T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

SCHUBERT POLİNOMLARI

Ece ÇELİKOĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MART 2021

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

SCHUBERT POLİNOMLARI

Ece ÇELİKOĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MART 2021
ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SCHUBERT POLİNOMLARI

Ece ÇELİKOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 17/03/2021 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ (Danışman)

Prof.Dr. Mustafa ALKAN

Doç.Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

SCHUBERT POLİNOMLARI

Ece ÇELİKOĞLU

Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Nesrin TUTAŞ

Mart 2021; 80 sayfa

Bu tez çalışmasında Schubert Hesabının (Calculus) temel aracı olan Schubert polinomları ve çeşitleri incelenmiştir. Klasik Schubert, 2-kat Schubert, rasyonel Schubert, quantum Schubert polinomlarının özellikleri Lascoux(2013), Macdonald(1991), Billey ve Haiman(1994) çalışmalarından faydalanılarak derlenmiş ve örneklendirilmiştir.

Ayrıca, rasyonel Schubert polinomları ile elementer simetrik polinomlar arasında elde ettiğimiz bağıntılara yer verilmiş, quantum Schubert polinomları için önemli yeri olan quantum elementer simetrik fonksiyonlar için kapalı formül verilmiştir. Bu formül sayesinde maksimum permütasyon $\omega_0 \in S_n$ için $Y_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 2-kat Schubert polinomunun quantum çarpanı $\mathbf{Y}_u(q_1,\ldots,q_{n-2})$ tanımlanmıştır ve kombinatorik yorumu verilmiştir.Burada $q_1,\ldots,q_{n-2}$ değişkenler ve $\mathbf{x}=\{x_1,\ldots,x_n\}$, $\mathbf{y}=\{y_1,\ldots,y_n\}$ ve u, ω_0'ın kodudur. 2-kat quantum Schubert polinomunun 2-kat Schubert polinomu $Y_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ ile quantum çarpanının çarpımı olduğu ispatlanmıştır. $Y_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum-rasyonel Schubert polinomunun tanımı verilmiştir. Bu tanım yardımıyla $K_u^{q,rat}(\mathbf{x})$ quantum-rasyonel Key ve $G_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum-rasyonel Grothendieck polinomları ifade edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Simetrik fonksiyonlar, Parçalanışlar, Quantum elementer simetrik fonksiyonlar, Schubert polinomları, Double Schubert polinomları, Rasyonel Schubert polinomları, Quantum Schubert polinomları, Quantum double Schubert polinomları, Quantum-rasyonel Schubert polinomları.

JÜRİ: Doç.Dr. Nesrin TUTAŞ
Prof.Dr. Mustafa ALKAN
Doç.Dr. Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

SCHUBERT POLYNOMIALS

Ece ÇELİKOĞLU

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Assoc. Dr. Nesrin TUTAŞ
March 2021; 80 pages

In this thesis, Schubert polynomials and their types, which are the basic tools of the Schubert Calculus (Calculus), are studied. The properties of classical Schubert, double Schubert, rational Schubert, quantum Schubert polynomials are compiled and exemplified using Lascoux (2013), Macdonald(1991), and Billey and Haiman(1994) studies.

In addition, the relations we have obtained between rational Schubert polynomials and elementary symmetric polynomials are given, and a closed formula is given for quantum elementary symmetric functions that have an important place for quantum Schubert polynomials. With this formula, the quantum multiplier $\mathbf{Y}_u(q_1, \ldots, q_{n-2})$ of the double Schubert polynomial $Y_u(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ for the maximum permutation $\omega_0 \in S_n$ is defined and its combinatorial interpretation is given. Where $q_1, \ldots, q_{n-2}$ are variables and $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ and u is the code of ω_0. It is proved that the double quantum Schubert polynomial is the product of the double Schubert polynomial $Y_u(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ and the quantum multiplier. The definition of the $Y_u^{q,rat}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ quantum-rational Schubert polynomial is given. With the help of this definition, $K_u^{q,rat}(\mathbf{x})$ quantum-rational Key and $G_u^{q,rat}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ quantum-rational Grothendieck polynomials are expressed.

KEYWORDS: Symmetric functions, Partitions, Quantum elementary symmetric functions, Schubert polynomials, Double Schubert polynomials, Rational Schubert polynomials, Quantum Schubert polynomials, Quantum double Schubert polynomials, Quantum-rational Schubert polynomials.

COMMITTEE: Assoc.Prof.Dr. Nesrin TUTAŞ
Prof.Dr. Mustafa ALKAN
Assoc.Prof.Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Schubert polinomları, Lascoux ve Schützenberger tarafından, C^n'deki tam flag manifoldunun kohomoloji halkasındaki Schubert döngülerinin(cycles) polinom temsilcileri olarak tanıtılmıştır. Bernstein-Gelfand-Gelfand ve Demazure, Schubert çevrimlerinin temsilcilerini hesaplamak için algoritmalar vermişlerdir. Macdonald, Schubert polinomlarının cebirsel yapısını incelerken, Fulton ve Manivel daha çok geometrik özellikleri ile ilgilenmişlerdir.

Bu çalışmada esasen Schubert polinomların bir permütasyonunun indirgenmiş ayrışımları cinsinden kombinatorik özellikleri ele alınmaktadır. Rasyonel Schubert, quantum Schubert polinomlarını incelenerek elde edilen sonuçlar verilmektedir.

Yüksek lisans ders döneminin en başından bu yana bilgi ve tecrübesini benimle paylaşan ve tez çalışmamın hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımından dolayı çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ'a ve ders aldığım matematik bölümü öğretim üyelerine en içten dileklerimle teşekkür ederim. Bu tez çalışması boyunca desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Schubert Polinomları" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

17/03/2021

Ece ÇELİKOĞLU

SİMGELER

Simgeler:

S_n	: n-inci simetrik grup
$\sigma(i)$	: σ permütasyonunun i-inci terimi
$\cup$	: Birleşim
S_∞	: $\bigcup_{i>0} S_i$
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
s_i	: $u \in \mathbb{Z}^n$'nin i ve $i+1$-inci girdilerini yer değiştiren operatör
t_{ij}	: $u \in \mathbb{Z}^n$'nin i ve j-inci girdilerini yer değiştiren operatör
$l(\omega)$	: ω permütasyonunun uzunluğu
ω_0	: maksimum permütasyon
ω^{-1}	: ω permütasyonunun tersi
$\mathbb{P}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
Λ_R^n	: R halkası üzerinde derecesi n olan bütün homojen simetrik fonksiyonları kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
e_λ	: λ parçalanışının elementer simetrik fonksiyonu
m_λ	: λ parçalanışının monomial simetrik fonksiyonu
∂	: Newton bölünmüş fark operatörü
π	: Demazure operatörü
$\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})$	: ω permütasyonunun klasik Schubert polinomu
e_i^k	: i-inci elementer simetrik polinom
$\langle\, , \rangle$	: İç çarpım
$\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y})$	: ω permütasyonunun 2-kat Schubert polinomu
$Y_\lambda(\mathbf{x};\mathbf{y})$	: λ kodunun 2-kat Schubert polinomu
$\mathfrak{G}_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y})$	: ω permütasyonunun 2-kat Grothendieck polinomu
$G_\lambda(\mathbf{x};\mathbf{y})$	: λ kodunun 2-kat Grothendieck polinomu
$K_\lambda(\mathbf{x})$	: λ kodunun Key polinomu
$Y_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$	: u kodunun rasyonel Schubert polinomu

$K_n(\mathbf{x};\mathbf{y})$	: Cauchy çekirdeği
$G_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$	: u kodunun rasyonel Grothendieck polinomu
$K_u^{rat}(\mathbf{x})$	: u kodunun rasyonel Key polinomu
E_i^k	: i-inci quantum elementer simetrik polinom
$\mathfrak{S}_\omega^q(\mathbf{x})$	: ω permütasyonunun quantum Schubert polinomu
$\mathfrak{S}_\omega^q(\mathbf{x};\mathbf{y})$	: ω permütasyonunun 2-kat quantum Schubert polinomu
$\#\{E_m^n\}$	: E_m^n quantum elementer polinomundaki monomiallerin sayısı
$Fib(n)$	: n-inci Fibonacci terimi
$\mathbf{Y}_u(q_1,\ldots,q_{n-2})$	: $\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyonunun quantum çarpanı
$Y_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$	: u kodunun quantum-rasyonel Schubert polinomu
$K_u^{q,rat}(\mathbf{x})$	: u kodunun quantum-rasyonel Key polinomu
$G_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$	: u kodunun quantum-rasyonel Grothendieck polinomu

1. GİRİŞ

Schubert hesabı(calculus), projektif geometrinin bir dalı olan sayım (enumerative) geometrisindeki problemleri çözmek için kullanılan geometrik koşulları temsil eden sembollerin bir hesaplama yöntemlerini içerir. Bu yöntemler 1864 yıllarında M. Chasles'in konikler üzerindeki çalışmalarıyla başlamış ve sistematik hale getirilmiş ve Hermann Schubert tarafından tezinde kullanılmıştır. Schubert'in sayım hesabının yorumlaması ve elde ettiği sayıların doğrulanması Hilbert'in 15. problemi olarak bilinir. Schubert'in sayım hesabını doğrulamak, 20. yüzyıl cebirsel geometrisinin ana teması olmuştur.

Schubert hesabı ayrıca aşağıdaki sayımsal geometrik problem sınıfından kaynaklanan matematiğe de değinir: "Projektif uzayın bazı doğrusal alt uzayların getirdiği özel koşullarını sağlayan doğrusal alt uzaylarının sayısının belirlenmesi" problemi örnek verilebilir. Başka bir örnek soru, "projektif 3-uzaydaki kaç doğru verilen 4 doğru ile kesişir?" Bu problemler Grassmann varyetelerin hem geometrisi hem de kohomolojisi incelenerek çözülür.

Schubert hesabı alanı sadece cebirsel geometriyle ve cebirsel topolojiyle önemli bağlantılara sahip değildir, aynı zamanda cebirsel kombinatorik, temsil teorisi, diferansiyel geometri, lineer cebirsel gruplar ve sembolik hesaplamalar, lineer cebir ve sistem teorisinde de uygulama alanı bulmuştur.

Polinomlar cebirin başlangıcından beri çalışılmaktadır, tek değişkenli polinomlar kümesinin bir çok tabanı tanımlanmıştır. Monomlar, Lagrange polinomları, Newton tabanı örnek verilebilir. Hatta ortogonal polinomlar teorisi 19. yüzyıl boyunca gelişmiştir. Newton simetrik polinomların elemanter simetrik polinomların polinomları olarak yazılabileceğini göstermiş, 18. yüzyılda monomialler ve elemanter simetrik fonksiyonlar arasındaki geçişleri Vandermonde belirlemiş, Chavalier, Cayley, Koska farklı tabanlar üzerinde çalışmışlardır. Simetrik fonksiyonların elemanter, kuvvet, monomial, tam simetrik fonksiyon tabanları ile temel taban schur fonksiyonları ortogonal tabanlardır, bir çok kombinatorik problem bu tabanlar kullanılarak çözülür. Son 50 yılda Schubert hesabı ve temsil kuramıyla ilişkisi nedeniyle polinomların lineer tabanları yeni ilgi alanı olmuştur.

Schubert polinomları, Lascoux ve Schützenberger tarafından, C^n'deki tam flag manifoldunun kohomoloji halkasındaki Schubert döngülerinin(cycles) polinom temsilcileri olarak tanıtılmıştır. Bernstein-Gelfand-Gelfand ve Demazure, Schubert çevrimlerinin temsilcilerini hesaplamak için algoritmalar vermişlerdir. Macdonald, Schubert polinomlarının cebirsel yapısını incelerken, Fulton ve Manivel daha çok geometrik özellikleri ile ilgilenmişlerdir.

Bu çalışmada esasen Schubert polinomların bir permütasyonunun indirgenmiş ayrışımları cinsinden kombinatorik özellikleri ele alınmaktadır. Rasyonel Schubert, quantum Schubert polinomlarını inceliyoruz ve elde ettiğimiz özel sonuçları veriyoruz.

2. Bölümde permütasyon tanımı verilmiş, permütasyon çarpımlarından bahsedilmiştir. Verilen bir permütasyonun s_i operatörleri ile tek türlü indirgenmiş yazılışının nasıl elde edildiği ve bu sayede bu permütasyonun uzunluğunun nasıl bulunduğundan, Simetrik fonksiyonlardan bahsedilmiştir. Monomial simetrik fonksiyon ve elementer simetrik fonksiyon tanımları verilmiş ve bunların sağladığı özelliklerden bahsedilmiştir. Simetrik fonksiyonların temel teoremi ifade edilmiştir. Newton bölünmüş fark operatörü ve Demazure operatörü tanıtılmış, bu operatörlerin braid-relation özelliklerini sağladığı, $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$'de verilen iki polinomun toplamlarına, çarpımlarına ve bölümlerine nasıl etki ettikleri gösterilmiştir. $\omega \in S_n$ olmak üzere, ω permütasyonunun $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})$ klasik Schubert polinomu tanımı ve sağladığı özellikler verilmiştir. Klasik Schubert polinomları için Monk kuralından bahsedilmiş ve kanıtı verilmiştir. $\omega \in S_n$ olmak üzere, ω permütasyonunun $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 2-kat Schubert polinomu tanımı ve sağladığı özellikler verilmiştir. 2-kat Schubert polinomları için, Cauchy formülünden, Monk kuralından ve Newton İnterpolasyon formülünden bahsedilmiştir. $\omega \in S_n$ olmak üzere, ω permütasyonunun $\mathfrak{G}_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 2-kat Grothendieck polinomu tanımı ve sağladığı özellikler verilmiştir. Baskın 2-kat Grothendieck ve baskın Key polinomu tanıtılmıştır.

3. Bölümde Aker ve Tutaş (2015) makalesinde tanıtılan rasyonel Schubert, rasyonel Grothendieck ve rasyonel Key polinomlarından bahsedilmiştir. u kesin baskın parçalanış olduğunda bu polinomların nasıl hesaplandıkları gösterilmiştir. u kesin baskın parçalanış olmadığında,uygun kesin baskın parçalanış bulunup ∂_i (veya π_i) operatörleri yardımıyla bu rasyonel polinomların nasıl hesaplandıkları gösterilmiştir. Rasyonel Schubert polinomları ile ilgili bir takım özellik ve önermeler verilmiştir. Cauchy çekirdeği tanımı verilmiş ve sağladığı özelliklerden bahsedilmiştir. E_i^k quantum elementer polinomlarından bahsedilmiş, E_k^k quantum elementer polinomunun içerdiği monomiallerin sayısının

k-ıncı Fibonacci sayısına karşılık geldiğinden bahsedilmiştir. E_i^k quantum elementer polinomları yardımı ile quantum Schubert polinomları, quantum 2-kat Schubert polinomları tanıtılmıştır.

4. Bölümde Rasyonel Schubert polinomları ve Quantum Schubert polinomlarının bir takım yeni özellikleri incelenmiş ve elde edilen bulgular ifade edilmiştir. Önerme 4.123'te $Y^{rat}_{\underbrace{[0,0,\ldots,0,1]}_{n-1 \text{ defa } 0}}(\mathbf{x};\mathbf{0})$ rasyonel Schubert polinomunun elementer simetrik polinomlar cinsinden $(-1)^{l(\omega_0)}\frac{e^n_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)}{e^n_n(x_1,\ldots,x_n)}$'e eşit olduğu kanıtlanmıştır. $Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_i$ rasyonel Schubert polinomunun yine $Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ cinsinden ifade edilebileceği görülmüş ve $Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_i$ $= -Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\frac{Y_{u+1}(\mathbf{x};\mathbf{y})\partial_i}{Y_{u+1}(\mathbf{x};\mathbf{y})s_i}$ eşitliği kanıtlanmıştır. $\{e^n_k\}_{i_1,\ldots,i_l}$ tanımı verilmiş ve E_i^k ların verilen bu yeni nesneyle nasıl ifade edilebileceği $n = 1,2,3,4,5$ için örneklendirilmiştir. E_i^k lar için iteratif olmayan kapalı bir formül bulunup teorem olarak ifade edilmiş ve kanıtlanmıştır. Bu formül yardımıyla, $k \geq i$ olmak üzere verilen herhangi bir E_i^k quantum elementer polinomunun içerdiği monomiallerin sayısının nasıl hesaplanacağını veren kombinatorik bir hesaplama formülü verilmiş ve kanıtlanmıştır. Bu kombinatorik hesaplama formülünde $i = k$ durumunun k-ıncı Fibonacci sayısına karşılık geldiği görülmüştür. $\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyon ve u onun kodu olmak üzere $Y_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 2-kat Schubert polinomunun $\mathbf{Y}_u(q_1,\ldots,q_{n-2})$ ile gösterilen quantum çarpanı tanımı verilmiştir. $\mathfrak{S}^q_{[n(n-1)\cdots 1]}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum 2-kat Schubert polinomunun $Y_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\mathbf{Y}_u(q_1,\ldots,q_{n-2})$ çarpımına eşit olduğu kanıtlanmıştır. $\mathbf{Y}_u(q_1,\ldots,q_{n-2})$ quantum çarpanı için de bir tablo gösterimi verilmiş ve $\mathfrak{S}^q_{[n(n-1)\cdots 1]}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum 2-kat Schubert polinomunun bunlar yardımıyla tablo gösterimi ifade edilmiştir. Tanımlanan quantum çarpanının her bir çarpanının tablo gösterimi ile E_k^k ların ilişkisi ifade edilmiştir. Bu tablo gösterimi ile formül kullanmadan $\mathfrak{S}^q_{[n(n-1)\cdots 1]}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum 2-kat Schubert polinomunun nasıl yazılabileceği ilişkilendirilmiştir. $\mathfrak{S}^q_{[n(n-1)\cdots 1]}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ için tanımlanan tablo gösterimine ∂_i'lerin nasıl etki ettiğinden bahsedilmiştir. Verilen bir $u \in \mathbb{N}^n$ kesin baskın kodu için $Y^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum-rasyonel Schubert polinomu tanımı verilmiştir. u'nun kesin baskın olmadığı durumda $Y^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum-rasyonel Schubert polinomu için uygun bir kesin baskın parçalanış bulunup $\partial_1,\ldots,\partial_{n-1}$ operatörleri yardımıyla nasıl hesaplanabileceği söylenmiştir. $Y^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum-rasyonel Schubert polinomu yardımıyla $K^{q,rat}_u(\mathbf{x})$ quantum-rasyonel Key ve $G^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum-rasyonel Grothendieck polinomlarının tanımı ve

u'nun kesin baskın olmadığı durumda uygun bir kesin baskın parçalanış bulunup $\pi_1, \ldots,$ π_{n-1} operatörleri yardımıyla nasıl hesaplanabildikleri söylenmiştir. $Y_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})\big|_{\mathbf{q=0}} = Y_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$, $K_u^{q,rat}(\mathbf{x})\big|_{\mathbf{q=0}} = K_u^{rat}(\mathbf{x})$ ve $G_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})\big|_{\mathbf{q=0}} = G_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ eşitlikleri ispatlanmıştır.

2. Bölüm, 3. Bölüm ve 4. Bölümde verilen örnekler ACE Maple programı ile tarafımca programlanıp hesaplanmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, permütasyonlar, simetrik fonksiyonlar, Schubert, Grothendieck ve Key polinomları tanıtılıcak ve sağladıkları birtakım özelliklerden bahsedilecektir.

2.1. Permütasyonlar

Tanım 2.1. *Boş olmayan bir K kümesi ve bir $f : K \longrightarrow K$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer f fonksiyonu birebir ve örten ise, f'ye K üzerinde bir permütasyon (devrişim, dizilim) denir. K üzerindeki tüm permütasyonlardan oluşan küme, $S(K)$ ile gösterilir (Karakaş 2010).*

$S(K)$'nın, fonksiyonlardaki bileşke işlemi ile bir grup olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.2. *Boş olmayan bir K kümesi için $S(K)$ grubuna K'nın permütasyonlar grubu denir. Özel olarak, $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi için K_n'nin permütasyonlar grubu, S_n ile gösterilir. S_n'ye n-inci simetrik grup denir (Karakaş 2010).*

S_n n-inci simetrik grup ve $\sigma \in S_n$ olsun. Bu durumda σ, $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin bir permütasyonudur. Böyle bir eleman için farklı gösterimler mevcuttur. Bu çalışmada $\sigma \in S_n$ için,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} = [\sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)]$$

gösterimi kullanılacaktır. Örneğin, $\sigma = [231]\,, \omega = [312] \in S_3$ için çarpım

$$\sigma\omega = [231]\,[312] = [123]$$

biçimindedir ve birim permütasyon elde edilir.

$m > n > 0$ ise S_n, S_m'nin altgrubu olarak düşünülebilir. Şöyle ki, her $\sigma \in S_n$ için $1 \leq k < m - n$ olmak üzere σ, $n + k$ yı değiştirmeyen permütasyon olarak düşünülebilir. Dolayısıyla $S_\infty := \bigcup\limits_{i>0} S_i$ dir.

$u = [u_1, \ldots, u_n] \in \mathbb{Z}^n$ ve $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ olmak üzere, u vektöründe u_i ve u_{i+1} girdilerini yer değiştiren ve diğerlerini sabit bırakan operatör s_i ile gösterilsin. Bu operatörün u vektörüne etkisi,

$$[u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n]\, s_i := [u_1, \ldots, u_{i+1}, u_i, \ldots, u_n]\ , 1 \leq i < n$$

şeklindedir (Lascoux 2013). u vektöründe u_i ve u_j girdilerini yer değiştiren ve diğerlerini sabit bırakan operatör t_{ij} ile gösterilsin. Bu operatörün u vektörüne etkisi,

$$[u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n]\, t_{ij} := [u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n] \ , 1 \leq i < j \leq n$$

şeklindedir.

$i \in \{1, \ldots, n-1\}$ için s_i operatörleri S_n permütasyon grubunun elemanlarıdır. Birim permütasyonu I ile gösterelim.

Önerme 2.3. *$\mathbb{Z}^n$ de $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ olmak üzere, $s_i \in S_n$ operatörleri*

$$\begin{aligned} s_i s_i &= I \qquad\qquad (2.1) \\ s_i s_j &= s_j s_i \qquad , |i-j| \neq 1 \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} \ , 1 \leq i \leq n-2 \end{aligned}$$

braid bağıntılarını sağlar. Burada I birim permütasyondur (Lascoux 2013).

İspat $u = [u_1, \ldots, u_n] \in \mathbb{Z}^n$ ve $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ olsun.

$(\mathbf{1})$
$$\begin{aligned} [u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n]\, s_i s_i &= [u_1, \ldots, u_{i+1}, u_i, \ldots, u_n]\, s_i \\ &= [u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n] \\ &= [u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n]\, I \end{aligned}$$

olduğundan $s_i s_i = I$ dır.

$(\mathbf{2})$ $i < j$ ve $|i-j| \neq 1$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} [u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_j, u_{j+1} \ldots, u_n]\, s_i s_j &= [u_1, \ldots, u_{i+1}, u_i, \ldots, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n]\, s_j \\ &= [u_1, \ldots, u_{i+1}, u_i, \ldots, u_{j+1}, u_j, \ldots, u_n] \\ &= [u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j+1}, u_j, \ldots, u_n]\, s_i \\ &= [u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_j, u_{j+1} \ldots, u_n]\, s_j s_i \end{aligned}$$

olduğundan, $|i-j| \neq 1$ için $s_i s_j = s_j s_i$ dir.

$(\mathbf{3})$
$$\begin{aligned} [u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_n]\, s_i s_{i+1} s_i &= [u_1, \ldots, u_{i+1}, u_i, u_{i+2}, \ldots, u_n]\, s_{i+1} s_i \\ &= [u_1, \ldots, u_{i+1}, u_{i+2}, u_i, \ldots, u_n]\, s_i \\ &= [u_1, \ldots, u_{i+2}, u_{i+1}, u_i, \ldots, u_n] \\ &= [u_1, \ldots, u_{i+2}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n]\, s_{i+1} \\ &= [u_1, \ldots, u_i, u_{i+2}, u_{i+1}, \ldots, u_n]\, s_i s_{i+1} \\ &= [u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_n]\, s_{i+1} s_i s_{i+1} \end{aligned}$$

olduğundan $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ dir. □

Her $\omega \in S_n$ için,

$$I(\omega) := \{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n \,,\, \omega(i) > \omega(j)\}$$

olarak tanımlansın. Örneğin, $I([25143]) = \{(1,3),(2,3),(2,4),(2,5),(4,5)\}$ tir.

Önerme 2.4. *$\omega \in S_n$ ve $1 \leq r \leq n-1$ için,*

$$I(\omega s_r) = \begin{cases} s_r I(\omega) \cup \{(r,r+1)\}, & \omega(r) < \omega(r+1) \\ s_r I(\omega) \setminus \{(r,r+1)\}, & \omega(r) > \omega(r+1) \end{cases}$$

dir. Burada, $\omega s_r = [\omega(1)\ldots\omega(r+1)\,\omega(r)\ldots\omega(n)]$ ve s_r'nin $I(\omega)$'ya etkisi, $I(\omega)$'nın elemanlarının girdilerindeki r ve $r+1$'i yer değiştirmesidir (Macdonald 1991).

İspat $\omega = [\omega(1)\ldots\omega(r)\,\omega(r+1)\ldots\omega(n)]$ olsun.

(1) $\omega(r) < \omega(r+1)$ ise $(r,r+1) \notin I(\omega)$ ve $\omega s_r(r) > \omega s_r(r+1)$'dır. Bu durumda $(r,r+1) \in I(\omega s_r)$ olur. $I(\omega s_r) = s_r I(\omega) \cup \{(r,r+1)\}$ eşitliğinin sağlandığını görelim. $I(\omega s_r) \supset s_r I(\omega) \cup \{(r,r+1)\}$ olması açıktır. $(i,j) \in I(\omega s_r)$ olsun. $i \neq r, r+1$ ve $j = r$ ise $(i,j) = (i,r) = s_r(i,r+1) \in s_r I(\omega)$'dır. $i \neq r, r+1$ ve $j = r+1$ ise $(i,j) = (i,r+1) = s_r(i,r) \in s_r I(\omega)$'dır. Buradan, $I(\omega s_r) \subset s_r I(\omega) \cup \{(r,r+1)\}$ olur.

(2) $\omega(r) > \omega(r+1)$ olduğu durumda $(\mathbf{1})$'de yapılanların benzerleri uygulandığında $I(\omega s_r) = s_r I(\omega) \setminus \{(r,r+1)\}$ olduğu görülebilir.

□

$I(\omega)$'nın elemanlarına inversiyonlar denir. ω'nın uzunluğu $\ell(\omega)$ ile gösterilir ve inversiyonları sayısıdır. Yani $I(\omega)$, ω'nın inversiyonlar kümesi olmak üzere $\ell(\omega) = |I(\omega)|$dır.

Sonuç 2.5. *$\omega \in S_n$ ve $1 \leq r \leq n-1$ için,*

$$\ell(\omega s_r) = \begin{cases} \ell(\omega) + 1, & \omega(r) < \omega(r+1) \\ \ell(\omega) - 1, & \omega(r) > \omega(r+1) \end{cases}$$

dir (Macdonald 1991).

İspat $\omega \in S_n$ ve $1 \leq r \leq n-1$ olsun.

(1) $\omega(r) < \omega(r+1)$ ise $|I(\omega s_r)| = |s_r I(\omega) \cup \{(r, r+1)\}| = |s_r I(\omega)| + |\{(r, r+1)\}|$ $= |I(\omega)| + |\{(r, r+1)\}|$ dir. Buradan $\ell(\omega s_r) = \ell(\omega) + 1$ elde edilir.

(2) $\omega(r) > \omega(r+1)$ ise $|I(\omega s_r)| = |s_r I(\omega) \setminus \{(r, r+1)\}| = |s_r I(\omega)| - |\{(r, r+1)\}|$ $= |I(\omega)| - |\{(r, r+1)\}|$ dir. Buradan $\ell(\omega s_r) = \ell(\omega) - 1$ elde edilir.

□

$\omega_0 = [n(n-1)\ldots 1] \in S_n$ permütasyonunun maksimum sayıda inversiyonu vardır. Bu nedenle ω_0'a maksimum permütasyon denir. Bundan sonra ω_0 ifadesi verilen S_n grubunun maksimum permütasyonu olarak anlaşılacaktır.

Önerme 2.6. *$\omega_0 \in S_n$ olmak üzere, her $\omega \in S_n$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır (Macdonald 1991).*

(1) $l(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = I$

(2) $l(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega = s_r \ \ (1 \leq r \leq n-1)$

(3) $l(\omega^{-1}) = l(\omega)$

(4) $l(\omega_0 \omega) = l(\omega_0) - l(\omega)$

İspat (*1*) ve (*2*) için ispatlayacak durum yoktur. Açıktır.

(*3*) $\omega = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ indirgenmiş yazılış olsun. $l(\omega) = r$ dir. $\omega^{-1} = s_{i_r} \ldots s_{i_1}$ yazılışı da indirgenmiş yazılıştır. Bu durumda $l(\omega^{-1}) = r$ olur.

(*4*) $I(\omega_0)$ kümesi $1 \leq i < j \leq n$ sağlayan bütün (i, j)'leri bulundurur. Böylece $l(\omega_0) = \frac{n(n-1)}{2}$ olur. $\omega_0 \omega = [\omega(n), \omega(n-1), \ldots, \omega(1)]$ dir. Böylece $I(\omega_0 \omega)$, $I(\omega_0)$'ın içinde $I(\omega)$'nın tamamlayıcısı(tümleyeni) olur. Buradan $l(\omega_0 \omega) = \frac{n(n-1)}{2} - l(\omega)$ olur. Yani, $l(\omega_0 \omega) = l(\omega_0) - l(\omega)$ elde edilir.

□

Önerme 2.7. *$\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$ kümesi S_n grubunun bir üreteç kümesidir (Macdonald 1991).*

İspat $\ell(\omega)$ üzerinden tümevarım yaparak, her bir $\omega \in S_n$ permütasyonunun s_i'lerin uygun bir çarpımı olduğunu göstereceğiz.

$\ell(\omega) = 0$ ise $\omega = \mathfrak{i}$ olur. Bu durum için kanıtlayacak birşey yoktur.

$\ell(\omega) > 0$ ise $\ell(\omega) = |I(\omega)|$ olduğundan $I(\omega)$'nın tanımı gereği, $\omega(r) > \omega(r+1)$ olacak şekilde uygun bir r vardır ve bundan dolayı, Sonuç 2.5'ten $\ell(\omega s_r) = \ell(\omega) - 1$ dir. Bu uygun p için $\omega s_r = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ şeklinde olduğunu söyler ve bundan dolayı $\underbrace{\omega s_r s_r}_{\omega} = s_{i_1} \cdots s_{i_p} s_r$ olur. □

ω'nın üreteçlerin çarpımı olarak yazılışına, ω'nın ayrışımı denir. Eğer bu çarpım en küçük uzunluğa sahip ise, indirgenmiş ayrışım olarak adlandırılır.

Tanım 2.8. *$\omega = [\omega(1)\,\omega(2) \ldots \omega(n)] \in S_n$ permütasyonu verilsin. Her $0 < i \leq n$ için $\omega(i)$ nin sağında kalan ve $\omega(i)$ den küçük olan terimlerin sayısı λ_i olsun. Bu durumda ω permütasyonunun kodu $\lambda := [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ olarak tanımlanır (Lascoux 2013).*

Örnek 2.9. *$[35241] \in S_5$ permütasyonunun kodu $\lambda = [2, 3, 1, 1, 0]$ dır.*

Sırasıyla karşılıklı olarak,

$$(n-1, n-2, \ldots, 1)(n-1, n-2, \ldots, 2) \cdots (n-1) \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|cc|}
\cline{1-1}
n-1 & \multicolumn{3}{c}{} \\
\cline{1-2}
n-2 & n-1 & \multicolumn{2}{c}{} \\
\cline{1-2}
\vdots & \vdots & \multicolumn{2}{c}{} \\
\cline{1-2}
1 & 2 & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{|c|}{n-1} \\
\hline
\end{array}$$

eşlemesi yapalım. $1 \leq i_j \leq n-1$ olmak üzere ω'nın indirgenmiş ayrışımı bir $(i_1, \ldots, i_p)$ dizisidir ki $\omega = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_p}$ ve $\ell(\omega) = p$ dir. Ayrışım ardışık bloklarda, blokların üst kısmından alt kısmına doğru okunarak elde edilebilir. Bu ayrışım indirgenmiştir (Lascoux 2013).

Örnek 2.9'daki ω permütasyonunun ayrışımını bulalım. ω'nın kodu $\lambda = [2, 3, 1, 1, 0]$'yı

$$\begin{array}{rccccc}
 & \bullet & & & & \\
 & \bullet & 4 & & & \\
 & 2 & 3 & \bullet & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\lambda = & [2, & 3, & 1, & 1, & 0]
\end{array}$$

blokları ile temsil edelim. Sırasıyla soldan sağa doğru bloklara bakıldığında, blokların her birinde yukarıdan aşağıya doğru okuma yapılırsa, $\omega = [35241] = s_2 s_1 s_4 s_3 s_2 s_3 s_4$ olur ve bu yazılış indirgenmiş yazılıştır.

2.2. Simetrik Fonksiyonlar

2.2.1. Genel Simetrik Fonksiyonlar

Tanım 2.10. $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ *bir değişkenler kümesi ve* $n \in \mathbb{N}$ *olsun.* R *birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere,*

(1) $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots]$ *, n'nin tüm zayıf kompozisyonlarını tarar. n'nin bir zayıf kompozisyonu, toplamı n'ye eşit olan negatif olmayan tam sayılardan oluşan bir dizidir.*

(2) $c_\alpha \in R$ *,*

(3) $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots$ *,*

(4) $\mathbb{P}$ *pozitif tamsayılar kümesi ve* ω*,* $\mathbb{P}$ *nin bir permütasyonu olmak üzere,*

$f\left(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, \ldots\right) = f\left(x_1, x_2, \ldots\right)$ *koşullarını sağlayan*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$$

formal kuvvet serisine, R üzerinde derecesi n olan bir homojen simetrik fonksiyon denir (Stanley 1999).

"Simetrik Fonksiyon" isimlendirmesi tarihsel nedenlerle kullanılır. İfade edilen f, bir fonksiyon değil formal bir kuvvet serisidir.

R üzerinde derecesi n olan bütün homojen simetrik fonksiyonların kümesi Λ_R^n ile gösterilir. Λ_R^n bir R-modüldür. Şöyle ki, $f, g \in \Lambda_R^n$ ve $a, b \in R$ için $af + bg \in \Lambda_R^n$ dir. $R = \mathbb{Q}$ alınırsa, $\Lambda_\mathbb{Q}^n$ bir $\mathbb{Q}$-vektör uzayıdır.

$f \in \Lambda_\mathbb{Q}^m$ ve $g \in \Lambda_\mathbb{Q}^n$ ise $fg \in \Lambda_\mathbb{Q}^{m+n}$ dir. Böylece,

$$\Lambda_\mathbb{Q} := \Lambda_\mathbb{Q}^0 \oplus \Lambda_\mathbb{Q}^1 \oplus \cdots$$

olur ve $\Lambda_\mathbb{Q}$ bir $\mathbb{Q}$-cebir yapısına sahiptir. $\Lambda_\mathbb{Q}$ ya simetrik fonksiyonlar cebri denir. $\Lambda_\mathbb{Q}$ cebri değişmelidir ve birim elemanı $1 \in \Lambda_\mathbb{Q}^0$ dır. $\Lambda_\mathbb{Q}$ nun ayrışımı aslında $\Lambda_\mathbb{Q}$ ya dereceli bir cebir yapısı verir. Yani, $f \in \Lambda_\mathbb{Q}^m$ ve $g \in \Lambda_\mathbb{Q}^n$ ise $fg \in \Lambda_\mathbb{Q}^{m+n}$ dir.

Bundan sonra $\Lambda^n_{\mathbb{Q}}$ ve $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ sırası ile Λ^n ve Λ ile gösterilecektir. Simetrik fonksiyonlar teorisinin ana çalışmalarından biri olan Λ^n vektör uzayının çeşitli tabanlarını ve bu taban çiftleri arasındaki geçiş matrisleri üzerindeki 2 basit tabanı inceleyeceğiz.

2.2.2. Parçalanışlar ve Onların Sıralamaları

Negatif olmayan bir n tamsayısının bir λ parçalanışı bir $[\lambda_1, \ldots, \lambda_k] \in \mathbb{N}^k$ dizisidir öyle ki $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k$ ve $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = n$ dir. n'nin bütün parçalanışlarının kümesi $Par\,(n)$ ile gösterilsin. Tüm parçalanışlar,

$$Par := \bigcup_{n \geq 0} Par\,(n)$$

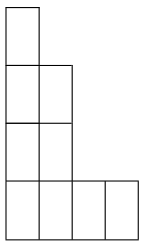
kümesini oluşturur. Boş parçalanışın kümesi $Par\,(0)$ dır.

Örnek 2.11. $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *için* $Par\,(n)$ *parçalanış kümeleri,*

$$\begin{aligned} Par\,(1) &= \{1\} & Par\,(2) &= \{2, 11\} \\ Par\,(3) &= \{3, 21, 111\} & Par\,(4) &= \{4, 31, 22, 211, 1111\} \\ Par\,(5) &= \{5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

$\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_k] \in \mathbb{N}^k$ bir parçalanış olmak üzere, k satır ve her bir i-inci satırda λ_i kadar hücresi olan tabloya Young tablosu denir. Örnerğin, $\lambda = [4, 2, 2, 1]$ parçalanışının Young tablosu aşağıdaki gibidir.



Tanım 2.12. $\lambda \in Par\,(n)$ *ise,* $\lambda \vdash n$ *(ya da* $|\lambda| = n$*) ile gösterilir.* λ *nın parçalarının sayısı (sıfırdan farklı* λ_i *lerin sayısı),* λ *nın uzunluğudur ve* $l\,(\lambda)$ *ile gösterilir.* i *ye eşit olan,* λ *nın parçalarının sayısı* $m_i = m_i\,(\lambda)$ *ise,* $\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots$ *olarak ifade edilebilir.* λ *nın Young diyagramının transpozesine karşılık gelen parçalanış* $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots)$ *ise,* λ' *ye* λ *nın eşleniği denir. Buradan* $m_i\,(\lambda') = \lambda_i - \lambda_{i+1}$, $\lambda'_1 = l\,(\lambda)$, $\lambda_1 = l\,(\lambda')$ *dir (Stanley 1999).*

Parçalanışlar üzerindeki üç kısmi sıralama, simetrik fonksiyonlar teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. İlk kısmi sıralamada, her i için $\mu_i \leq \lambda_i$ ise herhangi bir $\mu, \lambda \in Par$ için $\mu \subseteq \lambda$ olarak tanımlanır. Örneğin, $\mu = [3, 1, 1]$ ve $\lambda = [5, 2, 1]$ ise $\mu \subseteq \lambda$ dir. Bir parçalanış kendi diyagramıyla tanımlanırsa, "$\subseteq$" kısmi sıralama bağıntısı basitçe diyagramların kapsamasıyla verilir.

Kısmi sıralı Par kümesi içindeki bir λ parçalanışının parçalarının toplamına λ nın rankı denir ve $|\lambda|$ ile gösterilir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $Par\,(n)$ üzerinde tanımlı ikinci kısmi sıralama *baskın sıralama*dır ve "$\leq$" ile gösterilir. $\lambda, \mu \in Par\,(n)$ olsun.

$$\mu \leq \lambda \Longleftrightarrow |\mu| = |\lambda|$$

ve her $i \geq 1$ için,

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i$$

dir.

Son kısmi sıralama için, $Par\,(n)$ de, baskın sıralama ile uyumlu herhangi bir lineer sıralama almak yeterlidir. En kullanışlısı olan ters lexicographic sıralamadır, "$\overset{R}{\leq}$" ile gösterilir. $\lambda, \mu \in Par\,(n)$ ve $|\lambda| = |\mu|$ olsun. Bu durumda,

$$\mu \overset{R}{\leq} \lambda \Leftrightarrow \text{ya } \mu = \lambda \text{ ya da uygun bir } i \text{ için } \mu_1 = \lambda_1, \ldots, \mu_i = \lambda_i, \;\; \mu_{i+1} < \lambda_{i+1}$$

dır.

Örnek 2.13. *$Par\,(6)$ üzerindeki "$\overset{R}{\leq}$" sıralaması,*

$$111111 \overset{R}{\leq} 2111 \overset{R}{\leq} 222 \overset{R}{\leq} 3111 \overset{R}{\leq} 321 \overset{R}{\leq} 33 \overset{R}{\leq} 411 \overset{R}{\leq} 42 \overset{R}{\leq} 51 \overset{R}{\leq} 6$$

ile verilir.

2.2.3. Monomial Simetrik Fonksiyonlar

Tanım 2.14. $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ *olmak üzere, bir* $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots] \vdash n$ *için,*

$$m_\lambda := \sum_{\alpha} \mathbf{x}^\alpha \in \Lambda^n$$

fonksiyonuna monomial simetrik fonksiyon denir. Burada, toplam, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots]$ *vektörünün girdilerinin bütün farklı* $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ *permütasyonları üzerinde değişir (Stanley 1999).*

Örnek 2.15. $\lambda = [\,]$, $\lambda = [1]$, $\lambda = [2]$, $\lambda = [1,1]$ *parçalanışlarının monomial simetrik fonksiyonları aşağıdaki gibidir.*

$$\begin{array}{lllllll} m_{\emptyset} & = & 1 & , & m_2 & = & \sum_i x_i^2 \\ m_1 & = & \sum_i x_i & , & m_{11} & = & \sum_{i<j} x_i x_j \end{array}$$

Görülebilir ki, $f = \sum_{\alpha} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \Lambda^n$ ise $f = \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda \mathbf{x}^\lambda$ dır. Böylece, $\{m_\lambda : \lambda \vdash n\}$ kümesi Λ^n için bir tabandır. Dolayısıyla,

$$\dim \Lambda^n = p(n)$$

dir. Yani, Λ^n'nin boyutunun n'nin parçalanışlarının sayısı olduğu sonucuna varılır. Üstelik, $\{m_\lambda : \lambda \in Par\}$ kümesi, Λ için bir tabandır.

2.2.4. Elementer Simetrik Fonksiyonlar

Tanım 2.16. $e_0 = m_\emptyset = 1$ *olmak üzere,*

$$\begin{array}{lllllll} e_n & = & m_{1^n} & = & \sum_{i_1 < \cdots < i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n} & , & n \geq 1 \\ e_\lambda & := & e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots & , & \lambda & = & [\lambda_1, \lambda_2, \ldots] \in Par \end{array}$$

ile tanımlanan fonksiyona elementer simetrik fonksiyon denir (Stanley 1999).

Tanım 2.17. $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1}$ *matrisi*

$$r_i = \sum_j a_{ij} \quad , \quad c_i = \sum_i a_{ij}$$

sırasıyla, satır ve sütun toplamlarıyla birlikte sıfırdan farklı sonlu girdileri olan bir tamsayı matrisi olsun. Satır toplam vektörü row (A) *ve sütun toplam vektörü* col (A)*,*

$$\begin{array}{rl} \text{row}(A) & := [r_1, r_2, \ldots] \\ \text{col}(A) & := [c_1, c_2, \ldots] \end{array}$$

ile tanımlıdır (Stanley 1999).

Bir $(0,1)$-matrisi, bütün girdileri 0 veya 1 olan bir matris olarak tanımlanır. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi bir $(0,1)$-matrisidir.

Önerme 2.18. *$\lambda \vdash n$ ve $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, n'in bir zayıf kompozisyonu olsun. e_λ içindeki $\mathbf{x}^\alpha$'nın katsayısı $M_{\lambda\mu}$ olsun. $M_{\lambda\mu}$'nın değeri,*

$$e_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} M_{\lambda\mu} m_\mu\,, \tag{2.2}$$

$\operatorname{row}(A) = \lambda$ ve $\operatorname{col}(A) = \alpha$ sağlanan $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1}$ $(0,1)$-matrislerinin sayısına eşittir (Stanley 1999).

İspat Girdileri aşağıdaki gibi oluşturulmuş bir matrisi dikkate alalım.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

e_λ nın bir terimini elde etmek için, ilk satırdan λ_1 girdileri, ikinci satırdan λ_2 girdileri seçilsin. Seçilen girdilerin çarpımları $\mathbf{x}^\alpha$ olsun. Seçilen girdiler 1'e diğer girdiler 0'a dönüştürülürse, $\operatorname{row}(A) = \lambda$ ve $\operatorname{col}(A) = \alpha$ olan bir A matrisi elde edilir. Tersine, bu tür herhangi bir matris, e_λ nın bir terimine karşılık gelir ve kanıt aşağıdaki gibidir. $\square$

Sonuç 2.19. *$M_{\lambda\mu}$ Denklem (2.2)'deki gibi verilsin. $M_{\lambda\mu} = M_{\mu\lambda}$ dır. Yani, $\{m_\lambda : \lambda \vdash n\}$ ve $\{e_\lambda : \lambda \vdash n\}$ tabanları arasındaki geçiş matrisi simetrik matristir (Stanley 1999).*

İspat $\operatorname{row}(A) = \lambda$ ve $\operatorname{col}(A) = \mu$ yi sağlayan bir A $(0,1)$-matrisinde, $\operatorname{row}\left(A^T\right) = \mu$ ve $\operatorname{col}\left(A^T\right) = \lambda$ olduğundan tanımlanan A matrisi simetrik bir matristir (A matrisi tabanlar arasında geçiş matrisidir.). $\square$

Önerme 2.20. *λ ve μ Par üzerinde değişmek üzere,*

$$\prod_{i,j}(1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda,\mu} M_{\lambda\mu} m_\lambda(\mathbf{x})\, m_\mu(\mathbf{y}) \tag{2.3}$$

$$\prod_{i,j}(1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} m_\lambda(\mathbf{x})\, e_\lambda(\mathbf{y}) \tag{2.4}$$

dir (Stanley 1999).

İspat $|\lambda| = |\mu|$ almak yeterlidir. Aksi takdirde $M_{\lambda\mu} = 0$ dır.
$\prod_{i,j}(1 + x_i y_j)$ nin açılımında görünen bir $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots = \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta$ monomu, sonlu sayıda 1 ile bir $A = (a_{ij})$, $(0,1)$-matrisi seçilerek elde edilir ve

$$\prod_{i,j} (x_i y_j)^{a_{ij}} = \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta$$

sağlanır. Fakat,

$$\prod_{i,j} (x_i y_j)^{a_{ij}} = \mathbf{x}^{\mathrm{row}(A)} \mathbf{y}^{\mathrm{col}(A)}$$

dır. Yani, $\prod_{i,j}(1 + x_i y_j)$ çarpımındaki $\mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta$ nın katsayısı, $\mathrm{row}\,(A) = \alpha$ ve $\mathrm{col}\,(A) = \beta$ yı sağlayan $(0,1)$-matrislerinin sayısını ifade eder. Dolayısıyla, Denklem (2.3) sağlanır. Denklem (2.4), Denklem (2.2)'den elde edilir. □

Teorem 2.21. ***(Simetrik Fonksiyonların Temel Teoremi)*** *$\lambda, \mu \vdash n$ olsun. Bu durumda $\mu \leq \lambda'$ değil ise $M_{\lambda\mu} = 0$ ve $M_{\lambda\lambda'} = 1$ dir. Dolayısıyla, $\{e_\lambda : \lambda \vdash n\}$ kümesi Λ^n için bir tabandır. (Yani $\{e_\lambda : \lambda \in Par\}$ kümesi Λ için bir tabandır.) Denk olarak, $\{e_1, e_2, \ldots\}$ kümesi cebirsel bağımsızdır ve Λ yı $\mathbb{Q}$-cebiri olarak üretirler. $\Lambda = \mathbb{Q}\,[e_1, e_2, \ldots]$ olarak yazılabilir (Stanley 1999).*

İspat $M_{\lambda\mu} \neq 0$ olsun. Önerme 2.18'den, $\mathrm{row}\,(A) = \lambda$ ve $\mathrm{col}\,(A) = \mu$ olan bir $(0,1)$-matrisi A vardır. A' matrisi, $\mathrm{row}\,(A') = \lambda$ olan ve 1'lerin sola yaslanmış olduğu matris olsun. Yani tam olarak $1 \leq j \leq \lambda_i$ için $A'_{ij} = 1$ olsun. Herhangi bir i için A' nın ilk i sütunundaki 1 lerin sayısı A nın ilk i sütunundaki 1 lerin sayısından daha az değildir. Bu yüzden, baskın sıralamanın tanımından, $\mathrm{col}\,(A') \geq \mathrm{col}\,(A) = \mu$ dir. $\mathrm{col}\,(A') = \lambda'$ diyelim. Böylece beklendiği gibi $\lambda' \geq \mu$ dir. Üstelik, A' nın $\mathrm{row}\,(A') = \lambda$ ve $\mathrm{col}\,(A') = \lambda'$ ye sahip tek $(0,1)$-matrisi olduğunu görmek kolaydır. Bu nedenle, $M_{\lambda\lambda'} = 1$ dir.

$Par\,(n)$ nin bir sıralaması $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^{p(n)}$, baskın sıralama ile uyumludur. Öyleki bu $\left[\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^{p(n)}\right]$ parçalanışının eşleniğinin ters sıralamış hali $\left(\lambda^{p(n)}\right)', \ldots, \left(\lambda^2\right)', \left(\lambda^1\right)'$ da baskın sıralama ile uyumludur. $(M_{\lambda\mu})$ matrisi, satır sıralaması ile $\lambda^1, \lambda^2, \ldots$ ve sütun sıralaması ile $\left(\lambda^1\right)', \left(\lambda^2\right)', \ldots,$ ana köşegende 1'ler olacak şekilde üst üçgensel matristir. Bu $(M_{\lambda\mu})$'nin tersinir olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $\{e_\lambda : \lambda \vdash n\}$, Λ^n için bir tabandır.

$\{e_\lambda : \lambda \in Par\}$ kümesi, $a_i \in \mathbb{N}$ ve $\sum a_i < \infty$ olmak üzere $e_1^{a_1} e_2^{a_2} \cdots$ monomlarından oluşur. Böylece, $\{e_\lambda : \lambda \in Par\}$ nin doğrusal bağımsızlığı $e_1, e_2, \ldots$ lerin cebirsel bağımsızlığına denktir. $\square$

2.3. Schubert, Grothendieck ve Key Polinomları

Tanım 2.22. *$f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, $\{i \in 1, \ldots, n-1\}$ ve fs_i, f'de x_i ve x_{i+1}'i yer değiştirmek üzere,*

$$f\partial_i := \frac{f - fs_i}{x_i - x_{i+1}}$$

ifadesine Newton bölünmüş fark operatörü ∂_i'nin f polinomuna etkisi denir (Fomin, Gelfand ve Postnikov 1997).

Örnek 2.23. *$f = x_1^3 x_3 + x_1^2 x_2 x_5^4 \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_5]$ olsun.*

$$\begin{aligned} f\partial_1 &= \frac{\left(x_1^3x_3+x_1^2x_2x_5^4\right)-\left(x_1^3x_3+x_1^2x_2x_5^4\right)s_1}{x_1-x_2} = \frac{x_1^3x_3+x_1^2x_2x_5^4-x_2^3x_3-x_1x_2^2x_5^4}{x_1-x_2} \\ &= \frac{(x_1-x_2)\left(x_1^2x_3+x_1x_2x_3+x_2^2x_3\right)+(x_1-x_2)x_1x_2x_5^4}{x_1-x_2} \\ &= \frac{(x_1-x_2)\left(x_1^2x_3+x_1x_2x_3+x_2^2x_3+x_1x_2x_5^4\right)}{x_1-x_2} \\ &= x_1^2x_3 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_2x_5^4 \end{aligned}$$

Benzer şekilde hesaplamalar yapıldığında $f\partial_2$, $f\partial_3$ ve $f\partial_4$ aşağıdaki gibi olur.

$f\partial_2 = -\left(x_1 - x_5^4\right) x_1^2$

$f\partial_3 = x_1^3$

$f\partial_4 = -\left(x_5^3 + x_4 x_5^2 + x_4^2 x_5 + x_4^3\right) x_1^2 x_2$

Önerme 2.24. *$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ de $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ olmak üzere, ∂_i operatörleri*

$$\begin{aligned} \partial_i\partial_i &= 0 \\ \partial_i\partial_j &= \partial_j\partial_i \qquad , |i-j| \neq 1 \\ \partial_i\partial_{i+1}\partial_i &= \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1} \end{aligned}$$

braid bağıntılarını sağlar (Fomin, Gelfand ve Postnikov 1997).

İspat $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ sabitten farklı bir polinom ve $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ olsun.

(1)
$$\begin{aligned} f\partial_i\partial_i &= \left(\frac{f-fs_i}{x_i-x_{i+1}}\right)\partial_i = \frac{\frac{f-fs_i}{x_i-x_{i+1}} - \left(\frac{f-fs_i}{x_i-x_{i+1}}\right)s_i}{x_i-x_{i+1}} \\ &= \frac{\frac{f-fs_i}{x_i-x_{i+1}} - \frac{fs_i-f}{x_{i+1}-x_i}}{x_i-x_{i+1}} = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\partial_i\partial_i = 0$ dir.

(2) $|i-j| \neq 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f\partial_i\partial_j &= \left(\tfrac{f-fs_i}{x_i-x_{i+1}}\right)\partial_j && = \frac{\frac{f-fs_i}{x_i-x_{i+1}}-\left(\frac{f-fs_i}{x_i-x_{i+1}}\right)s_j}{x_j-x_{j+1}} && = \frac{\frac{f-fs_i}{x_i-x_{i+1}}-\frac{fs_j-fs_is_j}{x_i-x_{i+1}}}{x_j-x_{j+1}} \\ &= \frac{f-fs_i-fs_j+fs_js_i}{(x_i-x_{i+1})(x_j-x_{j+1})} && = \frac{\frac{f-fs_j}{x_j-x_{j+1}}-\frac{fs_i-fs_js_i}{x_j-x_{j+1}}}{x_i-x_{i+1}} && = \frac{\frac{f-fs_j}{x_j-x_{j+1}}-\left(\frac{f-fs_j}{x_j-x_{j+1}}\right)s_i}{x_i-x_{i+1}} \\ &= \left(\tfrac{f-fs_j}{x_j-x_{j+1}}\right)\partial_i && = f\partial_j\partial_i \end{aligned}$$

olduğundan, $|i-j| \neq 1$ için $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ dir.

Benzer işlemlerle $\partial_i\partial_{i+1}\partial_i = \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1}$ olduğu gözlemlenebilir. □

Önerme 2.25. *$f,g \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ ve $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ olmak üzere, Newton bölünmüş fark operatörü ∂_i'nin aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülebilir.*

(1) $(f+g)\,\partial_i = f\partial_i + g\partial_i$ dir.

(2) f, $(i,i+1)$'e göre simetrik ise $f\partial_i = 0$ dır.

İspat (1) $$\begin{aligned}(f+g)\,\partial_i &= \tfrac{(f+g)-(f+g)s_i}{x_i-x_{i+1}} = \tfrac{f+g-fs_i-gs_i}{x_i-x_{i+1}} = \tfrac{(f-fs_i)+(g-gs_i)}{x_i-x_{i+1}} \\ &= \tfrac{f-fs_i}{x_i-x_{i+1}} + \tfrac{g-gs_i}{x_i-x_{i+1}} = f\partial_i + g\partial_i\end{aligned}$$

(2) f, $(i,i+1)$'e göre simetrik ise $f = fs_i$ dir. Buradan,

$$f\partial_i = \tfrac{f-fs_i}{x_i-x_{i+1}} = \tfrac{f-f}{x_i-x_{i+1}} = 0$$

elde edilir. □

Benzer şekilde π_i Demazure operatörü, $f \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ için,

$$f\pi_i := \frac{x_if - (x_if)\,s_i}{x_i - x_{i+1}}$$

şeklinde tanımlıdır (Fomin, Gelfand ve Postnikov 1997).

Buradan $\partial_i = \frac{1-s_i}{x_i-x_{i+1}}$ ve $\pi_i = x_i\partial_i = \partial_i x_{i+1} + 1$ olduğu görülür. Bu operatörler $\{1, x_{i+1}\}$ kümesine aşağıdaki şekilde etki eder.

	s_i	∂_i	π_i
1	1	0	1
x_{i+1}	x_i	-1	0

$f,g \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ ve $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ olmak üzere, Demazure operatörü π_i aşağıdaki özellikleri sağlar.

(1) $(f+g)\,\pi_i = f\pi_i + g\pi_i$ dir.

(2) f, $(i, i+1)$'e göre simetrik ise $f\pi_i = f$ ve $(fg)\,\pi_i = f\,(g\pi_i)$ dir.

(3) $\pi_i^2 = \pi_i$ dir.

(4) $\pi_i\pi_{i+1}\pi_i = \pi_{i+1}\pi_i\pi_{i+1}$ dir.

Önerme 2.26. *Bölünmüş fark operatörleri ∂_i ve π_i aşağıdaki eşitlikleri sağlar (Lascoux 2013).*

$$\begin{aligned}(fg)\,\partial_i &= f\,(g\partial_i) + (f\partial_i)\,(gs_i) = g\,(f\partial_i) + (g\partial_i)\,(fs_i)\\ (fg)\,\pi_i &= f\,(g\pi_i) + (f\pi_i)\,(gs_i) - (gs_i)\,f = g\,(f\pi_i) + (g\pi_i)\,(fs_i) - (fs_i)\,g\end{aligned}$$

İspat

$$\begin{aligned}(fg)\,\partial_i &= \tfrac{fg-(fs_i)(gs_i)}{x_i-x_{i+1}} &&= \tfrac{fg-f(gs_i)+f(gs_i)-(fs_i)(gs_i)}{x_i-x_{i+1}}\\ &= f\tfrac{g-gs_i}{x_i-x_{i+1}} + \tfrac{f-fs_i}{x_i-x_{i+1}}\,(gs_i) &&= f\,(g\partial_i) + (f\partial_i)\,(gs_i)\end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned}(fg)\,\partial_i &= \tfrac{fg-(fs_i)(gs_i)}{x_i-x_{i+1}} &&= \tfrac{fg-(fs_i)g+(fs_i)g-(fs_i)(gs_i)}{x_i-x_{i+1}}\\ &= \tfrac{f-fs_i}{x_i-x_{i+1}}g + (fs_i)\,\tfrac{g-gs_i}{x_i-x_{i+1}} &&= g\,(f\partial_i) + (g\partial_i)\,(fs_i)\end{aligned}$$

olur. π_i için olan eşitlikler $\pi_i = \partial_i x_{i+1} + 1$ eşitliği kullanılarak elde edilebilir. $\square$

Önerme 2.26 ile verilen formüllere ∂_i ve π_i için Leibnitz formülleri denir.

f simetrik ise $(fg)\,\partial_i = f\,(g\partial_i)$ dir. Bu nedenle, ∂_i simetrik polinomlar üzerinde doğrusal operatördür.

Sonuç 2.27. *$f, g \in \mathbb{Z}[\mathrm{x}]$ için,*

$$\left(\frac{f}{g}\right)\partial_i = \frac{(f\partial_i)\,(gs_i) - (fs_i)\,(g\partial_i)}{g\,(gs_i)}$$

dir (Winkel 1995).

Örnek 2.28. *$f = x_2^3x_5 - x_1x_2x_4$ ve $g = x_1x_2x_3^2$ olsun.*

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)\partial_1 &= -\frac{(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)\,x_5}{x_1x_2x_3^2}\\ \left(\frac{f}{g}\right)\partial_2 &= \frac{x_2^3x_5 + x_2^2x_3x_5 + x_2x_3^2x_5 - x_1x_2x_4 + x_3^3x_5 - x_1x_3x_4}{x_1x_2^2x_3^2}\\ \left(\frac{f}{g}\right)\partial_3 &= \frac{x_1x_4^2 - x_2^2x_4x_5 + x_1x_3x_4 - x_2^2x_3x_5 + x_1x_3^2}{x_1x_3^2x_4^2}\\ \left(\frac{f}{g}\right)\partial_4 &= -\frac{x_2^2+x_1}{x_1x_3^2}\\ \left(\frac{f}{g}\right)\partial_5 &= \frac{x_2^2}{x_1x_3^2}\end{aligned}$$

Tanım 2.29. *$\omega \in S_n$ permütasyonu verilsin. $\omega = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ ise*

$$\partial_\omega := \partial_{i_r} \cdots \partial_{i_2} \partial_{i_1}$$

dır (Kirillov ve Maeno 1996).

Önerme 2.30. *$\omega \in S_n$ olmak üzere $\omega = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ yazılışı indirgenmiş yazılış değilse $\partial_{i_1 \cdots i_r} = 0$ dır (Macdonald 1991).*

İspat r üzerinden tümevarım yapalım.

(1) $\alpha = s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}$ indirgenmiş değilse $\partial_{i_1 \cdots i_{r-1}} = 0$ dır. Buradan,

$$\partial_{i_r} \underbrace{\partial_{i_1 \cdots i_{r-1}}}_{0} = \partial_{i_1 \cdots i_r} = 0$$

olur.

(2) $\alpha = s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}$ yazılışının indirgenmiş olduğunu varsayalım. $\beta = s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}$ ve $\theta = s_{i_1} \cdots s_r$ olsun. $l(\beta) = r - 1$ ve $l(\theta) \leq r - 1$ dir. Buradan, Sonuç 2.5'ten dolayı $l(\theta) = r - 2$ dir. Böylece $l(\beta) = l(\theta s_r) = l(\theta) + 1$ elde edilir. Sonuç olarak $\partial_\beta = \partial_{i_r} \partial_\theta$ olur. Böylece $\partial_{i_1 \cdots i_r} = \partial_{i_r} \partial_\beta = \partial_{i_r}^2 \partial_\theta = 0$ dır.

□

Önerme 2.31. *v ve ω iki permütasyon olsun.*

$$\partial_v \partial_\omega = \begin{cases} \partial_{\omega v} & , \quad l(\omega v) = l(\omega) + l(v) \\ 0 & , \quad l(\omega v) \neq l(\omega) + l(v) \end{cases}$$

dır (Fomin, Gelfand ve Postnikov 1997).

İspat $v = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ ve $\omega = s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_t}$ indirgenmiş haldeki yazılışlar olsun. $l(v) = r$ ve $l(\omega) = t$ dir. Bu durumda $\partial_v = \partial_{i_r} \cdots \partial_{i_2} \partial_{i_1}$ ve $\partial_\omega = \partial_{j_t} \cdots \partial_{j_2} \partial_{j_1}$ dir.

(1) $l(\omega v) = l(\omega) + l(v)$ ise $l(\omega v) = t + r$ dir. Bu durumda ωv'nin indirgenmiş halinin uzunluğu $t + r$ dir. O halde indirgenmiş yazılış $\omega v = s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_t} s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ şeklindedir. Buradan,

$$\partial_v \partial_\omega = \partial_{i_r} \cdots \partial_{i_2} \partial_{i_1} \partial_{j_t} \cdots \partial_{j_2} \partial_{j_1} = \partial_{\omega v}$$

olur.

(2) $l(\omega v) \neq l(\omega)+l(v)$ durumu ωv'nin indirgenmiş yazılışının $s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_t}s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_r}$ şeklinde olmadığı anlamına gelir. Önerme 2.30'dan

$$\underbrace{\partial_{i_r}\cdots\partial_{i_2}\partial_{i_1}}_{\partial_v}\underbrace{\partial_{j_t}\cdots\partial_{j_2}\partial_{j_1}}_{\partial_\omega}=0$$

ve $\partial_v\partial_\omega=0$ olur.

$\square$

Önerme 2.32. $f=\sum\alpha_i x_i$ *ise*

$$(fg)\,\partial_\omega=(g\partial_\omega)(f\omega)+\sum_{\substack{i<j\\ l(\omega t_{ij})=l(\omega)-1}}(\alpha_i-\alpha_j)\left(g\partial_{\omega t_{ij}}\right)$$

dir. Burada t_{ij}, x_i ve x_j değişkenlerini yer değiştiren operatördür (Macdonald 1991).

İspat Macdonald (1991)' da (2.13)'ün ispatına bakınız. $\square$

Tanım 2.33. ***(Klasik Schubert Polinomu)*** $\mathbf{x}:=\{x_1,\ldots,x_n\}$ *ve $\omega_0\in S_n$ maksimum permütasyon olmak üzere verilen bir $\omega\in S_n$ permütasyonunun klasik Schubert polinomu,*

$$\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}):=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{n-i}\right)\partial_{\omega^{-1}\omega_0}$$

dir (Macdonald 1991).

Örnek 2.34. *$\omega\in S_3$ için $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})$ Schubert polinomları aşağıdaki gibidir.*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{x}) &= x_1^2x_2\\
\mathfrak{S}_{[312]}(\mathbf{x}) &= x_1^2=\mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{x})\,\partial_2\\
\mathfrak{S}_{[231]}(\mathbf{x}) &= x_1x_2=\mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{x})\,\partial_1\\
\mathfrak{S}_{[213]}(\mathbf{x}) &= x_1=\mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{x})\,\partial_1\partial_2\\
\mathfrak{S}_{[132]}(\mathbf{x}) &= x_1+x_2=\mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{x})\,\partial_2\partial_1\\
\mathfrak{S}_{[123]}(\mathbf{x}) &= 1=\mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{x})\,\partial_1\partial_2\partial_1=\mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{x})\,\partial_2\partial_1\partial_2
\end{aligned}$$

$\mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x})=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{n-i}\right)\partial_{\omega_0^{-1}\omega_0}=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{n-i}\right)\partial_{\mathrm{i}}=\prod_{i=1}^{n}x_i^{n-i}$ olduğundan $\deg\mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x})=\frac{n(n-1)}{2}$ dir.

Teorem 2.35. *$v, \omega \in S_n$ ve $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ olmak üzere,*

$$\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})\,\partial_v = \begin{cases} \mathfrak{S}_{\omega v^{-1}}(\mathbf{x}) & , \quad l(\omega v^{-1}) = l(\omega) - l(v) \\ 0 & , \quad l(\omega v^{-1}) \neq l(\omega) - l(v) \end{cases}$$

dir (Macdonald 1991).

İspat 2.31'den

$$\partial_{\omega^{-1}\omega_0}\partial_v = \begin{cases} \partial_{v\omega^{-1}\omega_0} & , \quad l(v\omega^{-1}\omega_0) = l(v) + l(\omega^{-1}\omega_0) \\ 0 & , \quad l(v\omega^{-1}\omega_0) \neq l(v) + l(\omega^{-1}\omega_0) \end{cases}$$

dir.

2.37'den

$$l(v) + l\left(\omega^{-1}\omega_0\right) = l(v) + l(\omega_0) - l(\omega)$$

ve

$$l\left(v\omega^{-1}\omega_0\right) = l(\omega_0) - l\left(v\omega^{-1}\right)$$

dir.

$l(v\omega^{-1}) = l(\omega) - l(v)$ ise

$$\begin{aligned} l(\omega_0) + l\left(v\omega^{-1}\right) &= l(\omega_0) + l(\omega) - l(v) \\ l(\omega_0) + l(v) - l(\omega) &= l(\omega_0) - l\left(v\omega^{-1}\right) \end{aligned}$$

olur. Bu $l(v) + l(\omega^{-1}\omega_0) = l(v\omega^{-1}\omega_0)$ olduğu anlamına gelir. Buradan Önerme 2.31 gereği,

$$\partial_{\omega^{-1}\omega_0}\partial_v = \partial_{v\omega^{-1}\omega_0}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x})\,\partial_{\omega^{-1}\omega_0}\partial_v &= \mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x})\,\partial_{v\omega^{-1}\omega_0} \\ \mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})\,\partial_v &= \mathfrak{S}_{\omega v^{-1}}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

dır. $l(v\omega^{-1}) \neq l(\omega) - l(v)$ durumunda $l(v) + l(\omega^{-1}\omega_0) \neq l(v\omega^{-1}\omega_0)$ olacağından $\partial_{\omega^{-1}\omega_0}\partial_v = 0$ olur. Bundan dolayı $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})\,\partial_v = 0$ olur. □

Sonuç 2.36. *$\omega \in S_n$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ ve $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ olmak üzere,*

$$\mathfrak{S}_w(\mathbf{x})\,\partial_i = \begin{cases} \mathfrak{S}_{\omega s_i}(\mathbf{x}) & , \quad \omega(i) > \omega(i+1) \\ 0 & , \quad \omega(i) < \omega(i+1) \end{cases}$$

dir (Macdonald 1991).

Önerme 2.37. *$\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyon ve $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ olmak üzere, her $\omega \in S_n$ için aşağıdakiler ifadeler sağlanır.*

(1) $\deg \mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}) = l(\omega)$, *($\omega \neq I$)*

(2) $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})$*'nin x_i ve x_{i+1}'in yer değiştirmesine göre simetrik olması için gerek ve yeter koşul $\omega(i) < \omega(i+1)$ olmasıdır.*

(3) ω'nın kodu $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ baskın parçalanış ise $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}) = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ dır.

(4) $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, $\alpha \subset [n-1, \ldots, 1, 0]$ ve $|\alpha| = l(\omega)$ olmak üzere, ω'nın klasik Schubert polinomu

$$\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}) = \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$$

formunda sıfırdan farklı bir homojen polinomdur (Macdonald 1991).

İspat $\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyon ve $\omega \in S_n$ olsun.

(1) $\partial_{\omega^{-1}\omega_0}$ operatörü $\mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x})$ polinomunun derecesini $l(\omega^{-1}\omega_0) = l(\omega_0) - l(\omega^{-1}) = \frac{n(n-1)}{2} - l(\omega)$ kadar düşürür. Böylece $\deg \mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}) = \deg \mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x}) - \left(\frac{n(n-1)}{2} - l(\omega)\right)$ $= \frac{n(n-1)}{2} - \left(\frac{n(n-1)}{2} - l(\omega)\right) = l(\omega)$ olur.

(2) $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})$ polinomu x_i ve x_{i+1}'e göre simetrik ise $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})\, s_i = \mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})$ dir. Bu durumda $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})\,\partial_i = 0$ dır. Sonuç 2.36'dan dolayı $\omega(i) < \omega(i+1)$ dir.

(3) $l(\omega)$ üzerinden tümevarım yapalım. ω_0'ın kodu $[n-1, n-2, \ldots, 0]$ baskın ve $\mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x}) = x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}$ olduğundan $\omega = \omega_0$ için sağlanır.
$\omega \neq \omega_0$ ve ω'nın kodunun baskın olduğunu varsayalım. $\lambda \subset [n-1, n-2, \ldots, 0]$ ve $\lambda \neq [n-1, n-2, \ldots, 0]$ dır. $r \geq 0$ sayısı, $\lambda_i^{'} = n - i$ ve $1 \leq i \leq r$ olacak şekilde en büyük tam sayı ve $a = \lambda_{r+1}^{'} + 1 \leq n - r - 1$ olsun. ωs_a'nın uzunluğu $l(\omega) + 1$ ve baskındır. $\lambda(\omega s_a) = \lambda + \epsilon_a$ dır. Burada ϵ_a, a-ıncı bileşeni 1 ve diğer

bileşenleri 0 olan bir vektördür. Böylece, $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}) = \mathfrak{S}_{\omega s_a}(\mathbf{x})\,\partial_a = \left(x_a\mathbf{x}^\lambda\right)\partial_a = \mathbf{x}^\lambda$ dır. Çünkü $\lambda_a = \lambda_{a+1}$ dir.

(4) $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}) = \left(x_1^{n-1}\cdots x_{n-1}^1\right)\partial_{\omega^{-1}\omega_0}$ polinomu derecesi $l(\omega)$ olan homojen polinomdur. Homojen olduğunu görmek için herhangi bir ∂_i'nin $\mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x})$'e etkisine bakmak yeterlidir. $\alpha \subset [n-1,\ldots,1,0]$ ve $\beta \subset [n-1,\ldots,1,0]$ olmak üzere , $i \neq r, r+1$ için, $\beta_i = \alpha_i$ ve $\max\left(\beta_i,\beta_{i+1}\right) \leq \max\left(\alpha_i,\alpha_{i+1}\right) \leq n-i-1$ olsun. $\mathbf{x}^\alpha\partial_r$, $\mathbf{x}^\beta$ monomlarının bir lineer kombinasyonudur. Bu durumda her $\omega \in S_n$ için, $\mathbf{x}^\alpha\partial_\omega$ polinomu da uygun β' ler için $\mathbf{x}^{\beta'}$ lerin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir.

□

Teorem 2.38. *$\alpha \subset [n-1,\ldots,1,0]$ olmak üzere H_n, $\mathbf{x}^\alpha$ monomları tarafından üretilen $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$'nin toplamsal alt grubu olsun. Bu durumda, $\{\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})\}_{\omega\in S_n}$ kümesi H_n'nin bir $\mathbb{Z}$-modül tabanıdır (Macdonald 1991).*

İspat Önerme 2.37'den dolayı her $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})$ polinomu H_n'de bulunur.

$$\sum_{\omega\in S_n} a_\omega \mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}) = 0 \quad (a_\omega \in \mathbb{Z})$$

bir lineer bağımlı bağıntı ise, her $0 \leq p \leq \frac{n(n-1)}{2}$ için,

$$\sum_{l(\omega)=p} a_\omega \mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}) = 0 \tag{1}$$

dir. (1) üzerinde ∂_ω operatörünün etkisine bakılırsa $a_\omega = 0$ olduğu görülür. Bundan dolayı $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})$'ler lineer bağımsızdır. Her $\alpha \subset [n-1,\ldots,1,0]$ için, x^α monomunun

$$\mathbf{x}^\alpha = \sum_{l(\omega)=|\alpha|} b_\omega \mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}) \tag{2}$$

formunda yazılabildiğini görelim. Burada b_ω'lar rasyonel katsayılardır. (2) üzerinde ∂_ω operatörü uygulanırsa $b_\omega = \mathbf{x}^\alpha\partial_\omega$ olur ve bundan dolayı b_ω'lar tamsayılardır. □

Teorem 2.39. *$\omega \in S_\infty$ olmak üzere $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})$ Schubert polinomları $\mathbb{Z}[x_1,x_2,\ldots]$ için bir tabandır (Macdonald 1991).*

İspat $\mathbf{x}^{\alpha} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ verilsin. Yeterince büyük bir n için $\alpha \subset [n-1, \ldots, 1, 0]$ dır. Teorem 2.38'den, $\mathbf{x}^{\alpha}$, $\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x})$'lerin bir lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$'deki her eleman $\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x})$'lerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. □

Örnek 2.40. *$f = x_1^3 x_3 + x_1 x_5 - x_2 x_4$ olsun.*

$$\begin{aligned} f &= -\mathfrak{S}_{[4213]}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}_{[4132]}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}_{[213465]}(\mathbf{x}) - \mathfrak{S}_{[2143]}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}_{[1342]}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \mathfrak{S}_{[1423]}(\mathbf{x}) - \mathfrak{S}_{[13254]}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Teorem 2.41. *Her $n \geq 1$ için $S^{(n)}$ kümesi $\omega(n+1) < \omega(n+2) < \ldots$ sağlayan bütün ω permütasyonlarının kümesi olsun. $\{\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x})\}_{\omega \in S^{(n)}}$ kümesi $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$'nin bir $\mathbb{Z}$-tabanıdır (Macdonald 1991).*

İspat Önerme 2.37'nin ikinci öncülünden,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] &\iff \text{Her } m > n \text{ için } \partial_m \mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x}) = 0 \\ &\iff \omega \in S^{(n)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

dir. $\omega \in S^{(n)}$ olmak üzere, $A_n \subset \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ kümesi $\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x})$'lerin $\mathbb{Z}$ üzerinde ürettiği küme olsun. $A_n \neq \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ ise bir $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \backslash A_n$ polinomunu seçelim. Teorem 2.39'dan dolayı, f'yi klasik Schubert polinomlarının bir lineer kombinasyonu olarak,

$$f = \sum_{\omega} a_{\omega} \mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $a_{\omega} \neq 0$ ve $\omega \notin S^{(n)}$ olan en az bir terim vardır. Bundan dolayı uygun $m > n$ için $\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x}) \partial_m = \mathfrak{S}_{\omega s_m}(\mathbf{x})$ dir. $f \partial_m = 0$ olduğundan, (1)'den, klasik Schubert polinomlarının lineer bağımlı olduğunu görürüz. Bu Teorem 2.39 ile çelişir. Bundan dolayı $A_n = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$'dir. Bu ispatı tamamlar. □

Teorem 2.42. *$\varphi : \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow \mathbb{Z}$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $\varphi(x_i) = 0$ olarak tanımlanan homomorfizm olsun. Başka bir deyişle, $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ olmak üzere $\varphi(f)$, f'nin sabit terimi olsun. f'nin klasik Schubert polinomları cinsinden ifadesi,*

$$f = \sum_{\omega \in S_n} \varphi(f \partial_{\omega}) \mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x})$$

olur (Macdonald 1991).

İspat Teorem 2.41 ve lineerlikten, bu formülü f'yi bir $\mathfrak{S}_\nu(\mathbf{x})$ Schubert polinomu alarak doğrulamak yeterlidir. Teorem 2.35 ve Önerme 2.37'den $\omega = \nu$ ise $\varphi(\mathfrak{S}_\nu(\mathbf{x})\partial_\omega) = 1$ dir. $\omega \neq \nu$ ise $\varphi(\mathfrak{S}_\nu(\mathbf{x})\partial_\omega) = 0$ dır. □

Önerme 2.43. *$f = \sum \alpha_i x_i$ bir homojen lineer polinom olsun. t_{ij}, x_i ve x_j değişkenlerini yer değiştiren operatör ve ω bir permütasyon olmak üzere,*

$$f\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{i<j \\ l(\omega t_{ij}) = l(\omega)+1}} (\alpha_i - \alpha_j)\,\mathfrak{S}_{\omega t_{ij}}(\mathbf{x})$$

dir (Macdonald 1991).

İspat $f\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})$ polinomu derecesi $l(\omega)+1$ olan homojen bir polinomdur. Teorem 2.42'den,

$$f\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}) = \sum_\nu \left(f\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})\right)\partial_\nu \mathfrak{S}_\nu(\mathbf{x})$$

dir. Buradaki toplam uzunluğu $l(\omega)+1$ olan ν permütasyonları üzerindendir. Önerme 2.32'den,

$$\left(f\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})\right)\partial_\nu = (f\nu)\left(\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})\partial_\nu\right) + \sum_{\substack{i<j \\ l(\nu t_{ij}) = l(\nu)-1 = l(\omega)}} (\alpha_i - \alpha_j)\left(\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})\partial_{\nu t_{ij}}\right)$$

dir. Buna devam edildiğinde, $\omega = t_{ij}$ ise $\left(f\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})\right)\partial_\nu = \alpha_i - \alpha_j$ dir. $\omega \neq t_{ij}$ ise $\left(f\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})\right)\partial_\nu = 0$ dır. □

Sonuç 2.44. *t_{ij}, x_i ve x_j değişkenlerini yer değiştiren operatör, $i < r$ için $\sigma(t_{ir}) = -1$ ve $i > r$ için $\sigma(t_{ir}) = +1$ olmak üzere,*

$$x_r\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}) = \sum_{l(\omega t_{ir}) = l(\omega)+1} \sigma(t_{ir})\,\mathfrak{S}_{\omega t_{ir}}(\mathbf{x})$$

dir (Macdonald 1991).

$1 \leq r < n$ olmak üzere $s_r \in S_n$ operatörünün klasik Schubert polinomu $\mathfrak{S}_{s_r}(\mathbf{x}) := x_1 + x_2 + \cdots + x_r$ şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.42, Önerme 2.43 ve Sonuç 2.44 aşağıdaki teoremi kanıtlar.

Teorem 2.45. ***(Klasik Schubert İçin Monk Kuralı)*** *$\omega \in S_n$, $\mathfrak{S}_{s_r}(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$ ve t_{ij}, x_i ve x_j yi yer değiştiren operatör olmak üzere,*

$$\mathfrak{S}_{s_r}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{i \le r < j \\ l\left(\omega t_{ij}\right) = l(\omega)+1}} \mathfrak{S}_{\omega t_{ij}}(\mathbf{x})$$

dir (Macdonald 1991).

Örnek 2.46. *$\omega = [41325]$ ve $r = 3$ olsun.*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{s_3}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[41325]}(\mathbf{x}) &= (x_1 + x_2 + x_3)\left(x_1^3 x_3 + x_1^3 x_2\right) \\
&= x_3 x_1^4 + x_2 x_1^4 + 2x_2 x_3 x_1^3 + x_2^2 x_1^3 + x_3^2 x_1^3 \\
&= \left(x_3 x_1^4 + x_2 x_1^4\right) + x_2 x_3 x_1^3 + \left(x_2 x_3 x_1^3 + x_2^2 x_1^3 + x_3^2 x_1^3\right) \\
&= \mathfrak{S}_{[51324]}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}_{[42315]}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}_{[41523]}(\mathbf{x}) \\
&= \mathfrak{S}_{[41325]\circ t_{15}}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}_{[41325]\circ t_{24}}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}_{[41325]\circ t_{35}}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Örnek 2.47. *$\omega = [24135]$ ve $r = 2$ olsun.*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{s_2}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[24135]}(\mathbf{x}) &= (x_1 + x_2)\left(x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2\right) \\
&= 2x_1^2 x_2^2 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 \\
&= x_1^2 x_2^2 + \left(x_1^2 x_2^2 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3\right) \\
&= \mathfrak{S}_{[34125]}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}_{[25134]}(\mathbf{x}) \\
&= \mathfrak{S}_{[24135]\circ t_{14}}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}_{[24135]\circ t_{25}}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Tanım 2.48. *$e_i^k = e_i(x_1, \ldots, x_k)$ i-inci elementer simetrik polinom olsun. Bu durumda,*

$$e_i^k = \sum_{1 \le r_1 < \cdots < r_i \le k} x_{r_1} \cdots x_{r_i}$$

dir. $k \ge 0$ için $e_0^k = 1$ dir. $i > k$ için $e_i^k = 0$ dır (Fomin, Gelfand ve Postnikov 1997).

Örnek 2.49. *$i = 2$ ve $k = 4$ için,*

$$e_2^4 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$$

dir.

Önerme 2.50. *$e_i^k = e_i(x_1, \ldots, x_k)$ i-inci elementer simetrik polinom olmak üzere,*

$$e_i^k = e_i^{k-1} + x_k e_{i-1}^{k-1}$$

recurrence(tekrarlanma) bağıntısı vardır (Fomin, Gelfand ve Postnikov 1997).

İspat e_i^k'nın tanımından,

$$e_i^k = \sum_{1 \le r_1 < \cdots < r_i \le k} x_{r_1} \cdots x_{r_i}$$

dir. Bu tanımı düzenlersek,

$$\begin{aligned} e_i^k &= \left(\sum_{1 \le r_1 < \cdots < r_i \le k-1} x_{r_1} \cdots x_{r_i} \right) + x_k \left(\sum_{1 \le r_1 < \cdots < r_i \le k-1} x_{r_1} \cdots x_{r_{i-1}} \right) \\ &= e_i^{k-1} + x_k e_{i-1}^{k-1} \end{aligned}$$

olur. □

Önerme 2.51. $k, l, i \in \mathbb{N}$ *olmak üzere, aşağıdaki ifadeler sağlanır (Fomin, Gelfand ve Postnikov 1997).*

(1) $k \neq l$ *için* $e_i^k \partial_l = 0$ *dır.*

(2) $e_i^k \partial_k = e_{i-1}^{k-1}$ *dır.*

İspat *(1)*'i $0 < l < k$ ve $l > k$ için ayrı ayrı inceleyelim.

(*1*) $0 < l < k$ olsun. e_i^k'yı düzenleyelim.

$$\begin{aligned} e_i^k &= \sum_{1 \le r_1 < \cdots < r_i \le k} x_{r_1} \cdots x_{r_i} \\ &= x_l \left(\sum_{\substack{1 \le r_1 < \cdots < r_{i-1} \le k \\ \forall r_s \neq l, l+1}} x_{r_1} \cdots x_{r_{i-1}} \right) + x_{l+1} \left(\sum_{\substack{1 \le r_1 < \cdots < r_{i-1} \le k \\ \forall r_s \neq l, l+1}} x_{r_1} \cdots x_{r_{i-1}} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{\substack{1 \le r_1 < \cdots < r_i \le k \\ \forall r_s \neq l, l+1}} x_{r_1} \cdots x_{r_i} \right) \\ &= (x_l + x_{l+1}) \left(\sum_{\substack{1 \le r_1 < \cdots < r_{i-1} \le k \\ \forall r_s \neq l, l+1}} x_{r_1} \cdots x_{r_{i-1}} \right) + \left(\sum_{\substack{1 \le r_1 < \cdots < r_i \le k \\ \forall r_s \neq l, l+1}} x_{r_1} \cdots x_{r_i} \right) \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının ∂_l'ye göre Newton bölünmüş farkını alırsak,

$$
\begin{aligned}
e_i^k \partial_l &= \left((x_l + x_{l+1}) \Big(\sum_{\substack{1 \le r_1 < \cdots < r_{i-1} \le k \\ \forall r_s \ne l, l+1}} x_{r_1} \cdots x_{r_{i-1}} \Big) + \Big(\sum_{\substack{1 \le r_1 < \cdots < r_i \le k \\ \forall r_s \ne l, l+1}} x_{r_1} \cdots x_{r_i} \Big) \right) \partial_l \\
&= \left((x_l + x_{l+1}) \Big(\sum_{\substack{1 \le r_1 < \cdots < r_{i-1} \le k \\ \forall r_s \ne l, l+1}} x_{r_1} \cdots x_{r_{i-1}} \Big) \right) \partial_l + \\
&\quad \underbrace{\left(\sum_{\substack{1 \le r_1 < \cdots < r_i \le k \\ \forall r_s \ne l, l+1}} x_{r_1} \cdots x_{r_i} \right) \partial_l}_{0} \\
&= \underbrace{(x_l + x_{l+1}) \partial_l}_{0} \left(\sum_{\substack{1 \le r_1 < \cdots < r_{i-1} \le k \\ \forall r_s \ne l, l+1}} x_{r_1} \cdots x_{r_{i-1}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. $l > k$ olduğu durumda e_i^k'nın içinde hiç x_l'li terim olmadığı için $e_i^k \partial_l = 0$ dır.

(2) Önerme 2.50'den,

$$e_i^k = e_i^{k-1} + x_k e_{i-1}^{k-1}$$

eşitliğini kullanalım. Eşitliğin her iki tarafının ∂_k'ye göre Newton bölünmüş farkını alırsak,

$$
\begin{aligned}
e_i^k \partial_k &= \left(e_i^{k-1} + x_k e_{i-1}^{k-1} \right) \partial_k = \underbrace{e_i^{k-1} \partial_k}_{0} + x_k e_{i-1}^{k-1} \partial_k \\
&= x_k \partial_k e_{i-1}^{k-1} = e_{i-1}^{k-1}
\end{aligned}
$$

olur.

□

Önerme 2.52. *$i, j, k \ge 1$ için, aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Fomin, Gelfand ve Postnikov 1997).*

(1) $\left(e_i^{k+1} - e_i^k \right) e_{j-1}^k = \left(e_j^{k+1} - e_j^k \right) e_{i-1}^k$

(2) $e_j^k \left(e_i^k - e_i^{k+1} \right) = \sum_{l \ge 1} \left(e_{i-l}^{k+1} e_{j+l}^k - e_{i-l}^k e_{j+l}^{k+1} \right)$

İspat *(1)* Önerme 2.50'deki özellikten faydalanırsak,

$$\begin{aligned}\left(e_i^{k+1}-e_i^k\right)e_{j-1}^k &= \left(e_i^k+x_{k+1}e_{i-1}^k-e_i^k\right)e_{j-1}^k\\ &= x_{k+1}e_{i-1}^k e_{j-1}^k\\ &= \left(e_j^{k+1}-e_j^k\right)e_{i-1}^k\end{aligned}$$

olur.

(2) Az önce ispatladığımız *(1)*'den,

$$\begin{aligned}e_j^k\left(e_{i+1}^k-e_{i+1}^{k+1}\right) &= -e_i^k\left(e_{j+1}^{k+1}-e_{j+1}^k\right)\\ &= -e_i^k e_{j+1}^{k+1}+e_i^k e_{j+1}^k+e_i^{k+1}e_{j+1}^k-e_i^{k+1}e_{j+1}^k\\ &= e_i^{k+1}e_{j+1}^k-e_{j+1}^{k+1}e_i^k+e_{j+1}^k\left(e_i^k-e_i^{k+1}\right)\end{aligned}$$

olur. Aynı şekilde,

$$\begin{aligned}e_{j+1}^k\left(e_i^k-e_i^{k+1}\right) &= -e_{i-1}^k\left(e_{j+2}^{k+1}-e_{j+2}^k\right)\\ &= -e_{i-1}^k e_{j+2}^{k+1}+e_{i-1}^k e_{j+2}^k+e_{i-1}^{k+1}e_{j+2}^k-e_{i-1}^{k+1}e_{j+2}^k\\ &= e_{i-1}^{k+1}e_{j+2}^k-e_{j+2}^{k+1}e_{i-1}^k+e_{j+2}^k\left(e_{i-1}^k-e_{i-1}^{k+1}\right)\end{aligned}$$

dır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}e_j^k\left(e_{i+1}^k-e_{i+1}^{k+1}\right) &= e_i^{k+1}e_{j+1}^k-e_{j+1}^{k+1}e_i^k+e_{i-1}^{k+1}e_{j+2}^k-e_{j+2}^{k+1}e_{i-1}^k\\ &\quad +e_{j+2}^k\left(e_{i-1}^k-e_{i-1}^{k+1}\right)\\ &= \sum_{l=1}^{2}\left(e_{i+1-l}^{k+1}e_{j+l}^k-e_{j+l}^{k+1}e_{i+1-l}^k\right)+e_{j+2}^k\left(e_{i-1}^k-e_{i-1}^{k+1}\right)\end{aligned}$$

olur. Bu şekilde seri açmaya devam edildiğinde,

$$e_j^k\left(e_{i+1}^k-e_{i+1}^{k+1}\right)=\sum_{l\geq 1}\left(e_{i+1-l}^{k+1}e_{j+l}^k-e_{j+l}^{k+1}e_{i+1-l}^k\right)$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte i yerine $i-1$ yazıldığında istenen eşitlik elde edilir.

□

Önerme 2.53. *$\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyon olmak üzere,*

$$\mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x})=e_1(x_1)\,e_2(x_1,x_2)\cdots e_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})$$

dir.

İspat Klasik Schubert tanımından yararlanalım.

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x}) &= \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{n-i}\right) \partial_{\omega_0^{-1}\omega_0} \\ &= \prod_{i=1}^{n} x_i^{n-i} \end{aligned}$$

Bu eşitliği düzenlersek,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x}) &= x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1} \\ &= (x_1)(x_1x_2)\cdots(x_1x_2\cdots x_{n-1}) \\ &= e_1(x_1)\, e_2(x_1,x_2)\cdots e_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \end{aligned}$$

olur. □

Teorem 2.54. *u, v permütasyon ve c_{uv}^{ω}'ler negatif olmayan katsayılar olmak üzere,*

$$\mathfrak{S}_u(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_v(\mathbf{x}) = \sum_{\omega\in S_\infty} c_{uv}^{\omega}\mathfrak{S}_w(\mathbf{x})$$

dir (Billey ve Haiman 1994).

İspat Yeterince büyük bir pozitif n tamsayısı için, $\mathfrak{S}_u(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_v(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$'dir. $\mathfrak{S}_u(\mathbf{x})$ ve $\mathfrak{S}_v(\mathbf{x})$ polinomları homojen polinomlar olduğundan çarpımları da homojendir.

$\varphi : \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n] \longrightarrow \mathbb{Z}$, $1 \le i \le n$ ve $f \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ olmak üzere $\varphi(f)$, f'nin sabit terimi olsun. Teorem 2.42'den,

$$\mathfrak{S}_u(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_v(\mathbf{x}) = \sum_{\omega\in S_n} \varphi\left(\left(\mathfrak{S}_u(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_v(\mathbf{x})\right)\partial_\omega\right)\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x})$$

dır. φ homomorfizminin tanımından, $\varphi\left(\left(\mathfrak{S}_u(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_v(\mathbf{x})\right)\partial_\omega\right)$ ifadesi bir tamsayıdır. Bu durumda $c_{uv}^{\omega} = \varphi\left(\left(\mathfrak{S}_u(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_v(\mathbf{x})\right)\partial_\omega\right)$ olur. □

Örnek 2.55. $u = [3142]$ *ve* $v = [52413]$ *olsun.*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{[3142]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[52413]}(\mathbf{x}) &= \left(x_3x_1^2 + x_2x_1^2\right)\left(x_3^2x_2x_1^4 + x_3x_2^2x_1^4\right) \\ &= x_3^3x_1^6x_2 + 2x_3^2x_1^6x_2^2 + x_2^3x_1^6x_3 \\ &= x_3^2x_1^6x_2^2 + \left(x_3^3x_1^6x_2 + x_3^2x_1^6x_2^2 + x_2^3x_1^6x_3\right) \\ &= \mathfrak{S}_{[7341256]}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}_{[7251346]}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Örnek 2.56. *$u = [312]$ ve $v = [425631]$ olsun.*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{[312]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[425631]}(\mathbf{x}) &= x_1^2\left(x_1^3x_2x_3^2x_4^2x_5 + x_1^3x_2^2x_3x_4^2x_5 + x_1^3x_2^2x_3^2x_4x_5\right) \\ &= x_1^5x_2x_3^2x_4^2x_5 + x_1^5x_2^2x_3x_4^2x_5 + x_1^5x_2^2x_3^2x_4x_5 \\ &= \mathfrak{S}_{[624531]}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Tanım 2.57. *$f, g \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ ve $\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyon olmak üzere f ve g'nin iç çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Macdonald 1991).*

$$\langle f, g\rangle := (fg)\,\partial_{\omega_0}$$

Örnek 2.58. *$\omega_0 = [4321]$, $f = x_2^3x_3$ ve $g = x_1x_2$ olsun.*

$$\begin{aligned} \left\langle x_2^3x_3, x_1x_2\right\rangle &= \left(x_2^3x_3x_1x_2\right)\partial_{[4321]} \\ &= -x_1^2x_2 - x_1x_2x_3 - x_1x_2^2 + x_3^3 \end{aligned}$$

Önerme 2.59. *$\omega \in S_n$ ve $f, g \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) $\langle f\partial_\omega, g\rangle = \langle f, g\partial_{\omega^{-1}}\rangle$

(2) $\langle f^\omega, g\rangle = \epsilon(\omega)\left\langle f, g^{\omega^{-1}}\right\rangle$
Burada $\epsilon(\omega) = (-1)^{l(\omega)}$ ω'nın işaretidir (Macdonald 1991).

İspat *(1)* $\langle f\partial_i, g\rangle = \langle f, g\partial_i\rangle$, $(1 \le i \le n-1)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\langle f\partial_i, g\rangle = ((f\partial_i)\,g)\,\partial_{\omega_0} = ((f\partial_i)\,g)\,\partial_i\partial_{\omega_0 s_i} = ((f\partial_i)\,(g\partial_i))\,\partial_{\omega_0 s_i}$$

olur. Çünkü, $f\partial_i$ polinomu x_i ve x_{i+1}'e göre simetriktir. Eşitlikteki son ifade f ve g'ye göre simetriktir. Bundan dolayı,

$$\langle f\partial_i, g\rangle = \langle g\partial_i, f\rangle = \langle f, g\partial_i\rangle$$

olur.

(2) $\langle fs_i, g\rangle = -\langle f, gs_i\rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\langle fs_i, g\rangle = ((fs_i)\,g)\,\partial_{\omega_0} = (f\,(gs_i))\,s_i\partial_i\partial_{\omega_0 s_i}$$

ve $s_i\partial_i = -\partial_i$ olduğundan,

$$-(f\,(gs_i))\,\partial_i\partial_{\omega_0 s_i} = -(f\,(gs_i))\,\partial_{\omega_0} = -\langle f, gs_i\rangle$$

olur. □

Tanım 2.60. ***(2-Kat Schubert Polinomu)*** *$\mathbf{x} := \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve $\mathbf{y} := \{y_1, \ldots, y_n\}$ olsun. $\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyon olmak üzere,*

$$\mathfrak{S}_\omega (\mathbf{x}; \mathbf{y}) := \left(\prod_{i+j \le n} (x_i + y_j) \right) \partial_{\omega^{-1}\omega_0}$$

polinomuna $\omega \in S_n$ permütasyonunun 2-kat Schubert polinomu denir (Kirillov ve Maeno 1996).

Teorem 2.61. *$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \prod_{i+j \le n} (x_i + y_j) &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} y_{n-k}^{k-i} e_i (x_1, \ldots, x_k) \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} x_{n-k}^{k-i} e_i (y_1, \ldots, y_k) \right) \end{aligned}$$

dir (Postnikov 2004).

İspat Tümevarım yapalım. $n = 2$ için,

$$\prod_{i+j \le 2} (x_i + y_j) = (x_1 + y_1) = y_1^1 e_0 (x_1) + y_1^0 e_1 (x_1) = \prod_{k=1}^{1} \left(\textstyle\sum_{i=0}^{k} y_{2-k}^{k-i} e_i (x_1, \ldots, x_k) \right)$$

olur. n için doğru olsun.

$$\prod_{i+j \le n+1} (x_i + y_j) = \prod_{i+j \le n} (x_i + y_j) \prod_{i+j = n+1} (x_i + y_j) \tag{1}$$

eşitliğinde eşitliğin sağ tarafını düzenleyelim.

$$\begin{aligned} \prod_{i+j \le n} (x_i + y_j) \prod_{i+j = n+1} (x_i + y_j) &= \prod_{i+j \le n} (x_i + y_j) \prod_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} + y_{n-k}) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(\textstyle\sum_{i=0}^{k} y_{n-k}^{k-i} e_i (x_1, \ldots, x_k) \right) \prod_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} + y_{n-k}) \\ &= (x_1 + y_n) \prod_{k=1}^{n-1} \left((x_{k+1} + y_{n-k}) \textstyle\sum_{i=0}^{k} y_{n-k}^{k-i} e_i (x_1, \ldots, x_k) \right) \end{aligned}$$

Elde ettiğimiz eşitliğin sağ tarafındaki bir k sayısı için, çarpımın içindeki

$$(x_{k+1} + y_{n-k}) \left(\sum_{i=0}^{k} y_{n-k}^{k-i} e_i (x_1, \ldots, x_k) \right)$$

çarpanına bakalım.

$$\begin{aligned} (x_{k+1} + y_{n-k}) \left(\sum_{i=0}^{k} y_{n-k}^{k-i} e_i (x_1, \ldots, x_k) \right) &= \left(\sum_{i=0}^{k} y_{n-k}^{k-i} x_{k+1} e_i (x_1, \ldots, x_k) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=0}^{k} y_{n-k}^{k-i+1} e_i (x_1, \ldots, x_k) \right) \end{aligned}$$

$$= y_{n-k}^0 x_{k+1} e_k (x_1, \ldots, x_k) + y_{n-k}^{k+1} e_0 (x_1, \ldots, x_k) + \left(\sum_{i=0}^{k-1} y_{n-k}^{k-i} x_{k+1} e_i (x_1, \ldots, x_k) \right)$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{k} y_{n-k}^{k-i+1} e_i\left(x_1,\ldots,x_k\right)\right)$$
$$=y_{n-k}^{k+1}e_0\left(x_1,\ldots,x_k\right)+\left(\sum_{i=0}^{k-1} y_{n-k}^{k-i}\left(x_{k+1}e_i\left(x_1,\ldots,x_k\right)+e_{i+1}\left(x_1,\ldots,x_k\right)\right)\right)$$
$$+\,y_{n-k}^{0}x_{k+1}e_k\left(x_1,\ldots,x_k\right)$$
$$=y_{n-k}^{k+1}e_0\left(x_1,\ldots,x_{k+1}\right)+\left(\sum_{i=0}^{k-1} y_{n-k}^{k-i}x_{k+1}e_{i+1}\left(x_1,\ldots,x_{k+1}\right)\right)+y_{n-k}^{0}e_{k+1}\left(x_1,\ldots,x_{k+1}\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{k+1} y_{n-k}^{k+1-i} e_i\left(x_1,\ldots,x_k\right)$$

Buradan,

$$\left(x_{k+1}+y_{n-k}\right)\left(\sum_{i=0}^{k} y_{n-k}^{k-i}e_i\left(x_1,\ldots,x_k\right)\right)=\sum_{i=0}^{k+1} y_{n-k}^{k+1-i}e_i\left(x_1,\ldots,x_k\right)$$

olur. Bunu (1)'de yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
\prod_{i+j\leq n+1}\left(x_i+y_j\right) &= \prod_{i+j\leq n}\left(x_i+y_j\right)\prod_{i+j=n+1}\left(x_i+y_j\right)\\
&= \left(x_1+y_n\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(\left(x_{k+1}+y_{n-k}\right)\sum_{i=0}^{k} y_{n-k}^{k-i}e_i\left(x_1,\ldots,x_k\right)\right)\\
&= \left(x_1+y_n\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{k+1} y_{n-k}^{k+1-i}e_i\left(x_1,\ldots,x_k\right)\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} y_{n+1-k}^{k-i}e_i\left(x_1,\ldots,x_k\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemlerle $\prod\limits_{i+j\leq n+1}\left(x_i+y_j\right)=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=0}^{k} x_{n+1-k}^{k-i}e_i\left(y_1,\ldots,y_k\right)\right)$ olduğu da görülebilir. □

Örnek 2.62. $n=4$ *olsun.*

$$\begin{aligned}
\prod_{i+j\leq 4}\left(x_i+y_j\right) &= \left(x_1+y_3\right)\left(x_1+y_2\right)\left(x_2+y_2\right)\left(x_1+y_1\right)\left(x_2+y_1\right)\left(x_3+y_1\right)\\
&= \left(y_3+x_1\right)\left(y_2^2+y_2\left(x_1+x_2\right)+x_1x_2\right)\left(y_1^3+y_1^2\left(x_1+x_2+x_3\right)\right.\\
&\quad \left.+y_1\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)+x_1x_2x_3\right)\\
&= \left(y_3^1e_0\left(x_1\right)+y_3^0e_1\left(x_1\right)\right)\left(y_2^2e_0\left(x_1,x_2\right)+y_2^1e_1\left(x_1,x_2\right)\right.\\
&\quad \left.+y_2^0e_2\left(x_1,x_2\right)\right)\left(y_1^3e_0\left(x_1,x_2,x_3\right)+y_1^2e_1\left(x_1,x_2,x_3\right)\right.\\
&\quad \left.+y_1^1e_2\left(x_1,x_2,x_3\right)+y_1^0e_3\left(x_1,x_2,x_3\right)\right)
\end{aligned}$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{1} y_3^{1-i}e_i\left(x_1\right)\right)\left(\sum_{i=0}^{2} y_2^{2-i}e_i\left(x_1,x_2\right)\right)\left(\sum_{i=0}^{3} y_1^{3-i}e_i\left(x_1,x_2,x_3\right)\right)$$
$$=\prod_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=0}^{k} y_{4-k}^{k-i}e_i\left(x_1,\ldots,x_k\right)\right)$$

dir. Benzer işlemlerle $\prod_{i+j\leq 4}(x_i+y_j)=\prod_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=0}^{k}x_{4-k}^{k-i}e_i\left(y_1,\ldots,y_k\right)\right)$ *olduğu görülebilir.*

Teorem 2.61 bize, $\prod_{i+j\leq n}(x_i+y_j)$'nin katsayıları $\mathbb{Z}\left[y_1,\ldots,y_n\right]$'de olan $\mathbf{x}^{\alpha}$'ların lineer kombinasyonu şeklinde yazılabildiğini ifade eder. Ya da aynı şekilde $\prod_{i+j\leq n}(x_i+y_j)$ nin katsayıları $\mathbb{Z}\left[x_1,\ldots,x_n\right]$'de olan $\mathbf{y}^{\alpha}$'ların lineer kombinasyonu şeklinde yazılabildiğini de ifade eder. Burada $\alpha\subset[n-1,\ldots,1,0]$ dır.

Teorem 2.63. ***(2-Kat Schubert İçin Cauchy Formülü)*** $\mathbf{x}:=\{x_1,\ldots,x_n\}$ *ve* $\mathbf{y}:=\{y_1,\ldots,y_n\}$ *değişkenler kümesi olsun.* $\omega_0=[n\,(n-1)\ldots 1]\in S_n$ *maksimum permütasyon olmak üzere,*

$$\prod_{i+j\leq n}(x_i+y_j)=\sum_{\omega\in S_n}\mathfrak{S}_{\omega}\left(\mathbf{x}\right)\mathfrak{S}_{\omega\omega_0}\left(\mathbf{y}\right)$$

dir (Postnikov 2004).

İspat İspatı için Macdonald (1991)'da sayfa 77-78'e bakınız. □

Örnek 2.64. $n=3$ *olsun.*

$$\begin{aligned}\prod_{i+j\leq 3}(x_i+y_j) &= (x_1+y_1)(x_1+y_2)(x_2+y_1)\\ &= x_1^2x_2+y_1^2y_2+x_1x_2(y_1+y_2)+(x_1+x_2)\,y_1y_2+x_1^2y_1+x_1y_1^2\\ &= \mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[123]}(\mathbf{y})+\mathfrak{S}_{[123]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{y})\\ &\quad+\mathfrak{S}_{[231]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[132]}(\mathbf{y})+\mathfrak{S}_{[132]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[231]}(\mathbf{y})\\ &\quad+\mathfrak{S}_{[312]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[213]}(\mathbf{y})+\mathfrak{S}_{[213]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[312]}(\mathbf{y})\\ &= \mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[321]\circ[321]}(\mathbf{y})+\mathfrak{S}_{[123]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[123]\circ[321]}(\mathbf{y})\\ &\quad+\mathfrak{S}_{[231]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[231]\circ[321]}(\mathbf{y})+\mathfrak{S}_{[132]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[132]\circ[321]}(\mathbf{y})\\ &\quad+\mathfrak{S}_{[312]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[312]\circ[321]}(\mathbf{y})+\mathfrak{S}_{[213]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[213]\circ[321]}(\mathbf{y})\end{aligned}$$

Önerme 2.65. $\mathbf{x}:=\{x_1,\ldots,x_n\}$ *ve* $\mathbf{y}:=\{y_1,\ldots,y_n\}$ *olmak üzere* $\omega\in S_n$ *için,*

$$\mathfrak{S}_{\omega}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)=\sum_{\substack{u=v\omega\\ l(\omega)=l(u)+l(v)}}\mathfrak{S}_{u}\left(\mathbf{x}\right)\mathfrak{S}_{v}\left(\mathbf{y}\right)$$

dir (Macdonald 1991).

İspat Teorem 2.63'ten

$$\prod_{i+j\leq n}(x_i+y_j)=\sum_{v\in S_n}\mathfrak{S}_{v\omega_0}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_v(\mathbf{y})$$

dir. Bu eşitlikte her iki tarafa $\partial_{\omega^{-1}\omega_0}$ uygulayalım.

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i+j\leq n}(x_i+y_j)\right)\partial_{\omega^{-1}\omega_0} &= \left(\sum_{v\in S_n}\mathfrak{S}_{v\omega_0}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_v(\mathbf{y})\right)\partial_{\omega^{-1}\omega_0}\\ \mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \sum_{v\in S_n}\mathfrak{S}_{v\omega_0}(\mathbf{x})\,\partial_{\omega^{-1}\omega_0}\mathfrak{S}_v(\mathbf{y})\end{aligned}$$

Eğer,

$$l(v\omega)=l(v\omega_0\omega_0\omega)=l(v\omega_0)-l\left(\omega^{-1}\omega_0\right)=l(\omega)-l(v)$$

ise Teorem 2.35'ten,

$$\mathfrak{S}_{v\omega_0}(\mathbf{x})\,\partial_{\omega^{-1}\omega_0}=\mathfrak{S}_{v\omega}(\mathbf{x})$$

dir. $l(v\omega)\neq l(\omega)-l(v)$ ise $\mathfrak{S}_{v\omega_0}(\mathbf{x})\,\partial_{\omega^{-1}\omega_0}=0$ dır. Burada $u=v\omega$ dersek,

$$\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y})=\sum_{\substack{u=v\omega\\ l(\omega)=l(u)+l(v)}}\mathfrak{S}_u(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_v(\mathbf{y})$$

olur. □

Örnek 2.66. $\omega=[21354]$ *olsun.*

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{[21354]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= x_1x_4+x_4y_1+x_1y_4+y_1y_4+x_1x_3+x_3y_1+x_1y_3+y_1y_3+x_1x_2\\ &\quad +x_2y_1+2x_1y_1+x_1^2+y_1^2+x_1y_2+y_1y_2\\ &= \left(x_1x_4+x_1x_3+x_1x_2+x_1^2\right)+(x_1+x_2+x_3+x_4)\,y_1\\ &\quad +x_1(y_1+y_2+y_3+y_4)+\left(y_1y_4+y_1y_3+y_1y_2+y_1^2\right)\\ &= \mathfrak{S}_{[21354]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[12345]}(\mathbf{y})+\mathfrak{S}_{[12354]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[21345]}(\mathbf{y})\\ &\quad +\mathfrak{S}_{[21345]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[12354]}(\mathbf{y})+\mathfrak{S}_{[12345]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[21354]}(\mathbf{y})\end{aligned}$$

Önerme 2.67. *$\omega_0\in S_n$ maksimum permütasyon, $\mathbf{x}=\{x_1,\ldots,x_n\}$ ve $\mathbf{y}=\{y_1,\ldots,y_n\}$ olmak üzere her $\omega\in S_n$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır (Macdonald 1991).*

(1) $\mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y})=\prod_{i+j\leq n}(x_i+y_j)$

(2) $\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \mathfrak{S}_{\omega^{-1}}(\mathbf{y};\mathbf{x})$

(3) $y_1 = \cdots = y_n = 0$ *için* $\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x};\mathbf{0}) = \mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x})$ *dir.*

İspat $\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyon, $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ olsun.

(1) 2-kat Schubert polinomu tanımından yararlanırsak,

$$\mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \left(\prod_{i+j\leq n}(x_i + y_j)\right)\partial_{\omega_0^{-1}\omega_0} = \left(\prod_{i+j\leq n}(x_i + y_j)\right)\partial_{\mathrm{i}} = \prod_{i+j\leq n}(x_i + y_j)$$

olur.

(2) 2.65'ten yararlanacağız.

$$\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \sum_{\substack{u=v\omega \\ l(\omega)=l(u)+l(v)}} \mathfrak{S}_{u}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{v}(\mathbf{y}) = \sum_{\substack{v=u\omega^{-1} \\ l(\omega)=l(v)+l(u)}} \mathfrak{S}_{v}(\mathbf{y})\,\mathfrak{S}_{u}(\mathbf{x}) = \mathfrak{S}_{\omega^{-1}}(\mathbf{y};\mathbf{x})$$

dır.

(3) 2-kat Schubert polinomu ve klasik Schubert polinomu tanımından yararlanalım.

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x};\mathbf{0}) &= \left(\prod_{i+j\leq n}(x_i + 0)\right)\partial_{\omega^{-1}\omega_0} = \left(\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j\leq n-i}(x_i + 0)\right)\partial_{\omega^{-1}\omega_0} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i^{n-i}\right)\partial_{\omega^{-1}\omega_0} = \mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

dır.

□

Bu durumda 2-kat Schubert polinomu,

$$\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_{\omega^{-1}\omega_0}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

$\mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_i = \mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_{n-i}^{y}$ dir. Ayrıca 2-kat Schubert polinomları braid-relation özelliklerini sağlar.

Teorem 2.68. ***(2-Kat Schubert İçin Monk Formülü)*** *$\omega \in S_n$, $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ olmak üzere,*

$$\left(x_r + y_{\omega(r)}\right) \mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{\substack{j>r \\ l\left(\omega t_{rj}\right)=l(\omega)+1}} \mathfrak{S}_{\omega t_{rj}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) - \sum_{\substack{j<r \\ l\left(\omega t_{rj}\right)=l(\omega)+1}} \mathfrak{S}_{\omega t_{rj}}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$$

dir (Kohnert ve Veigneau 1997).

İspat Kohnert ve Veigneau (1997), Önerme 4.1'e bakınız. □

Örnek 2.69. *$\omega = [1324]$ ve $r = 2$ olsun.*

$$\begin{aligned}
(x_2 + y_3) \mathfrak{S}_{[1324]}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= (x_2 + y_3)(x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \\
&= (x_2 + y_3)(x_1 + y_1 + x_2 + y_2) + (x_1 + y_1)(x_1 + y_2) \\
&\quad - (x_1 + y_1)(x_1 + y_2) \\
&= \mathfrak{S}_{[1423]}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) - \mathfrak{S}_{[3124]}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \\
&= \mathfrak{S}_{[1324]\circ t_{24}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) - \mathfrak{S}_{[1324]\circ t_{21}}(\mathbf{x}; \mathbf{y})
\end{aligned}$$

Örnek 2.70. *$\omega = [2134]$ ve $r = 3$ olsun.*

$$\begin{aligned}
(x_3 + y_3) \mathfrak{S}_{[2134]}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= (x_3 + y_3)(x_1 + y_1) \\
&= (x_1x_3 + x_3y_1 + x_1y_3 + y_1y_3) + (x_1x_2 + x_2y_1 + 2x_1y_1 \\
&\quad + y_1^2 + x_1^2 + x_1y_2 + y_1y_2) - (x_1x_2 + x_2y_1 + 2x_1y_1 + y_1^2 \\
&\quad + x_1^2 + x_1y_2 + y_1y_2) \\
&= \mathfrak{S}_{[2143]}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) - \mathfrak{S}_{[3124]}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) - \mathfrak{S}_{[2314]}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \\
&= \mathfrak{S}_{[2134]\circ t_{34}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) - \mathfrak{S}_{[2134]\circ t_{13}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) - \mathfrak{S}_{[2134]\circ t_{23}}(\mathbf{x}; \mathbf{y})
\end{aligned}$$

Önerme 2.71. *$\mathbf{x} := \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve $\mathbf{y} := \{y_1, \ldots, y_n\}$ değişkenler kümesi olsun. $\omega \in S_n$ için,*

$$\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{\substack{\omega=uv \\ l(\omega)=l(u)+l(v)}} \mathfrak{S}_u(\mathbf{0}; \mathbf{y}) \mathfrak{S}_v(\mathbf{x}; \mathbf{0})$$

dir (Macdonald 1991).

İspat $\mathbf{x} := \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathbf{y} := \{y_1, \ldots, y_n\}$ ve $\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyon olsun. $\omega \in S_n$ için Önerme 2.65'ten

$$\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{\substack{v=\sigma w \\ l(\omega)=l(v)+l(\sigma)}} \mathfrak{S}_v(\mathbf{x}) \mathfrak{S}_\sigma(\mathbf{y})$$

dir. Bu eşitliğe Önerme 2.67'deki özellikleri uyguladığımızda

$$\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \sum_{\substack{w=\sigma^{-1}v \\ l(\omega)=l(v)+l\left(\sigma^{-1}\right)}} \mathfrak{S}_{v}(\mathbf{x};\mathbf{0})\,\mathfrak{S}_{\sigma^{-1}}(\mathbf{0};\mathbf{y})$$

elde edilir. $\sigma^{-1} = u$ dersek,

$$\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \sum_{\substack{\omega=uv \\ l(\omega)=l(u)+l(v)}} \mathfrak{S}_{u}(\mathbf{0};\mathbf{y})\,\mathfrak{S}_{v}(\mathbf{x};\mathbf{0})$$

olur. □

Örnek 2.72. $\omega = [3142]$ *olsun.*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{[3142]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= x_1^2x_3 + x_1x_3y_1 + x_1x_3y_2 + x_3y_1y_2 + x_1^2y_2 + 2x_1y_1y_2 + x_1y_2^2 \\
&\quad + y_1y_2^2 + x_1^2x_2 + x_1x_2y_1 + x_1x_2y_2 + x_2y_1y_2 + x_1^2y_1 + x_1y_1^2 + y_1^2y_2 \\
&= \left(y_1y_2^2 + y_1^2y_2\right) + y_1y_2(x_1+x_2+x_3) + \left(y_1y_2 + y_1^2 + y_2^2\right)x_1 \\
&\quad + \left(x_1^2x_3 + x_1^2x_2\right) + (y_1+y_2)\left(x_1x_3 + x_1x_2 + x_1^2\right) \\
&= \mathfrak{S}_{[3142]}(\mathbf{0};\mathbf{y})\,\mathfrak{S}_{[1234]}(\mathbf{x};\mathbf{0}) + \mathfrak{S}_{[3124]}(\mathbf{0};\mathbf{y})\,\mathfrak{S}_{[1243]}(\mathbf{x};\mathbf{0}) \\
&\quad + \mathfrak{S}_{[1342]}(\mathbf{0};\mathbf{y})\,\mathfrak{S}_{[2134]}(\mathbf{x};\mathbf{0}) + \mathfrak{S}_{[1234]}(\mathbf{0};\mathbf{y})\,\mathfrak{S}_{[3142]}(\mathbf{x};\mathbf{0}) \\
&\quad + \mathfrak{S}_{[1324]}(\mathbf{0};\mathbf{y})\,\mathfrak{S}_{[2143]}(\mathbf{x};\mathbf{0})
\end{aligned}$$

Örnek 2.73. $\omega = [321]$ *olsun.*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= (x_1+y_1)(x_1+y_2)(x_2+y_1) \\
&= x_1^2x_2 + y_1x_1x_2 + y_2x_1x_2 + y_1y_2x_2 + y_1x_1^2 + y_1^2x_1 + y_1y_2x_1 + y_1^2y_2 \\
&= x_1^2x_2 + y_1x_1^2 + (y_1+y_2)x_1x_2 + y_1^2x_1 + y_1y_2(x_1+x_2) + y_1^2y_2 \\
&= \mathfrak{S}_{[123]}(\mathbf{0};\mathbf{y})\,\mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{x};\mathbf{0}) + \mathfrak{S}_{[213]}(\mathbf{0};\mathbf{y})\,\mathfrak{S}_{[312]}(\mathbf{x};\mathbf{0}) \\
&\quad + \mathfrak{S}_{[132]}(\mathbf{0};\mathbf{y})\,\mathfrak{S}_{[231]}(\mathbf{x};\mathbf{0}) + \mathfrak{S}_{[312]}(\mathbf{0};\mathbf{y})\,\mathfrak{S}_{[213]}(\mathbf{x};\mathbf{0}) \\
&\quad + \mathfrak{S}_{[231]}(\mathbf{0};\mathbf{y})\,\mathfrak{S}_{[132]}(\mathbf{x};\mathbf{0}) + \mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{0};\mathbf{y})\,\mathfrak{S}_{[123]}(\mathbf{x};\mathbf{0})
\end{aligned}$$

Teorem 2.74. ***(2-Kat Schubert için Permütasyon Türünden Newton Interpolation Formülü)*** *Her $f \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ için,*

$$f = \sum_{\omega\in S_n} f(\mathbf{y})\,\partial_{\omega}^{\mathbf{y}}\mathfrak{S}_{\omega}(\mathbf{x};-\mathbf{y})$$

dir (Kirillov ve Maeno 1996).

İspat İspatı için Macdonald (1991)'a bakınız. $\square$

Örnek 2.75. *$f = x_1^2 + x_1 x_2$ olsun.*

$$\begin{aligned} f &= f(\mathbf{y})\,\partial^{\mathbf{y}}_{[312]}\mathfrak{S}_{[312]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + f(\mathbf{y})\,\partial^{\mathbf{y}}_{[213]}\mathfrak{S}_{[213]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) \\ &\quad + f(\mathbf{y})\,\partial^{\mathbf{y}}_{[123]}\mathfrak{S}_{[123]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + f(\mathbf{y})\,\partial^{\mathbf{y}}_{[231]}\mathfrak{S}_{[231]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) \\ &\quad + f(\mathbf{y})\,\partial^{\mathbf{y}}_{[132]}\mathfrak{S}_{[132]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) \\ &= \mathfrak{S}_{[312]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + (y_1+y_2)\,\mathfrak{S}_{[213]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + \left(y_1^2 + y_1 y_2\right)\mathfrak{S}_{[123]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) \\ &\quad + \mathfrak{S}_{[231]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + y_1\mathfrak{S}_{[132]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Teorem 2.76. *$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ olmak üzere $\{\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y})\}_{\omega \in S_n}$ kümesi $\mathbb{Z}[\mathbf{x};\mathbf{y}] \diagup I_n$ uzayının bir $\mathbb{Z}[\mathbf{y}]$-tabanıdır. Burada $I_n = \langle e_1(\mathbf{x}), \ldots, e_n(\mathbf{x})\rangle$ sabitten farklı elementer simetrik fonksiyonların ürettiği idealdir (Lam ve Shimozona 2013).*

İspat İspatı için Lam ve Shimozona (2013)'e bakınız. $\square$

Teorem 2.77. ***(Permütasyonun Baskın 2-kat Schubert Polinomu)*** *$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve $\mathbf{y} := \{y_1, \ldots, y_n\}$ değişkenler olsun. $\omega \in S_n$ permütasyonunun kodu λ baskın ($\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$) ise,*

$$\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y}) := \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq \lambda_i}} (x_i + y_j)$$

dır (Macdonald 1991).

İspat İspatı için Macdonald (1991)'a bakınız. $\square$

Örnek 2.78. *$\omega = [53214]$ olsun.$\lambda = [4,2,1,0,0]$ dır. λ baskın parçalanış olduğundan ω'nın 2-kat Schubert polinomu aşağıdaki gibidir.*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{[53214]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \prod_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq j \leq \lambda_i}} (x_i + y_j) \\ &= (x_1+y_1)(x_1+y_2)(x_1+y_3)(x_1+y_4)(x_1+y_5)(x_2+y_1) \\ &\quad (x_2+y_2)(x_3+y_1) \end{aligned}$$

Tanım 2.79. ***(Kodun Baskın 2-Kat Schubert Polinomu)*** $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *ve* $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ *değişkenler kümesi ve* $\lambda \in \mathbb{N}^n$ *bir baskın parçalanış (*$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$*) olsun.*

$$Y_\lambda(\mathbf{x};\mathbf{y}) := \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq \lambda_i}} (x_i + y_j)$$

polinomuna λ *kodunun baskın 2-kat Schubert polinomu denir. 2-kat Schubert polinomları,* ∂_i*'lerin çarpımı altındaki baskın 2-kat Schubert polinomlarının sıfır olmayan görüntüleri olarak tanımlanır (Lascoux 2013).*

Verilen bir $\omega \in S_n$ permütasyonunun kodu $\lambda = [\lambda_1, \ldots \lambda_n]$ olsun. ω permütasyonuna $s_i \in S_n$ etki ettiğinde bunun λ koduna etkisi $\lambda' = [\lambda_1, \ldots, \lambda_{i+1}, \lambda_i - 1, \ldots, \lambda_n]$ şeklindedir. Bu durumda $Y_\lambda(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_i = Y_{\ldots,\lambda_{i+1},\lambda_i-1,\ldots}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ dir.

$Y_k(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_k^{\mathbf{y}} = Y_{k-1}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ ve $i \neq k$ için $Y_k(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_i^{\mathbf{y}} = 0$ dır.

Örnek 2.80. $\lambda = [5,3,2]$ *ve* $\mu = [3,4,2]$ *kodlarının Schubert polinomlarını hesaplayalım.*

$$\begin{aligned} Y_{[5,3,2]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= (x_1+y_1)(x_1+y_2)(x_1+y_3)(x_1+y_4)(x_1+y_5)(x_2+y_1)(x_2+y_2) \\ &\quad (x_2+y_3)(x_3+y_1)(x_3+y_2) \\ Y_{[3,4,2]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= (x_1+y_1)(x_1+y_2)(x_1+y_3)(x_2+y_1)(x_2+y_2)(x_2+y_3)(x_3+y_1) \\ &\quad (x_3+y_2)(x_1+x_2+y_4+y_5) \end{aligned}$$

Teorem 2.81. ***(2-Kat Schubert İçin Kod Türünden Newton İnterpolasyon Formülü)*** $\sigma(v)$*, verilen bir* v *koduna karşılık gelen permütasyon olmak üzere, her* $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ *için,*

$$f = \sum_{v \in \mathbb{N}^n} f(\mathbf{y})\,\partial_{\sigma(v)}^{\mathbf{y}} Y_v(\mathbf{x};-\mathbf{y})$$

dir (Lascoux 2013).

İspat İspatı için Lascoux (2013)'a bakınız. □

Örnek 2.82. $f = x_2x_3 + x_2^2$ *olsun.*

$$\begin{aligned} f &= f(\mathbf{y})\,\partial_{\sigma([1,0,1,0])}^{\mathbf{y}} Y_{[1,0,1,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + f(\mathbf{y})\,\partial_{\sigma([0,1,1,0])}^{\mathbf{y}} Y_{[0,1,1,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) \\ &\quad + f(\mathbf{y})\,\partial_{\sigma([0,0,1,0])}^{\mathbf{y}} Y_{[0,0,1,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + f(\mathbf{y})\,\partial_{\sigma([1,0,0,0])}^{\mathbf{y}} Y_{[1,0,0,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) \\ &\quad + f(\mathbf{y})\,\partial_{\sigma([0,0,0,0])}^{\mathbf{y}} Y_{[0,0,0,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + f(\mathbf{y})\,\partial_{\sigma([1,1,0,0])}^{\mathbf{y}} Y_{[1,1,0,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) \\ &\quad + f(\mathbf{y})\,\partial_{\sigma([0,2,0,0])}^{\mathbf{y}} Y_{[0,2,0,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + f(\mathbf{y})\,\partial_{\sigma([0,1,0,0])}^{\mathbf{y}} Y_{[0,1,0,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -Y_{[1,0,1,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + Y_{[0,1,1,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + y_2 Y_{[0,0,1,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) \\ &\quad -(y_1+y_2+y_3)\, Y_{[1,0,0,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + \left(y_2y_3 + y_2^2\right) Y_{[0,0,0,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) \\ &\quad -Y_{[1,1,0,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + Y_{[0,2,0,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) + (y_2+y_3)\, Y_{[0,1,0,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Newton İnterpolasyon formülünde f yerine 2-kat Schubert polinomlarını koyduğumuzda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.83. *$\omega \in S_n$ permütasyonunun kodu w olsun. Bu durumda,*

$$Y_w(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \sum_{\omega=\sigma(u)\sigma(v)} Y_u(\mathbf{z};\mathbf{y})\, Y_v(\mathbf{x};-\mathbf{z})$$

dir (Lascoux 2013).

İspat İspatı için Lascoux (2013)'a bakınız. □

Örnek 2.84. *$\omega = [3142]$ olsun. ω'nın kodu $w = [2,0,1,0]$ dır.*

$$\begin{aligned} Y_{[2,0,1,0]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= Y_{[2,0,1,0]}(\mathbf{z};\mathbf{y})\, Y_{[0,0,0,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{z}) + Y_{[2,0,0,0]}(\mathbf{z};\mathbf{y})\, Y_{[0,0,1,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{z}) \\ &\quad + Y_{[0,1,1,0]}(\mathbf{z};\mathbf{y})\, Y_{[1,0,0,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{z}) + Y_{[0,0,0,0]}(\mathbf{z};\mathbf{y})\, Y_{[2,0,1,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{z}) \\ &\quad + Y_{[0,1,0,0]}(\mathbf{z};\mathbf{y})\, Y_{[1,0,1,0]}(\mathbf{x};-\mathbf{z}) \end{aligned}$$

Tanım 2.85. *$\mathbf{x} = \{x_1,\ldots,x_n\}$, $\mathbf{y} = \{y_1,\ldots,y_n\}$ ve $\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyon olmak üzere bir $\omega \in S_n$ permütasyonunun 2-kat Grothendieck polinomu*

$$\mathfrak{G}_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y}) := \left(\prod_{i+j\le n}\left(1+\frac{y_j}{x_i}\right)\right)\pi_{\omega^{-1}\omega_0}$$

şeklinde tanımlıdır (Kirillov 1996).

Örnek 2.86. *$\omega \in S_3$ permütasyonları için 2-kat Grothendieck polinomları aşağıdaki gibidir.*

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{[321]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)\left(1+\frac{y_2}{x_1}\right)\left(1+\frac{y_1}{x_2}\right) \\ \mathfrak{G}_{[312]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)\left(1+\frac{y_2}{x_1}\right) \\ \mathfrak{G}_{[231]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)\left(1+\frac{y_1}{x_2}\right) \\ \mathfrak{G}_{[213]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= 1+\frac{y_1}{x_1} \\ \mathfrak{G}_{[132]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= 1-\frac{y_1y_2}{x_1x_2} \\ \mathfrak{G}_{[123]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= 1 \end{aligned}$$

Önerme 2.87. $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ *ve* $\omega_0 \in S_n$ *maksimum permütasyon olmak üzere aşağıdakiler sağlanır (Lascoux 2013).*

(1) $\mathfrak{G}_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \prod_{i+j\leq n}\left(1+\frac{y_j}{x_i}\right)$

(2) $\mathfrak{G}_{\omega}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \mathfrak{G}_{\omega^{-1}}\left(\frac{1}{\mathbf{y}};\frac{1}{\mathbf{x}}\right)$

İspat *(1)* 2-kat Grothendieck polinomunun tanımını kullanalım.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \left(\prod_{i+j\leq n}\left(1+\frac{y_j}{x_i}\right)\right)\pi_{\omega_0^{-1}\omega_0} = \left(\prod_{i+j\leq n}\left(1+\frac{y_j}{x_i}\right)\right)\pi_{\mathrm{i}} \\
&= \prod_{i+j\leq n}\left(1+\frac{y_j}{x_i}\right)
\end{aligned}$$

(2) İspatı için Lascoux (2013)'a bakınız.

□

Tanım 2.88. ***(Baskın 2-Kat Grothendieck ve Baskın Key Polinomları)***

$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *ve* $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ *değişkenler kümesi ve* $\lambda \in \mathbb{N}^n$ *bir baskın parçalanış (*$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$*) olsun.*

$$G_\lambda(\mathbf{x};\mathbf{y}) := \prod_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq\lambda_i}}\left(1+\frac{y_j}{x_i}\right)$$

polinomuna λ *kodunun baskın 2-kat Grothendieck polinomu ve*

$$K_\lambda(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^{n}\mathbf{x}^{\lambda_i}$$

polinomuna λ *kodunun baskın Key polinomu denir (Lascoux 2013).*

λ'nın baskın olmadığı genel $G_\lambda(\mathbf{x};\mathbf{y})$ ve $K_\lambda(\mathbf{x})$'nin hesaplanabilmesi için bir tane baskın parçalanışa ihtiyaç vardır. $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$ operatörleri yardımı ile bu genel $G_\lambda(\mathbf{x};\mathbf{y})$ ve $K_\lambda(\mathbf{x})$ hesaplanabilir.

Örnek 2.89. $\lambda = [3,1,1]$ *parçalanışının 2-kat Grothendieck ve Key polinomları aşağıdaki gibidir.*

$$\begin{aligned}
G_{[3,1,1]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)\left(1+\frac{y_2}{x_1}\right)\left(1+\frac{y_3}{x_1}\right)\left(1+\frac{y_1}{x_2}\right)\left(1+\frac{y_1}{x_3}\right) \\
K_{[3,1,1]}(\mathbf{x}) &= x_1^3x_2x_3
\end{aligned}$$

Bir $\omega \in S_n$ permütasyonunun kodu $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ baskın değil ise uygun $s_{i_r} \in S_n$ ler için $\omega' s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k} = \omega$ olacak şekilde baskın kodu λ' olan bir ω' permütasyonu aranır. Bu durumda λ parçalanışının 2-kat Grothendieck polinomu ve Key polinomu aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} G_\lambda(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= G_{\lambda'}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\pi_{i_1}\cdots\pi_{i_k} \\ K_\lambda(\mathbf{x}) &= K_{\lambda'}(\mathbf{x})\,\pi_{i_1}\cdots\pi_{i_k} \end{aligned}$$

Örnek 2.90. $\lambda = [1, 0, 1]$ *olsun. Bu durumda* λ*'nın 2-kat Grothendieck ve Key polinomları aşağıdaki gibidir.*

$$\begin{aligned} G_{[1,0,1]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= G_{[3,1,0]}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\pi_1\pi_2 = \frac{(x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3)(x_1 + y_1)}{x_1^2x_2x_3} \\ K_{[1,0,1]}(\mathbf{x}) &= K_{[1,1,0]}(\mathbf{x})\,\pi_2 = x_1(x_2 + x_3) \end{aligned}$$

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Rasyonel Schubert, Rasyonel Grothendieck ve Rasyonel Key Polinomları

Bu bölümde, Aker ve Tutaş (2015) makalesinde tanıtılan rasyonel Schubert, rasyonel Grothendieck ve rasyonel Key polinomlarının tanımları ve sağladıkları özellikler hakkında bilgiler verilecektir. Önerme 3.93, Önerme 3.94, Önerme 3.98, Sonuç 3.99, Önerme 3.102 ve Önerme 3.104'ün ispatları için makaleye bakılabilir. Bahsedilen kavramlar hakkında daha ayrıntılı bilgi için aynı makaleye bakılması önerilir.

Bu bölüm için aşağıdaki gösterim ve özellikleri kullanalım.

- ω_0 : maksimum permütasyon
- $\mathbf{x}^{\omega_0}$: $\mathbf{x}$ kelimesinin tersten sıralanışı
- $u = [u_1, \ldots, u_n] \in \mathbb{N}^n$ ise $u^{\omega_0} = [u_n, \ldots, u_1]$ dir.
- $u \in \mathbb{N}$ için $u^n = \underbrace{[u, u, \ldots, u]}_{\text{n-defa}}$ ve $\mathbf{1} = \{1, 1, \ldots\}$ dir.
- $u \in \mathbb{N}^n$ ise $\overline{u} := [u_1 - u_n, \ldots, u_1 - u_1] = u_1^n - u^{\omega_0}$ dır.
- $v = [v_1, \ldots, v_k, \overline{v}_{k+1}, \ldots, \overline{v}_n]$ ise burada $\overline{v}_i := -v_i$ dir.
- A ve B iki alfabe kümesi olmak üzere $R\left(A \mid B\right) = \prod\limits_{\substack{a\in A \\ b\in B}} (a + b)$ dir.

3.1.1. Rasyonel Schubert Polinomları

Tanım 3.91. *$u \in \mathbb{N}^n$ kesin baskın parçalanış olsun. u ile indislenmiş kesin rasyonel Schubert polinomu aşağıdaki şekilde tanımlıdır.*

$$Y_u^{rat}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right) := \prod \frac{1}{R\left(y_{n+1}, \ldots, y_{n+v_i} \mid x_i\right)} \prod R\left(x_j \mid y_n, \ldots, y_{n+v_j+1}\right)$$

Burada, $v = u - (n-1)^n$, $v_i \geq 0$ ve $v_j < 0$ dır.

u'nun kesin baskın olmadığı genel bir $Y_u^{rat}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)$'nin hesaplanabilmesi için bir tane kesin baskın parçalanışa ihtiyaç vardır. $\partial_1, \ldots, \partial_{n-1}$ operatörleri yardımı ile bu genel $Y_u^{rat}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)$ hesaplanabilir.

Örnek 3.92. *$u = [5,3,1,0]$ olsun. $v = [5,3,1,0] - [3,3,3,3] = \left[2,0,\overline{2},\overline{3}\right]$ olur. Bu durumda,*

$$Y^{rat}_{[5,3,1,0]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \frac{(x_3+y_3)(x_3+y_4)(x_4+y_2)(x_4+y_3)(x_4+y_4)}{(x_1+y_5)(x_1+y_6)}$$

dır. Bunu Young diagramıyla ifade edelim.

$$\begin{array}{cc|c|c|c||c|c|}
x_4 & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
\cline{3-3}
x_3 & & x_3+y_2 & \bullet & \bullet & & \\
\cline{3-5}
x_2 & & x_2+y_2 & x_2+y_3 & x_2+y_4 & & \\
\cline{3-7}
x_1 & & x_1+y_2 & x_1+y_3 & x_1+y_4 & \boxed{x_1+y_5} & \boxed{x_1+y_6} \\
\cline{3-7}
& y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6
\end{array}$$

Önerme 3.93. *$u \in \mathbb{N}^n$ kesin baskın parçalanış olsun. $\overline{u} = u_1^n - u^{\omega_0}$ ve $N = u_1 + 1$ olmak üzere,*

$$Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \frac{Y_{\overline{u}}(x_n,\ldots,x_1;y_N,\ldots,y_1)}{R(x_1,\ldots,x_n \mid y_N,\ldots,y_{n+1})}$$

dir.

Önerme 3.94. *$u \in \mathbb{N}^n$ kesin baskın parçalanış, $\overline{u} = u_1^n - u^{\omega_0}$, $N = u_1 + 1$, $c\overline{u}$: u'nun konjugesi ve $\sigma = u + \mathbf{1}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*

(a) $Y_\sigma(\mathbf{x};\mathbf{y})\, Y_{\overline{u}}(x_n,\ldots,x_1;y_N,\ldots,y_1) = Y_{N^n}(\mathbf{x};\mathbf{y})$

(b) $Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \frac{Y_{\overline{u}}(x_n,\ldots,x_1;y_N,\ldots,y_1)}{Y_{(N-n)^n}(x_1,\ldots,x_n;y_N,\ldots,y_{n+1})}$

(c) $Y_\sigma(\mathbf{x};\mathbf{y})\, Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\, R(\mathbf{x} \mid y_N,\ldots,y_{n+1}) = Y_{N^n}(\mathbf{x};\mathbf{y})$

(d) $Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \frac{Y_{c\overline{u}}(y_N,\ldots,y_1;x_n,\ldots,x_1)}{Y_{n^{N-n}}(y_N,\ldots,y_1;x_n,\ldots,x_1)}$

(e) $Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \frac{Y_{[-v_n,\ldots,-v_{k+1}]}(\mathbf{x}^{\omega_0};\mathbf{y}^{\omega_0})}{Y_{[v_1,\ldots,v_k]}(\mathbf{x};y_{n+1},\ldots,y_N)}$

Tanım 3.95. *$\mathbf{z} = \{z_1,\ldots,z_n\}$ ve $\mathbf{x} = \{x_1,\ldots,x_n\}$ olmak üzere Cauchy çekirdeği*

$$K_n(\mathbf{z};\mathbf{x}) := \frac{1}{\prod\limits_{i+j\le n+1}(z_j + x_i)}$$

olarak tanımlanır.

Diğer bir deyişle,

$$K_n(\mathbf{z};\mathbf{x}) = \frac{1}{Y_{[n,n-1,\ldots,1]}(\mathbf{z};\mathbf{x})}$$

dir. Kolayca hesaplanabilir ki

$$K_n(\mathbf{z};\mathbf{x})\,\partial_i^{\mathbf{z}} = -K_n(\mathbf{z};\mathbf{x})\,(z_{i+1}+x_{n+1-i})^{-1}$$

dir. $\mathbf{x} := \{x_1,\ldots,x_n\}$ ve $m > n$ tam sayısı için,

$$R(\mathbf{z}\mid\mathbf{x}) := \prod_{\substack{j=1,\ldots,m\\ i=1,\ldots,n}} (z_j + x_i)$$

dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
K_n(\mathbf{z};\mathbf{x})\,R(\mathbf{z}\mid\mathbf{x}) &= Y_{[n,n-1,\ldots,1]}(\mathbf{z};\mathbf{x})^{-1}\,Y_{n^m}(\mathbf{z};\mathbf{x})\\
&= Y_{[m-1,m-2,\ldots,m-n]}(x_n,\ldots,x_1;z_m,\ldots,z_1)\\
&= Y_{[n^{m-n},n-1,\ldots,2,1]}(z_m,\ldots,z_1;x_n,\ldots,x_1)
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 3.96. $n = 3$ *ve* $m = 5$ *olsun.*

$$K_3(\mathbf{z};\mathbf{x}) = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-1} \circ & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} \circ & \circ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \circ & \circ & \circ \\ \hline \end{array}\right)^{-1}$$

$$K_3(\mathbf{z};\mathbf{x})\,R(\mathbf{z}\mid\mathbf{x}) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \circ & \circ & \circ \\ \hline \circ & \circ & \circ \\ \hline * & \circ & \circ \\ \hline * & * & \circ \\ \hline * & * & * \\ \hline \end{array}$$

Simetriden dolayı $R(y_1,\ldots,y_n \mid x_{n+1},\ldots,x_m) = R(x_{n+1},\ldots,x_m \mid y_1,\ldots,y_n)$ dir. Önerme 3.94'ün (b) şıkkındaki durumdan, u baskın ise

$$\frac{Y_{\overline{u}}(\mathbf{x}^{\omega_0};\mathbf{y}^{\omega_0})}{R(x_1,\ldots,x_n \mid y_N,\ldots,y1)} = Y_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$$

dir. Bu durumda,

$$Y_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_{i_1} = \frac{Y_{\overline{u}}(\mathbf{x}^{\omega_0};\mathbf{y}^{\omega_0})\,\partial_{n-i_1}}{R(x_1,\ldots,x_n \mid y_N,\ldots,y_1)}$$

olur.

Örnek 3.97. *$u = [3,1,0]$ olsun. Bu durumda $\overline{u} = [3,2,0]$ olur.*
$Y^{rat}_{[3,1,0]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \frac{Y_{[3,2,0]}(x_3,x_2,x_1;y_4,y_3,y_2)}{R(x_1,x_2,x_3|y_4,y_3,y_2,y_1)}$ dir. Bunu kısaca $Y^{rat}_{[3,1,0]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \frac{Y_{[3,2,0]}}{R}$ olarak gösterelim.

.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & Y^{rat}_{[3,1,0]} & \\
\diagup & & \diagdown \\
Y^{rat}_{[1,2,0]} & & Y^{rat}_{[3,0,0]} \\
| & & | \\
Y^{rat}_{[1,0,1]} & & Y^{rat}_{[0,2,0]} \\
\diagdown & & \diagup \\
 & Y^{rat}_{[0,0,1]} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & Y_{[3,2,0]} & \\
\diagup & & \diagdown \\
Y_{[3,0,1]} & & Y_{[2,2,0]} \\
| & & | \\
Y_{[0,2,1]} & & Y_{[2,0,1]} \\
\diagdown & & \diagup \\
 & Y_{[0,1,1]} &
\end{array}
$$

şeklinde iki diagram oluşturalım. Bu durumda,

$$Y^{rat}_{[1,2,0]} = \frac{Y_{[3,0,1]}}{R}, Y^{rat}_{[1,0,1]} = \frac{Y_{[0,2,1]}}{R}, Y^{rat}_{[3,0,0]} = \frac{Y_{[2,2,0]}}{R}, Y^{rat}_{[0,2,0]} = \frac{Y_{[2,0,1]}}{R}, Y^{rat}_{[0,0,1]} = \frac{Y_{[0,1,1]}}{R}$$

dir.

Önerme 3.98. *Aşağıdakiler ifadeler sağlanır.*

(a) $K_n(\mathbf{y};\mathbf{x}) = \frac{Y^{rat}_{[m-1,n-2,n-3,\ldots,1,0]}(\mathbf{x};\mathbf{y})Y_{(m-n)}(\mathbf{x};y_{n+1},\ldots,y_m)}{Y_{n^n}(\mathbf{y};\mathbf{x})}$

(b) $K_n(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \frac{Y^{rat}_{\lambda}(\mathbf{x};\mathbf{y})}{Y_{n^n}(\mathbf{x};\mathbf{y})}$, $\lambda = [n-1,\ldots,1,0]$

Sonuç 3.99. *ω_0 maksimum permütasyon olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.*

(1) $K_n(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_{\omega_0} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod\limits_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} (x_i+y_j)^{-1}$

(2) $K_n(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_{\omega_0} R(\mathbf{x}\mid\mathbf{y}) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod\limits_{\substack{i=n+1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} (x_i+y_j)$

3.1.2. Rasyonel Grothendieck ve Rasyonel Key Polinomları

Tanım 3.100. *$u \in \mathbb{N}^n$ kesin baskın parçalanış olsun.$v = u - (n-1)^n$ olmak üzere u ile indislenen rasyonel Grothendieck ve Key polinomları sırasıyla aşağıdaki şekilde* *tanımlanır.*

$$\begin{aligned}
G_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &:= \prod_{v_i\geq 0}\frac{1}{R\left(\frac{y_{n+1}}{x_i},\ldots,\frac{y_{n+v_i}}{x_i}\mid 1\right)}\prod_{v_j<0}R\left(1\mid \frac{y_n}{x_j},\ldots,\frac{y_{n+v_j+1}}{x_j}\right)\\
K_u^{rat}(\mathbf{x}) &:= \prod_{v_i\geq 0}\frac{1}{R(0,\ldots,0\mid x_i)}\prod_{v_j<0}R(x_j\mid 0,\ldots,0)
\end{aligned}$$

Örnek 3.101. $u=[5,3,1,0]$ *olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned}
K_{[5,3,1,0]}^{rat}(\mathbf{x}) &= \frac{x_3^2x_4^3}{x_1^2}\\
G_{[5,3,1,0]}^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \frac{\left(1+\frac{y_3}{x_3}\right)\left(1+\frac{y_4}{x_3}\right)\left(1+\frac{y_2}{x_4}\right)\left(1+\frac{y_3}{x_4}\right)\left(1+\frac{y_4}{x_4}\right)}{\left(1+\frac{y_5}{x_1}\right)\left(1+\frac{y_6}{x_1}\right)}
\end{aligned}$$

dır.

Önerme 3.102. $u\in\mathbb{N}^n$ *kesin baskın parçalanış olsun.* $\overline{u}=u_1^n-u^{\omega_0}$ *ve* $N=u_1+1$ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned}
G_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \frac{G_{\overline{u}}(x_1,\ldots,x_n;y_N,\ldots,y_1)}{\prod\limits_{i=1,\ldots,n}R\left(1\mid\frac{y_N}{x_i},\ldots,\frac{y_{n+1}}{x_i}\right)}\\
K_u^{rat}(\mathbf{x}) &= \frac{K_{\overline{u}}(x_n,\ldots,x_1)}{(x_1,\ldots,x_n)^{N-n}}
\end{aligned}$$

dir.

Örnek 3.103.

$$\begin{aligned}
G_{[5,3,1,0]}^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \frac{x_3^{-2}x_4^{-3}}{x_1^{-2}}\frac{(x_3+y_3)(x_3+y_4)(x_4+y_2)(x_4+y_3)(x_4+y_4)}{(x_1+y_5)(x_1+y_6)}\\
&= \frac{Y_{[5,3,1,0]}^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})}{K_{[5,3,1,0]}^{rat}(\mathbf{x})}
\end{aligned}$$

NOT:

$$G_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\pi_i^{\mathbf{x}}=\left(\frac{G_{\overline{u}}(x_1,\ldots,x_n;y_N,\ldots,y_1)}{\prod\limits_{i=1,\ldots,n}R\left(1\mid\frac{y_N}{x_i},\ldots,\frac{y_{n+1}}{x_i}\right)}\right)\pi_{n+1-i}^{\mathbf{x}}$$

dir.

Önerme 3.104. $u\in\mathbb{N}^n$ *kesin baskın parçalanış olsun. Aşağıdakiler ifadeler doğrudur.*

(1) $Y_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\mid_{\mathbf{y}=\mathbf{0}}=K_u(\mathbf{x})$ ve $Y_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})\mid_{\mathbf{y}=\mathbf{0}}=K_u^{rat}(\mathbf{x})$

(2) $G_u(\mathbf{x};\mathbf{y})=\frac{Y_u(\mathbf{x};\mathbf{y})}{K_u(\mathbf{x})}$ ve $G_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})=\frac{Y_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})}{K_u^{rat}(\mathbf{x})}$

3.2. Quantum Schubert Polinomları

Bu bölümde quantum elementer fonksiyonları, quantum Schubert polinomları, quantum 2-kat Schubert polinomları tanıtılacak ve sağladıkları birtakım özelliklerden bahsedilecektir.

Tanım 3.105.

$$M_n = \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x_2 & q_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere, $\det(\lambda M_n + \mathbf{I}) = \sum_{i=0}^{n} E_i^n \lambda^i$ *karakteristik polinomunun* E_i^n, $i = 0, 1, \ldots, n$ *katsayılarına quantum elementer fonksiyonlar denir.* $0 \leq i \leq k$ *olmadıkça* $E_i^k = 0$ *dır (Fomin, Gelfand ve Postnikov 1997).*

Örnek 3.106. $n = 2$ *için* E_0^2, E_1^2 *ve* E_2^2 *quantum elementer fonksiyonlarını bulalım.*

$$\begin{aligned} \det(\lambda M_2 + \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} \lambda x_1 + 1 & \lambda q_1 \\ -\lambda & \lambda x_2 + 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 (x_1 x_2 + q_1) + \lambda (x_1 + x_2) + 1 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$E_0^2 = 1 \ , \ E_1^2 = x_1 + x_2 \ , \ E_2^2 = x_1 x_2 + q_1$$

dir.

Örnek 3.107. $n = 3$ *için* E_0^3, E_1^3, E_2^3 *ve* E_3^3 *quantum elementer fonksiyonlarını bulalım.*

$$\begin{aligned} \det(\lambda M_3 + \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} \lambda x_1 + 1 & \lambda q_1 & 0 \\ -\lambda & \lambda x_2 + 1 & \lambda q_2 \\ 0 & -\lambda & \lambda x_3 + 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 (x_1 x_2 x_3 + x_1 q_2 + x_3 q_1) + \lambda^2 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + q_2 + q_1) \\ &\quad + \lambda (x_1 + x_2 + x_3) + 1 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} E_0^3 &= 1 &, \quad E_1^3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ E_2^3 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + q_2 + q_1 &, \quad E_3^3 &= x_1x_2x_3 + x_1q_2 + x_3q_1 \end{aligned}$$

dir.

Önerme 3.108. $1 \leq i \leq k$ *ve* $q_0 = 0$ *olmak üzere aşağıdaki recurrence bağıntısı vardır (Fomin, Gelfand ve Postnikov 1997).*

$$E_i^k = E_i^{k-1} + x_k E_{i-1}^{k-1} + q_{k-1} E_{i-2}^{k-2}$$

Önerme 3.108'in ispatı Önerme 4.125'ten sonra verilecektir. Aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.109. *Önerme 3.108'de ifade edilen recurrence bağıntısında* $i = k$ *alınırsa,* E_k^k*'daki monomiallerin sayısı* k*-ıncı Fibonacci sayısına eşittir.*

Önerme 3.110. $k \geq j \geq 0$ *ve* $k \geq i \geq 0$ *için,*

$$E_i^k E_{j+1}^{k+1} + E_{i+1}^k E_j^k + q_k E_{i-1}^{k-1} E_j^k = E_j^k E_{i+1}^{k+1} + E_{j+1}^k E_i^k + q_k E_{j-1}^{k-1} E_i^k$$

dır (Fomin, Gelfand ve Postnikov 1997).

İspat 3.108'den yararlanalım.

$$E_i^k \left(E_{j+1}^{k+1} - E_{j+1}^k \right) = E_i^k \left(x_{k+1} E_j^k + q_k E_{j-1}^{k-1} \right)$$

ve

$$E_j^k \left(E_{i+1}^{k+1} - E_{i+1}^k \right) = E_j^k \left(x_{k+1} E_i^k + q_k E_{i-1}^{k-1} \right)$$

denklemlerinde birinci denklemden ikinci denklem taraf tarafa çıkartılıp düzenlendiğinde önermedeki istenen eşitlik elde edilir. □

Tanım 3.111. *Herhangi* $J = [j_1, \ldots, j_m]$ *ve* $0 \leq j_m \leq m$ *için,*

$$e_J(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^{m} e_{j_i}(x_1, \ldots, x_i) = e_{j_1}^1 \cdots e_{j_m}^m$$

ve

$$E_J(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^{n} E_{j_i}(x_1, \ldots, x_i) = E_{j_1}^1 \cdots E_{j_m}^m$$

olarak tanımlanır (Fontanine ve Fulton 1996).

$e_{[i_1,\ldots,i_m]}$'lere standart elementer monomialler diyelim.

Tanım 3.112. ***(Quantum Schubert Polinomu)*** *$\omega \in S_n$ permütasyonu verilsin. Uygun $a_J \in \mathbb{Z}$' ler için $\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x}) = \sum a_J e_J(\mathbf{x})$ ise,*

$$\mathfrak{S}^q_\omega(\mathbf{x}) := \sum a_J E_J(\mathbf{x})$$

polinomuna ω'nın quantum Schubert polinomu denir (Fontanine ve Fulton 1996).

Örnek 3.113. *$\omega \in S_3$ permütasyonlarının quantum Schubert polinomlarını yazalım.*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}^q_{[321]}(\mathbf{x}) &= E_{[1,2]}(\mathbf{x}) = x_1^2x_2 + x_1q_1 \\
\mathfrak{S}^q_{[312]}(\mathbf{x}) &= E_{[1,1]}(\mathbf{x}) - E_{[0,2]}(\mathbf{x}) = x_1^2 - q_1 \\
\mathfrak{S}^q_{[231]}(\mathbf{x}) &= E_{[0,2]}(\mathbf{x}) = x_1x_2 + q_1 \\
\mathfrak{S}^q_{[213]}(\mathbf{x}) &= E_{[1,0]}(\mathbf{x}) = x_1 \\
\mathfrak{S}^q_{[132]}(\mathbf{x}) &= E_{[0,1]}(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \\
\mathfrak{S}^q_{[123]}(\mathbf{x}) &= 1
\end{aligned}$$

Teorem 3.114. ***(Quantum Schubert İçin Monk Formülü)***
$\omega \in S_n$, $\mathfrak{S}^q_{s_r}(\mathbf{x}) := (x_1 + \cdots + x_r)$ ve $c < d$ için $q_{cd} := q_c q_{c+1} \cdots q_{d-1}$ olmak üzere,

$$\mathfrak{S}^q_{s_r}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}^q_\omega(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{a \le r < b \\ l(\omega t_{ab}) = l(\omega)+1}} \mathfrak{S}^q_{\omega t_{ab}}(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{c \le r < d \\ l(\omega t_{cd}) = l(\omega) - l(t_{cd})}} q_{cd}\mathfrak{S}^q_{\omega t_{cd}}(\mathbf{x})$$

dir (Fomin, Gelfand ve Postnikov 1997).

İspat İspatı için Fomin, Gelfand ve Postnikov (1997)'a bakınız. □

Örnek 3.115. *$\omega = [41325]$ ve $r = 3$ olsun.*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}^q_{s_3}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}^q_{[41325]}(\mathbf{x}) &= (x_1 + x_2 + x_3)\,\mathfrak{S}^q_{[41325]}(\mathbf{x}) \\
&= \mathfrak{S}^q_{[41523]}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}^q_{[42315]}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}^q_{[51324]}(\mathbf{x}) \\
&\quad + q_3\mathfrak{S}^q_{[41235]}(\mathbf{x}) \\
&= \mathfrak{S}^q_{[41325]\circ t_{35}}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}^q_{[41325]\circ t_{24}}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}^q_{[41325]\circ t_{15}}(\mathbf{x}) \\
&\quad + q_3\mathfrak{S}^q_{[41325]\circ t_{34}}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Örnek 3.116. $\omega = [24135]$ *ve* $r = 2$ *olsun.*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}^q_{s_2}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}^q_{[24135]}(\mathbf{x}) &= (x_1 + x_2)\,\mathfrak{S}^q_{[24135]}(\mathbf{x}) \\
&= \mathfrak{S}^q_{[25134]}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}^q_{[34125]}(\mathbf{x}) + q_2\mathfrak{S}^q_{[21435]}(\mathbf{x}) \\
&= \mathfrak{S}^q_{[25134]\circ t_{25}}(\mathbf{x}) + \mathfrak{S}^q_{[34125]\circ t_{14}}(\mathbf{x}) + q_2\mathfrak{S}^q_{[21435]\circ t_{23}}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Tanım 3.117. ***(Quantum 2-Kat Schubert)***

$$M_i = \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x_2 & q_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_i \end{pmatrix}$$

olsun. $\omega_0 \in S_n$ *maksimum permütasyonu için quantum 2-kat Schubert polinomu,*

$$\mathfrak{S}^q_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y}) := \prod_{i=1}^{n-1} \det\left(M_i + y_{n-i}I\right)$$

olarak tanımlanır. Burada I *birim matristir. Herhangi bir* $\omega \in S_n$ *permütasyonu için* $\mathfrak{S}^q_{\omega}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ *quantum 2-kat Schubert polinomu,*

$$\mathfrak{S}^q_{\omega}(\mathbf{x};\mathbf{y}) := \mathfrak{S}^q_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial^{\mathbf{y}}_{\omega\omega_0}$$

şeklinde tanımlıdır (Lam ve Shimozono 2013).

Örnek 3.118. $\omega \in S_3$ *permütasyonlarının quantum 2-kat Schubert polinomlarını yazalım.*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}^q_{[321]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= (x_1 + y_2)\left((x_1 + y_1)(x_2 + y_1) + q_1\right) \\
\mathfrak{S}^q_{[312]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= (x_1 + y_1)(x_1 + y_2) - q_1 \\
\mathfrak{S}^q_{[231]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= (x_1 + y_1)(x_2 + y_1) + q_1 \\
\mathfrak{S}^q_{[213]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= x_1 + y_1 \\
\mathfrak{S}^q_{[132]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\
\mathfrak{S}^q_{[123]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= 1
\end{aligned}$$

Tanım 3.117'den,

$$\mathfrak{S}^q_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{i} y_{n-i}^{i-j} E^i_j(x_1,\ldots,x_i)\right)$$

olduğu görülebilir. Her i için $q_i = 0$ alınırsa $E^k_i|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = e^k_i$ olur.

Sonuç 3.119. $\omega \in S_n$ *ve* $q_1 = q_2 = \cdots = q_{n-2} = 0$ *olmak üzere,*

$$\mathfrak{S}^q_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y})\big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y})$$

dir.

İspat $\omega_0 \in S_n$ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}^q_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y})\big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} &= \mathfrak{S}^q_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial^y_{\omega\omega_0}\big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \\
&= \mathfrak{S}_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial^y_{\omega\omega_0} \\
&= \mathfrak{S}_{\omega^{-1}}(\mathbf{y};\mathbf{x}) \\
&= \mathfrak{S}_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y})
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.120. $\omega \in S_n$ *olmak üzere,*

$$\mathfrak{S}^q_\omega(\mathbf{x};\mathbf{0}) = \mathfrak{S}^q_\omega(\mathbf{x})$$

tir (Fontanine ve Fulton 1996).

İspat Her $\mathfrak{S}^q_\omega(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum Schubert polinomu, uygun $a_J(\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}[y_1,\ldots,y_{n-1}]$ için $\sum a_J(\mathbf{y})\,E_J(\mathbf{x})$ formunda yazılabilir. $y = 0$ için,

$$\mathfrak{S}^q_\omega(\mathbf{x};\mathbf{0}) = \sum a_J(\mathbf{0})\,E_J(\mathbf{x}) \ \ , a_J(\mathbf{0}) \in \mathbb{Z}$$

olur. Tanım 3.112'den, $\sum a_J(\mathbf{0})\,E_J(\mathbf{x}) = \mathfrak{S}^q_\omega(\mathbf{x})$ olduğundan dolayı $\mathfrak{S}^q_\omega(\mathbf{x};\mathbf{0}) = \mathfrak{S}^q_\omega(\mathbf{x})$ dir. □

Teorem 3.121. ***(Quantum Cauchy Formülü)***

$$\mathfrak{S}^q_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \sum_{\omega\in S_n} \mathfrak{S}^q_\omega(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{\omega\omega_0}(\mathbf{y})$$

dir (Kirillov ve Maeno 1996).

İspat İspatı için Kirillov ve Maeno (1996) makalesine bakınız. □

Örnek 3.122. $\omega_0 = [321] \in S_3$ *olsun.*

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}^q_{[321]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= (x_1+y_2)\left((x_1+y_1)(x_2+y_1)+q_1\right) \\
&= x_1^2x_2 + x_1^2y_1 + x_1x_2y_1 + x_1x_2y_2 + x_1y_1y_2 + x_2y_1y_2 + x_1y_1^2 + y_1^2y_2 \\
&\quad + x_1q_1 + y_2q_1 \\
&= \left(x_1^2x_2 + x_1q_1\right) + \left(x_1^2y_1 - y_1q_1\right) + (x_1x_2y_1 + x_1x_2y_2 + y_1q_1 + y_2q_1) \\
&\quad + x_1y_1^2 + x_1y_1y_2 + y_1^2y_2 \\
&= \left(x_1^2x_2 + x_1q_1\right) + \left(x_1^2 - q_1\right)y_1 + (x_1x_2+q_1)(y_1+y_2) + x_1y_1^2 \\
&\quad + x_1y_1y_2 + y_1^2y_2 \\
&= \mathfrak{S}^q_{[321]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[123]}(\mathbf{y}) + \mathfrak{S}^q_{[312]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[213]}(\mathbf{y}) \\
&\quad + \mathfrak{S}^q_{[231]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[132]}(\mathbf{y}) + \mathfrak{S}^q_{[213]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[312]}(\mathbf{y}) \\
&\quad + \mathfrak{S}^q_{[132]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[231]}(\mathbf{y}) + \mathfrak{S}^q_{[123]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[321]}(\mathbf{y}) \\
&= \mathfrak{S}^q_{[321]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[321]\circ[321]}(\mathbf{y}) + \mathfrak{S}^q_{[312]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[312]\circ[321]}(\mathbf{y}) \\
&\quad + \mathfrak{S}^q_{[231]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[231]\circ[321]}(\mathbf{y}) + \mathfrak{S}^q_{[213]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[213]\circ[321]}(\mathbf{y}) \\
&\quad + \mathfrak{S}^q_{[132]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[132]\circ[321]}(\mathbf{y}) + \mathfrak{S}^q_{[123]}(\mathbf{x})\,\mathfrak{S}_{[123]\circ[321]}(\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Rasyonel Schubert polinomları ve Quantum Schubert polinomlarının özellikleri incelenerek elde edilen bulgular ifade edilecektir. Quantum-rasyonel Schubert polinomları, quantum-rasyonel Key polinomları ve quantum-rasyonel Grothendieck polinomları gibi yeni tanımlar verilecek ve bunlarla ilgili örneklendirmeler yapılacaktır.

Önerme 4.123. *$n \geq 2$, $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve $\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyon olmak üzere,*

$$\begin{aligned} Y^{rat}_{\underbrace{[0,0,\ldots,0,1]}_{n-1 \text{ defa } 0}}(\mathbf{x};\mathbf{0}) &= Y^{rat}_{[n,n-2,n-3,\ldots,1,0]}(\mathbf{x};\mathbf{0})\,\partial_{\omega_0} \\ &= (-1)^{l(\omega_0)}\frac{e^n_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)}{e^n_n(x_1,\ldots,x_n)} \end{aligned}$$

dir.

İspat Genel rasyonel Schubert polinomları uygun, kesin baskın kodlu rasyonel Schubert polinomları yardımı ile elde edilebilir.

$$\begin{aligned} Y^{rat}_{\underbrace{[0,0,\ldots,0,1]}_{n-1 \text{ defa } 0}}(\mathbf{x};\mathbf{0}) &= Y^{rat}_{\underbrace{[n,0,\ldots,0,0]}_{n-1 \text{ defa } 0}}(\mathbf{x};\mathbf{0})\,\partial_1\partial_2\cdots\partial_{n-1} \\ &= \left(Y^{rat}_{\underbrace{[n,n-2,\ldots,0,0]}_{n-2 \text{ defa } 0}}(\mathbf{x};\mathbf{0})\,\partial_2\partial_3\cdots\partial_{n-1}\right)\partial_1\partial_2\cdots\partial_{n-1} \end{aligned}$$

bu şekilde düzenlenmeye devam edildiğinde,

$$\begin{aligned} Y^{rat}_{\underbrace{[0,0,\ldots,0,1]}_{n-1 \text{ defa } 0}}(\mathbf{x};\mathbf{0}) &= Y^{rat}_{[n,n-2,n-3,\ldots,1,0]}(\mathbf{x};\mathbf{0})\,\underbrace{\partial_{n-1}(\partial_{n-2}\partial_{n-1})\cdots(\partial_1\partial_2\cdots\partial_{n-1})}_{\partial_{\omega_0}} \\ &= Y^{rat}_{[n,n-2,n-3,\ldots,1,0]}(\mathbf{x};\mathbf{0})\,\partial_{\omega_0} \end{aligned}$$

elde edilir.

Elde edilen eşitliğin sağ tarafındaki $Y^{rat}_{[n,n-2,n-3,\ldots,1,0]}(\mathbf{x};\mathbf{0})$ polinomu,

$$Y^{rat}_{[n,n-2,n-3,\ldots,1,0]}(\mathbf{x};\mathbf{0}) = \frac{x_2x_3^2x_4^3\cdots x_n^{n-1}}{x_1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Uygun işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned} Y^{rat}_{[n,n-2,n-3,\ldots,1,0]}\left(\mathbf{x};\mathbf{0}\right)\partial_{\omega_0} &= \left(\frac{x_2x_3^2x_4^3\cdots x_n^{n-1}}{x_1}\right)\partial_{\omega_0} \\ &= (-1)^{1+2+\cdots+(n-1)}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \\ &= (-1)^{l(\omega_0)}\frac{e^n_{n-1}\left(x_1,\ldots,x_n\right)}{e^n_n\left(x_1,\ldots,x_n\right)} \end{aligned}$$

olur. □

Örnek 4.124. $u=[0,0,0,0,1]$ *için,*

$$\begin{aligned} Y^{rat}_{[0,0,0,0,1]}\left(\mathbf{x};\mathbf{0}\right) &= Y^{rat}_{[5,3,2,1,0]}\left(\mathbf{x};\mathbf{0}\right)\partial_{[54321]} \\ &= \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5} \\ &= \frac{e^5_4\left(x_1,\ldots,x_5\right)}{e^5_5\left(x_1,\ldots,x_5\right)} \end{aligned}$$

dir.

Önerme 4.125. $u=[u_1,\ldots,u_n]$ *kesin baskın bir kod,* $\mathbf{x}=\{x_1,\ldots,x_n\}$, $\mathbf{y}=\{y_1,\ldots,y_n\}$ *ve* $1\leq i\leq n-1$ *olsun. Bu durumda,*

$$Y^{rat}_u\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)\partial_i=-Y^{rat}_u\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)\frac{Y_{u+\mathbf{1}}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)\partial_i}{Y_{u+\mathbf{1}}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)s_i}$$

dir.

İspat Önerme 3.94'ten,

$$Y^{rat}_u\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)=\frac{Y_{n^n}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)}{Y_{u+\mathbf{1}}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)}$$

dir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned} Y^{rat}_u\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)\partial_i &= \left(\frac{Y_{n^n}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)}{Y_{u+\mathbf{1}}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)}\right)\partial_i \\ &= -\frac{\left(Y_{n^n}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)s_i\right)\left(Y_{u+\mathbf{1}}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)\partial_i\right)}{Y_{u+\mathbf{1}}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)\left(Y_{u+\mathbf{1}}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)s_i\right)} \\ &= -\underbrace{\frac{Y_{n^n}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)}{Y_{u+\mathbf{1}}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)}}_{Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})}\left(\frac{Y_{u+\mathbf{1}}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)\partial_i}{Y_{u+\mathbf{1}}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)s_i}\right) \\ &= -Y^{rat}_u\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)\frac{Y_{u+\mathbf{1}}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)\partial_i}{Y_{u+\mathbf{1}}\left(\mathbf{x};\mathbf{y}\right)s_i} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 3.108'in ispatını yapalım.

$$M_n = \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x_2 & q_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

ve $A_n := \det(\lambda M_n + I)$ olsun. Bu durumda, $A_n = \sum_{i=0}^{n} E_i^n \lambda^i$ şeklinde yazılabilir.

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & x_2 & q_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n & q_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x_{n+1} \end{pmatrix}$$

için $A_{n+1} = \det(\lambda M_{n+1} + I)$ determinantını hesaplayalım. $\lambda M_{n+1} + 1$ matrisinin determinantını hesaplarken $(n+1)$-inci sütuna göre açılım yaparak hesaplarsak,

$$\begin{aligned} A_n &= (\lambda x_{n+1} + 1) A_n + \lambda^2 q_n A_{n-1} \\ &= A_n + \lambda x_{n+1} A_n + \lambda^2 q_n A_{n-1} \end{aligned}$$

elde edilir. $A_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} E_i^{n+1} \lambda^i$ polinomunun $\lambda^m E_m^{n+1}$ terimini seçelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \lambda^m E_m^{n+1} &= \lambda^m E_m^n + \lambda x_{n+1} \left(\lambda^{m-1} E_{m-1}^n\right) + \lambda^2 q_n \left(\lambda^{m-2} E_{m-2}^{n-1}\right) \\ &= \lambda^m E_m^n + \lambda^m x_{n+1} E_{m-1}^n + \lambda^m q_n E_{m-2}^{n-1} \\ &= \lambda^m \left(E_m^n + x_{n+1} E_{m-1}^n + q_n E_{m-2}^{n-1}\right) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla,

$$E_m^{n+1} = E_m^n + x_{n+1} E_{m-1}^n + q_n E_{m-2}^{n-1}$$

elde edilir. Bu Önerme 3.108'i ispatlar.

$\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ değişkeninde, $e_k^n(\mathbf{x}) = e_k^n$ k-ıncı elementer simetrik polinom olmak üzere,

$$\{e_k^n\}_{i_1,\ldots,i_l} := e_k^n\left(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, 0, 0, x_{i_1+2}, \ldots, x_{i_l-1}, 0, 0, x_{i_l+2}, \ldots, x_n\right)$$

gösterimini kullanalım. Yani $\{e_k^n\}_{i_1,\ldots,i_l}$ ifadesinden anlaşılması gereken, $e_k^n(\mathbf{x})$ polinomunda $\{x_{i_1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_l}, x_{i_l+1}\}$ terimlerinin yerine 0 yazılmasıdır. Örneğin, $e_2^4 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$ iken $\{e_2^4\}_2 = x_1x_4$ dir.

E_m^n quantum elementer polinomlarını $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için inceleyelim.

$n = 1$ için,

$$\begin{aligned} E_0^1 &= 1 = e_0^1 \\ E_1^1 &= x_1 = e_1^1 \end{aligned}$$

dir.

$n = 2$ için,

$$\begin{aligned} E_0^2 &= 1 = e_0^2 \\ E_1^2 &= x_1 + x_2 = e_1^2 \\ E_2^2 &= x_1x_2 + q_1 = e_2^2 + \sum_{i_1=1}^{1} q_{i_1} \left\{e_0^2\right\}_{i_1} \end{aligned}$$

dir.

$n = 3$ için,

$$\begin{aligned} E_0^3 &= 1 = e_0^3 \\ E_1^3 &= x_1 + x_2 + x_3 = e_1^3 \\ E_2^3 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + q_1 + q_2 = e_2^3 + \sum_{i_1=1}^{2} q_{i_1} \left\{e_0^3\right\}_{i_1} \\ E_3^3 &= x_1x_2x_3 + q_1x_3 + q_2x_1 = e_3^3 + \sum_{i_1=1}^{2} q_{i_1} \left\{e_1^3\right\}_{i_1} \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde devam edildiğinde,

$n = 4$ için,

$$\begin{aligned} E_0^4 &= e_0^4 \, , E_1^4 = e_1^4 \, , E_2^4 = e_2^4 + \sum_{i_1=1}^{3} q_{i_1} \left\{ e_0^4 \right\}_{i_1} \, , E_3^4 = e_3^4 + \sum_{i_1=1}^{3} q_{i_1} \left\{ e_1^4 \right\}_{i_1} \\ E_4^4 &= e_4^4 + \sum_{i_1=1}^{3} q_{i_1} \left\{ e_2^4 \right\}_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{1} \sum_{i_2=i_1+2}^{3} q_{i_1} q_{i_2} \left\{ e_0^4 \right\}_{i_1,i_2} \end{aligned}$$

dir.

$n = 5$ için,

$$\begin{aligned} E_0^5 &= e_0^5 \, , E_1^5 = e_1^5 \, , E_2^5 = e_2^5 + \sum_{i_1=1}^{4} q_{i_1} \left\{ e_0^5 \right\}_{i_1} \, , E_3^5 = e_3^5 + \sum_{i_1=1}^{4} q_{i_1} \left\{ e_1^5 \right\}_{i_1} \\ E_4^5 &= e_4^5 + \sum_{i_1=1}^{4} q_{i_1} \left\{ e_2^5 \right\}_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=i_1+2}^{4} q_{i_1} q_{i_2} \left\{ e_0^5 \right\}_{i_1,i_2} \\ E_5^5 &= e_5^5 + \sum_{i_1=1}^{4} q_{i_1} \left\{ e_3^5 \right\}_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=i_1+2}^{4} q_{i_1} q_{i_2} \left\{ e_1^5 \right\}_{i_1,i_2} \end{aligned}$$

dir.

$$\sum\nolimits_k^n := \sum_{i_1=1}^{n-2k+1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2k+3} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1}$$

gösterimini kullanalım.

Teorem 4.126. *Uygun n ve m sayıları için, $n \geq 2$, $m \geq 2$ ve*

$$M_n = \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x_2 & q_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere, $A_n := \det(\lambda M_n + I) = \sum_{i=0}^{n} E_i^n \lambda^i$ ise,

$$E_m^n = e_m^n + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \left(\sum\nolimits_k^n q_{i_1} \cdots q_{i_k} \left\{ e_{m-2k}^n \right\}_{i_1,\ldots,i_k} \right)$$

dır.

İspat n üzerinden tümevarım yapalım.

$$\begin{aligned} E_m^n &= e_m^n + \sum_{i_1=1}^{n-1} q_{i_1} \left\{e_{m-2}^n\right\}_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{n-3} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-1} q_{i_1} q_{i_2} \left\{e_{m-4}^n\right\}_{i_1,i_2} + \cdots + \\ &\left(\sum_{i_1=1}^{n-2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+2} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+4} \cdots \sum_{i_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}=i_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-1}+2}^{n-1} q_{i_1}\cdots q_{i_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}} \left\{e^n_{m-2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}} \right) \end{aligned} \tag{1}$$

eşitliği doğru olsun.

Eşitliğin her iki tarafına $x_{n+1}E^n_{m-1} + q_nE^{n-1}_{m-2}$ toplamını ekleyelim. Eşitliğin sol tarafı E^{n+1}_m olur. (1)'i doğru kabul ettiğimizden,

$$\begin{aligned} x_{n+1}E^n_{m-1} &= x_{n+1}e^n_{m-1} + \sum_{i_1=1}^{n-1} q_{i_1} x_{n+1} \left\{e^n_{m-3}\right\}_{i_1} + \\ & \sum_{i_1=1}^{n-3} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-1} q_{i_1} q_{i_2} x_{n+1} \left\{e_{m-5}\right\}_{i_1,i_2} + \cdots + \\ & \left(\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor+2} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor+4} \cdots \sum_{i_{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor}=i_{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor-1}+2}^{n-1} \\ q_{i_1}\cdots q_{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor} x_{n+1} \left\{e^n_{m-2\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor-1}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor}} \end{array} \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} q_nE^{n-1}_{m-2} &= q_ne^{n-1}_{m-2} + \sum_{i_1=1}^{n-2} q_{i_1} q_n \left\{e^{n-1}_{m-4}\right\}_{i_1} + \cdots + \\ & \left(\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor+3} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor+5} \cdots \sum_{i_{\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor-1}=i_{\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor-2}+2}^{n-2} \\ q_{i_1}\cdots q_{\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor-1} q_n \left\{e^{n-1}_{m-2\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor-1}} \end{array} \right) + \\ & \left(\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor+1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor+3} \cdots \sum_{i_{\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor}=i_{\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor-1}+2}^{n-2} \\ q_{i_1}\cdots q_{\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor} q_n \left\{e^{n-1}_{m-2\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor-2}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\lfloor\frac{m-2}{2}\rfloor}} \end{array} \right) \end{aligned}$$

dir. (1) eşitliğine $x_{n+1}E^n_{m-1} + q_nE^{n-1}_{m-2}$ toplamını ekledikten sonra eşitliğin sağ tarafındaki terimleri gruplayarak düzenlemeler yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
E_m^{n+1} &= \left(e_m^n + x_{n+1}e_{m-1}^n\right) + \left(\sum_{i_1=1}^{n-1} q_{i_1}\left\{e_{m-2}^n\right\}_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{n-1} q_{i_1}x_{n+1}\left\{e_{m-3}^n\right\}_{i_1} + q_n e_{m-2}^{n-1}\right) \\
&+ \left(\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-3}\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1} q_{i_1}q_{i_2}\left\{e_{m-4}^n\right\}_{i_1,i_2} + \sum_{i_1=1}^{n-3}\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1} q_{i_1}q_{i_2}x_{n+1}\left\{e_{m-5}^n\right\}_{i_1,i_2} \\ \displaystyle + \sum_{i_1=1}^{n-2} q_{i_1}q_n\left\{e_{m-4}^{n-1}\right\}_{i_1} \end{array}\right) + \\
&\cdots + \left(\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+4}\ \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+6}\cdots\sum_{i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1}=i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-2}+2}^{n-1} \\ \displaystyle q_{i_1}\cdots q_{i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1}}\left\{e^n_{m-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+2}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1}} \end{array}\right) + \\
\left(\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor+4}\ \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor+6}\cdots\sum_{i_{\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor-1}=i_{\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor-2}+2}^{n-1} \\ \displaystyle q_{i_1}\cdots q_{\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor-1}x_{n+1}\left\{e^n_{m-2\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor+1}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor-1}} \end{array}\right) + \\
\left(\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor+3}\ \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor+5}\cdots\sum_{i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-1}=i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-2}+2}^{n-2} \\ \displaystyle q_{i_1}\cdots q_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-1}q_n\left\{e^{n-1}_{m-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-1}} \end{array}\right)
\end{array}\right) \\
&+ \left(\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+2}\ \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+4}\cdots\sum_{i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}=i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1}+2}^{n-1} \\ \displaystyle q_{i_1}\cdots q_{i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}}\left\{e^n_{m-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}} \end{array}\right) + \\
\left(\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor+1}\ \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor+3}\cdots\sum_{i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}=i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-1}+2}^{n-2} \\ \displaystyle q_{i_1}\cdots q_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}q_n\left\{e^{n-1}_{m-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-2}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}} \end{array}\right)
\end{array}\right) \\
&= \left(e_m^n + x_{n+1}e_{m-1}^n\right) + \left(\sum_{i_1=1}^{n-1} q_{i_1}\left(\left\{e_{m-2}^n\right\}_{i_1} + x_{n+1}\left\{e_{m-3}^n\right\}_{i_1}\right) + q_n e_{m-2}^{n-1}\right) + \\
&\left(\sum_{i_1=1}^{n-3}\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1} q_{i_1}q_{i_2}\left(\left\{e_{m-4}^n\right\}_{i_1,i_2} + x_{n+1}\left\{e_{m-5}^n\right\}_{i_1,i_2}\right) + \sum_{i_1=1}^{n-2} q_{i_1}q_n\left\{e_{m-4}^{n-1}\right\}_{i_1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+\left(\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{c}
\displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+4}\ \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+6}\cdots\sum_{i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1}=i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-2}+2}^{n-1} q_{i_1}\cdots q_{i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1}}\\
\left(\begin{array}{c}
\left\{e^{n}_{m-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+2}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1}}+\\
x_{n+1}\left\{e^{n}_{m-2\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor+1}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor-1}}
\end{array}\right)
\end{array}\right)\\
+\left(\begin{array}{c}
\displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor+3}\ \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor+5}\cdots\sum_{i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-1}=i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-2}+2}^{n-2}\\
q_{i_1}\cdots q_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-1}q_n\left\{e^{n-1}_{m-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-1}}
\end{array}\right)
\end{array}\right)\\
&+\left(\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{c}
\displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+2}\ \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+4}\cdots\sum_{i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}=i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1}+2}^{n-1}\\
q_{i_1}\cdots q_{i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}}\left\{e^{n}_{m-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}}
\end{array}\right)+\\
\left(\begin{array}{c}
\displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor+1}\ \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor+3}\cdots\sum_{i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}=i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-1}+2}^{n-2}\\
q_{i_1}\cdots q_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}q_n\left\{e^{n-1}_{m-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-2}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}}
\end{array}\right)
\end{array}\right)\\
=\ & e^{n+1}_{m}+\left(\sum_{i_1=1}^{n-1}q_{i_1}\left\{e^{n+1}_{m-2}\right\}_{i_1}+\underbrace{q_ne^{n-1}_{m-2}}_{q_n\left\{e^{n+1}_{m-2}\right\}_n}\right)+\\
&\left(\sum_{i_1=1}^{n-3}\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1}q_{i_1}q_{i_2}\left\{e^{n+1}_{m-4}\right\}_{i_1,i_2}+\sum_{i_1=1}^{n-2}\underbrace{q_{i_1}q_n\left\{e^{n-1}_{m-4}\right\}_{i_1}}_{q_{i_1}q_n\left\{e^{n+1}_{m-4}\right\}_{i_1,n}}\right)+\cdots+\\
&\left(\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{c}
\displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+4}\ \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+6}\cdots\sum_{i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1}=i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-2}+2}^{n-1} q_{i_1}\cdots q_{i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1}}\\
\left\{e^{n+1}_{m-2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+2}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor-1}}
\end{array}\right)+\\
\left(\begin{array}{c}
\underbrace{\begin{array}{c}
\displaystyle\sum_{i_1=1}^{n-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor+3}\ \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor+5}\cdots\sum_{i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-1}=i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-2}+2}^{n-2}\\
q_{i_1}\cdots q_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-1}q_n\left\{e^{n-1}_{m-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-1}}
\end{array}}_{q_{i_1}\cdots q_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-1}q_n\left\{e^{n+1}_{m-2\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor}\right\}_{i_1,\ldots,i_{\left\lfloor\frac{m-2}{2}\right\rfloor-1},n}}
\end{array}\right)
\end{array}\right)+
\end{aligned}
$$

$$
\left(\left(\sum_{i_1=1}^{n-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+2} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+4} \cdots \sum_{i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}=i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-1}+2}^{n-1} q_{i_1} \cdots q_{i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \left\{ e^{n+1}_{m-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\}_{i_1,\ldots,i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \right) + \left(\underbrace{\sum_{i_1=1}^{n-2\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor+1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor+3} \cdots \sum_{i_{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor}=i_{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor-1}+2}^{n-2} q_{i_1} \cdots q_{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} q_n \left\{ e^{n-1}_{m-2\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor-2} \right\}_{i_1,\ldots,i_{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor}}}_{q_{i_1}\cdots q_{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} q_n \left\{ e^{n+1}_{m-2\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor-2} \right\}_{i_1,\ldots,i_{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor},n}} \right) \right)
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & e^{n+1}_m + \sum_{i_1=1}^{n} q_{i_1} \left\{ e^{n+1}_{m-2} \right\}_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{n-2} \sum_{i_2=i_1+2}^{n} q_{i_1} q_{i_2} \left\{ e^{n+1}_{m-4} \right\}_{i_1,i_2} + \cdots + \\
& \left(\sum_{i_1=1}^{n-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+5} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+7} \cdots \sum_{i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-1}=i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-2}+2}^{n} q_{i_1} \cdots q_{i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \left\{ e^{n+1}_{m-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\}_{i_1,\ldots,i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-1}} \right) + \\
& \left(\sum_{i_1=1}^{n-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+3} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+5} \cdots \sum_{i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}=i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-1}+2}^{n} q_{i_1} \cdots q_{i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \left\{ e^{n+1}_{m-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\}_{i_1,\ldots,i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
E^{n+1}_m = e^{n+1}_m + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\sum\nolimits_k^{n+1} q_{i_1} \cdots q_{i_k} \left\{ e^{n+1}_{m-2k} \right\}_{i_1,\ldots,i_k} \right)
$$

dır. □

Verilen bir E^n_m quantum elementer polinomunun içerdiği monomial sayısını $\# \{E^n_m\}$ ile gösterelim. Örneğin, $E^4_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + q_1 + q_2 + q_3$ quantum elementer polinomunun içerdiği monomial sayısı $\# \{E^4_2\} = 9$ dur.

Önerme 4.127. *$n \geq m$ olmak üzere E^n_m quantum elementer polinomundaki monomiallerin sayısı,*

$$
\# \{E^n_m\} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} \binom{n-2k}{m-2k}
$$

dır.

İspat E_m^n quantum elementer polinomunun genel formülünü tekrar yazalım.

$$\begin{aligned} E_m^n &= e_m^n + \sum_{i_1=1}^{n-1} q_{i_1} \left\{e_{m-2}^n\right\}_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{n-3} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-1} q_{i_1} q_{i_2} \left\{e_{m-4}^n\right\}_{i_1,i_2} + \cdots + \\ & \left(\sum_{i_1=1}^{n-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+2} \cdots \sum_{i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}=i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-1}+2}^{n-1} q_{i_1} \cdots q_{i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \left\{e_{m-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^n\right\}_{i_1,\ldots,i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \right) \end{aligned}$$

Toplamdaki her bir ifadenin içerdiği monomiallerin sayılarını inceleyelim.

$$\underbrace{\# \left\{e_m^n\right\}}_{\binom{n}{m}\frac{1}{0!}}, \underbrace{\# \left\{ \sum_{i_1=1}^{n-1} q_{i_1} \left\{e_{m-2}^n\right\}_{i_1} \right\}}_{\binom{n-2}{m-2}\frac{(n-1)}{1!}}, \underbrace{\# \left\{ \sum_{i_1=1}^{n-3} \sum_{i_2=i_1+2}^{n-1} q_{i_1} q_{i_2} \left\{e_{m-4}^n\right\}_{i_1,i_2} \right\}}_{\binom{n-4}{m-4}\frac{(n-3)(n-2)}{2!}}, \ldots,$$

$$\underbrace{\# \left\{ \sum_{i_1=1}^{n-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor+2} \cdots \sum_{i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}=i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-1}+2}^{n-1} q_{i_1} \cdots q_{i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \left\{e_{m-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^n\right\}_{i_1,\ldots,i_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \right\}}_{\binom{n-m}{m-m}\frac{(n-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor)(m-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-1)\cdots(n-m+1)}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor!}}$$

Bunların her biri toplanırsa,

$$\binom{n}{m}\frac{1}{0!} + \binom{n-2}{m-2}\frac{(n-1)}{1!} + \binom{n-4}{m-4}\frac{(n-3)(n-2)}{2!} + \cdots + \binom{n-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}{m-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}\frac{\left(n-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor\right)\left(m-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-1\right)\cdots(n-m+1)}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}\binom{n-2k}{m-2k}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.128. *$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, n-inci Fibonacci sayısı*

$$Fib(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

E_n^n quantum elementer polinomundaki monomial sayısıdır.

İspat Sonuç 3.109'dan E_n^n quantum elementer polinomundaki monomial sayısı n-inci Fibonacci sayısıdır. Önerme 4.127'da $m = n$ almak ispatı tamamlar. □

Tanım 4.129. *$\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyonunun kodu u ve*

$$\sum\nolimits_k^m = \sum_{i_1=1}^{m-2k+1} \sum_{i_2=i_1+2}^{m-2k+3} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{m-1}$$

olmak üzere, $Y_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 2-kat Schubert polinomunun quantum çarpanı,

$$\mathbf{Y}_u(q_1,\ldots,q_{n-2}) := \prod_{m=1}^{n-1} [1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (\sum\nolimits_k^m \frac{q_{i_1}\cdots q_{i_k}}{(x_{i_1}+y_{n-m})(x_{i_1+1}+y_{n-m})\cdots(x_{i_k}+y_{n-m})(x_{i_k+1}+y_{n-m})})]$$

şeklinde tanımlıdır.

Önerme 4.130. *$\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyon ve kodu $u = [n-1, \ldots 1, 0]$ olmak üzere,*

$$\mathfrak{S}^q_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = Y_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\mathbf{Y}_u(q_1,\ldots,q_{n-2})$$

dir.

İspat Teorem 4.126'dan,

$$E^m_m(\mathbf{x};y_{n-m}) = e^m_m + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}\left(\sum\nolimits_k^m q_{i_1}\cdots q_{i_k}\left\{e^m_{m-2k}(\mathbf{x};y_{n-m})\right\}_{i_1,\ldots,i_k}\right)$$

dir. Eşitliğin sağ tarafını e^m_m parantezine alalım.

$$E^m_m(\mathbf{x};y_{n-m}) = e^m_m\left(1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}\left(\sum\nolimits_k^m q_{i_1}\cdots q_{i_k}\frac{\left\{e^m_{m-2k}(\mathbf{x};y_{n-m})\right\}_{i_1,\ldots,i_k}}{e^m_m(\mathbf{x};y_{n-m})}\right)\right)$$

$$e^m_m(\mathbf{x};y_{n-m}) = \left\{e^m_{m-2k}(\mathbf{x};y_{n-m})\right\}_{i_1,\ldots,i_k}(x_{i_1}+y_{n-m})(x_{i_1+1}+y_{n-m})\cdots$$
$$(x_{i_k}+y_{n-m})(x_{i_k+1}+y_{n-m})$$

olduğundan,

$$E^m_m(\mathbf{x};y_{n-m}) = e^m_m[1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}(\sum\nolimits_k^m \frac{q_{i_1}\cdots q_{i_k}}{(x_{i_1}+y_{n-m})(x_{i_1+1}+y_{n-m})\cdots(x_{i_k}+y_{n-m})(x_{i_k+1}+y_{n-m})})]$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}^q_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= E^1_1(\mathbf{x};y_{n-1})\,E^2_2(\mathbf{x};y_{n-2})\cdots E^{n-1}_{n-1}(\mathbf{x};y_1)\\
&= e^1_1(\mathbf{x};y_{n-1})\,e^2_2(\mathbf{x};y_{n-2})\left[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_{n-2})(x_2+y_{n-2})}\right]\cdots\\
&\quad e^{n-1}_{n-1}(\mathbf{x};y_1)\left[1+\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\left(\sum\nolimits_k^{n-1}\tfrac{q_{i_1}\cdots q_{i_k}}{(x_{i_1}+y_1)(x_{i_1+1}+y_1)\cdots(x_{i_k}+y_1)(x_{i_k+1}+y_1)}\right)\right]\\
&= e^1_1(\mathbf{x};y_{n-1})\,e^2_2(\mathbf{x};y_{n-2})\cdots e^{n-1}_{n-1}(\mathbf{x};y_1)\left[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_{n-2})(x_2+y_{n-2})}\right]\cdots\\
&\quad\left[1+\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\left(\sum\nolimits_k^{n-1}\tfrac{q_{i_1}\cdots q_{i_k}}{(x_{i_1}+y_1)(x_{i_1+1}+y_1)\cdots(x_{i_k}+y_1)(x_{i_k+1}+y_1)}\right)\right]\\
&= Y_{[n-1,\ldots,0]}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\mathbf{Y}_{[n-1,\ldots,0]}(q_1,\ldots,q_{n-2})\\
&= Y_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\mathbf{Y}_u(q_1,\ldots,q_{n-2})
\end{aligned}$$

olur. □

Önerme 4.130'dan, $Y_{[n-1,\ldots,0]}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 2-kat Schubert polinomu, $\mathfrak{S}^q_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum 2-kat Schubert polinomunun bir bölenidir.

Örnek 4.131. *S_4'te $\omega_0 = [4321]$ permütasyonu için,*

$$\mathfrak{S}^q_{[4321]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = E^1_1(\mathbf{x};y_3)\,E^2_2(\mathbf{x};y_2)\,E^3_3(\mathbf{x};y_1)$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_1+y_3)\left[(x_1+y_2)(x_2+y_2)+q_1\right] \\
&\quad \left[(x_1+y_1)(x_2+y_1)(x_3+y_1)+q_1(x_3+y_1)+q_2(x_1+y_1)\right] \\
&= (x_1+y_3)(x_1+y_2)(x_2+y_2)(x_1+y_1)(x_2+y_1)(x_3+y_1) \\
&\quad \left[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}\right]\left[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\tfrac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}\right] \\
&= Y_{[3,2,1]}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\mathbf{Y}_{[3,2,1]}(q_1,q_2)
\end{aligned}
$$

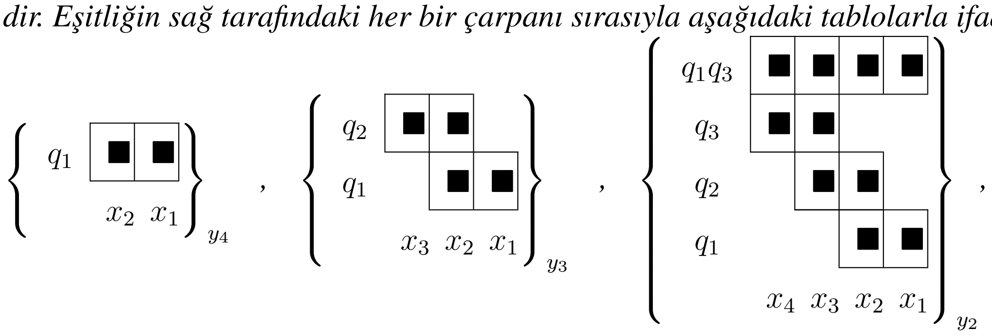
elde edilir.

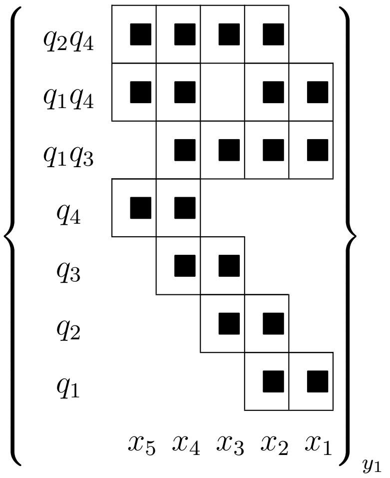
$u=[n-1,n-2,\ldots,1]$ olmak üzere, $Y_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 2-kat Schubert polinomu Young tablosu ile gösterilebiliyordu. $\mathfrak{S}^q_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum 2-kat Schubert polinomunu da benzer bir gösterimle ifade edebiliriz. Bunun için önce $\mathbf{Y}_u(q_1,\ldots,q_{n-2})$ quantum çarpanının tablo gösterimini bir örnekle ifade edelim.

Örnek 4.132. $u=[5,4,3,2,1]$ *için,*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y}_{[5,4,3,2,1]}(q_1,\ldots,q_4) \;=\; & \left[1+\frac{q_1}{(x_1+y_4)(x_2+y_4)}\right] \\
& \left[1+\frac{q_1}{(x_1+y_3)(x_2+y_3)}+\frac{q_2}{(x_2+y_3)(x_3+y_3)}\right] \\
& \left[\begin{array}{c} 1+\frac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}+\frac{q_2}{(x_2+y_2)(x_3+y_2)}+ \\ \frac{q_3}{(x_3+y_2)(x_4+y_2)}+\frac{q_1q_3}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)(x_3+y_2)(x_4+y_2)} \end{array}\right] \\
& \left[\begin{array}{c} 1+\frac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\frac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}+\frac{q_3}{(x_3+y_1)(x_4+y_1)} \\ +\frac{q_4}{(x_4+y_1)(x_5+y_1)}+\frac{q_1q_3}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)(x_3+y_1)(x_4+y_1)} \\ +\frac{q_1q_4}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)(x_4+y_1)(x_5+y_1)}+\frac{q_2q_4}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)(x_4+y_1)(x_5+y_1)} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

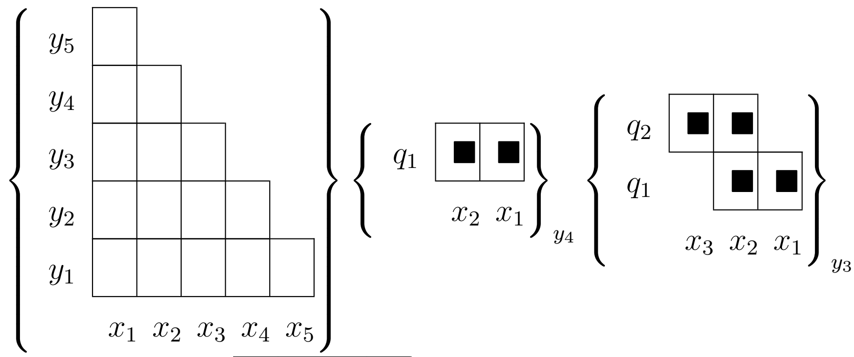
dir. Eşitliğin sağ tarafındaki her bir çarpanı sırasıyla aşağıdaki tablolarla ifade edelim.

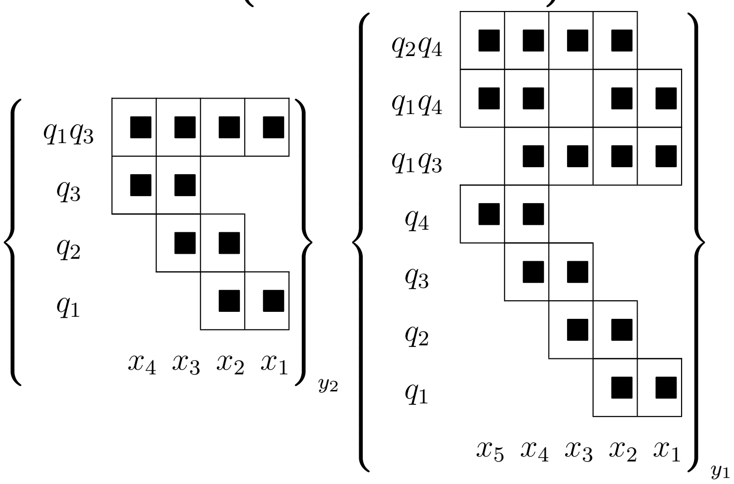




Bu durumda $\mathfrak{S}^q_{[654321]}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum 2-kat Schubert polinomunun tablo gösterimi aşağıdaki şekilde olur.
"$\cong$" sembolünü polinomun ve karşılık geldiği tablo gösteriminin aynı anlamda olduğunu ifade etmek için kullanalım.

$\mathfrak{S}^q_{[654321]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) \cong$



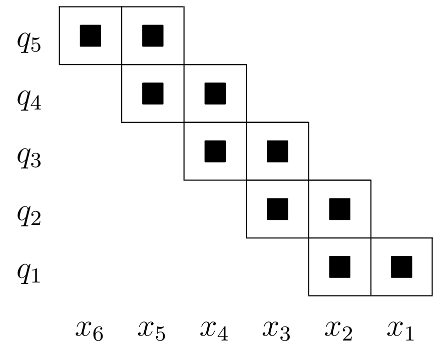


Bu bize herhangi bir $\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyonu verildiğinde $\mathfrak{S}^q_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum 2-kat Schubert polinomunun bilinen hesaplama formülü kullanılmadan tablo gösterimine bakılarak kolayca hesaplanabildiğini söyler.

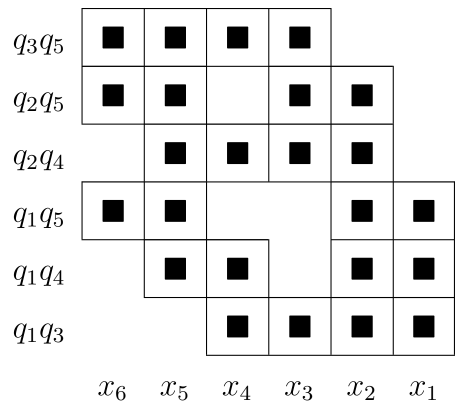
Tabloları oluşturma mantığını bir örnekle açıklayalım. $\omega_0 = [7654321]$ için

$\mathbf{Y}_{[6,5,4,3,2,1]}(q_1,\ldots,q_5)$ quantum çarpanının, $E_6^6(\mathbf{x};y_1)$ quantum elementer polinomundan gelen bir çarpanını tablo yoluyla bulalım.

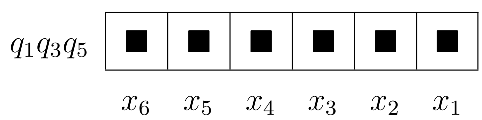
Önce aşağıdaki gibi en alt satırları merdiven şeklinde oluşturacağız.



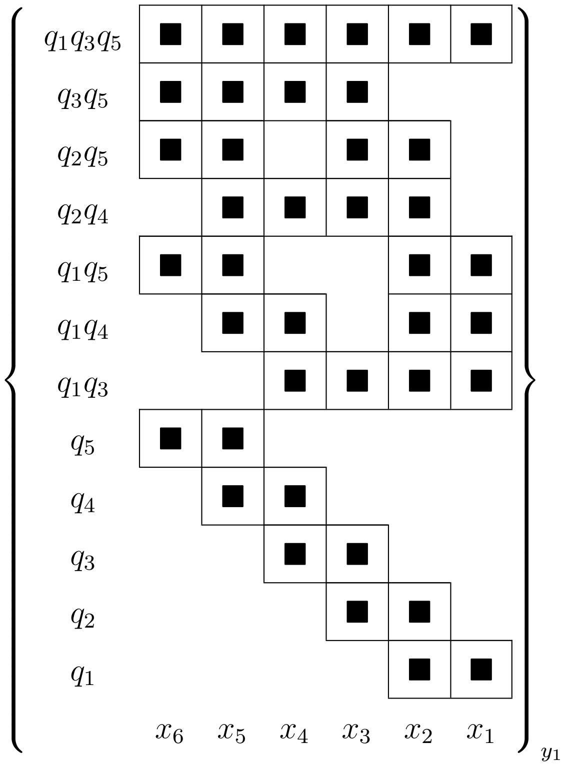
Daha sonra şekilde ortak kenarı olmayan q_i, q_j satırlarını ikişerli gruplandıracağız ve en sol tarafa q_iq_j çarpımı yazacağız. Bunu indislere göre sıralı yapmak daha kolaylık sağlayacaktır. Yeni ekleyeceğimiz satırların sol kısımlarına aşağıdan yukarıya sırasıyla q_1q_3, q_1q_4, q_1q_5, q_2q_4, q_2q_5 ve q_3q_5 yazacağız.



Son olarak ortak kenarı olmayan q_i, q_j, q_k satırlarını üçerli gruplandıracağız ve en sol tarafa $q_iq_jq_k$ çarpımı yazacağız. Yeni ekleyeceğimiz satır sadece $q_1q_3q_5$ satırı olacaktır.



Bu durumda elde etmek istediğimiz çarpanın tablosu aşağıdaki şekilde olur.



Bu sayede formül kullanmadan tablo gösterimi yardımıyla $\mathfrak{S}^q_{[7654321]}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum 2-kat Schubert polinomunu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}^q_{[7654321]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= Y_{[6,5,4,3,2,1]}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\mathbf{Y}_{[6,5,4,3,2,1]}(q_1,\ldots,q_5)\\
&= (x_1+y_1)(x_1+y_2)(x_1+y_3)(x_1+y_4)(x_1+y_5)(x_1+y_6)\\
&\quad (x_2+y_1)(x_2+y_2)(x_2+y_3)(x_2+y_4)(x_2+y_5)(x_3+y_1)\\
&\quad (x_3+y_2)(x_3+y_3)(x_3+y_4)(x_4+y_1)(x_4+y_2)(x_4+y_3)\\
&\quad (x_5+y_1)(x_5+y_2)(x_6+y_1)\left[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_5)(x_2+y_5)}\right]\\
&\quad \left[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_4)(x_2+y_4)}+\tfrac{q_2}{(x_2+y_4)(x_3+y_4)}\right]\\
&\quad \left[\begin{array}{c} 1+\frac{q_1}{(x_1+y_3)(x_2+y_3)}+\frac{q_2}{(x_2+y_3)(x_3+y_3)}+\frac{q_3}{(x_3+y_3)(x_4+y_3)}\\ +\frac{q_1}{(x_1+y_3)(x_2+y_3)}\frac{q_3}{(x_3+y_3)(x_4+y_3)}\end{array}\right]\\
&\quad \left[\begin{array}{c} 1+\frac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}+\frac{q_2}{(x_2+y_2)(x_3+y_2)}+\frac{q_3}{(x_3+y_2)(x_4+y_2)}\\ +\frac{q_4}{(x_4+y_2)(x_5+y_2)}+\frac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}\frac{q_3}{(x_3+y_2)(x_4+y_2)}+\\ \frac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}\frac{q_4}{(x_4+y_2)(x_5+y_2)}+\frac{q_2}{(x_2+y_2)(x_3+y_2)}\frac{q_4}{(x_4+y_2)(x_5+y_2)}\end{array}\right]
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c}
1+\frac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\frac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}+\frac{q_3}{(x_3+y_1)(x_4+y_1)}+ \\
\frac{q_4}{(x_4+y_1)(x_5+y_1)}+\frac{q_5}{(x_5+y_1)(x_6+y_1)}+\frac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}\frac{q_3}{(x_3+y_1)(x_4+y_1)} \\
+\frac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}\frac{q_4}{(x_4+y_1)(x_5+y_1)}+\frac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}\frac{q_5}{(x_5+y_1)(x_6+y_1)} \\
+\frac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}\frac{q_4}{(x_4+y_1)(x_5+y_1)}+\frac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}\frac{q_5}{(x_5+y_1)(x_6+y_1)} \\
+\frac{q_3}{(x_3+y_1)(x_4+y_1)}\frac{q_5}{(x_5+y_1)(x_6+y_1)}+ \\
\frac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}\frac{q_3}{(x_3+y_1)(x_4+y_1)}\frac{q_5}{(x_5+y_1)(x_6+y_1)}
\end{array}\right]$$

Verilen bir $\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyonunun 2-kat Schubert polinomunun quantum çarpanındaki her bir çarpanın tablo gösterimine ∂_i ve s_i'lerin nasıl etki edeceğini bir örnek üzerinden inceleyelim.

$\omega_0 = [4321] \in S_4$ maksimum permütasyonu verilsin. Bu durumda quantum çarpanı,

$$\mathbf{Y}_{[3,2,1]}\,(q_1,q_2) = [1+\frac{q_1}{(x_1+y_2)\,(x_2+y_2)}][1+\frac{q_1}{(x_1+y_1)\,(x_2+y_1)}+\frac{q_2}{(x_2+y_1)\,(x_3+y_1)}]$$

ve tablo gösterimi,

$$\mathbf{Y}_{[3,2,1]}\,(q_1,q_2) \cong \left\{\begin{array}{ccc} q_1 & \boxed{\blacksquare} & \boxed{\blacksquare} \\ & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_2} \left\{\begin{array}{cccc} q_2 & \boxed{\blacksquare} & \boxed{\blacksquare} & \\ q_1 & & \boxed{\blacksquare} & \boxed{\blacksquare} \\ & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_1}$$

şeklindedir.

Tablolara karşılık gelen her bir çarpana $\partial_1, \partial_2, \partial_3, s_1, s_2$ ve s_3 operatörlerini ayrı ayrı sırasıyla uygulayalım.

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}]\partial_1 = 0 \quad , \quad [1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}]\partial_2 = \tfrac{-q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)(x_3+y_2)}$$

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}]\partial_3 = 0 \quad , \quad [1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}]s_1 = [1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}]$$

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}]s_2 = [1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_3+y_2)}]\,,\,[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}]s_3 = [1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}]$$

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\tfrac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}]\partial_1 = \tfrac{q_2}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)(x_3+y_1)}$$

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\tfrac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}]\partial_2 = \tfrac{-q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)(x_3+y_1)}$$

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\tfrac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}]\partial_3 = \tfrac{-q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)(x_4+y_1)}$$

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\tfrac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}]s_1=[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\tfrac{q_2}{(x1+y_1)(x_3+y_1)}]$$

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\tfrac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}]s_2=[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_1)(x_3+y_1)}+\tfrac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}]$$

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\tfrac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}]s_3=[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\tfrac{q_2}{(x_2+y_1)(x_4+y_1)}]$$

Bulduğumuz bu sonuçların da tablo gösterimini ifade edelim. Sonucu 0 gelenlerin tabloları da 0 olarak kabul edilecektir.

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}]\partial_2\cong\left\{\begin{array}{cccc} -q_1 & \multicolumn{3}{c}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline\end{array}} \\ & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right\}^{*}_{y_2}$$ (Burada parantez üzerindeki $*$ işareti karşılık geldiği çarpanın içerisindeki toplamda "1" teriminin olmadığını temsil ediyor.)

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}]s_1\cong\left\{\begin{array}{ccc} q_1 & \multicolumn{2}{c}{\begin{array}{|c|c|}\hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline\end{array}} \\ & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_2}$$

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}]s_2\cong\left\{\begin{array}{cccc} q_1 & \begin{array}{|c|}\hline \blacksquare \\ \hline\end{array} & & \begin{array}{|c|}\hline \blacksquare \\ \hline\end{array} \\ & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_2}$$

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_2)(x_2+y_2)}]s_3\cong\left\{\begin{array}{ccc} q_1 & \multicolumn{2}{c}{\begin{array}{|c|c|}\hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline\end{array}} \\ & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_2}$$

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\tfrac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}]\partial_1\cong\left\{\begin{array}{cccc} q_2 & \multicolumn{3}{c}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline\end{array}} \\ q_1 & & & \\ & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right\}^{*}_{y_1}$$

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\tfrac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}]\partial_2\cong\left\{\begin{array}{cccc} q_2 & & & \\ -q_1 & \multicolumn{3}{c}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline\end{array}} \\ & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right\}^{*}_{y_1}$$

$$[1+\tfrac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\tfrac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}]\partial_3\cong\left\{\begin{array}{ccccc} -q_2 & \multicolumn{3}{c}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline\end{array}} & \\ q_1 & & & & \\ & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right\}^{*}_{y_1}$$

$$[1+\frac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\frac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}]s_1 \cong \left\{\begin{array}{cccc} q_2 & \blacksquare & & \blacksquare \\ q_1 & & \blacksquare & \blacksquare \\ & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_1}$$

$$[1+\frac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\frac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}]s_2 \cong \left\{\begin{array}{cccc} q_2 & \blacksquare & \blacksquare & \\ q_1 & \blacksquare & & \blacksquare \\ & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_1}$$

$$[1+\frac{q_1}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)}+\frac{q_2}{(x_2+y_1)(x_3+y_1)}]s_3 \cong \left\{\begin{array}{ccccc} q_2 & \blacksquare & & \blacksquare & \\ q_1 & & & \blacksquare & \blacksquare \\ & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_1}$$

Şimdi de $1 \leq i \leq 3$ için ∂_i'nin $\mathfrak{S}^q_{[4321]}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum 2-kat Schubert polinomunun tablo gösterimine nasıl etki ettiğini ifade edelim.

$$\mathfrak{S}^q_{[4321]}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_1 \cong \left(\left\{\begin{array}{cccc} y_3 & \square & & \\ y_2 & \square & \square & \\ y_1 & \square & \square & \square \\ & x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{ccc} q_1 & \blacksquare & \blacksquare \\ & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_2} \left\{\begin{array}{cccc} q_2 & \blacksquare & \blacksquare & \\ q_1 & & \blacksquare & \blacksquare \\ & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_1}\right)\partial_1$$

$$= \left\{\begin{array}{cccc} y_3 & \square & & \\ y_2 & \square & \square & \\ y_1 & \square & \square & \square \\ & x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{ccc} q_1 & \blacksquare & \blacksquare \\ & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_2} \left(\left\{\begin{array}{cccc} q_2 & \blacksquare & \blacksquare & \\ q_1 & & \blacksquare & \blacksquare \\ & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_1} \partial_1\right) +$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} y_3 & \square & & \\ y_2 & \square & \square & \\ y_1 & \square & \square & \square \\ & x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right\} \underbrace{\left(\left\{\begin{array}{ccc} q_1 & \blacksquare & \blacksquare \\ & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_2} \partial_1\right)}_{0} \left(\left\{\begin{array}{cccc} q_2 & \blacksquare & \blacksquare & \\ q_1 & & \blacksquare & \blacksquare \\ & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_1} s_1\right) +$$

$$\left(\left\{\begin{array}{cccc} y_3 & \square & & \\ y_2 & \square & \square & \\ y_1 & \square & \square & \square \\ & x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right\} \partial_1\right) \left(\left\{\begin{array}{ccc} q_1 & \blacksquare & \blacksquare \\ & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_2} s_1\right) \left(\left\{\begin{array}{cccc} q_2 & \blacksquare & \blacksquare & \\ q_1 & & \blacksquare & \blacksquare \\ & x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\right\}_{y_1} s_1\right)$$

$$= \left\{ \begin{array}{cccc} y_3 & \square & & \\ y_2 & \square & \square & \\ y_1 & \square & \square & \square \\ & x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} q_1 & \blacksquare & \blacksquare \\ & x_2 & x_1 \end{array} \right\}_{y_2} \left\{ \begin{array}{cccc} q_2 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ q_1 & & & \\ & x_3 & x_2 & x_1 \end{array} \right\}^{*}_{y_1} +$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} y_2 & \square & \square & \\ y_1 & \square & \square & \square \\ & x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} q_1 & \blacksquare & \blacksquare \\ & x_2 & x_1 \end{array} \right\}_{y_2} \left\{ \begin{array}{cccc} q_2 & \blacksquare & & \blacksquare \\ q_1 & & \blacksquare & \blacksquare \\ & x_3 & x_2 & x_1 \end{array} \right\}_{y_1}$$

Benzer şekilde ∂_2ve ∂_3 için de tablo gösterimlerinin nasıl ifade edildiği gösterilebilir.

Herhangi bir $n \geq 2$, $\omega_0 \in S_n$ maksimum permütasyonu için de $1 \leq i \leq n-1$, ∂_i'nin $\mathfrak{S}^q_{\omega_0}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum 2-kat Schubert polinomunun tablo gösterimine nasıl etki ettiği benzer yolla gösterilebilir.

Şimdi de quantum-rasyonel Schubert tanımını ifade edelim.

Tanım 4.133. ***(Quantum-Rasyonel Schubert Polinomu)*** *$u \in \mathbb{N}^n$ kesin baskın parçalanış olsun. u ile indislenmiş quantum-rasyonel Schubert polinomu aşağıdaki şekilde tanımlıdır.*

$$Y^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y}) := \frac{Y^q_{n^n}(\mathbf{x};\mathbf{y})}{Y^q_{u+\mathbf{1}}(\mathbf{x};\mathbf{y})}$$

u'nun kesin baskın olmadığı genel bir $Y^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$'nin hesaplanabilmesi için bir tane kesin baskın parçalanışa ihtiyaç vardır. $\partial_1,\ldots,\partial_{n-1}$ operatörleri yardımı ile bu genel $Y^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ hesaplanabilir.

Örnek 4.134. *$u=[2,0]$ olsun. Bu durumda $n=2$, $2^2=[2,2]$ ve $u+\mathbf{1}=[3,1]$ dir. Sırasıyla $Y^q_{2^2}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ ve $Y^q_{[3,1]}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum 2-kat Schubert polinomlarını hesaplayalım.*

$$Y^q_{2^2}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \mathfrak{S}^q_{[3412]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \mathfrak{S}^q_{[4321]}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial^y_{\underbrace{[3412]\circ[4321]}_{[2143]}}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} (x_1+y_3)\left((x_1+y_2)(x_2+y_2)+q_1\right) \\ \left((x_1+y_1)(x_2+y_1)(x_3+y_1)+q_1(x_3+y_1)+q_2(x_1+y_1)\right) \end{bmatrix} \partial^y_3\partial^y_1 \\ &= x_1^2x_2^2 - q_2x_1^2 + q_1y_1^2 + q_1q_2 + y_1^2y_2^2 + q_1y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_1x_2y_1^2 \\ &\quad -q_2y_1y_2 + q_1^2 + 2q_1x_1x_2 + x_1x_2^2y_1 - q_2x_1y_1 + x_1^2x_2y_1 + q_1x_2y_1 \\ &\quad +q_1x_1y_1 + x_1x_2y_2^2 + x_1y_1y_2^2 + x_2y_1y_2^2 + x_1^2y_1y_2 + x_1x_2^2y_2 + x_2^2y_1y_2 \\ &\quad -q_2x_1y_2 + x_1^2x_2y_2 + q_1x_2y_2 + q_1x_1y_2 + x_1y_1^2y_2 + x_2y_1^2y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y^{q}_{[3,1]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \mathfrak{S}^{q}_{[4213]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \mathfrak{S}^{q}_{[4321]}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial^{y}_{\underbrace{[4213]\circ[4321]}_{[3124]}} \\
&= \begin{bmatrix} (x_1+y_3)\left((x_1+y_2)(x_2+y_2)+q_1\right) \\ \left((x_1+y_1)(x_2+y_1)(x_3+y_1)+q_1(x_3+y_1)+q_2(x_1+y_1)\right) \end{bmatrix} \partial^{y}_{1}\partial^{y}_{2} \\
&= x_1^2y_1^2+q_1x_1y_3+y_1^2y_2y_3+x_2y_1y_2y_3+x_1y_1y_2y_3+x_1x_2y_2y_3+q_1y_2y_3 \\
&\quad +x_1^3y_1-q_1y_1^2-q_1q_2+x_1^3x_2+q_1x_1^2+x_1x_2y_1y_2-q_1^2-q_1x_1x_2 \\
&\quad +x_1^2x_2y_1-q_1x_2y_1-q_1x_1y_1+x_1^2y_1y_2+x_1^2x_2y_2+q_1x_1y_2+x_1y_1^2y_2 \\
&\quad +x_1y_1^2y_3+x_1^2y_1y_3+x_1^2x_2y_3+x_1x_2y_1y_3
\end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
Y^{q,rat}_{[2,0]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \frac{Y^{q}_{2^2}(\mathbf{x};\mathbf{y})}{Y^{q}_{[3,1]}(\mathbf{x};\mathbf{y})} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} x_1^2x_2^2-q_2x_1^2+q_1y_1^2+q_1q_2+y_1^2y_2^2+q_1y_2^2 \\ +2x_1x_2y_1y_2+x_1x_2y_1^2-q_2y_1y_2+q_1^2+2q_1x_1x_2 \\ +x_1x_2^2y_1-q_2x_1y_1+x_1^2x_2y_1+q_1x_2y_1+q_1x_1y_1 \\ +x_1x_2y_2^2+x_1y_1y_2^2+x_2y_1y_2^2+x_1^2y_1y_2+x_1x_2^2y_2 \\ +x_2^2y_1y_2-q_2x_1y_2+x_1^2x_2y_2+q_1x_2y_2 \\ +q_1x_1y_2+x_1y_1^2y_2+x_2y_1^2y_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} x_1^2y_1^2+q_1x_1y_3+y_1^2y_2y_3+x_2y_1y_2y_3+x_1y_1y_2y_3 \\ +x_1x_2y_2y_3+q_1y_2y_3+x_1^3y_1-q_1y_1^2-q_1q_2+x_1^3x_2 \\ +q_1x_1^2+x_1x_2y_1y_2-q_1^2-q_1x_1x_2+x_1^2x_2y_1 \\ -q_1x_2y_1-q_1x_1y_1+x_1^2y_1y_2+x_1^2x_2y_2 \\ +q_1x_1y_2+x_1y_1^2y_2+x_1y_1^2y_3+x_1^2y_1y_3 \\ +x_1^2x_2y_3+x_1x_2y_1y_3 \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 4.135. $u=[0,1]$ *olsun.* u *kesin baskın olmadığından* $Y^{q,rat}_{[0,1]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = Y^{q,rat}_{[2,0]}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_1$ *dir.*

$Y^{q,rat}_{[0,1]}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = Y^{q,rat}_{[2,0]}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_1$

$$= \left(\frac{\left(\begin{array}{c} x_1^2x_2^2 - q_2x_1^2 + q_1y_1^2 + q_1q_2 + y_1^2y_2^2 + q_1y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_1x_2y_1^2 \\ -q_2y_1y_2 + q_1^2 + 2q_1x_1x_2 + x_1x_2^2y_1 - q_2x_1y_1 + x_1^2x_2y_1 + q_1x_2y_1 \\ +q_1x_1y_1 + x_1x_2y_2^2 + x_1y_1y_2^2 + x_2y_1y_2^2 + x_1^2y_1y_2 + x_1x_2^2y_2 + x_2^2y_1y_2 \\ -q_2x_1y_2 + x_1^2x_2y_2 + q_1x_2y_2 + q_1x_1y_2 + x_1y_1^2y_2 + x_2y_1^2y_2 \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} x_1^2y_1^2 + q_1x_1y_3 + y_1^2y_2y_3 + x_2y_1y_2y_3 + x_1y_1y_2y_3 + x_1x_2y_2y_3 \\ +q_1y_2y_3 + x_1^3y_1 - q_1y_1^2 - q_1q_2 + x_1^3x_2 + q_1x_1^2 + x_1x_2y_1y_2 \\ -q_1^2 - q_1x_1x_2 + x_1^2x_2y_1 - q_1x_2y_1 - q_1x_1y_1 + x_1^2y_1y_2 + x_1^2x_2y_2 \\ +q_1x_1y_2 + x_1y_1^2y_2 + x_1y_1^2y_3 + x_1^2y_1y_3 + x_1^2x_2y_3 + x_1x_2y_1y_3 \end{array} \right)} \right) \partial_1$$

$$= \frac{\left(\begin{array}{c} -\left(x_1 + y_1 + y_2 + x_2\right) q_2 \left(\begin{array}{c} y_3x_2q_1 + y_2y_1^2y_3 + y_2x_2y_1y_3 + y_2x_1y_1y_3 \\ +y_2x_1x_2y_3 + y_2q_1y_3 + y_1^2x_2^2 - q_1y_1^2 - q_2q_1 \\ +y_2x_1x_2y_1 - q_1^2 - x_1x_2q_1 + y_1x_2^2x_1 \\ -y_1x_2q_1 - y_1x_1q_1 + y_2x_2^2x_1 + y_2x_2^2y_1 + y_2x_2q_1 \\ +y_2y_1^2x_2 + x_2^3x_1 + x_2^2q_1 + y_1x_2^3 \\ +y_1^2y_3x_2 + y_1x_2y_3x_1 + x_1x_2^2y_3 + y_1x_2^2y_3 \end{array} \right) \\ - \left(\begin{array}{c} -y_1q_2x_2 - y_2q_2x_2 - q_2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + q_1y_1^2 + q_2q_1 \\ +y_2^2y_1^2 + y_2^2q_1 + 2y_2x_1x_2y_1 + x_1y_1^2x_2 - y_2q_2y_1 + q_1^2 \\ +2x_1x_2q_1 + y_1x_2^2x_1 + y_1x_1^2x_2 + y_1x_2q_1 + y_1x_1q_1 + y_2^2x_1x_2 \\ +y_2^2x_1y_1 + y_2^2y_1x_2 + y_2x_1^2y_1 + y_2x_2^2x_1 + y_2x_2^2y_1 + y_2x_1^2x_2 \\ +y_2x_2q_1 + y_2x_1q_1 + y_2x_1y_1^2 + y_2y_1^2x_2 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} x_1^2x_2 + x_1^2y_1 + y_2x_1y_1 + x_1y_1^2 + 2x_1x_2y_1 + x_1y_1y_3 + x_1q_1 \\ +x_1x_2y_2 + x_1x_2y_3 + x_2^2x_1 + q_1y_3 + y_1x_2^2 + q_1y_2 + y_2y_1^2 \\ +y_1^2y_3 + y_2x_2y_1 + y_1^2x_2 + x_2y_1y_3 + x_2q_1 \end{array} \right) \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} x_1^2y_1^2 + y_3x_1q_1 + y_2y_1^2y_3 + y_2x_2y_1y_3 + y_2x_1y_1y_3 + y_2x_1x_2y_3 + y_2q_1y_3 \\ +x_1^3y_1 - q_1y_1^2 - q_2q_1 + x_1^3x_2 + x_1^2q_1 + y_2x_1x_2y_1 - q_1^2 - x_1x_2q_1 \\ +y_1x_1^2x_2 - y_1x_2q_1 - y_1x_1q_1 + y_2x_1^2y_1 + y_2x_1^2x_2 + y_2x_1q_1 \\ +y_2x_1y_1^2 + y_1^2y_3x_1 + x_1^2y_1y_3 + x_1^2x_2y_3 + y_1x_2y_3x_1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} y_3x_2q_1 + y_2y_1^2y_3 + y_2x_2y_1y_3 + y_2x_1y_1y_3 + y_2x_1x_2y_3 + y_2q_1y_3 + y_1^2x_2^2 \\ -q_1y_1^2 - q_2q_1 + y_2x_1x_2y_1 - q_1^2 - x_1x_2q_1 + y_1x_2^2x_1 - y_1x_2q_1 \\ -y_1x_1q_1 + y_2x_2^2x_1 + y_2x_2^2y_1 + y_2x_2q_1 + y_2y_1^2x_2 + x_2^3x_1 + x_2^2q_1 \\ +y_1x_2^3 + y_1^2y_3x_2 + y_1x_2y_3x_1 + x_1x_2^2y_3 + y_1x_2^2y_3 \end{array} \right) \end{array} \right)}$$

Tanım 4.136. ***(Quantum-Rasyonel Key ve Quantum-Rasyonel Grothendieck Polinomu)*** *$u \in \mathbb{N}^n$ kesin baskın parçalanış olsun. u ile indislenmiş quantum-rasyonel Key ve quantum-rasyonel Grothendieck polinomları sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlıdır.*

$$\begin{aligned} K_u^{q,rat}(\mathbf{x}) &: = Y_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{0}) \\ G_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &: = \frac{Y_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})}{K_u^{q,rat}(\mathbf{x})} \end{aligned}$$

u'nun kesin baskın olmadığı genel bir $K_u^{q,rat}(\mathbf{x})$ ve $G_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$'nin hesaplanabilmesi için bir tane kesin baskın parçalanışa ihtiyaç vardır. $\pi_1,\ldots,\pi_{n-1}$ operatörleri yardımı ile bu genel $K_u^{q,rat}(\mathbf{x})$ ve $G_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ hesaplanabilir.

Örnek 4.137. *$u=[2,0]$ olsun. Örnek 4.134'te $Y_{[2,0]}^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum-rasyonel Schubert polinomunda $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ ($y_1=\ldots=y_n=0$) alınırsa $K_{[2,0]}^{q,rat}(\mathbf{x})$ quantum-rasyonel Key polinomunu elde ederiz.*

$$\begin{aligned} K_{[2,0]}^{q,rat}(\mathbf{x}) &= Y_{[2,0]}^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{0}) \\ &= \frac{-x_1^2x_2^2-2x_1x_2q_1-q_1^2+q_2x_1^2-q_2q_1}{x_1x_2q_1+q_1^2+q_2q_1-x_1^3x_2-x_1^2q_1} \end{aligned}$$

$G_{[2,0]}^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum-rasyonel Grothendieck polinomu da aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} G_{[2,0]}^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y}) &= \frac{Y_{[2,0]}^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})}{K_{[2,0]}^{q,rat}(\mathbf{x})} \\ &= \frac{\left(\dfrac{\left(\begin{array}{c} x_1^2x_2^2-q_2x_1^2+q_1y_1^2+q_2q_1+y_2^2y_1^2+y_2^2q_1+2y_2x_1x_2y_1 \\ +x_1y_1^2x_2-y_2q_2y_1+q_1^2+2x_1x_2q_1+y_1x_2^2x_1-y_1q_2x_1 \\ +y_1x_1^2x_2+y_1x_2q_1+y_1x_1q_1+y_2^2x_1x_2+y_2^2x_1y_1+y_2^2y_1x_2 \\ +y_2x_1^2y_1+y_2x_2^2x_1+y_2x_2^2y_1-y_2q_2x_1+y_2x_1^2x_2+y_2x_2q_1 \\ +y_2x_1q_1+y_2x_1y_1^2+y_2y_1^2x_2 \end{array}\right)}{(x_1x_2q_1+q_1^2+q_2q_1-x_1^3x_2-x_1^2q_1)}\right)}{\left(\dfrac{\left(\begin{array}{c} x_1^2y_1^2+y_3x_1q_1+y_2y_1^2y_3+y_2x_2y_1y_3+y_2x_1y_1y_3+y_2x_1x_2y_3 \\ +y_2q_1y_3+x_1^3y_1-q_1y_1^2-q_2q_1+x_1^3x_2+x_1^2q_1+y_2x_1x_2y_1 \\ -q_1^2-x_1x_2q_1+y_1x_1^2x_2-y_1x_2q_1-y_1x_1q_1+y_2x_1^2y_1 \\ +y_2x_1^2x_2+y_2x_1q_1+y_2x_1y_1^2+y_1^2y_3x_1+x_1^2y_1y_3 \\ +x_1^2x_2y_3+y_1x_2y_3x_1 \end{array}\right)}{(-x_1^2x_2^2-2x_1x_2q_1-q_1^2+q_2x_1^2-q_2q_1)}\right)} \end{aligned}$$

Önerme 4.138. *$u \in \mathbb{N}^n$ kesin baskın bir parçalanış olmak üzere,*

$$\begin{aligned} Y_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} &= Y_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y}) \\ K_u^{q,rat}(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} &= K_u^{rat}(\mathbf{x}) \\ G_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} &= G_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y}) \end{aligned}$$

dir.

İspat $u \in \mathbb{N}^n$ kesin baskın bir parçalanış olsun.

$$\begin{aligned} Y_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} &= \left.\frac{Y_{n^n}^q(\mathbf{x};\mathbf{y})}{Y_{u+\mathbf{1}}^q(\mathbf{x};\mathbf{y})}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \\ &= \frac{Y_{n^n}^q(\mathbf{x};\mathbf{y})\big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}}{Y_{u+\mathbf{1}}^q(\mathbf{x};\mathbf{y})\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}} \end{aligned}$$

olur. Sonuç 3.119'dan,

$$\frac{Y_{n^n}^q(\mathbf{x};\mathbf{y})\big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}}{Y_{u+\mathbf{1}}^q(\mathbf{x};\mathbf{y})\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}} = \frac{Y_{n^n}^q(\mathbf{x};\mathbf{y})}{Y_{u+\mathbf{1}}^q(\mathbf{x};\mathbf{y})}$$

dir. Bu durumda,

$$Y_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \frac{Y_{n^n}^q(\mathbf{x};\mathbf{y})}{Y_{u+\mathbf{1}}^q(\mathbf{x};\mathbf{y})} = Y_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$$

elde edilir.

Benzer şekilde $K_u^{q,rat}(\mathbf{x})\big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = K_u^{rat}(\mathbf{x})$ ve $G_u^{q,rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})\big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = G_u^{rat}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ olduğu görülebilir. □

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasının 4. bölümünde $Y^{rat}_{\underbrace{[0,0,\ldots,0,1]}_{n-1 \text{ defa } 0}}(\mathbf{x};\mathbf{0})$ rasyonel Schubert polinomunun elementer simetrik polinomlar cinsinden $(-1)^{l(\omega_0)}\frac{e^n_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)}{e^n_n(x_1,\ldots,x_n)}$'e eşit olduğu gözlemlenmiştir. u kesin baskın kod olduğunda, $Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_i$ ifadesinin yine $Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ cinsinden ifade edilebileceği görülmüş ve $Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\partial_i = -Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\frac{Y_{u+\mathbf{1}}(\mathbf{x};\mathbf{y})\partial_i}{Y_{u+\mathbf{1}}(\mathbf{x};\mathbf{y})s_i}$ eşitliği elde edilmiştir. E^n_m quantum elementer simetrik polinomları için genel bir kapalı formül elde edilmiş ve formülden bu polinomun terim sayısı formülü elde edilmiştir. Bu terim sayısı formülünde $m=n$ alınırsa terim sayısının n-inci Fibonacci sayısına karşılık geldiği sonucuna varılmıştır. $u=[n-1,n-2,\ldots,1]$ için $Y_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ 2-kat Schubert polinomunun quantum çarpanı tanımı verilmiş ve bu çarpan $\mathbf{Y}_u(q_1,\ldots,q_{n-2})$ ile gösterilmiştir. $\mathfrak{S}^q_{[n(n-1)\cdots 1]}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum 2-kat Schubert polinomunun $Y_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\,\mathbf{Y}_u(q_1,\ldots,q_{n-2})$ çarpımıyla ifade edilebileceği söylenmiştir. $\mathbf{Y}_u(q_1,\ldots,q_{n-2})$ quantum çarpanı için de bir tablo gösterimi verilmiş ve $\mathfrak{S}^q_{[n(n-1)\cdots 1]}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum 2-kat Schubert polinomunun bunlar yardımıyla tablo gösterimi ifade edilmiştir. Tanımlanan quantum çarpanının her bir çarpanının tablo gösterimi ile E^i_i lerin ilişkisi ifade edilmiştir. Bu tablo gösterimi ile formül kullanmadan $\mathfrak{S}^q_{[n(n-1)\cdots 1]}(\mathbf{x};\mathbf{y})$'nin nasıl yazılabileceği ilişkilendirilmiştir.
$\mathfrak{S}^q_{[n(n-1)\cdots 1]}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ için tanımlanan tablo gösterimine ∂_i'lerin nasıl etki ettiğinden bahsedilmiştir. Verilen bir $u\in\mathbb{N}^n$ kesin baskın kodu için $Y^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum-rasyonel Schubert polinomu tanımı verilmiştir. u'nun kesin baskın olmadığı durumda $Y^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum-rasyonel Schubert polinomu için uygun bir kesin baskın parçalanış bulunup $\partial_1,\ldots,\partial_{n-1}$ operatörleri yardımıyla nasıl hesaplanabileceği söylenmiştir. $Y^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum-rasyonel Schubert polinomu yardımıyla $K^{q,rat}_u(\mathbf{x})$ quantum-rasyonel Key ve $G^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum-rasyonel Grothendieck polinomlarının tanımı verilmiştir. u'nun kesin baskın olmadığı durumda $K^{q,rat}_u(\mathbf{x})$ quantum-rasyonel Key ve $G^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ quantum-rasyonel Grothendieck polinomları için uygun bir kesin baskın parçalanış bulunup $\pi_1,\ldots,\pi_{n-1}$ operatörleri yardımıyla nasıl hesaplanabileceği söylenmiştir. $Y^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = Y^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$, $K^{q,rat}_u(\mathbf{x})\big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = K^{rat}_u(\mathbf{x})$ ve $G^{q,rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})\big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = G^{rat}_u(\mathbf{x};\mathbf{y})$ eşitlikleri ispatlanmıştır.

6. KAYNAKLAR

Borel A. 1953. *Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes des groupes de Lie compacts. Ann. Math. 57, 115-207.*

Bernstein I. N., Gelfand I. M. and Gelfand S.I. 1973. *Schubert cells and cohomology of spaces G/P. Russian Mathematical Surveys 28, no. 3, 1-26.*

Demazure M. 1974. *Desingularization des varietes de Schubert generalisees. Ann. Sc. E. N. S. 4, no. 7, 53-88.*

Lascoux A. and Schützenberger M.-P. 1982. *Polyn^omes de Schubertt. C. R. Acad. Sci. Paris 294, 447-450.*

Macdonald I. G. 1991. *Notes on Schubert polynomials. Publications du L.A.C.I.M., vol. 6, Université du Québec, Montréal.*

Billey S. and Haiman M. 1995. *Schubert polynomials for the classical groups. J. AMS 8, no. 2, 443-482.*

Winkel R. 1996. *Recursive and combinatorial properties of Schubert polynomials. Sem. Loth. Comb. B38c, 29 pp.*

Ciocan-Fontanine I. and Fulton W. 1996. *Quantum double Schubert Polynomials. Institut Mittag-Leffler report no. 6, Appendix J in [FP].*
http://www-users.math.umn.edu/~cioca001/papers/qdsp.ps

Kirillov A.N. and Maeno T. 1996. *Quantum double Schubert polynomials, quantum Schubert polynomials and Vafa-Intriligator formula. Discrete Mathematics 217, 191-223.*

Kirillov A. N. 1996. *Quantum Grothendieck Polynomials. Algebraic Methods and q-Special Functions, 215-226.*

Fomin S., Gelfand S. and Postnikov A. 1997. *Quantum Schubert Polynomials. J. AMS 10, no.3, 565-596.*

Fulton W. 1997. *Young tableaux. Cambridge Univ. Press.*

Kohnert A. and Veigneau S. 1997. *Using Schubert basis to compute with multivariate polynomials. Advances in Applied Mathematics 19, 45-60.*

Manivel L. 1998. *Fonctions symetriques, polynomes de Schubert et lieux de degenerescence. Course Specialises, no. 3, Soc. Math. France.*

Stanley R. P. 1999. *Enumerative combinatorics. Bulletin of the AMS 39, no. 1, 129-135.*

Postnikov A. 2004. *Quantum bruhat graph and Schubert polynomials. Proceeding of the AMS 133, no. 3, 699-709.*

Karakaş H. İ. 2010. *Cebir Dersleri. TÜBA Press.*

Lascoux A. 2013. *Polynomials. Available online at* http://phalanstere.univ-mlv.fr/al/ARTICLES/CoursYGKM.pdf.

Lam T. and Shimozono M. 2013. *Quantum double Schubert polynomials represent Schubert classes. Proceeding of the AMS 142, no. 3, 835-850.*

Aker K. and Tutaş N. 2015. *Rational Schubert polynomials. Turk J Math 39, 439-452.*

ÖZGEÇMİŞ

ECE ÇELİKOĞLU

E-mail: ece_celik_1993@hotmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans: 2017-2021	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Antalya
Lisans: 2013-2017	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen 2020-Devam Ediyor	Kağızman Anadolu Lisesi / Kars MEB Öğretmen