İÇİNDEKİLER

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLERİN ve $\mathbb{E}^3$ ÖKLİD UZAYINDA YÜZEYLERİN KUATERNİYONLAR YARDIMIYLA İNCELENMESİ

Tuna BAYRAKDAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2010

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLERİN ve $\mathbb{E}^3$ ÖKLİD UZAYINDA YÜZEYLERİN KUATERNİYONLAR YARDIMIYLA İNCELENMESİ

Tuna BAYRAKDAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2010

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLERİN ve $\mathbb{E}^3$ ÖKLİD UZAYINDA YÜZEYLERİN KUATERNİYONLAR YARDIMIYLA İNCELENMESİ

Tuna BAYRAKDAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (...)(.........) not takdir edilerek oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN (I. Danışman) ....
Prof. Dr. Oktay K. PASHAEV (II. Danışman) ....
Prof. Dr. Veli KURT ....
Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR ....
Yrd. Doç. Dr. Şerafettin YALTKAYA ....

ÖZET

$\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLERİN VE $\mathbb{E}^3$ ÖKLİD UZAYINDA YÜZEYLERİN KUATERNİYONLAR YARDIMIYLA İNCELENMESİ

Tuna BAYRAKDAR

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

I. Danışman: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

II. Danışman: Prof. Dr. Oktay K. PASHAEV

Haziran 2010, 41 Sayfa

Bu tezin amacı $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayındaki eğriler için Serret-Frenet türev formüllerini ve bunların yüzeyler için benzeri olan Gauss-Weingarten denklemlerini cebirsel olarak kuaterniyonlar yardımıyla yeniden ifade etmektir. Tezin ilk bölümünde karmaşık sayılar ve kuaterniyonlara ait temel kavramlar verildikten sonra ikinci bölümde, karmaşık düzlemde birim hızlı ve birim hızlı olmayan eğriler için Serret-Frenet türev formülleri yeniden ifade edilmiştir. Aynı formüller $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayındaki eğriler için kuaterniyonlar yardımıyla yeniden incelenmiştir. Son bölümde $\mathbb{E}^3$ de bir yüzeyin birinci, ikinci temel formları ve Gauss-Weingarten denklemleri kuaterniyon çarpımı kullanılarak ifade edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Serret-Frenet türev formülleri, Kuaterniyonlar, Gauss-Weingarten denklemleri.

JÜRİ: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN (I. Danışman)

Prof. Dr. Oktay K. PASHAEV (II. Danışman)

Prof. Dr. Veli KURT

Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Yrd. Doç. Dr. Şerafettin YALTKAYA

ABSTRACT

INVESTIGATION of CURVES in $\mathbb{E}^3$ and $\mathbb{E}^4$ and SURFACES in $\mathbb{E}^3$ via QUATERNIONS

Tuna BAYRAKDAR

M.Sc. Thesis in Mathematics

I. Advisor: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

II. Advisor: Prof. Dr. Oktay K. PASHAEV

June 2010, 41 Pages

The aim of this thesis is to re-formulate the well known Serret-Frenet equations for curves in $\mathbb{E}^3$ and $\mathbb{E}^4$ and Gauss-Weingarten equations for the surfaces in $\mathbb{E}^3$, in an algebraic sense by means of quaternions. Basic concepts of the theory of complex numbers and quaternions are given in the first section. In the second section the well known Serret-Frenet equations for both unit and arbitrary speed curves in the complex plane are obtained. Corresponding equations for curves in $\mathbb{E}^3$ and $\mathbb{E}^4$ are investigated by using quaternion algebra. In the final section, the first and second fundamental forms of a surface in $\mathbb{E}^3$ and Gauss-Weingarten equations, are represented via quaternion multiplication.

KEY WORDS : Serret-Frenet Equations, Quaternions,
Gauss-Weingarten Equations.

COMMITTEE: Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN (I. Advisor)

Prof. Dr. Oktay K. PASHAEV (II. Advisor)

Prof. Dr. Veli KURT

Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Yrd. Doç. Dr. Şerafettin YALTKAYA

ÖNSÖZ

Kuaterniyon kavramı ilk defa 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından ortaya atıldı. Hamilton'un merak ettiği şey, geometrik bir manası olan karmaşık sayılar üzerindeki toplama ve çarpmanın bir benzerinin, üç boyutlu nesnelere uyarlanıp uyarlanamayacağıydı. Hamilton uzun yıllar (a, b, c) reel sıralı üçlüleri için uygun bir çarpma işlemi bulabileceğini umdu ve bu amaçla $i^2 = j^2 = -1$ olmak üzere $\alpha + \beta i + \gamma j$ tipinde elemanları ve

$$(\alpha + \beta i + \gamma j)^2 = \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2i\alpha\beta + 2j\alpha\gamma + 2ij\beta\gamma \tag{0.1}$$

çarpımını göz önüne aldı. Fakat bu tip elemanlar için karmaşık sayıların sahip olduğu $|zw| = |z||w|$ özelliği ancak $ij = 0$ olursa sağlanıyordu ve bu Hamilton'un istediği bir şey değildi. Sonunda Hamilton, kuaterniyon adı verdiği nesneyi, karmaşık sayıların bir genellemesi olarak, $q = 1a + ib + jc + kd$ formunda ifade etti ve bu sayede (a, b, c) reel sıralı üçlülerinin çarpımlarının ve toplamlarının geometrik bir karşılığı olduğunu gösterdi.

Kuaterniyonlar günümüzde matematik, fizik ve bilgisayar bilimlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. (Adler 1985), (Wood 1985), (Brenner 1951), (Imeada 1983), (Mosseri 2000), (Nielson ve Heiland 1992), çalışmaları kuaterniyonların kullanım alanlarına örnek olarak verilebilir.

Klasik diferensiyel geometride eğri ve yüzeyler vektör değerli fonksiyonlar ile incelenir. Örneğin $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir eğri üzerinde kurulan $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ elemanlarının eğri boyunca değişimlerinin oranı, eğrinin eğrilik ve burulmasını belirler. Bu iki fonksiyon bir uzay eğrisini, uzaydaki konumu dışında tamamıyla karakterize eder. Bu çalışmada üç ve dört boyutlu Öklid uzayındaki eğriler ve üç boyutlu Öklid uzayındaki yüzeyler kuaterniyonlar yardımıyla incelenmiştir. Standart iç çarpım ve vektörel çarpımın kuaterniyon çarpımıyla ifade edilebilmesi, hesaplamalar için büyük kolaylık sağlamıştır. Bunun ötesinde, kuaterniyon cebiri eğrilik ve uzunluk gibi kavramların tamamıyla cebirsel olarak ifade edilebilmesine imkan sağlamıştır.

Bu çalışma esas olarak iki bölümden oluşur: Giriş bölümünde amacımıza yönelik olarak karmaşık sayılar ve kuaterniyonlara ait bazı temel kavramlar verildikten sonra ilk bölümde karmaşık düzlem, $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ deki eğriler için Serret-Frenet türev formülleri karmaşık sayılar ve kuaterniyonlar kullanılarak yeniden ele alınmıştır. İkinci bölümde ise, bir noktasının komşuluğunda $\varphi(u, v)$ fonsiyonu ile parametrize edilen bir yüzey üzerinde $\{\varphi_u, \varphi_v, n\}$ çatısının, φ_u ve φ_v vektörleri yönündeki hareketini ifade eden Gauss-Weingarten denklemleri kuaterniyonlar yardımıyla incelenmiştir.

Bana kendisiyle çalışma fırsatı tanıyan ve bu alanda çalışmamı öneren, fikirlerimi önemseyip sabırla dinleyen, bilgi ve saatlerini benimle paylaşan hocam Sayın Prof. Dr. Oktay K. PASHAEV'e, yine bana kendisiyle çalışma fırsatı tanıyan, bilgi ve saatlerini benimle paylaşan ve desteğini esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN'e, ayrıca sonsuz sevgi ve destekleriyle her zaman yanımda olan aileme ve Zahide Ok'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Bu bölümde, düzlem ve üç ve dört boyutlu Öklid uzayındaki eğrilerin cebirsel anlamda incelenmesi amacına yönelik, karmaşık sayılar ve kuaterniyonlara dair bazı temel kavramlar verilmiştir.

1.1. Karmaşık Sayılar

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

sıralı ikililerin kümesini göz önüne alınsın. Bu küme

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

şeklinde tanımlı toplama işlemine göre değişmeli bir grup teşkil eder. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ üzerinde

$$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

biçiminde tanımlı çarpma işlemi birleşmeli ve değişmeli bir işlemdir ve toplama üzerine dağılma özelliğine sahiptir. Bu şekilde tanımlı çarpma işleminin birim elemanı ise $e = (1, 0) = 1$ dir. $\forall z = (x, y) \neq 0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için,

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

elemanına z nin çarpmaya göre tersi denir yani $zz^{-1} = e$ dir.

Tanım 1.1 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, yukarıda tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir cisim teşkil eder. Bu cisme karmaşık sayılar cismi denir ve* $\mathbb{C}$ *ile gösterilir* (Ebbinghaus vd 1991)*.*

Tanım 1.2 $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^{\times}$ *kümesi çarpma işlemine göre değişmeli bir grup teşkil eder ve birim elemanı* 1 *dir. Bu gruba karmaşık sayılar cisminin çarpımsal grubu denir* (Ebbinghaus vd 1991)*.*

$\forall z = (x, y) \in \mathbb{C}$ için, $(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$ denklemi sağlandığından herhangi bir karmaşık sayı aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R}, \quad (0, 1) = i, \quad (0, 1)^2 = -1.$$

karmaşık sayılar cisminin bir $z = x + iy$ elemanının **reel** ve **sanal** kısmı sırasıyla

$$\mathrm{Re}z = x, \qquad \mathrm{Im}z = y$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $z \in \mathbb{C}$ için $\mathrm{Re}z = 0$ ise z karmaşık sayısına sanal, $\mathrm{Im}z = 0$ ise reel sayı denir. İki karmaşık sayı eşittir ancak ve ancak reel ve sanal kısımları eşit ise:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_2 \quad \text{ve} \quad \mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2.$$

Herhangi $z = x + iy$ karmaşık sayısının **eşleniği** $\bar{z} = x - iy$ şeklinde tanımlıdır. Buradan

$$\mathrm{Re}z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

elde edilir. Ayrıca $\bar{\bar{z}} = z$ dir. Bunun yanısıra

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

olduğu çarpma ve toplamanın tanımları kullanılarak kolaylıkla görülebilir.

Tanım 1.3 $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ *sayısına, z karmaşık sayısının* ***modülü*** *denir.*

$$\begin{aligned} <,>: \ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \ &\to \mathbb{R} \\ (w, z) \ &\to < w, z >= \mathrm{Re}(w\bar{z}) \end{aligned}$$

fonksiyonu simetrik, bilineer ve pozitif tanımlıdır. Gerçekten $w, w', z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$< w, z >= \mathrm{Re}(w\bar{z}) = \frac{w\bar{z} + \overline{w\bar{z}}}{2} = \frac{w\bar{z} + \bar{w}z}{2} = \mathrm{Re}(z\bar{w}) =< z, w >,$$

$$\begin{aligned} < w + w', z > &= \mathrm{Re}[(w + w')\bar{z}] = \mathrm{Re}(w\bar{z}) + \mathrm{Re}(w'\bar{z}) =< w, z > + < w', z > \\ < z, w + w' > &= \mathrm{Re}[z\overline{(w + w')}] = \mathrm{Re}(z\bar{w}) + \mathrm{Re}(z\bar{w}') =< z, w > + < z, w' >, \end{aligned}$$

$$< z, z >= \mathrm{Re}(z\bar{z}) = x^2 + y^2 > 0$$

dır. Dolayısıyla $< w, z >= \mathrm{Re}(w\bar{z})$, $\mathbb{C}$ üzerinde bir iç çarpım tanımlar. $z = x + iy$, $w = u + iv$ karmaşık sayıları için

$$< z, w >= \mathrm{Re}(z\bar{w}) = \mathrm{Re}\big(xu + yv + i(yu - xv)\big) = xu + yv$$

dir. Bu ise $\mathbb{R}^2$ deki standart iç çarpımın ta kendisidir. Bu iç çarpımın ürettiği norm ise

$$\|z\| = \sqrt{< z, z >} = \sqrt{\mathrm{Re}(z\bar{z})} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

dir. Tanımdan açıkça görüldüğü üzere $|z| = |\bar{z}|$ dir. Ayrıca

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{w}\bar{z} = |w|^2|z|^2$$

eşitliği vardır. $|z|^2 = z\bar{z}$ olduğundan $\forall z \in \mathbb{C}^\times$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ eşitliği vardır. $\mathbb{C}$ üzerinde bir iç çarpım tanımladığımızdan iki karmaşık sayının ortogonalliğinden bahsedebiliriz:

$$z \perp w \Leftrightarrow < z, w >= \mathrm{Re}(z\bar{w}) = 0.$$

Buradan

$$< x, \lambda i >= \mathrm{Re}(-x\lambda i) = 0, \qquad x, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Yani sanal eksen reel eksene tanımladığımız iç çarpım(Öklid) anlamında diktir.

Herhangi $z = x + iy \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki kutupsal gösterim vardır:

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r = |z|, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, 0 < \theta \leq 2\pi.$$

Bu formül Euler formülü olarak bilinir.

1.2. Kuaterniyonlar

$\mathbb{R}^4$ dört boyutlu reel vektör uzayını ve

$$e_1 = (1,0,0,0), \quad e_2 = (0,1,0,0) \quad e_3 = (0,0,1,0) \quad e_4 = (0,0,0,1)$$

standart bazını göz önüne alınsın. e_1 birim eleman olmak üzere $e_\mu e_\nu$, $2 \leq \mu, \nu \leq 4$ elemanlarının çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\begin{aligned} e_2e_2 &= -e_1, \quad e_2e_3 = e_4, \quad e_2e_4 = -e_3 \\ e_3e_2 &= -e_4, \quad e_3e_3 = -e_1, \quad e_3e_4 = e_2 \\ e_4e_2 &= e_3, \quad e_4e_3 = -e_2, \quad e_4e_4 = -e_1. \end{aligned}$$

Tanım 1.4 *Yukarıdaki şekilde tanımlı çarpıma Hamilton çarpımı denilir* (Ebbinghaus vd 1991).

Tanım 1.5 $\mathbb{R}^4$, *Hamilton çarpımına göre bir cebir teşkil eder. Bu dört boyutlu cebire kuaterniyon cebiri denir ve* $\mathbb{H}$ *ile gösterilir* (Ebbinghaus vd 1991).

Çarpım tanımından da görüldüğü üzere kuaterniyon cebiri $\mathbb{H}$, birleşmeli fakat değişmeli bir cebir değildir. e_1, e_2, e_3, e_4 baz vektörleri sırasıyla e, i, j, k şeklinde gösterilirse yukarıdaki tablo şu hali alır:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -e, \qquad ij = -ji = k, \quad ki = -ik = j, \quad jk = -kj = i.$$

$\mathbb{H}$ ın $q = \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k$ ve $q' = \alpha' e + \beta' i + \gamma' j + \delta' k$ elemanlarının çarpımı şu şekilde tanımlıdır:

$$\begin{aligned} &(\alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k)(\alpha' e + \beta' i + \gamma' j + \delta' k) \\ &\qquad = (\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta')e \quad +(\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma')i \\ &\qquad\ +(\alpha\gamma' - \beta\delta' + \gamma\alpha' + \delta\beta')j \quad +(\alpha\delta' + \beta\gamma' - \gamma\beta' + \delta\alpha')k. \end{aligned}$$

1.2.1. Kuaterniyonların Cebirsel Özellikleri

Teorem 1.6

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{C} \right\} \tag{1.2}$$

kümesi $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ *nin bir* $\mathbb{R}$*-alt cebiridir.* $\mathcal{H}$ *nın herbir elemanı aşağıdaki kuadratik denklemi sağlar:*

$$A^2 - (\mathrm{Iz}A)A + (\det A)E = 0, \qquad \mathrm{Iz}A = 2\mathrm{Re}w, \quad \det A = |w|^2 + |z|^2. \tag{1.3}$$

$\mathcal{H}$*, dört boyutlu birleşmeli bir bölüm cebiridir* (Ebbinghaus vd 1991).

İspat. Gerçekten, $\mathcal{H}$; $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ nin reel sayılar üzerinde dört boyutlu bir alt vektör uzayıdır ve standart bazı şöyledir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrislerin çarpım kuralı kullanılarak $\mathcal{H}$ nin çarpmaya göre kapalı olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ birleşmeli olduğundan $\mathcal{H}$ altcebiri de birleşmelidir. (1.3) matris denklemi de biraz hesapla kolayca görülebilir. $\mathcal{H}$ nın bölüm cebiri olduğunu görebilmek için $A, B \in \mathcal{H}$ ve $AB = 0$ olsun. Buradan $\det A . \det B = 0$ dır. Çarpımları sıfır olan iki reel sayıdan birisi mutlaka sıfırdır. Yani $\det A = 0$ ya da $\det B = 0$ dır. Fakat $|w|^2 + |z|^2 = 0$ sadece $w = z = 0$ ise sağlanır. Dolayısıyla $\mathcal{H}$ bir bölüm cebiridir. ∎

Lemma 1.7

$$\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & -\gamma - i\delta \\ \gamma - i\delta & \alpha - i\beta \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

dönüşümü, bir $\mathbb{R}$*-cebir izomorfizmidir ve*

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \varphi(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Burada $e_1 = e, e_2 = i, e_3 = j, e_4 = k$ *dır* (Ebbinghaus vd 1991).

İspat. φ dönüşümünün lineer ve birebir olduğu aşikardır. Gösterilmesi gereken; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ için $\varphi(e_\mu)\varphi(e_\nu) = \varphi(e_\mu e_\nu)$ dir. $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)$ matrisleri sırasıyla, e, i, j, k nın φ altındaki görüntüleridir ve $\varphi(i)\varphi(j) = \varphi(k)$, $\varphi(j)\varphi(k) = \varphi(i)$, $\varphi(k)\varphi(i) = \varphi(j)$ çarpımlarını sağlarlar. ■

Sonuç 1.8 *Kuaterniyon cebiri $\mathbb{H}$ reel sayılar üzerinde dört boyutlu, birleşmeli bir bölüm cebiridir.*

Tanım 1.9 *Vektör uzayı olarak, $\mathbb{H}$ nin üç boyutlu*

$$\mathrm{Im}\mathbb{H} = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k \tag{1.5}$$

altuzayına, $\mathbb{H}$ nin imajiner uzayı denir (Ebbinghaus vd 1991).

Bu uzayın elemanlarına tamamıyla imajiner ya da sadece imajiner denir. Karmaşık sayılara benzer biçimde $\mathbb{H}$, $\mathbb{R}e$ ve $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ vektör uzaylarının direkt toplamı olarak yazılır:

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}e \oplus \mathrm{Im}\mathbb{H}.$$

Buradan hareketle $\forall q \in \mathbb{H}$, $q = \alpha e + u$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $u \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$ yazmak mümkündür. Burada α ve u ya sırasıyla kuaterniyon q nun *skaler* ve *vektörel*(imajiner) kısmı denir.

İmajiner uzay için verilen (1.5) tanımı, $\{i, j, k\}$ bazına bağlıdır. İmajiner uzayı bazdan bağımsız olarak ifade edebilmek de mümkündür. Teorem (1.6) ve lemma (1.7) nin sonucu olarak, $q = \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H}$, (1.3) kuadratik denklemini sağlar:

$$q^2 = 2\alpha q - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)e.$$

$q \in \mathrm{Im}\mathbb{H} \iff \alpha = 0$ ile birlikte, $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ için bazdan bağımsız şu tanım verilebilir.

$$\mathrm{Im}\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} : q^2 \in \mathbb{R}e \;\; \text{ve} \;\; q \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\}.$$

Fakat $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ bir altcebir oluşturmaz, çünkü herhangi iki imajiner kuaterniyonun çarpımı bir imajiner kuaterniyon olmak zorunda değildir.

Her $q \in \mathbb{H}$, $q = \alpha e + u$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $u \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$ gösterimine sahiptir. $\mathbb{H}$ den $\mathbb{H}$ ye lineer eşlenik dönüşümü

$$\mathbb{H} \to \mathbb{H}, \qquad q \mapsto \bar{q} = \alpha e - u, \quad u \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$$

biçiminde tanımlıdır. O zaman

$$\mathrm{Im}\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} : \bar{q} = -q\}$$

ve

$$\bar{\bar{q}} = q$$

dur. Kuaterniyon çarpımı kullanılarak

$$\overline{pq} = \bar{q}\bar{p} \tag{1.6}$$

eşitliği kolaylıkla görülür. $q = \alpha e + u \in \mathbb{H}$ olmak üzere Re: $\mathbb{H} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto \mathrm{Re}(q) = \alpha$ dönüşümü lineer bir dönüşümdür ve açıktır ki

$$\mathrm{Re}(e) = 1, \qquad \mathrm{Ker}(\mathrm{Re}) = \mathrm{Im}\mathbb{H}.$$

Re fonksiyonunun tanımı gereği

$$q + \bar{q} = 2\mathrm{Re}(q) \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{Re}(\bar{q}) = \mathrm{Re}(q) \tag{1.7}$$

dur.

Tanım 1.10

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} > 0$$

sayısına q kuaterniyonunun modülü denir.

Kuaterniyon cebiri $\mathbb{H}$ bir bölüm cebiri olduğundan sıfırdan farklı her elemanın kuaterniyon çarpımına göre bir tersi vardır. $\forall q \neq 0$ için $|q|^2 = q\bar{q}$ olduğundan,

$$q^{-1} = |q|^{-2}\bar{q}$$

dur.

Lemma (1.7) den $|q|^2 = \det\big(\varphi(q)\big)$ olduğu kolaylıkla görülebilir. $p, q \in \mathbb{H}$ olmak üzere $|pq|^2 = |p|^2|q|^2$ olduğundan

$$\mathbb{H}_1 := \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$$

birim kuaterniyonların kümesi bir grup teşkil eder. O halde, lemma (1.7) den, $\mathbb{H}_1$ grubu

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} : |w|^2 + |z|^2 = 1 \right\} \tag{1.8}$$

grubuna izomorfiktir.

Herhangi $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ kuaterniyonu polar gösterime sahiptir.

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{|q|}, \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}}{|q|}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$q = |q|\big(\cos\theta + \hat{q}\sin\theta\big), \qquad \hat{q} = \frac{\beta i + \gamma j + \delta k}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}}, \quad |\hat{q}| = 1, \quad \hat{q}^2 = -1$$

elde edilir. Burada θ açısı, $q \in \mathbb{R}^4$ vektörünün reel eksenle yaptığı açı ve $\hat{q}\sin\theta$ da q nun imajiner kuaterniyonların uzayı $\mathbb{R}^3$ e olan izdüşümü olarak düşünülebilir. Euler formülü kuaterniyonlar için de geçerlidir:

$$\begin{aligned} e^{\hat{q}\theta} &= \sum_n \frac{(\hat{q}\theta)^n}{n!} \\ &= 1 + \hat{q}\theta - \frac{\theta^2}{2} - \hat{q}\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + ... \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - ... + \hat{q}(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - ...) \\ &= \cos\theta + \hat{q}\sin\theta = q/|q|, \qquad |e^{\hat{q}\theta}| = 1. \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.2.2. Kuaterniyonların Geometrik Özellikleri

$u = \beta i + \gamma j + \delta k$ ve $v = \rho i + \sigma j + \tau k$ gibi iki imajiner(vektörel) kuaterniyonu göz önüne alalım. Kuaterniyon çarpımına göre

$$uv = -(\beta\rho + \gamma\sigma + \delta\tau)e + (\gamma\tau - \delta\sigma)i + (\delta\rho - \beta\tau)j + (\beta\sigma - \gamma\rho)$$

olur. Görüldüğü üzere uv kuaterniyonunun skaler kısmı, $u = (\beta, \gamma, \delta), v = (\rho, \sigma, \tau) \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin standart Öklid iç çarpımının ters işaretlisidir. uv nin imajiner kısmı ise bu iki vektörün vektörel çarpımlarından başka birşey değildir. Dolayısıyla imajiner kuaterniyonların çarpımını skaler ve vektörel çarpım cinsinden şu şekilde ifade edilebilir.

$$uv = - < u, v > e + u \times v, \qquad u, v, u \times v \in \mathrm{Im}\mathbb{H}. \tag{1.10}$$

Vektörel çarpım anti-simetriktir:

$$u \times v = -v \times u.$$

Vektörel çarpımın bu özelliğiyle birlikte (1.10) eşitliği kullanılarak

$$u \times v = \frac{1}{2}(uv - vu), \qquad < u, v >= -\frac{1}{2}(uv + vu), \quad \forall u, v \in \mathrm{Im}\mathbb{H} \tag{1.11}$$

elde edilir.

Lemma 1.11 *$q \in \mathbb{H}$ birim kuaterniyon olmak üzere,*

$$\alpha_q : x \mapsto qxq^{-1}, \qquad x \in Im\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^3,$$

lineer dönüşümü $\mathbb{R}^3$ de bir dönme ifade eder.

İspat. $\bar{x} = -x$ ve $\bar{q} = q^{-1}$ olduğundan

$$\overline{qxq^{-1}} = \overline{q^{-1}}\bar{x}\bar{q} = -qxq^{-1}$$

dir. $|qxq^{-1}| = |x|$ olduğundan, α_q dönüşümü uzunluğu korur. $\alpha_q : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümünün $\{i, j, k\}$ bazındaki hareketi , $q = a + bi + cj + dk$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\alpha_q(i) &= i(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + j(2ad + 2bc) + k(2bd - 2ac) \\
\alpha_q(j) &= i(-2ad + 2bc) + j(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + k(2ab + 2cd) \\
\alpha_q(k) &= i(2bd + 2ac) + j(2cd - 2ab) + k(a^2 - b^2 + c^2 + d^2)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

şeklindedir. Dolayısıyla α_q nun $\{i, j, k\}$ bazındaki matris gösterimi

$$A = \begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & -2ad+2bc & 2bd+2ac \\ 2ad+2bc & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2ab+2cd & a^2-b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

ve $\det A = 1$ dir. O halde $\alpha_q(x) = qxq^{-1}$, $\mathbb{R}^3$ de bir dönme ifade eder. ■

$\mathbb{H}$ kuaternion cebiri bir Öklid vektör uzayı olarak düşünülebilir. Hatırlanırsa $\mathbb{C}$ de bir iç çarpım olarak $< w, z >= \mathrm{Re}(w\bar{z})$ tanımlanmıştı ve bu iç çarpım $\mathbb{R}^2$ deki standart Öklid iç çarpımı idi. Benzer şekilde $\mathbb{H}$ üzerinde standart iç çarpımı şöyle tanımlanabilir. $q = \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k$, $q' = \alpha' e + \beta' i + \gamma' j + \delta' k \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$< q, q' >= \mathrm{Re}(q\bar{q'}) = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta' \in \mathbb{R} \tag{1.13}$$

$\mathbb{H}$ üzerinde bir iç çarpım tanımlar. Yani,

$$<,> \; : \; \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R} \tag{1.14}$$

$$(q, p) \to \mathrm{Re}(q\bar{p}) \tag{1.15}$$

fonksiyonu pozitif tanımlı, simetrik ve bilineerdir. Gerçekten, (1.7) ve (1.6) kullanılarak

$$< q, p >= \mathrm{Re}(q\bar{p}) = \frac{1}{2}(q\bar{p} + p\bar{q}) = \mathrm{Re}(p\bar{q}) =< p, q >$$

olduğu görülür. $\mathrm{Re}(q\bar{q}) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 > 0$ olduğundan pozitif tanımlıdır. Bilineerlik ise, $\forall p, q, h \in \mathbb{H}$, $c \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} < p+q, h > &= \mathrm{Re}\big((p+q)\bar{h}\big) = \mathrm{Re}(p\bar{h} + q\bar{h}) \\ &= \mathrm{Re}(p\bar{h}) + \mathrm{Re}(q\bar{h}) =< p, h > + < q, h > \\ < p, h+q > &= \mathrm{Re}\big(p(\overline{h+q})\big) = \mathrm{Re}(p\bar{h} + p\bar{q}) \\ &= \mathrm{Re}(p\bar{h}) + \mathrm{Re}(p\bar{q}) =< p, h > + < p, q > \\ < cp, q > &= \mathrm{Re}\big((cp)\bar{q}\big) = c\mathrm{Re}(p\bar{q}) = c < p, q > \\ < p, cq > &= \mathrm{Re}\big((p)\bar{c}\bar{q}\big) = c\mathrm{Re}(p\bar{q}) = c < p, q > \end{aligned}$$

eşitliklerinden görülür.

Dolayısıyla, Öklid iç çarpım tamamıyla, cebirsel kuaterniyon çarpımı cinsinden yazılabilir.

$\forall q, q' \in \mathbb{H}$, $q = \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k$, $q' = \alpha' e + \beta' i + \gamma' j + \delta' k$ kuaterniyonları için

$$< q, q' >= \mathrm{Re}(q\bar{q'}) = \frac{1}{2}(q\bar{q'} + q'\bar{q}) = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'. \tag{1.16}$$

Bu iç çarpımın ürettiği norm ise

$$\|q\| = \sqrt{< q, q >} = \sqrt{\mathrm{Re}(q\bar{q})} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} = |q|$$

şeklindedir. $\mathbb{H}$ artık bir iç çarpım uzayı olduğuna göre iki kuaterniyonun ortogonalliğinden bahsedilebilir. $p, q \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$p \perp q \iff < p, q >= 0 \Leftrightarrow p\bar{q} = -q\bar{p} \Leftrightarrow p\bar{q} \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$$

yada kısaca

$$p \perp q \iff p\bar{q} + q\bar{p} = 0 \tag{1.17}$$

dır.

Genel litarature uygunluk açısından herhangi $q = \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H}$ yerine bundan böyle $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ gösterimi kullanılacaktır. Okuyucu α sayısının, q kuaterniyonunun e baz vektörünün katsayısı olduğunu unutmamalıdır.

2. $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ de EĞRİLER

Bu bölümde ilk olarak karmaşık düzlemde birim hızlı ve birim hızlı olmayan eğriler için Serret-Frenet türev formülleri incelenmiştir. Daha sonra üç ve dört boyutlu Öklid uzayındaki eğriler için Serret-Frenet türev formülleri kuaterniyonlar kullanılarak yeniden ele alınmıştır.

2.1. Karmaşık Düzlemde Eğriler ve Serret-Frenet Türev Formülleri

Tanım 2.12 *$z : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $z(t) = x(t) + iy(t)$ regüler bir eğri olmak üzere, $\forall t \in I$ için, z eğrisinin $z(t)$ noktasındaki karmaşık hız vektörü*

$$\frac{dz}{dt} = z'(t) = \left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)\Big|_{z(t)}(t).$$

şekilde tanımlanır.

Tanım 2.13 *$z : I \to \mathbb{C}$ regüler bir eğri ve $a \in I$ olsun.*

$$s(t) = \int_a^t \left|\frac{dz}{dl}\right| dl, \qquad (2.18)$$

fonksiyonuna $z(t)$ eğrisinin yay uzunluğu denir. Burada $\frac{dz}{dl} = \dot{z}$ ile gösterilirse

$$|\dot{z}| = \sqrt{\dot{z}\bar{\dot{z}}}$$

şeklinde tanımlıdır.

Eğer $\forall t \in I$ için $|dz/dt| = 1$ ise o zaman eğriye birim hızlı eğri denir. Bu durumda $dz/dt = \mathbf{t}$ şeklinde gösterilir. Birim hızlı bir eğri için (2.2.) integralinde alt sınır koşulunu $a = 0$ olarak seçilirse

$$s(t) = \int_a^t dl = t - a = t$$

elde edilir.

Tanım 2.14 *$z : I \to \mathbb{C}$ birim hızlı bir eğri olsun.*

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|(s), \qquad\qquad s \in I$$

fonksiyonuna z eğrisinin eğriliği denir.

Tanım 2.15 *Bir karmaşık düzlem eğrisi boyunca tanımlı birim ivme vektörü alanına eğrinin normal vektör alanı denir ve şu şekilde tanımlıdır:*

$$\mathbf{n} := \frac{d\mathbf{t}/ds}{|d\mathbf{t}/ds|} = \frac{\frac{d^2x}{ds^2} + i\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}}$$

Teorem 2.16 *$z(s) = x(s) + iy(s)$ karmaşık düzlem $\mathbb{C}$ de regüler bir eğri ve $\kappa(s) > 0$ olsun. O zaman*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= i\kappa\mathbf{t} \\ \mathbf{n}' &= i\kappa\mathbf{n}. \end{aligned}$$

İspat. $z(s)$ karmaşık düzlemde birim hızlı bir eğri olduğundan, herhangi bir s noktasındaki teğeti

$$\mathbf{t}(s) = \frac{dz}{ds}(s) = e^{i\theta(s)} = \cos\theta(s) + i\sin\theta(s)$$

formundadır. Dolayısıyla $\mathbf{t}$ nin eğri boyunca değişimi

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = i\frac{d\theta}{ds}e^{i\theta}$$

ile belirlenir. Her iki tarafın modülü alınarak

$$\left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \frac{d\theta}{ds} = \kappa(s), \qquad\qquad \frac{d\theta}{ds} > 0.$$

bulunur. Buradan

$$\mathbf{t}'(s) = \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) = i\kappa\mathbf{t}(s)$$

elde edilir. Eğri boyunca her noktada normal vektör (2.15) ile tanımlı olduğundan bir önceki denklem kullanılırsa $\mathbf{n} = i\mathbf{t}$ elde edilir. Buradan

$$\mathbf{n}'(s) = \frac{d\mathbf{n}}{ds}(s) = i\kappa\mathbf{n}(s)$$

eşitliği kolaylıkla görülür. ∎

Yukarıda

$$\kappa(s) = \frac{d\theta}{ds}$$

denkleminin integrali alınarak

$$\theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^{s} \kappa(l)dl$$

elde edilir. θ fonksiyonu teğet vektöründe yerine yazılarak

$$\mathbf{t} = \frac{dz}{ds} = c_0 e^{i\int_{s_0}^{s} \kappa(l)dl}, \qquad c_0 = e^{i\theta(s_0)}$$

bulunur. Buradan bir kez daha integral alarak $z(s)$ eğrisinin denklemi

$$z(s) = z(s_0) + c_0 \int_{s_0}^{s} e^{i\int_{s_0}^{s} \kappa(l)dl} dl'$$

olarak bulunur.

$z(\tau)$ karmaşık düzlemde bir eğri olsun. Her regüler eğri birim hızlı hale getirilebildiğinden, τ parametresi, s yay parametresinin bir fonksiyonu olarak düşünülebilir: $\tau = f(s)$. Bu durumda birim hızlı olmayan eğriler için teğet vektörü şöyle tanımlıdır.

$$\mathbf{t}_* := \frac{dz}{d\tau} = \frac{dz}{ds}\Big|_{s(\tau)} \frac{ds}{d\tau}\Big|_{\tau} = \mathbf{t}\frac{ds}{d\tau}, \qquad \mathbf{t}(s) = e^{i\theta(s)}.$$

τ parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{d\mathbf{t}_*}{d\tau} = \mathbf{t}\frac{d^2 s}{d\tau^2} + \frac{d\mathbf{t}}{ds}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2$$

elde edilir. $\mathbf{n} = i\mathbf{t}$ eşitliğini kullanılarak $\mathbf{n}_*$ karmaşık sayısı

$$\mathbf{n}_* = i\mathbf{t}_* = i\mathbf{t}\frac{ds}{d\tau} = \mathbf{n}\frac{ds}{d\tau}$$

olarak tanımlanır. Açıkca görüldüğü üzere $\mathbf{t}_* \perp \mathbf{n}_*$ dir. Birim hızlı eğriler için Serret-Frenet türev formulleri yardımıyla $\mathbf{t}_*$ ve $\mathbf{n}_*$ ın τ parametresine göre türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}_*}{d\tau} &= \left(\frac{\ddot{s}}{\dot{s}} + i\kappa\dot{s}\right)\mathbf{t}_* \\ \frac{d\mathbf{n}_*}{d\tau} &= \left(\frac{\ddot{s}}{\dot{s}} + i\kappa\dot{s}\right)\mathbf{n}_* \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak birim hızlı olmayan eğriler için Serret-Frenet türev formülleri

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}_*}{d\tau} &= iK\mathbf{t}_* \\ \frac{d\mathbf{n}_*}{d\tau} &= iK\mathbf{n}_*, \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada K karmaşık değerli fonksiyonu

$$K = \kappa\dot{s} - i\frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \tag{2.19}$$

dır. Kolaylıkla görüldüğü üzere $s = \tau$ durumunda K nın sanal kısmı yok olacak ve formüller birim hızlı eğriler için olan türev formüllerine indirgenecektir.

Örnek 2.17 Karmaşık düzlemde logaritmik spiral eğrisi parametrik formda

$$z(t) = ae^{bt}\cos t + iae^{bt}\sin t = z(t) = ae^{bt}e^{it}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

ile verilsin. Eğrinin teğeti

$$z'(t) = ae^{bt}e^{it}(b+i)$$

ve teğetinin uzunluğu

$$|z'(t)| = ae^{bt}\sqrt{b^2+1}$$

olarak hesaplanır.Yay uzunluğu fonksiyonunun tanımından

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} ae^{bu}\sqrt{b^2+1}du \qquad \frac{ds}{dt} = ae^{bt}\sqrt{b^2+1}$$

elde edilir. O zaman $z(t)$ eğrisinin birim teğeti

$$\mathbf{t} = \frac{z'}{|z'|} = \frac{e^{it}(b+i)}{\sqrt{b^2+1}}$$

karmaşık sayısıyla belirlenir. Buradan logaritmik spiralin eğriliği

$$\kappa = |\mathbf{t}'| = \left|\frac{d\mathbf{t}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{ie^{it}(b+i)}{\sqrt{b^2+1}}\frac{1}{a\sqrt{b^2+1}e^{bt}}\right| = \frac{e^{-bt}}{a\sqrt{b^2+1}}$$

olarak bulunur.

$$K = \kappa\dot{s} - i\frac{\ddot{s}}{\dot{s}}$$

eşitliği kullanılırsa

$$K = \frac{e^{-bt}}{a\sqrt{b^2+1}}ae^{bt}\sqrt{b^2+1} - i\frac{abe^{bt}\sqrt{b^2+1}}{ae^{bt}\sqrt{b^2+1}} = 1 - i$$

elde edilir.

Örnek 2.18 $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ üst birim yarı küre üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. O halde $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ küre denklemini sağlar:

$$x^2(s) + y^2(s) + z^2(s) = 1, \qquad \forall s \in I.$$

Kürenin, kuzey kutup noktası $N = (0, 0, 1)$ yi küreden çıkartmak suretiyle kürenin, $(x, y, 0)$ karmaşık düzlemine izdüşümü aşağıdaki şekilde verilir:

$$\zeta = \frac{x + iy}{1 - z}, \qquad (x, y, z) \in S^2.$$

Buna kürenin karmaşık düzleme *stereografik izdüşümü* denir. Bu dönüşüm birebirdir ve tersi

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{1 + |\zeta|^2}, \quad y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(1 + |\zeta|^2)}, \quad z = \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1}$$

ile tanımlıdır. Stereografik izdüşüm ile küre üzerinde bulunan $\alpha = \alpha(s)$ eğrisine karmaşık düzlemde bir $\zeta = \zeta(s)$ eğrisi karşılık gelir:

$$\zeta(s) = \frac{x(s) + iy(s)}{1 - z(s)}.$$

Küresel koordinatlarda üst yarı küre üzerindeki α eğrisi

$$\alpha(s) = \big(\sin\phi(s)\cos\theta(s), \sin\phi(s)\sin\theta(s), \cos\phi(s)\big), \qquad 0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \theta \leq 2\pi$$

biçiminde ifade edebilebileceğinden, karmaşık düzlemdeki ζ eğrisi şu formu alır:

$$\zeta(s) = \frac{\sin\phi(s) e^{i\theta(s)}}{1 - \cos\phi(s)}.$$

ζ nın s parametresine göre türevi alınırsa

$$\zeta'(s) = \frac{-\phi' e^{i\theta} + i\theta' \sin\phi(s) e^{i\theta}}{1 - \cos\phi}$$

elde edilir. Her iki taraf eşleniği ile çarpılırsa

$$\left|\frac{d\zeta}{ds}\right|^2 = \frac{\phi'^2 + \theta'^2 \sin^2\phi}{(1 - \cos\phi)^2}$$

bulunur. Küre üzerinde yer alan α eğrisi birim hızlı olduğundan bu ifadenin payı $\phi'^2 + \theta'^2 \sin^2\phi = 1$ dir. Dolayısıyla

$$\left|\frac{d\zeta}{ds}\right| = \frac{1}{1 - \cos\phi}$$

elde edilir. Görüldüğü üzere karmaşık düzlemdeki ζ eğrisi ancak ve ancak $\phi = \frac{\pi}{2}$ ise birim hızlıdır. Yani ancak α eğrisi $z = 0$ düzleminde büyük çember çizerse α eğrisi ile ζ eğrisi aynı s parametresini ortak yay parametresi olarak kullanırlar.

$l \in \mathbb{R}$, ζ eğrisi için yay parametresi olsun. Yay parametresinin tanımı

$$l(s) = \int_{s_0}^{s} |\zeta'(u)| du$$

kullanılarak

$$\frac{dl}{ds} = |\zeta'(s)| = \frac{1}{1 - \cos\phi}$$

elde edilir. Karmaşık düzlemde birim hızlı olmayan eğriler için Serret-Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$K = \kappa \frac{dl}{ds} - i \frac{\ddot{l}}{\dot{l}}$$

bulunur. Burada κ

$$\kappa = \left| \frac{d}{dl} \left(\frac{\zeta'}{|\zeta'|} \right) \right|$$

şeklinde tanımlıdır.

2.2. $\mathbb{E}^3$ de Eğriler ve Serret-Frenet Türev Formülleri

$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ regüler eğrisini göz önüne alalım. $\mathbb{R}^3$ ile imajiner kuaterniyonların uzayı $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ eşlendiğinden $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ eğrisi, $t \in I$ olmak üzere $q(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ kuaterniyonuyla ifade edilebilir. Bu eğrinin $t \in I$ daki hız vektörü

$$q'(t) = \frac{dq}{dt}(t), \qquad q' \in \mathrm{Im}\mathbb{H}, \quad t \in I$$

şeklinde tanımlanır. Diferensiyellenebilir yay uzunluğu fonksiyonu ise

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{dq}{dl} \right| dl, \qquad \left| \frac{dq}{dl} \right|^2 = \frac{dq}{dl} \overline{\frac{dq}{dl}}$$

ile belirlenir. O halde sabit hızlı bir eğri için

$$q' = \frac{dq}{dt}, \qquad |q'| = c : \text{sbt}, \quad {q'}^2 = -c$$

olduğundan, ${q'}^2 = -c$ ifadesinin türevi alınırsa

$$\frac{d^2q}{dt^2}\frac{dq}{dt} + \frac{dq}{dt}\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

bulunur. Yani

$$\frac{d^2q}{dt^2} \perp \frac{dq}{dt} \tag{2.20}$$

dir.

$q(s) = x(s)i + y(s)j + z(s)k$ eğrisi $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğrinin birim teğet vektörü $\mathbf{t}$ ile gösterilsin:

$$\mathbf{t}(s) = \frac{dq}{ds}(s), \qquad \mathbf{t} \in \mathrm{Im}\mathbb{H}, \quad |\mathbf{t}| = 1, \quad \mathbf{t}^2 = -1.$$

(2.20) den dolayı,

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} \perp \mathbf{t} \tag{2.21}$$

dir. $d\mathbf{t}/ds$ yönündeki birim imajiner kuaterniyona, yani

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}/ds}{|d\mathbf{t}/ds|}$$

şeklinde tanımlı kuaterniyona eğrinin *normal* kuaterniyonu denir.

Tanım 2.19
$$\kappa(s) = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|(s)$$
fonksiyonuna q eğrisinin eğriliği denir.

$\mathbf{t}$ ve $\mathbf{n}$ kuaterniyonları eğri boyunca birbirine dik olduklarından, $\mathbf{b} = \mathbf{tn}$ şeklinde tanımlanan $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$ kuaterniyonu hem $\mathbf{t}$ ye hem de $\mathbf{n}$ ye diktir. Gerçekten,

$$\mathbf{tb} + \mathbf{bt} = \mathbf{t}(\mathbf{tn}) + (\mathbf{tn})\mathbf{t}$$

hesaplanırken kuaterniyon çarpımının birleşmeli oluşu ve $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}$ yani $\mathbf{tn} = -\mathbf{nt}$ kullanılırsa
$$\mathbf{tb} + \mathbf{bt} = 0$$
ve benzer şeklide
$$\mathbf{nb} + \mathbf{bn} = 0$$
bulunur. Dolayısıyla $\mathbf{b}$ kuaterniyonu eğri boyunca hem $\mathbf{t}$ ye hem de $\mathbf{n}$ ye diktir. Üstelik $|\mathbf{b}| = 1$ dir:

$$|\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{tn}|^2 = (\mathbf{tn})(\overline{\mathbf{tn}}) = (\mathbf{tn})(\bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{t}}) = 1$$

Bu şekilde tanımlı $\mathbf{b}$ kuaterniyonuna eğrinin *binormal* kuaterniyonu denir.

Tanım 2.20
$$\tau(s) = \left|\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right|(s)$$
fonksiyonuna q eğrisinin burulması denir.

Teorem 2.21 *$q(s) = x(s)i + y(s)j + z(s)k$ $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. O zaman*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau\mathbf{n} \end{aligned} \tag{2.22}$$

dir.

İspat. $q = q(s)$ birim hızlı eğrisi için $\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$ eşitliği eğrilik ve normal kuaterniyonun tanımından aşikardır. $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ için ortonormal bir baz teşkil ettiğinden, herhangi $p \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$, $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ nin lineer birleşimi olarak

$$\mathbf{n}' = \frac{dn}{ds} = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik soldan ve sağdan $\mathbf{n}$ ile çarpılıp toplanırsa

$$\mathbf{n}\mathbf{n}' + \mathbf{n}'\mathbf{n} = \alpha(\mathbf{n}\mathbf{t} + \mathbf{t}\mathbf{n}) - 2\beta + \gamma(\mathbf{n}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{n})$$

elde edilir. $\mathbf{n}^2 = -1$ olduğundan, $\mathbf{n}\mathbf{n}' + \mathbf{n}'\mathbf{n} = 0$ olur. $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ nin ortogonalliğinden $\beta = 0$ bulunur. Dolayısıyla

$$\mathbf{n}' = \frac{dn}{ds} = \alpha\mathbf{t} + \gamma\mathbf{b} \tag{2.23}$$

dir. $\mathbf{b} = \mathbf{t}\mathbf{n}$ birim kuaterniyonun s parametresine göre türevi

$$\mathbf{b}' = \frac{d}{ds}(\mathbf{t}\mathbf{n}) = \kappa\mathbf{n}^2 + \mathbf{t}\mathbf{n}'$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{n}'$ yerine yazılırsa

$$\mathbf{b}' = \kappa\mathbf{n}^2 + \mathbf{t}(\alpha\mathbf{t} + \gamma\mathbf{b})$$

elde edilir. $\mathbf{t}^2 = \mathbf{n}^2 = -1$ ve $\mathbf{n} = -\mathbf{t}\mathbf{b}$ olduğundan

$$\mathbf{b}' = -\kappa - \alpha - \gamma\mathbf{n} \tag{2.24}$$

dir. $\mathbf{b}' \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$ olduğundan (2.24) in reel kısmı sıfırdır. Yani $-\kappa = \alpha$ dır. Bu (2.23) de yerine konulursa $\mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$ elde edilir. Ayrıca burulma fonksiyonun tanımından $\gamma = \tau$ bulunur. ■

$\mathbf{b} = \mathbf{t}\mathbf{n}$, $\mathbf{n} = \mathbf{b}\mathbf{t}$ ve $\mathbf{t} = \mathbf{n}\mathbf{b}$ eşitlikleri kullanılırsa, (2.22) lineer diferensiyel sistemi, köşegen fakat lineer olmayan bir sisteme dönüşür:

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa\mathbf{b} & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \tau\mathbf{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

burada $\omega = \kappa\mathbf{b} + \tau\mathbf{t}$ *Darboux* vektörüdür.

2.3. $\mathbb{E}^4$ de Eğriler ve Serret-Frenet Türev Formülleri

$q(s) = \alpha(s) + \beta(s)i + \gamma(s)j + \delta(s)k$, $\mathbb{R}^4$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. O zaman

$$T = \frac{dq}{ds}, \qquad |T| = 1 \tag{2.26}$$

dir. $\mathbb{R}^3$ deki bir eğrinin Frenet vektörleri $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olmak üzere, $\mathbf{t}T,\ \mathbf{n}T,\ \mathbf{b}T$ şeklinde tanımlı kuaterniyonlar, T ye Öklid anlamında diktir ve ayrıca birimdirler. Dolayısyla $T, \mathbf{t}T,\ \mathbf{n}T,\ \mathbf{b}T$, $\mathbb{H} \backsimeq \mathbb{R}^4$ için ortonormal bir baz teşkil eder.

$q = q(s)$ eğrisinin asli normali N,

$$N = \frac{T'}{|T'|}, \qquad |N| = 1, \qquad k_1 = |T'| > 0 \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $k_1 = |T'|$, q eğrisinin birinci eğriliğidir. $T\overline{T} = 1$ den türev alarak N nin T ye dik olduğu kolaylıkla görülebilir. N, T ye dik ve aynı zamanda birim olduğundan

$$N = c_1\mathbf{t}T + c_2\mathbf{n}T + c_3\mathbf{b}T, \qquad \sum_{i=1}^{3} c_i^2 = 1, \qquad c_i = c_i(s) \tag{2.28}$$

formunda yazılır. $\sum_{i=1}^{3} c_i^2 = 1$ de, her iki tarafın türevi alınırsa

$$\sum_{i=1}^{3} c_i c_i' = 0$$

bulunur. O zaman $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ birim vektör olmak üzere, $\vec{c'} = (c_1', c_2', c_3') \in \mathbb{R}^3$, $\vec{c}$ vektörüne diktir. $\vec{c'}$ vektörünü $\vec{\alpha}$ ile gösterilsin:

$$\vec{c'} = (c_1', c_2', c_3') = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \vec{\alpha}.$$

O zaman

$$B_1 = \alpha_1\mathbf{t}T + \alpha_2\mathbf{n}T + \alpha_3\mathbf{b}T, \qquad \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 = 1, \qquad \alpha_i = \alpha_i(s) \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlı B_1 kuaterniyonu, N ye diktir. Gerçekten

$$B_1\overline{N} + N\overline{B_1} = 0$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

$$B_2 = B_1 \overline{N} T \tag{2.30}$$

kuaterniyonunu tanımlayalım. Kuaterniyon çarpımı yapılırsa

$$B_2 = (c_2\alpha_3 - \alpha_2 c_3)\mathbf{t}T + (c_3\alpha_1 - c_1\alpha_3)\mathbf{n}T + (c_1\alpha_2 - c_2\alpha_1)\mathbf{b}T$$

elde edilir.

$$\vec{a} = \vec{c} \wedge \vec{\alpha} = (c_2\alpha_3 - \alpha_2 c_3, c_3\alpha_1 - c_1\alpha_3, c_1\alpha_2 - c_2\alpha_1) = (a_1, a_2, a_3)$$

vektörünün bileşenleri görüldüğü üzere, B_2 kuaterniyonunun katsayılarından başka birşey değildir. $|\vec{c}| = 1$ ve $|\vec{\alpha}| = 1$ olduğundan $|\vec{a}| = 1$ dir. O halde B_2 birim kuaterniyondur:

$$B_2 = a_1\mathbf{t}T + a_2\mathbf{n}T + a_3\mathbf{b}T, \qquad \sum_{i=1}^{3} a_i^2 = 1, \qquad a_i = a_i(s) \tag{2.31}$$

Tanımı gereği $B_2 \perp T$, $B_2 \perp N$, $B_2 \perp B_1$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Sonuç olarak, eğri üzerinde tanımlanan $\{T, N, B_1, B_2\}$ kuaterniyonlarının kümesi ,$\mathbb{H} \backsimeq \mathbb{R}^4$ için ortonormal bir baz teşkil eder. $|N| = 1$ olduğundan

$$N' = \frac{dN}{ds} = (c_1' - c_2\kappa)\mathbf{t}T + (c_2' + c_1\kappa - c_3\tau)\mathbf{n}T + (c_3' + c_2\tau)\mathbf{b}T - k_1 T \tag{2.32}$$

kuaterniyonu N ye diktir. O zaman

$$N' = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 T \tag{2.33}$$

şeklinde yazılabilir. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \kappa a_3 + \tau a_1 \\ \lambda_2 &= -\kappa\alpha_3 - \tau\alpha_1 \\ \lambda_3 &= -k_1 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$|B_1| = 1$ olduğundan

$$B_1' = \frac{dB_1}{ds} = (\alpha_1' - \alpha_2\kappa - k_1 a_1)\mathbf{t}T + (\alpha_2' + \alpha_1\kappa - \alpha_3\tau - k_1 a_2)\mathbf{n}T + (\alpha_3' + \alpha_2\tau - k_1 a_3)\mathbf{b}T$$

kuaterniyonu B_1 ve T ye diktir. O zaman

$$B_1' = \mu_1 N + \mu_2 B_2 \tag{2.34}$$

şeklinde yazılabilir. μ_1, μ_2 katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \alpha_1' c_1 + \alpha_2' c_2 + \alpha_3' c_3 - \kappa a_3 - \tau a_1 \\
\mu_2 &= \alpha_1' a_1 + \alpha_2' a_2 + \alpha_3' a_3 + \kappa c_3 + \tau c_1 - k_1
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$|B_2| = 1$ olduğundan

$$B_2' = \frac{dB_2}{ds} = (a_1' - a_2\kappa + k_1\alpha_1)\mathbf{t}T + (a_2' + a_1\kappa - a_3\tau + k_1\alpha_2)\mathbf{n}T + (a_3' + a_2\tau + k_1\alpha_3)\mathbf{b}T$$

kuaterniyonu B_2 ve T ye diktir. O zaman

$$B_2' = \sigma_1 B_1 + \sigma_2 N \tag{2.35}$$

şeklinde yazılabilir. σ_1, σ_2 katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= a_1' \alpha_1 + a_2' \alpha_2 + a_3' \alpha_3 - \kappa c_3 - \tau c_1 + k_1 \\
\sigma_2 &= a_1' c_1 + a_2' c_2 + a_3' c_3 + \kappa \alpha_3 + \tau \alpha_1
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$< q, p >= \mathrm{Re}(q\bar{p}) = \frac{1}{2}(q\bar{p} + p\bar{q})$$

olmak üzere $< N, B_1 >= 0, < N, B_2 >= 0, < B_1, B_2 >= 0$ iç çarpımlarından türev alarak

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= -\lambda_1 \\
\sigma_2 &= -\lambda_2 \\
\mu_2 &= -\sigma_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} a_1'c_1 + a_2'c_2 + a_3'c_3 &= 0 \\ \alpha_1'c_1 + \alpha_2'c_2 + \alpha_3'c_3 &= -1 \\ \alpha_1'a_1 + \alpha_2'a_2 + \alpha_3'a_3 + a_1'\alpha_1 + a_2'\alpha_2 + a_3'\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

bulunur.

$$< \vec{\alpha}, \vec{a} >= 0$$

eşitliğinde her iki tarafın türevini alınarak

$$< \vec{\alpha}', \vec{a} > + < \alpha, \vec{a}' >= 0$$

bulunur. (2.36) denklemlerinin ikincisinden $\vec{\alpha}' \,/\!/\, \vec{c}$ yani $\vec{c''} \,/\!/\, \vec{c}$ bulunur. Bu yukarıdaki denklemde kullanılırsa

$$< \alpha, \vec{a}' >= 0$$

elde edilir. O zaman ya $\vec{a}' \,/\!/\, \vec{c}$ yada $\vec{a}' = 0$ dır. (2.36) ün ilk denkleminden $\vec{a}' \perp \vec{c}$ dir. O halde $\vec{a}' = 0$ yani $\vec{a}$: sbt bir vektördür. O zaman

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\kappa c_3 - \tau c_1 + k_1 \\ \sigma_2 &= \kappa\alpha_3 + \tau\alpha_1 \\ \mu_2 &= \kappa c_3 + \tau c_1 - k_1 \\ \mu_1 &= -1 - \kappa a_3 - \tau a_1 \end{aligned}$$

halini alır.

Teorem 2.22 *$q(s) = \alpha(s) + \beta(s)i + \gamma(s)j + \delta(s)k$, $\mathbb{R}^4$ de birim hızlı regüler bir eğri olsun. O zaman aşağıdaki formüller vardır.*

$$\begin{aligned} T' &= k_1 N \\ N' &= -k_1 T + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \\ B_1' &= -\lambda_1 N + \mu_2 B_2 \\ B_2' &= -\lambda_2 N - \mu_2 B_1. \end{aligned} \tag{2.37}$$

3. $\mathbb{E}^3$ de YÜZEYLER

Bu bölümde $\mathbb{E}^3$ de bir yüzeyin birinci ve ikinci temel formları, normal eğriliği ve Gauss-Weingarten denklemleri kuaterniyonlar kullanılarak yeniden ele alınmıştır. Şimdi $\mathbb{E}^3$ de bir yüzeyin tanımını ve bazı temel kavramları hatırlatarak işe başlayalım.

Tanım 3.23 *M, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. M nin herbir p noktası için, p nin $\mathbb{R}^3$ de bir A komşuluğu ve $\mathbb{R}^2$ nin bir U açık altkümesinden, $\mathbb{R}^3$ uzayına bir φ fonksiyonu aşağıdaki iki önermeyi doğrulayacak biçimde bulunabiliyorsa, M ye, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey denir.*
1. $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu diferensiyellenebilir ve regüler bir fonksiyondur.
2. $\varphi(U) = M \cap A$ dır ve $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ fonksiyonu homeomorfizmdir
(Sabuncuoğlu, 2001).

φ fonksiyonuna M yüzeyinin bir p noktası civarındaki *parametrizasyonu* ve p noktasının M yüzeyindeki $M \cap A$ komşuluğuna da *koordinat komşuluğu* denir. Burada $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vektör değerli $\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{r}}(u, v) = x(u, v)\vec{\mathbf{i}} + y(u, v)\vec{\mathbf{j}} + z(u, v)\vec{\mathbf{k}}$ fonksiyonu ile temsil edilebilir. Dolayısıyla M yüzeyi, herhangi bir $p \in M$ noktası civarında iki değişkenli üç fonksiyonla belirlenmiş olur:

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v). \tag{3.38}$$

Tanım 3.24 *M, bir yüzey ve $p \in M$ olsun. Yüzeyin p noktasında $\vec{r_u}$ ve $\vec{r_v}$ vektörleri ile gerilen düzleme yüzeyin p noktasındaki tanjant düzlemi denir ve T_pM ile gösterilir.*

$\mathbb{R}^3$ ile imajiner kuaterniyonların uzayı $\mathrm{Im}\mathbb{H}$

$$q = xi + yj + zk \in \mathrm{Im}\mathbb{H} \longleftrightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

ile eşlendiğinden, M yüzeyinin bir parametrizasyonu $q(u^1, u^2) = x(u^1, u^2)i + y(u^1, u^2)j + z(u^1, u^2)k$ kuaterniyon değerli fonksiyon ile ifade edilebilir.

Dolayısıyla tanjant düzlem tanımı kuaterniyon formunda q_u ve q_v imajiner kuaterniyonlarının gerdiği düzlem olarak da ifade edilebilir. $\mathbb{E}^3$ de orjinden geçen bir düzlem kuaterniyon formda genel olarak $q(u,v) = ui + vj + (au + bv)k$ şeklinde verilebilir, $a, b \in \mathbb{R}$.

Tanım 3.25 *M yüzeyinin bir p noktasında tanjant düzleme dik olan birim vektöre yüzeyin p noktasındaki birim normal vektörü denir ve n ile gösterilir.*

Bu vektör kuaterniyon formda

$$n = \frac{q_u q_v - q_v q_u}{|q_u q_v - q_v q_u|}$$

birim kuaterniyonu ile ifade edilebilir. n kuaterniyonu gerçekten q_u ve q_v kuaterniyonlarına diktir. n ile q_u nun birbirlerine dik oldukları

$$\begin{aligned} nq_u + q_u n &= \frac{q_u q_v q_u - q_v q_u^2 + q_u^2 q_v - q_u q_v q_u}{|q_u q_v - q_v q_u|} \\ &= \frac{-q_v q_u^2 + q_u^2 q_v}{|q_u q_v - q_v q_u|} \\ &= \frac{-|q_u|^2 (q_v - q_v)}{|q_u q_v - q_v q_u|} = 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

ile elde edilir. Aynı işlemler q_v için de yapılırsa $q_v \perp n$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

3.1. Bir Yüzeyin Birinci Temel Formu

$M \subset \mathbb{E}^3$, $q(u^1,u^2) = x(u^1,u^2)i + y(u^1,u^2)j + z(u^1,u^2)k$ parametrizasyonu ile verilen bir yüzey ve γ da M üzerinde bir eğri olsun. O halde γ eğrisi

$$\gamma(t) = q(u^1(t), u^2(t)), \qquad t \in I \subset \mathbb{R}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu eğrinin yay uzunluğu

$$s(t) = \int_a^b \sqrt{|\gamma'(t)|^2} dt \tag{3.40}$$

fonksiyonudur. Burada imajiner γ' kuaterniyonunun modülü $|\gamma'| = \sqrt{\gamma'\overline{\gamma'}}$ şeklinde tanımlıdır. $\gamma(t)$ nin zincir kuralı yardımıyla türevi alınırsa

$$\frac{d\gamma}{dt} = \sum_{i=1}^{2} q_{u^i}\frac{du^i}{dt}, \qquad q_{u^i} = \frac{\partial q}{\partial u^i}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|^2 = \frac{d\gamma}{dt}\overline{\frac{d\gamma}{dt}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}(q_{u^i}\overline{q_{u^j}} + q_{u^j}\overline{q_{u^i}})\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}.$$

(3.40) formülü kullanılarak

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}du^i du^j \tag{3.41}$$

elde edilir. Burada g_{ij} pozitif (reel) değerli fonsiyonları

$$g_{ij} = \frac{1}{2}(q_{u^i}\overline{q_{u^j}} + q_{u^j}\overline{q_{u^i}}) = -\frac{1}{2}(q_{u^i}q_{u^j} + q_{u^j}q_{u^i}) =< q_{u^i}, q_{u^j} > \tag{3.42}$$

dir. (3.41) kuadratik formuna M yüzeyinin *birinci temel formu* denir. $u^1 = u$, $u^2 = v$ olmak üzere (3.41)

$$\mathrm{I} = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} E &= g_{11} = \left|\frac{\partial q}{\partial u}\right|^2 = \frac{\partial q}{\partial u}\overline{\frac{\partial q}{\partial u}} \\ F &= g_{12} = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial q}{\partial u}\overline{\frac{\partial q}{\partial v}}\right) \\ G &= g_{22} = \left|\frac{\partial q}{\partial v}\right|^2 = \frac{\partial q}{\partial v}\overline{\frac{\partial q}{\partial v}}. \end{aligned}$$

Yüzeyin birinci temel formu $\mathbb{E}^3$ deki standart iç çarpımla üretilmiştir yani g_{ij} katsayıları $\mathbb{E}^3$ deki standart iç çarpımla belirlenir. Bu sayede yüzey üzerinde herhangi bir eğrinin uzunluğu

$$s = \int ds = \int \sqrt{\sum g_{ij} du^i du^j}.$$

integraliyle hesaplanır. Bu formun katsayılarının sadece kuaterniyon çarpımı kullanılarak elde edilebilmesi verilen bir yüzey üzerindeki bir uzunluğun ve dolayısıyla uzunluğa bağlı herhangi bir kavramın tamamıyla cebirsel olarak hesaplanabilmesine olanak sağlamaktadır. Örneğin

Yüzey üzerinde iki farklı doğrultu

$$dq = q_{u^i} du^i, \qquad \delta q = q_{u^i} \delta u^j,$$

leri göz önüne alalım. Bunların iç çarpımı

$$< dq, \delta q >= -\frac{1}{2}(dq\delta q + \delta q dq) = |dq||\delta q| \cos\theta = \sum g_{ij} du^i \delta u^j$$

dir. Yüzey üzerinde

$$|dq| = \sqrt{dq\overline{dq}} = \sqrt{\sum g_{ij} du^i du^j}, \qquad |\delta q| = \sqrt{\delta q \overline{\delta q}} = \sqrt{\sum g_{ij} \delta u^i \delta u^j},$$

olduğundan bu iki doğrultu arasındaki açının kosinüsü

$$\cos\theta = \frac{\sum g_{ij} du^i \delta u^j}{\sqrt{\sum g_{ij} du^i du^j}\sqrt{\sum g_{ij} \delta u^i \delta u^j}}$$

formülü ile hesaplanabilir.

(3.42) den açıkca görüldüğü üzere, birinci temel formun katsayıları simetriktir:

$$g_{ij} = g_{ji}.$$

Dolayısıyla bu katsayıları 2×2 tipinde simetrik reel bir matris ile temsil edebilir:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.43}$$

Bu matrisin determinantı g olsun. Öklid iç çarpımı pozitif tanımlı olduğundan yüzeyin bir regüler noktasında $g_{11} > 0$, $g_{22} > 0$ ve dolayısyla $g > 0$ dir. O halde

(3.43) matrisinin tersi mevcuttur. Bu matrisin içerikleri g^{ij} ile gösterilsin:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}.$$

(g_{ij}) matrisi pozitif tanımlı ve simetrik olduğundan bu matris de simetriktir:

$$g^{ij} = g^{ji}. \tag{3.44}$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

yazılabilir.

3.2. Bir Yüzeyin İkinci Temel Formu ve Normal Eğrilik

$M \subset \mathbb{E}^3$, $q(u^1, u^2) = x(u^1, u^2)i + y(u^1, u^2)j + z(u^1, u^2)k$ parametrizasyonu ile verilen bir yüzey ve $v_p \in T_pM$ olsun. Yüzey üzerinde bu tanjant vektörünü hız vektörü kabul eden bir eğri vardır. Bu eğri γ olsun ve γ birim hızlı olsun: $\gamma(s) = q\big(u(s), v(s)\big)$.

Tanım 3.26 *$p \in M$, $v_p \in T_pM$ ve $v_p = \gamma'(s)$ olmak üzere*

$$k_n = -\frac{1}{2}(q_{ss}n + nq_{ss})$$

sayısına yani eğrinin ikinci türevinin(ivme vektörü), yüzeyin birim normali n üzerine izdüşümünün uzunluğuna yüzeyin v_p doğrultusundaki normal eğriliği denir.

k_n nin yüzey üzerinde seçilen eğriden bağımsız olduğu şu şekilde gösterilebilir.

Yüzey üzerinde birim hızlı bir eğrinin yay parametresine göre ikinci türevi

$$q_{ss} = \frac{d^2q}{ds^2} = \sum_{i,j}^{2}\left(q_{u^iu^j}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} + q_{u^i}\frac{d^2u^i}{ds^2}\right)$$

dir. Eşitliğin her iki tarafı soldan ve sağdan $-\frac{1}{2}n$ ile çarpılıp toplanırsa

$$k_n = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{2}(q_{u^iu^j}n + nq_{u^iu^j})\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} \tag{3.45}$$

elde edilir. Birim teğet vektör v_p yi teğet düzlemin bazları cinsinden ifadesi

$$v_p = q_{u^i}\frac{du^i}{ds}$$

dir. Burada görüldüğü üzere du^i/ds, $i = 1, 2$ sayıları, yüzeyin bir p noktasında, v_p nin $\{q_{u^1}, q_{u^2}\}$ bazındaki bileşenleridir. (3.45) formülünde γ eğrisi sadece du^i/ds temsil edilmektedir. Dolayısyla k_n sadece v_p nin seçimine bağlıdır. k_n

$$k_n = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{2}\frac{(q_{u^iu^j}n + nq_{u^iu^j})du^idu^j}{ds^2}.$$

olarak ifade edilebilir.

Tanım 3.27 *Aşağıdaki kuadratik forma yüzeyin ikinci temel formu denir ve* II *ile gösterilir:*

$$\mathrm{II} = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}du^idu^j, \qquad b_{ij} = -\frac{1}{2}(q_{u^iu^j}n + nq_{u^iu^j}). \tag{3.46}$$

Kısmi türevler değişmeli olduğundan b_{ij} katsayıları simetriktir:

$$b_{ij} = b_{ji}.$$

Sonuç olarak yüzeyin normal eğriliği

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} \tag{3.47}$$

biçiminde yazılabilir.

S^1, T_pM de p merkezli birim çember ve $v_p \in T_pM, |v_p| = 1$ olsun. O zaman v_p imajiner kuaterniyonu bu çember denklemini sağlar. Dolayısıyla v_p yönündeki k_n normal eğriliğine S^1 üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon gözü ile bakılabilir. S^1 kompakt bir küme olduğundan, k_n sürekli fonksiyonu birim çember üzerinde extremum değerlerine ulaşır. Birim çember kutupsal gösterimde θ koordinatı ile temsil edilebildiğinden, k_n normal eğrilik fonksiyonu θ ya bağlı sürekli bir fonksiyon olarak düşünülebilir.

Tanım 3.28 *S^1 birim çember üzerinde*

$$\frac{dk_n}{d\theta} = 0$$

eşitliğini sağlayan k_n değerine extremum ve k_n nin extremum değerine ulaştığı v_p doğrultusuna da esas(asli) doğrultu denir.

$k_n(v_p)$ nin

$$\sum g_{ij} du^i du^j = 1$$

şartı altında ekstremum değerleri araştırılırken $du^i = \alpha^i$ olmak üzere Lagrange çarpanı yöntemi kullanılarak ϕ Lagrange fonksiyonu

$$\phi(\alpha^1, \alpha^2) = \sum_{i,j} b_{ij} \alpha^i \alpha^j - \lambda \left(\sum_{i,j} g_{ij} \alpha^i \alpha^j - 1 \right)$$

nin ekstremum değerleri hesaplanır. Burada λ Lagrange çarpanıdır. k_n, (3.47) deki gibi tanımlı olduğundan, asli doğrultuları aşağıdaki sistemin çözümleri olarak bulunabilir.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha^i} = \sum_{j=1}^{2} b_{ij} \alpha^j - \lambda \sum_{j=1}^{2} g_{ij} \alpha^j = \sum_{j=1}^{2} (b_{ij} - \lambda g_{ij}) \alpha^j = 0.$$

Dolayısıyla Lagrange çarpanının değerleri aşikar olmayan çözümler için

$$|b_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0 \tag{3.48}$$

denklemini sağlarlar.

Kuadratik formlarla ilgili kısa bir hatırlatma aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.29 *İkinci dereceden n değişkenli homojen polinoma kuadratik form denir. Herhangi bir kuadratik form şu gösterime sahiptir:*

$$\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}x_i x_k, \qquad a_{ik} = a_{ki}, \quad i,k = 1,...,n$$

(Gantmacher 1974).

Burada $A = (a_{ik})$ simetrik bir matristir. $(x_1, x_2, ..., x_n)$ kolon vektörü x, kuadratik formu da

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}x_i x_k \tag{3.49}$$

ile gösterilsin. O zaman

$$A(x,x) = x^{\mathbf{t}}Ax$$

yazılabilir. Burada $x^{\mathbf{t}}$, x kolon vektörünün transpozisyonunu göstermektedir. Eğer a_{ij} katsayılar matrisi reel içerikli bir matris ise o zaman kuadratik form (3.49) ya reel kuadratik form denir. A nın determinantı $|A|$ ya, $A(x,x)$ kuadratik formunun determinantı denir.

Tanım 3.30 *$x \neq 0$ olmak üzere $A(x,x) > 0$ ise reel kuadratik form $A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}x_i x_k$ ya pozitif tanımlıdır denir* (Gantmacher 1974).

Tanım 3.31

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}x_i x_k, \qquad B(x,x) = \sum_{i,k=1}^{2} b_{ik}x_i x_k$$

iki reel kuadratik form ve $\lambda \in \mathbb{R}$ bir parametre olmak üzere $A(x,x) - \lambda B(x,x)$ e kuadratik formların bir demeti denir. Burada $B(x,x)$ formu pozitif tanımlı ise $A(x,x) - \lambda B(x,x)$ demetine regüler denir (Gantmacher 1974).

Tanım 3.32

$$|A - \lambda B| = 0$$

denklemine $A(x,x) - \lambda B(x,x)$ *demetinin karakteristik denklemi denir* (Gantmacher 1974).

λ_0 ın bu denklemin bir çözümü varsayılırsa $A - \lambda_0 B$ matrisi singüler olduğundan sıfırdan farklı bir $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ vektörü vardır öyleki $(A - \lambda_0 B)z = 0$ dır. Bu λ_0 sayısına, $A(x,x) - \lambda B(x,x)$ demetinin karakteristik değeri ve karşılık gelen $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ kolon vektörüne de demetin asal(asli) vektörü denir.

Teorem 3.33 $A(x,x) - \lambda B(x,x)$ *demetinin karakteristik denklemi* $|A - \lambda B| = 0$ *nin her zaman* n *tane kökü vardır. Bunlara* λ_k *diyelim.* $\forall k = 1, ..., n$, λ_k *lara* $z^k = z_{1k}, z_{2k} ..., z_{nk}$ *asli vektörleri karşılık gelir:*

$$Az_k = \lambda_k B z_k.$$

z^k *asli vektörleri* $B(z^i, z^k) = \delta_{ik}$ *olacak şekilde seçilebilir* (Gantmacher 1974).

$|b_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0$ denkleminin çözümleri araştırılırsa 2×2 tipindeki (b_{ij}) ve (g_{ij}) matrisleri simetrik ve ayrıca (g_{ij}) pozitif tanımlı olduğundan, yukarıdaki teoremden, $|b_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0$ denkleminin iki reel kökü vardır. Bunlara λ_1 ve λ_2, bunlara karşılık gelen asli vektörlere de v_1, v_2 diyelim ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ için $v_1 \perp v_2$ olduğunu gösterelim. v_1, $v_2 \in T_p(M)$ teğet vektörlerinin q_{u^1}, q_{u^2} bazındaki gösterimi

$$v_1 = a^1 q_{u^1} + a^2 q_{u^2}, \qquad v_2 = b^1 q_{u^1} + b^2 q_{u^2}$$

olsun. O zaman

$$\frac{1}{2}(v_1 \overline{v_2} + v_2 \overline{v_1}) = -\frac{1}{2}(v_1 v_2 + v_2 v_1) = g_{ij} a^i b^j$$

dir. v_1 ve v_2 asli vektör olduklarından

$$\begin{aligned} (b_{ij} - \lambda_1 g_{ij})a^j &= 0 \\ (b_{ij} - \lambda_2 g_{ij})b^j &= 0 \end{aligned} \qquad (3.50)$$

denklemleri sağlanır. Birinci denklem b^i ve ikinci denklem a^i ile çarpılıp, ikinci denklemi birinciden çıkartılır ve $g_{ij} = g_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$ kullanılırsa

$$(\lambda_1 - \lambda_2)g_{ij}a^j b^i = 0$$

elde edilir. Buradan görüldüğü üzere $\lambda_1 \neq \lambda_2$ için karşılık gelen asli vektörler v_1 ve v_2 ortogonaldir. Dahası, v_1 asli vektörü doğrultusundaki normal eğrilik $k_n(v_1)$ şöyle bulunur.

$$k_n(v_1) = \frac{\sum b_{ij}a^i a^j}{\sum g_{ij}a^i a^j}. \tag{3.51}$$

(3.50) denklemini a^i ile çarpıp i üzerinden toplam alınırsa

$$b_{ij}a^i a^j = \lambda_1 g_{ij}a^i a^j$$

elde edilir. Bu ifade (3.51) de yerine konulursa

$$k_n(v_1) = \lambda_1$$

buluruz. Aynı işlemler $k_n(v_2)$ için yapılırsa

$$k_n(v_2) = \lambda_2.$$

elde edilir.

Görüldüğü üzere, yüzeyin bir v_k teğet vektörü yönündeki normal eğriliği, (3.48) denkleminin bir kökü olan λ_k değerine eşit çıktı. Bu normal eğriliklere M yüzeyinin asli eğrilikleri denir ve $k_i, i = 1, 2$ ile gösterilir.

Tanım 3.34 *Bir M yüzeyin ortalama eğriliği H ve Gauss eğriliği K sırasıyla*

$$\begin{aligned} H &= k_1 + k_2 \\ K &= k_1 k_2 \end{aligned} \tag{3.52}$$

şeklinde tanımlıdır (Dubrovin vd 1992).

Teorem 3.35 *Bir M yüzeyinin Gauss eğriliği, yüzeyin birinci ve ikinci temel formlarının determinantının oranına eşittir:*

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \tag{3.53}$$

(Dubrovin vd 1992).

3.3. Gauss-Weingarten Formülleri

M, $q(u^1,u^2) = x(u^1,u^2)i + y(u^1,u^2)j + z(u^1,u^2)k$ parametrizasyonu ile verilen bir yüzey olsun. Yüzeyin bir p noktasında, kuaterniyon değerli q fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi türevleri $q_{u^iu^j}$ ler, linear bağımsız q_{u^1}, q_{u^2}, n kuaterniyonlarının lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. $q_{u^iu^j}$ lerin q_{u^1}, q_{u^2} ve n deki bileşenleri sırasıyla Γ^1_{ij}, Γ^2_{ij}, β_{ij} ile gösterilirse

$$q_{u^iu^j} = \Gamma^1_{ij} q_{u^1} + \Gamma^2_{ij} q_{u^2} + \beta_{ij} n \tag{3.54}$$

yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafı soldan ve sağdan n ile çarpılıp toplanırsa

$$q_{u^iu^j} n + n q_{u^iu^j} = \Gamma^k_{ij}(q_{u^k} n + n q_{u^k}) - 2\beta_{ij}$$

elde edilir. q_{u^k} ve n ortogonal olduklarından $q_{u^k} n + n q_{u^k} = 0$ dır. Dolayısıyla

$$b_{ij} = -\frac{1}{2}(q_{u^iu^j} n + n q_{u^iu^j}) = \beta_{ij}$$

elde edilir. Yani β_{ij} katsayıları, ikinci temel formun katsayıları olan b_{ij} lerden başka birşey değildir. O halde (3.54) denklemi şu formu alır:

$$q_{u^iu^j} = \Gamma^k_{ij} q_{u^k} + b_{ij} n. \tag{3.55}$$

Bu formüllere *Gauss formülleri* denir. (3.55) denkleminin her iki tarafı sağdan $(q_{u^k})^{-1} = \overline{q_{u^k}}/|q_{u^k}|^2 = -q_{u^k}/|q_{u^k}|^2$ ile çarpılırsa, Γ^k_{ij} katsayıları

$$\frac{(b_{ij} n - q_{u^iu^j}) q_{u^k}}{|q_{u^k}|^2} = \Gamma^k_{ij} \tag{3.56}$$

olarak bulunur.

Ayrıca yüzeyin birim normali n nin u^1 ve u^2 ye göre kısmi türevleri de q_{u^1}, q_{u^2} ve n nin lineer kombinasyonu olarak yazılır. $n^2 = -1$ olduğundan $n_{u^i} \perp n$ dir. Dolayısıyla $n_{u^i} \in T_pM$ dir. O zaman

$$n_{u^i} = -b^k_i q_{u^k} = -b^1_i q_{u^1} - b^2_i q^2_u \tag{3.57}$$

yazılabilir. $-b^k_i$ katsayılarının birinci ve ikinci temel formların katsayılarıyla olan ilişkilileri araştırılırsa ve bu amaçla, (3.57) denkleminin her iki tarafını soldan ve sağdan q_{u^j} ile çarpılıp toplanırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(n_{u^i}q_{u^j} + q_{u^j}n_{u^i}) &= -\frac{1}{2}b_i^k(q_{u^k}q_{u^j} + q_{u^j}q_{u^k}) \\ b_{ij} &= b_i^k g_{kj}\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraf g^{jl} ile çarpılırsa

$$b_{ij}g^{jl} = b_i^k g_{kj}g^{jl} = b_i^k \delta_k^l = b_i^l$$

elde edilir. $g^{jl} = g^{lj}$ olduğundan j ve l nin yeri değiştirilirse sonunda

$$b_i^j = b_{il}g^{lj}.$$

elde edilir. (3.57) formüllerine *Weingarten formülleri* denir.

$g_{ij} = g_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$ olduğu bilinmektedir. O halde (3.55) formülünden $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ bulunur. Buradaki amaç Γ_{ij}^k katsayılarının, birinci temel formun katsayıları ve onların kısmi türevleri cinsinden ifade etmektir. (3.55) eşitliğinin her iki tarafı sağdan ve soldan q_{u^l} ile çarpılıp toplanırsa

$$-\frac{1}{2}(q_{u^iu^j}q_{u_l} + q_{u_l}q_{u^iu^j}) = -\frac{1}{2}\Gamma_{ij}^k(q_{u^k}q_{u_l} + q_{u_l}q_{u^k}) = \Gamma_{ij}^k g_{kl}$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafı $-\frac{1}{2}(q_{u^iu^j}q_{u_l} + q_{u_l}q_{u^iu^j})$ ye *birinci tip Chirstoffel sembolü* denir ve Γ_{ijl} ile gösterilir. O halde

$$\Gamma_{ijl} = -\frac{1}{2}(q_{u^iu^j}q_{u_l} + q_{u_l}q_{u^iu^j}) = \Gamma_{ij}^s g_{sl} \tag{3.58}$$

yazılır. Birinci tip Chirstoffel sembolleri de ilk iki indise göre simetriktir, yani

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$$

dir. (3.58) denklemini g^{lk} ile çarpılırsa

$$\Gamma_{ijl}g^{lk} = \Gamma_{ij}^s g_{sl}g^{lk} = \Gamma_{ij}^s \delta_s^k = \Gamma_{ij}^k$$

elde edilir. Γ_{ij}^k lere *ikinci tip Chirstoffel sembolü* denir.

Teorem 3.36 *Birinci ve ikinci tip Christoffel sembolleri için sırasıyla aşağıdaki eşitlikler vardır.*

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right),$$

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{km}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right) \tag{3.59}$$

(Goetz, 1970).

Teorem 3.37 *Verilen bir M yüzeyinin en az $\mathcal{C}^3$ sınıfından olan birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları aşağıdaki denklemleri sağlar*

$$b = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - (\Gamma^s_{11}\Gamma^r_{22} - \Gamma^s_{12}\Gamma^r_{12})g_{sr} \tag{3.60}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + \Gamma^l_{11} b_{l2} &= \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} + \Gamma^l_{11} b_{l1}, \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} + \Gamma^l_{21} b_{l2} &= \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} + \Gamma^l_{22} b_{l1}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Burada $b = det(b_{ij})$ dir. (3.60) formülüne Gauss, (3.61) formüllerine de Codazzi formülleri denir (Goetz, 1970).

Sonuç 3.38 *Yüzeyin Gauss eğriliği tamamiyle birinci temel formun katsayıları ve bunların kısmi türevleri tarafından belirlenebilir.*

Teorem 3.39 *(Yüzeyler Teorisinin Temel Teoremi) u^1, u^2 parametre uzayının bir bölgesinde tanımlı*

$$\mathrm{I} = g_{ij}du^i du^j, \qquad \mathrm{II} = b_{ij}du^i du^j \ , \tag{3.62}$$

kuadratik formları göz önüne alınsın. I pozitif tanımlı olsun ve bu kuadratik formların katsayıları Gauss-Codazzi formüllerini sağlasın. O zaman $\mathbb{E}^3$ de, bu formları sırasıyla birinci ve ikinci temel form kabul eden birtek yüzey vardır (Aminov, 2001).

$\mathbb{E}^3$ de bir yüzey, uzaydaki pozisyonundan bağımsız olarak tamamıyla, I ve II formlarıyla belirlenir. Yani $\mathbb{E}^3$ de aynı I ve II formlarına sahip iki yüzey varsa, bunlar Öklidyen hareketlerle çakıştırılabilir.

4. SONUÇ

Bu çalışma kapsamında karmaşık düzlemde bir eğrinin teğet ve normalinin eğri boyunca hareketlerini ifade eden Serret-Frenet türev formulleri incelendi. $\mathbb{E}^3$ ve $\mathbb{E}^4$ Öklid uzaylarında ise aynı formüller kuaterniyonlar yardımıyla ele alındı. Dört boyutlu Öklid uzayındaki eğriler için Bharathi ve Nakaraj tarafından verilen Serret-Frenet türev formüllerinde kullanılan çatı daha genel bir formda yeniden elde edildi ve bu çatının türev formülleri hesaplandı. Ayrıca $\mathbb{E}^3$ deki yüzeylere ait bazı temel kavramların kuaterniyon çarpımı kullanılarak nasıl elde edilebileceği görüldü. Yüzeyin birinci ve ikinci temel formların katsayılarının, Gauss-Weingarten denklemlerinin ve Christoffel sembollerinin kuaterniyon formunda ifade edilmesiyle geometrik bir nesne olan yüzeye cebirsel bir özellik de yüklenmiş oldu. Christoffel sembollerinin birinci temel formun katsayıları ve onların kısmi türevleriyle hesaplanmasıyla kıyaslansığında bu katsayıların sadece kuaterniyon çarpımı kullanılarak elde ediliyor olmasının hesaplamalar için büyük kolaylık getirebileceği görüldü.

5. KAYNAKLAR

ADLER, Stephen L. 1995. Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields, Oxford University Press, Oxford.

AMINOV, Yu. 2001. The Geometry of Submanifolds, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam.

BHARATHI, K., NAKARAJ M. 1987. Quaternion Valued Function of a Real Serret-Frenet Formula, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 18, No 6, pp. 507-511.

BRENNER, J.L. 1951. Matrices of quaternions, *Pac. J. Math.* 1 , pp. 329-335.

CARMO, Manfredo P. 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

CHO, E. 1998. De Moivres formula for quaternions, *Appl. Math. Lett.* 11 (6) (1998), pp. 33-35.

DUBROVIN, B., NOVIKOV S. P., FOMENKO A. T. 1992. Modern Geometry. Methods and Applications (Second Addition), Springer-Verlag, GTM 93, Part 1.

EBBINGHAUS, H.-D., HERMES, H., HIRZEBRUCH, F., KOECHER, M., MAINZER, K., NEUKIRCH, J., PRESTEL, A., REMMERT, R. 1991. Numbers, Springer.

FRANCISCO, G., CASTILLO, Del T., BARRALES, G. 2004. Spinor Formulation of Differential Geometry of Curves, *Revista Colombiana de Matemáticas*, Volumen 38, páginas 27-34.

HAMILTON, W. R. 1866. Elements of Quaternions. Longmans, Green and Co., London.

GANTMACHER, F. R. 1974. The Theory of Matrices Vol. I, Chelsea, New York.

GOETZ, A. 1970. Introduction to Differential Geometry, Addison Wesley, Reading, Massachusetts.

IMEADA, K. 1983. Quaternionic Formulation of Classical Electrodynamics, Okayama University of Science.

MOSSERI, R. 2000. Two-qubit and Three-qubit Geometry and Hopf Fibrations. In: Monastyrsky, M. I. (ed.) Topology in Condensed Matter. Springer Series in Solid-State Physics 150 187-203.

NIELSON, G.M., HEILAND, R.W. 1992. Animated Rotations Using Quaternions and Splines on a 4D Sphere (Russian), Programmirovanie, no. 4, pp. 17-27, July-Aug.

ONEILL, B. 1997. Elementary Differential Geometry, 2nd edition, Academic Press.

TOPONOGOV, V. A. 2006. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Birkhäuser, Boston, MA.

SABUNCUOĞLU, Arif. 2001. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

WARD, J. P. 1997. Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications, Kluwer Academic Publishers, Vol 403.

WOOD, R.M.W. 1985. Quaternionic eigenvalues, *Bull. London Math. Soc.*, 17, pp. 137-138.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Zonguldak'ta doğdu. İlk-orta ve lise öğrenimimi İzmir'de tamamladı. 2006 yılında Ege Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. Aynı yıl İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı. 2009 Aralık ayında Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.