end{matrix}\right\}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\overline{k}}}{\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^{\overline{k}}}(4x)^k w_m^{(-k)}(x)$$

elde edilir. Yukarıdaki son bağıntıda m yerine $n-m$ alınırsa ispat tamamlanır. □

(4.8) bağıntısında $a=r$, $b=c=r+1$ alınarak

$$w_n^{(r)}(x)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\left\{\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right\}\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{r+1}{2}\right)^{\overline{k}}}{(r+1)^{\overline{k}}}(4x)^k w_{n-m}^{(-k)}(x)$$

elde edilir.

(4.8) bağıntısından $a=r$, $b=c=r+1$ ve $x=-\frac{1}{2}$ alınarak

$$E_n^{(r)}=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-2)^k\binom{n}{m}\left\{\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right\}\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{r+1}{2}\right)^{\overline{k}}}{(r+1)^{\overline{k}}}E_{n-m}^{(-k)}$$

elde edilir.

(4.8)'da $a=1$, $b=c=a+1$ alınarak ve (2.1) kullanılarak

$$w_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\binom{2k}{k}\left\{\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right\}\frac{k!}{(k+1)}x^k w_{n-m}^{(-k)}(x)$$

elde edilir.

(4.8)'da $a=r=1$, $b=2$ ve $x=\frac{-1}{2}$ için

$$E_n=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\binom{n}{m}\binom{2k}{k}\left\{\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right\}\frac{k!}{(k+1)}E_{n-m}^{(-k)}$$

dır.

Yüksek mertebeden Apostol-Euler sayıları için uygun parametreler alınarak

$$\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^r\mathcal{E}_n^{(r)}(\lambda)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\left\{\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right\}\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{\overline{k}}\left(\frac{r+1}{2}\right)^{\overline{k}}}{(r+1)^{\overline{k}}}\frac{(-8\lambda)^k}{(\lambda+1)^{2k}}\mathcal{E}_{n-m}^{(-k)}(\lambda)$$

dır. Apostol-Euler sayıları için uygun parametrelerle (2.1) kullanılarak

$$\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\mathcal{E}_n(\lambda)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}\binom{2k}{k}\left\{\begin{matrix}m\\k\end{matrix}\right\}\frac{k!}{(k+1)}\frac{(-2\lambda)^k}{(\lambda+1)^{2k}}\mathcal{E}_{n-m}^{(-k)}(\lambda)$$

olur.

Aşağıdaki teoremde Y_n polinomunun $x=-1$ noktasındaki değeri için açık gösterim verilmiştir.

Teorem 4.9. *$c-a+b>0$ ve $c>0$ olmak üzere*

$$Y_n(a,b;c;-1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{\begin{matrix}n+c-a-b\\k+c-a-b\end{matrix}\right\}_{c-a-b}\frac{(c-a)^{\overline{k}}(c-b)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}} \tag{4.9}$$

elde edilir.

İspat (3.5) bağıntısında $x=-1$ ve $z=1-e^t$ olmak üzere (4.2) bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(a,b,c;-1)\frac{t^n}{n!}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(c-a)^{\overline{k}}(c-b)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}}\frac{(e^t-1)^k}{k!}e^{t(c-a-b)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c-a)^{\overline{k}}(c-b)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}}\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^k\left\{\begin{matrix}n+c-a-b\\k+c-a-b\end{matrix}\right\}_{c-a-b}\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılarak ispat tamamlanır. □

Uygun parametreler seçildiğinde (4.9) bağıntısı, (2.18) ve (2.25) denklemlerine indirgenir. Bunlardan başka (4.9)'de $a=1$, $b=\frac{3}{4}$ ve $c=2$ alındığında Euler-zigzag sayıları için aşağıdaki yeni açık gösterime ulaşılır.

Sonuç 4.10. *n negatif olmayan herhangi tamsayı olmak üzere*

$$-A_n\frac{a_n}{4^n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{\begin{matrix}n+\frac{1}{4}\\k+\frac{1}{4}\end{matrix}\right\}_{\frac{1}{4}}\frac{k!\left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{k}}}{k+1}$$

dir. Burada a_n (2.33)'de verildiği gibidir.

$Y_n(a,b;c;-1)$ için başka bir hesaplama formülü aşağıdaki gibi verilebilinir.

Teorem 4.11. *b ve c pozitif reel sayılar olmak üzere,*

$$Y_n(a,b;c;-1)=\sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{matrix}n+b\\k+b\end{matrix}\right\}_b\frac{(-1)^{n+k}(b)^{\overline{k}}(c-a)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}} \tag{4.10}$$

dir.

İspat (3.4) bağıntısında $x = -1$ ve $z = 1 - e^t$ alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} & e^{-tb}{}_2F_1\left(b, c-a; c; (1-e^{-t})\right) \\ &= e^{-tb}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)^{\overline{k}}(c-a)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}}\frac{(1-e^{-t})}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)^{\overline{k}}(c-a)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}}\frac{(-1)^k\left(e^{-t}-1\right)^k}{k!}e^{-tb} \end{aligned}$$

elde edilir. (2.16) ve(4.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty}Y_n(a,b;c;-1)\frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)^{\overline{k}}(c-a)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}}(-1)^k\sum_{n=k}^{\infty}\left\{\begin{matrix} n+b \\ k+b \end{matrix}\right\}_b(-1)^n\frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{matrix} n+b \\ k+b \end{matrix}\right\}_b\frac{(-1)^{n+k}(b)^{\overline{k}}(c-a)^{\overline{k}}}{(c)^{\overline{k}}}\right] \end{aligned}$$

dir. Son bağıntıda $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılarak istenen elde edilir. □

(4.10) bağıntısında uygun a, b, c parametreleri seçildiğinde Bernoulli ve p-Bernoulli sayıları için iyi bilinen aşağıdaki iki bağıntı elde edilebilir: (Arakawa vd. 2014):

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\left\{\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix}\right\}\frac{k!}{k+1}.$$

(Kargın 2018):

$$\frac{1}{p+1}B_{n,p} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\left\{\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix}\right\}\frac{k!}{(p+k+1)}.$$

Bunlardan başka Euler zigzag sayıları için de aşağıdaki açık gösterime ulaşılır.

Sonuç 4.12. *a_n, (2.33) de verildiği gibi olmak üzere*

$$-A_n\frac{a_n}{4^n} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\left\{\begin{matrix} n+\frac{3}{4} \\ k+\frac{3}{4} \end{matrix}\right\}_{\frac{3}{4}}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\overline{k}}}{k+1}$$

dir.

Aşağıda $Y_n(a,b;c;x)$ polinom ailesi için bir integral temsili oluşturulmuştur.

Teorem 4.13. *Y_n polinomu için integral temsili*

$$Y_n(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 z^{b-1}(1-z)^{c-b-1}w_n^{(a)}(xz)dz \tag{4.11}$$

dir.

İspat (3.3)'de x yerine $-x(1-e^t)$ alınıp (4.2) ve (2.39) kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(a,b;c;x)\frac{t^n}{n!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 z^{b-1}(1-z)^{c-b-1}\sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(a)}(xz)\frac{t^n}{n!}dz$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılarak istenen elde edilir. □

Tezin geri kalan kısmında yukarıdaki integral temsilinde geometrik polinomların özellikleri kullanılarak Y_n polinomu için bazı yeni formüller elde edilecektir. Bu bağlamda ilk sonucumuz Y_n polinomu için bir rekürans bağıntısıdır.

Teorem 4.14. *n negatif olmayan herhangi tamsayı olmak üzere*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y_k(a,b;c;x) = \frac{(c-1)}{x(a-1)(b-1)}Y_{n+1}(a-1,b-1;c-1;x) \tag{4.12}$$

dir.

İspat (4.11) ve (2.40)'den

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y_k(a,b;c;x) &= \frac{\Gamma(c)}{x(a-1)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 z^{b-2}(1-z)^{c-b-1}w_{n+1}^{(a-1)}(xz)dz \\ &= \frac{(c-1)\Gamma(c-1)}{x(a-1)(b-1)\Gamma(b-1)\Gamma(c-b)}\int_0^1 z^{b-2}(1-z)^{c-b-1}w_{n+1}^{(a-1)}(xz)dz \\ &= \frac{(c-1)}{x(a-1)(b-1)}Y_{n+1}(a-1,b-1;c-1;x)\end{aligned}$$

elde edilir. □

Aşağıdaki teoremde (4.12)'de verilen rekürans bağıntısına benzer başka bir formül sunulmuştur.

Teorem 4.15. *$n \geq 1$ için*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y_k(a,b;c;x) &= Y_n(a,b;c;x) + \frac{1}{x}\frac{c-1}{b-1}\left[Y_n(a,b-1;c-1;x) - Y_n(a-1,b-1;c-1;x)\right]\end{aligned} \tag{4.13}$$

dir.

İspat (4.11)'da eşitliğin her iki tarafını $\binom{n}{k}$ ile çarpılıp, k üzerinden sonlu toplam alınırsa

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y_k(a,b;c;x)$$
$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 z^{b-1}(1-z)^{c-b-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}w_k^{(a)}(xz)dz$$

elde edilir. (2.41), (4.11)'a yerleştirilerek

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y_k(a,b;c;x)$$
$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 z^{b-1}(1-z)^{c-b-1}\left(1+\frac{1}{xz}\right)w_n^{(a)}(xz)$$
$$-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 z^{b-1}(1-z)^{c-b-1}\frac{1}{xz}w_n^{(a-1)}(xz)dz$$

elde edilir. (4.11) kullanılarak ispat tamamlanır. □

(4.12) ve (4.13) formülleri karşılaştırıldığında aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilir.

Sonuç 4.16. *$n \geq 0$ için ve $a, b \neq 1$ ve $c > 1$ olmak üzere*

$$Y_{n+1}(a-1,b-1;c-1;x)=x\frac{(a-1)(b-1)}{(c-1)}Y_n(a,b;c;x)$$
$$+(a-1)\left[Y_n(a,b-1;c-1;x)-Y_n(a-1,b-1;c-1;x)\right]$$

Teorem (4.13)'deki integral temsilinin bir diğer uygulaması olarak Y_n polinomu için aşağıdaki açık gösterim verilmiştir.

Teorem 4.17. *n negatif olmayan herhangi tamsayı olmak üzere*

$$Y_n(a,b;c;x)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n+k}\begin{Bmatrix}n+a\\k+a\end{Bmatrix}_a\binom{k}{j}\frac{(a)^{\overline{k}}(b)^{\overline{j}}}{(c)^{\overline{j}}}x^j \tag{4.14}$$

dir.

İspat (4.11)'da (2.42) yazılarak

$$Y_n(a,b;c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\begin{Bmatrix}n+a\\k+a\end{Bmatrix}_a(a)^{\overline{k}}$$

$$\times\int_0^1 z^{b-1}(1-z)^{c-b-1}(xz+1)^k dz$$

eşitliğine ulaşılır. Binom açılımı ve (2.4) yardımıyla istenen elde edilir. □

(4.14) formülünün özel durumlarında elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi sıralanabilir.

$a=b=1$, $c=p+2$ ve $x=-1$ için

$$B_{n,p}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n+k+j}\left\{\begin{matrix}n+1\\k+1\end{matrix}\right\}\binom{k}{j}\binom{p+j+1}{j}^{-1}k!$$

elde edilir.

$a=b=1$, $c=2$ ve $x=-1$ seçilerek

$$B_n=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n+k+j}\left\{\begin{matrix}n+1\\k+1\end{matrix}\right\}\binom{k}{j}\frac{k!}{j+1}$$

elde edilir.

$a=1$, $b=c$ ve $x=-\frac{\lambda}{\lambda-1}$ özel değerleri için

$$\frac{B_{n+1}(\lambda)(\lambda-1)}{(n+1)}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n+k+j}\left\{\begin{matrix}n+1\\k+1\end{matrix}\right\}\binom{k}{j}k!\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{j}$$

oluşturulur.

$a=1$, $b=\frac{3}{4}$, $c=2$ ve $x=-1$ iken

$$-A_n\frac{a_n}{4^n}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n+k+j}\binom{k}{j}\left\{\begin{matrix}n+1\\k+1\end{matrix}\right\}\frac{k!(\frac{3}{4})^{\overline{j}}}{j+1}$$

elde edilir. Burada a_n (2.33)'de verilmiştir.

(4.11)'da (2.43) yazılarak

$$\begin{aligned}&Y_{n+m}(a,b;c;x)\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\left\{\begin{matrix}m+a\\k+a\end{matrix}\right\}_a(a)^{\overline{k}}\\&\times\int_0^1 z^{b-1}(1-z)^{c-b-1}(xz+1)^k w_n^{(a+k)}(xz)dz\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda binom açılımı ve (2.4) kullanılırsa aşağıdaki formüle ulaşılır.

Teorem 4.18. *n ve m negatif olmayan tamsayı olmak üzere*

$$Y_{n+m}(a,b;c;x) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=j}^{m}(-1)^{m+k}\left\{\begin{matrix} m+a \\ k+a \end{matrix}\right\}_a \binom{k}{j} \frac{(a)^{\overline{k}}(b)^{\overline{j}}}{(c)^{\overline{j}}} Y_n(a+k, b+j; c+j; x)x^j$$

dir.

Sıradaki açık gösterimi vermeden önce Charalambides 2002 tarafından

$$\sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}\left\{\begin{matrix} k \\ i \end{matrix}\right\} j^{n-k} = S(n,i;j) \tag{4.15}$$

olarak tanımlanan merkezi olmayan II. tip Stirling sayılarını hatırlatalım.

Teorem 4.19. *n ve m negatif olmayan tamsayılar olmak üzere*

$$Y_{m+n}(a,b;c;x) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} S(n,i;j)\left\{\begin{matrix} m \\ j \end{matrix}\right\}(a)^{\overline{i+j}} \frac{(b)^{\overline{i+j}}}{(c)^{\overline{i+j}}} x^{j+i} \tag{4.16}$$

dir.

İspat (4.11)'da n yerine $n+m$ alınırsa,

$$Y_{m+n}(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 z^{b-1}(1-z)^{c-b-1} w_{n+m}^{(a)}(xz)dz$$

elde edilir. (2.44) kullanılarak

$$\begin{aligned} & Y_{m+n}(a,b,c;x) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{k}\left\{\begin{matrix} m \\ j \end{matrix}\right\}(a)^{\overline{j}} j^{n-k} x^j \\ &\times \int_0^1 z^{b+j-1}(1-z)^{c-b-1} w_k^{(a+j)}(xz)dz \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (2.38) ve (2.4) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} & Y_{m+n}(a,b;c;x) \\ &= \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{k=i}^{n}\left\{\begin{matrix} k \\ i \end{matrix}\right\} j^{n-k}\binom{n}{k}\right]\left\{\begin{matrix} m \\ j \end{matrix}\right\}(a)^{\overline{i+j}} \frac{(b)^{\overline{i+j}}}{(c)^{\overline{i+j}}} x^{j+i} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.15) bağıntısıyla da istenen formül elde edilir. □

(4.16) bağıntısının özel durumlarında elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi sıralanabilir.

$a = b = 1$, $c = p + 2$ ve $x = -1$ alınarak

$$B_{m+n,p} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} \left\{ {m \atop j} \right\} S(n,i;j) \frac{(j+i)!(i+j)!}{(p+2)^{\overline{i+j}}}$$

hesaplanır.

$a = b = 1$, $c = 2$ ve $x = -1$ özel seçimleriyle

$$B_{m+n} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} \left\{ {m \atop j} \right\} S(n,i;j) \frac{(j+i)!}{(i+j+1)}$$

elde edilir.

$a = 1$, $b = \frac{3}{4}$, $c = 2$ ve $x = -1$ alınarak

$$-A_{m+n}\frac{a_{n+m}}{4^{n+m}} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} \left\{ {m \atop j} \right\} S(n,i;j) \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\overline{i+j}} (j+i)!}{(i+j+1)!}$$

elde edilir. Burada a_n (2.33)'de verildiği gibidir.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında Stirling katsayılı yeni bir polinom ailesi tanımlanmıştır. Bu polinom ailesi, Bernoulli, p-Bernoulli, Apostol-Bernoulli, Euler, Apostol-Euler, Euler zigzag gibi özel sayı aileleri ve geometrik ve yüksek mertebeden geometrik polinomlar gibi özel polinom ailelerini genellemektedir. Bu polinom ailesinin üreteç fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar türünden hesaplanmıştır. Hipergeometrik fonksiyonlardan yararlanılarak tanımladığımız polinom ailesinin sağladığı açık gösterimler, rekürans bağıntıları, integral gösterimleri gibi bazı özellikleri incelenmiştir. Elde edilen sonuçların özel durumları incelenerek yukarıda bahsi geçen sayı ve polinom aileleri için yeni ve bilinen bağıntılara ulaşılmıştır.

6. KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. 10th.edition. National Bureau of Standarts, Washington, 1046 s.

Andrews, G. E., Asked, R. and Roy, R. 1999. Special Functions. Cambridge University Press, Newyork, 664 s.

André, D. 1881. *Sur les permutations alternées. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* 7: 167-184.

Arakawa,T., Ibukiyama, T. and Kaneko, M. 2014. Bernoulli numbers and Zeta Functions. Springer, Newyork, 274 s.

Apostol, T. M. 1951. *On the Lerch Zeta Function*. *Pacific Journal of Mathematics*, 1(2): 161-167.

Bona, M. 2005. Introduction to Enumerative Combinatorics. The McGraw Hill.Companies, Newyork, 526 s.

Boyadzhiev, K. N. 2005. *A series transformation formula and related polynomials. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005(23): 3849-3866.

Boyadzhiev, K. N. 2007. *Apostol-Bernoulli functions, derivative polynomials and Eulerian polynomials. Advances and Applications in Discrete Mathematics,* 1(2): 109-122.

Boyadzhiev, K. N. 2009. *Exponential Polynomials, Stirling numbers and evulation of some Gamma integrals. Abstract and Applied Analysis,* 2009: 1-18.

Boyadzhiev, K. N. 2012. *Close Encounters with the Stirling Numbers of the Second Kind. Mathematics Magazine*, 85(4): 252-266.

Boyadzhiev, K. N. and Dil, A. 2016. *Geometric polynomials: properties and applications to series with zeta values. Analysis Mathematica,* 42(3): 203-224.

Brent, R. P. and Harvey, D. 2013. *Fast Computation of Bernoulli, Tangent and Secant Numbers. Computational and Analytical Mathematics*, 50: 127-142.

Broder, A. Z. 1984. *The r-Stirling numbers. Discrete Mathematics*, 49(3): 241-259.

Brualdi, R. A. 2009. Introductory Combinatorics. 5th Edition. China Machine Press, 605 s.

Charalambides, A. C. 2002. Enumerative Combinatorics. Chapman and Hall/CRC, USA, 609 s.

Comtet, L. 1974. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, Boston, 343 s.

Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O. 1994. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 678 s.

Jordan, C. 1950. Calculus of Finite Differences. Chelsea Publishing Company, New-York, 652 s.

Jha, S. K. 2019. A new explicit formula for the Euler zigzag number in terms of the Stirling numbers of the second kind. OSF Preprints https://osf.io/s58wy/ [Son erişim tarihi: 31.01 2021]

Kargın, L.and Cenkci, M. 2021. *Recurrences and congruences for higher order geometric polynomials and related numbers.* Ukranian Journal of Mathematics, 73 (12):1619-1637.

Kargın, L. 2018. *On p-Bernoulli and geometric polynomials. International Journal of Number Theory,* 14(02): 595-613.

Knuth, D. E. 1992. *Two Notes on Notation. The American Mathematical Monthly*, 99(5): 403-422.

Knuth, D. E. 2005. The Art of Computer Programming. Volume 4. Pre-Fascicle 4B. Addison Wesley 42 s.

Luo, Q. M. and Srivastava, H. M. 2005. *Some generalizations of the Apostol Bernoulli and Apostol Euler polynomials. Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 308(1): 290-302.

Lebedev, N. N. and Silverman, R. A. 1972. Special Functions and their applications. Prentice Hall, USA, 322 s.

Luo, Q. M. 2006a. *An explicit formula for the Euler polynomials. Integral Transforms and Special Functions,* 17(6): 451-454.

Luo, Q. M. 2006b. *Apostol-Euler Polynomials of Higher order and Gaussian hypergeometric functions. Taiwanese Journal of Mathematics,* 10(4): 917-925.

Luo, Q. M. 2009. *An Explicit Formula for the Euler Polynomials of Higher Order. Applied Mathematics & Information Sciences,* 3(1): 53-58.

Mansour, T. and Schork, M. 2016. Commutation Relations, Normal Ordering, and Stirling Numbers. CRC Press Taylor Francis Group, London, New York, 480 s.

Mazur, D. R. 2009. Combinatorics A Guided Tour The Mathematical Association of America, Washington, 391 s.

Nielsen, N. 1965. Die Gamma funktion. Chelsea Publishing Company, Bronx, Newyork, 448 s.

Olver, F. W. J., Daniel, W. L., Ronald , F. B. and Charles, W. Clark. 2010. NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge University Press, United States of America, 951 s.

Qi, F. and Guo, B. N. 2014. Alternative proofs of a formula for Bernoulli numbers in terms of Stirling numbers. Analysis, 34(3): 311-317.

Quaintance, J. and Gould, H. W. 2016. Combinatorial Identities for Stirling Numbers: The Unpublished Notes of H. W. Gould. World Scientific. Publishing Company, London, 260 s.

Pippenger, N. 2010. *The hypercube of resistors, asymptotic expansions, and preferential arrangements. Mathematics Magazine*, 83 (5): 331-346.

Rahmani, M. 2015. *On p-Bernoulli numbers and polynomials. Journal Of Number Theory*, 157: 350-366.

Rainville, E. D. 1960. Special Functions. The Macmillan Company, Newyork, 365 s.

Riordan, J. 1968. Combinatorial Identities. Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., Newyork. 270 s.

Schwatt, I. J. 1924. An Introduction to the Operations with Series. Press of the University of Pennsylvania, Chelsea, New York, 287 s.

Srivastava, H. M. and Choi, J. 2012. Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals. Elsevier, USA, 657 s.

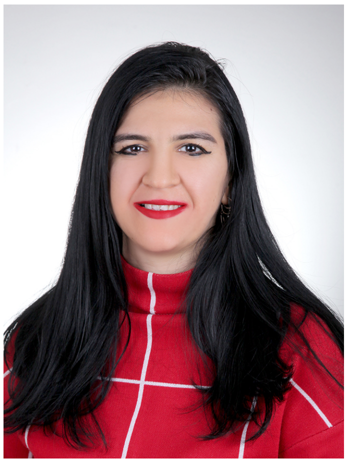
Stanley, R. P. 2011. Enumerative Combinatorics, Volume 1, 2nd edition. Cambridge University Press, 626 s.

Tanny, S. M. 1975. *On some numbers related to the Bell numbers, Canad. Math. Bull. 17*(5): 733–738.

Tewodros, A.,Valerio, D. A. and Victor H. M. 2013. *Complementary Bell Numbers: Arithmetical Properties and Wilf's Conjecture, Advances in Combinatorics* 23-56 pp.

Wilf, H. S. 1994. Generating functionology, 3rd. ed. A K Peters Ltd, Wellesley, Massachusetts, 245 s.

ÖZGEÇMİŞ



Yeliz YILDIZ

E-mail: yelizyildiz89@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2019- 2022	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans	Dicle Üniversitesi
2008-2013	Fen Fakültesi, Diyarbakır