

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK MERTEBEDEN ELASTİSİTE TEORİLERİYLE MİKRO VE NANO
YAPILARIN LİNEER VE LİNEER OLMAYAN ANALİZLERİ**

Bekir AKGÖZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

2010

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YÜKSEK MERTEBEDEN ELASTİSİTE TEORİLERİYLE MİKRO VE NANO
YAPILARIN LİNEER VE LİNEER OLMAYAN ANALİZLERİ**

Bekir AKGÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu tez/....../ 2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (.....) not takdir edilerek Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ömer CİVALEK (Danışman).....

Yrd. Doç. Dr. Hakan ERSOY.....

Yrd. Doç. Dr. N. Uğur KOÇKAL.....

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN ELASTİSİTE TEORİLERİYLE MİKRO VE NANO YAPILARIN LİNEER VE LİNEER OLMAYAN ANALİZLERİ

Bekir AKGÖZ

**Yüksek Lisans Tezi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Ömer CİVALEK
Aralık 2010, 72 Sayfa**

Bu çalışmada, yüksek mertebeden elastisite teorilerinden Değiştirilmiş Gerilme Çifti (DGÇ) ve Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi (DŞDD) Elastisite Teorileri kullanılarak bir mikro kirişin eğilme ve burkulma analizleri yapılmıştır. Bernoulli-Euler ve Timoshenko kiriş modelleri kullanılmıştır. Basit ve ankastre mesnet koşullarında çeşitli yüklemeler için sonuçlar elde edilmiş ve denklemlerdeki ilave malzeme boyut parametrelerinin etkisi incelenmiştir. Hem eğilme hem de burkulma analizleri sonuçlarına bakıldığında, Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi (DŞDD) Elastisite Teorisi ile elde edilen değerlerin klasik teoriyle ulaşılan değerlerden çok farklı olduğu tespit edilmiştir. Bunun yanı sıra, Değiştirilmiş Gerilme Çifti (DGÇ) Elastisite Teorisi ile elde edilen değerlerin klasik teorideki sonuçlara nispeten daha yakın olduğu görülmüştür.

ANAHTAR KELİMLER: Değiştirilmiş Gerilme Çifti Elastisite Teorisi, Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi Elastisite Teorisi, mikro kiriş modeli, eğilme ve burkulma analizi.

JÜRİ: Doç. Dr. Ömer CİVALEK (Danışman)
Yrd. Doç. Dr. Hakan ERSOY
Yrd. Doç. Dr. N. Uğur KOÇKAL

ABSTRACT

LINEAR AND NONLINEAR ANALYSES OF MICRO AND NANO STRUCTURES BASED ON HIGHER-ORDER ELASTICITY THEORIES

Bekir AKGÖZ

M.Sc. Thesis in Civil Engineering
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ömer CİVALEK
December 2010, 72 pages

In this study, bending and buckling analyses of micro and nano beams have been investigated by modified couple stress theory and modified strain gradient elasticity theory. Bernoulli-Euler and Timoshenko beam models are used. Results are obtained for various loading at simply and cantilever boundary conditions. The effect of additional material length scale parameters in equations is observed. When the results of both bending and buckling analyses are investigated, it is determined that the values which are obtained by Modified Strain Gradient Elasticity Theory are very different than the values of classical theory. Furthermore, the values based on Modified Couple Stress Theory are comparatively closer to the values of classical theory than Modified Strain Gradient Theory.

KEY WORDS: Modified Couple Stress Elasticity Theory, Modified Strain Gradient Elasticity Theory, micro beam, bending and buckling analysis.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Ömer CİVALEK (Advisor)
Asst. Prof. Dr. Hakan ERSOY
Asst. Prof. Dr. N. Uğur KOÇKAL

ÖNSÖZ

Nanoteknoloji veya nano bilim, genel görüşe göre 1–100 nm boyutlarındaki maddelerin anlaşılması, kontrol edilmesi ve atomsal seviyede değiştirilip işlevsel hale getirilmesi olarak tarif edilmektedir. Nanoteknolojinin, çeşitli disiplinler arası konuma ve birçok alanda da potansiyel etkilere sahip olmasından dolayı, gelişmiş ve gelişmekte olan birçok ülke tarafından en kritik araştırma alanı olarak desteklenmektedir. Nanoteknolojinin gelecekteki uygulama alanları; malzeme ve imalat sektörü, nano elektronik ve bilgisayar teknolojileri, sağlık sektörü, havacılık ve uzay araştırmaları, çevre ve enerji, savunma sektörü olarak sıralanabilir.

Araştırmacıların mikro ve nano boyutlarda çalışmaya başlamasıyla birlikte birçok problemin de ortaya çıktığı görülmüştür. Nano boyutlara gelindiğinde kuantum gibi farklı fizik kurallarının işlemeye başladığı, geleneksel malzeme özelliklerinin değiştiği ve yüzey davranışının bütün malzemeyi daha baskın bir biçimde etkilediği görülmüştür. Geleneksel (klasik) elastisite teorileriyle oluşturulan modellerle tam olarak deneysel sonuçlara ulaşamamıştır. Ortaya çıkan bu hatayı yok etmek için ilave malzeme boyut parametrelerinin yer aldığı yüksek mertebeden elastisite teorileri kullanılmaya başlanmıştır. Bu çalışmada, Değiştirilmiş Gerilme Çifti (DGC) ve Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi (DŞDD) Elastisite Teorileri kullanılarak bir mikro kirişin eğilme ve burkulma analizi yapılmıştır.

Bu çalışma sürecinde bana yol gösteren ve benden yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ömer CİVALEK'e ve hayatımın her aşamasında bana maddi-manevi her türlü desteği veren aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMALARI.....	3
3. MATERYAL ve METOT.....	7
3.1. Değiştirilmiş Gerilme Çifti (DGÇ) Elastisite Teorisi.....	7
3.1.1. Bernoulli-Euler kiriş modeli.....	9
3.1.1.1. Eğilme problemi	13
3.1.1.2. Burkulma problemi.....	17
3.1.2. Timoshenko kiriş modeli.....	19
3.1.2.1. Eğilme problemi.....	24
3.2. Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi (DŞDD) Elastisite Teorisi.....	26
3.2.1. Bernoulli-Euler kiriş modeli.....	27
3.2.1.1. Eğilme problemi.....	32
3.2.1.2. Burkulma problemi.....	36
3.2.2. Timoshenko kiriş modeli.....	40
3.2.2.1. Eğilme problemi.....	46
3.3. Lineer Olmayan Analiz.....	48
3.3.1. Lineer olmayan davranış nedenleri.....	48
3.3.2 Lineer olmayan Bernoulli-Euler kiriş modeli.....	51
4. SAYISAL SONUÇLAR ve TARTIŞMA.....	54
5. SONUÇ.....	67
6. KAYNAKLAR.....	68
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

A	Kiriş enkesit alanı
$\beta(x,t)$	Kirişin merkez ekseninin kayma deformasyonundan oluşan dönme
C_i	İntegral sabitleri ($i = 1 - 6$)
e_{ijk}	Permütasyon sembolü
E	Young modülü
$\varepsilon_{mm,i}$	Dilatasyon (genleşme) değişimi vektörü
ε_{ij}	Şekil değiştirme tansörü
ε'_{ij}	Deviatorik şekil değiştirmeler
f_i	Cismin kütlesi veya cisme etki eden kuvvet
F	Lagrange Fonksiyonu
ψ	Kirişin merkez ekseninin dönme açısı
μ	Kayma modülü (G)
μ_x	Gerilme çiftleri
I	Enkesit alanın atalet momenti
k	Hacim modülü
k_s	Timoshenko düzeltme faktörü
χ_{ij}	Eğrilik tansörü
χ_{ij}^s	Simetrik dönme değişimi tansörü
l_0	Dilatasyon değişimi malzeme parametresi
l_1	Deviatorik gerilme değişimi malzeme parametresi
l_2	Dönme değişimi malzeme parametresi
λ ve μ	Lame sabitleri
M_x	Bileşke moment
M_c	Klasik eğilme momenti

M_{nc}	Klasik olmayan eğilme momenti
m_{ij}^s	Yüksek mertebeli gerilme tansörü
N	Eksenel normal kuvvet
N_a	İlave eksenel kuvvet
N_{cr}	Kritik burkulma yükü
$\eta_{ijk}^{(1)}$	Deviatorik uzama değişimi tansörü
ν	Poisson oranı
$\partial\Omega$	Cismin kapladığı alan
Ω	Cismin kapladığı hacim
Π	Kirişteki toplam potansiyel enerji
$q(x)$	x eksenine boyunca düzgün yayılı dış yük
ρ	Cismin kütle yoğunluğu
δ	Varyasyon sembolü
δ_{ij}	Kronecker delta
σ_{ij}	Gerilme tansörü,
s_i	Yüzey çifti
T	Sistemin kinetik enerjisi
$\tau_{ijk}^{(1)}$	Yüksek mertebeli gerilme tansörü
θ	Dönme vektörü
Q	Kesme kuvveti
U	Şekil değiştirme enerjisi
U_m	Eğilmeden kaynaklanan şekil değiştirme enerjisi
U_s	Eksenel kuvvetten dolayı biriken şekil değiştirme enerjisi
u_i	Deplasman vektörü
u	x in deplasman vektörünün u bileşeni
v	y nin deplasman vektörünün u bileşeni
w	z nin deplasman vektörünün u bileşeni
W	Dış kuvvetlerin yaptığı iş
Y_{xy}	Moment çifti

Kısaltmalar

AKM	Atomik Kuvvet Mikroskobu
DGÇ	Değiştirilmiş Gerilme Çifti Elastisite Teorisi
DŞDD	Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi Elastisite Teorisi
KT	Klasik (Geleneksel) Elastisite Teorisi
nm	Nanometre
TTM	Taramalı Tünelleme Mikroskobu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Gerilme ve çift gerilmelerin kartezyen bileşenleri.....	7
Şekil 3.2. Düzgün yayılı yük altında basit mesnetli kiriş geometrisi.....	14
Şekil 3.3. Tekil yük altında ankastre mesnetli bir kirişin geometrisi.....	15
Şekil 3.4. Düzgün yayılı yük altında ankastre mesnetli bir kirişin geometrisi.....	16
Şekil 3.5. Orta noktasında tekil yüklü basit mesnetli bir kirişin geometrisi.....	24
Şekil 4.1. Düzgün yayılı yük altında Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametresine göre deplasman değerleri (DGÇ).....	55
Şekil 4.2. Düzgün yayılı yük altında Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametresine göre dönme değerleri (DGÇ).....	55
Şekil 4.3. Düzgün yayılı yük altında Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre deplasman değerleri (DŞDD).....	56
Şekil 4.4. Düzgün yayılı yük altında Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre dönme değerleri (DŞDD).....	56
Şekil 4.5. Ortasından tekil yüklü Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametresine göre deplasman değerleri (DGÇ).....	57
Şekil 4.6. Ortasından tekil yüklü Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre deplasman değerleri (DŞDD).....	58
Şekil 4.7. Ortasından tekil yüklü Timoshenko basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre deplasman değerleri (DŞDD).....	59
Şekil 4.8. Ortasından tekil yüklü Timoshenko basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre dönme değerleri (DŞDD).....	59
Şekil 4.9. Uç noktasında tekil yüklü Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre deplasman değerleri (DŞDD).....	60
Şekil 4.10. Uç noktasında tekil yüklü Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre dönme değerleri (DŞDD).....	61
Şekil 4.11. Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametresine göre kritik burkulma yükü değerleri (DGÇ).....	62
Şekil 4.12. Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre kritik burkulma yükü değerleri (DŞDD).....	62

Şekil 4.13. Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametresine göre kritik burkulma yükü değerleri (DGÇ).....	63
Şekil 4.14. Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin farklı ilave malzeme boyut parametrelerine göre kritik burkulma yükü değerleri (DŞDD).....	63
Şekil 4.15. Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin ilk üç modu için burkulma yükü değerlerinin ilave malzeme parametresine göre değişimi (DGÇ)	64
Şekil 4.16. Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin ilk üç modu için burkulma yükü değerlerinin ilave malzeme parametrelerine göre değişimi (DŞDD).....	65
Şekil 4.17. Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin yüksekliğine bağlı olarak farklı teorilerde kritik burkulma yükü değerleri ($l = 17.6 \mu m$).....	66
Şekil 4.18. Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin yüksekliğine bağlı olarak farklı teorilerde kritik burkulma yükü değerleri ($l = 17.6 \mu m$).....	66

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Ortasından tekil yüklü basit mesnetli kirişin farklı l değerlerine göre maksimum deplasman değerlerinin değişimi.....	58
Çizelge 4.2. Basit mesnetli kirişin farklı l değerlerindeki ilk üç modu için burkulma değerleri, $N(10^3 \mu N)$	65

1. GİRİŞ

Günümüzde, nanoteknolojinin birçok gelişmiş ve gelişmekte olan ülke tarafından en kritik araştırma alanı olarak görülmesi, araştırmacıları mikro ve nano boyutlu yapılar üzerinde yoğun bir biçimde çalışmaya sevk etmiştir. Ancak boyutların küçülmesiyle yapılan çalışmaları izlemek de güç hale gelmiştir. 1980'lerde Taramalı Tünelleme Mikroskobu (TTM) ve sonrasında onun bir türevi olan Atomik Kuvvet Mikroskobu (AKM)'nun keşfi, ayrıca bunlarla eş zamanlı olarak gelişen bilgisayar kapasiteleri ile çok küçük boyutlarda ölçüm ve modelleme yapılması mümkün olmuştur.

Özellikle metrenin milyonda ve milyarda biri (mikro ve nano) boyutlarındaki yapıların mekanik davranışları son yıllarda bilim dünyasının fazlaca ilgisini çeken bir çalışma alanı haline gelmiştir. Bu tip yapılara örnek olarak, nanoplak, mikro kiriş, mikro elektrik devre elemanları ve Atomik Kuvvet Mikroskobu (AKM) verilebilir. Bu sistemlerin fonksiyonelliği ve en uygun biçimde boyutlandırılması için mekanik davranış özelliklerinin çok iyi belirlenmesi gerekmektedir. Hem deneysel olarak hem de atomik seviyede oluşturulan modellerle bu yapıların mekanik davranışları tespit edilmiştir. Ancak atomik düzeydeki yaklaşımlarda (atomistik, hibrid atomistik-sürekli mekanik gibi) daha çok sayısal hesaplama ve buna bağlı olarak da daha fazla zamana ihtiyaç duyulduğu görülmüştür. Bu nedenle bu konu ile ilgilenen araştırmacılar, kiriş ve kabuk şeklinde modellemelerin yapıldığı sürekli ortam mekaniği yaklaşımlarına yönelmişlerdir.

Bu çalışmalarda, boyut etkisinin varlığı ve mekanik davranışa olan etkisi deneysel olarak gösterilmiştir (Lakes 1986, 1995, Lam vd. 2003). Klasik (makro) elastisite teorileriyle oluşturulan modellerde boyut etkisi dahil edilemediğinden deneysel yolla elde edilen sonuçlara tam olarak ulaşılammıştır. Ortaya çıkan hatayı yok etmek için de yüksek mertebeden elastisite teorileriyle oluşturulan modeller kullanılmaya başlanmıştır. Bu teorilerden en yaygın olarak bilinenleri, Cosserat (Mikropolar) elastisite, lokal olmayan elastisite, gerilme çifti, yüzey enerjili basit şekil değiştirme değişimi ve şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi şeklinde sıralanabilir. Son yıllarda bu teorileri daha basit hale getirmek için yukarıdaki teorilere ek olarak Değiştirilmiş

Gerilme Çifti (DGC) ve Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi (DŞDD) Elastisite Teorileri kullanılmaya başlanmıştır.

2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMALARI

Elastisite, dış kuvvetlerin etkisi altındaki bir elastik katıdaki gerilme, şekil değiştirme ve deplasman dağılımının belirlenmesiyle uğraşan sürekli ortamlar mekaniği dalıdır. Burada, doğrusal küçük deformasyon teorisindeki genel varsayımlarla pek çok mühendislik ve bilim dalındaki uygulamalarda karşılaşılan birçok problemin çözümü için matematiksel model kurulur.

Elastisite Teorisi'nin, inşaat mühendisliği uygulamalarında çubuk, kiriş, plak ve kabuk elemanlardan oluşmuş yapıların gerilme ve şekil değiştirme analizlerinde önemli katkısı bulunmaktadır. İlave uygulamalar olarak, jeomekanikte, toprak, kaya, beton ve asfalt gibi malzemelerin gerilmelerinin hesabı; makine mühendisliğinde, makine parçalarının analiz ve tasarımlarında sıklıkla kullanılır. Bunlardan bazıları, uygulamada sıkça karşılaşılan genel gerilme analizi, temas gerilmeleri, ısıl gerilme analizi, kırılma mekaniği ve yorulmadır. Ayrıca, makine mühendisliği elastisiteyi kristal katılarda dislokasyon çevresinde ve mikro yapıli malzemelerde gerilme bölgesini belirlemede kullanır. Havacılık ve uzay mühendisliğindeki uygulamaları, hava ve uzay taşıtlarındaki gerilme, çatlak ve yorulma analizlerini içerir.

Elastisite Teorisi, deformasyon probleminin matematiksel modelini oluşturur ve dolayısıyla formülasyon ile çözüm yöntemlerini anlamak için matematik bilgisine ihtiyaç duyulur. Yönetici kısmi diferansiyel denklemler, genelde vektör ve tansör diliyle formüle edilmiş sürekli mekaniğin temel ilkelerinin kullanılmasıyla geliştirilir. Bu eşitlikleri çözmek için kullanılan teknikler Fourier Yöntemleri, varyasyonel hesaplama, integral dönüşümleri, kompleks değişkenler, sonlu farklar, sonlu elemanlar vb. şekilde sıralanabilir.

Malzemelerin mukavemeti ile ilgili ilk çalışmalar 1638 yılında İtalyan bilim adamı Galileo Galilei tarafından yapılmıştır. Rijit bir ankastre kirişin kendi ağırlığı altındaki dayanımını bulmaya çalışmıştır. Fakat gerilme ve şekil değiştirme kavramlarını keşfedememiştir. Daha sonra, elastik kuvvet-deformasyon ilişkisi ilk kez 1678 yılında Robert Hooke tarafından kurulmuştur. Fakat buna rağmen elastisitenin matematiksel

fomülasyonunun büyük kısmı 19.yy.a kadar geliştirilememiştir. 1821’de Navier genel denge denklemleri üzerindeki incelemelerini sundu ve bunu temel elastisite denklemleri üzerinde çalışan ve bir noktadaki gerilme notasyonunu geliştiren Cauchy’nin çalışmaları takip etti. Elastisite Teorisi’nin gelişmesinde önemli katkıları bulunan bilim adamları ve matematikçileri şöyle sıralayabiliriz: Bernoulliler, Lord Kelvin, Poisson, Lamé, Green, Saint-Venant, Betti, Airy, Kirchhoff, Love, Lord Rayleigh, Timoshenko, Kolosoff vd.

İkinci Dünya Savaşı’ndan sonra yaklaşık 20 yıl içerisinde mühendisliğin merak konusu olan özel problemlere analitik çözümler büyük ölçüde üretilmiştir. 1970 ve 1980’ler sonlu ve sınır eleman teorilerinin kullanımıyla sayısal yöntemler üzerinde hayli çok çalışmayı içermektedir. Ayrıca bu zaman diliminde elastisite, izotropik olmayan kompozit malzemelerin uygulamasında da kullanılmıştır.

Son zamanlarda elastisite içsel hataları ya da homojensizlikleriyle malzemelerin mikro mekanik modellenmesinde kullanılmaktadır. Modern sürekli ortamlar mekaniğinin 1960’larda yeniden doğuşu, elastisitenin temellerinin incelenmesinde bir yol olmuştur (Fung 1965).

Klasik (makro) elastisite teorilerinin yeterli olmadığı, boyut etkisinin önemli olduğu nanotüp, nanoplak, mikrotüpçük, mikro elektrik devre elemanları, AKM gibi nano ve mikro ölçekli yapılarda iç malzeme uzunluğu boyut parametresi olmaksızın, klasik giriş modelleriyle bu mikro yapıya bağlı boyut etkisi yorumlanamamış ve bu nedenle ek malzeme boyut parametresi içeren yüksek mertebeden elastisite teorilerine ihtiyaç duyulmuştur (Hung ve Senturia 1999, Moser ve Gijs 2007).

Yüksek mertebeden elastisite teorileriyle ilgili ilk çalışma 1900’lü yılların başında Cosserat Kardeşler tarafından oluşturulan Cosserat (Mikropolar) Elastisite Teorisi’dir (Cosserat ve Cosserat 1909). Bu teori, noktaların lokal bir dönmesini klasik elastisitede varsayılan ötelenme gibi ve bir gerilme çiftini (birim alandaki tork) kuvvet gerilmesi (birim alandaki kuvvet) gibi denklemlere dahil eder. Klasik elastik bir katıda 2 tane elastik sabit (Lamé sabitleri) olmasına karşın, izotropik Cosserat katısında 6 tane elastik sabit ($\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ ve κ) bulunur. 1966 yılında Eringen denklemlere mikro ataleti dahil

etmiş ve Cosserat Elastisite'yi, Mikropolar Elastisite olarak adlandırmıştır (Eringen ve Şuhubi 1964a, 1964b, Eringen 1966). Bu teori, Cosserat (mikropolar elastik) malzemenin dairesel silindirik kirişin eğilme rijitliğini analitik olarak belirlemek için kullanılmıştır (Krishna Reddy ve Venkotasularamanian 1979). Çeşitli polimerik köpüklerden imal edilmiş çubukların eğilme rijitliği üzerindeki numune boyutu etkisi hem deneysel hem de Cosserat (Mikropolar Elastisite) Teorisi kullanılarak incelenmiştir (Lakes 1983, 1986, 1995).

Eringen tarafından önerilen, 2 ek malzeme sabiti içeren lokal olmayan elastisite teorisi, mikro ve nano boyuttaki yapıların analizinde yaygın bir biçimde kullanılmakta olan yüksek mertebeden elastisite teorilerindedir. Bu teoride, bir cismin üzerindeki herhangi bir x referans noktasındaki gerilme halinin, sadece o noktadaki şekil değiştirme bileşenlerine bağlı olmadığı ayrıca cismin üzerindeki tüm noktalardaki şekil değiştirmelerinin de dikkate alınması gerektiği belirtilmiştir (Eringen 1983). Bu teoriyle ilgili literatürde özellikle karbon nanotüpün modellenmesi ve analizi ile ilgili birçok yayın bulunmaktadır (Peddieson vd. 2003, Wang vd. 2006, Lu vd. 2007, Reddy 2007a, Wang vd. 2007, Li vd. 2008, Reddy ve Pang 2008, Pradhan ve Phadikar 2009, Civalek ve Akgöz 2010, Civalek vd. 2010, Hao vd. 2010).

4 malzeme sabiti içeren (2 klasik, 2 ek) izotropik elastik malzemeler için yüksek mertebeden elastisite teorilerinden olan klasik gerilme çifti elastisite teorisinin oluşturulmasında birçok araştırmacı yer almaktadır (Toupin 1962, Mindlin ve Tiersten 1962, Mindlin 1963, Koiter 1964). Bu teori, dairesel bir silindirin eğilmesinin modellenmesinde kullanılmıştır (Anthoine 2000).

Mikro yapılardaki malzeme boyut parametresini belirlemenin zorluğundan dolayı lokal olmayan kiriş modellerinin sadece tek bir ilave malzeme boyut parametresi içermesi arzu edilir. Bu nedenle, son yıllarda bu konu üzerindeki çalışmalar hızlanmıştır. Bu çalışmaların sonucunda, Yang vd. (2002) tarafından Değiştirilmiş Gerilme Çifti Elastisite Teorisi önerilmiştir. Klasik gerilme çifti teorisinden farklı olarak bu teoride, gerilme çifti tansörü simetriktir ve yalnız bir tane ilave malzeme boyut parametresine ihtiyaç duyulur. Literatürde, değiştirilmiş gerilme çifti teorisi kullanılarak

yapılmış pek çok statik ve dinamik analiz yer almaktadır (Park ve Gao 2006, 2008, Gao ve Park 2007, Kong vd. 2008, Ma vd. 2008, Tsiatas 2009, Fu ve Zhang 2010, Akgöz ve Civalek 2010a, 2010b).

Kuvvetlerin ve kuvvetlerin momentlerinin klasik denge denklemlerine ek olarak yüksek mertebeli gerilmeleri ve çiftlerin momentlerinin dengesini yöneten yeni bir ek denge denklemi içeren Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi Elastisite Teorisi (DŞDD), Lam vd. (2003) tarafından sunulmuştur. Bu teorinin yönetici denklemleri, doğrusal elastik izotropik malzemeler için 2 klasik malzeme parametresine ek olarak sadece 3 bağımsız ilave malzeme boyut parametresi içermektedir. Son yıllarda, değiştirilmiş şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi kullanılarak statik ve dinamik analiz yapılmıştır (Kong vd. 2009, Wang vd. 2010, Akgöz ve Civalek 2010a, 2010b).

Yukarıdakilerin dışında literatürde Vardoulakis ve Sulem (1995) tarafından önerilen ve 4 elastik sabit (2 klasik, 2 klasik olmayan) içeren Yüzey Enerjili Basit Şekil Değiştirme Değişimi Elastisite Teorisi ile ilgili pek çok giriş ve plak yayını yer almaktadır (Tsepoura vd. 2002, Papargyri-Beskou vd. 2003, Lazopoulos 2004, 2009).

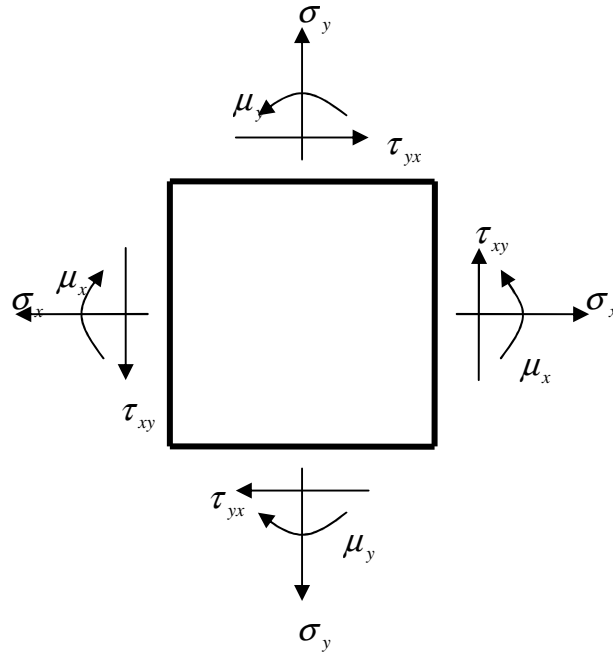
Bu tez kapsamında, Değiştirilmiş Gerilme Çifti (DGÇ) ve Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi Elastisite Teorileri (DŞDD) kullanılarak bir mikro girişin çeşitli sınır koşulları ve yükleme durumları altında lineer eğilme ve burkulma analizi yapılmış, Bernoulli-Euler ve Timoshenko giriş modelleri için ilave malzeme boyut parametrelerinin etkisine değinilmiştir.

3. MATERYAL ve METOT

3.1. Değiştirilmiş Gerilme Çifti (DGÇ) Elastisite Teorisi

İzotropik elastik malzemeler için 4 malzeme sabiti içeren (2 klasik, 2 ek), yüksek mertebeden elastisite teorilerinden klasik gerilme çifti elastisite teorisi birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır (Toupin 1962, Mindlin ve Tiersten 1962, Mindlin 1963, Koiter 1964). Bu teori, Anthoine (2000) tarafından dairesel bir silindirin basit eğilmesinin modellenmesinde kullanılmıştır. Mikro yapılarıdaki boyut etkisini belirlemenin zorluğundan dolayı lokal olmayan kiriş modellerinin mümkün olduğunca az ilave malzeme parametresi içermesi arzu edilir. Bu nedenle araştırmacılar, yeni teoriler geliştirmeye çalışmışlar ve var olan teorileri değiştirerek daha basit bir hale getirmeye başlamışlardır.

Değiştirilmiş Gerilme Çifti Elastisite Teorisi (DGÇ) Yang vd. (2002) tarafından önerilmiştir. Klasik halinden farklı olarak bu yeni teoride gerilme çifti tansörü simetriktir ve sadece tek bir ilave malzeme boyut ölçek parametresine ihtiyaç duyulur. Bu teori Park ve Gao (2006) tarafından Bernoulli-Euler kirişine ve Ma vd. (2008) tarafından Timoshenko kirişine uygulanmıştır.



şekil 3.1. Gerilme ve çift gerilmelerin kartezyen bileşenleri

Bu teoride, şekil değiştirme enerji yoğunluğu hem şekil değiştirme (gerilme ile konjuge) hem de eğriliğin (gerilme çifti ile konjuge olan) bir fonksiyondur. Ω bölgesini kaplayan deforme olmuş lineer elastik malzeme için şekil değiştirme enerjisi U şöyledir (Yang vd 2002):

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dv \quad (3.1)$$

Burada σ_{ij} gerilme tansörü, ε_{ij} şekil değiştirme tansörü, m_{ij} gerilme çifti tansörünün deviatorik parçası ve χ_{ij} eğrilik tansörüdür.

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.3)$$

$$m_{ij} = 2l_2^2 \mu \chi_{ij} \quad (3.4)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (3.5)$$

λ ve μ Lamé sabitleri, l_2 malzeme boyut ölçek parametresi, u deplasman vektörü, θ dönme vektörüdür.

$$\theta_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \quad (3.6)$$

e_{ijk} permütasyon sembolü olup

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk \text{ 'nin ileri permütasyonu} \\ -1 & ijk \text{ 'nin geriye permütasyonu} \\ 0 & i, j \text{ ya da } k \text{ 'nin eşit olması} \end{cases} \quad (3.7)$$

şeklindedir.

ε_{ij} ve χ_{ij} 'nin simetrik olmalarından dolayı $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^T$ ve $m_{ij} = m_{ij}^T$ de simetrik olacakları açıkça görülmektedir. Ayrıca denklem 3.4'te bulunan boyut ölçek parametresinin karesi l_2^2 , kayma modülüne eğrilik modülünün oranıdır ve l_2^2 bu yüzden gerilme çiftinin etkisinin ölçümünde bir malzeme özelliği gibi düşünülür (Mindlin 1963).

Diğer taraftan dış kuvvetlerin yaptığı iş

$$W = \iiint_{\Omega} (f_i u_i + c_i \theta_i) dv + \iint_{\partial\Omega} (t_i u_i + s_i \theta_i) da \quad (3.8)$$

dir.

3.1.1. Bernoulli-Euler kiriş modeli

Bernoulli-Euler kirişinin deplasman bileşenleri şöyle ifade edilebilir:

$$u = -z\psi(x), \quad v = 0, \quad w = w(x) \quad (3.9)$$

u, v, w sırasıyla x, y, z 'nin deplasman vektörlerinin u bileşenleri ve ψ kirişin merkez ekseninin dönme açısıdır ve küçük deformasyonlar için düşünüldüğünde değeri yaklaşık olarak

$$\psi \approx \frac{dw(x)}{dx} \quad (3.10)$$

dir. Denklem 3.3, 3.9 ve 3.10'dan

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w(x)}{dx^2},$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \quad (3.11)$$

elde edilir. Denklem 3.6, 3.7, 3.9 ve 3.10'dan

$$\theta_y = -\frac{dw(x)}{dx}, \quad \theta_x = \theta_z = 0 \quad (3.12)$$

ulaşılır. Denklem 3.5'te 3.12 denklemini kullanılarak

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{d^2w(x)}{dx^2},$$

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = 0 \quad (3.13)$$

bulunur. Denklem 3.11, denklem 3.2'de yazılırsa

$$\sigma_{xx} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(-z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(-z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right),$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \quad (3.14)$$

ulaşılır. E Young modülü, ν Poisson oranıdır ve Lamé sabitleri λ ve μ ile ilişkilidir (Timoshenko ve Goodier 1970).

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.15)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.16)$$

Denklem 3.46'da tanımlanan μ malzeme sabiti aynı zamanda kayma modülü (G) olarak bilinir. En/boy oranı yüksek olan ince bir kiriş için Poisson etkisi ikincil olup basit kiriş teorisinin formülasyonunu kolaylaştırmak için ihmal edilebilir. $\nu = 0$ alınmasıyla denklem 3.14

$$\sigma_{xx} = -Ez \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (3.17)$$

halini alır. Benzer şekilde denklem 3.13'ün denklem 3.4'te kullanılmasıyla

$$m_{xy} = -\mu I_2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad m_{xx} = m_{yy} = m_{zz} = m_{yz} = m_{zx} = 0 \quad (3.18)$$

elde edilir. Denklem 3.11, 3.13, 3.17 ve 3.18'in denklem 3.1'de yazılmasıyla

$$U = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^L M_x \frac{d^2 w(x)}{dx^2} dx - \frac{1}{2} \int_{x=0}^L Y_{xy} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} dx \quad (3.19)$$

elde edilir. Bileşke moment M_x ve çift moment Y_{xy} şu şekilde yazılabilir:

$$M_x = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad (3.20)$$

$$Y_{xy} = \int_A m_{xy} dA \quad (3.21)$$

Cisim kuvveti ve cisim çifti ihmal edilerek, dış kuvvetlerin yaptığı iş $q(x)$ formunda (yüzey çifti olmaksızın) denklem 3.8 kullanılarak şöyle elde edilebilir:

$$W = \int_{x=0}^L q(x) w(x) dx \quad (3.22)$$

Denklem 3.19 ve 3.22'den yayılı yüklü bir kirişteki toplam potansiyel enerji Π ,

$$\Pi = U - W = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^L (M_x + Y_{xy}) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} dx - \int_{x=0}^L q(x) w(x) dx \quad (3.23)$$

olur. Π 'nin birinci varyasyonu alınarak

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & -(M_x + Y_{xy}) \delta w'(x) \Big|_0^L + \left(\frac{dM_x}{dx} + \frac{dY_{xy}}{dx} \right) \delta w(x) \Big|_0^L \\ & - \int_0^L \left(\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{d^2 Y_{xy}}{dx^2} + q \right) \delta w(x) dx \end{aligned} \quad (3.24)$$

ulaşılır. Minimum toplam potansiyel enerji ilkesini uygulayarak kararlı denge durumu için $\delta\Pi = 0$ ve varyasyonun hesaplanmasında temel yardımcı teorem yardımı ile denklem 3.24'ten yönetici (denge) denklemi (Park ve Gao 2006)

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{d^2 Y_{xy}}{dx^2} + q(x) = 0 \quad (3.25)$$

şeklinde elde edilir. Denklem 3.17, 3.18, 3.20 ve 3.21'den

$$M_x = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (3.26)$$

$$Y_{xy} = -\mu A l_2^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (3.27)$$

olarak bulunur. I enkesit alanının atalet momenti

$$I = \int_A z^2 dA \quad (3.28)$$

Denklem 3.26 ve 3.27'nin denklem 3.25'te yazılmasıyla

$$(EI + \mu Al_2^2) \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) \quad (3.29)$$

$w(x)$ cinsinden kirişin eğilme denklemi elde edilir. Ayrıca, denklem 3.56 ve 3.57'nin toplanmasıyla

$$M_x + Y_{xy} = -(EI + \mu Al_2^2) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (3.30)$$

eşitliği elde edilir (Park ve Gao 2006).

Yukarıdaki denklem 3.29'a bakıldığında kirişin eğilme deformasyonuna iki tane katkının olduğu görülür. Bunlardan birisi normal gerilme bileşenine σ_{xx} , diğeri de gerilme çifti bileşenine m_{xy} bağlıdır. Bu denklem ayrıca kirişin eğilme rijitliği $(EI + \mu Al_2^2)$ nin açıkça l_2 'ye bağlı olduğunu gösterir. l_2 'nin değeri de kiriş elemanın mikro yapısıyla ilgili olup esas olarak ona göre değişir.

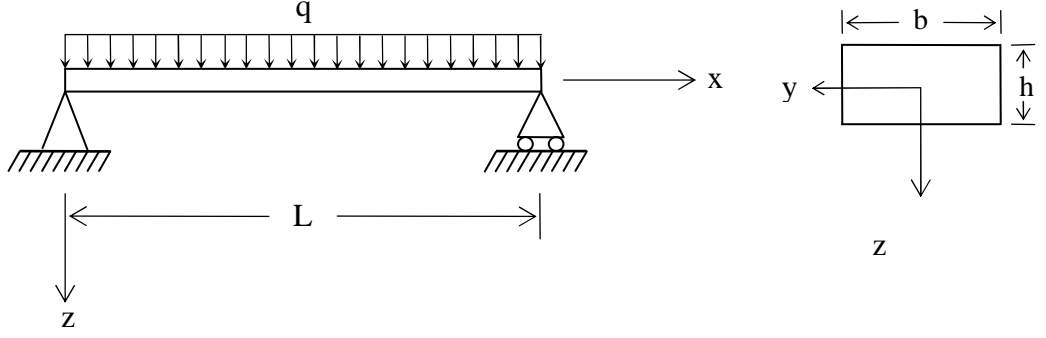
Denklem 3.25 ve 3.30'da görüldüğü gibi değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisini temel alan kiriş modeli sadece bir tane ek malzeme sabiti (ilave malzeme boyut parametresi olan l_2) içerir. Boyut etkisi parametresinin $l_2 = 0$ alınmasıyla, denklem 3.25 ve 3.30'da belirtilen yeni model klasik Bernoulli-Euler kirişine indirgenmiş olur.

3.1.1.1. Eğilme problemi

Şekil 3.2' de görülen basit mesnetli bir kirişin eğilme denklemi, denklem 3.29'un dört kez integre edilmesiyle

$$w(x) = \frac{1}{EI + \mu Al_2^2} \left[\frac{qx^4}{24} + \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4 \right] \quad (3.31)$$

olarak yazılabilir. Denklem 3.31’deki $c_1 - c_4$ integral sabitleri olup sınır koşulları yardımıyla belirlenecektir.



Şekil 3.2. Düzgün yayılı yük altında basit mesnetli kiriş geometrisi

Basit mesnetli bir kirişin her iki ucu için sınır koşulları

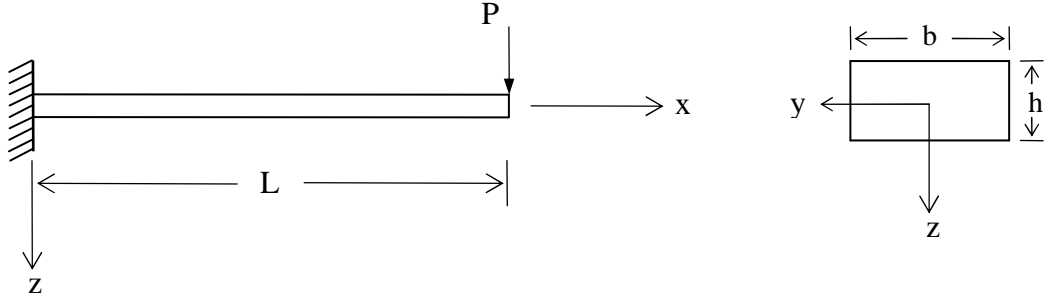
$$\begin{aligned} w &= 0 \\ M_x + Y_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

şeklinde dir. Denklem 3.32’nin, denklem 3.31’de kullanılmasıyla integral sabitleri aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$c_1 = -\frac{qL}{2}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{qL^3}{24}, \quad c_4 = 0 \quad (3.33)$$

Elde edilen bu sabitleri denklem 3.32’de yerlerine yazılarak q düzgün yayılı yük altındaki basit mesnetli bir kiriş için eğilme denkleminde ulaşırlar (Akgöz ve Civalek 2010a).

$$w(x) = \frac{1}{EI + \mu A l_2^2} \left[\frac{q x^4}{24} - \frac{q L x^3}{12} + \frac{q L^3 x}{24} \right] \quad (3.34)$$



Şekil 3.3. Tekil yük altında ankastre mesnetli bir kirişin geometrisi

Uç noktasında P statik tekil yüküyle yüklenmiş ankastre mesnetli bir kiriş için eğilme denklemini denklem 3.29'daki q sıfır alınarak

$$w(x) = \frac{1}{EI + \mu A l_2^2} \left[\frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4 \right] \quad (3.35)$$

biçiminde elde edilir. Ankastre mesnetli kiriş için sınır koşulları

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 & w'(0) &= 0 \\ (M_x + Y_{xy})(L) &= 0 & \frac{d(M_x + Y_{xy})}{dx}(L) &= P \end{aligned} \quad (3.36)$$

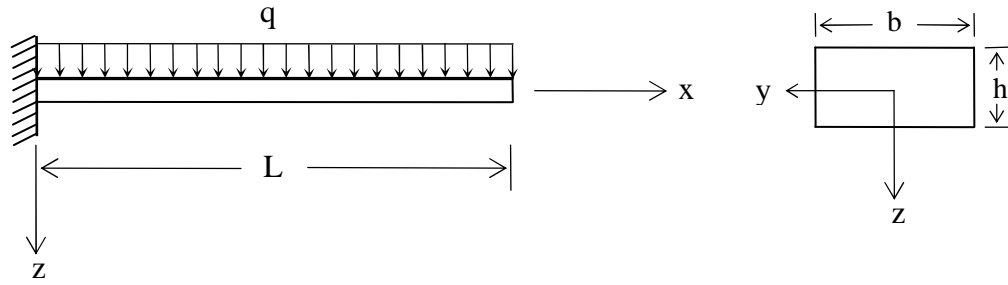
dir. Denklem 3.36'nın, denklem 3.31'de kullanılmasıyla integral sabitleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$c_1 = -P, \quad c_2 = PL, \quad c_3 = c_4 = 0 \quad (3.37)$$

Benzer biçimde, elde edilen bu integral sabitleri denklem 3.35'te yerlerine yazılarak ankastre mesnetli bir kiriş için eğilme denklemine ulaşılır (Park ve Gao 2006).

$$w(x) = \frac{1}{EI + \mu A l_2^2} \left[-\frac{Px^3}{6} + \frac{PLx^2}{2} \right] \quad (3.38)$$

Denklem 3.34 ve denklem 3.38'deki ilave malzeme boyut parametresi l_2 'nin sıfır alınmasıyla klasik Bernoulli-Euler kirişine ait eğilme denkleminde ulaşılabacağı rahatça görülmektedir.



Şekil 3.4. Düzgün yayılı yük altında ankastre mesnetli bir kirişin geometrisi

Şekil 3.4'te görüldüğü gibi bir geometriye ve yükleme durumuna sahip ankastre mesnetli bir kiriş için eğilme denklemi, denklem 3.29'un kullanılmasıyla

$$w(x) = \frac{1}{EI + \mu A l_2^2} \left[\frac{q x^4}{24} + \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4 \right] \quad (3.39)$$

şeklinde elde edilir. Denklem 3.39'daki $c_1 - c_4$ integral sabitleri olup sınır koşulları yardımıyla belirlenecektir. Ankastre mesnetli kiriş için sınır koşulları denklem 3.36'da verilmiştir. Bu sınır koşullarının denklem 3.39'da kullanılmasıyla bilinmeyen sabitler

$$c_1 = -qL, \quad c_2 = \frac{qL^2}{2}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0 \quad (3.40)$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu integral sabitleri, denklem 3.39'da yerlerine yazılarak q düzgün yayılı yük altındaki ankastre mesnetli bir kiriş için eğilme denkleminde ulaşılabılır (Akgöz ve Civalek 2010a).

$$w(x) = \frac{1}{EI + \mu A l_2^2} \left[\frac{q x^4}{24} - \frac{q L x^3}{6} + \frac{q L^2 x^2}{4} \right] \quad (3.41)$$

3.1.1.2. Burkulma problemi

Bernoulli-Euler kirişine N aksel kuvvetinin etkidiği düşünülürse denklem 3.29'da eğilme için elde edilen bağıntı burkulma için (Akgöz ve Civalek 2010b)

$$(EI + \mu A l_2^2) \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + N \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.42)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Yukarıdaki bağıntının çözümü aşağıda görüldüğü gibi elde edilebilir:

$$w(x) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x + \frac{1}{\lambda^2} (Ax + B) \quad (3.43)$$

$$\frac{dw}{dx} = \lambda (c_1 \cos \lambda x - c_2 \sin \lambda x) + \frac{A}{\lambda^2} \quad (3.44)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\lambda^2 (c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x) \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} M_x + Y_{xy} &= -(EI + \mu A l_2^2) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \\ &= (EI + \mu A l_2^2) \lambda^2 (c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x) \\ &= N (c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x) \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\frac{d(M_x + Y_{xy})}{dx} = N\lambda(c_1 \cos \lambda x - c_2 \sin \lambda x) \quad (3.47)$$

$$\lambda^2 = \frac{N}{EI + \mu A I_2^2} \quad (3.48)$$

Yukarıdaki ifadelerde c_1, c_2, A, B integral sabitleri, N eksenel basınç kuvvetidir. Basit mesnetli bir kirişin her iki ucu için sınır koşulları

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ M_x + Y_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Yukarıdaki sınır koşulları, denklem 3.43'te kullanılarak

$$A = B = 0, \quad c_1 \sin \lambda L = 0, \quad c_2 = 0 \quad (3.50)$$

bilinmeyenler elde edilir. $c_1 = 0$ olması aşıkâr çözümdür. Farklı bir çözüm elde etmek için $\sin \lambda L$ değerinin sıfır olması gerekir.

$$\sin \lambda L = 0, \quad \lambda = \frac{n\pi}{L} \quad (3.51)$$

Kritik burkulma yükü $n = 1$ için meydana gelir. Bu durumda basit mesnetli bir kiriş için kritik burkulma yükü

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (EI + \mu A I_2^2) \quad (3.52)$$

olur. Ankastre mesnetli kiriş için sınır koşulları

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0,$$

$$(M_x + Y_{xy})(L) = 0, \quad \frac{d(M_x + Y_{xy})}{dx}(L) + Nw'(L) = 0 \quad (3.53)$$

şeklindedir. Benzer biçimde, yukarıdaki sınır koşulları kullanılarak aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

$$c_1 = 0, \quad c_2 + \frac{B}{\lambda^2} = 0, \quad A = 0, \quad c_2 \cos \lambda L = 0 \quad (3.54)$$

$c_2 = 0$ olması aşıkâr çözümdür. Farklı çözüm için $\cos \lambda L$ değerinin sıfır olması gerekir.

$$\cos \lambda L = 0, \quad \lambda = \frac{\pi(2n-1)}{2L} \quad (3.55)$$

Kritik burkulma yükü $n = 1$ için meydana gelir. Bu durumda ankastre mesnetli bir kiriş için kritik burkulma yükü aşağıdaki gibidir:

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 (EI + \mu A l_2^2) \quad (3.56)$$

3.1.2. Timoshenko kiriş modeli

Timoshenko kirişinin deplasman bileşenleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u = -z\psi(x, t), \quad v = 0, \quad w = w(x, t) \quad (3.57)$$

u, v, w sırasıyla x, y, z 'nin deplasman vektörlerinin u bileşenleri ve ψ kirişin merkez ekseninin eğilmeden dolayı oluşan dönme, denklem 3.58'deki gibidir.

$$\psi = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \beta(x, t) \quad (3.58)$$

$\beta(x,t)$ kirişin merkez ekseninin kayma deformasyonundan oluşan dönmedir.

Denklem 3.3, 3.57 ve 3.58'den

$$\varepsilon_{xx} = -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \beta, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (3.59)$$

şekil değiştirmeler elde edilir. Denklem 3.6, 3.7, 3.57 ve 3.58'den

$$\begin{aligned} \theta_y &= \frac{1}{2} [e_{yzx} u_{x,z} + e_{yxz} u_{z,x}] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\psi - \frac{\partial w}{\partial x} \right] = -\frac{1}{2} \left[\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad \theta_x = \theta_z = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

elde edilir. Denklem 3.5'te 3.60 denklemini kullanılarak

$$\begin{aligned} \chi_{xy} &= \frac{1}{2} (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right) = -\frac{1}{4} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \quad \chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{xz} = \chi_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

sonucu elde edilir.

Yukarıdaki bağıntıların denklem 3.1'de kullanılmasıyla kiriş için toplam şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} U dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + m_{ij} \delta \chi_{ij}) dv dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + 2m_{xy} \delta \chi_{xy}) dv dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[-\frac{\partial N}{\partial x} \delta u + \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} \right) \delta \psi + \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{xy}}{\partial x^2} \right) \delta w \right] dx dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left[N \delta u - \left(M_x + \frac{1}{2} Y_{xy} \right) \delta \psi + \left(Q + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} \right) \delta w - \frac{1}{2} Y_{xy} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_{x=0}^{x=L} dt \quad (3.62)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA, \quad M_x = \int_A \sigma_{xx} A dA, \quad Y_{xy} = \int_A m_{xy} dA, \quad Q = \int_A \sigma_{xz} dA \quad (3.63)$$

dir. Kirişin kinetik enerjisinin birinci varyasyonu ise

$$\begin{aligned}
\delta T &= \delta \int_V \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dv \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[m_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) + m_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \delta \psi \right] dx dt \\
&+ \int_0^L \left[m_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta u + \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) + m_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \delta \psi \right]_{t=t_1}^{t=t_2} dx \quad (3.64)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$m_0 = \int_A \rho dA, \quad m_2 = \int_A \rho z^2 dA \quad (3.65)$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan dış kuvvetlerin yaptığı işin birinci varyasyonu da aşağıdaki gibi olur.

$$\delta W = \int_0^L q(x) \delta w dx + N \delta u \Big|_0^L + V \delta w \Big|_0^L + M \delta \psi \Big|_0^L \quad (3.66)$$

Hamilton Prensipli'ne göre sistemin kinetik enerjisi ile toplam potansiyel enerjisi arasındaki farkın birinci varyasyonunun sıfıra eşit olması gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki ifade yazılır.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - (U - W)] dt = 0 \quad (3.67)$$

Denklem 3.62, 3.64 ve 3.66'nın yukarıdaki denklemde yazılmasıyla aşağıdaki ifade elde edilir (Ma vd. 2008).

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\left(-m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial N}{\partial x} \right) \delta u + \left(-m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{xy}}{\partial x^2} + q \right) \delta w \right. \\ & + \left. \left(-m_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} + Q \right) \delta \psi \right] dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[(N - \bar{N}) \delta u + \left(-M_x - \frac{1}{2} Y_{xy} + \bar{M} \right) \delta \psi \right. \\ & \left. + \left(Q + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} - \bar{V} \right) \delta w - \frac{1}{2} Y_{xy} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_0^L dt + \int_0^L \left[m_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta u + \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) + m_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \delta \psi \right]_{t=t_1}^{t=t_2} dx = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Denklem 3.68'in sağlanabilmesi için bütün terimlerin sıfıra eşit olması gerekmektedir. Buradan kirişin eğilmesinde aşağıdaki eşitliklere ulaşılır (Ma vd. 2008).

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} &= m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{xy}}{\partial x^2} + q &= m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} + Q &= m_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Sınır koşulları $x = 0, L$ için

$$N = \bar{N} \quad \text{ya da} \quad u = \bar{u}$$

$$Q + \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} = \bar{V} \quad \text{ya da} \quad w = \bar{w}$$

$$M_x + \frac{1}{2} Y_{xy} = \bar{M} \quad \text{ya da} \quad \psi = \bar{\psi}$$

$$Y_{xy} = 0 \quad \text{ya da} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \quad (3.70)$$

olur. Denklem 3.2, 3.4, 3.59, 3.61 ve 3.63 kullanılarak aşağıdaki ifadelere ulaşılabilir.

$$N = \frac{EA(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad M_x = -\frac{EI(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$Y_{xy} = -\frac{1}{2} l_2^2 \mu A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad Q = k_s \mu A \left(-\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.71)$$

Yukarıdaki ifadede, k_s , Timoshenko kayma katsayısı olup kiriş enkesiti üzerindeki kayma şekil değiştirmelerinin üniform olmayışından bir düzeltme faktörü olarak dikkate alınır (Hutchinson 2001).

Denklem 3.71'deki ifadelerin denklem 3.69'da yerlerine yazılmasıyla Timoshenko kirişi için hareket denklemleri (Ma. vd 2008)

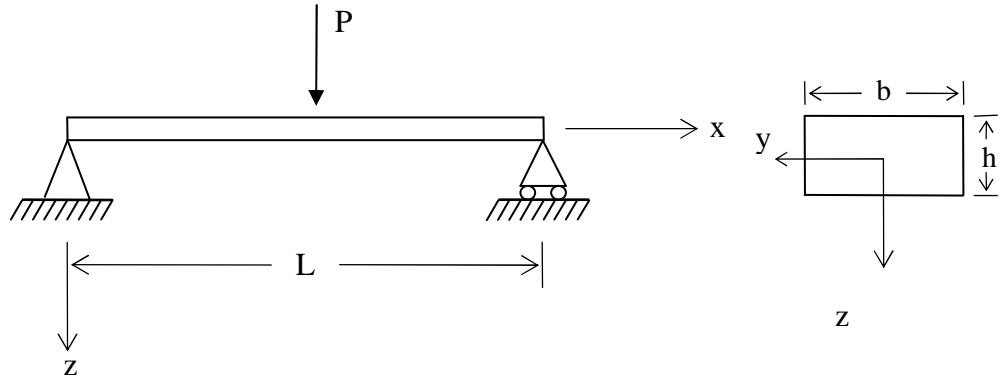
$$\frac{EA(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$k_s \mu A \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{4} l^2 \mu A \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + q = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{EI(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k_s \mu A \left(-\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{4} l^2 \mu A \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) = m_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.72)$$

biçiminde elde edilir.

3.1.2.1. Eğilme problemi



Şekil 3.5. Orta noktasında tekil yüklü basit mesnetli bir kirişin geometrisi

Şekil 3.5'te görülen basit mesnetli Timoshenko kirişi için her iki uçtaki sınır koşulları

$$w = 0 \quad w'' = 0 \quad \psi' = 0 \quad (3.73)$$

halindedir. $w(x)$ ve $\phi(x)$ için Fourier serisi çözümleri

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.74)$$

şeklinde olur. Burada, W_n ve ϕ_n Fourier katsayılarıdır. Denklem 3.74'teki ifadelerin denklem 3.73'teki sınır koşullarını sağladığı açıkça görülmektedir.

Uygulanan yükün de Fourier serilerinde açılımı aşağıdaki gibidir.

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.75)$$

Burada, Q_n Fourier katsayısıdır. Her iki taraf $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ile çarpılıp 0'dan L'ye integre edilirse

$$\int_0^{\frac{L}{2}-\xi} 0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{\frac{L}{2}-\xi}^{\frac{L}{2}+\xi} \frac{P}{2\xi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{\frac{L}{2}+\xi}^L 0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L Q_n \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.76)$$

elde edilir. Bu problem için yükün yoğunluğu $\frac{P}{2\xi}$ olup

$$Q_n = \frac{P}{n\pi\xi} 2 \sin\left(\frac{n\pi L/2}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \quad (3.77)$$

şeklinde yazılabilir. $\xi \rightarrow 0$ için

$$Q_n = \frac{2}{L} P \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (3.78)$$

biçiminde elde edilir. Denklem 3.74'teki eşitliklerin denklem 3.72'de kullanılmasıyla

$$\left[\alpha k_s \mu A - \frac{1}{4} \alpha^3 l_2^2 \mu A \right] \phi_n - \left[\alpha^2 k_s \mu A + \frac{1}{4} \alpha^4 l_2^2 \mu A \right] W_n = -Q_n$$

$$-\left[\alpha^2 \frac{EI(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + k_s \mu A + \frac{1}{4} \alpha^2 l_2^2 \mu A \right] \phi_n + \left[\alpha k_s \mu A - \frac{1}{4} \alpha^3 l_2^2 \mu A \right] W_n = 0 \quad (3.79)$$

eğilme için iki yönetici denkleme ulaşılır (Ma vd.2008). Buradan, Fourier katsayıları

$$\phi_n = -\frac{(-4k_s L^2 + l_2^2 n^2 \pi^2) L^3}{n^3 \pi^3 \left\{ \frac{4k_s EI(1-\nu)L^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} + l_2^2 \left[4k_s \mu AL^2 + \frac{n^2 \pi^2 EI(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right] \right\}} Q_n$$

$$W_n = \frac{\left[4k_s \mu AL^2 + \frac{4n^2 \pi^2 EI(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + n^2 \pi^2 \mu Al_2^2 \right] L^4}{n^4 \pi^4 \mu A \left\{ \frac{4k_s EI(1-\nu)L^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} + l_2^2 \left[4k_s \mu AL^2 + \frac{n^2 \pi^2 EI(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right] \right\}} Q_n \quad (3.80)$$

şeklinde yazılır.

3.2. Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi (DŞDD) Elastisite Teorisi

Kuvvetlerin ve kuvvetlerin momentlerinin klasik denge denklemlerine ek olarak yüksek mertebeli gerilmeleri ve çiftlerin momentlerinin dengesini yöneten yeni bir ek denge denklemi içeren Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi Elastisite Teorisi (DŞDD), Lam vd (2003) tarafından sunulmuştur. Bu teorinin yönetici denklemleri, lineer elastik izotropik malzemeler için iki klasik malzeme parametresine ek olarak sadece 3 bağımsız yüksek mertebeli malzeme boyut parametresi içerir. Ω bölgesini kaplayan deforme olmuş izotropik, doğrusal elastik malzemede şekil değiştirme enerjisi U (Lam vd 2003)

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s) dv \quad (3.81)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.82)$$

$$\varepsilon_{mm,i} = \gamma_i \quad (3.83)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) - \frac{1}{15}\delta_{ij}(\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) - \frac{1}{15}[\delta_{jk}(\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) + \delta_{ki}(\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m})] \quad (3.84)$$

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{2}(e_{ipq}\varepsilon_{qi,p} + e_{jpq}\varepsilon_{qi,p}) \quad (3.85)$$

u_i deplasman vektörü, ε_{ij} şekil değiştirme tansörü, $\varepsilon_{mm,i}$ dilatasyon (genleşme) değişimi vektörü, $\eta_{ijk}^{(1)}$ deviatorik uzama değişimi tansörü, χ_{ij}^s simetrik dönme değişimi tansörü, δ_{ij} Kronecker delta ve e_{ijk} permütasyon sembolüdür.

$$\sigma_{ij} = k\delta_{ij}\varepsilon_{mm} + 2\mu\varepsilon'_{ij} \quad (3.86)$$

$$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i \quad (3.87)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (3.88)$$

$$m_{ij}^s = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^s \quad (3.89)$$

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{mm}\delta_{ij} \quad (3.90)$$

Varyasyonel ilke yardımıyla Bernoulli-Euler kirişinin eğilmedeki yönetici denklemleri elde edilebilir (Kong vd. 2009).

$$\delta(U - W) = 0 \quad (3.91)$$

3.2.1. Bernoulli-Euler kiriş modeli

Bernoulli- Euler hipotezine göre, eğilmede bir kirişin deplasmanı

$$u = -z \frac{\partial w(x)}{\partial x}, \quad v = 0, \quad w = w(x) \quad (3.92)$$

şeklindedir.

Denklem 3.92, denklem 3.82’de yazıldığında sıfırdan farklı şekil değiştirme ε_{ij}

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.93)$$

olur. Denklem 3.82 ve 3.83’ten

$$\gamma_x = -z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \gamma_y = 0, \quad \gamma_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.94)$$

ulaşılır. Denklem 3.82’nin denklem 3.85’te yazılmasıyla sıfırdan farklı şekil değiştirme değişimleri (dönme) χ_{ij}^s

$$\chi_{xy}^s = \chi_{yx}^s = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.95)$$

bulunur. Denklem 3.82’yi denklem 3.84’te kullanarak sıfırdan farklı şekil değiştirme değişimleri (uzama) $\eta_{ijk}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \eta_{112}^{(1)} &= \frac{1}{3}(0+0+0) - \frac{1}{15} \delta_{11}(0+0) \\ &- \frac{1}{15} \left[0 \left(-z \frac{d^3 w}{dx^3} + 0 \right) + 0 \left(-z \frac{d^3 w}{dx^3} + 0 \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\eta_{131}^{(1)} = \frac{1}{3} \left(0 - \frac{d^2 w}{dx^2} + 0 \right) - \frac{1}{15} \left[0 + 0 + \delta_{11} \left(-\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right] = -\frac{1}{3} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{15} \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{4}{15} \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{111}^{(1)} &= -\frac{2}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, & \eta_{113}^{(1)} &= -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \eta_{122}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, & \eta_{131}^{(1)} &= -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\eta_{133}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, & \eta_{212}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, & \eta_{221}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, & \eta_{223}^{(1)} &= \frac{1}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\eta_{232}^{(1)} &= \frac{1}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \eta_{311}^{(1)} &= -\frac{4}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \eta_{313}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, & \eta_{322}^{(1)} &= \frac{1}{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\eta_{331}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, & \eta_{333}^{(1)} &= \frac{1}{5} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{3.96}$$

elde edilir. Denklem 3.96'da on dört tane $\eta_{ijk}^{(1)}$ yer almaktadır. Kong vd. (2009) tarafından $\eta_{131}^{(1)}$ de sıfır olarak alınmıştır. Ancak yukarıdaki denklemde bu terimin sıfır olmadığı açıkça görülmektedir. Denklem 3.90 ve 3.93'ten deviatorik şekil değiştirmeler

$$\epsilon'_{xx} = \frac{2}{3} \epsilon_{xx}, \quad \epsilon'_{yy} = \epsilon'_{zz} = -\frac{1}{3} \epsilon_{xx} \tag{3.97}$$

şeklinde elde edilir.

En/boy oranı yüksek olan narin bir kiriş için, Poisson etkisi ikincildir ve formülleri basitleştirmek için ihmal edilebilir. $\nu = 0$ alınıp denklem 3.93 ve 3.97'nin denklem 3.86'da yazılmasıyla sıfırdan farklı gerilmeler σ_{ij}

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} = -Ez \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3.98}$$

şeklinde olur. Denklem 3.94'ün, denklem 3.87'de kullanılmasıyla

$$p_x = -2\mu l_0^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad p_y = 0, \quad p_z = -2\mu l_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3.99}$$

Denklem 3.95'i, denklem 3.89'da yazarak sıfırdan farklı yüksek mertebeli gerilmeler m_{ij}^s

$$m_{xy}^s = m_{yx}^s = 2\mu l_2^2 \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\mu l_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.100)$$

ve benzer biçimde denklem 3.96 ve 3.88'den sıfırdan farklı yüksek mertebeden gerilmeler $\tau_{ijk}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \tau_{111}^{(1)} &= -\frac{4}{5} \mu l_1^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, & \tau_{113}^{(1)} &= -\frac{8}{15} \mu l_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \tau_{122}^{(1)} &= \frac{2}{5} \mu l_1^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ \tau_{131}^{(1)} &= -\frac{8}{15} \mu l_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \tau_{133}^{(1)} &= \frac{2}{5} \mu l_1^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, & \tau_{212}^{(1)} &= \frac{2}{5} \mu l_1^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ \tau_{221}^{(1)} &= \frac{2}{5} \mu l_1^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, & \tau_{223}^{(1)} &= \frac{2}{15} \mu l_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \tau_{232}^{(1)} &= \frac{2}{15} \mu l_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \tau_{311}^{(1)} &= -\frac{8}{15} \mu l_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \tau_{313}^{(1)} &= \frac{2}{5} \mu l_1^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, & \tau_{322}^{(1)} &= \frac{2}{15} \mu l_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \tau_{331}^{(1)} &= \frac{2}{5} \mu l_1^2 z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, & \tau_{333}^{(1)} &= \frac{2}{5} \mu l_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.101)$$

elde edilir. Denklem 3.93, 3.95, 3.96, 3.99 ve 3.101'in, denklem 3.81'de yazılmasıyla şekil değiştirme enerjisi U (Kong vd. 2009)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [B.(w'')^2 + D.(w''')^2] \quad (3.102)$$

$$D = I(2\mu l_0^2 + \frac{4}{5} \mu l_1^2), \quad B = EI + 2\mu A l_0^2 + \frac{8}{15} \mu A l_1^2 + \mu A l_2^2$$

$$w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad w''' = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (3.103)$$

olur. Denklem 3.102'nin birinci varyasyonunun alınmasıyla

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta \int_0^L F(w'', w''') dx \\ &= \int_0^L \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial F}{\partial w'''} \right) \right] \delta w dx + \left[\left[-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w'''} \right) \right] \delta w \right]_0^L \\ &\quad + \left[\left[\frac{\partial F}{\partial w''} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'''} \right) \right] \delta w' \right]_0^L + \left[\frac{\partial F}{\partial w'''} \delta w'' \right]_0^L \end{aligned} \quad (3.104)$$

elde edilir. Buradaki Lagrange Fonksiyonu F ,

$$F = \frac{1}{2} [B.(w'')^2 + D.(w''')^2] \quad (3.105)$$

dır. Denklem 3.104 ve 3.105 yardımıyla kirişin şekil değiştirme enerjisinin varyasyonuna

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L [B.w^{(4)} - D.w^{(6)}] \delta w dx + [-B.w''' + D.w^{(5)}] \delta w \Big|_0^L + [B.w'' - D.w^{(4)}] \delta w' \Big|_0^L \\ &\quad + D.w''' \delta w'' \Big|_0^L \end{aligned} \quad (3.106)$$

şeklinde ulaşılır.

$q(x)$ dış kuvveti, sınır kesme kuvveti V ve sınır klasik ve klasik olmayan eğilme momentleri sırasıyla M_c ve M_{nc} tarafından yapılan işin birinci varyasyonu

$$\delta W = \int_0^L q(x) \delta w(x) dx + [V \delta w]_0^L + [M_c \delta w']_0^L + [M_{nc} \delta w'']_0^L \quad (3.107)$$

dir. Denklem 3.106 ve 3.107'nin, denklem 3.91'de yazılmasıyla

$$\begin{aligned} \delta(U - W) = & \int_0^L [B.w^{(4)} - D.w^{(6)} - q] \delta w dx + [-B.w''' + D.w^{(5)} - V] \delta w \Big|_0^L \\ & + [B.w'' - D.w^{(4)} - M_c] \delta w' \Big|_0^L + [D.w''' - M_{nc}] \delta w'' \Big|_0^L = 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

eşitliği elde edilir.

Yukarıdaki varyasyonel ifadenin sağlanabilmesi için tüm terimlerin sıfır olması gerekmektedir. Böylece eğilmede kirişin yönetici denklemi (Kong vd. 2009)

$$B.w^{(4)} - D.w^{(6)} = q$$

$$\left(EI + 2\mu A l_0^2 + \frac{8}{15} \mu A l_1^2 + \mu A l_2^2 \right) w^{(4)} - \left(I(2\mu l_0^2 + \frac{4}{5} \mu l_1^2) \right) w^{(6)} = q \quad (3.109)$$

şeklinde olur. Bunun için sınır koşulları aşağıdaki eşitlikleri sağlamalıdır.

$$\begin{aligned} [V(L) - [D.w^{(5)}(L) - B.w'''(L)]] \delta w(L) - [V(0) - [D.w^{(5)}(0) - B.w'''(0)]] \delta w(0) &= 0 \\ [M_c(L) - [B.w''(L) - D.w^{(4)}(L)]] \delta w'(L) - [M_c(0) - [B.w''(0) - D.w^{(4)}(0)]] \delta w'(0) &= 0 \\ [M_{nc}(L) - D.w^{(3)}(L)] \delta w''(L) - [M_{nc}(0) - D.w^{(3)}(0)] \delta w''(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.110)$$

Yukarıdaki denklem 3.110'da l_0 ve l_1 in sıfır alınmasıyla eşitlik Değiştirilmiş Gerilme Çifti (DGC) Elastisite Teorisi'ne dönüşür. Eğer ilave malzeme boyut parametrelerinin tamamı (l_0 , l_1 ve l_2) sıfır alınırsa eşitlik klasik Bernoulli-Euler kirişine dönüşür.

3.2.1.1. Eğilme problemi

Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli bir kirişin eğilme denklemi, denklem 3.109'daki yüksek mertebeden diferansiyel ifadenin çözümlenmesiyle (Akgöz ve Civalek 2010a)

$$w(x) = \frac{qx^4}{24B} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 + C_5e^{\sqrt{\frac{B}{D}}x} + C_6e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}x} \quad (3.111)$$

biçiminde elde edilir. Denklem 3.111'deki $C_1 - C_6$ integral sabitleri olup klasik ve klasik olmayan sınır koşulları yardımıyla belirlenecektir.

Basit mesnetli bir kiriş için klasik sınır koşulları

$$\begin{aligned} w(0) &= w(L) = 0 \\ B.w''(0) - D.w^{(4)}(0) &= 0 \\ B.w''(L) - D.w^{(4)}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (3.112)$$

dır. Ayrıca, klasik olmayan sınır koşulları

$$\begin{aligned} D.w'''(0) &= 0 \text{ ya da } w'''(0) = 0 \\ D.w'''(L) &= 0 \text{ ya da } w'''(L) = 0 \end{aligned} \quad (3.113)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem 3.112 ve 3.113'ün, denklem 3.111'de kullanılmasıyla integral sabitleri aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{qL}{12B}, & C_2 &= \frac{qD}{2B^2} \\ C_3 &= \frac{qL}{2B} \left[\frac{L^2}{12} - \frac{D}{B} \right], & C_4 &= \frac{qLD^{\frac{3}{2}} \left(2 + e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} + e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L} \right)}{2B^{\frac{5}{2}} \left(e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} - e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L} \right)} \end{aligned}$$

$$C_5 = -\frac{qLD^{\frac{3}{2}}\left(1 + e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L}\right)}{2B^{\frac{5}{2}}\left(e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} - e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L}\right)}, \quad C_6 = -\frac{qLD^{\frac{3}{2}}\left(1 + e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L}\right)}{2B^{\frac{5}{2}}\left(e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} - e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L}\right)} \quad (3.114)$$

Elde edilen bu integral sabitleri denklem 3.111’de yerlerine yazılarak q düzgün yayılı yük altındaki basit mesnetli bir kiriş için eğilme denkleminde ulaşılr (Akgöz ve Civalek 2010a).

$$w(x) = \frac{qx^4}{24B} - \frac{qLx^3}{12B} + \frac{qDx^2}{2B^2} + \frac{qL}{2B}\left[\frac{L^2}{12} - \frac{D}{B}\right]x + \frac{qLD^{\frac{3}{2}}\left(2 + e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} + e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L}\right)}{2B^{\frac{5}{2}}\left(e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} - e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L}\right)} - \frac{qLD^{\frac{3}{2}}\left(1 + e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L}\right)}{2B^{\frac{5}{2}}\left(e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} - e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L}\right)}e^{\sqrt{\frac{B}{D}}x} - \frac{qLD^{\frac{3}{2}}\left(1 + e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L}\right)}{2B^{\frac{5}{2}}\left(e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} - e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L}\right)}e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}x} \quad (3.115)$$

Şekil 3.3’te görülen ankastre mesnetli bir kirişin eğilme denklemi (Kong vd. 2009)

$$w(x) = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 + C_5e^{\sqrt{\frac{B}{D}}x} + C_6e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}x} \quad (3.116)$$

olur. Bu durum için klasik sınır koşulları

$$\begin{aligned} w(0) &= w'(0) = 0 \\ D.w^{(5)}(L) - B.w'''(L) &= P \\ B.w''(L) - D.w^{(4)}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (3.117)$$

dır. Klasik olmayan sınır koşulları ise

$$w''(0) = 0$$

$$D.w'''(L) = 0 \text{ ya da } w'''(L) = 0 \quad (3.118)$$

olarak yazılabilir. Benzer biçimde, ankastre mesnetli kiriş için $C_1 - C_6$ bilinmeyenleri yukarıdaki sınır koşullarının denklem 3.116'da kullanılmasıyla

$$C_1 = -\frac{P}{6B}, \quad C_2 = \frac{PL}{2B}$$

$$C_3 = \frac{P\sqrt{D} \left(\sqrt{Be}^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} L + 2\sqrt{D} - \sqrt{Be}^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L} L \right)}{B^2 \left(e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} + e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L} \right)}, \quad C_4 = \frac{PDL}{B^2}$$

$$C_5 = \frac{PD \left(\sqrt{D} - \sqrt{Be}^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L} L \right)}{B^{\frac{5}{2}} \left(e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} + e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L} \right)}, \quad C_6 = -\frac{PD \left(\sqrt{D} + \sqrt{Be}^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} L \right)}{B^{\frac{5}{2}} \left(e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} + e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L} \right)} \quad (3.119)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki integral sabitlerinin denklem 3.116'da yerlerine yazılmasıyla ankastre mesnetli kirişin eğilme denklemi aşağıda görüldüğü gibi elde edilir.

$$w(x) = -\frac{Px^3}{6B} + \frac{PLx^2}{2B} + \frac{P\sqrt{D} \left(\sqrt{Be}^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} L + 2\sqrt{D} - \sqrt{Be}^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L} L \right) x}{B^2 \left(e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} + e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L} \right)} + \frac{PDL}{B^2}$$

$$+ \frac{PD \left(\sqrt{D} - \sqrt{Be}^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L} L \right)}{B^{\frac{5}{2}} \left(e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} + e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L} \right)} e^{\sqrt{\frac{B}{D}}x} - \frac{PD \left(\sqrt{D} + \sqrt{Be}^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} L \right)}{B^{\frac{5}{2}} \left(e^{\sqrt{\frac{B}{D}}L} + e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}L} \right)} e^{-\sqrt{\frac{B}{D}}x} \quad (3.120)$$

3.2.1.2. Burkulma problemi

Bernoulli-Euler kirişine N eksenel kuvvetinin etkidiği düşünülürse denklem 3.102'deki şekil değiştirme enerjisi U (Akgöz ve Civalek 2010b)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [B.(w'')^2 + D.(w''')^2] dx - \frac{1}{2} \int_0^L N(w')^2 dx \quad (3.121)$$

halini alır.

Varyasyonel ilkeye göre $U = \int_0^L F(w', w'', w''') dx$ şeklindeki bir integralin varyasyonu aşağıdaki bağıntı kullanılarak bulunabilir (Lancoz 1970).

$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^L \left[-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial F}{\partial w'''} \right) \right] \delta w dx + \\ \left[\left[\frac{\partial F}{\partial w'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w'''} \right) \right] \delta w \right]_0^L + \left[\left[\frac{\partial F}{\partial w''} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'''} \right) \right] \delta w' \right]_0^L + \left[\frac{\partial F}{\partial w'''} \delta w'' \right]_0^L \end{aligned} \quad (3.122)$$

Yukarıda verilen bağıntıdaki Lagrange Fonksiyonu F , bu durum için

$$F = \frac{1}{2} [B.(w'')^2 + D.(w''')^2] - \frac{N}{2} (w')^2 \quad (3.123)$$

olur. Denklem 3.123'ün, denklem 3.22'de kullanılmasıyla kirişin şekil değiştirme enerjisinin varyasyonu

$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^L [B.w^{(4)} - D.w^{(6)} + Nw''] \delta w dx + [-B.w''' + D.w^{(5)} - Nw'] \delta w \Big|_0^L \\ + [B.w'' - D.w^{(4)}] \delta w' \Big|_0^L + D.w''' \delta w'' \Big|_0^L \end{aligned} \quad (3.124)$$

olur. Burkulma için kirişin yönetici denge denklemi, denklem 3.107 ve 3.124'ten aşağıdaki varyasyonel ilke yardımıyla

$$\begin{aligned} \delta(U - W) = & \int_0^L [B.w^{(4)} - D.w^{(6)} + Nw''] \delta w dx + [-B.w''' + D.w^{(5)} - Nw' - V] \delta w \Big|_0^L \\ & + [B.w'' - D.w^{(4)} - M_c] \delta w' \Big|_0^L + [D.w''' - M_{nc}] \delta w'' \Big|_0^L = 0 \end{aligned} \quad (3.125)$$

hesaplanır. Yukarıdaki varyasyonel eşitliğin sağlanabilmesi için bütün terimlerin sıfıra eşit olması gerekmektedir. Buna bağlı olarak kirişin burkulmada yönetici denge denklemi (Akgöz ve Civalek 2010b)

$$B.w^{(4)} - D.w^{(6)} + Nw'' = 0 \quad (3.126)$$

olur ve $x = 0, L$ için sınır koşulları da

$$\begin{aligned} V = D.w^{(5)} - B.w''' - Nw' \text{ ya da } \delta w &= 0 \\ M_c = B.w'' - D.w^{(4)} \text{ ya da } \delta w' &= 0 \\ M_{nc} = D.w''' \text{ ya da } \delta w'' &= 0 \end{aligned} \quad (3.127)$$

şeklinde yazılır.

Denklem 3.126' daki yüksek mertebeden diferansiyel ifadenin çözümü

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin Kx + C_4 \cos Kx + C_5 \sinh Mx + C_6 \cosh Mx \quad (3.128)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$K = \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 + 4DN}}{2D} \right)^{1/2}, \quad M = \left(\frac{B + \sqrt{B^2 + 4DN}}{2D} \right)^{1/2} \quad (3.129)$$

dır ve $C_i, (i = 1, 2, \dots, 6)$ 'de sınır koşulları yardımıyla belirlenecek olan integral sabitleridir.

Şekil 3.2'de görülen basit mesnetli kirişin her iki ucunda klasik sınır koşulları

$$w = 0, B.w'' - D.w^{(4)} = 0 \quad (3.130)$$

dır. Klasik olmayan sınır koşulları ise

$$\begin{aligned} D.w'''(0) = 0 \text{ ya da } w'''(0) = 0 \\ D.w'''(L) = 0 \text{ ya da } w'''(L) = 0 \end{aligned} \quad (3.131)$$

dır. Yukarıdaki sınır koşullarının denklem 3.128'de kullanılmasıyla

$$C_3 \sin KL = 0, \text{ diğer bütün } C_i = 0 \quad (3.132)$$

sonucuna ulaşılır. Aşık olmayan çözüm için ($C_3 \neq 0$) aşağıdaki eşitliğin sağlanması gerekir.

$$\sin KL = 0 \quad (3.133)$$

Denklem 3.133, $K = \frac{n\pi}{L}$ ($n = 1, 2, \dots$) değeri için sağlanır ve $n = 1$ için kritik burkulma yükü

$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} \left(B + \frac{\pi^2 D}{L^2} \right) \quad (3.134)$$

olur. İlave malzeme boyut parametrelerinin sıfır alınması durumunda denklem 3.134'ün aşağıda görüldüğü gibi klasik burkulma denklemine dönüşeceği açıkça görülmektedir.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.135)$$

Şekil 3.3'te görülen ankastre mesnetli kiriş için sınır koşulları

$$\begin{aligned}
w(0) &= w'(0) = 0 \\
D.w^{(5)}(L) - B.w'''(L) + Nw'(L) &= 0 \\
B.w''(L) - D.w^{(4)}(L) &= 0
\end{aligned} \tag{3.136}$$

dır. Bu durum için klasik olmayan sınır koşulları

$$\begin{aligned}
w''(0) &= 0 \\
D.w'''(L) = 0 \text{ ya da } w'''(L) &= 0
\end{aligned} \tag{3.137}$$

dır. Yukarıdaki klasik ve klasik olmayan sınır koşullarının denklem 3.128'de kullanılmasıyla

$$C_4 \cos KL = 0, \text{ diğer bütün } C_i = 0 \tag{3.138}$$

sonucuna ulaşılır. Aşıkır olmayan çözüm için ($C_4 \neq 0$) aşağıdaki eşitliğin sağlanması gerekir. Denklem 3.138, $K = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$ ($n = 1, 2, \dots$) değeri için sağlanır ve $n = 1$ için kritik burkulma yükü

$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{4L^2} \left(B + \frac{\pi^2 D}{4L^2} \right) \tag{3.139}$$

olur. Benzer biçimde, ilave malzeme boyut parametrelerinin sıfır alınması durumunda denklem 3.139'un aşağıda görüldüğü gibi bir ucu ankastre diğer ucu serbest kirişe ait klasik burkulma denkleminde dönüşeceği açıkça görülmektedir.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \tag{3.140}$$

3.2.2. Timoshenko kiriş modeli

Timoshenko kirişinin deplasman bileşenleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u = -z\psi(x,t), \quad v = 0, \quad w = w(x,t) \quad (3.141)$$

u, v, w sırasıyla x, y, z 'nin deplasman vektörlerinin u bileşenleri ve ψ kirişin merkez ekseninin eğilmeden dolayı meydana gelen dönmesidir.

$$\psi = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \beta(x,t) \quad (3.142)$$

$\beta(x,t)$ kirişin merkez ekseninin kayma deformasyonundan oluşan dönmesidir. Denklem 3.82, 3.141 ve 3.142'den

$$\varepsilon_{xx} = -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \beta \quad (3.143)$$

Sıfırdan farklı şekil değiştirmeler elde edilir. Denklem 3.83 ve 3.143'ten

$$\gamma_x = -z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right), \quad \gamma_y = 0, \quad \gamma_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (3.144)$$

ulaşılır. Denklem 3.82'in denklem 3.85'te yazılmasıyla sıfırdan farklı şekil değiştirme değişimleri (dönme) χ_{ij}^s

$$\chi_{xy}^s = \chi_{yx}^s = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \quad (3.145)$$

bulunur. Denklem 3.82'yi denklem 3.84'te kullanarak sıfırdan farklı şekil değiştirme değişimleri (uzama) $\eta_{ijk}^{(1)}$ (Wang vd. 2010)

$$\begin{aligned}
\eta_{111}^{(1)} &= -\frac{2}{5}z\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\right), & \eta_{113}^{(1)} &= -\frac{4}{15}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \beta}{\partial x}\right), & \eta_{122}^{(1)} &= \frac{1}{5}z\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\right), \\
\eta_{131}^{(1)} &= -\frac{4}{15}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \beta}{\partial x}\right), & \eta_{133}^{(1)} &= \frac{1}{5}z\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\right), & \eta_{212}^{(1)} &= \frac{1}{5}z\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\right), \\
\eta_{221}^{(1)} &= \frac{1}{5}z\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\right), & \eta_{223}^{(1)} &= \frac{1}{15}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \beta}{\partial x}\right), & \eta_{232}^{(1)} &= \frac{1}{15}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \beta}{\partial x}\right), \\
\eta_{311}^{(1)} &= -\frac{4}{15}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \beta}{\partial x}\right), & \eta_{313}^{(1)} &= \frac{1}{5}z\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\right), & \eta_{322}^{(1)} &= \frac{1}{15}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \beta}{\partial x}\right), \\
\eta_{331}^{(1)} &= \frac{1}{5}z\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\right), & \eta_{333}^{(1)} &= \frac{1}{5}z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{3.146}$$

ve denklem 3.82 ve 3.143'ten

$$\epsilon'_{xx} = \frac{2}{3}\epsilon_{xx}, \quad \epsilon'_{yy} = \epsilon'_{zz} = -\frac{1}{3}\epsilon_{xx}, \quad \epsilon'_{xz} = \epsilon_{xz} = \frac{1}{2}\beta \tag{3.147}$$

elde edilir.

Sıfırdan farklı gerilmeler, denklem 3.143 ve 3.147'nin denklem 3.86'da kullanılmasıyla aşağıda görüldüğü gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -\left(k + \frac{4}{3}\mu\right)z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right), & \sigma_{yy} &= -\left(k - \frac{2}{3}\mu\right)z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) \\
\sigma_{zz} &= -\left(k - \frac{2}{3}\mu\right)z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right), & \sigma_{xz} &= k_s\mu\beta
\end{aligned} \tag{3.148}$$

Denklem 3.144'ün, denklem 3.87'de yerine yazılmasıyla yüksek mertebeden gerilmeler, p_i , denklem 3.149'da olduğu gibi elde edilir.

$$p_x = -2\mu\mu_0^2 z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right), \quad p_y = 0, \quad p_z = -2\mu\mu_0^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \quad (3.149)$$

Denklem 3.145'in, denklem 3.89'da kullanılmasıyla sıfırdan farklı m_{ij}^s yüksek mertebeden gerilmelere

$$m_{xy}^s = m_{yx}^s = 2\mu\mu_2^2 \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \right) = -\mu\mu_2^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \quad (3.150)$$

ulaşılır. Benzer biçimde, denklem 3.146'nın, denklem 3.88'de kullanılmasıyla sıfırdan farklı $\tau_{ijk}^{(1)}$ yüksek mertebeden gerilmeleri

$$\tau_{111}^{(1)} = -\frac{4}{5}\mu\mu_1^2 z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right), \quad \tau_{113}^{(1)} = -\frac{8}{15}\mu\mu_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \beta}{\partial x} \right), \quad \tau_{122}^{(1)} = \frac{2}{5}\mu\mu_1^2 z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right),$$

$$\tau_{131}^{(1)} = -\frac{8}{15}\mu\mu_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \beta}{\partial x} \right), \quad \tau_{133}^{(1)} = \frac{2}{5}\mu\mu_1^2 z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right), \quad \tau_{212}^{(1)} = \frac{2}{5}\mu\mu_1^2 z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right),$$

$$\tau_{221}^{(1)} = \frac{2}{5}\mu\mu_1^2 z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right), \quad \tau_{223}^{(1)} = \frac{2}{15}\mu\mu_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \beta}{\partial x} \right), \quad \tau_{232}^{(1)} = \frac{2}{15}\mu\mu_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \beta}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{311}^{(1)} = -\frac{8}{15}\mu\mu_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \beta}{\partial x} \right), \quad \tau_{313}^{(1)} = \frac{2}{5}\mu\mu_1^2 z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right), \quad \tau_{322}^{(1)} = \frac{2}{15}\mu\mu_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \beta}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{331}^{(1)} = \frac{2}{5}\mu\mu_1^2 z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right), \quad \tau_{333}^{(1)} = \frac{2}{5}\mu\mu_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \quad (3.151)$$

şeklinde elde edilir.

Yukarıdaki denklemlerin, denklem 3.81’de yerlerine yazılmasıyla şekil değiştirme enerjisi U (Wang vd. 2010),

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [k_1(w''' - \beta'')^2 + k_2(w'' - \beta')^2 + k_3(2w'' - \beta')^2 + k_4(w'' - 2\beta')^2 + k_5\beta'^2] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L [k_1\psi''''^2 + k_2\psi''^2 + k_3(w'' + \psi')^2 + k_4(-w'' + 2\psi')^2 + k_5(w' - \psi)^2] dx \quad (3.152)$$

biçimde tekrardan yazılır. Denklem 3.152’deki k_1, k_2, k_3, k_4 ve k_5

$$k_1 = I \left(2\mu l_0^2 + \frac{4}{5}\mu l_1^2 \right), \quad k_2 = I \left(k + \frac{4}{3}\mu \right) + 2\mu A l_0^2$$

$$k_3 = \frac{1}{4}\mu A l_2^2, \quad k_4 = \frac{8}{15}\mu A l_1^2, \quad k_5 = k_s \mu A \quad (3.153)$$

şeklindedir. Denklem 3.152’deki U ifadesinin birinci varyasyonu

$$\delta U = \int_0^L [(k_3 + k_4)w^{(4)} + (k_3 - 2k_4)\psi'''' - k_5(w'' - \psi')] \delta w dx$$

$$+ \int_0^L [k_1\psi^{(4)} - (k_3 - 2k_4)w'''' - (k_2 + k_3 + 4k_4)\psi'' - k_5(w' - \psi)] \delta \psi dx$$

$$+ [-(k_3 + k_4)w'''' - (k_3 - 2k_4)\psi'''' + k_5(w' - \psi)] \delta w \Big|_0^L + [(k_3 + k_4)w'' + (k_3 - 2k_4)\psi'] \delta w' \Big|_0^L$$

$$+ [-k_1\psi'''' + (k_3 - 2k_4)w'' + (k_2 + k_3 + 4k_4)\psi'] \delta \psi \Big|_0^L + (k_1\psi'') \delta \psi' \Big|_0^L \quad (3.154)$$

olur. Burada

$$w^{(4)} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad \psi^{(4)} = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \quad (3.155)$$

şeklindedir.

Diğer taraftan, kirişin kinetik enerjisinin birinci varyasyonu

$$\begin{aligned} \delta T &= \delta \int_V \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dv \\ &= \rho \int_0^L (A \dot{w} \delta \dot{w} + I \dot{\psi} \delta \dot{\psi}) dx \end{aligned} \quad (3.156)$$

olur. Burada ,

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.157)$$

şeklindedir. Timoshenko kirişi için, $q(x)$ dış kuvveti, sınır kesme kuvveti V ve sınır klasik ve klasik olmayan eğilme momentleri sırasıyla M_c ve M_{nc} tarafından yapılan işin birinci varyasyonu (Wang vd.2010)

$$\delta W = \int_0^L q(x) \delta w dx + V \delta w|_0^L + M_c \delta w'|_0^L + M_{nc} \delta \psi'|_0^L \quad (3.158)$$

dır. Hamilton Prensipleri'ne göre sistemin kinetik enerjisi ile toplam potansiyel enerjisi arasındaki farkın birinci varyasyonunun sıfıra eşit olması gerekir.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - (U - W)] dt = 0 \quad (3.159)$$

Denklem 3.154, 3.156 ve 3.158'in, yukarıdaki denklemde yerlerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L -\rho A \ddot{w} + q - [(k_3 + k_4)w^{(4)} + (k_3 - 2k_4)\psi''' - k_5(w'' - \psi')] \delta w dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L -\rho I \ddot{\psi} - [k_1\psi^{(4)} - (k_3 - 2k_4)w''' - (k_2 + k_3 + 4k_4)\psi'' - k_5(w' - \psi)] \delta \psi dx dt \\
& + \int_0^L \rho A \dot{w} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_0^L \rho I \dot{\psi} \delta \psi \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \{ [-V - (k_3 + k_4)w''' - (k_3 - 2k_4)\psi'' \\
& + k_5(w' - \psi)] \delta w \Big|_0^L \} dt - \int_{t_1}^{t_2} \{ [-M_c + (k_3 + k_4)w'' + (k_3 - 2k_4)\psi'] \delta w \Big|_0^L \} dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \{ [-k_1\psi''' + (k_3 - 2k_4)w'' + (k_2 + k_3 + 4k_4)\psi'] \delta \psi \Big|_0^L \} dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \{ [(-M_{nc} + k_1\psi'')] \delta \psi \Big|_0^L \} dt = 0 \tag{3.160}
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Yukarıdaki eşitliğin sağlanabilmesi için tüm terimlerin sıfıra eşit olması gerektiği açıkça görülmektedir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\rho A \ddot{w} - q + (k_3 + k_4)w^{(4)} + (k_3 - 2k_4)\psi''' - k_5(w'' - \psi') &= 0 \\
\rho I \ddot{\psi} + k_1\psi^{(4)} - (k_3 - 2k_4)w''' - (k_2 + k_3 + 4k_4)\psi'' - k_5(w' - \psi) &= 0 \tag{3.161}
\end{aligned}$$

Timoshenko kirişi için eğilmede yönetici denklemlere ulaşılır (Wang vd. 2010).

Bu durum için, başlangıç koşulları ve $x = 0, L$ için sınır koşulları sırasıyla

$$(\rho A \dot{w} \delta w) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

$$(\rho I \dot{\psi} \delta \psi) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (3.162)$$

$$(k_3 + k_4)w''' + (k_3 - 2k_4)\psi'' - k_5(w' - \psi) = -\bar{V} \text{ ya da } w = \bar{w}$$

$$(k_3 + k_4)w'' + (k_3 - 2k_4)\psi' = \bar{M}_c \text{ ya da } w' = \bar{w}'$$

$$-k_1\psi''' + (k_3 - 2k_4)w'' + (k_2 + k_3 + 4k_4)\psi' \text{ ya da } \psi = \bar{\psi}$$

$$k_1\psi'' = \bar{M}_{nc} \text{ ya da } \psi' = \bar{\psi}' \quad (3.163)$$

olur.

3.2.2.1. Eğilme problemi

Şekil 3.5'te görülen basit mesnetli Timoshenko kirişi için her iki uçtaki sınır koşulları

$$w = 0, \quad w'' = 0, \quad \psi' = 0 \quad (3.164)$$

şeklindedir. Denklem 3.161'de zamana göre türevlerin sıfır olmasıyla aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$(k_3 + k_4)w^{(4)} + (k_3 - 2k_4)\psi''' - k_5(w'' - \psi') = q$$

$$k_1\psi^{(4)} - (k_3 - 2k_4)w''' - (k_2 + k_3 + 4k_4)\psi'' - k_5(w' - \psi) = 0 \quad (3.165)$$

$w(x)$ ve $\phi(x)$ için Fourier serisi çözümleri

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.166)$$

biçiminde yazılabilir. Burada W_n ve ϕ_n Fourier katsayılarıdır. Denklem 117'deki ifadelerin denklem 3.164'teki sınır koşullarını sağladığı açıkça görülmektedir.

Uygulanan yükün de Fourier serilerinde açılımı aşağıdaki gibidir.

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.167)$$

Burada, Q_n Fourier katsayısıdır. Her iki taraf $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ile çarpılıp 0'dan L'ye integre edilirse

$$\int_0^{\frac{L}{2}-\xi} 0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{\frac{L}{2}-\xi}^{\frac{L}{2}+\xi} \frac{P}{2\xi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{\frac{L}{2}+\xi}^L 0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L Q_n \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.168)$$

elde edilir. Bu problem için yükün yoğunluğu $\frac{P}{2\xi}$ olup

$$Q_n = \frac{P}{n\pi\xi} 2 \sin\left(\frac{n\pi L/2}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right) \quad (3.169)$$

şeklinde yazılabilir. $\xi \rightarrow 0$ için

$$Q_n = \frac{2}{L} P \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (3.170)$$

biçiminde elde edilir. Denklem 3.166'daki eşitliklerin denklem 3.165'te kullanılmasıyla

$$[\alpha^4(k_3 + k_4) + \alpha^2 k_5] W_n + [\alpha^3(k_3 - 2k_4) - \alpha k_5] \phi_n = Q_n$$

$$[\alpha^3(k_3 - 2k_4) - \alpha k_5] W_n + [\alpha^4 k_1 + \alpha^2(k_2 + k_3 + 4k_4) + k_5] \phi_n = 0 \quad (3.171)$$

eşitliklerine ulaşılır. Burada,

$$\alpha = \frac{n\pi}{L} \quad (3.172)$$

dir. Denklem 3.171'nin çözülmesiyle Fourier katsayıları (Wang vd 2010)

$$W_n = \frac{\alpha^4 k_1 + \alpha^2(k_2 + k_3 + 4k_4) + k_5}{[\alpha^4(k_3 + k_4) + \alpha^2 k_5][\alpha^4 k_1 + \alpha^2(k_2 + k_3 + 4k_4) + k_5] - [\alpha^3(k_3 - 2k_4) - \alpha k_5]^2} Q_n$$

$$\phi_n = \frac{-[\alpha^3(k_3 - 2k_4) - \alpha k_5]}{[\alpha^4(k_3 + k_4) + \alpha^2 k_5][\alpha^4 k_1 + \alpha^2(k_2 + k_3 + 4k_4) + k_5] - [\alpha^3(k_3 - 2k_4) - \alpha k_5]^2} Q_n \quad (3.173)$$

şeklinde elde edilir.

3.3. Lineer Olmayan Analiz

Bu bölümde lineer olmayan davranış nedenlerine ve hangi durumlarda lineer olmayan analize ihtiyaç duyulduğuna dair kısaca bilgi verilmiştir. Değiştirilmiş Gerilme Çifti (DGÇ) Elastisite Teorisi kullanılarak Bernoulli-Euler kirişine ait eğilme, burkulma ve titreşim halleri için lineer olmayan hareket denklemi elde edilmiş; ancak analitik sonuç verilmemiştir. Bunların ileriki çalışmalarda değerlendirilmesi düşünülmektedir.

3.3.1. Lineer olmayan davranış nedenleri

Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları orantılık sınırı olarak bilinen bir sınır gerilme değerinin altında lineer-elastik kabul edilen ve deplasmanları, birinci mertbe teorisinin uygulanabileceği kadar küçük olan sistemlere lineer sistemler denilmektedir. Bu

sistemlerde analitik hesaplama için, lineer bir denklem takımının kurulup çözümlenmesi gerekmektedir.

Yüksek dayanımlı malzemelerin kullanılması ile boyutların daha küçük hale geldiği narin yapılarda, yer değiştirmeler genellikle yeter derecede küçük olmamaktadır. Ayrıca, gerilmelerin orantılık sınırına ulaşması yapının taşıma kapasitesinin sona erdiğini ifade etmez. Nitekim yapı orantılık sınırına karşılık gelen yükün üzerinde göçme yükü olarak adlandırılan bir değere ulaşınca işlevliğini kaybeder. Göçme; yapının burkulması, göçmesi veya büyük yer değiştirmesi biçiminde tanımlanabilir.

Malzeme davranışının lineer olmadığı sistemlerde yani malzemenin orantılık sınırından sonraki davranışının da dikkate alınarak yapılan hesapta, iç kuvvet – yer değiştirme bağıntıları lineer olmamaktadır. Geometri değişimlerinin küçük olmadığı geometrik bakımdan lineer olmayan sistemlerde; denge denklemleri ve geometrik uygunluk şartları lineer değildir. Malzeme ve geometrik açıdan lineer olmayan sistemlerde iç kuvvet – yer değiştirme denge denklemleri ve geometrik uygunluk şartları da lineer değildir.

Yapı sistemlerinin lineer olmayan teoriye göre hesabı ve boyutlandırılması alanında meydana gelen gelişmeler, yapıların ve yapı elemanlarının dış etkiler altındaki gerçek davranışlarını daha yakından izleyen hesap ve boyutlandırma yöntemlerinin geliştirilmesine ve pratik uygulamalara olanak sağlamaktadır. Başlangıçta teorisyenler lineer kabule dayanarak hesap yöntemlerini geliştirmişlerdir. Sistemlerinin lineer davranıştan uzaklaştıkça lineer kabulün hesap sonuçlarına getireceği hata miktarı da artmaktadır. Lineer olmayan analiz türü lineer analize göre daha fazla zaman gerektiren ve dolayısıyla daha zor, aynı zamanda ekonomik olarak bakıldığında maliyeti daha yüksektir. Lineer olmayan sistemlerde süperpozisyon yapılamayacağından dış etkiler çeşitli noktalardaki değerlerinin arasındaki oranlar sabit kalarak artar ve analiz böylece iteratif olarak devam eder. Bu nedenle çözüme birkaç deneme-yanılma sonucunda ulaşılır.

Bilindiği gibi malzemenin lineer olmayan davranışının göz önüne alındığı teoriye elasto-plastik teori, denge denklemlerinin şekil değiştirmiş durum üzerinden yazıldığı teoriye ikinci merteye teorisi, lineerliği bozan her iki etkinin birlikte dikkate alındığı teoriye ise ikinci merteye elasto-plastik teori denilmektedir.

İkinci merteye teorisine göre hesapta, geometri değişimlerinin denge denklemlerine etkisi nedeniyle, artan yük parametresine daha hızlı artan yer değiştirmeler karşı gelmektedir.

Lineer olmayan malzeme kullanılarak oluşturulan sistemlerde, artan yüklerle birlikte iç kuvvetler de artarak bazı kesitlerde lineer-elastik sınırı aşmakta ve bu kesitler civarında plastik şekil değiştirmeler meydana gelmektedir.

Yukarıda anlatılanlar dikkate alındığında bir yapı sisteminin birinci merteye teorisine göre hesabında oluşan plastik kesitler nedeniyle sistemin tümü veya bir bölümü mekanizma durumuna gelir ve taşıma gücü sona erer. Bu duruma karşı gelen yüke de birinci merteye limit yükü adı verilir.

Lineerliği bozan her iki etkinin (elasto-plastik ve ikinci merteye teorileri) birlikte göz önüne alınması halinde ise kullanılan teori ikinci merteye elasto-plastik teori adını alır. Oluşan plastik şekil değiştirmeler nedeniyle yer değiştirmeler hızla artmaktadır. Yükler artarak belirli bir sınır değerine ulaşınca, oluşan plastik kesitler sonucunda rijitliği azalan sistemin burkulma yükü dış yük parametresinin altına düşer. Yapının stabilite yetersizliği nedeniyle göçmesine sebep olan bu yük parametresine ikinci merteye limit yükü denilmektedir.

Bazı hallerde, dış yükler ikinci merteye limit yüküne erişmeden önce, meydana gelen büyük yer değiştirmeler, büyük plastik şekil değiştirmeler sistemin göçmesine neden olabilmektedir. En genel anlamda sistemlerinin analizinde lineer olmayan davranışa şu hallerde rastlanır:

- Sınır Koşullarının Lineer Olmaması
- Malzeme Davranışının Lineer Olmaması (Elasto-plastik analiz)
- Büyük Geometri Değişimi (İkinci mertebe analiz)
- Geometri ve malzeme nonlineerliklerinin birlikte bulunması (İkinci mertebe elasto-plastik analiz).

3.3.2. Lineer olmayan Bernoulli-Euler kiriş modeli

Bu teoriye göre Bernoulli-Euler kirişine ait hareketin lineer denklemi

$$\left(EI + \mu Al^2\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (3.174)$$

şeklindedir. Deforme olmuş bir mikro kirişteki eğilmeden dolayı oluşan şekil değiştirme enerjisi U_m (Park ve Gao 2006)

$$U_m = -\frac{1}{2} \int_0^L M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^L Y_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (3.175)$$

biçimindedir. M_x ve Y_{xy} sırasıyla bileşke moment ve çift moment olup

$$M_x = \int_A z \sigma_{xx} dA, \quad Y_{xy} = \int_A m_{xy} dA \quad (3.176)$$

halindedirler. Yukarıdaki denklemdeki σ_{xx} ve m_{xy} aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_{xx} = -Ez \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad m_{xy} = -\mu l^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.177)$$

Bu durumda denklem 3.175'teki U_m (Park ve Gao 2006)

$$U_m = \frac{1}{2} \int_0^L (EI + \mu A l^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.178)$$

biçiminde tekrardan yazılabilir. Ayrıca, eksenel kuvvetlerden dolayı kirişte biriken enerji U_s

$$U_s = \int_0^L (N_0 - N_a) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.179)$$

olur. Buradaki N_0 ve N_a sırasıyla eksenel uygulanan kuvvet ve kirişin eksenel boy değişiminden dolayı meydana gelen ilave eksenel kuvvettir.

Çekme kuvveti etkisi altındaki bir mikro kirişte, kirişin gerçek boyu \bar{L} , kirişin orijinal (ilk) boyu olan L 'den daha uzundur. Her iki ucundan basit mesnetli bir mikro kiriş göz önüne alındığında, kirişin eğilmesi aşağıda görüldüğü gibi ilave bir eksenel kuvvet oluşturur.

$$N_a = \frac{EA}{L} (\bar{L} - L) \approx \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.180)$$

burada, N_a 'nın w 'ye bağlı olarak lineer olmayan gerilme kuvvetini temsil ettiği söylenebilir. $q(x, t)$ düzgün yayılı yük tarafından yapılan dış kuvvetlerin işi

$$W = \int_0^L q(x, t) w(x) dx \quad (3.181)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan mikro kirişin kinetik enerjisi T

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} m \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3.182)$$

olur. Buradaki $m = \rho A$ 'ya eşit olup kirişin birim uzunluğunun kütlesidir.

Hamilton Prensi'ne göre bir kirişin hareketinin dinamik denklemi aşağıdaki varyasyonel eşitlik kullanılarak elde edilebilir.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U_m - U_s - W) dt = 0 \quad (3.183)$$

Denklem 7-11 yukarıdaki denklemde kullanılarak aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ - (EI + \mu A l^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q - \left[N_0 - \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \delta w dx dt$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left[(EI + \mu A l^2) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right]_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[(EI + \mu A l^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w' \right]_0^L dt + \int_0^L \left[\frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right]_{t_1}^{t_2} dx = 0 \quad (3.184)$$

Buradan bir kirişin hareketinin lineer olmayan denklemi (Xia vd. 2010)

$$(EI + \mu A l^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[N_0 - \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (3.185)$$

biçiminde elde edilir ve $x = 0, L$ için sınır koşulları da

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \text{ ya da } w = 0$$

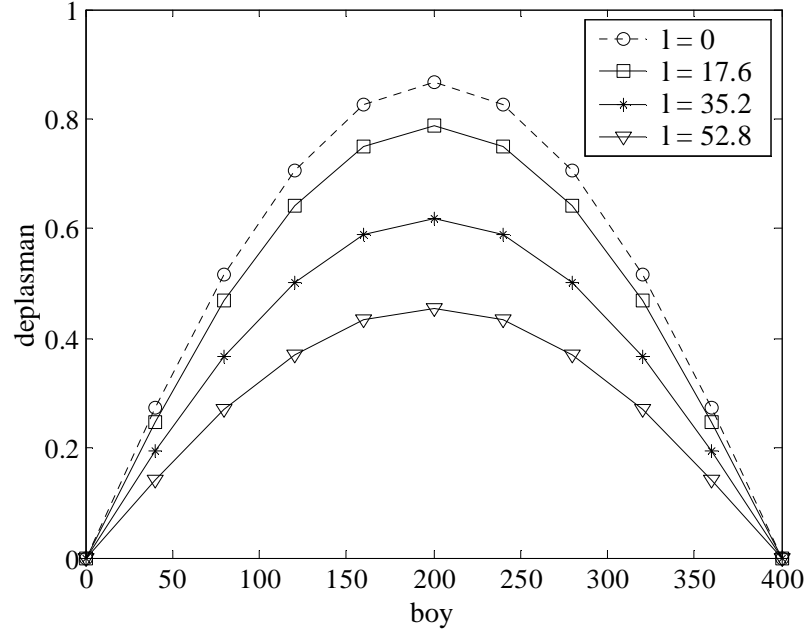
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ ya da } \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.186)$$

olur.

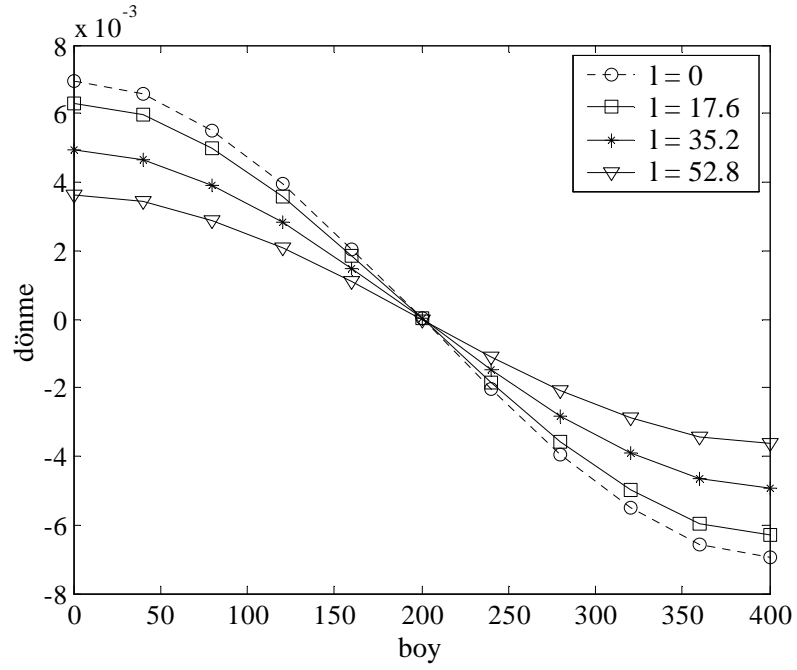
4. SAYISAL SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde epoksiden yapılmış mikro bir kirişin çeşitli yüklemeler ve sınır koşulları için eğilme, dönme ve burkulma analizi sonucu elde edilen değerler verilmiştir. Kiriş için kullanılan malzeme özellikleri şu şekildedir: $E = 1.44GPa$, $h = 20\mu m$, $b = 2h$, $L = 20h$, $\nu = 0.38$ (Lam vd. 2003). Şekillerde düzgün yayılı yük değeri için $q = 0.1 \mu N / \mu m$ ve tekil yük için de $P = 100 \mu N$ değerleri kullanılmıştır. Timoshenko kiriş için düzeltme katsayısı $k_s = \frac{(5 + 5\nu)}{(6 + 5\nu)}$ alınmıştır (Hutchinson 2001). İlave malzeme boyut parametreleri karşılaştırma yapabilmek için birbirlerine eşit alınmıştır ($l_0 = l_1 = l_2 = l$). DŞDD'nde, $l_0 = l_1 = l_2 = l$ 17.6 μm , 35.2 μm ve 52.8 μm değerlerini almakta DGÇ'nde $l_0 = l_1 = 0$ eşit olup l_2 ise 17.6 μm , 35.2 μm ve 52.8 μm değerlerini almaktadır. $l_0 = l_1 = l_2 = 0$ alınmasıyla klasik sonuçlara ulaşılmaktadır.

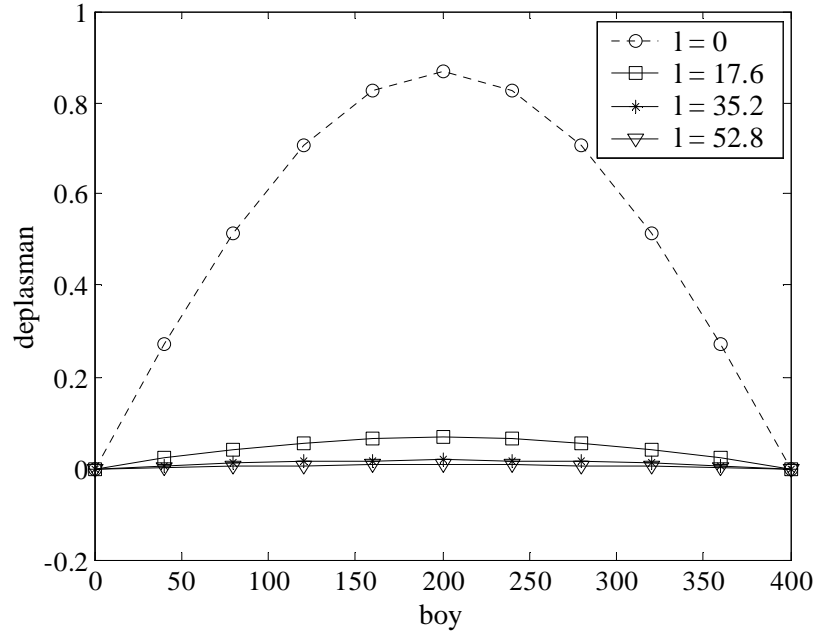
Şekil 4.1-4.4'te sırasıyla DGÇ ve DŞDD kullanılarak düzgün yayılı yük altında Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre deplasman ve dönme değerleri görülmektedir. Bu şekillerde, ilave malzeme boyut parametrelerinin değerlerinin artmasıyla deplasman ve dönme değerleri azalmaktadır. Bu azalma DŞDD'nde DGÇ'nden daha belirgin bir biçimde görülmektedir. Bunun nedeni, DŞDD'nde 3 tane ilave malzeme boyut parametresi (l_0, l_1 ve l_2) olmasına karşın DGÇ'nde sadece bir tane ilave malzeme boyut parametresi (l_2) bulunmasıdır.



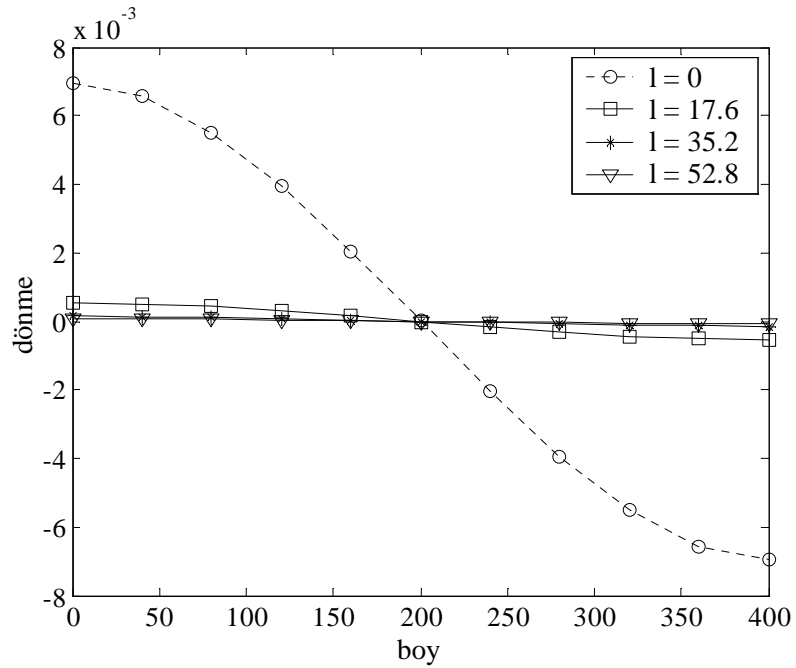
Şekil 4.1. Düzgün yaylı yük altında Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametresine göre deplasman değerleri (DGÇ)



Şekil 4.2. Düzgün yaylı yük altında Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametresine göre dönme değerleri (DGÇ)

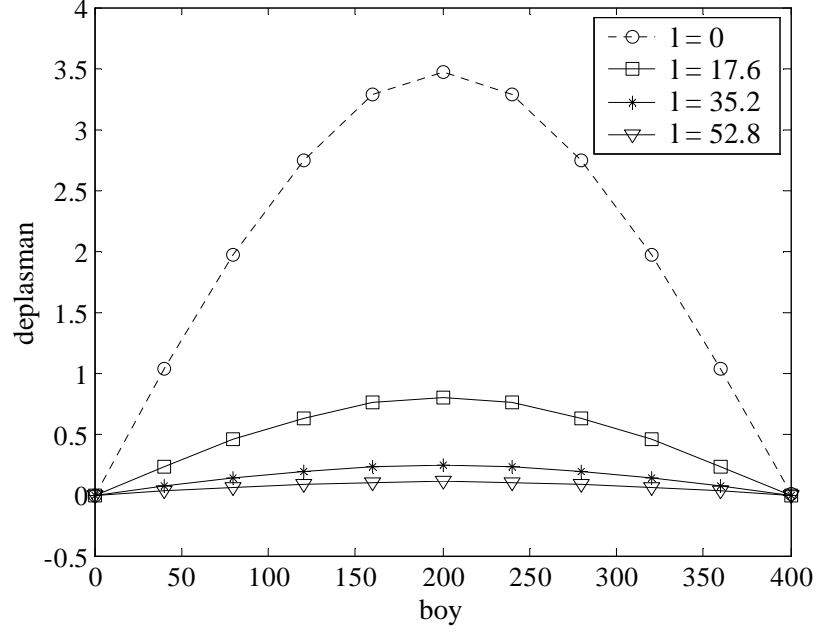


Şekil 4.3. Düzgün yayılı yük altında Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre deplasman değerleri (DŞDD)

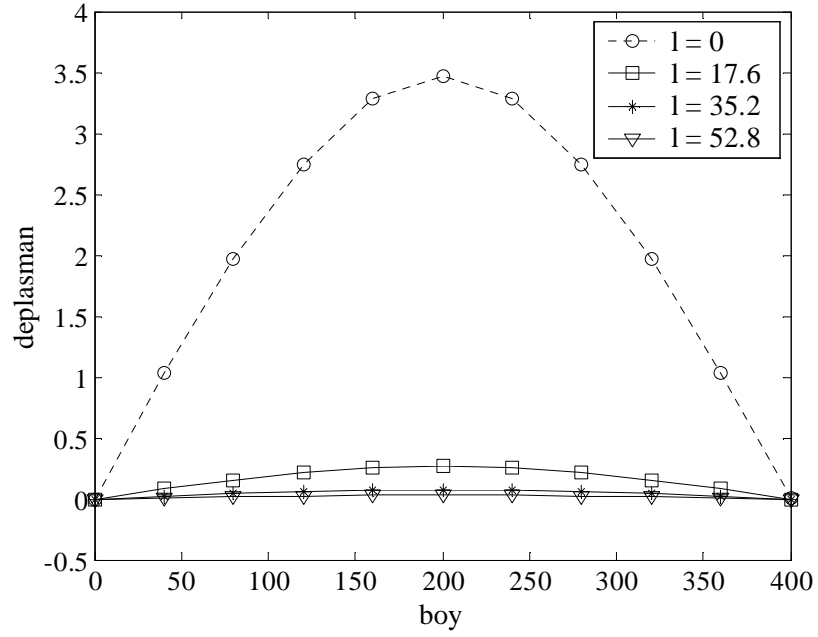


Şekil 4.4. Düzgün yayılı yük altında Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre dönme değerleri (DŞDD)

Şekil 4.5 ve 4.6’da DGÇ ve DŞDD ile ortasından tekil yüklü Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre eğilme değerlerinin değişimi görülmektedir. Burada da yukarıdakine benzer sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 4.5. Ortasından tekil yüklü Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametresine göre deplasman değerleri (DGÇ)



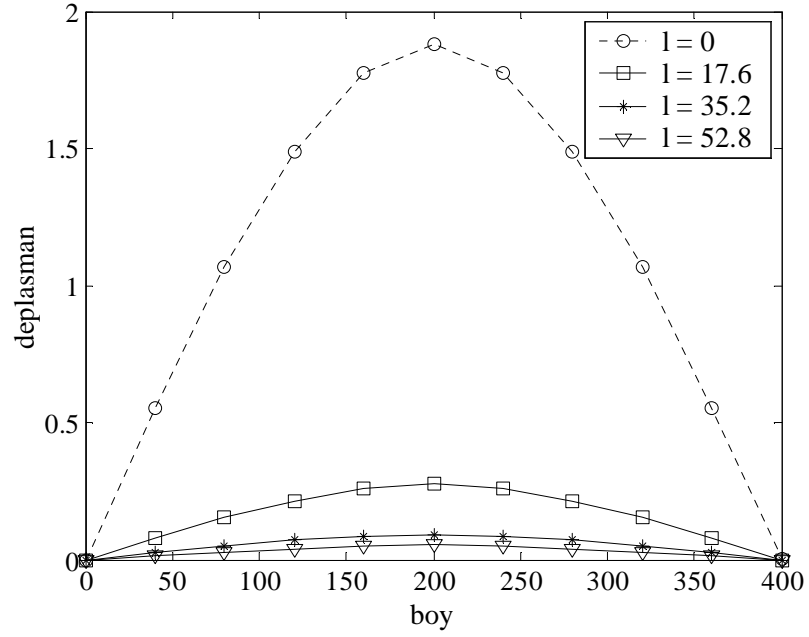
Şekil 4.6. Ortasından tekil yüklü Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre deplasman değerleri (DŞDD)

Yukarıdaki durum, Çizelge 4.1'de üç farklı teori için verilmiştir. İlave malzeme boyut parametrelerinin etkisi açıkça görülmektedir.

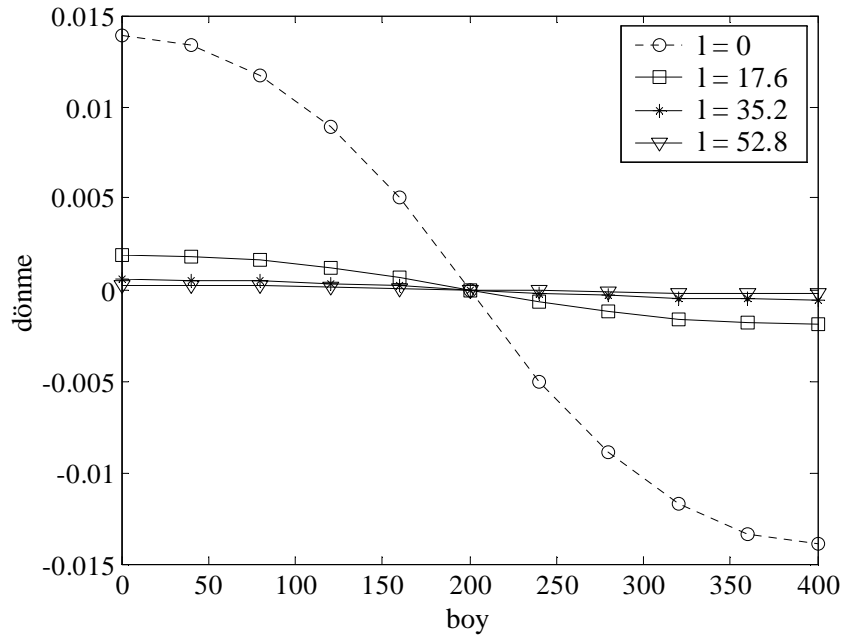
Çizelge 4.1. Ortasından tekil yüklü basit mesnetli kirişin farklı l değerlerine göre maksimum deplasman değerlerinin değişimi

$l \mu m$	0	17.6	35.2	52.8
KT	3.47	3.47	3.47	3.47
DGÇ	3.47	0.79	0.24	0.11
DŞDD	3.47	0.27	0.07	0.03

Şekil 4.7 ve 4.8'de ise ortasından tekil yüklü Timoshenko basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre deplasman ve dönme değerleri DŞDD kullanılarak sunulmuştur. Şekil 4.6 ve şekil 4.7 incelendiğinde Timoshenko kirişinde kayma deformasyonlarının da dikkate alınması nedeniyle deplasman değerlerinin Bernoulli-Euler kirişine göre daha az olduğu rahatça görülebilmektedir.

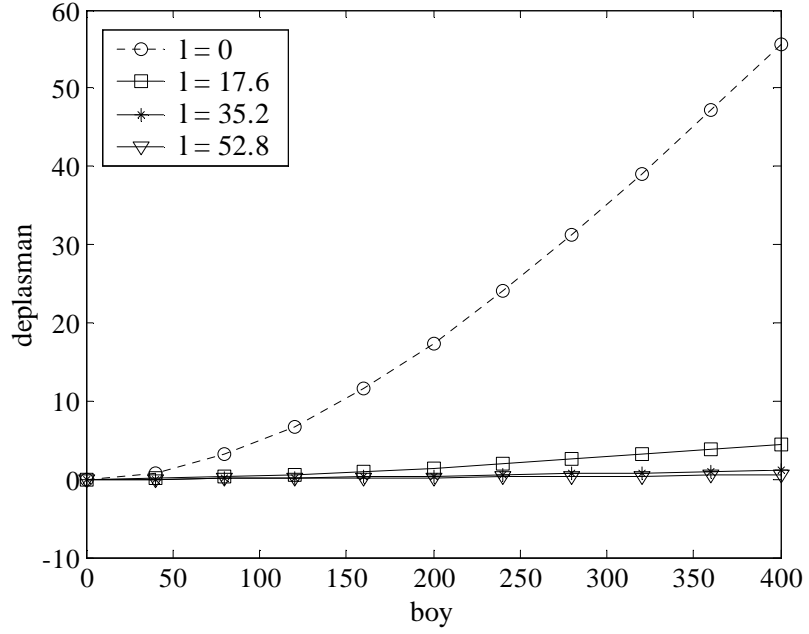


Şekil 4.7. Ortasından tekil yüklü Timoshenko basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre deplasman değerleri (DŞDD)

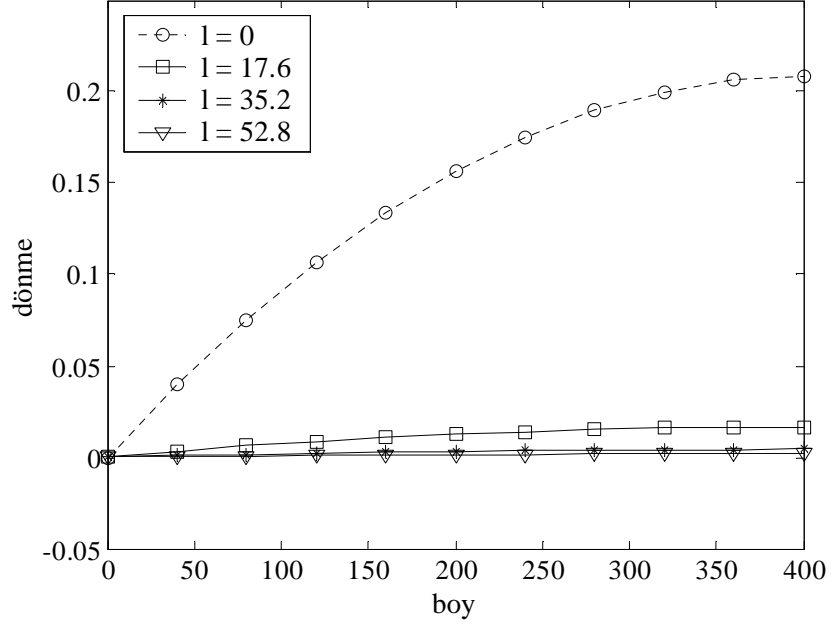


Şekil 4.8. Ortasından tekil yüklü Timoshenko basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre dönme değerleri (DŞDD)

Şekil 4.9 ve 4.10’da yine DŞDD kullanılarak bu kez uç noktasında tekil yüklü Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre deplasman ve dönme değerleri verilmiştir. Bu durum içinde ilave malzeme boyut parametreleri benzer etkilere neden olmaktadır.

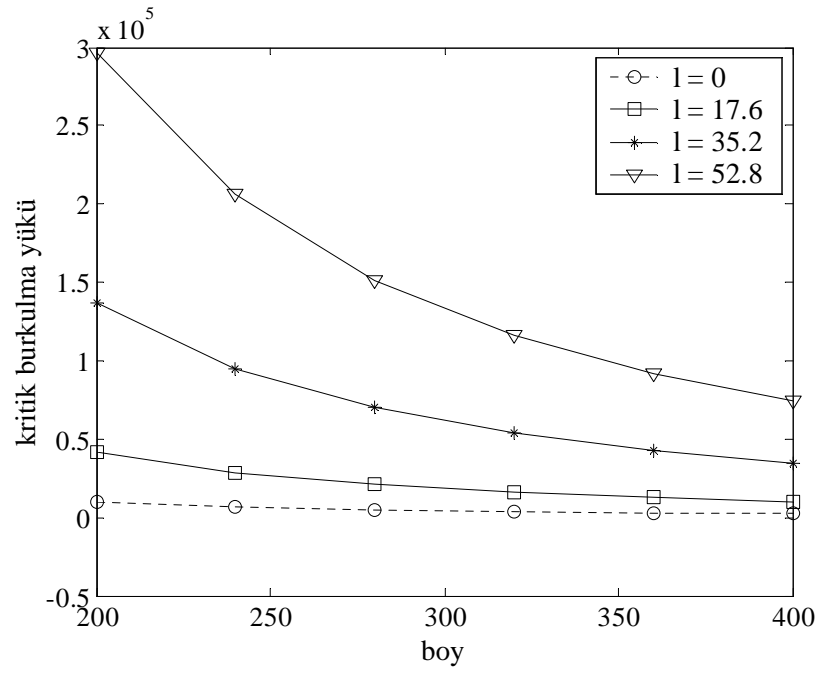


Şekil 4.9. Uç noktasında tekil yüklü Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre deplasman değerleri (DŞDD)

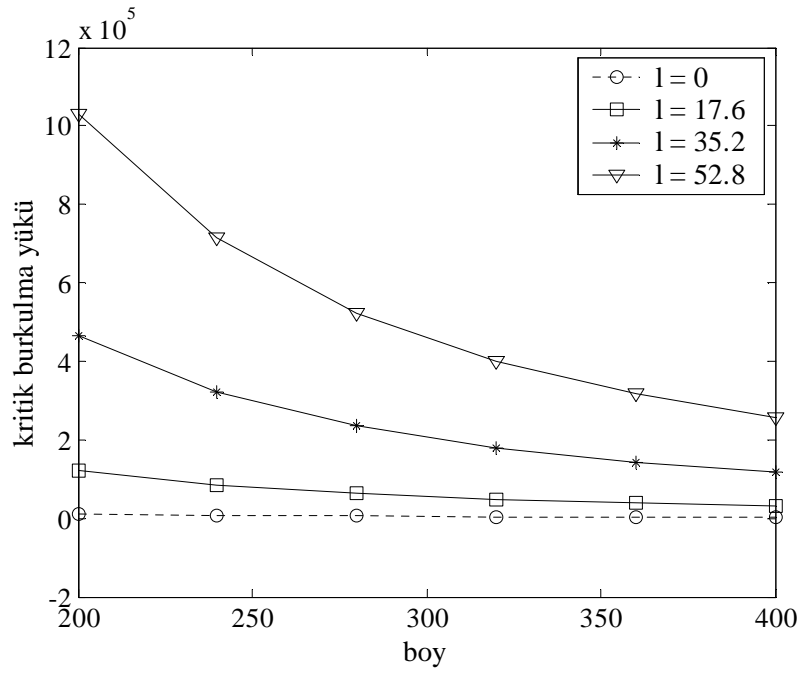


Şekil 4.10. Uç noktasında tekil yüklü Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre dönme değerleri (DŞDD)

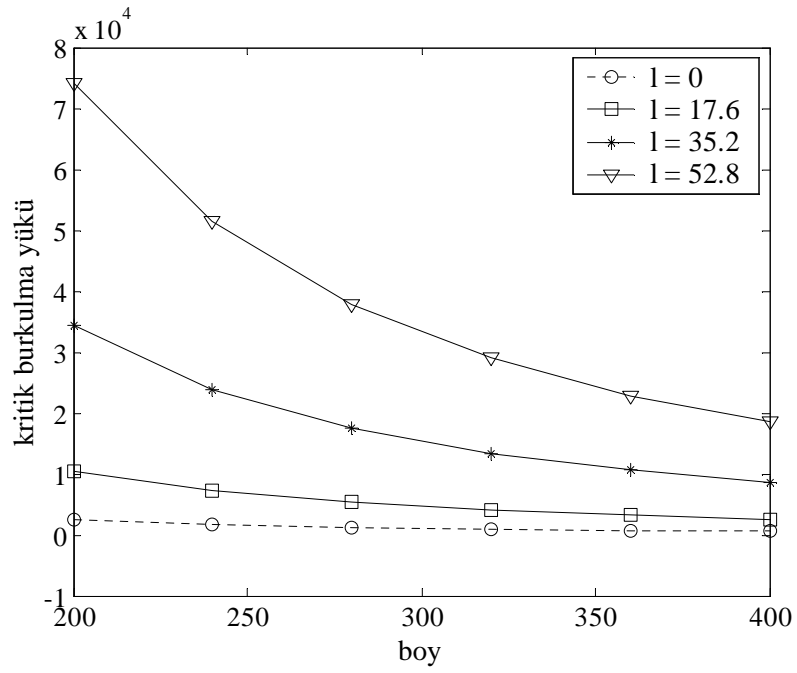
Şekil 4.11- 4.14'te sırasıyla DGÇ ve DŞDD kullanılarak Bernoulli-Euler basit ve ankastre mesnetli kirişin farklı ilave malzeme boyut parametrelerine göre kritik burkulma yükü değerleri görülmektedir. Bu şekillerde eğilmedeki durumun aksine, ilave malzeme parametrelerinin değerlerinin artmasıyla kritik burkulma yükü değerlerinin de arttığı açıkça görülmektedir. Ancak kritik burkulma yükü değerleri için de ilave malzeme boyut parametrelerinin sayısına bağlı olarak DŞDD'ndeki artışın, DGÇ'ndekine göre daha belirgin olduğu açıkça görülmektedir.



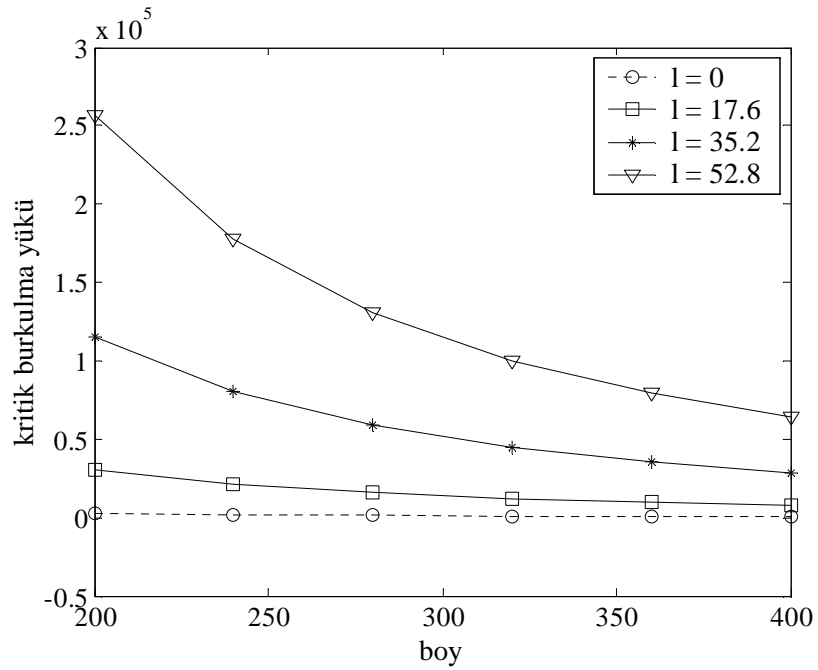
Şekil 4.11. Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametresine göre kritik burkulma yükü değerleri (DGÇ)



Şekil 4.12. Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametrelerine göre kritik burkulma yükü değerleri (DŞDD)

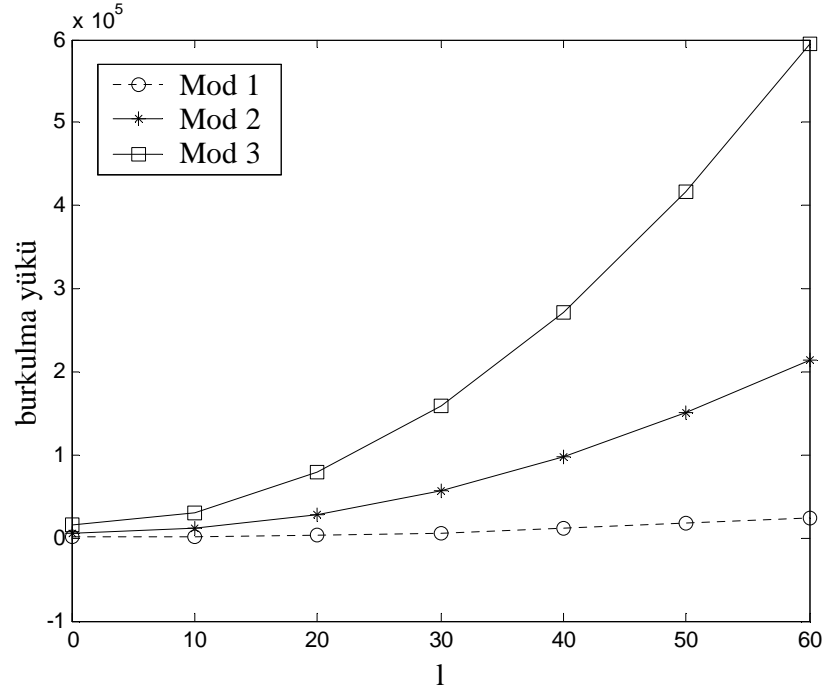


Şekil 4.13. Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin farklı ilave malzeme parametresine göre kritik burkulma yükü değerleri (DGÇ)

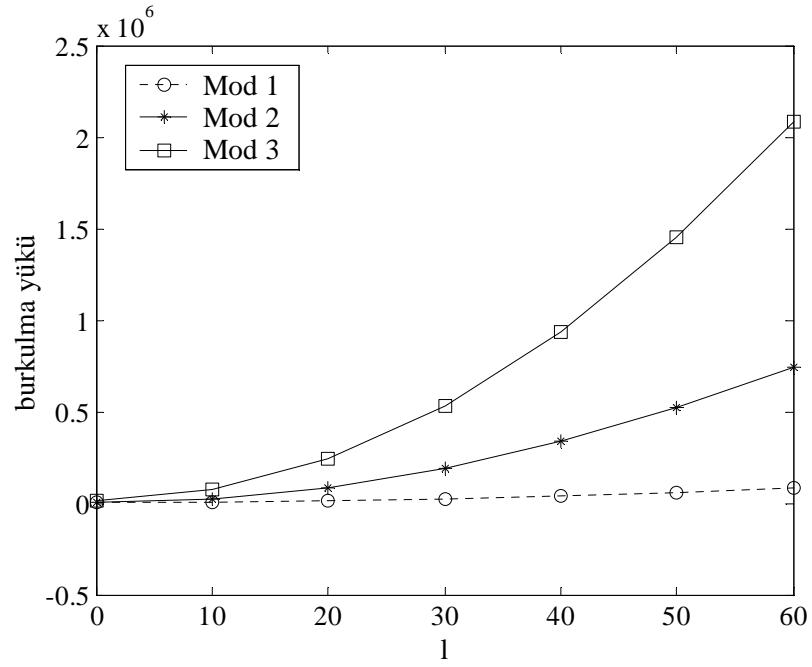


Şekil 4.14. Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin farklı ilave malzeme boyut parametrelerine göre kritik burkulma yükü değerleri (DŞDD)

Şekil 4.15 ve 4.16’da Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin ilk üç modu için burkulma yükü değerlerinin ilave malzeme parametresine göre değişimi, iki yüksek mertebeden elastisite teorisine öre değişimi verilmiştir. Bu şekillerden, ilave parametrelerin yüksek modlarda çok daha belirgin bir etkiye sahip oldukları anlaşılmaktadır.



Şekil 4.15. Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin ilk üç modu için burkulma yükü değerlerinin ilave malzeme parametresine göre değişimi (DGÇ)



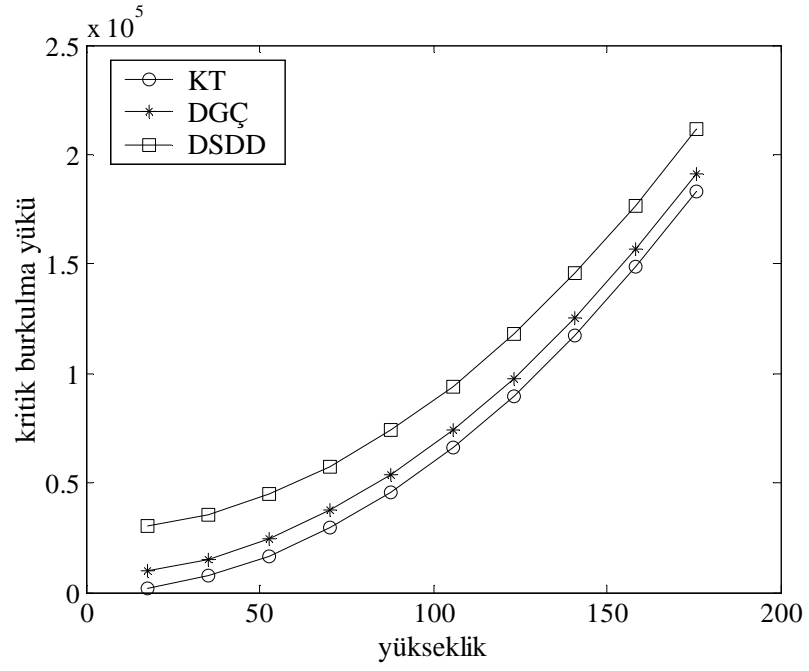
Şekil 4.16. Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin ilk üç modu için burkulma yükü değerlerinin ilave malzeme parametrelerine göre değişimi (DŞDD)

Benzer durum, Çizelge 4.2’de görüldüğü gibi, basit mesnetli kiriş için de geçerlidir.

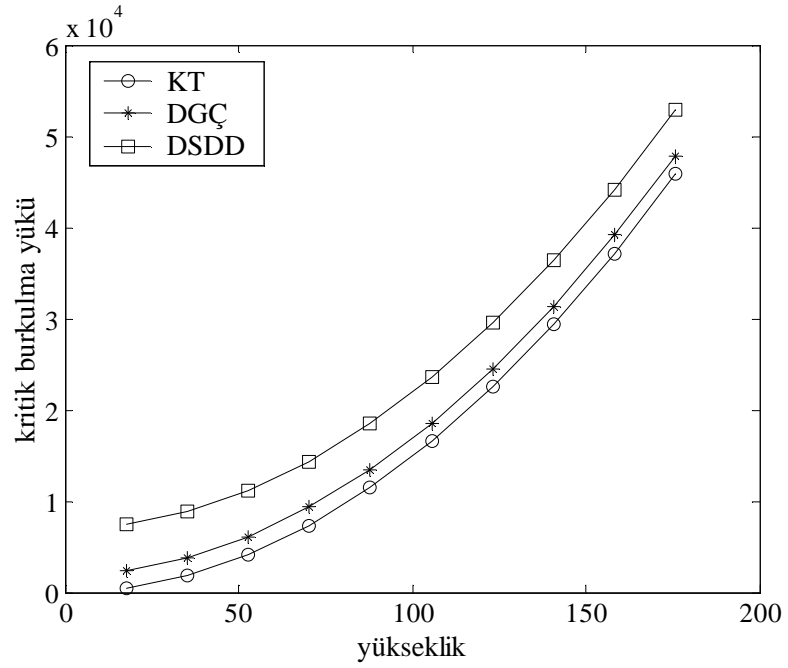
Çizelge 4.2. Basit mesnetli kirişin farklı l değerlerindeki ilk üç modu için burkulma değerleri, $N(10^3 \mu N)$

$l \mu m$	0			17.6			52.8		
Teori	KT	DGÇ	DŞDD	KT	DGÇ	DŞDD	KT	DGÇ	DŞDD
Mod 1	2.37	2.37	2.37	2.37	10.34	30.59	2.37	74.15	256.40
Mod 2	9.47	9.47	9.47	9.47	41.38	122.90	9.47	296.59	1030.50
Mod 3	21.32	21.32	21.32	21.32	93.10	278.70	21.32	667.32	2337.30

Şekil 4.17 ve 4.18’de sırasıyla Bernoulli-Euler basit ve ankastre mesnetli kirişin yüksekliğine bağlı olarak farklı teorilerde kritik burkulma yükü değerleri sunulmuştur. Kiriş yüksekliğinin artmasıyla üç teoriyle elde edilen kritik burkulma yükü değerleri de artmıştır.



Şekil 4.17. Bernoulli-Euler basit mesnetli kirişin yüksekliğine bağlı olarak farklı teorilerde kritik burkulma yükü değerleri ($l = 17.6 \mu m$)



Şekil 4.18. Bernoulli-Euler ankastre mesnetli kirişin yüksekliğine bağlı olarak farklı teorilerde kritik burkulma yükü değerleri ($l = 17.6 \mu m$)

5. SONUÇ

Bu çalışmada, Değiştirilmiş Gerilme Çifti (DGÇ) ve Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi (DŞDD) Elastisite Teorileri kullanılarak bir mikro kirişin çeşitli yüklemeler ve sınır koşullarında eğilme ve burkulma analizleri yapılmıştır. Bu analizlerde, ilave malzeme boyut parametrelerinin ve kiriş boyutlarının sonuçlara etkisi irdelenmiştir. Bu analizlerin sonucunda, mikro ve daha küçük boyutlardaki sistemlerin çözümünde klasik elastisite teorisinin hatalı sonuçlar verdiği görülmüştür. Bu hatanın nedeni boyut etkisinin dikkate alınamamasıdır. Değiştirilmiş Gerilme Çifti ve Değiştirilmiş Şekil Değiştirme Değişimi Elastisite Teorileri'nde ilave malzeme boyut parametrelerinin bulunmasından dolayı boyut etkisi yorumlanabilmiş ve sistemin gerçek davranışına yakın sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlara bakıldığında DŞDD'nin DGÇ'nden iki fazla ilave malzeme boyut parametresine sahip olmasından dolayı daha hassas sonuçlar verdiği görülmektedir. Bu durumla özellikle eğilmede daha küçük kiriş boyutlarında; burkulmada ise yine küçük boyutlarda ve yüksek modlarda karşılaşılmaktadır. Boyutların artmasıyla DGÇ ve DŞDD ile elde edilen sonuçların klasik sonuçlara çok yaklaştığı dolayısıyla da boyut etkisinin ortadan kalktığı görülmüştür.

Yukarıdakilerden DGÇ'nde çözümün klasik çözümlere benzer ve bu nedenle daha kolay olduğu söylenebilir. Ancak, DŞDD'nin çözüm aşamasının daha uzun ve zahmetli olmasına karşın, küçük boyutlu sistemlerde daha doğru sonuçlar verdiği açıkça görülmektedir.

6. KAYNAKLAR

- AKGÖZ, B., and Civalek, Ö. 2010a. Analysis of microtubules based on strain gradient elasticity and modified couple stress theories. *Advances in Vibration Engineering*, in press.
- AKGÖZ, B., CİVALEK, Ö. 2010b. Buckling analysis of Cantilever Carbon Nanotubes Using the Strain Gradient Elasticity and Modified Couple Stress Theories. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, Accept for Publication.
- ANTHOINE, A. 2000. Effect of couple-stresses on the elastic bending of beams. *International Journal of Solids and Structures*, 37: 1003-1018.
- CİVALEK, Ö., AKGÖZ, B. 2010. Free vibration analysis of microtubules as cytoskeleton components: Nonlocal Euler-Bernoulli beam modeling. *Scientica Iranica, Transaction B- Mechanical Engineering*, 17(5): 367-375.
- CİVALEK, Ö., DEMİR, Ç., AKGÖZ, B. 2010. Free vibration and bending analyses of cantilever microtubules based on nonlocal continuum model. *Mathematical and Computational Applications*, 15: 289-298.
- COSSERAT, E., COSSERAT, F. 1909. *Theorie de Corps deformables*. Editions A. Hermann, Paris.
- ERİNGEN, A.C., ŞUHUBİ, E.S. 1964a. Nonlinear theory of simple microelastic solid, I. *International Journal of Engineering Science*, 2: 189–203.
- ERİNGEN, A.C., ŞUHUBİ, E.S. 1964b. Nonlinear theory of simple microelastic solid, II. *International Journal of Engineering Science* 2: 389–404.
- ERİNGEN, A.C. 1966. Linear theory of Micropolar elasticity. *Journal of Mathematical Mechanics*, 15: 909-923.
- ERİNGEN, A.C. 1983. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, 54: 4703–4710.
- FU, Y., ZHANG, J. 2010. Modeling and analysis of microtubules based on a modified couple stress theory. *Physica E*, 42: 1741-1745.
- FUNG, Y. C. 1965. *Foundations of solid mechanics*. Prentice-Hall Inc. New Jersey.
- GAO, X.-L., PARK, S.K. 2007. Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem. *International Journal of Solids and Structures* 44: 7486–7499.

- HAO, M.J., GUO, X.M., WANG, Q. 2010. Small-scale effect on torsional buckling of multi-walled carbon nanotubes. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29 (1): 49-55.
- HU, Y.G., LIEW, K.M., WANG, Q., HE, X.Q., YAKOBSON, B.I. 2008. Nonlocal shell model for elastic wave propagation in single- and double-walled carbon nanotubes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56: 3475-3485.
- HUNG, E.S., SENTURIA, S.D. 1999. Extending the travel range of analog-tuned electrostatic actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 8 (4): 497-505.
- HUTCHINSON, J.R. 2001. Shear coefficients for Timoshenko beam theory, *Journal of Applied Mechanics*, 68: 87-92.
- KOITER, W.T. 1964. Couple stresses in the theory of elasticity, *I and II. Proc. K. Ned. Akad. Wet. (B)*, 67: 17-44.
- KONG, S., ZHOU, S., NIE, Z., WANG, K. 2008. The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro-beams. *International Journal of Engineering Science*, 46: 427-437.
- KONG, S., ZHOU, S., NIE, Z., WANG, K. 2009. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 47: 487-498.
- KRISHNA REDDY, G.V., VENKATASUBRAMANIAN, N.K. 1979. On the flexural rigidity of a micropolar elastic circular cylindrical tube. *International Journal of Engineering Science*, 17: 1015-1021.
- LAKES, R.S. 1983. Size effects and micromechanics of a porous solid. *Journal of Materials Science*, 18: 2572-2580.
- LAKES, R.S. 1986. Experimental microelasticity of two porous solids. *International Journal of Solids and Structures*, 22: 55-63.
- LAKES, R.S. 1995. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua. In: Muhlhaus, H.B. (Editor), *Continuum Models for Materials with Microstructure*. John Wiley & Sons, pp. 1-25, Chichester.
- LAM, D.C.C., YANG, F., CHONG, A.C.M., WANG, J., TONG, P. 2003. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 51: 1477-1508.

- LANCOZ, C. 1970. The variational principles of mechanics. University of Toronto Press, Toronto.
- LAZOPOULOS, K.A. 2004. On the gradient strain elasticity theory of plates. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 23: 843-852.
- LAZOPOULOS, K.A. 2009. On bending of strain gradient elastic micro-plates. *Mechanics Research Communications*, 36 (7): 777-783.
- LI, X-F., WANG, B.-L., MAI, Y.-W. 2008. Effects of a surrounding elastic medium on flexural waves propagating in carbon nanotubes via nonlocal elasticity. *Journal of Applied Physics*, 103: 074309.
- LI, X., BHUSHAN, B., K. TAKASHIMA, K., BAEK, C.W., KIM, Y.K. 2003. Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nanoindentation techniques. *Ultramicroscopy*, 97: 481-494.
- LIEW, K.M., HE, X.Q., KITIPORNCHAI, S. 2005. Buckling characteristics of embedded multi-walled carbon nanotubes. *Proceedings of the Royal Society A*, 461: 3785-3805.
- LU, P., LEE, H.P., LU, C., ZHANG, P.Q. 2007. Application of nonlocal beam models for carbon nanotubes. *International Journal of Solids and Structures*, 44: 5289-5300.
- MA, H. M., GAO, X.-L., REDDY, J. N. 2008. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56: 3379–3391.
- McFARLAND, A.W. and COLTON, J.S. 2005. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 15: 1060-1067.
- MINDLIN, R.D., TIERSTEN, H.F. 1962. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 11: 415–448.
- MINDLIN, R.D. 1963. Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Experimental Mechanics*, 3: 1-7.
- MINDLIN, R. D. 1964. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16: 51-78.
- MINDLIN, R. D. 1965. Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1: 417-438.

- MOSER, Y., GIJS, M.A.M. 2007. Miniaturized flexible temperature sensor. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 16 (6): 1349-1354.
- PAPARGYRI-BESKOU, S., TSEPOURA, K. G., POLYZOS, D., BESKOS, D.E. 2003. Bending and stability analysis of gradient elastic beams. *International Journal of Solids and Structures*, 40: 385-400.
- PARK, S.K., GAO, X-L. 2006. Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 16: 2355-2359.
- PEDDIESON, J., BUCHANAN, G. R., McNITT, R. P. 2003. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 41: 305-312.
- PRADHAN, S. C., PHADIKAR, J. K. 2009. Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates. *Journal of Sound and Vibration*, 325: 206-223.
- REDDY, J.N. 2007a. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science* 45: 288- 307
- REDDY, J.N. 2007b. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, 2nd ed. CRC Press, Boca Raton, FL.
- REDDY, J. N., and PANG, S. D. 2008. Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103: 023511.
- TIMOSHENKO, S.P., and GOODIER, J.N., 1970. *Theory of Elasticity*, third ed. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York.
- TOUPIN, R.A. 1962. Elastic materials with couple stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 11: 385–414.
- TSEPOURA, K.G., PAPARGYRI-BESKOU, S., POLYZOS, D., BESKOS, D.E. 2002. Static and dynamic analysis of gradient-elastic bar in tension. *Archive of Applied Mechanics*, 72 (6-7): 483-497.
- TSIATAS, G.C. 2009. A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory. *International Journal of Solids and Structures*, 46 (13): 2757-2764.
- VARDOULAKIS, I., and SULEM, J. 1995. *Bifurcation Analysis in Geomechanics*. Blackie/Chapman and Hall, London.

- WANG, B., ZHAO, J., ZHOU, S. 2010. A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29: 591-599.
- WANG, C.M., ZHANG, Y.Y., XIANG, Y., REDDY, J.N. 2010. Recent Studies on Buckling of Carbon Nanotubes. *Applied Mechanics Reviews*, 63 (3): 030804.
- WANG, C. Y., RU, C. Q., MIODUCHOWSKI, A. 2006. Vibration of microtubules as orthotropic elastic shells. *Physica E*, 35: 48–56.
- WOOD, R.D. 1988. Finite element analysis of plane couple-stress problems using first order stress functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26: 489-509.
- XIA, W., WANG, L., YIN, L. 2010. Nonlinear non-classical microscale beams: Static bending, postbuckling and free vibration. *International Journal of Engineering Science*, 48: 2044-2053.
- YANG, F., CHONG, A.C.M., LAM, D.C.C., TONG, P. 2002. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39: 2731-2743.

ÖZGEÇMİŞ

Bekir AKGÖZ, 1987 yılında Ankara'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2005 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden 2009 yılında İnşaat Mühendisi olarak mezun oldu. Aynı yıl, Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Aralık 2009'dan beri Akdeniz Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalı'nda Araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.