T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

# KOMBİNATÖRYEL EVRİK DÖNÜŞÜMLERLE ÖZEL BAZI SAYI DİZİLERİNİN ANALİZİ

Hamud AHMED

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2022

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# KOMBİNATÖRYEL EVRİK DÖNÜŞÜMLERLE ÖZEL BAZI SAYI DİZİLERİNİN ANALİZİ

**Hamud AHMED**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Bu tez 27/01/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ayhan DİL (Danışman)

Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

Doç. Dr. Seçil ÇEKEN

# ÖZET

**KOMBİNATÖRYEL EVRİK DÖNÜŞÜMLERLE ÖZEL BAZI SAYI DİZİLERİNİN ANALİZİ**

**Hamud AHMED**

**Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı**
**Danışman: Doç. Dr. Ayhan DİL**

**Ocak 2022; 76 sayfa**

Harmonik sayılar ve genelleştirmeleri, birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ve binom katsayıları gibi önemli sayı tiplerini içeren sonlu toplamlar özellikle analiz, sayılar teorisi ve kombinatorik gibi birçok alanda ortaya çıkmaktadırlar. Bu yüzden, söz konusu toplamların hesaplanması ya da kullanışlı başka formlarının elde edilmesi önemlidir. Bu yöndeki araştırmalar için çeşitli teknikler mevcuttur. Bu tez çalışmasında esas olarak üç teknik kullanılmıştır. Birincisi, en meşhurları binom ve Stirling dönüşümleri olan evrik dönüşümler, ikincisi üreteç fonksiyonları ile söz konusu toplamlar arasında kullanışlı ilişkiler kurmaya yarayan seri dönüşüm formülleri, üçüncüsü ise fark operatörleridir. Bu teknikleri içeren klasik ve güncel sonuçlar bir araya getirilerek düzenli bir kaynak oluşturulmuştur.



**ANAHTAR KELİMELER:** Binom dönüşümü, Fark operatörü, Harmonik sayılar, Hiperharmonik sayılar, Laguerre dönüşümü, Lah dönüşümü, Seri dönüşüm formülleri, Stirling dönüşümü, Üreteç fonksiyonları.


**JÜRİ:** Doç. Dr. Ayhan DİL
Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Doç. Dr. Seçil ÇEKEN

# ABSTRACT

## ANALYSIS OF SOME SPECIAL SEQUENCES WITH COMBINATORIAL INVERSE TRANSFORMS

**Hamud AHMED**

**MSc Thesis in MATHEMATICS**
**Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayhan DİL**
**January 2022; 76 pages**

Finite sums, which include important number types such as harmonic numbers and their generalizations, Stirling numbers of the first and second kinds and binomial coefficients, appear in many fields such as analysis, number theory and combinatorics. Evaluating these sums or obtaining other useful forms is therefore important. There are various techniques for research in this direction, we will mainly use three of these techniques together in this thesis. First one is the inverse transformations, the most famous of which are the binomial and Stirling transforms, second one is the series transformation formulas for establishing useful relations between generating functions and the sums in question and the third one is the difference operators. Classic and current results involving these techniques were brought together and a compact reference was created. In addition to the important results in the literature, many new formulas and equations were obtained.



**KEYWORDS:** Binomial transform, Difference operator, Generating functions, Hamonic numbers, Hyperharmonic numbers, Laguerre transform, Lah transform, Series transformation formulas, Stirling transform.


**COMMITTEE:** Assoc. Prof. Dr. Ayhan DİL
Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Assoc. Prof. Dr. Seçil ÇEKEN

# ÖNSÖZ

Bu çalışma temel olarak Kaynak Taraması ile Bulgular ve Tartışma başlıklı iki bölümden oluşmaktadır. Kaynak Taraması kısmında Binom, Stirling, Lah ve Laguerre evrik dönüşümleri (bkz. Comtet 1974, Riordan 1979, Boyadzhiev 2020) ve (I), (II), (III), (IV), (V) olarak numaralandırdığımız seri dönüşüm formülleri (bkz. Comtet 1974, Boyadzhiev 2020) kanıtlarıyla beraber verilmiştir. Bulgular ve Tartışma kısmında ise ilk olarak (I), (II), (III), (IV), (V) seri dönüşüm formülleri kullanılarak çok sayıda önemli polinom ve sayı ailesi için toplam formülleri elde edilmiştir. Daha sonra Spivey 2007-2009 çalışmalarındaki teknikler kullanılarak, fark operatörleri yardımıyla, binom katsayıları veya Stirling sayıları ile başka bir dizinin terimlerinin çarpımlarının sonlu toplamları hesaplanmıştır. Bulgular ve Tartışma bölümünde elde edilen sonuçlardan evrik dönüşümlerin uygulanabileceği bütün sonuçlara bu dönüşümler uygulanarak sonuçlar zenginleştirilmiştir.

Bu çalışma sürecinde, önümü aydınlatan, beni teşvik eden, öğrenmem için bana sabreden ve benden yardımlarını esirgemeyen danışmanım sayın Doç. Dr. Ayhan DİL hocama en kalbi şükranlarımı sunmak istiyorum.

Yüksek lisans eğitimimde bana burs sağlayan Yurtdışı Türkler ve Akraba Topluluklar Başkanlığı'na çok teşekkür ederim. Son olarak da her zaman yanımda olan ve beni destekleyen canım aileme teşekkür etmek isterim.

## İÇİNDEKİLER

## AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Kombinatöryel Evrik Dönüşümlerle Özel Bazı Sayı Dizilerinin Analizi" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

27/01/2022

Hamud AHMED

## SİMGELER

**Simgeler:**

| | |
|---|---|
| $H_n$ | : Harmonik sayı |
| $s(n,k)$ | : Birinci çeşit (işaretli) Stirling sayısı |
| $S(n,k)$ | : İkinci çeşit Stirling sayısı |
| $x^{\overline{n}}$ | : Artan faktöriyel |
| $x^{\underline{n}}$ | : Azalan faktöriyel |
| $B_n(x)$ | : Bernoulli polinomu |
| $B_n$ | : Bernoulli sayısı |
| $h_n^{(r)}$ | : $r$. mertebeden $n$. hiperharmonik sayısı |
| $h_n^{(-r)}$ | : Negatif $r$. mertebeden $n$. hiperharmonik sayısı |
| $L(n,k)$ | : Lah sayısı |
| $Lag(n,k)$ | : Laguerre sayısı |
| $F_n$ | : Fibonacci sayısı |
| $J(n)$ | : Jacobsthal sayısı |
| $G_n$ | : Genocchi sayısı |
| $\delta_{nm}$ | : Kronecker delta |
| $c_n$ | : İkinci çeşit Bernoulli sayısı (birinci çeşit Cauchy sayısı) |
| $\widehat{c}_n$ | : İkinci çeşit Cauchy sayısı |
| $H_n^{\sim}$ | : Skew harmonik sayı |
| $\omega_n(x)$ | : Geometrik polinom |
| $\omega_n$ | : Geometrik sayı |
| $E_n(x)$ | : Euler polinomu |
| $E_n$ | : Euler sayısı |
| $E_n^*$ | : Birinci çeşit Euler sayısı |
| $\phi_n(x)$ | : Üstel polinom |
| $\phi_n$ | : Bell sayısı (üstel sayı) |
| $D_n$ | : Derangement sayısı |

# 1. GİRİŞ

Bazı özel polinom ve sayı aileleri bilimin birçok farklı yerinde çeşitli şekillerde ortaya çıkarlar. Bu nedenle bu polinom ve sayı aileleri ile ilgili özelliklerin, formüllerin ve ilişkilerin belirlenmesine yarayan analizlerin yapılması ve kaynak oluşturulması gereklidir. Bu analizler sırasında çok çeşitli matematik teorileri, yöntemleri ve teknikleri kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasında klasikleşmiş temel analiz ve sayılar teorisi yöntemleri ve bunların güncel varyantları kullanılarak özellikle analiz, sayılar teorisi ve kombinatorik alanlarında sıkça karşılaşılan bazı polinom ve sayı aileleri için formüller elde edilmiştir.

Yukarıda bahsedilen temel tekniklerin başlıcalarından birisi üreteç fonksiyonlarıdır. Üreteç fonksiyonları analiz ve sayılar teorisini birbirine bağlayan en önemli kavramlardan birisidir. $(a_n)$ bir dizi olmak üzere

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

biçiminde tanımlanan seriye $(a_n)$ dizisinin adi üreteç fonksiyonu denilir. Bunun klasik örneklerinden birisi, harmonik serinin $n$. kısmi toplamı olarak, yani

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ H_0 = 0$$

biçiminde tanımlanan $H_n$ harmonik sayıları için

$$\frac{-\ln(1-t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n t^n \tag{1.1}$$

üreteç fonksiyonudur (bkz. Ek 6.5.). Harmonik sayılar antik çağlardan beri araştırma konusu olup başta sayılar teorisi, kombinatorik ve ayrık matematik olmak üzere matematiğin birçok alanında önemlidirler. Tez çalışmamızın önemli bir kısmı harmonik sayılar ve genelleştirmelerinin çeşitli özelliklerinin elde edilmesi yönündeki sonuçlardır.

$(a_n)$ bir dizi olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

biçiminde tanımlanan seriye $(a_n)$ dizisinin üstel üreteç fonksiyonu denir. Üstel üreteç fonksiyonlarına örnek olarak kombinatorik alanının en önemli sayı ailelerinden olan Stirling sayılarının üstel üreteç fonksiyonları verilebilir. Stirling sayıları, James Stirling tarafından 18. yüzyılda tanımlanmışlardır. Stirling sayılarının yaygın kullanımda birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları olmak üzere iki türü vardır. $s(n,k)$ birinci çeşit (işaretli) ve $S(n,k)$ ikinci çeşit Stirling sayıları göstermek üzere,

$$\frac{(\log(1+t))^k}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{t^n}{n!} \tag{1.2}$$

ve

$$\frac{(e^t-1)^k}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)\frac{t^n}{n!} \tag{1.3}$$

üreteç fonksiyonları ile tanımlanır (Comtet 1974) (bkz. Ek 6.3. ve 6.4.). Birinci çeşit (işaretli) Stirling sayıları

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k) \tag{1.4}$$

yineleme bağıntısını sağlar. Diğer taraftan bir $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ için

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1)$$

ifadesi artan faktöriyel,

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

ifadesi ise azalan faktöriyel olarak adlandırılır. Artan ve azalan faktöriyelin birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ile ilişkisi

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}} \tag{1.5}$$

ve

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k \tag{1.6}$$

eşitliklerinden görülür.

Faktöriyel ile yakından alakalı bir kavram olan binom katsayıları, saymanın ve dolayısıyla kombinatoriğin temelinde yer alır. $n,k \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leqslant k \leqslant n$ olmak üzere

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

biçiminde tanımlanan binom katsayıları için eşitliğin ikinci kısmından sadece $k$'nin negatif olmayan bir tamsayı olması gerektiği görülür. Verilen bir dizinin terimlerini ve binom katsayılarını içeren toplamlar, üreteç fonksiyonları ile çalışırken sıkça ortaya çıkar. Bu bağlamda, bir $(a_n)$ dizisi verildiğinde,

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \tag{1.7}$$

biçiminde tanımlanan (1.7) bağıntısına $(a_n)$ dizisinin binom dönüşümü denilir. Bu dönüşümün evriği ise

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k$$

olarak ortaya çıkar (Riordan 1979; Boyadzhiev 2018). Binom dönüşümü bir diziyi başka bir diziye dönüştüren ve çok önemli uygulamaları olan bir ayrık dönüşümdür. Benzer yaygınlıkta ve önemde olan ve tez çalışmamızda kullanacağımız bir diğer önemli dönüşüm de Stirling dönüşümüdür. Bir $(a_n)$ dizisi verildiğinde,

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) a_k \tag{1.8}$$

biçiminde tanımlanan (1.8) bağıntısına $(a_n)$ dizisinin Stirling dönüşümü denilir. Bu dönüşümün evriği ise

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) b_k$$

olarak ortaya çıkar (Riordan 1979; Boyadzhiev 2018). Binom dönüşümü ve Stirling dönüşümü, kombinatorik ve analiz başta olmak üzere birçok ilginç uygulamaları olan ayrık dönüşümlerdir. Tez çalışmamızda öncelikle binom dönüşümü, Stirling dönüşümü ve benzer karakterdeki Lah ve Laguerre dönüşümlerinin evrik bağıntılarının kanıtları verilecektir. Daha sonra bu dönüşümler bazı özel sayı dizilerinin incelenmesinde kullanılacaktır.

Dizilerin analizinde ayrık ve sürekli matematiği birleştiren, üreteç fonksiyonları ve dönüşüm teknikleri kadar güçlü ve önemli olan, aynı zamanda bu iki teknikle yakın ilişkisi olan bir diğer kavram da operatörlerdir. Tez çalışmamızda bu operatörlerden

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

ve

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$$

fark operatörleri göz önüne alınacaktır.

Tez çalışmamızda özelliklerini araştıracağımız ve bazılarından yukarıda da bahsettiğimiz dizilerin ilk birkaç değeri ve söz konusu diziler için elde ettiğimiz formüller tezin sonunda Ekler kısmında listelenmiştir.

# 2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde tezin içeriğini oluşturan belli başlı kavramlar tanıtılacak ve ihtiyaç duyacağımız literatürde yer alan özellikleri verilecektir.

## 2.1. Özel Bazı Polinom ve Sayı Aileleri ve Evrik Dönüşümler

Bu kesimde özelliklerini araştıracağımız özel bazı polinom ve sayı aileleri tanıtılacak ve binom, Stirling, Lah ve Laguerre evrik dönüşümleri kanıtlarıyla beraber verilecektir.

**Tanım 2.1.** *(Comtet 1974) Bernoulli polinomları üstel üreteç fonksiyonu diliyle*

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{2.1}$$

*şeklinde tanımlanır (bkz. Ek 6.6.). Burada $x=0$ için elde edilen $B_n(0)=B_n$ katsayılarına Bernoulli sayıları denilir (bkz. Ek 6.7.).*

Jakob Bernoulli tarafından, Japon matematikçi Takakazu Seki ile hemen hemen aynı zamanda bulunan Bernoulli sayıları, sayılar teorisinde çok önemli olan rasyonel sayı dizisidir. Seki'nin "Katsuyo Sampo" adlı kitabında yer alan bulgular ölümünün ardından 1712 yılında yayımlanmıştır. Bernoulli'nin sonuçları yine ölümünden sonra "Ars Conjectandi" adlı bir kitap olarak 1713'te yayımlanmıştır.

Harmonik sayıların çok çeşitli ve önemli genelleştirmeleri vardır. Bu tez çalışmasında aşağıdaki genelleştirme üzerine çalışılmıştır.

**Tanım 2.2.** *(Conway ve Guy 1996) $n,r\in\mathbb{N}$ için $r$. mertebeden $n$. hiperharmonik sayı $h_n^{(r)}$ ile gösterilir ve*

$$h_n^{(r)}=\sum_{k=1}^{n}h_k^{(r-1)},\quad h_n^{(1)}=H_n$$

*şeklinde tanımlanır. Burada $n\geqslant 1$ için $h_n^{(0)}=1/n$ ve $r\geqslant 0$ için $h_0^{(r)}=0$ olarak alınır.*

Hiperharmonik sayıların adi üreteç fonksiyonunun,

$$-\frac{\ln(1-t)}{(1-t)^r}=\sum_{n=0}^{\infty}h_n^{(r)}t^n$$

olduğu harmonik sayıların üreteç fonksiyonu (1.1) Cauchy çarpımıyla göz önüne alındığında kolayca görülür (Dil ve Mező 2008).

**Tanım 2.3.** *(Dil ve Muniroglu 2020) $n, r \in \mathbb{N}$ için negatif $r$. mertebeden $n$. hiperharmonik sayı $h_n^{(-r)}$ ile gösterilir ve*

$$h_n^{(-r)} = \begin{cases} \frac{(-1)^r r!}{n^{r+1}} & , n > r \geqslant 1 \quad \textit{ise}, \\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r}{k} (-1)^k \frac{1}{n-k} & , r \geqslant n \geqslant 1 \quad \textit{ise}, \end{cases}$$

*şeklinde tanımlanır.*

**Tanım 2.4.** *(Comtet 1974) Fibonacci sayıları,*

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ ve } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ (n \geq 2)$$

*yineleme bağıntısı ile tanımlanır.*

Fibonacci saylarnn adi üreteç fonksiyonu

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

şeklindedir.

**Tanım 2.5.** *(Bergum, Bennett, Horadam ve Moore 1985) Jacobsthal sayıları*

$$\frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} J(n) \frac{t^n}{n!}$$

*üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.*

Jacobsthal sayılarının kapalı formu

$$J(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

dir (Bergum, Bennett, Horadam ve Moore 1985) (bkz. Ek 6.17.).

**Tanım 2.6.** *(Comtet 1974) Genocchi sayıları üstel üreteç fonksiyonu diliyle*

$$\frac{2t}{e^t + 1} = t(1 - th\frac{t}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!}$$

*şeklinde tanımlanır (bkz. Ek 6.14.).*

Genocchi ve Bernoulli sayıları arasında $G_n = 2(1 - 2^n) B_n$ ilişkisi vardır (Comtet 1974).

Şimdi Giriş bölümünde bahsettiğimiz binom, Stirling, Lah ve Laguerre dönüşümlerinin evrik bağıntılarının kanıtları verilecektir.

**Teorem 2.7.** *(Riordan 1979) $(a_n)$ bir dizi olmak üzere*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \Longleftrightarrow a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k$$

*dir.*

**Kanıt.** $(\Rightarrow)$:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k t^k}{k!} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}}_{e^t} \\
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k \right) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi katsayılar karşılaştırılırsa istenen elde edilir.

$(\Leftarrow)$: Benzer şekilde yapılabilir. □

**Teorem 2.8.** *(Comtet 1974, s-144) $(a_n)$ bir dizi ve $s(n,k)$ ile $S(n,k)$ sırasıyla birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları olmak üzere*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) a_k \Longleftrightarrow a_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) b_k$$

*dir.*

**Kanıt.** $(\Rightarrow)$:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) a_k$$

olsun.

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{t^m}{m!}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m} S(m,k)a_k\right)\frac{t^m}{m!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(\sum_{m=k}^{\infty} S(m,k)\frac{t^m}{m!}\right) \\ &\overset{(1.3)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\frac{(e^t-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

olur. Burada $e^t - 1 = u \Rightarrow t = \log(1+u)$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} f(\log(1+u)) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\frac{u^k}{k!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k\frac{(\log(1+u))^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\frac{u^k}{k!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{u^n}{n!}\right) &\overset{(1.2)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\frac{u^k}{k!} \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} s(n,k)b_k\right)\frac{u^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\frac{u^k}{k!} \end{aligned}$$

olur. Şimdi katsayılar karşılaştırılırsa istenen elde edilir.

($\Leftarrow$): Benzer şekilde yapılabilir. $\square$

**Tanım 2.9.** *(Lah 1954) Lah sayıları üreteç fonksiyonları diliyle aşağıdaki biçimde tanımlanır:*

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} L(n,k)\frac{x^n}{n!}.$$

*Burada*

$$L(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{n-k} \tag{2.2}$$

*olur (bkz. Ek 6.15.).*

Artan ve azalan faktöriyelin Lah sayıları ile ilişkisi de

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{n} L(n,k)x^{\underline{k}} \Longleftrightarrow x^{\underline{n}} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}L(n,k)x^{\overline{k}}$$

şeklinde verilir. Üçüncü çeşit Stirling sayıları olarak da adlandırılan Lah sayıları kullanılarak binom ve Stirling dönüşümleri tipinde bir dönüşüm verilebilir. Bunun kanıtı aşağıda verilmiştir. Bir $(a_n)$ dizisi verildiğinde

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)a_k \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan (2.3) bağıntısına $(a_n)$ dizisinin Lah dönüşümü denilir. Bunun evriği ise

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} L(n,k) b_k$$

olarak elde edilir (Riordan 1979).

**Teorem 2.10.** *(Barry 2007) $(a_n)$ bir dizi ve $L(n,k)$ Lah sayıları olmak üzere,*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)a_k \Longleftrightarrow a_n = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^{n-k} b_k$$

*dir.*

**Kanıt.** $(\Rightarrow)$ :

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)a_k$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{t^m}{m!} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{m} L(m,k)a_k \right) \frac{t^m}{m!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( \sum_{m=k}^{\infty} L(m,k) \frac{t^m}{m!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{k!} \left( \frac{t}{1-t} \right)^k
\end{aligned}$$

olur. Burada $\frac{t}{1-t} = -u \Rightarrow t = \frac{-u}{1-u}$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} b_k (-1)^k \frac{1}{k!} \left( \frac{u}{1-u} \right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-1)^k \frac{u^k}{k!} \\
\sum_{k=0}^{\infty} b_k (-1)^k \left( \sum_{n=k}^{\infty} L(n,k) \frac{u^n}{n!} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-1)^k \frac{u^k}{k!} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} (-1)^k L(n,k) b_k \right) \frac{u^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n \frac{u^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte katsayılar karşılaştırılırsa

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^{n-k} b_k$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$ : Benzer şekilde yapılabilir. $\square$

**Tanım 2.11.** *(Barry 2007) Laguerre sayıları üreteç fonksiyonları diliyle aşağıdaki biçimde tanımlanır:*

$$\frac{1}{k!}\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} Lag(n,k)\frac{x^n}{n!}.$$

*Burada*

$$Lag(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n}{k}$$

*olur.*

Bir $(a_n)$ dizisi verildiğinde

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} Lag(n,k)a_k \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanan (2.4) bağıntısına $(a_n)$ dizisinin Laguerre dönüşümü denilir. Bunun evriği ise

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}Lag(n,k)b_k$$

olarak elde edilir (Barry 2007).

**Teorem 2.12.** *(Barry 2007) $(a_n)$ bir dizi ve $Lag(n,k)$ Laguerre sayıları olmak üzere,*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} Lag(n,k)a_k \Longleftrightarrow a_n = \sum_{k=0}^{n} Lag(n,k)(-1)^{n-k}b_k$$

*dir.*

**Kanıt.** $(\Rightarrow)$ :

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} Lag(n,k)a_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n}{k}a_k$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a_k}{k!}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}x^k\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^n
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(1-x)^{k+1}} \frac{x^{k+1}}{k!}$$

yazılabilir. Burada $\frac{x}{1-x} = t \Rightarrow x = \frac{t}{1+t}$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} \frac{t^{k+1}}{(1+t)^{k+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n!} \\
\sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^{k+1}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} (-1)^n t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n!} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \binom{n}{k} b_k \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi katsayılar karşılaştırılırsa

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \binom{n}{k} b_k$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$ : Benzer şekilde yapılabilir. $\square$

## 2.2. Seriler için Dönüşüm Formülleri

Şimdi analiz ile sayılar teorisini birleştiren önemli bir başka araç olan dönüşüm formüllerine değineceğiz. Öncelikle tez çalışmasında kullanacağımız, literatürde yer alan bazı dönüşüm formüllerini kanıtlarıyla vereceğiz sonra fonksiyonun ve parametrelerin uygun seçimiyle nasıl sonuçlar verdiklerini açıklayacağız.

**Teorem 2.13.** *(Comtet 1974; Boyadzhiev 2020) Üstel üreteç fonksiyonu*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

*olarak verilen bir $(a_n)$ dizisi için*

$$f\left(\frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \lambda^{n-k} \mu^k a_k \right\} \tag{I}$$

*eşitliği sağlanır. Burada $\lambda \neq 0$ olmak üzere $\mu$ ve $\lambda$ reel parametrelerdir.*

**Kanıt.**

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

üstel üreteç fonksiyonunda $t$ yerine $\frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)$ yazılırsa

$$f\left(\frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\frac{\mu^n}{\lambda^n}(e^{\lambda t}-1)^n$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\frac{\mu^n}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}e^{\lambda tk} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\frac{\mu^n}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j k^j\frac{t^j}{j!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\mu^n}{\lambda^n}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\frac{t^j}{j!}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^j(-1)^{n-k} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada ikinci çeşit Stirling sayıları için,

$$S(j,n)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^j(-1)^{n-k}$$

(Graham, Knuth ve Patashnik 1993) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_n\mu^n\lambda^{j-n}S(j,n)\frac{t^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}\left\{\sum_{n=0}^{j}S(j,n)\lambda^{j-n}\mu^n a_n\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. □

**Teorem 2.14.** *(Comtet 1974; Boyadzhiev 2020) Üstel üreteç fonksiyonu*

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!}$$

*olarak verilen bir $(a_n)$ dizisi için*

$$f\left(\frac{\mu}{\lambda}\log(1+\lambda t)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}s(n,k)\lambda^{n-k}\mu^k a_k\right\} \tag{II}$$

*eşitliği sağlanır. Burada $\lambda\neq 0$ olmak üzere $\mu$ ve $\lambda$ reel parametrelerdir.*

**Kanıt.**

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!}$$

üstel üreteç fonksiyonunda $t$ yerine $\frac{\mu}{\lambda}\log(1+\lambda t)$ yazılırsa

$$f\left(\frac{\mu}{\lambda}\log(1+\lambda t)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\frac{\mu^n}{\lambda^n}(\log(1+\lambda t))^n$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\mu}{\lambda}\log(1+\lambda t)\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\mu^n}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{\infty}s(k,n)\lambda^k\frac{t^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left\{\sum_{n=0}^{k}s(k,n)\lambda^{k-n}\mu^n a_n\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. □

**Teorem 2.15.** *(Comtet 1974; Boyadzhiev 2021) Üstel üreteç fonksiyonu*

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!}$$

*olarak verilen bir $(a_n)$ dizisi için*

$$f\left(\frac{\mu t}{1-\lambda t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}L(n,k)\lambda^{n-k}\mu^k a_k\right\} \tag{III}$$

*eşitliği sağlanır. Burada $\mu$ ve $\lambda$ reel parametrelerdir.*

**Kanıt.**

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{t^k}{k!}$$

üstel üreteç fonksiyonunda $t$ yerine $\frac{\mu t}{1-\lambda t}$ yazılırsa

$$f\left(\frac{\mu t}{1-\lambda t}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\mu^k t^k}{k!}\frac{1}{(1-\lambda t)^k}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\mu t}{1-\lambda t}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\mu^k t^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}\lambda^n t^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\mu^k t^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n-1}{n-k}\lambda^{n-k}t^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{n-k}\lambda^{n-k}\mu^k a_k\right\} \\ &\overset{(2.2)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}L(n,k)\lambda^{n-k}\mu^k a_k\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. □

**Teorem 2.16.** *(Comtet 1974; Boyadzhiev 2021) Üstel üreteç fonksiyonu*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

*olarak verilen bir $(a_n)$ dizisi için*

$$e^{\lambda t} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} a_k \right\} \tag{IV}$$

*eşitliği sağlanır. Burada $\lambda$ reel parametredir.*

**Kanıt.** $e^t$ fonksiyonunun seri açılımı ve Cauchy çarpımından açıktır. □

**Teorem 2.17.** *(Comtet 1974; Boyadzhiev 2021) Adi üreteç fonksiyonu*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

*olarak verilen bir $(a_n)$ dizisi için*

$$\frac{1}{1-\lambda t} f\left(\frac{\mu t}{1-\lambda t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \mu^k a_k \right\} \tag{V}$$

*eşitliği sağlanır. Burada $\mu$ ve $\lambda$ reel parametrelerdir.*

**Kanıt.**

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

adi üreteç fonksiyonunda $t$ yerine $\frac{\mu t}{1-\lambda t}$ yazılıp her iki taraf $\frac{1}{1-\lambda t}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{1-\lambda t} f\left(\frac{\mu t}{1-\lambda t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^k t^k \frac{1}{(1-\lambda t)^{k+1}}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\lambda t} f\left(\frac{\mu t}{1-\lambda t}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^k t^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \lambda^n t^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^k t^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} t^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \mu^k a_k \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Bir diziden fark operatörü yardımıyla yeni bir dizi tanımlansın. Daha sonra bu iki dizinin binom dönüşümleri olan iki yeni dizi oluşturulsun. Michael Z. Spivey'in, bu dört dizinin arasındaki çeşitli ilişkileri elde ettiği çalışmalarından tez çalışmamızda kullanacağımız sonuçları vererek bu bölümü sonlandıracağız. Bu teoremlerde [S] ifadesinin değeri, S önermesi doğru ise 1, yanlış ise 0'dır.

**Teorem 2.18.** *(Spivey 2007, Theorem 2.) $(a_k)$ ve $(b_k)$ iki dizi ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_k = \Delta b_k = b_{k+1} - b_k$ biçiminde verilsin.*

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \quad ve \quad h_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$$

*olarak tanımlansın. Bu durumda her $n$ için*

$$g_n = h_{n+1} - 2h_n - b_0[n = -1] \tag{2.5}$$

*dir.*

**Kanıt.** $n \geqslant 0$ ise

$$h_{n+1} - 2h_n = h_{n+1} - h_n - h_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = g_n$$

dir. $n = -1$ ise $h_0 - 2h_{-1} - b_0 = b_0 - b_0 = 0 = g_{-1}$ dir. $n \leqslant -2$ ise her iki taraf da 0'dır. □

**Teorem 2.19.** *(Spivey 2007, Theorem 4.) $(a_k)$ ve $(b_k)$ iki dizi ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_k = \Delta b_k = b_{k+1} - b_k$ biçiminde verilsin.*

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \quad ve \quad h_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$$

*olarak tanımlansın. Bu durumda her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için*

$$h_n = 2^n \left( b_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{g_{k-1}}{2^k} \right) \tag{2.6}$$

*dir.*

**Kanıt.** Teorem 2.18'dan $h_{n+1} - 2h_n - b_0[n = -1] = g_n$ olduğunu biliyoruz. Böylece $h_n - 2h_{n-1} = g_{n-1} + b_0[n = 0]$ yazılabilir. $H(z)$ ve $G(z)$, sırasıyla $\{h_n\}$ ve $\{g_n\}$ için adi üreteç fonksiyonları ise $H(z) - 2zH(z) = zG(z) + b_0$ olur. Böylece

$$H(z) = \frac{b_0 + zG(z)}{1 - 2z}$$

dir. Burada $1/(1-2z)$ seriye açılır ve gerekli işlemler yapılırsa istenen elde edilir. $\square$

**Teorem 2.20.** *(Spivey 2007, Theorem 8.) $(a_k)$ ve $(b_k)$ iki dizi ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_k = \Delta b_k = b_{k+1} - b_k$ biçiminde verilsin.*

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)a_k \quad \text{ve} \quad h_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)b_k$$

*ise her $n$ için*

$$g_n = h_{n+1} + (n-1)h_n - b_0[n=-1] \tag{2.7}$$

*dir.*

**Kanıt.** $s(n,k)$ sayıları için (1.4) yineleme bağıntısından $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\begin{aligned} h_{n+1} + nh_n &= \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1,k)b_k + n\sum_{k=0}^{n} s(n,k)b_k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(s(n,k-1) - ns(n,k)\right) b_k + n\sum_{k=0}^{n} s(n,k)b_k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} s(n,k-1)b_k - n\sum_{k=0}^{n+1} s(n,k)b_k + n\sum_{k=0}^{n} s(n,k)b_k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} s(n,k-1)b_k \\ &= s(n,0)b_1 + s(n,1)b_2 + \cdots + s(n,n)b_{n+1} \end{aligned}$$

olduğu görülür, Burada $s(n,-1) = 0$ dır. Böylece

$$h_{n+1} + (n-1)h_n = s(n,0)(b_1 - b_0) + s(n,1)(b_2 - b_1) + \cdots + s(n,n)(b_{n+1} - b_n) = g_n.$$

O halde $h_0 = b_0$ elde edilir ve bu da (2.7)'nin $n = -1$ durumuna karşılık gelir. $n \leqslant -2$ için her iki taraf da $0$'dır. $\square$

Kaynak Taraması bölümünde tanıttığımız tüm bu dönüşümler ve operatörler, sayılar teorisi ve kombinatorik alanlarında daha çok binom katsayıları (Gould 1972; Chen 2007; Spivey 2007), Bernoulli sayıları ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları (Boyadzhiev 2009; Can ve Dağlı 2014; Boyadzhiev 2018), harmonik sayılar ve genelleştirmeleri (Spivey 2007; Boyadzhiev 2014; Can ve Dağlı 2014; Boyadzhiev 2017; Boyadzhiev 2018; Boyadzhiev 2019; Dil ve Muniroglu 2020) için araştırmalar yapılırken kullanılmaktadırlar. Bulgular ve Tartışma bölümünde bu araştırmalara devam ederek literatüre katkılarda bulunmayı hedefliyoruz.

# 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu kesimde elde ettiğimiz sonuçları iki ana başlık halinde sunacağız. Bulgularımızın dışında ihtiyaç duyduğumuz literatürden bazı tanımları ilgili yerlerde vereceğiz.

## 3.1. Dönüşüm Formülleri ile Elde Edilen Sonuçlar

Kaynak Taraması kesiminde (I), (II), (III), (IV) ve (V) şeklinde numaralandırdığımız seri dönüşüm formülleri kanıtlarıyla verildi. Burada her bir dönüşüm formülünden elde edilen sonuçları ayrı ayrı vereceğiz.

### 3.1.1. (I) dönüşüm formülü ile elde edilen sonuçlar

Şimdi (I) dönüşüm formülünün ilk uygulaması olarak Stirling sayılarının meşhur ortogonallik ilişkisini verelim.

**Önerme 3.21.** *(Comtet 1974) Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları*

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)s(k,m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & , n = m \quad \textit{ise,} \\ 0 & , n \neq m \quad \textit{ise,} \end{cases}$$

*eşitliğini sağlar.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak birinci çeşit Stirling sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım.

$$f(t) = \frac{(\log(1+t))^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} s(n,m)\frac{t^n}{n!}.$$

(I) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} f(e^t - 1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} S(n,k)s(k,m) \right\} \\ \frac{t^m}{m!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} S(n,k)s(k,m) \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa istenen elde edilir. □

**Tanım 3.22.** *(Comtet 1974) İkinci çeşit Bernoulli sayısı (birinci çeşit Cauchy sayısı)*

$$c_n = \int_0^1 x^{\underline{n}} dx$$

*olarak tanımlanır ve üstel üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{\ln(1+t)}$$

*şeklindedir (bkz. Ek 6.8.).*

**Önerme 3.23.** *Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları, ikinci çeşit Bernoulli sayıları (birinci çeşit Cauchy sayısı) ve harmonik sayılar için*

$$\frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, c_k$$

*(Merlini, Sprugnoli ve Verri 2006, Theorem 2.3.),*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \frac{1}{k+1}$$

*ve*

$$H_{m+1} = \sum_{k=0}^{m} c_k \sum_{n=k}^{m} S(n,k)$$

*eşitlikleri sağlanır.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak ikinci çeşit Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{\ln(1+t)}.$$

(I) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = 1$ için

$$f\left(e^t - 1\right) = \frac{e^t - 1}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) \frac{t^n}{n!}$$

olur. Buradan dönüşüm formülündeki katsayılar karşılaştırılırsa ilk eşitlik bulunur ve Stirling dönüşümünden de ikinci eşitlik elde edilir. Birinci eşitliğin her iki tarafı $n = 0$'dan $m$'ye kadar toplanırsa ve gerekli işlemler yapılırsa üçüncü eşitlik elde edilir. □

**Tanım 3.24.** *(Comtet 1974) İkinci çeşit Cauchy sayısı*

$$\widehat{c}_n = \int_0^1 (-1)^n x^{\overline{n}} dx$$

*olarak tanımlanır ve üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{c}_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{(1+t)\ln(1+t)}$$

*şeklindedir (bkz. Ek 6.9.).*

**Önerme 3.25.** *Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ile negatif mertebeli hiperharmonik sayılar, ikinci çeşit Cauchy sayıları arasında aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

$$h_{n+1}^{(-n)} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,\widehat{c}_k,$$

$$\widehat{c}_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\,h_{k+1}^{(-k)},$$

$$\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,\widehat{c}_k$$

*(Merlini, Sprugnoli ve Verri 2006, Theorem 2.6.),*

$$\widehat{c}_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\,\frac{(-1)^k}{k+1}.$$

**Kanıt.** $f(t)$ olarak ikinci çeşit Cauchy sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{c}_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{(1+t)\ln(1+t)}.$$

(I) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = 1$ için

$$f\left(e^t - 1\right) = \frac{e^t - 1}{e^t t} = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{k+1} \right) \frac{t^n}{n!}$$

olur. Buradan katsayılar karşılaştırılırsa

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,\widehat{c}_k$$

elde edilir. Son eşitliğin sol tarafındaki ifadeyi hesaplayalım. Bunun için

$$h_{n+k}^{(-k)} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \frac{1}{n+i}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Proposition 25.) eşitliğinde $n = 1$ alınırsa

$$h_{k+1}^{(-k)} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \frac{1}{i+1}$$

olur. Dolayısıyla birinci eşitlik bulunur ve Stirling dönüşümünden ikinci eşitlik elde edilir.

Hesaplamak istediğimiz ifadeyi başka bir yoldan elde edelim.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+\lambda} = \frac{n!}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)}$$

(Boyadzhiev 2014) eşitliğinin her iki tarafı $(-1)^n$ ile çarpılıp $\lambda = 1$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{k+1} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

olur. Dolayısıyla üçüncü eşitlik bulunur ve Stirling dönüşümünden dördüncü eşitlik elde edilir. □

**Tanım 3.26.** *(Boyadzhiev 2018) Skew harmonik sayılar*

$$H_n^{\sim} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k},\ H_0^{\sim} = 0$$

*şeklinde tanımlanır ve üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{\sim} t^n = \frac{\ln(1+t)}{1-t}$$

*dir (bkz. Ek 6.10.).*

**Tanım 3.27.** *(Smail ve Schwatt 1926; Boyadzhiev 2005) Geometrik polinomlar n=0,1,2,... için*

$$\omega_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) k! x^k$$

*ve $n < 0$ için $\omega_n(x) = 0$ şeklinde tanımlanır. Üreteç fonksiyonu*

$$\frac{1}{1 - x(e^t - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

*biçimindedir. Geometrik sayılar (diğer adıyla Fubini sayıları veya sıralı Bell sayıları), geometrik polinomların $x = 1$ deki değeri olarak tanımlanır ve üreteç fonksiyonu*

$$\frac{1}{2 - e^t} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \frac{t^n}{n!}$$

*olur (bkz. Ek 6.11.).*

**Önerme 3.28.** *Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ve skew harmonik sayılar için*

$$n\omega_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, k! H_k^{\sim}$$

*ve*

$$n! H_n^{\sim} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, k \omega_{k-1}$$

*eşitlikleri sağlanır.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak skew harmonik sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım.

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} n!H_n^{\sim}\frac{t^n}{n!}=\frac{\ln(1+t)}{1-t}.$$

(I) dönüşüm formülünde $\lambda=\mu=1$ için

$$f\left(e^t-1\right)=\frac{t}{2-e^t}$$

$$f\left(e^t-1\right)=\sum_{n=0}^{\infty} n\omega_{n-1}\frac{t^n}{n!}$$

yazılabilir. Buradan katsayılar karşılaştırılırsa birinci eşitlik bulunur ve Stirling dönüşümünden de ikinci eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.29.** *(Boyadzhiev 2019 Corollary 13.) İkinci çeşit Stirling sayıları $n>1$ için*

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)(-1)^{k-1}(k-1)!=0$$

*eşitliğini sağlar.*

**Kanıt.** $f(t)=\log(1+t)$ alalım.

$$\begin{aligned} f(t) &= \log(1+t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $f(t)$ serisinin katsayıları

$$a_n=\begin{cases} 0 & , n=0 \quad \text{ise,} \\ (-1)^{n-1}(n-1)! & , n>0 \quad \text{ise,} \end{cases}$$

olur. (I) dönüşüm formülünde $\lambda=\mu=1$ için $f\left(e^t-1\right)=t$ olur. Buradan

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)(-1)^{k-1}(k-1)!=\begin{cases} 1 & , n=1 \quad \text{ise,} \\ 0 & , n\neq 1 \quad \text{ise,} \end{cases}$$

veya diğer bir ifade ile $n>1$ için

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)(-1)^{k-1}(k-1)!=0$$

bulunur. □

Aşağıdaki önermede elde edilen sonuçlar Stirling sayıları için daha önce verdiğimiz (1.5) ve (1.6) numaralı meşhur eşitliklerdir. Burada dönüşüm formülü yardımıyla elde edilmişlerdir.

**Önerme 3.30.** *$\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları için*

$$\alpha^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)k!\binom{\alpha}{k}$$

*(Boyadzhiev 2018, (2.4)) ve*

$$n!\binom{\alpha}{n} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\alpha^k$$

*eşitlikleri sağlanır.*

**Kanıt.**

$$f(t) = (1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} n!\binom{\alpha}{n}\frac{t^n}{n!}$$

olarak alalım. (I) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = 1$ seçilirse birinci eşitlik bulunur ve Stirling dönüşümünden ikinci eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.31.** *Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları*

$$(q+1)^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(-1)^{n-k}\binom{q+k}{k}k!$$

*ve*

$$\binom{q+n}{n}n! = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{n-k}(q+1)^k$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.**

$$f(t) = \frac{1}{(1-t)^{q+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{q+n}{n}n!\frac{t^n}{n!}$$

olarak alınırsa (I) dönüşüm formülünde $\lambda = -1$ ve $\mu = 1$ için

$$\begin{aligned} f(1-e^{-t}) = e^{t(q+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(-1)^{n-k}\binom{q+k}{k}k!\right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty}(q+1)^n\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(-1)^{n-k}\binom{q+k}{k}k!\right\} \end{aligned}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa birinci eşitlik bulunur ve Stirling dönüşümünden ikinci eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.32.** *İkinci çeşit Stirling sayıları ile harmonik sayılar $n > 2$ için*

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)(-1)^{n-k}(k-1)!H_{k-1} = 0$$

*eşitliğini sağlar.*

**Kanıt.**

$$f(t) = \frac{1}{2}\ln^2(1-t) = \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)!H_{n-1}\frac{t^n}{n!}$$

olarak alınırsa (I) dönüşüm formülünde $\lambda = -1$ ve $\mu = 1$ için

$$f(1-e^{-t}) = \frac{1}{2}\ln^2(e^{-t}) = \frac{t^2}{2}$$

olur. Böylece

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)(-1)^{n-k}(k-1)!H_{k-1} = \begin{cases} 1 & , n = 2 \quad \text{ise}, \\ 0 & , n \neq 2 \quad \text{ise}, \end{cases}$$

ve buradan da istenen çıkar. □

**Önerme 3.33.** *Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ile harmonik ve hiperharmonik sayılar*

$$nr^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(-1)^{n-k}k!h_k^{(r)},$$

$$n!h_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{n-k}kr^{k-1}$$

*ve*

$$H_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{n-k}k$$

*eşitliklerini sağlar (Boyadzhiev 2019, Theorem 1).*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonunu alalım, yani

$$f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{(1-t)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(r)}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} n!h_n^{(r)}\frac{t^n}{n!}$$

olsun. (I) dönüşüm formülünde $\lambda = -1$ ve $\mu = 1$ için

$$\begin{aligned} f(1-e^{-t}) = t \cdot e^{rt} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(-1)^{n-k}k!h_k^{(r)}\right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} nr^{n-1}\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(-1)^{n-k}k!h_k^{(r)}\right\} \end{aligned}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa birinci eşitlik bulunur ve Stirling dönüşümünden ikinci eşitlik elde edilir. İkinci eşitlikte $r = 1$ alınırsa üçüncü eşitlik elde edilir. □

### 3.1.2. (II) dönüşüm formülü ile elde edilen sonuçlar

İlk olarak, (I) dönüşüm formülünden elde ettiğimiz Stirling sayılarının ortogonallik ilişkisinin (II) dönüşüm formülünden de elde edilebileceğini görelim.

**Önerme 3.34.** *(Comtet 1974) Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları*

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)S(k,m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & , n = m \quad \textit{ise,} \\ 0 & , n \neq m \quad \textit{ise,} \end{cases}$$

*eşitliğini sağlar.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak ikinci çeşit Stirling sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım, yani

$$f(t) = \frac{(e^t - 1)^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,m)\frac{t^n}{n!}$$

olsun. (II) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} f(\ln(1+t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)S(k,m) \right\} \\ \frac{t^m}{m!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)S(k,m) \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa istenen elde edilir. □

**Tanım 3.35.** *(Kim 2008) Birinci çeşit Euler sayıları*

$$\frac{2}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^* \frac{t^n}{n!}$$

*üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (bkz. Ek 6.12.).*

**Önerme 3.36.** *Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ile birinci çeşit Euler sayıları*

$$\frac{(-1)^n n!}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)E_k^*$$

*ve*

$$E_n^* = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(-1)^k \frac{k!}{2^k}$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak birinci çeşit Euler sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım, yani

$$f(t) = \frac{2}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^* \frac{t^n}{n!}$$

olarak alınırsa (II) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = 1$ için

$$\begin{aligned} f(\ln(1+t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k) E_k^* \right\} \\ \frac{1}{1+\frac{t}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k) E_k^* \right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k) E_k^* \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa birinci eşitlik bulunur ve Stirling dönüşümünden de ikinci eşitlik elde edilir. □

**Tanım 3.37.** *(Bell 1934; Boyadzhiev 2005) Üstel polinomlar*

$$e^{x(e^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

*üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. Burada $x = 1$ için elde edilen $\phi_n(1) = \phi_n$ katsayılarına Bell sayıları denilir.*

Aşağıdaki önermede verilen ikinci eşitlik çoğu zaman üstel polinomların tanımı olarak alınır.

**Önerme 3.38.** *Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ile Bell sayıları ve üstel polinomlar*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \phi_k(x),$$

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^k$$

*(Boyadzhiev 2005),*

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k) \phi_k = 1$$

*ve*

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak üstel polinomların üreteç fonksiyonunu alalım, yani

$$f(t) = e^{x(e^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

olsun. (II) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} f(\ln(1+t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x) \right\} \\ e^{xt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x) \right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x) \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa birinci eşitlik bulunur ve Stirling dönüşümünden ikinci eşitlik elde edilir. Üçüncü ve dördüncü eşitlikler, birinci ve ikinci eşitliklernde $x = 1$ alarak çıkar. □

**Tanım 3.39.** *(Comtet 1974) Euler polinomları*

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

*üreteç fonksiyonu ile verilir. Euler sayıları* $E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right)$ *olarak tanımlanır.*

Euler sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\frac{2e^t}{e^{2t}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}$$

şeklindedir (Comtet 1974) (bkz. Ek 6.13.).

**Önerme 3.40.** *Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ile Genocchi sayıları*

$$n! \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) G_k$$

*ve*

$$G_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} S(n,k) k! \sum_{j=1}^{k} \frac{2^j}{j}$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.**

$$f(t) = \frac{2t}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!}$$

olarak alalım. (II) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
f(\ln(1+t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k) G_k \right\} \\
\ln(1+t) \frac{1}{1+\frac{t}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k) G_k \right\} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k) G_k \right\}
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$a_n = \begin{cases} 0 & , n = 0 \quad \text{ise} \\ \frac{(-1)^{n-1}}{n} & , n \geqslant 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k) G_k \right\} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ n! \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}} \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k) G_k \right\}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi katsayılar karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned}
n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{k 2^{n-k}} &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k) G_k \\
n! \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k) G_k .
\end{aligned}$$

Böylece birinci eşitlik elde edilir ve Stirling dönüşümünden ikinci eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.41.** *Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ve geometrik polinomlar*

$$n! x^n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \omega_k(x)$$

*ve*

$$\omega_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) k! x^k$$

*(Boyadzhiev 2005) eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak geometrik polinomların üreteç fonksiyonunu alalım, yani

$$f(t) = \frac{1}{1 - x(e^t - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

olarak alalım. (II) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} f(\ln(1+t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\omega_k(x) \right\} \\ \frac{1}{1-xt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\omega_k(x) \right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\omega_k(x) \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa birinci eşitlik bulunur ve Stirling dönüşümünden ikinci eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.42.** $r \in \mathbb{N}$ *olmak üzere birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ile negatif mertebeli hiperharmonik sayılar*

$$(-1)^{n+1} n! h_n^{(-r)} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) k r^{k-1},$$

$$n r^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(-1)^{k+1} k! h_k^{(-r)},$$

$n \geqslant 2$ *için*

$$(-1)^n (n-2)! = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) k,$$

$$n - 1 = \sum_{k=2}^{n} S(n,k)(-1)^k (k-2)!,$$

$n \geqslant 3$ *için*

$$(-1)^{n+1}(n-3)! = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) k 2^{k-2}$$

*ve*

$$2^{n-2}(n-3) + 1 = \sum_{k=3}^{n} S(n,k)(-1)^{k+1}(k-3)!$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.** $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(t) &= -e^{rt}t \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} nr^{n-1}\frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

olarak alalım. (II) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = -1$ alınırsa

$$\begin{aligned} f(\ln(1-t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{n+1}kr^{k-1}\right\} \\ -(1-t)^r \log(1-t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{n+1}kr^{k-1}\right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n!h_n^{(-r)}\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{n+1}kr^{k-1}\right\} \end{aligned}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa

$$(-1)^{n+1}n!h_n^{(-r)} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)kr^{k-1}$$

bulunur ve Stirling dönüşümünden

$$nr^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(-1)^{k+1}k!h_k^{(-r)}$$

elde edilir. Son iki eşitlik negatif mertebeli hiperharmonik sayıların tanımı ile göz önüne alınırsa

$$(-1)^{n+1}n!\sum_{k=0}^{n-1}\binom{r}{k}(-1)^k\frac{1}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)kr^{k-1}$$

ve

$$nr^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(-1)^{k+1}k!\sum_{i=0}^{k-1}\binom{r}{i}(-1)^i\frac{1}{k-i}$$

elde ederiz. Eğer $n > r$ koşulu altında bu eşitlik daha sade olan

$$(-1)^{n+1}n!\frac{(-1)^r r!}{n^{\underline{r+1}}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)kr^{k-1}$$

eşitliğine dönüşür. Son eşitlikte özel olarak $r = 1$ alınırsa $n \geqslant 2$ için

$$(-1)^n(n-2)! = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)k$$

elde edilir. Burada

$$a_n = \begin{cases} 0 & , n = 0 \quad \text{ise,} \\ 1 & , n = 1 \quad \text{ise,} \\ (-1)^n (n-2)! & , n > 1 \quad \text{ise,} \end{cases}$$

olarak alalım.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)k$$

olur ve Stirling dönüşümünden

$$n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)a_k$$

$$n = S(n,1)a_1 + \sum_{k=2}^{n} S(n,k)(-1)^k (k-2)!$$

$$n - 1 = \sum_{k=2}^{n} S(n,k)(-1)^k (k-2)!$$

bulunur. Şimdi $r = 2$ alınırsa $n \geqslant 3$ için

$$(-1)^{n+1}(n-3)! = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)k2^{k-2}$$

olur. Burada

$$b_n = \begin{cases} 0 & , n = 0 \quad \text{ise,} \\ \frac{1}{2} & , n = 1 \quad \text{ise,} \\ \frac{3}{2} & , n = 2 \quad \text{ise,} \\ (-1)^{n+1}(n-3)! & , n > 2 \quad \text{ise,} \end{cases}$$

olarak alalım.

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)k2^{k-2}$$

olur ve Stirling dönüşümünden

$$n2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)b_k$$

$$n2^{n-2} = S(n,1)b_1 + S(n,2)b_2 + \sum_{k=3}^{n} S(n,k)b_k$$

$$n2^{n-2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(2^n - 2) + \sum_{k=3}^{n} S(n,k)b_k$$

$$2^{n-2}(n-3) + 1 = \sum_{k=3}^{n} S(n,k)(-1)^{k+1}(k-3)!$$

bulunur. Diğer ifadeler de benzer adımlarla elde edilir. □

### 3.1.3. (III) dönüşüm formülü ile elde edilen sonuçlar

Şimdi (III) dönüşüm formülünün ilk uygulaması olarak Lah sayılarının ortogonallik ilişkisini verelim.

**Önerme 3.43.** *(Comtet 1974) Lah sayıları*

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}L(n,k)L(k,m)=\delta_{nm}=\begin{cases}1 & ,n=m \quad \textit{ise,}\\ 0 & ,n\neq m \quad \textit{ise,}\end{cases}$$

*eşitliğini sağlar.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak Lah sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım, yani

$$f(t)=\frac{1}{m!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^m=\sum_{n=0}^{\infty}L(n,m)\frac{t^n}{n!}$$

olsun. (III) dönüşüm formülünde $\lambda=-1$ ve $\mu=1$ alınırsa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{t}{1+t}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}L(n,k)L(k,m)\right\}\\ \frac{t^m}{m!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}L(n,k)L(k,m)\right\}\end{aligned}$$

olur. Burada

$$a_n=\begin{cases}0 & ,n\neq m \quad \text{ise,}\\ 1 & ,n=m \quad \text{ise,}\end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}L(n,k)L(k,m)\right\}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa istenen elde edilir. □

**Önerme 3.44.** *Lah ve Laguerre sayıları $n\in\mathbb{N}$ için*

$$(n-1)!=\sum_{k=1}^{n}L(n,k)(-1)^{k+1}(k-1)!$$

*ve*

$$\sum_{k=0}^{n}Lag(n,k)(-1)^{k+1}k!=0$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.**

$$f(t) = \log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{t^n}{n!}$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$a_n = \begin{cases} 0 & , n = 0 \quad \text{ise}, \\ (-1)^{n-1}(n-1)! & , n > 0 \quad \text{ise}, \end{cases}$$

olur. (III) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = -1$ alınırsa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-t}{1+t}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=1}^{n} L(n,k)(-1)^{n+k-1}(k-1)! \right\} \\ \log(1+t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=1}^{n} L(n,k)(-1)^{n+k}(k-1)! \right\} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=1}^{n} L(n,k)(-1)^{n+k}(k-1)! \right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=1}^{n} L(n,k)(-1)^{n+k}(k-1)! \right\} \end{aligned}$$

olur. Şimdi katsayılar karşılaştırılırsa

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} L(n,k)(-1)^{n+k}(k-1)!$$

olur. Buradan $n \in \mathbb{N}$ için birinci eşitlik elde edilir. $\frac{k}{n} Lag(n,k) = L(n,k)$ eşitliği göz önüne alınarak ikinci eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.45.** *$\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere Lah sayıları*

$$(-1)^n n! \binom{\alpha}{n} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k) k! \binom{-\alpha}{k}$$

*ve*

$$(-1)^n n! \binom{-\alpha}{n} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k) k! \binom{\alpha}{k}$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.**

$$f(t) = (1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} n! \binom{\alpha}{n} \frac{t^n}{n!}$$

olarak alalım. (III) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{t}{1-t}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} L(n,k) k! \binom{\alpha}{k} \right\} \\ \frac{1}{(1-t)^{\alpha}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} L(n,k) k! \binom{\alpha}{k} \right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n! \binom{n+\alpha-1}{n} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} L(n,k) k! \binom{\alpha}{k} \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılır ve $\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k \binom{k+\alpha-1}{k}$ eşitliği kullanılanılırsa birinci eşitlik bulunur. Birinci eşitliğe Lah dönüşümü uygulanarak ikinci eşitlik elde edilir.

□

**Önerme 3.46.** *Lah sayıları*

$$n! \binom{q+1}{n} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^{n-k} k! \binom{q+k}{k}$$

*ve*

$$n! \binom{q+n}{n} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k) k! \binom{q+1}{k}$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.**

$$f(t) = \frac{1}{(1-t)^{q+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \binom{q+n}{n} \frac{t^n}{n!}$$

olarak alalım. (III) dönüşüm formülünde $\lambda = 1$ ve $\mu = -1$ alınırsa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-t}{1-t}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^k k! \binom{q+k}{k} \right\} \\ (1-t)^{q+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^k k! \binom{q+k}{k} \right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! \binom{q+1}{n} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^k k! \binom{q+k}{k} \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa birinci eşitlik bulunur ve Lah dönüşümünden ikinci eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.47.** *Lah sayıları ile harmonik sayılar* $n > 0$ *için*

$$(n-1)!H_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} L(n,k)(-1)^k (k-1)!H_{k-1}$$

*eşitliğini sağlar.*

**Kanıt.**

$$f(t) = \frac{1}{2}\ln^2(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!H_{n-1}\frac{t^n}{n!}$$

olarak alalım. (III) dönüşüm formülünde $\lambda = 1$ ve $\mu = -1$ alınırsa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-t}{1-t}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=1}^{n} L(n,k)(-1)^k(k-1)!H_{k-1}\right\} \\ \frac{1}{2}\ln^2(1-t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=1}^{n} L(n,k)(-1)^k(k-1)!H_{k-1}\right\} \end{aligned}$$

olur. Burada sol taraftaki fonksiyonun elde etiğimiz seri açılımı göz önüne alınırsa istenen elde edilir. □

**Önerme 3.48.** $r \in \mathbb{N}$ *olmak üzere, Lah sayıları, hiperharmonik sayılar, negatif mertebeli hiperharmonik sayılar ve harmonik sayılar*

$$h_n^{(-r)}n! = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^{k+1}k!h_k^{(r)},$$

$$n!h_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^{k+1}h_k^{(-r)}k!,$$

$n \geqslant 2$ *için*

$$(n-2)! = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^k k!H_k$$

*ve*

$$n!H_n - n! = \sum_{k=2}^{n} L(n,k)(-1)^k(k-2)!$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak hiperharmonik sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım, yani

$$f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{(1-t)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} n!h_n^{(r)}\frac{t^n}{n!}$$

olsun. (III) dönüşüm formülünde $\lambda = 1$ ve $\mu = -1$ alınırsa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-t}{1-t}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-1)^k k! h_k^{(r)}\right\} \\ (1-t)^r\ln(1-t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-1)^k k! h_k^{(r)}\right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty}-h_n^{(-r)}n!\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-1)^k k! h_k^{(r)}\right\} \end{aligned}$$

olur. Şimdi katsayılar karşılaştırılırsa

$$h_n^{(-r)}n! = \sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-1)^{k+1}k! h_k^{(r)}$$

birinci eşitlik elde edilir ve Lah dönüşümünden

$$n! h_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-1)^{k+1}h_k^{(-r)}k!$$

ikinci eşitlik elde edilir. Şimdi biz $(1-t)^r\ln(1-t)$ ifadesini seriye açmaya çalışalım.

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}(-1)^n t^n\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-1)^k k! h_k^{(r)}\right\}$$

olur. Burada

$$a_n = \begin{cases} 0 & , n = 0 \quad \text{ise,} \\ \frac{1}{n} & , n \geqslant 1 \quad \text{ise,} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} -\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}(-1)^n t^n\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-1)^k k! h_k^{(r)}\right\} \\ -\sum_{n=0}^{\infty}n!\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{n-k}(-1)^{n-k}a_k\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-1)^k k! h_k^{(r)}\right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi katsayılar karşılaştırılırsa

$$n!\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{n-k}(-1)^{n-k+1}a_k = \sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-1)^k k! h_k^{(r)} \tag{3.8}$$

bulunur. Burada özel olarak $r = 1$ alınırsa

$$n!\sum_{k=0}^{n}\binom{1}{n-k}(-1)^{n-k+1}a_k = \sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-1)^k k! H_k$$

$$
\begin{aligned}
n!\sum_{k=1}^{n}\binom{1}{n-k}\frac{(-1)^{n-k+1}}{k} &= \sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-1)^k k!H_k \\
(n-2)! &= \sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-1)^k k!H_k
\end{aligned}
$$

üçüncü eşitlik bulunur. Burada

$$
A_n = \begin{cases} 0 & , n=0 \text{ ise}, \\ -1 & , n=1 \text{ ise}, \\ (n-2)! & , n \geqslant 2 \text{ ise}, \end{cases}
$$

tanımlayarak Lah dönüşümünden

$$
\begin{aligned}
(-1)^n n!H_n &= \sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-1)^{n-k}A_k \\
n!H_n &= \sum_{k=2}^{n}L(n,k)(-1)^k(n-2)! + n! \\
n!H_n - n! &= \sum_{k=2}^{n}L(n,k)(-1)^k(n-2)!
\end{aligned}
$$

dördüncü eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.49.** *Lah sayıları ile birinci ve ikinci çeşit Cauchy sayıları*

$$
(-1)^n\widehat{c}_n = \sum_{k=0}^{n}L(n,k)c_k
$$

*ve*

$$
(-1)^n c_n = \sum_{k=0}^{n}L(n,k)\widehat{c}_n
$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak birinci çeşit Cauchy sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım, yani

$$
f(t) = \frac{t}{\ln(1+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{t^n}{n!}
$$

olsun. (III) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = 1$ alınırsa

$$
f\left(\frac{t}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}L(n,k)c_k\right\}
$$

$$\begin{aligned}\frac{t}{(1-t)\ln(\frac{1}{1-t})} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}L(n,k)c_k\right\}\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\widehat{c}_n\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}L(n,k)c_k\right\}\end{aligned}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa birinci eşitlik bulunur ve Lah dönüşümünden ikinci eşitlik elde edilir. □

### 3.1.4. (IV) dönüşüm formülü ile elde edilen sonuçlar

Bu kesimde tarihsel açıdan en klasik dönüşümlerden biri olan (IV) dönüşüm formülünün, diğer adı ile üstel dönüşüm formülünün temel bazı uygulamalarını vereceğiz.

**Tanım 3.50.** *(Boyadzhiev 2019) Derangement sayıları*

$$\frac{e^{-t}}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}D_n\frac{t^n}{n!}$$

*üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (bkz. Ek 6.16.).*

**Önerme 3.51.** *Derangement sayıları*

$$n!=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$$

*ve*

$$D_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k!$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak derangement sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım, yani

$$f(t)=\frac{e^{-t}}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}D_n\frac{t^n}{n!}$$

olsun. (IV) dönüşüm formülünde $\lambda=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}e^tf(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k\right\}\\ e^t\frac{e^{-t}}{1-t} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k\right\}\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k\right\}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa birinci eşitlik bulunur ve binom dönüşümünden ikinci eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.52.** *Euler polinomları, Euler sayıları ve birinci çeşit Euler sayıları*

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}E_k^*,$$

$$E_n^* = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^{n-k}E_k(x),$$

$$E_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^kE_k^*$$

*ve*

$$E_n^* = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-n}}{2^n}E_k$$

*eşitliklerini sağlarlar.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak birinci çeşit Euler sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım, yani

$$f(t) = \frac{2}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^*\frac{t^n}{n!}$$

olsun. (IV) dönüşüm formülünde $\lambda = x$ alınırsa

$$e^{xt}f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}E_k^*\right\}$$

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}E_k^*\right\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}E_k^*\right\}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa birinci eşitlik bulunur ve binom dönüşümünden ikinci eşitlik elde edilir. Birinci ve ikinci eşitlikte sırasıyla $x = \frac{1}{2}$ alınırsa üçüncü ve dördüncü eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.53.** *Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} B_k$$

*(Comtet 1974),*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^{n-k} B_k(x),$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \quad (n \geqslant 2)$$

*ve*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k B_k = n$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım, yani

$$f(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

olsun. (IV) dönüşüm formülünde $\lambda = x$ alınırsa

$$\begin{aligned} e^{xt} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} B_k \right\} \\ \frac{te^{xt}}{e^t - 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} B_k \right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} B_k \right\} \end{aligned}$$

olur. Şimdi katsayılar karşılaştırılırsa

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} B_k \tag{3.9}$$

bulunur ve binom dönüşümünden

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^{n-k} B_k(x) \tag{3.10}$$

elde edilir. Şimdi $n = 1$ için $B_1(1) = B_1 + 1$ ve $n \neq 1$ için $B_n(1) = B_n$ olduğu Bernoulli polinomlarının (2.1) üreteç fonksiyonundan görülür. Dolayısıyla (3.9) eşitliğinde $x = 1$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \quad (n \geq 2)$$

elde edilir. Aynı şekilde de (3.10) eşitliğinde $x = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} B_k(1) \\ &= (-1)^n \underbrace{B_0(1)}_{B_0} + n(-1)^{n-1} \underbrace{B_1(1)}_{B_1+1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \underbrace{B_k(1)}_{B_k} \\ &= (-1)^n + \frac{n(-1)^{n-1}}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} B_k + B_n \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} B_k = (-1)^{n-1} + \frac{n(-1)^n}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} B_k = (-1)^n + \frac{n(-1)^n}{2} + (-1)^{n-1} + \frac{n(-1)^n}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} B_k = (-1)^n n$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{k} B_k = n$$

elde edilir. □

**Önerme 3.54.** *Jacobsthal sayıları $n \in \mathbb{N}$ için*

$$3^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J(k)$$

*ve*

$$J(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^{k-1}$$

*eşitlikleri sağlanır.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım, yani

$$f(t) = \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} J(n) \frac{t^n}{n!}$$

olsun. (IV) dönüşüm formülünde $\lambda = 1$ alınırsa

$$e^t f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J(k) \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J(k) \right\} \\ \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J(k) \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada

$$a_n = \begin{cases} 0 & , n = 0 \quad \text{ise}, \\ 3^{n-1} & , n \geqslant 1 \quad \text{ise}, \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J(k) \right\}$$

yazılabilir. Şimdi katsayılar karşılaştırılırsa

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J(k)$$

bulunr ve binom dönüşümünden

$$J(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k$$

elde edilir. Son iki eşitliğin birincisi $n \in \mathbb{N}$ için birinci eşitlik ve ikincisi $k = 0$ için ikinci eşitlik elde edilir. □

### 3.1.5. (V) dönüşüm formülü ile elde edilen sonuçlar

Geometrik dönüşüm formülü olarak da adlandırılabilecek olan (V) dönüşüm formülünün ikinci çeşit Cauchy sayılarını içeren temel bir uygulamasını vereceğiz.

**Önerme 3.55.** *İkinci çeşit Cauchy sayıları*

$$(-1)^n \frac{\widehat{c}_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\widehat{c}_k}{k!}$$

*(Merlini, Sprugnoli ve Verri 2006, Theorem 2.7) eşitliğini sağlar.*

**Kanıt.** $f(t)$ olarak ikinci çeşit Cauchy sayılarının üreteç fonksiyonunu alalım, yani

$$f(t) = \frac{t}{(1+t)\ln(1+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{c}_n \frac{t^n}{n!}$$

olsun. (V) dönüşüm formülünde $\lambda = \mu = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-t} f\left(\frac{t}{1-t}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left\{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\widehat{c}_k}{k!}\right\} \\
\frac{-t}{(1-t)\ln(1-t)} &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left\{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\widehat{c}_k}{k!}\right\} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \widehat{c}_n}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left\{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\widehat{c}_k}{k!}\right\}
\end{aligned}$$

olur. Burada katsayılar karşılaştırılırsa istenen elde edilir. □

## 3.2. İleri ve Geri Fark Operatörleri ile Elde Edilen Sonuçlar

Bu kesimde esas olarak Spivey (2007) yöntemi kullanılarak, ileri ve geri fark operatörleri yardımıyla çok sayıda yeni eşitlik elde edilmiş ve bilinen bazı eşitliklere yeni kanıtlar sunulmuştur. Bu sonuçlar iki alt başlık halinde verilmiştir.

### 3.2.1. İleri fark operatörü ile elde edilen sonuçlar

**Önerme 3.56.** *Hiperharmonik sayılar için*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{k+1}^{(r-k-1)} = h_{n+1}^{(r-1)}$$

*ve*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(h_{k+1}^{(r-k-2)} - h_{k-1}^{(r-k)}\right) = h_{n+1}^{(r-2)} - h_{n-1}^{(r)}$$

*eşitlikleri sağlanır.*

**Kanıt.** $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\underbrace{h_n^{(r)}}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h_k^{(r-k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Corollary 28.) eşitliğini göz önüne alalım. (2.5) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = h_{k+1}^{(r-k-1)} - h_k^{(r-k)}$ için

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(h_{k+1}^{(r-k-1)} - h_k^{(r-k)}\right) = h_{n+1}^{(r)} - 2h_n^{(r)}$$

ve buradan

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{k+1}^{(r-k-1)} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_k^{(r-k)} = h_{n+1}^{(r-1)} - h_n^{(r)}$$

yani birinci eşitlik elde edilir. $h_n^{(r-1)} = h_n^{(r)} - h_{n-1}^{(r)}$ özeliği kullanılırsa

$$a_k = h_{k+1}^{(r-k-1)} - \sum_{n=1}^{k} h_n^{(r-k-1)} = h_{k+1}^{(r-k-1)} - h_k^{(r-k-1)} - \sum_{n=1}^{k-1} h_n^{(r-k-1)} = h_{k+1}^{(r-k-2)} - h_{k-1}^{(r-k)}$$

olur ve (2.5) göz önüne alınırsa ikinci eşitlik çıkar. □

**Önerme 3.57.** *Pozitif ve negatif mertebeli hiperharmonik sayılar için*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{k+2}^{(-k-1)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{k+1}^{(-k)} = \frac{1}{n+1},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{m+k+1}^{(r-k-1)} = h_{m+n+1}^{(r)} - h_{m+n}^{(r)},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{m-k-1}^{(r+k+1)} = h_{m-1}^{(r+n+1)} - h_{m}^{(r+n)}$$

*ve*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{m+k+1}^{(-k-1)} = \frac{-1}{(m+n)(m+n+1)}$$

*eşitlikleri sağlanır.*

**Kanıt.** $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h_{k+1}^{(-k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Corollary 29.) eşitliğini göz önüne alalım. (2.5) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = h_{k+2}^{(-k-1)} - h_{k+1}^{(-k)}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left( h_{k+2}^{(-k-1)} - h_{k+1}^{(-k)} \right) &= \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} \\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{k+2}^{(-k-1)} &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

birinci eşitlik bulunur.

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\underbrace{H_n}_{h_n} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h_k^{(1-k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Corollary 29.) eşitliğini göz önüne alalım. (2.5) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = h_{k+1}^{(-k)} - h_k^{(1-k)}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left( h_{k+1}^{(-k)} - h_k^{(1-k)} \right) &= H_{n+1} - 2H_n \\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{k+1}^{(-k)} &= H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

ikinci eşitlik elde edilir.

$r \in \mathbb{Z}$ ve $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\underbrace{h_{m+n}^{(r)}}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h_{m+k}^{(r-k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Proposition 25.) eşitliğini göz önüne alalım. (2.5) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = h_{m+k+1}^{(r-k-1)} - h_{m+k}^{(r-k)}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left( h_{m+k+1}^{(r-k-1)} - h_{m+k}^{(r-k)} \right) &= h_{m+n+1}^{(r)} - 2h_{m+n}^{(r)} \\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{m+k+1}^{(r-k-1)} &= h_{m+n+1}^{(r)} - h_{m+n}^{(r)} \end{aligned}$$

üçüncü eşitlik elde edilir.

$r \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $n \leqslant m$ olmak üzere

$$\underbrace{h_{m}^{(r+n)}}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h_{m-k}^{(r+k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Proposition 25.) eşitliğini göz önüne alalım. (2.5) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = h_{m-k-1}^{(r+k+1)} - h_{m-k}^{(r+k)}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left( h_{m-k-1}^{(r+k+1)} - h_{m-k}^{(r+k)} \right) &= h_{m}^{(r+n+1)} - 2h_{m}^{(r+n)} \\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{m-k-1}^{(r+k+1)} &= h_{m-1}^{(r+n+1)} - h_{m}^{(r+n)} \end{aligned}$$

dördüncü eşitlik elde edilir.

$m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\underbrace{\frac{1}{m+n}}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h_{m+k}^{(-k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Corollary 27.) eşitliğini göz önüne alalım. (2.5) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = h_{m+k+1}^{(-k-1)} - h_{m+k}^{(-k)}$ için

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left( h_{m+k+1}^{(-k-1)} - h_{m+k}^{(-k)} \right) = \frac{1}{m+n+1} - \frac{2}{m+n}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{m+k+1}^{(-k-1)} = \frac{1}{m+n+1} - \frac{1}{m+n} = \frac{-1}{(m+n)(m+n+1)}$$

son eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.58.** *Pozitif ve negatif mertebeli hiperharmonik sayılar için*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{i+1}^{(r-i-1)} - h_{i}^{(r-i)} \right)}{2^k} = \frac{h_n^{(r)}}{2^n},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{i+2}^{(-i-1)} - h_{i+1}^{(-i)} \right)}{2^k} = \frac{1}{2^n(n+1)},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{i+1}^{(-i)} - h_{i}^{(1-i)} \right)}{2^k} = \frac{H_n}{2^n},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{m+i+1}^{(r-i-1)} - h_{m+i}^{(r-i)} \right)}{2^k} = \frac{h_{m+n}^{(r)}}{2^n},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{m-i-1}^{(r+i+1)} - h_{m-i}^{(r+i)} \right)}{2^k} = \frac{h_m^{(r+n)}}{2^n}$$

*ve*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{m+i+1}^{(-i-1)} - h_{m+i}^{(-i)} \right)}{2^k} = \frac{1}{2^n(m+n)}$$

*eşitlikleri sağlanır.*

**Kanıt.** $r \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\underbrace{h_n^{(r)}}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h_k^{(r-k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Corollary 28.) eşitliğini göz önüne alalım. (2.6) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = h_{k+1}^{(r-k-1)} - h_k^{(r-k)}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{i+1}^{(r-i-1)} - h_{i}^{(r-i)} \right)}{2^k} = \frac{h_n^{(r)}}{2^n}$$

birinci eşitlik elde edilir.

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h_{k+1}^{(-k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Corollary 29.) eşitliğini göz önüne alalım. (2.6) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = h_{k+2}^{(-k-1)} - h_{k+1}^{(-k)}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{i+2}^{(-i-1)} - h_{i+1}^{(-i)} \right)}{2^k} = \frac{1}{2^n(n+1)}$$

ikinci eşitlik elde edilir.

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\underbrace{H_n}_{h_n} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h_{k}^{(1-k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Corollary 29.) eşitliğini göz önüne alalım. (2.6) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = h_{k+1}^{(-k)} - h_{k}^{(1-k)}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{i+1}^{(-i)} - h_{i}^{(1-i)} \right)}{2^k} = \frac{H_n}{2^n}$$

üçüncü eşitlik elde edilir.

$r \in \mathbb{Z}$ ve $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\underbrace{h_{m+n}^{(r)}}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h_{m+k}^{(r-k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Proposition 25.) eşitliğini göz önüne alalım. (2.6) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = h_{m+k+1}^{(r-k-1)} - h_{m+k}^{(r-k)}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{m+i+1}^{(r-i-1)} - h_{m+i}^{(r-i)} \right)}{2^k} = \frac{h_{m+n}^{(r)}}{2^n}$$

dördüncü eşitlik elde edilir.

$r \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $n \leqslant m$ olmak üzere

$$\underbrace{h_{m}^{(r+n)}}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h_{m-k}^{(r+k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Proposition 25.) eşitliğini göz önüne alalım. (2.6) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = h_{m-k-1}^{(r+k+1)} - h_{m-k}^{(r+k)}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{m-i-1}^{(r+i+1)} - h_{m-i}^{(r+i)} \right)}{2^k} = \frac{h_m^{(r+n)}}{2^n}$$

beşinci eşitlik elde edilir. $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\underbrace{\frac{1}{m+n}}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h_{m+k}^{(-k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Corollary 27.) eşitliğini göz önüne alalım. (2.6) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = h_{m+k+1}^{(-k-1)} - h_{m+k}^{(-k)}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{m+i+1}^{(-i-1)} - h_{m+i}^{(-i)} \right)}{2^k} = \frac{1}{2^n(m+n)}$$

son eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.59.** *Birinci çeşit Stirling sayıları, harmonik sayılar, negatif mertebeli hiperharmonik sayılar, ikinci çeşit Cauchy sayıları, ikinci çeşit Bernoulli sayıları (birinci çeşit Cauchy sayıları), geometrik sayılar, Skew harmonik sayılar ve birinci çeşit Euler sayıları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k) \frac{(-1)^{k+1}}{k+2} = \widehat{c}_{n+1} + n\widehat{c}_n,$$

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k) h_{k+2}^{(-k-1)} = \widehat{c}_{n+1} + n\widehat{c}_n,$$

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k) \frac{-1}{(k+1)(k+2)} = c_{n+1} + (n-1)c_n,$$

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(k+1)\omega_k = (2n+1)n! H_n^{\sim} + (-1)^n n!,$$

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\alpha^{k+1} = (n+1)! \binom{\alpha}{n+1} + n(n!) \binom{\alpha}{n},$$

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{k+1}(q+1)^k = \frac{(-1)^{n+1}(q+n)!}{q!},$$

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{k+1}(k+1)r^k = (-1)^{n+1}(n+1)!h_{n+1}^{(r)} + n(-1)^n n! h_n^{(r)},$$

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{k+1}(k+1) = (-1)^{n+1}n!(H_n+1)$$

*ve*

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)E_{k+1}^{*} = \frac{(-1)^n(n-1)n!}{2^{n+1}}.$$

**Kanıt.** $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\underbrace{\frac{(-1)^k}{k+1}}_{b_k} = \underbrace{\widehat{c}_n}_{h_n}$$

(bkz. Önerme 3.25) eşitliğini göz önüne alalım. (2.7) eşitliğinden
$a_k = \Delta b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k+2} - \frac{(-1)^k}{k+1}$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k+2} - \frac{(-1)^k}{k+1}\right) &= \widehat{c}_{n+1} + (n-1)\widehat{c}_n \\ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{(-1)^{k+1}}{k+2} &= \widehat{c}_{n+1} + n\widehat{c}_n\end{aligned}$$

birinci eşitlik elde edilir.

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\underbrace{h_{k+1}^{(-k)}}_{b_k} = \underbrace{\widehat{c}_n}_{h_n}$$

(bkz. Önerme 3.25) eşitliğini göz önüne alalım. (2.7) eşitliğinden
$a_k = \Delta b_k = h_{k+2}^{(-k-1)} - h_{k+1}^{(-k)}$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\left(h_{k+2}^{(-k-1)} - h_{k+1}^{(-k)}\right) &= \widehat{c}_{n+1} + (n-1)\widehat{c}_n \\ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)h_{k+2}^{(-k-1)} &= \widehat{c}_{n+1} + n\widehat{c}_n\end{aligned}$$

ikinci eşitlik elde edilir.

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{1}{k+1}$$

(bkz. Önerme 3.23) eşitliğini göz önüne alalım. (2.7) eşitliğinden
$a_k = \Delta b_k = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{-1}{(k+1)(k+2)}$ için

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{-1}{(k+1)(k+2)} = c_{n+1} + (n-1)c_n$$

üçüncü eşitlik elde edilir.

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$n!H_n^{\sim} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)k\omega_{k-1}$$

(bkz. Önerme 3.28) eşitliğini göz önüne alalım. (2.7) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = (k+1)\omega_k - k\omega_{k-1}$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\left((k+1)\omega_k - k\omega_{k-1}\right) &= (n+1)!H_{n+1}^{\sim} + (n-1)n!H_n^{\sim}\\ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)(k+1)\omega_k &= (n+1)!H_{n+1}^{\sim} + nn!H_n^{\sim} = (2n+1)n!H_n^{\sim} + (-1)^n n!\end{aligned}$$

dördüncü eşitlik elde edilir.

$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$n!\binom{\alpha}{n} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\alpha^k$$

(bkz. Önerme 3.30) eşitliğini göz önüne alalım. (2.7) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = \alpha^{k+1} - \alpha^k$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\left(\alpha^{k+1} - \alpha^k\right) &= (n+1)!\binom{\alpha}{n+1} + (n-1)n!\binom{\alpha}{n}\\ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\alpha^{k+1} &= (n+1)!\binom{\alpha}{n+1} + nn!\binom{\alpha}{n}\end{aligned}$$

beşinci eşitlik elde edilir.

$q \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$(-1)^n n!\binom{q+n}{n} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^k(q+1)^k$$

(bkz. Önerme 3.31) eşitliğini göz önüne alalım. (2.7) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = (-1)^{k+1}(q+1)^{k+1} - (-1)^k(q+1)^k = (-1)^{k+1}(p+2)(q+1)^k$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{k+1}(q+2)(q+1)^k &= (-1)^{n+1}(n+1)!\binom{q+n+1}{n+1} + (n-1)(-1)^n\\ &\times\ n!\binom{q+n}{n}\\ &= \frac{(-1)^{n+1}(q+2)(q+n)!}{q!}\end{aligned}$$

altıncı eşitlik elde edilir.

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$(-1)^n n! h_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^k k r^{k-1}$$

(bkz. Önerme 3.33) eşitliğini göz önüne alalım. (2.7) eşitliğinden

$a_k = \Delta b_k = (-1)^{k+1}(k+1)r^k - (-1)^k k r^{k-1}$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)((-1)^{k+1}(k+1)r^k - (-1)^k k r^{k-1}) &= (-1)^{n+1}(n+1)! h_{n+1}^{(r)} + (n-1) \\ &\times (-1)^n n! h_n^{(r)} \\ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{k+1}(k+1)r^k &= (-1)^{n+1}(n+1)! h_{n+1}^{(r)} + n(-1)^n n! \\ &\times h_n^{(r)}\end{aligned}$$

yedinci eşitlik elde edilir. Yedinci eşitlikte özel olarak $r = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{k+1}(k+1) &= (-1)^{n+1}(n+1)! H_{n+1} + n(-1)^n n! H_n \\ &= (-1)^{n+1} n!(H_n + 1)\end{aligned}$$

sekizinci eşitlik elde edilir.

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\frac{(-1)^n n!}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) E_k^*$$

(bkz. Önerme 3.36) eşitliğini göz önüne alalım. (2.7) eşitliğinden $a_k = \Delta b_k = E_{k+1}^* - E_k^*$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(E_{k+1}^* - E_k^*) &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+1}} + (n-1)\frac{(-1)^n n!}{2^n} \\ \sum_{k=0}^{n} s(n,k) E_{k+1}^* &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+1}} + n\frac{(-1)^n n!}{2^n} = \frac{(-1)^n (n-1) n!}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

son eşitlik elde edilir. □

### 3.2.2. Geri fark operatörü ile elde edilen sonuçlar

Spivey (2007) (Theorem 1.) çalışmasında ileri fark operatörü ile bir dönüşüm formülü elde edilmiştir. Bu kesimde geri fark operatörü kullanılarak Spivey'in teoremine benzer aşağıdaki teoremi verilmiş ve çeşitli uygulamaları elde edilmiştir.

**Teorem 3.60.** *Her $n \in \mathbb{Z}$ için $(a_k)$ dizisinin binom dönüşümü $g_n$ ise $(ka_k)$ dizisinin binom dönüşümü $n(g_n - g_{n-1})$ dir.*

**Kanıt.**

$$\begin{aligned} g_n - g_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[ \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \right] a_k \end{aligned}$$

olur. Burada $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ eşitliği kullanılırsa

$$g_n - g_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} a_k$$

yani

$$n(g_n - g_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k a_k$$

elde edilir. □

**Önerme 3.61.** *Fibonacci sayıları ve Lucas sayıları*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k F_k = n F_{2n-1},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 F_k = n^2 F_{2n-2} + n F_{2n-3},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} k F_k = n F_{n-2},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} k^2 F_k = n^2 F_{n-4} + n F_{n-3},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} k^3 F_k = (n^3 + n) F_{n-6} + 3n^2 F_{n-5}$$

*ve*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k L_k = n L_{2n-1},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 L_k = n^2 L_{2n-2} + n L_{2n-3},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k kL_k = nL_{n-2},$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^2 L_k = n^2 L_{n-4} + nL_{n-3}$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.**
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = F_{2n}$$
(Koshy 2019, (12.2)) eşitliğine Teorem 3.60 uygulanırsa
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kF_k = n(F_{2n} - F_{2n-2}) = nF_{2n-1}$$
birinci eşitlik elde edilir. Bu eşitliğe Teorem 3.60 bir kez daha uygulanırsa
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2 F_k &= n(nF_{2n-1} - (n-1)F_{2n-3}) \\ &= n(nF_{2n-2} + F_{2n-3})\end{aligned}$$
ikinci eşitlik elde edilir.
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}F_k = F_n$$
(Spivey 2019, Identity 181) eşitliğine Teorem 3.60 uygulanırsa
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}kF_k = n(F_n - F_{n-1}) = nF_{n-2}$$
üçüncü eşitlik elde edilir. Bu eşitliğe Teorem 3.60 bir kez daha uygulanırsa
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}k^2 F_k &= n(nF_{n-2} - (n-1)F_{n-3}) \\ &= n^2 F_{n-4} + nF_{n-3}\end{aligned}$$
dördüncü eşitlik elde edilir. Dördüncü eşitliğe Teorem 3.60 bir kez daha uygulanırsa beşinci eşitlik elde edilir.

Lucas sayları için ifade edilen eşitlikler benzer yöntemle kanıtlanır. □

**Önerme 3.62.** *Bernoulli sayıları*
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-n)B_k = (-1)^n nB_{n-1}$$
*eşitliğini sağlar.*

**Kanıt.**

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k = (-1)^n B_n$$

(bkz. Önerme 3.53) eşitliğine Teorem 3.60 uygulanırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kB_k &= n((-1)^n B_n + (-1)^n B_{n-1})\\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kB_k - n(-1)^n B_n &= (-1)^n n B_{n-1}\end{aligned}$$

buradan istenen elde edilir. □

Spivey (2007) (Theorem 2.) çalışmasında ileri fark operatörü ile bir dönüşüm formülü elde edilmiştir. Bu kesimde geri fark operatörü kullanılarak Spivey'in teoremine benzer aşağıdaki teoremi verilmiş ve çeşitli uygulamaları elde edilmiştir.

**Teorem 3.63.** *$(a_k)$ ve $(b_k)$ iki dizi ve $k \in \mathbb{N}$ için $a_k = \nabla b_k = b_k - b_{k-1}$ biçiminde verilsin.*

$$g_n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}a_k \quad \textit{ve} \quad h_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k$$

*olarak tanımlansın. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$g_n = h_n - 2h_{n-1} \tag{3.11}$$

*dir.*

**Kanıt.**

$$\begin{aligned}h_n - 2h_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k - \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}b_k - \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}b_k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}\right]b_k - \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}b_{k-1}\end{aligned}$$

olur. Burada $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ eşitliği kullanılırsa

$$h_n - 2h_{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\underbrace{(b_k - b_{k-1})}_{a_k} = g_n$$

elde edilir. □

**Önerme 3.64.** *Harmonik sayılar ve hiperharmonik sayılar*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(h_k^{(r-k)}-h_{k-1}^{(r-k+1)})=n(h_n^{(r-1)}-h_{n-1}^{(r)}),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k(h_k^{(r-1)}-h_{k-1}^{(r)})=n(h_n^{(r-n)}-h_{n-1}^{(r-n+1)}),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(h_k^{(1-k)}-h_{k-1}^{(2-k)})=1-nH_{n-1}$$

*ve*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(1-kH_{k-1})=n(h_n^{(1-n)}-h_{n-1}^{(2-n)})$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.** $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için

$$\underbrace{h_n^{(r)}}_{h_n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{h_k^{(r-k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Corollary 28.) eşitliğini göz önüne alalım. (3.11) eşitliğinden $a_k=\nabla b_k=h_k^{(r-k)}-h_{k-1}^{(r-k+1)}$ için

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(h_k^{(r-k)}-h_{k-1}^{(r-k+1)})=h_n^{(r)}-2h_{n-1}^{(r)}=h_n^{(r-1)}-h_{n-1}^{(r)}$$

veya

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(h_k^{(r-k)}-h_{k-1}^{(r-k+1)})=n(h_n^{(r-1)}-h_{n-1}^{(r)})$$

birinci eşitlik elde edilir ve binom dönüşümünden de ikinci eşitlik elde edilir. Birinci ve ikinci eşitlikte sırasıyla özel olarak $r=1$ alınırsa son iki eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.65.** *Negatif mertebeli hiperharmonik sayılar*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(h_{k+1}^{(-k)}-h_k^{(1-k)})=\frac{-(n+2)}{n+1}$$

*ve*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k+1}\frac{k+2}{k+1}=n(h_{n+1}^{(-n)}-h_n^{(1-n)})$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.** $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h_{k+1}^{(-k)}}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Corollary 29.) eşitliğini göz önüne alalım. (3.11) eşitliğinden $a_k = \nabla b_k = h_{k+1}^{(-k)} - h_k^{(1-k)}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (h_{k+1}^{(-k)} - h_k^{(1-k)}) = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{-(n+2)}{n(n+1)}$$

olur. Buradan da $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k (h_{k+1}^{(-k)} - h_k^{(1-k)}) = \frac{-(n+2)}{n+1}$$

birinci eşitlik elde edilir ve binom dönüşümünden de ikinci eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.66.** *Harmonik sayılar* $n > 1$ *için*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (2kH_{k-1} + 1) = \frac{2n}{n-1}$$

*ve*

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{2k}{k-1} = 2nH_{n-1}$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.** $n \in \mathbb{N}$ için

$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{h_n} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(-1)^{k+1} H_k}_{b_k}$$

(Dil ve Muniroglu 2020, Corollary 17.) eşitliğini göz önüne alalım. (3.11) eşitliğinden $a_k = \nabla b_k = (-1)^{k+1} H_k - (-1)^k H_{k-1} = (-1)^{k+1}(2H_{k-1} + \frac{1}{k})$ ve

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & , n = 1 \quad \text{ise,} \\ \frac{1}{n} - \frac{2}{n-1} & , n > 1 \quad \text{ise,} \end{cases}$$

alarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (-1)^{k+1} \left(2H_{k-1} + \frac{1}{k}\right) &= \alpha_n \\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} (2kH_{k-1} + 1) &= n\alpha_n - 1 \end{aligned}$$

olur ve binom dönüşümünden

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}(k\alpha_k-1)=2nH_{n-1}+1$$

bulunur. Buradan son iki eşitlikte $n>1$ için istenen eşitlikler elde edilir. □

Spivey (2007) (Theorem 4.) çalışmasında ileri fark operatörü ile bir dönüşüm formülü elde edilmiştir. Bu kesimde geri fark operatörü kullanılarak Spivey'in teoremine benzer aşağıdaki teoremi verilmiş ve çeşitli uygulamaları elde edilmiştir.

**Teorem 3.67.** *$(a_k)$ ve $(b_k)$ iki dizi ve $k\in\mathbb{N}$ için $a_k=\nabla b_k=b_k-b_{k-1}$ biçiminde verilsin.*

$$g_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}a_k \quad ve \quad h_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k$$

*olarak tanımlansın. Bu durumda $n\in\mathbb{N}$ için*

$$h_n=2^n\sum_{k=1}^{n}\frac{g_k}{2^k} \tag{3.12}$$

*dir.*

**Kanıt.** Teorem 3.63'den $h_n-2h_{n-1}=g_n$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty}h_nz^n-2\sum_{n=0}^{\infty}h_{n-1}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}g_nz^n$$

olur. Burada $\sum_{n=0}^{\infty}h_nz^n=H(z)$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}g_nz^n=G(z)$ ile gösterelim,

$$\begin{aligned} H(z)-2zH(z) &= G(z)\\ H(z) &= \frac{G(z)}{1-2z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}h_nz^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}2^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}g_nz^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}2^{n-k}z^{n-k}g_kz^k\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n\sum_{k=1}^{n}\frac{g_k}{2^k}\right)z^n \end{aligned}$$

olur. Şimdi katsayılar karşılaştırılırsa istenen elde edilir. □

**Önerme 3.68.** *Derangement sayıları, Jacobsthal sayıları, Euler sayıları ve birinci çeşit Euler sayıları*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} i(D_k - D_{k-1})}{k2^k} = \frac{n!}{2^n},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} i(J(k) - J(k-1))}{k2^k} = \frac{3^{n-1}}{2^n}$$

*ve*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \frac{i}{k} 2^{i-k} \left( E_k^* - \frac{1}{2} E_{k-1}^* \right) = \frac{E_n}{2^n}$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.** $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\underbrace{n!}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{D_k}_{b_k}$$

(bkz. Önerme 3.51) eşitliğini göz önüne alalım. (3.12) eşitliğinden $a_k = \nabla b_k = D_k - D_{k-1}$ için

$$2^n \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} (D_k - D_{k-1})}{2^k} = n!$$

olur ve buradan istenen birinci eşitlik elde edilir.

$n \in \mathbb{N}$ için

$$\underbrace{3^{n-1}}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{J(k)}_{b_k}$$

(bkz. Önerme 3.54) eşitliğini göz önüne alalım. (3.12) eşitliğinden $a_k = \nabla b_k = J(k) - J(k-1)$ için

$$2^n \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} (J(k) - J(k-1))}{2^k} \right) = 3^{n-1}$$

olur ve buradan istenen ikinci eşitlik elde edilir.

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\underbrace{E_n}_{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{2^k E_k^*}_{b_k}$$

(bkz. Önerme 3.52) eşitliğini göz önüne alalım.(3.12) eşitliğinden $a_k = \nabla b_k = 2^k E_k^* - 2^{k-1} E_{k-1}^* = 2^k (E_k^* - \frac{1}{2} E_{k-1}^*)$ için

$$2^n \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} 2^i (E_i^* - \frac{1}{2} E_{i-1}^*)}{2^k} = E_n$$

olur ve buradan son eşitlik elde edilir. □

Spivey (2007) (Theorem 8.) çalışmasında ileri fark operatörü ile bir dönüşüm formülü elde edilmiştir. Bu kesimde geri fark operatörü kullanılarak Spivey'in teoremine benzer aşağıdaki teoremi verilmiş ve çeşitli uygulamaları elde edilmiştir.

**Teorem 3.69.** *$(a_k)$ ve $(b_k)$ iki dizi ve $k \in \mathbb{N}$ için $a_k = \nabla b_k = b_k - b_{k-1}$ biçiminde verilsin.*

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} s(n-1,k-1)a_k \quad ve \quad h_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)b_k$$

*olarak tanımlansın. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$g_n = h_n + (n-2)h_{n-1} \tag{3.13}$$

*dir.*

**Kanıt.**

$$\begin{aligned} h_n + (n-2)h_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)b_k + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)b_k - \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)b_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(s(n,k) + (n-1)s(n-1,k)\right) b_k - \sum_{k=1}^{n} s(n-1,k-1)b_{k-1} \end{aligned}$$

olur. Burada (1.4) eşitliği kullanılırsa

$$h_n + (n-2)h_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} s(n-1,k-1)\underbrace{(b_k - b_{k-1})}_{a_k} = g_n$$

elde edilir. □

**Önerme 3.70.** *Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ile üstel polinomlar ve sayılar*

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_{k+1}(x) = x^n(x+n),$$

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^k(x+k) = \phi_{n+1}(x)$$

*ve*

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)k = \Delta\phi_n$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.**

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x)$$

(bkz. Önerme 3.38) eşitliğini göz önüne alalım. (3.13) eşitliğinden

$a_k = \nabla b_k = \phi_k(x) - \phi_{k-1}(x)$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} s(n-1,k-1)(\phi_k(x)-\phi_{k-1}(x)) &= x^n + (n-2)x^{n-1}\\ \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)(\phi_{k+1}(x)-\phi_k(x)) &= x^n + (n-2)x^{n-1}\\ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)(\phi_{k+1}(x)-\phi_k(x)) &= x^{n+1} + (n-1)x^n\\ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_{k+1}(x) &= x^n(x+n)\end{aligned}$$

birinci eşitlik elde edilir ve Stirling dönüşümünden de ikinci eşitlik elde edilir. Şimdi ikinci eşitlikte $x = 1$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(k+1) = \phi_{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)k = \phi_{n+1} - \phi_n = \Delta\phi_n$$

son eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.71.** *Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ile birinci çeşit Cauchy sayıları*

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{-1}{(k+1)(k+2)} = c_{n+1} + (n-1)c_n$$

*ve*

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(c_{k+1} + (k-1)c_k) = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.**

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{1}{k+1}$$

(bkz. Önerme 3.23) eşitliğini göz önüne alalım. (3.13) eşitliğinden
$a_k = \nabla b_k = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{-1}{k(k+1)}$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} s(n-1,k-1)\frac{-1}{k(k+1)} &= c_n + (n-2)c_{n-1}\\ \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)\frac{-1}{(k+1)(k+2)} &= c_n + (n-2)c_{n-1}\end{aligned}$$

olur ve buradan birinci eşitlik elde edilir ve Stirling dönüşümünden de ikinci eşitlik elde edilir. □

**Önerme 3.72.** *Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ile geometrik polinomlar*

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\omega_{k+1}(x) = n!x^n(nx+x+n)$$

*ve*

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)k!x^k(kx+x+k) = \omega_{n+1}(x)$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.**

$$n!x^n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\omega_k(x)$$

(bkz. Önerme 3.41) eşitliğini göz önüne alalım. (3.13) eşitliğinden
$a_k = \nabla b_k = \omega_k(x) - \omega_{k-1}(x)$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} s(n-1,k-1)(\omega_k(x)-\omega_{k-1}(x)) &= (n)!x^n + (n-2)(n-1)!x^{n-1}\\ \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)(\omega_{k+1}(x)-\omega_k(x)) &= (n)!x^n + (n-2)(n-1)!x^{n-1}\\ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)(\omega_{k+1}(x)-\omega_k(x)) &= (n+1)!x^{n+1} + (n-1)n!x^n\\ \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\omega_{k+1}(x) &= (n+1)!x^{n+1} + nn!x^n\end{aligned}$$

olur ve buradan birinci eşitlik elde edilir ve Stirling dönüşümünden de ikinci elde edilir.
□

**Önerme 3.73.** *Birinci ve ikinci çeşit Stirling sayıları ile Bernoulli sayıları*

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)B_k = \frac{(-1)^n n!}{n+1}$$

*ve*

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)\frac{(-1)^k k!}{k+1} = B_n$$

*eşitliklerini sağlar.*

**Kanıt.** Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k)B_{k-1} = (-1)^{n-1}(n-1)!H_n$$

(Boyadzhiev 2019) eşitliğini göz önüne alalım. (3.13) eşitliğinden

$a_k = \nabla b_k = B_{k-1} - B_{k-2}$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} s(n-1,k-1)(B_{k-1} - B_{k-2}) &= (-1)^{n-1}(n-1)!H_n + (n-2)(-1)^n(n-2)!H_{n-1} \\
\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)(B_k - B_{k-1}) &= (-1)^{n-1}(n-1)!H_n + (n-2)(-1)^n(n-2)!H_{n-1} \\
\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(B_k - B_{k-1}) &= (-1)^n n!H_{n+1} + (n-1)(-1)^{n+1}(n-1)!H_n \\
\sum_{k=0}^{n} s(n,k)B_k &= (-1)^n n!H_{n+1} - (-1)^n n!H_n \\
\sum_{k=0}^{n} s(n,k)B_k &= (-1)^n n!\left(H_{n+1} - H_n\right)
\end{aligned}$$

olur ve buradan birinci eşitlik elde edilir ve Stirling dönüşümünden de ikinci elde edilir.

□

# 4. SONUÇLAR

Üreteç fonksiyonları, başta analitik kombinatorik ve ayrık matematik olmak üzere birçok alanda oldukça önemli bir tekniktir. Bu tez çalışmasında kullanılan seri dönüşüm formülleri özünde üreteç fonksiyonlarının dönüşümleridir. Üreteç fonksiyonları dönüşüm formüllerinde göz önüne alınarak literatürde en sık rastlanılan sayı ve polinom aileleri için çeşitli formüller ve ilişkiler elde edilmiştir. Diğer taraftan binom katsayıları, Stirling sayıları, Lah sayıları gibi sayıların başka dizilerle çarpılıp toplanmasıyla ortaya çıkan bazı sonlu toplamların değerleri Riordan, Boyadzhiev ve Spivey'in teknikleri kullanılarak hesaplanmıştır.

Hem elde edilen sonuçlar açısından hem de kullanılan tekniklerin uygulama alanlarını ortaya koyan örnekler açısından bu tez çalışmasının literatüre katkısı olduğu düşüncesindeyiz.

## 5. KAYNAKLAR

Barry, P. 2007. Some observations on the Lah and Laguerre transforms of integer sequences. *Journal of Integer Sequences*, 10, Art-7.

Bell, E. T. 1934. Exponential polynomials. Annals of Mathematics. 258-277.

Bell, E. T. 1934. Exponential numbers. Amer. Math. Monthly. 41:411419.

Bergum, G. E. Bennett, L. Horadam, A. F. ve Moore, S. D. 1985. Jacobsthal Polynomials and a Conjecture Concerning Fibonacci-Like Matrices. *Fibonacci Quart.* 23: 240-248.

Bernstein, M. ve Sloane, N. J. A. 1995. Some Canonical Sequences of Integers. *Journa of Algebra and its Applications*, 226-228, 57-72.

Boyadzhiev, K. N. 2005. A series transformation formula and related polynomials. *International Journal Mathematics and Mathematical Sciences*, (23): 3849–3866.

Boyadzhiev, K. N. 2012. Close encounters with the Stirling numbers of the second kind. *Mathematics Magazine 85.4*, 252-266.

Boyadzhiev, K. N. 2014. Binomial transform and the backward difference. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, 13(1): 43-63.

Boyadzhiev, K. N., ve Dil, A. 2016. Geometric polynomials: properties and applications to series with zeta values. *Analysis Mathematica*, 42(3): 203–224.

Boyadzhiev, K. N. 2017. Binomial transform of products. *Ars Combinatoria* 126, 415434.

Boyadzhiev, K. N. 2018. Notes on the Binomial Transform: Theory, and Table with Appendix on Stirling Transform, World Scientific, Singapore, 195 s.

Boyadzhiev, K. N. 2019. New identities with Stirling, hyperharmonic, and derangement numbers, Bernoulli and Euler Polynomials, powers, and factorials. *Journal of Combinatorics and Number Theory*, 11(1): 43–58.

Boyadzhiev, K. N. 2020. New series identities with Cauchy, Stirling, and harmonic numbers, and Laguerre polynomials. *Journal of Integer Sequences*, 23, Article 20.11.7.

Boyadzhiev, K. N. 2021. Convolutions for Stirling numbers, Lah numbers, and binomial coefficients. *arXiv preprint arXiv*, 2103.15644.

Boyadzhiev, K.N. and Dil A. 2012. Series with Hermite polynomials and applications. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 80 (34): 385-404.

Boyadzhiev, K. N. 2009. Exponential polynomials, Stirling numbers, and evaluation of some gamma integrals. *Abstract and Applied Analysis.*,Volume 2009, Article ID 168672.

Can, M. ve Dağlı, M. C. 2014. Extended Bernoulli and Stirling matrices and related combinatorial identities. *Linear Algebra and its Applications*, 444: 114-131.

Chen, K.-W. 2007. Identities from the binomial transform. *Journal of Number Theory*, 124.1, 142-150.

Comtet, L. 1974. Advanced Combinatorics. Reidel, Dordrecht, 343 s.

Conway, J. H. ve Guy, R. 1996. The book of numbers. Springer-Verlag, New York, 310 s.

Dil, A. ve Muniroglu, E. 2020. Applications of Derivative and Difference Operators on Some Sequences. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 14(2): 406-430.

Dil, A. ve Mező, I. 2008. A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers. *Applied Mathematics and Computation*, 206(2): 942-951.

Egorychev, G. P. 1984. Integral representation and the computation of combinatorial sums. Vol. 59. American Mathematical Soc.

Gould, H. W. 1972. Combinatorial Identities: A standardized set of tables listing 500 binomial coeffcient summations. Morgantown Printing and Binding Co, Morgantown, 106 s.

Graham, R. L., Knuth D. E. ve Patashnik O. 1993. Concrete Mathematics. Addison Wesley, Massachusetts, 657 s.

Kim, T. 2008. Euler numbers and polynomials associated with zeta functions. *In Abstract and Applied Analysis*. Hindawi.

Koshy, T. 2019. Fibonacci and Lucas numbers with applications. John Wiley and Sons, 752 s.

Lah, I. 1954 A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics Bol. Inst. Actuár. Port., 9, pp. 7-15

Merlini, D., Sprugnoli, R. ve Verri, M. C. (2006). The Cauchy numbers. *Discrete Mathematics*, 306(16): 1906-1920.

Petkovšek, M. ve Pisanski, T. 2007. Combinatorial interpretation of unsigned Stirling and Lah numbers. *Pi Mu Epsilon Journal*, 12.7: 417-424.

Rahmani, M. 2014. Generalized Stirling transform. *Miskolc Mathematical Notes*, 15(2): 677-690.

Riordan, J. 1969. Introduction to Combinatorial analysis. Courier Corporation, Massachusetts, 256 s.

Riordan, J. 1979. Combinatorial Identities. R. E. Krieger Pub. Co., Huntington New York, 256 s.

Riordan, J. 2014. An Introduction to Combinatorial Analysis. Princeton University Press, Princeton New Jresey, 258 s.

Smail, L. L. ve Schwatt, I. J. An Introduction to the Operations with Series. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 32(1): 88-88.

Spivey, M. Z. 2007. Combinatorial sums and finite differences. *Discrete Mathematics*, 307.24: 3130-3146.

Spivey, M. Z. 2019. The art of proving binomial identities. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, 368 s.

# 6. EKLER

**Ek 6.1.** Formüller

| |
|---|
| $$f\left(\frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}S(n,k)\lambda^{n-k}\mu^k a_k\right\} \qquad \text{(I)}$$ |
| $$f\left(\frac{\mu}{\lambda}\log(1+\lambda t)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}s(n,k)\lambda^{n-k}\mu^k a_k\right\} \qquad \text{(II)}$$ |
| $$f\left(\frac{\mu t}{1-\lambda t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}L(n,k)\lambda^{n-k}\mu^k a_k\right\} \qquad \text{(III)}$$ |
| $$e^{\lambda t}f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}a_k\right\} \qquad \text{(IV)}$$ |
| $$\frac{1}{1-\lambda t}f\left(\frac{\mu t}{1-\lambda t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}\mu^k a_k\right\} \qquad \text{(V)}$$ |

**Ek 6.2.** Sonuçlar

| |
|---|
| $\dfrac{1}{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}S\left(n,k\right)c_{k}$ |
| $c_{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}s\left(n,k\right)\dfrac{1}{k+1}$ |
| $H_{m+1}=\sum\limits_{k=0}^{m}c_{k}\sum\limits_{n=k}^{m}S(n,k)$ |
| $h_{n+1}^{(-n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}S\left(n,k\right)\widehat{c}_{k}$ |
| $\widehat{c}_{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}s\left(n,k\right)h_{k+1}^{(-k)}$ |
| $\dfrac{(-1)^{n}}{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}S\left(n,k\right)\widehat{c}_{k}$ |
| $\widehat{c}_{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}s\left(n,k\right)\dfrac{(-1)^{k}}{k+1}$ |
| $n\omega_{n-1}=\sum\limits_{k=0}^{n}S\left(n,k\right)k!H_{k}^{\sim}$ |
| $n!H_{n}^{\sim}=\sum\limits_{k=0}^{n}s\left(n,k\right)k\omega_{k-1}$ |
| $\sum\limits_{k=1}^{n}S\left(n,k\right)(-1)^{k-1}\left(k-1\right)!=0,\quad(n>1)$ |
| $\alpha^{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}S(n,k)k!\dbinom{\alpha}{k}$ |
| $n!\dbinom{\alpha}{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}s(n,k)\alpha^{k}$ |
| $(q+1)^{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}S(n,k)(-1)^{n-k}\dbinom{q+k}{k}k!$ |
| $\dbinom{q+n}{n}n!=\sum\limits_{k=0}^{n}s(n,k)(-1)^{n-k}(q+1)^{k}$ |
| $\sum\limits_{k=1}^{n}S(n,k)(-1)^{n-k}(k-1)!H_{k-1}=0,\quad(n>2)$ |
| $nr^{n-1}=\sum\limits_{k=0}^{n}S(n,k)(-1)^{n-k}k!h_{k}^{(r)}$ |
| $n!h_{n}^{(r)}=\sum\limits_{k=0}^{n}s(n,k)(-1)^{n-k}kr^{k-1}$ |
| $H_{n}=\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}s(n,k)(-1)^{n-k}k$ |

**Ek 6.2.**'nin devamı

| |
|---|
| $\dfrac{(-1)^n n!}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)E_k^*$ |
| $E_n^* = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(-1)^k \dfrac{k!}{2^k}$ |
| $x^n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k(x)$ |
| $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^k$ |
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_k = 1$ |
| $\phi_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$ |
| $2n! \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^m \binom{2m-1}{n} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)E_k$ |
| $E_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)2k! \sum_{m=k}^{\infty} (-1)^m \binom{2m-1}{k}$ |
| $n!\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)G_k$ |
| $G_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{2^k} S(n,k)k! \sum_{j=1}^{k} \dfrac{2^j}{j}$ |
| $n!x^n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\omega_k(x)$ |
| $\omega_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)k!x^k$ |
| $(-1)^{n+1} n! h_n^{(-r)} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)kr^{k-1}$ |
| $nr^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(-1)^{k+1} k! h_k^{(-r)}$ |
| $(-1)^n (n-2)! = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)k, \quad (n \geqslant 2)$ |
| $n-1 = \sum_{k=2}^{n} S(n,k)(-1)^k (k-2)!$ |
| $(-1)^{n+1}(n-3)! = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)k2^{k-2}, \quad (n \geqslant 3)$ |
| $2^{n-2}(n-3)+1 = \sum_{k=3}^{n} S(n,k)(-1)^{k+1}(k-3)!$ |

**Ek 6.2.**'nin devamı

| |
|---|
| $(n-1)! = \sum_{k=1}^{n} L(n,k)(-1)^{k+1}(k-1)!, \quad (n>0)$ |
| $\sum_{k=0}^{n} Lag(n,k)(-1)^{k+1}k! = 0$ |
| $n!\binom{n+\alpha-1}{n} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)k!\binom{\alpha}{k}$ |
| $n!\binom{\alpha}{n} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^{n-k}k!\binom{k+\alpha-1}{k}$ |
| $(-1)^n n!\binom{\alpha}{n} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)k!\binom{-\alpha}{k}$ |
| $(-1)^n n!\binom{-\alpha}{n} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)k!\binom{\alpha}{k}$ |
| $n!\binom{q+1}{n} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^{n-k}k!\binom{q+k}{k}$ |
| $n!\binom{q+n}{n} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)k!\binom{q+1}{k}$ |
| $(n-1)!H_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} L(n,k)(-1)^{k}(k-1)!H_{k-1}$ |
| $h_n^{(-r)}n! = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^{k+1}k!h_k^{(r)}$ |
| $n!h_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^{k+1}h_k^{(-r)}k!$ |
| $(n-2)! = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(-1)^{k}k!H_k, \quad (n \geqslant 2)$ |
| $n!H_n - n! = \sum_{k=2}^{n} L(n,k)(-1)^{k}(k-2)!$ |
| $(-1)^n\widehat{c}_n = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)c_k$ |
| $(-1)^n c_n = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)\widehat{c}_n$ |
| $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$ |
| $D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}k!$ |
| $E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}E_k^{*}$ |

**Ek 6.2.**'nin devamı

| |
|---|
| $E_n^* = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^{n-k} E_k(x)$ |
| $E_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k E_k^*$ |
| $E_n^* = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-n}}{2^n} E_k$ |
| $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} B_k$ |
| $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^{n-k} B_k(x)$ |
| $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \quad (n \geqslant 2)$ |
| $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k B_k = n$ |
| $3^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J(k), \quad (n \geqslant 1)$ |
| $J(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^{k-1}$ |
| $(-1)^n \frac{\widehat{c}_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\widehat{c}_k}{k!}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{k+1}^{(r-k-1)} = h_{n+1}^{(r-1)}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left( h_{k+1}^{(r-k-2)} - h_{k-1}^{(r-k)} \right) = h_{n+1}^{(r-2)} - h_{n-1}^{(r)}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{k+2}^{(-k-1)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{k+1}^{(-k)} = \frac{1}{n+1}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{m+k+1}^{(r-k-1)} = h_{m+n+1}^{(r)} - h_{m+n}^{(r)}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{m-k-1}^{(r+k+1)} = h_{m-1}^{(r+n+1)} - h_{m}^{(r+n)}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{m+k+1}^{(-k-1)} = \frac{-1}{(m+n)(m+n+1)}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{i+1}^{(r-i-1)} - h_i^{(r-i)} \right)}{2^k} = \frac{h_n^{(r)}}{2^n}$ |

**Ek 6.2.**'nin devamı

| |
|---|
| $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{i+2}^{(-i-1)} - h_{i+1}^{(-i)} \right)}{2^k} = \frac{1}{2^n(n+1)}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{i+1}^{(-i)} - h_{i}^{(1-i)} \right)}{2^k} = \frac{H_n}{2^n}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{m+i+1}^{(r-i-1)} - h_{m+i}^{(r-i)} \right)}{2^k} = \frac{h_{m+n}^{(r)}}{2^n}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{m-i-1}^{(r+i+1)} - h_{m-i}^{(r+i)} \right)}{2^k} = \frac{h_{m}^{(r+n)}}{2^n}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( h_{m+i+1}^{(-i-1)} - h_{m+i}^{(-i)} \right)}{2^k} = \frac{1}{2^n(m+n)}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k) \frac{(-1)^{k+1}}{k+2} = \widehat{c}_{n+1} + n\widehat{c}_n$ |
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k) h_{k+2}^{(-k-1)} = \widehat{c}_{n+1} + n\widehat{c}_n$ |
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k) \frac{-1}{(k+1)(k+2)} = c_{n+1} + (n-1)c_n$ |
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(k+1)\omega_k = (2n+1)n! H_n^{\sim} + (-1)^n n!$ |
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\alpha^{k+1} = (n+1)! \binom{\alpha}{n+1} + n(n!) \binom{\alpha}{n}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{k+1}(q+1)^k = \frac{(-1)^{n+1}(q+n)!}{q!}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{k+1}(k+1)r^k = (-1)^{n+1}(n+1)! h_{n+1}^{(r)} + n(-1)^n n! h_n^{(r)}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-1)^{k+1}(k+1) = (-1)^{n+1} n! (H_n + 1)$ |
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k) E_{k+1}^{*} = \frac{(-1)^n (n-1) n!}{2^{n+1}}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k F_k = n F_{2n-1}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 F_k = n^2 F_{2n-2} + n F_{2n-3}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} k F_k = n F_{n-2}$ |

**Ek 6.2.**'nin devamı

| |
|---|
| $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}k^2F_k = n^2F_{n-4} + nF_{n-3}$ |
| $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}k^3F_k = (n^3+n)F_{n-6} + 3n^2F_{n-5}$ |
| $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kL_k = nL_{2n-1}$ |
| $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2L_k = n^2L_{2n-2} + nL_{2n-3}$ |
| $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k kL_k = nL_{n-2}$ |
| $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^2L_k = n^2L_{n-4} + nL_{n-3}$ |
| $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-n)B_k = (-1)^n nB_{n-1}$ |
| $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(h_k^{(r-k)} - h_{k-1}^{(r-k+1)}) = n(h_n^{(r-1)} - h_{n-1}^{(r)})$ |
| $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k(h_k^{(r-1)} - h_{k-1}^{(r)}) = n(h_n^{(r-n)} - h_{n-1}^{(r-n+1)})$ |
| $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(h_k^{(1-k)} - h_{k-1}^{(2-k)}) = 1 - nH_{n-1}$ |
| $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(1 - kH_{k-1}) = n(h_n^{(1-n)} - h_{n-1}^{(2-n)})$ |
| $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(h_{k+1}^{(-k)} - h_k^{(1-k)}) = \frac{-(n+2)}{n+1}$ |
| $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k+1}\frac{k+2}{k+1} = n(h_{n+1}^{(-n)} - h_n^{(1-n)})$ |
| $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(2kH_{k-1}+1) = \frac{2n}{n-1}$ |
| $\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{2k}{k-1} = 2nH_{n-1}$ |
| $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}i(D_k - D_{k-1})}{k2^k} = \frac{n!}{2^n}$ |
| $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}i(J(k) - J(k-1))}{k2^k} = \frac{3^{n-1}}{2^n}$ |
| $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\frac{i}{k}2^{i-k}(E_k^* - \frac{1}{2}E_{k-1}^*) = \frac{E_n}{2^n}$ |

**Ek 6.2.**’nin devamı

| |
|---|
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\phi_{k+1}(x) = x^n(x+n)$ |
| $\sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^k(x+k) = \phi_{n+1}(x)$ |
| $\sum_{k=0}^{n} S(n,k)k = \Delta\phi_n$ |
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\frac{-1}{(k+1)(k+2)} = c_{n+1} + (n-1)c_n$ |
| $\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(c_{k+1} + (k-1)c_k) = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\omega_{k+1}(x) = n!x^n(nx+x+n)$ |
| $\sum_{k=0}^{n} S(n,k)k!x^k(kx+x+k) = \omega_{n+1}(x)$ |
| $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)B_k = \frac{(-1)^n n!}{n+1}$ |
| $\sum_{k=0}^{n} S(n,k)\frac{(-1)^k k!}{k+1} = B_n$ |

**Ek 6.3.** $s(n,k)$ birinci çeşit Stirling sayıları

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 0 | $-1$ | 1 | | | |
| 3 | 0 | 2 | $-3$ | 1 | | |
| 4 | 0 | $-6$ | 11 | $-6$ | 1 | |
| 5 | 0 | 24 | $-50$ | 35 | $-10$ | 1 |

**Ek 6.4.** $S(n,k)$ ikinci çeşit Stirling sayıları

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | | |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 |

**Ek 6.5.** $H_n$ harmonik sayılar

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $H_n$ | 0 | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{11}{6}$ | $\frac{25}{12}$ | $\frac{137}{60}$ |

**Ek 6.6.** $B_n(x)$ Bernoulli polinomları

| $n$ | $B_n(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | $x - \frac{1}{2}$ |
| 2 | $x^2 - x + \frac{1}{6}$ |
| 3 | $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ |
| 4 | $x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$ |
| 5 | $x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$ |

**Ek 6.7.** $B_n$ Bernoulli sayıları

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_n$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | $-\frac{1}{30}$ | 0 |

**Ek 6.8.** $c_n$ ikinci çeşit Bernoulli sayıları (birinci çeşit Cauchy sayıları)

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_n$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{19}{30}$ | $\frac{9}{4}$ |

**Ek 6.9.** $\widehat{c}_n$ ikinci çeşit Cauchy sayıları

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\widehat{c}_n$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | $-\frac{9}{4}$ | $\frac{251}{30}$ | $-\frac{475}{12}$ |

**Ek 6.10.** $H_n^{\sim}$ skew harmonik sayılar

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $H_n^{\sim}$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{7}{12}$ | $\frac{47}{60}$ |

**Ek 6.11.** $\omega_n$ geometrik sayılar

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_n$ | 1 | 1 | 3 | 13 | 75 | 541 |

**Ek 6.12.** $E_n^*$ birinci çeşit Euler sayıları

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_n^*$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ |

**Ek 6.13.** $E_n$ Euler sayıları

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_n$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 5 | 0 |

**Ek 6.14.** $G_n$ Genocchi sayıları

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_n$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 | 1 | 0 |

**Ek 6.15.** $L(n,k)$ Lah sayıları

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 0 | 2 | 1 | | | |
| 3 | 0 | 6 | 6 | 1 | | |
| 4 | 0 | 24 | 36 | 12 | 1 | |
| 5 | 0 | 120 | 240 | 120 | 20 | 1 |

**Ek 6.16.** $D_n$ derangement sayıları

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_n$ | 1 | 0 | 1 | 2 | 9 | 44 |

**Ek 6.17.** $J(n)$ Jacobsthal sayıları

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J(n)$ | 0 | 1 | 1 | 3 | 5 | 11 |

# ÖZGEÇMİŞ

HAMUD AHMED

hamud199313@gmail.com

## ÖĞRENİM BİLGİLERİ

| | |
|---|---|
| Yüksek Lisans<br>2019-2022 | Akdeniz Üniversitesi<br>Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Antalya |
| Lisans<br>2015-2019 | Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi<br>Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kahramanmaraş |