T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK REEL EKSEN ÜZERİNE

Gültekin SOYLU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2008

BULANIK REEL EKSEN ÜZERİNE

Gültekin SOYLU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2008

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK REEL EKSEN ÜZERİNE

Gültekin SOYLU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../ .../ 2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Prof. Dr. Veli KURT

Doç. Dr. Rıza ERTÜRK

Yard. Doç. Dr. İsmail Uğur TİRYAKİ

ÖZET

BULANIK REEL EKSEN ÜZERİNE

Gültekin SOYLU

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ
Aralık-2008, 70 Sayfa

Bu tezde, reel eksen üzerindeki üst sınır, supremum, pozitif sınıf, mutlak değer, metrik ve limit gibi kavramların çok-değerli denklik bağıntıları aracılığıyla çok-değerli karşılıkları ele alınmıştır. Tanımlanan çok-değerli kavramların sağladıkları özellikler ve aralarındaki ilişkiler incelenmiş, klasik teorideki en önemli sonuç ve ilişkilerin bulanık karşılıkları elde edilmiştir. Bir çok zaman tanım ve özellikler reel eksenle sınırlandırılmayıp daha genel uzaylarda çalışılmış olsa da her bölüm reel eksene ait örneklerle zenginleştirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bulanık Bağıntı, Bulanık Sıralama, Bulanık Benzerlik, Bulanık Üst Sınır, Bulanık Supremum, Bulanık Pozitif Sınıf, Bulanık Mutlak Değer, Bulanık Fonksiyon, Bulanık Üçgen Eşitsizliği, Bulanık Metrik, Bulanık Limit

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ
Prof. Dr. Veli KURT
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Doç. Dr. Rıza ERTÜRK
Yard. Doç. Dr. İsmail Uğur TİRYAKİ

ABSTRACT

ON THE VAGUE REAL LINE

Gültekin SOYLU

Ph. D. in Mathematics
Adviser: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ
December-2008, 70 Pages

This thesis is about the many-valued counterparts based on similarity relations of classical concepts on the real line such as upperbound, supremum, positive class, absolute value, metric and limit. The properties of and the inter-actions among these defined many-valued concepts are studied and the many-valued counterparts of the most important properties and relations in the classical theory are obtained. Although in most cases the definitions and properties are studied in general spaces rather than restricted to the real line, each section is enriched with applications and examples on the real line.

KEY WORDS: Fuzzy Relation, Fuzzy Ordering, Fuzzy Similarity, Fuzzy Upper Bound, Fuzzy Supremum, Fuzzy Positive Class, Fuzzy Absolute Value, Fuzzy Function, Fuzzy Triangle Inequality, Fuzzy Metric, Fuzzy Limit

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ
Prof. Dr. Veli KURT
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Doç. Dr. Rıza ERTÜRK
Yard. Doç. Dr. İsmail Uğur TİRYAKİ

ÖNSÖZ

Teorik Matematikte üzerinde oldukça fazla çalışılmasına rağmen bulanık benzerlik bağıntılarına dayalı kavramlar ve bunlar arasındaki ilişkiler konusunda halen önemli boşluklar bulunmaktadır. Bu çalışmada bu boşlukların küçücük bir kısmını olsun doldurmaya çalışmakla birlikte yeni ilerlemelere de kaynak ve fikir sağlamış olabilmeyi umut ediyorum.

Çalışmama öncülük eden ve sıkıştığım anlardaki yönlendirme ve fikirleriyle bana büyük destek olan danışmanım sayın Prof. Dr. Mustafa Demirci'ye şükranlarımı bu fırsatla sunmaktan da ayrıca mutluluk duyuyorum.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Günlük hayatlarında insanlar olayları veya düşüncelerini çoğu zaman net olmayan kavramlarla açıklarlar. Örneğin haberlerde ekonomi iyiye gidiyor veya para piyasaları durgun gibi kesinlik taşımayan ifadeleri sık sık duyarız. Daha önemlisi ise hayatımızı etkileyen bir karar verirken bir çok zaman kesinlik taşımayan bilgileri değerlendirir, birçok bilgiyi sınırlı kapasitemiz nedeniyle göz ardı eder ve sorunun özüne konsantre oluruz. Trafikte araba kullanmak gibi sıradan bir iş buna örnek gösterilebilir. Bu duruma zıt olarak insanoğlu, uzun yıllar boyunca bilimsel modellemenin kesin verilere dayanması gerektiği inancını taşımış, verinin kalitesini kesinliği ve detaylılığı ile ölçmüştür. Oysa her ne kadar git gide daha hızlı ve daha fazla işlem yapabilen hesaplayıcılara sahip olsak da teknolojik gelişmeler beraberinde daha karmaşık ve daha büyük gerçek hayat sistemleri doğurmuştur. Üst düzey teknolojiye sahip uçaklar yapıyor ama uçurmak için pilotlar kullanıyoruz, bir çok üretim sahasında kontrol devrelerinin başında insanlar duruyor, çünkü belirsiz veya eksik veriyle karşılaştığında bir uzman doğru veya doğruya yakın bir karar verebiliyor iken kapalı döngülü kontrol devresi hiç tepki verememektedir. Günlük hayat problemlerini veya karmaşık sistemleri kesinliklerle yani sadece sıfır ve birlerle modellemenin git gide imkansızlaştığı bir çağda yaşıyoruz.

Bir yandan giderek büyüyen ve karmaşıklaşan sistemleri diğer yandan, insanların bu karmaşık sistemleri anlama ve etkileşime girebilme yeteneklerinin göreceli üstünlüğünü gözleyen bir mühendis olan Lotfi Zadeh bu noktada modelleme ve hesaplama konusunda yeni bir yaklaşım ortaya koydu ve adına bulanık kümeler dedi (Zadeh 1965). Bu yaklaşım kısa sürede önemli ölçüde kabul gördü ve tıptan hukuka, üretim mühendisliğinden bilgisayar programcılığına kadar bir çok alanda kendine başarıyla uygulama sahası buldu. Bilginin daha az yer kaplayacak şekilde daha yumuşak sınırlarla ifade edilmesine olanak veren en iyi araçlardan birisi de bulanık denklik bağıntıları adı altında yine Zadeh tarafından ortaya atıldı (Zadeh 1971). Bulanık denklik bağıntıları matematik dünyasında üzerinde çok çalışılan ve geliştirilen bir konu oldu (Bodenhofer ve Klawonn 2007, Boixader vd 2000a,b, Cerruti ve Höhle 1986, Demirci 2003c,d, Höhle 1988,1998, Klawonn 1994, 2000, Klawonn ve Castro 1995, Trillas ve Valverde 1984, Valverde 1985). Bu kavrama dayalı olarak ortaya çıkan en önemli bulanık araçlar da bulanık sıralama bağıntıları (Höhle ve Blanchard

1985) olmuş ve yine üzerinde bir çok çalışma yapılmıştır (Bodenhofer 2000, Bodenhofer 2003, Demirci 2005, Fodor ve Roubens 1994, Ovchinnikov ve Roubens 1991, Ovchinnikov 1991).

Bu tez çalışmasında reel eksen üzerindeki bazı temel kavramların bulanık denklik bağıntılarına dayalı olarak genelleştirilmesi, aralarındaki ilişkilerin klasik teoriye paralel olarak korunması hedeflenmiştir. Bu amaçla gerekli ön bilgiler verildikten sonra bulanık pozitif sınıftan yola çıkılmış sonra sırasıyla bulanık mutlak değer, bulanık metrik, bulanık limit konuları tanıtılmış, özellikleri incelenmiş, birbirleriyle olan ilişkileri ve klasik teoriyle olan ilişkileri ortaya konmuş, örneklerle konular genişletilmiştir.

2. T-NORMLAR

$[0, 1]$ kapalı birim aralığı üzerindeki üçgensel normlar bu tezde önemli bir rol oynamaktadır. Bu bölümde, üçgensel normlar ile ilgili ayrıntılı bilgiler sunulacaktır:

Tanım 2.1 *(Belohlavek 2002, Hajek 1998, Höhle 1995, Klement vd 2000, Lowen 1996, Novak vd 1999) Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir* $* : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ *ikili işlemine üçgensel norm ya da kısaca t-norm denir.*

(T1) değişme özelliği: $x * y = y * x, \ \forall x, y \in [0, 1]$,

(T2) birleşme özelliği: $x * (y * z) = (x * y) * z, \ \forall x, y, z \in [0, 1]$,

(T3) monotonluk özelliği: $x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z, \ \forall x, y, z \in [0, 1]$,

(T4) birim eleman: $1 * x = x, \ \forall x \in [0, 1]$.

Her $*$ *t-normu,* $\forall x \in [0, 1]$ *için* $x * 0 = 0$ *özelliğini sağlar. En önemli t-normlar, aşağıda tanımları verilen,* $*_M$ *minimum,* $*_P$ *çarpım ve* $*_L$ *Lukasiewicz t-normlarıdır:*

$$x *_M y = \min\{x, y\}, \ x *_P y = x \cdot y, \ x *_L y = maks\{x + y - 1, 0\}, \ \forall x, y \in [0, 1].$$

T-normlar arasında ($*_1 \leq *_2 \Leftrightarrow x *_1 y \leq x *_2 y, \ \forall x, y \in [0, 1]$) şeklinde bir sıralama yaparsak, bu sıralama bir kısmi sıralama bağıntısıdır ve buna göre en büyük t-norm minimum t-normu $*_M$, en küçük t-norm aşağıda tanımı verilen $*_W$ drastik çarpım t-normudur:

$$x *_W y = \left\{ \begin{array}{ll} \min\{x, y\}, & maks\{x, y\} = 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{array} \right\}, \ \forall x, y \in [0, 1].$$

Sonuç olarak, her $*$ t-normu için $*_W \leq * \leq *_M$ geçerlidir. Yukarıda adı geçen çarpım ve Lukasiewicz t-normları da aşağıdaki gibi sıralanırlar:

$$*_W \leq *_L \leq *_P \leq *_M.$$

Bir $*$ t-normunun sürekliliği, iki değişkenli reel değerli bir fonksiyon olarak, $* : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonunun sürekliliği ile aynı anlamdadır. Bir $*$ t-normunun sol-sürekli olması, her $x \in [0, 1]$ için $\cdot * x$ fonksiyonunun soldan sürekli olması demektir.

Önerme 2.2 *(Belohlavek 2002, Klement vd 2000, Novak vd 1999)*

(i) Bir $*$ t-normunun sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, $\cdot * x$ $(x * \cdot)$ fonksiyonunun her $x \in [0,1]$ için sürekli olmasıdır.

(ii) Bir $*$ t-normunun sol-sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, her $x \in [0,1]$ ve her $\{x_i | i \in I\} \subseteq [0,1]$ için

$$x * \sup\{x_i | i \in I\} = \sup\{x * x_i | i \in I\}$$

ya da eşdeğer olarak

$$\sup\{x_i | i \in I\} * x = \sup\{x_i * x | i \in I\}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 2.3 *(Belohlavek 2002, Höhle 1995, Klement vd 2000, Novak vd 1999) Minimum, çarpım ve Lukasiewicz t-normları sürekli, dolayısıyla sol-sürekli t-normlardır. Drastik çarpım t-normu $*_W$ ise sol-sürekli değildir. Bu t-normlara temel t-normlar denir. Bunun sebebi her sürekli t-normun bu üç t-normdan elde edilebilmesidir.*

Tanım 2.4 *(Belohlavek 2002, Hajek 1998, Höhle 1995, Klement vd 2000, Lowen 1996, Novak vd 1999)*

(i) Her $x, y \in (0,1)$ için, $x_*^n = \underbrace{x * x * ... * x}_{n\ tane} < y$ olacak şekilde bir $n \in N$ bulunabiliyorsa, $*$ t-normuna Archimedean denir.

(ii) Her $x, y, z \in (0,1)$ için, $(x < y \Rightarrow x * z < y * z)$ sağlanıyorsa, $*$ t-normuna kesin (strict) monoton denir. $*$ t-normu kesin monoton ve sürekli ise, kesin t-norm olarak adlandırılır

Örnek 2.5 *(Klement vd 2000, Lowen 1996, Novak vd 1999) Çarpım, Lukasiewicz ve drastik çarpım t-normları Archimedeandırlar. Ancak minimum t-normu Archimedean değildir. Çarpım t-normu kesin t-normdur.*

Önerme 2.6 *(De Baets ve Mesiar 2002, Klement vd 2000, Lowen 1996) Bir* $*$ *t-normunun Archimedean olması için gerekli ve yeterli koşul* $\forall x \in (0,1)$ *için* $x * x < x$ *olmasıdır.*

Önerme 2.7 *(Klement vd 2000, Lowen 1996) Bir* $*$ *t-normu kesin ise, Archimedeandır.*

Önerme 2.8 *(Klement vd 2000) Archimedean bir* $*$ *t-normu için aşağıdakiler denktir.*

(i) $*$ *sol-süreklidir,*

(ii) $*$ *süreklidir.*

Tanım 2.9 *(Klement vd 2000, Novak 1989, Novak vd 1999, Valverde 1985)* $f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$*,* $f(1) = 0$ *olacak şekilde sürekli ve kesin azalan bir fonksiyon olsun. Aşağıda tanımlanan* $f^{(-1)} : [0,\infty] \longrightarrow [0,1]$ *fonksiyonuna f'nin tersimsisi (pseudoinverse) denir.*

$$f^{(-1)}(y) = \left\{ \begin{array}{ll} f^{-1}(y), & y \in [0, f(0)] \\ 0, & y \in (f(0), \infty] \end{array} \right\}, \ \forall y \in [0,\infty].$$

Tanım 2.10 *(Klement vd 2000, Novak 1989, Novak vd 1999, Valverde 1985)* $f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ *fonksiyonu,* $f(1) = 0$ *olacak şekilde sürekli ve kesin azalan bir fonksiyon ve* $*$ *bir t-norm olsun. Her* $x, y \in [0,1]$ *için*

$$x * y = f^{(-1)}(f(x) + f(y))$$

sağlanıyorsa, f'ye $*$ *t-normunun bir toplamsal üreteci denir. Toplamsal üreteçler pozitif bir sabitle çarpmaya göre tek türlü olarak belirlidir.*

Örnek 2.11 *(Belohlavek 2002, De Baets ve Mesiar 2002, Klement vd 2000, Lowen 1996, Novak vd 1999) Çarpım t-normunun bir toplamsal üreteci ve tersimsisi,*

$f_P(x) = -\ln(x)$ ve $f_P^{(-1)}(x) = e^{-x}$, Lukasiewicz t-normunun bir toplamsal üreteci ve tersimsisi, $f_L(x) = 1 - x$ ve $f^{(-1)}(x) = maks\{1 - x, 0\}$, drastik çarpım t-normunun bir toplamsal üreteci,

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2 - x, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{array} \right\}, \ \forall x \in [0,1],$$

olarak verilebilir. Minimum t-normunun toplamsal üreteci yoktur.

Önerme 2.12 *(Belohlavek 2002, De Baets ve Mesiar 2002, Klement vd 2000, Lowen 1996, Novak vd 1999) Bir $* : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonunun sürekli Archimedean t-norm olması için gerekli ve yeterli koşul, $*$'ın bir toplamsal üretecinin bulunmasıdır.*

Önerme 2.13 *(Klement vd 2000) Bir $*$ t-normu ve onun bir toplamsal üreteci $f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ için aşağıdakiler denktir.*

(i) $*$ süreklidir,

(ii) $*$ $(1,1)$ noktasında sol-süreklidir,

(iii) f süreklidir,

(iv) f 1'de soldan süreklidir.

Önerme 2.14 *(Klement vd 2000) Bir $*$ t-normunun kesin monoton olması için gerekli ve yeterli koşul $f(0) = \infty$ olmasıdır.*

Önerme 2.15 *(Klement vd 2000) Sürekli, Archimedean bir $*$ t-normunun, sürekli bir toplamsal üreteci $f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ olsun. Bu durumda $*$ t-normunun kesin olması için gerekli ve yeterli koşul $f(0) = \infty$ olmasıdır. $f(0) < \infty$ ise, $*$ t-normuna kesin olmayan (non-strict) veya nilpotent t-norm denir.*

Önerme 2.16 *(Klement vd 2000) (i) Bir $*$ t-normu kesin ise, toplamsal bir üreteci vardır.*

Tanım 2.17 *(Klement vd 2000)* $*_1$ *ve* $*_2$ *iki t-norm olsun.*

$$\Phi(x *_1 y) = \Phi(x) *_2 \Phi(y), \forall x, y \in [0,1],$$

koşulunu sağlayan, birebir, örten bir $\Phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *dönüşümü varsa,* $*_1$*ve* $*_2$ *t-normlarına eşyapılı (izomorfik) t-normlar denir.*

Önerme 2.18 *(Klement vd 2000)* $*$ *bir t-norm,* $\Phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *kesin artan, birebir, örten bir dönüşüm olsun.*

$$x *_\Phi y = \Phi^{-1}(\Phi(x) * \Phi(y)), \ \forall x, y \in [0,1],$$

şeklinde tanımlanan $*_\Phi : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $*$ *t-normuna eşyapılı bir t-normdur.*

Önerme 2.19 *(Klement vd 2000)*

(i) Bir $* : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *t-normunun bir kesin t-norm olması için gerekli ve yeterli koşul* $*$ *t-normunun* $*_P$ *çarpım t-normuna eşyapılı olmasıdır.*

(ii) Bir $* : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *t-normunun bir nilpotent t-norm olması için gerekli ve yeterli koşul* $*$ *t-normunun* $*_L$ *Lukasiewicz t-normuna eşyapılı olmasıdır.*

Tanım 2.20 *(Klement vd 2000, Novak vd 1999) Bir* $*$ *t-normuna göre kalan ve ikili kalan işlemleri* $\rightarrow_*: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $\leftrightarrow_* : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$\begin{aligned} x &\rightarrow {}_* y = \bigvee \{z \in [0,1] | x * z \leq y\}, \\ x &\leftrightarrow {}_* y = (x \rightarrow_* y) \wedge (y \rightarrow_* x), \ \forall x, y \in [0,1]. \end{aligned}$$

Eğer $*$ *t-normunun, sürekli bir* f *toplamsal üreteci varsa, kalan ve ikili kalan işlemleri aşağıdaki gibi verilir:*

$$\begin{aligned} x &\rightarrow {}_* y = f^{(-1)}(maks\{0, f(y) - f(x)\}), \\ x &\leftrightarrow {}_* y = f^{(-1)}(|f(x) - f(y)|), \ \forall x, y \in [0,1]. \end{aligned}$$

Örnek 2.21 *(Klement vd 2000, Novak vd 1999) Minimum, çarpım ve Lukasiewicz t-normlarına karşılık gelen kalan işlemleri aşağıda sırasıyla verilmiştir:*

$$x \rightarrow_M y = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \leq y \\ y, & di\breve{g}er \end{array} \right\}, \quad x \rightarrow_P y = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & di\breve{g}er \end{array} \right\},$$
$$x \rightarrow_L y = \min\{1 - x + y, 1\}, \ \forall x, y \in [0,1].$$

Bu t-normlara göre ikili kalan işlemleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$x \leftrightarrow_M y = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x = y \\ \min\{x, y\}, & di\breve{g}er \end{array} \right\}, \quad x \leftrightarrow_P y = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x = y \\ \frac{\min\{x,y\}}{maks\{x,y\}}, & di\breve{g}er \end{array} \right\},$$
$$x \leftrightarrow_L y = 1 - |x - y|, \ \forall x, y \in [0,1].$$

Tanım 2.22 *(Klement vd 2000, Novak vd 1999)*

(i) $\urcorner(0) = 1$, $\urcorner(1) = 0$ *olacak şekilde artmayan bir* $\urcorner : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *işlemine değilleme (negation) denir.*

(ii) Her $x \in [0,1]$ *için* $\urcorner(\urcorner(x)) = x$ *özelliğini sağlayan değilleme işlemine tersinebilir (involutif) denir.*

(iii) Sürekli ve kesin azalan değilleme işlemi, kesin değilleme olarak adlandırılır.

(iv) Tersinebilir kesin değilleme işlemi, kuvvetli (güçlü) değilleme olarak adlandırılır.

Örnek 2.23 *(Klement vd 2000, Novak vd 1999)* $\rightarrow_*$ *işlemi, bir* $*$ *sürekli t-normuna karşılık gelen kalan işlemi olmak üzere,* $\urcorner(x) = x \rightarrow_* 0$, $\forall x \in [0,1]$, *işlemi bir değilleme işlemidir.*

Buna göre en iyi bilinen güçlü değilleme işlemi, $*_L$ *Lukasiewicz t-normuna karşılık gelen* $\rightarrow_L$ *kalan işlemi kullanılarak,* $\urcorner_L(x) = x \rightarrow_L 0 = 1 - x$, $\forall x \in [0,1]$, *şeklinde elde edilir.* $\urcorner_L$ *değilleme işleminin kesin olduğu açıktır.*

$*_M$ *minimum t-normuna karşılık gelen* $\rightarrow_M$ *kalan işlemi kullanılarak,* $\urcorner_M(x) = x \rightarrow_M 0$, $\forall x \in [0,1]$, *şeklinde elde edilen değilleme tersinebilir değildir, çünkü* $\urcorner_M(0) = 1$, $\urcorner_M(x) = 0$, $\forall x \in (0,1]$, *geçerlidir, dolayısıyla* $\urcorner_M$ *işlemi, güçlü olmayan bir değilleme işlemidir.*

3. BULANIK BAĞINTILAR ve FONKSİYONLAR

$I = [0,1]$ birim aralığını göstermek üzere, boş kümeden farklı bir X kümesi için, bir $\mu : X \longrightarrow I$ fonksiyonuna X'in bir bulanık alt kümesi denir. X'in bütün bulanık alt kümelerinin ailesi I^X ile gösterilir. X'in klasik bir A altkümesinin karakteristik fonksiyonu $\mathbf{1}_A$, aşağıdaki şekilde verilir ve X'in özel bir bulanık alt kümesidir:

$$\mathbf{1}_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{array} \right\}, \ \forall x \in A.$$

Boş olmayan X ve Y kümeleri için, $X \times Y$'nin bir bulanık alt kümesine, yani bir $\rho \in I^{X \times Y}$ elemanına, X'ten Y'ye bir bulanık bağıntı denir. $X = Y$ ise bu bulanık bağıntı, X üzerinde bulanık bağıntı adını alır.

Bir $\mu \in I^X$ bulanık kümesi ve bir $\rho \in I^{X \times Y}$ bulanık bağıntısı için,
$supp(\mu) = \{x \in X : \mu(x) > 0\}$,
$ker(\mu) = \{x \in X : \mu(x) = 1\}$,
$supp(\rho) = \{(x,y) \in X \times Y : \rho(x,y) > 0\}$ ve
$ker(\rho) = \{(x,y) \in X \times Y : \rho(x,y) = 1\}$,
şeklinde tanımlı kümelere sırasıyla μ'nün desteği, μ'nün çekirdeği ρ'nun desteği ve ρ'nun çekirdeği denilir.
$\mu_1, \mu_2 \in I^X$ için $(\mu_1 \wedge \mu_2)(x) = \min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}, \forall x \in X$ olarak,
$\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1(x) \leq \mu_2(x), \forall x \in X$ olarak ve herhangi bir K damga kümesi için,
$\forall i \in K$ için $\mu_i \in I^X$ olmak üzere, $\left(\bigvee\limits_{i \in K} \mu_i \right)(x) = \sup\limits_{i \in K} \mu_i(x), \forall x \in X$ olarak tanımlanır.

Tanım 3.1 *X üzerinde bir ρ bulanık bağıntısı, $X \times X$ üzerindeki bir $\circ$ ikili işlemi ile birlikte aşağıdaki özelliği sağlıyorsa, $\circ$'a göre değişmezdir (invariant) denir:*

(INV) $\rho(x,y) = \rho(x \circ z, y \circ z), \ \forall x,y,z \in X.$

3.1. Bulanık Denklik (Benzerlik) Bağıntıları

Tanım 3.2 *Aşağıdaki özellikleri sağlayan, bir X kümesi üzerindeki bir, $E : X \times X \longrightarrow I$ bulanık bağıntısına bir $*$-bulanık denklik (benzerlik) bağıntısı denir (De Baets ve Mesiar 1997, De Baets ve Mesiar 2002):*

(E.1) $E(x,x) = 1, \forall x \in X,$ *(Yansıma)*

(E.2) $E(x,y) = E(y,x), \ \forall x, y \in X,$ *(Simetri)*

(E.3) $E(x,y) * E(y,z) \leq E(x,z), \ \forall x, y, z \in X.$ *(Geçişlilik)*

Bir E $*$-bulanık denklik bağıntısı, aşağıdaki ayırma koşulunu sağlıyorsa, $*$-bulanık eşitlik bağıntısı veya ayrık $*$-bulanık denklik (benzerlik) bağıntısı adını alır :

(E.1′) $E(x,y) = 1 \Rightarrow x = y, \ \forall x, y \in X.$

Bir X kümesi üzerindeki klasik $\approx$ denklik ve $=$ eşitlik bağıntıları sırasıyla,

$$E_X^{\approx}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \approx y \\ 0, & x \not\approx y \end{array} \right\}, \ E_X^{=}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{array} \right\}, \ \forall x, y \in X,$$

şeklinde tanımlı $E_X^{\approx}, E_X^{=} : X \times X \rightarrow \{0,1\}$ $*$-bulanık denklik bağıntıları ile karakterize edilirler.

Örnek 3.3 *(Belohlavek 2002, Valverde 1985) $S \subseteq I^X$ bir X kümesinin bulanık kümelerinin bir ailesi ve $*$ bir sol sürekli t-norm olsun. X üzerinde,*

$$E(x,y) = \bigwedge_{A \in S} (A(x) \leftrightarrow A(y)), \ \forall x, y \in X,$$

şeklinde tanımlanan bulanık bağıntı, bir $*$-bulanık bulanık denklik bağıntısıdır. E'nin bir $*$-bulanık eşitlik bağıntısı olması için gerekli ve yeterli koşul, $x \neq y$ olmak üzere, her $x, y \in X$ için $A(x) \neq A(y)$ olacak şekilde en az bir tane $A \in S$ bulunabilmesidir.

Örnek 3.4 *(Belohlavek 2002) Bir X kümesi ve bir $*$ sol sürekli t-normu için, I^X üzerinde,*

$$EQ(A,B) = \bigwedge_{x \in X} (A(x) \leftrightarrow B(x)), \ \forall A, B \in I^X,$$

şeklinde tanımlanan bulanık bağıntı, bir $*$-bulanık eşitlik bağıntısıdır.

Önerme 3.5 *(Valverde 1985) Bir X kümesi üzerindeki bir $*$ t-normu için, $*$-bulanık denklik bağıntılarının bir ailesi $\{E_i | i \in J\}$ ise,*

$$(\bigwedge_{i\in I} E_i)(x,y) = \bigwedge_{i\in I}(E_i(x,y)),\ \forall x,y \in X,$$

şeklinde tanımlanan $\bigwedge_{i\in I} E_i : X \times X \longrightarrow I$ dönüşümü de bir $*$-bulanık denklik bağıntısıdır.

Örnek 3.6 *(Demirci 2000, Demirci 2002) $*$ bir t-norm, E ve F sırasıyla X ve Y üzerinde iki $*$-bulanık denklik ($*$-bulanık eşitlik) bağıntısı olsun.*

$$\begin{aligned} G(E,F)((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= E(x_1,x_2) * F(y_1,y_2), \\ E \times F((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= E(x_1,x_2) \wedge F(y_1,y_2),\ \forall x_1,x_2 \in X, \forall y_1,y_2 \in Y, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $G(E,F), E \times F : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow I$ dönüşümleri $X \times Y$ üzerinde birer $*$-bulanık denklik ($*$-bulanık eşitlik) bağıntısıdırlar.

$*$ sürekli, Archimedean bir t-norm olmak üzere, $*$-bulanık denklik ($*$-bulanık eşitlik) bağıntıları, metrikimsiler (metrikler) tarafından birebir olarak temsil edilebilir:

Önerme 3.7 *(De Baets ve Mesiar 1997, De Baets ve Mesiar 2002) f toplamsal üretecine sahip, sürekli, Archimedean bir t-norm $*$ olsun. E, X üzerinde bir $*$-bulanık denklik ($*$-bulanık eşitlik) bağıntısı ise,*

$$d_E(x,y) = (f \circ E)(x,y) = f(E(x,y)),\ \forall x,y \in X, \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan $d_E : X \times X \longrightarrow [0,\infty]$ dönüşümü, X üzerinde bir metrikimsi (metrik) verir. Tersine, $d : X \times X \longrightarrow [0,\infty]$ dönüşümü, X üzerinde bir metrikimsi (metrik) ise,

$$E_d(x,y) = (f^{(-1)} \circ d)(x,y) = f^{(-1)}(d(x,y)),\ \forall x,y \in X, \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan $E_d : X \times X \longrightarrow [0,1]$ dönüşümü bir $*$-bulanık denklik ($*$-bulanık eşitlik) bağıntısı verir.

Tanım 3.8 *$\mu \in I^X$ ve $\rho \in I^{X\times X}$ sırasıyla birer bulanık küme ve bulanık bağıntı ve E, X üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun.*

(i) $\mu(x) * E(x,y) \leq \mu(y), \forall x,y \in X$, koşulu sağlanıyorsa μ'ye E-genişletilebilir,

(ii) $\rho(x,y)*E(x,x') \leq \rho(x',y), \forall x,y,x' \in X$, koşulu sağlanıyorsa ρ'ya ilk argümanına göre E-genişletilebilir,

(iii) $\rho(x,y) * E(y,y') \leq \rho(x,y'), \forall x,y,y' \in X$, koşulu sağlanıyorsa ρ'ya ikinci argümanına göre E-genişletilebilir,

(iv) $\rho(x,y) * E(y,y') * E(x,x') \leq \rho(x',y'), \forall x,x',y,y' \in X$, koşulu sağlanıyorsa ρ'ya her iki argümanına göre E-genişletilebilir denir.

Not 3.9 *Yukarıdaki tanımda [(ii) ve (iii) $\Leftrightarrow$ (iv)] denkliği vardır.*

Tanım 3.10 *(Demirci 2000, Demirci 2002, Demirci 2003a, Demirci 2003b) E ve F sırasıyla X ve Y üzerinde iki $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun. Aşağıdaki iki koşulu sağlayan bir $\rho \in I^{X\times Y}$ $*$-bulanık bağıntısına, X'ten Y'ye E ve F'ye göre bir kuvvetli bulanık fonksiyon denir.*

(F.1) Her $x \in X$ için $\rho(x,y) = 1$ olacak şekilde en az bir tane $y \in Y$ vardır,

(F.2) $\rho(x,y) * \rho(x',y') * E(x,x') \leq F(y,y'),\ \forall x,x' \in X, \forall y,y' \in Y$,

$X = Y$, $E = F$ durumunda, ρ'ya X üzerinde E'ye göre bir kuvvetli bulanık fonksiyon denir.

Önerme 3.11 *(Demirci 2003a) E ve F sırasıyla X ve Y üzerinde iki $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun. E ve F'ye göre genişletilebilir bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunu (yani her $x,y \in X$ için, $E(x,y) \leq F(f(x),f(y))$ eşitsizliğini sağlayan $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunu) göz önüne alalım,*

$$\rho(x,f(x)) = 1 \quad ve \quad \rho(x,y) \leq F(f(x),y),\ \forall x \in X, \forall y \in Y, \tag{3.3}$$

koşulunu sağlayan bir $\rho \in L^{X\times Y}$ $*$-bulanık bağıntısı, E ve F'ye göre bir kuvvetli bulanık fonksiyondur. Tersine, verilen bir $\rho \in L^{X\times Y}$ E ve F'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyonu için, (3.3) koşulunu sağlayan, en az bir E ve F'ye göre genişletilebilir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu vardır.

Tanım 3.12 *(Demirci 2003a) E ve F sırasıyla X ve Y üzerinde iki $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun.*
Bir $\rho \in I^{X\times Y}$ E ve F'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyonu için, (3.3) koşulunu sağlayan, E ve F'ye göre genişletilebilir bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu ρ'nun bir klasik tanımlaması olarak adlandırılır. ρ'nun bütün klasik tanımlamalarının kümesi, $ORD(\rho)$ ile gösterilir. Bir $\rho \in I^{X\times Y}$ E ve F'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyonunun, bir tek klasik tanımlaması varsa, $ord(\rho)$ ile gösterilir. Yani, bu durumda $ORD(\rho) = \{ord(\rho)\}$ olur.

Not 3.13 *(Demirci 2003a) Bir $\rho \in L^{X\times Y}$ E ve F'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyonu için, F bir $*$-bulanık eşitlik bağıntısı ise, ρ'nun bir tek klasik tanımlaması vardır.*

3.2. Bulanık Sıralama Bağıntıları

Tanım 3.14 *(Bodenhofer 2003, Demirci 2005, Höhle ve Blanchard 1985)E, X üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun.*

(i) Aşağıdaki üç koşulu sağlayan $R \in I^{X\times X}$ $*$-bulanık bağıntısına, X üzerinde E'ye göre bir bulanık kısmi sıralama bağıntısı, ya da kısaca, X üzerinde bir E-kısmi sıralama bağıntısı denir:

(VP.1) $E(x,y) \leq R\ (x,y), \forall x,y \in X,$ *(E-yansıma)*

(VP.2) $R\ (x,y) * R\ (y,x) \leq E(x,y), \forall x,y \in X,$ *(E-antisimetri)*

(VP.3) $R\ (x,y) * R\ (y,z) \leq R\ (x,z), \forall x,y,z \in X.$ *(Geçişlilik)*

(ii) X üzerindeki bir $R \in I^{X \times X}$ $*$-bulanık bağıntısı, sadece (VP.1) ve (VP.3) koşullarını sağlıyorsa, X üzerinde bir E-önsıralama bağıntısı olarak adlandırılır.

(iii) X üzerindeki bir $R \in I^{X \times X}$ E-kısmi sıralama bağıntısına, aşağıdaki koşulu sağlıyorsa, X üzerinde E'ye göre bir bulanık tam sıralama bağıntısı, ya da kısaca X üzerinde bir E-tam sıralama bağıntısı olarak adlandırılır:

(VP.4) $R\,(x, y) = 1$ veya $R\,(y, x) = 1$, $\forall x, y \in X$. (Tamlık)

(iv) X üzerinde bir R E-kısmi (tam) sıralaması varsa, (X, R) ikilisine bir E-kısmi (tam) sıralı küme denir.

$I = \{0, 1\}$ durumunda (VP.1-VP.4) aksiyomları sırasıyla, aşağıdaki şartlara dönüşür:
(P.1) $x \approx y \Rightarrow x \preccurlyeq y,\ \forall x, y \in X,$
(P.2) $(x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq x) \Rightarrow x \approx y,\ \forall x, y \in X,$
(P.3) $(x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq z) \Rightarrow x \preccurlyeq z,\ \forall x, y, z \in X,$
(P.4) $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x,\ \forall x, y \in X.$

(P.3-P.4) koşulları sırasıyla, bir bağıntının geçişlilik ve tamlık özellikleridir. (P.1-P.2) ise, yansıma ve antisimetri özelliklerinin, X üzerindeki $=$ klasik eşitlik bağıntısının, $\approx$ denklik bağıntısı ile değiştirilmesi ile elde edilen genelleştirilmiş versiyonlarıdır. (P.1) ve (P.3) ((P.1-P.3) ve (P.1-P.4)) koşullarını sağlayan X üzerindeki bir $\preccurlyeq$ ikili bağıntısı, X üzerinde bir $\approx$-önsıralama bağıntısı ($\approx$-kısmi sıralama bağıntısı ve $\approx$-tam sıralama bağıntısı) olarak adlandırılır.

X üzerindeki bir $\approx$ denklik bağıntısı ve bir $\preccurlyeq$ ikili bağıntısı için, (P.1) koşulu ve $\preccurlyeq$'nin antisimetri özelliği sırasıyla, $\preccurlyeq$'nin yansıma özelliğini ve (P.2) koşulunu gerektirir. Ama ters gerektirme ancak ve ancak $\approx$'nin $=$ olması durumunda geçerlidir. Bundan dolayı, $\approx$'nın $=$ olduğu durumda, bir $\approx$-önsıralama bağıntısı ($\approx$-kısmi sıralama bağıntısı ve $\approx$-tam sıralama bağıntısı), klasik bir önsıralama bağıntısı (kısmi sıralama bağıntısı ve tam sıralama bağıntısı) olur.

Örnek 3.15 *$*$ bir sol sürekli t-norm olmak üzere, I^X üzerinde, $EQ(A, B) = \bigwedge_{x \in X} (A(x) \leftrightarrow B(x)),\ \forall A, B \in I^X$ şeklinde tanımlanan $EQ \in I^{I^X \times I^X}$*

$*$-bulanık bağıntısı bir $*$-bulanık eşitlik bağıntısıdır (Höhle ve Sostak 1999). I^X üzerinde, $INC(A,B) = \bigwedge_{x\in X}(A(x) \rightarrow B(x))$, $\forall A,B \in I^X$ şeklinde tanımlanan $INC \in I^{I^X\times I^X}$ $*$-bulanık bağıntısı bir EQ- kısmi sıralama bağıntısıdır (Bodenhofer 2003). INC ve EQ, sırasıyla, I^X üzerindeki,

$$A \leq B \Leftrightarrow (A(x) \leq B(x),\ \forall x \in X),\ \forall A,B \in I^X, \tag{3.4}$$

$$A = B \Leftrightarrow A \leq B \text{ ve } B \leq A,\ \forall A,B \in I^X,$$

şeklinde tanımlı olan, $\leq$ kısmi sıralama bağıntısının ve $=$ eşitlik bağıntısının, bulanık birer versiyonu olarak düşünülebilir. $A,B \in I^X$ olmak üzere, $INC(A,B) \in I$ ve $EQ(A,B) \in I$ sırasıyla, A bulanık kümesinin, B bulanık kümesinin altkümesi olma derecesini ve bu iki bulanık kümenin eşit olma derecesini vermektedir.

Tanım 3.16 *(Bodenhofer 2000, Bodenhofer 2003, Demirci 2005) (i) X üzerinde bir E $*$-bulanık denklik bağıntısı ve bir $\precsim$ kısmi sıralama bağıntısı verildiğinde, aşağıdaki gerektirme sağlanıyorsa, E, $\precsim$ ile uyumludur:*

(CP) $x \precsim y \precsim z \Rightarrow E(x,z) \leq E(x,y) \wedge E(y,z),\ \forall x,y,z \in X.$

(ii) X üzerindeki bir $\precsim$ kısmi sıralama bağıntısına göre $\bowtie$ karşılaştırılamazlık bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

(IC) $x \bowtie y \Leftrightarrow x \not\precsim y$ ve $y \not\precsim x,\ \forall x,y \in X.$

Teorem 3.17 *(Bodenhofer 2000) X kümesi üzerindeki bir R E-kısmi sıralama bağıntısı için,*

$$x \trianglelefteq_R y \Leftrightarrow R(x,y) = 1,\ \forall x,y \in X,$$

şeklinde tanımlanan R'nin çekirdek bağıntısı $\trianglelefteq_R$, X üzerinde bir önsıralama bağıntısı (yansımalı, geçişli bir ikili bağıntı) verir. $\trianglelefteq_R$'nin X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olması için gerekli ve yeterli koşul E'nin bir $*$-bulanık eşitlik bağıntısı olmasıdır. E bir $*$-bulanık eşitlik bağıntısı ise, $\trianglelefteq_R$'nin X üzerinde bir tam sıralama bağıntısı olması için gerekli ve yeterli koşul R'nin X üzerinde bir E-tam sıralama bağıntısı olmasıdır.

Teorem 3.17'de, R, bir E-önsıralama bağıntısı olarak alınırsa, çekirdek bağıntısı $\trianglelefteq_R$, yine bir önsıralama bağıntısıdır. Ancak bu durumda teoremin kalan kısmındakiler geçerli değildir. Yine Teorem 3.17'de, R, bir $\approx$-kısmi sıralama bağıntısı olarak alınırsa, çekirdek bağıntısı kendisi ile çakışır ve onun bir kısmi sıralama bağıntısı olması için gerekli ve yeterli koşul $\approx$'nin $=$ klasik eşitlik bağıntısı olmasıdır.

Teorem 3.18 *(Bodenhofer 2000) X üzerindeki bir R E-kısmi sıralama bağıntısı için, E ile uyumlu ve $\precsim \subseteq \trianglelefteq_R$ olacak şekilde, X üzerinde bir $\precsim$ kısmi sıralama bağıntısı vardır. R, X üzerinde bir E-tam sıralama bağıntısı ise, $\precsim$, X üzerinde bir tam sıralama bağıntısı olarak seçilebilir. Ayrıca, $\precsim$ maksimaldir, yani $\precsim' \subseteq \trianglelefteq_R$ ve $\precsim \subseteq \precsim'$ olacak şekilde X üzerinde başka bir $\precsim'$ kısmi sıralama bağıntısı yoktur.*

Teorem 3.18'de, R bir E-önsıralama olarak alınırsa, yine $\precsim \subseteq \trianglelefteq_R$olacak şekilde bir kısmi sıralama bağıntısı elde edilebilir. Ancak bu durumda, E'nin $\precsim$ ile uyumlu olması genelde sağlanmaz. Teorem 3.18 ile, X üzerindeki bir R E-kısmi sıralama bağıntısı için, $\precsim \subseteq \trianglelefteq_R$ olacak şekilde, E ile uyumlu olan, X üzerinde bir $\precsim$ kısmi sıralama bağıntısının varlığı garanti edildi. Elde edilen bu klasik anlamdaki $\precsim$ kısmi sıralama bağıntısı, R'nin bir klasik kısmı olarak adlandırılır. R'nin tüm klasik kısımlarının oluşturduğu küme daha önce de tanımlandığı üzere, $ker(R)$ ile gösterilir.

Not 3.19 *(Demirci 2005) Teorem 3.18'den, $\preccurlyeq$ bir $\approx$-kısmi sıralama bağıntısı ise, $\precsim \subseteq \preccurlyeq$ ve $\approx$ $\precsim$ ile uyumlu olacak şekilde, bir $\precsim$ kısmi sıralama bağıntısı bulunabildiği çıkar. Ayrıca, $\preccurlyeq$ bir $\approx$-tam sıralama bağıntısı ise, $\precsim$ bir tam sıralama bağıntısı olarak seçilebilir.*

Teorem 3.20 *(Bodenhofer 2003) $\precsim$ X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı ve E X üzerinde $\precsim$ ile uyumlu bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun. E,*

$$[(x \bowtie z) \Rightarrow (E(x,y) \vee E(y,z) \leq E(x,z))],\ \forall x,y,z \in X, \tag{3.5}$$

gerektirmesini sağlıyorsa,

$$R(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \precsim y \\ E(x,y), & diğer \end{array} \right\},\ \forall x,y \in X, \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanan $R \in I^{X \times X}$ E-bağıntısı, X üzerinde bir E-kısmi sıralama bağıntısıdır.

Not 3.21 *(Demirci 2005) (i) E, X üzerinde bir $*$-bulanık eşitlik ve R, X üzerinde bir E-kısmi sıralama bağıntısı olsun. Teorem 3.18'deki $\precsim$ kısmi sıralama bağıntısı, R'nin $\trianglelefteq_R$ çekirdek bağıntısı ile çakışır.*

(ii) (3.5) gerektirmesinde, $y = x$ veya $y = z$ seçilirse,

$$[x \bowtie z \Rightarrow E(x,z) = 1],\ \forall x, z \in X, \tag{3.7}$$

gerektirmesi çıkar. (3.7)'nin (3.5)'i gerektirdiği açıktır. Buradan (3.5) ve (3.7)'nin denk olduğu sonucu elde edilir.

Not 3.21 (ii)'den hareketle, Teorem 3.20'nin daha güçlü bir versiyonu aşağıdaki teoremle verilebilir:

Teorem 3.22 *(Demirci 2005) $\precsim$, X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı ve E, X üzerinde $\precsim$ ile uyumlu bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun. E'nin,*

$$[((x \bowtie z)\ ve\ (x \precsim y\ veya\ y \precsim x)) \Rightarrow (E(y,z) \leq E(x,z))],\ \forall x, y, z \in X, \tag{3.8}$$

koşulunu sağlaması için gerekli ve yeterli koşul, Teorem 3.20'de, (3.6) ile tanımlanan $R \in I^{X \times X}$ bulanık bağıntısının, X üzerinde bir E-kısmi sıralama bağıntısı olmasıdır.

(3.6) ile tanımlanan $R \in L^{X \times X}$ bulanık bağıntısı, X üzerinde verilen bir $\precsim$ kısmi sıralama bağıntısının X üzerindeki E $*$-bulanık denklik bağıntısı vasıtasıyla bulanıklaştırılması olarak görülebilir. Teorem 3.22, X üzerinde verilen bir $\precsim$ kısmi sıralama bağıntısı ve E $*$-bulanık denklik bağıntısından hangi gerekli ve yeterli koşullar altında X üzerinde bir R E-kısmi sıralama bağıntısı elde edilebileceğini verir. Ancak, X üzerindeki bir R E- kısmi sıralama bağıntısının, hangi gerekli ve yeterli koşullar altında (3.6) formülüyle ifade edilebileceğini vermez. Aşağıdaki teorem buna çözüm getirir:

Teorem 3.23 *(Demirci 2005) R, X üzerinde bir E-kısmi sıralama bağıntısı ve $\precsim \in ker(R)$ olsun. R'nin (3.6) formunda yazılabilmesi için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki iki özelliğin sağlanmasıdır:*

$$[\max\{R(x,y), R(y,x)\} < 1] \Rightarrow [(R(x,y) \vee R(y,x) \leq E(x,y))],\ \forall x, y \in X, \tag{3.9}$$

$$(x \bowtie y) \Rightarrow [(R(x,y) = R(y,x))],\ \forall x, y \in X. \tag{3.10}$$

R'nin (3.6) formunda yazılabilmesi durumuyla ilgili diğer bazı teorem ve örnekler aşağıda verilmiştir:

Teorem 3.24 *(Bodenhofer 2000, Bodenhofer 2003) E, X üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısı ve $R \in I^{X \times X}$ X üzerinde bir bulanık bağıntı olsun. Aşağıdaki iki ifade denktir:*

(i) R, X üzerinde bir E-tam sıralama bağıntısıdır.

(ii) E'nin uyumlu olduğu bir $\precsim$ tam sıralama bağıntısı vardır ve R (3.6) formundadır.

Tanım 3.25 *(Jacas ve Recasens 1993)*

(i) $\mathbb{R}$'nin bir μ bulanık altkümesi için, $\mu(a) = 1$, ve μ, $(-\infty, a]$ aralığında azalmayan, $[a, \infty)$ aralığında artmayan fonksiyon olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ varsa, μ'ye bir bulanık sayı denir.

(ii) $\mathbb{R}$ üzerinde bir E $*$-bulanık denklik bağıntısı verilsin. Her $x \in \mathbb{R}$ için $[x]_E(y) = E(x, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, şeklinde tanımlanan x'in E'ye göre denklik sınıfı $[x]_E$ bir bulanık sayı ise, E'ye kabul edilebilir denir.

Not 3.26 *(Demirci 2005) Tanım 3.16 (i) ve Tanım 3.25 göz önüne alınırsa, kolayca görülebilir ki, $\mathbb{R}$ üzerindeki bir E $*$-bulanık denklik bağıntısının $\leq$ ile uyumlu olması için gerekli ve yeterli koşul, E'nin kabul edilebilir olmasıdır.*

Örnek 3.27 *(Demirci 2005) T-norm olarak, aşağıdaki gibi tanımlı $*_L$ Lukasiewicz t-normu olarak seçilsin:*

$$x *_L y = maks\left\{x + y - 1, 0\right\}, \ \forall x, y \in [0, 1].$$

$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton bir dönüşüm olsun.

$$E_\Phi(x, y) = 1 - \min\left\{|\Phi(x) - \Phi(y)|, 1\right\}, \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

şeklinde tanımlanan $E_\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ *bulanık bağıntı,* $\mathbb{R}$ *üzerinde kabul edilebilir bir* $*_L$*-denklik bağıntısıdır (Jacas ve Recasens 1993). Not 3.26'ya göre,* E_Φ*,* $\mathbb{R}$ *üzerindeki bilinen* $\leq$ *sıralaması ile uyumludur. Teorem 3.24'e göre,*

$$R_\Phi(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \leq y \\ E_\Phi(x,y), & \textit{diğer} \end{array} \right\}, \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$\mathbb{R}$ *üzerinde bir* E_Φ*-tam sıralama bağıntısıdır.*

Örnek 3.28 *(Demirci ve Eken 2007)*

$$x *_P y = x \cdot y, \ \forall x, y \in [0,1],$$

şeklinde tanımlanan çarpım t-normu göz önüne alınsın. Bir $\Phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *monoton dönüşümüyle,*

$$E_\Phi(x,y) = \min\left\{ \frac{\Phi(x)}{\Phi(y)}, \frac{\Phi(y)}{\Phi(x)} \right\}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+,$$

şeklinde tanımlanan E_Φ *bulanık bağıntısı,* $\mathbb{R}^+$ *üzerinde kabul edilebilir bir* $*_P$*-denklik bağıntısıdır (Jacas ve Recasens 1993). Not 3.26'ya göre,* E_Φ*,* $\mathbb{R}^+$ *üzerindeki bilinen* $\leq$ *sıralaması ile uyumludur. Teorem 3.24'e göre,*

$$R_\Phi(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \leq y \\ E_\Phi(x,y), & \textit{diğer} \end{array} \right\}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+,$$

$\mathbb{R}^+$ *üzerinde bir* E_Φ*-tam sıralama bağıntısıdır.*

Önerme 3.29 *(Bodenhofer 2003)* f*, sürekli, Archimedean bir* $*$ *t-normunun bir toplamsal üreteci ve* $\precsim$*,* X *üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun.*

(i) X *üzerindeki bir* d *metrikimsisi,* $\precsim$ *ile uyumlu ise, yani,*

$$x \precsim y \precsim z \Rightarrow d(x,z) \geq maks\left\{d(x,y), d(y,z)\right\}, \ \forall x, y, z \in X,$$

gerektirmesini sağlıyorsa, (3.2) şeklinde tanımlanan E_d $*$*-bulanık denklik bağıntısı* $\precsim$ *ile uyumludur.*

(ii) X *üzerindeki bir* E $*$*-bulanık denklik bağıntısı,* $\precsim$ *ile uyumlu ise, (3.1) şeklinde tanımlanan* d_E *metrikimsisi,* $\precsim$ *ile uyumludur.*

Önerme 3.30 *(Bodenhofer 2003) X üzerindeki bir $\precsim$ tam sıralama bağıntısı ile uyumlu olan bir $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ metrikimsisi ve $\Phi : X \longrightarrow X$ azalmayan fonksiyonu göz önüne alınsın.*

$$d'(x, y) = d(\Phi(x), \Phi(y)),\ \forall x, y \in X,$$

şeklinde tanımlanan d', X üzerinde $\precsim$ ile uyumlu başka bir metrikimsidir.

Teorem 3.31 *(Bodenhofer 2003) X üzerinde bir $\precsim$ tam sıralama bağıntısı, $\precsim$ ile uyumlu bir d metrikimsisi, bir f toplamsal üretecine sahip, sürekli, Archimedean bir $*$ t-normu ve azalmayan bir $\Phi : X \longrightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda,*

$$E_{\Phi,d}(x, y) = f^{(-1)}(d(\Phi(x), \Phi(y))),\ \forall x, y \in X,$$

X üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısıdır ve

$$R_{\Phi,d}(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \precsim y \\ E_{\Phi,d}(x, y), & diğer \end{array} \right\},\ \forall x, y \in X,$$

X üzerinde bir $E_{\Phi,d}$-tam sıralama bağıntısıdır.

Örnek 3.32 *(Bodenhofer 2003) $\mathbb{R}$'deki bilinen $\leq$ tam sıralama bağıntısı ile uyumlu olan $d(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, metriği göz önüne alınsın (Bodenhofer 2000). $*_L$ Lukasiewicz t-normunun bir toplamsal üretecinin ve onun tersimsisinin $f(x) = 1 - x$ ve $f^{(-1)}(x) = maks\,\{1 - x, 0\}$, $*_P$ çarpım t-normunun bir toplamsal üretecinin ve onun tersimsisinin $f(x) = -\ln(x)$ ve $f^{(-1)}(x) = e^{-x}$ olduğu bilinmektedir (Klement vd 2000). Önerme 3.29 ve Önerme 3.30'a göre herhangi bir $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ azalmayan fonksiyonu için,*

$$\begin{aligned} E_\Phi^L(x, y) &= f^{(-1)}(d(\Phi(x), \Phi(y))) = f^{(-1)}(|\Phi(x) - \Phi(y)|) \\ &= maks\,\{1 - |\Phi(x) - \Phi(y)|, 0\}\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\Phi^P(x, y) &= f^{(-1)}(d(\Phi(x), \Phi(y))) = f^{(-1)}(|\Phi(x) - \Phi(y)|) \\ &= e^{-|\Phi(x) - \Phi(y)|},\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan E_Φ^L $*_L$-denklik bağıntısı ve E_Φ^P $*_P$-denklik bağıntısı $\leq$ ile uyumludur. Bu durumda, Teorem 3.31'e göre

$$R_\Phi^L(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \leq y \\ E_\Phi^L(x, y), & diğer \end{array} \right\},\ R_\Phi^P(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \leq y \\ E_\Phi^P(x, y), & diğer \end{array} \right\},\ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

sırasıyla birer E_Φ^L-tam sıralama bağıntısı ve E_Φ^P-tam sıralama bağıntısıdır.

Diğer taraftan kesin sıralama bağıntılarının bulanık versiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir:

Tanım 3.33 *(Bodenhofer ve Demirci 2005) E bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olmak üzere $\widetilde{\prec} \in I^{XxX}$, bulanık bağıntısı aşağıdaki koşulları sağlıyorsa E-kesin sıralama bağıntısı adını alır:*

(FSO.1) $\widetilde{\prec}(x,x) = 0,\ \forall x \in X,$

(FSO.2) $\widetilde{\prec}(x,y) * \widetilde{\prec}(y,z) \leq \widetilde{\prec}(x,z),\ \forall x,y,z \in X,$

(FSO.3) $\widetilde{\prec}$ birinci ve ikinci argümanıyla E-genişletilebilirdir.

İlave olarak $\widetilde{\prec}$,

(FSO.4)$E(x,y) \rightarrow 0 \leq \widetilde{\prec}(x,y) \vee \widetilde{\prec}(y,x),\ \forall x,y \in X,$

koşulunu sağlıyorsa tam (lineer) E-kesin sıralama bağıntısı adını alır.

Klasik teoride kesin sıralama bağıntısıyla kısmi sıralama bağıntısı arasında bire bir bir ilişki vardır,
$x \leq y \Leftrightarrow x < y$ veya $x = y$, ve
$x < y \Leftrightarrow x \leq y$ ve $x \neq y$,
ikinci denklik aşağıdaki gibi de ifade edilebilir,
$x < y \Leftrightarrow x \leq y$ ve $y \nleq x$,
Benzer ilişkiyi bulanık durumda veren inşaalar aşağıda gösterilmiştir (Bodenhofer ve Demirci 2008):

Teorem 3.34 *(Bodenhofer ve Demirci 2008) $\widetilde{\preccurlyeq} \in I^{XxX}$ bir (tam) E-sıralama bağıntısı olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlı $\widetilde{\prec}_{\widetilde{\preccurlyeq}} \in I^{XxX}$ bulanık bağıntısı bir (tam) E-kesin sıralama bağıntısıdır:*

$$\widetilde{\prec}_{\widetilde{\preccurlyeq}}(x,y) = \widetilde{\preccurlyeq}(x,y) \wedge\ (\widetilde{\preccurlyeq}(y,x) \rightarrow 0), \forall x,y \in X.$$

Tersine $\widetilde{\prec} \in I^{XxX}$ *bir E-kesin sıralama bağıntısı olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlı* $\widetilde{\preccurlyeq}_{\widetilde{\prec}} \in I^{XxX}$ *bulanık bağıntısı bir E-sıralama bağıntısıdır:*

$$\widetilde{\preccurlyeq}_{\widetilde{\prec}}(x,y) = \widetilde{\prec}(x,y) \vee E(x,y), \forall x,y \in X.$$

Burada elde edilen E-sıralama bağıntısının tam olması için yola çıkılan E-kesin sıralama bağıntısının tam olması koşuluna ek olarak $*$*'dan elde edilen değillemenin güçlü olması gerekmektedir.*

Not 3.35 *Yukarıdaki teoremdeki ilk eşitlikte yer alan* $\widetilde{\preccurlyeq}$*'nın (3.6) formunda yazılabilmesi durumunda* $\widetilde{\prec}_{\widetilde{\preccurlyeq}}$ *bulanık bağıntısının,*

$$\widetilde{\prec}_{\widetilde{\preccurlyeq}}(x,y) = \widetilde{\preccurlyeq}(y,x) \rightarrow 0, \forall x,y \in X.$$

şeklini alacağı kolayca görülebilir.

4. BULANIK ÜST SINIR ve BULANIK SUPREMUM

Buradan itibaren tezin bütün bölümlerinde bir $*$ t-normu ile aksi belirtilmedikçe sol sürekli bir t-norm kastedilecektir.

Boştan farklı bir X kümesini göz önüne alalım. E bu küme üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısı ve $\widetilde{\precsim}$ bir E-sıralama bağıntısı olsun. X'in alt kümeleri üzerindeki üst sınır kavramı çok değerli doğruluk tabanı $I = [0, 1]$'de aşağıdaki gibi genelleştirilebilir (Demirci 2005, Belohavlek 2002).

Tanım 4.1 *Bir $A \in I^X$ bulanık kümesi için,*

$$\widetilde{UB}_A(x) = \mathop{}_{y\in X} \Big(A(y) \to \widetilde{\precsim}(y, x) \Big), \ \forall x \in X,$$

şeklinde tanımlı $\widetilde{UB}_A \in I^X$ bulanık kümesine A bulanık kümesinin bulanık üst sınırı denir.

Tanım 4.2 *Bir $A \in I^X$ bulanık kümesinin $\widetilde{UB}_A \in I^X$ bulanık üst sınırı için $ker(\widetilde{UB}_A) \neq \varnothing$ ise A bulanık kümesinin bulanık üst sınırı vardır diyeceğiz.*

Tanım (4.1)'i kullanarak aynı A bulanık kümesinin bulanık supremumu kavramını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz (Demirci 2005, Belohavlek 2002).

Tanım 4.3 $\widetilde{\sup}_A(x) = \widetilde{UB}_A(x) \wedge \left[\mathop{}_{y\in X} \Big(\widetilde{UB}_A(y) \to \widetilde{\precsim}(x, y) \Big) \right], \ \forall x \in X,$

şeklinde tanımlı $\widetilde{\sup}_A \in I^X$ bulanık kümesine A bulanık kümesinin bulanık supremumu denir.

Tanım 4.4 *Bir $A \in I^X$ bulanık kümesinin $\widetilde{\sup}_A \in I^X$ bulanık supremumu için $ker(\widetilde{\sup}_A) \neq \varnothing$ ise A bulanık kümesinin bulanık supremumu vardır diyeceğiz.*

Klasik teoride, kısaca, reel sayılar kümesinde boştan farklı herhangi bir alt küme için üst sınırı var ise supremumunun da var olduğunu gösteren teorem (konuyla ilgili birçok kaynak arasından (Bartle 1976)'ya bakılabilir) herkesçe bilinir. Amacımız bu teoremin tanımladığımız bulanık kavramlarla da doğru olacağını görmek, böylece verdiğimiz tanımların iyi birer genelleştirme olduğunu göstermek. Bunun için öncelikle bazı önermeler ispatlayacağız.

Bu bölümün bundan sonraki kısmında X kümesi ile $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini, A ile reel sayıların boştan farklı bir alt kümesini, UB_A ile A kümesinin üst sınırları kümesini gösterceğiz. $ker(\widetilde{UB_A})$, A kümesinin bulanık üst sınırları kümesinin çekirdeğini, E, $\mathbb{R}$ üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısını ve $\widetilde{\preccurlyeq}$, $\mathbb{R}$ üzerindeki bilindik sıralama bağıntısı $\leq$ ile birlikte (3.6) formunda yazılabilen bir E-sıralama bağıntısını belirtecek.

Önerme 4.5 $UB_A \subseteq ker(\widetilde{UB_A})$.

Kanıt. $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. UB_A boş küme ise istenilen kapsama elde edilir bu nedenle $x \in UB_A$ olsun, bu durumda,

$\forall y \in A$ için $y \leq x$ eşitsizliği vardır bu da,

$\forall y \in A$, $\widetilde{\preccurlyeq}(y,x) = 1$ anlamına gelir. Son eşitliği $\widetilde{UB_A}$'nın tanımında kullanarak,

$$\widetilde{UB_A}(x) = \mathop{}_{y\in\mathbb{R}} \Big(\mathbf{1}_A(y) \to \widetilde{\preccurlyeq}(y,x)\Big)$$

$$= \mathop{}_{y\in A} \Big(\mathbf{1}_A(y) \to \widetilde{\preccurlyeq}(y,x)\Big) \wedge \mathop{}_{y\notin A} \Big(\mathbf{1}_A(y) \to \widetilde{\preccurlyeq}(y,x)\Big)$$

$$= \mathop{}_{y\in A} (1 \to 1) \wedge \mathop{}_{y\notin A} \Big(0 \to \widetilde{\preccurlyeq}(y,x)\Big)$$

$$= 1 \wedge 1 = 1$$

$\Rightarrow x \in ker(\widetilde{UB_A})$ elde edilir ve bu da ispatı bitirir. ■

$\mathbb{R}$ üzerinde bulanık sıralama bağıntımızı inşaa etmek için kullandığımız bulanık benzerlik bağıntısı E özel olarak $*$-bulanık eşitlik alınırsa ters kapsamanın dolayısıyla eşitliğin söz konusu olduğunu aşağıdaki önermede görüyoruz.

Önerme 4.6 *E $*$-bulanık eşitlikse $ker(\widetilde{UB_A}) \subseteq UB_A$ kapsaması vardır.*

Kanıt. $x \in ker(\widetilde{UB_A})$ olsun, bu durumda
$\forall y \in \mathbb{R}$ için $\Big(\mathbf{1}_A(y) \to \widetilde{\preccurlyeq}(y,x)\Big) = 1$ eşitliği vardır, buradan A kümesinin elemanları için,
$y \in A \Rightarrow \widetilde{\preccurlyeq}(y,x) = 1$, olur, şimdi E'nin ayrık olmasından yararlanarak,
$y \in A \Rightarrow y \leq x$ yazabiliriz ki bu da,
$x \in UB_A$ anlamına gelir ve istenilen kapsamayı verir. ■

Daha genel durumda, yani E'nin ayrık olmadığı durumda, yukarıdaki iki küme arasında bir eşitlik elde etmek yerine UB_A kümesinin boştan farklı olmasını gerektirecek şekilde E üzerinde bir koşul bulunabilir mi sorusunun cevabını sıradaki önermede buluyoruz.

Önerme 4.7 *E_z kısaca bir z reel sayısının E'ye göre denklik sınıfı $[z]_E$ bulanık kümesini belirtmek üzere, reel sayılar kümesinden seçeceğimiz her z sayısı için $ker(E_z)$ üstten sınırlı bir küme ise,*
$ker(\widetilde{UB_A}) \neq \emptyset \Rightarrow UB_A \neq \emptyset$ gerektirmesi vardır.

Kanıt. $\forall z \in \mathbb{R}$ için $ker(E_z)$ üstten sınırlı ve $ker(\widetilde{UB_A}) \neq \emptyset$ olsun,
$z \in ker(\widetilde{UB_A})$ seçelim, bu durumda,
$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \Big(\mathbf{1}_A(x) \to \widetilde{\preccurlyeq}(x,z)\Big) = 1$ olur bu ise,
$\forall x \in \mathbb{R}$ için $\mathbf{1}_A(x) \leq \widetilde{\preccurlyeq}(x,z)$ olmasını gerektirmektedir. Bu eşitsizlikten yararlanarak,
$\forall x \in A$, $\widetilde{\preccurlyeq}(x,z) = 1$ olduğu kolayca görülür. Şimdi,
$\forall x \in A$ için $x \leq z$ oluyorsa $z \in UB_A$ olur ve ispat biter. Bunun aksini varsayarsak, aşağıda oluşturduğumuz küme boştan farklıdır,
$C = \{a \in A : z < a\}$.
A/C kümesinin üstten sınırlı olduğu açıktır (z bir üst sınırdır). C kümesinin de üstten sınırlı olduğunu gösterirsek A kümesinin üstten sınırlı olduğunu söyleyebileceğiz.
$\forall a \in C$ için $\widetilde{\preccurlyeq}(a,z) = 1$ ve $a > z$ olduğundan,
$\forall a \in C$ için $E(a,z) = 1$ olduğunu söyleyebiliriz bu da bize,
$C \subseteq ker(E_z)$ olduğunu verir, varsayımımızda $ker(E_z)$'nin üstten sınırlı bir küme olduğunu göz önünde bulundurursak C kümesinin de üstten sınırlı olduğunu görürüz ve $A = A/C \cup C$ olarak iki üstten sınırlı kümenin bileşimi şeklinde yazılabileceğinden

A'nın üstten sınırlı bir küme olduğunu dolayısıyla $UB_A \neq \emptyset$ olduğunu ispatlamış oluruz. ■

Ana teoreme geçmeden önce son olarak aşağıdaki önermeyi ispatlayacağız.

Önerme 4.8 *$E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow I$ fonksiyonu sürekli olmak üzere bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun, bu durumda, boştan farklı $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesi için,*
$\{\sup(A)\} \subseteq ker(\widetilde{\sup}_A)$ kapsaması vardır.

Kanıt. $\{\sup(A)\} = \emptyset$ ise kapsama sağlanır, $\{\sup(A)\}$ boştan farklı ise $\sup(A)$ tektir, $\sup(A) = k$ olsun. Amacımız $k \in \ker(\widetilde{\sup}_A)$ olduğunu göstermek. Supremumun tanımından, $k \in UB_A$ ve $\forall x \in UB_A$ için $k \leq x$ olur

$\widetilde{\sup}_A(k) = \widetilde{UB}_A(k) \wedge \left[\bigwedge_{y \in \mathbb{R}} \left(\widetilde{UB}_A(y) \rightarrow_{\preccurlyeq} (k, y) \right) \right]$ ilk önermemizden $\widetilde{UB}_A(k) = 1$ olduğunu görürüz.

$\Rightarrow \widetilde{\sup}_A(k) = \left[\bigwedge_{y \in \mathbb{R}} \left(\widetilde{UB}_A(y) \rightarrow_{\preccurlyeq} (k, y) \right) \right]$. Tanımdan yararlanıp $\widetilde{UB}_A(y)$'yi açarak,

$\widetilde{\sup}_A(k) = \left[\bigwedge_{y \in \mathbb{R}} \left(\left[\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} (\mathbf{1}_A(x) \rightarrow_{\preccurlyeq} (x, y)) \right] \rightarrow_{\preccurlyeq} (k, y) \right) \right]$ yazar ve $\mathbb{R}$'yi A ve $\mathbb{R}/A$ şeklinde iki kümeye ayırarak,

$\widetilde{\sup}_A(k) =$

$\left[\bigwedge_{y \in \mathbb{R}} \left(\left(\left[\bigwedge_{x \in A} (\mathbf{1}_A(x) \rightarrow_{\preccurlyeq} (x, y)) \right] \wedge \left[\bigwedge_{x \notin A} (\mathbf{1}_A(x) \rightarrow_{\preccurlyeq} (x, y)) \right] \right) \rightarrow_{\preccurlyeq} (k, y) \right) \right]$, olarak ifade edersek, aşağıdaki eşitliği elde ederiz,

$\widetilde{\sup}_A(k) = \left[\bigwedge_{y \in \mathbb{R}} \left(\left[\bigwedge_{x \in A} \preccurlyeq (x, y) \right] \rightarrow_{\preccurlyeq} (k, y) \right) \right]$. $\mathbb{R}$'yi k'dan büyük eşitler ve k'dan küçükler olmak üzere iki kümeye ayırarak,

$\widetilde{\sup}_A(k) = \left[\bigwedge_{y < k} \left(\left[\bigwedge_{x \in A} \preccurlyeq (x, y) \right] \rightarrow_{\preccurlyeq} (k, y) \right) \right] \wedge \left[\bigwedge_{k \leq y} \left(\left[\bigwedge_{x \in A} \preccurlyeq (x, y) \right] \rightarrow_{\preccurlyeq} (k, y) \right) \right]$, olarak yeniden düzenlersek kolayca,

$$\widetilde{\sup}_A(k) = {}_{y<k}\left(\left[\bigwedge_{x\in A} \preccurlyeq (x,y)\right] \to E(k,y)\right) \tag{4.1}$$

olduğunu gözleyebiliriz.

Supremum kümeye aitse ($k \in A$), $\bigwedge\limits_{x\in A} \preccurlyeq (x,y) \leq \preccurlyeq (k,y) = E(k,y)$ olduğundan $\widetilde{\sup}_A(k) = 1$ olduğunu görür ve ispatı bitirebiliriz. Bu yüzden $k \notin A$ varsayalım. $y < k$ olacak şekilde keyfi sabit bir y reel sayısını göz önüne alalım.

Bu durumda k noktası A kümesinin supremumu olduğundan A kümesinde $\forall n \in N$ için $y < x_n < k$ ve $\lim(x_n) = k$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi vardır. E'yi sürekli varsaydığımız için bu son diziyi kullanarak,

$\lim E((x_n), y) = E(k,y)$ dolayısıyla $\bigwedge\limits_{n\in N} E((x_n), y) \leq E(k,y)$ olduğunu söyleyebiliriz, diğer taraftan, $(x_n) \subseteq A$ olduğundan,

$\bigwedge\limits_{x\in A} \preccurlyeq (x,y) \leq \bigwedge\limits_{n\in N} \preccurlyeq ((x_n), y) = \bigwedge\limits_{n\in N} E((x_n), y) \leq E(k,y)$, eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin her $y < k$ sayısı için doğru olduğunu göz önünde bulundurarak (4.1) eşitliğinde kullanırsak,

$\widetilde{\sup}_A(k) = 1$ yani $k \in \ker(\widetilde{\sup}_A)$ olduğunu görmüş ve ispatı bitirmiş oluruz. ■

Bu son önermeden sonra ana teroemi ifade edip ispatlamaya hazırız:

Teorem 4.9 *$E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to I$ fonksiyonu sürekli ve her $x \in \mathbb{R}$ için E_x sınırlı çekirdeğe sahip olmak üzere bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun, boştan farklı $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin bulanık üst sınırı varsa bulanık supremumu vardır.*

Kanıt. E kabul edilebilir ve her $x \in \mathbb{R}$ için E_x sınırlı çekirdeğe sahip ve $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin bulanık üst sınırı var olsun.
$ker(\widetilde{UB}_A) \neq \emptyset$ önerme 4.7'den UB_A kümesinin boş olmadığını dolayısıyla A kümesinin üstten sınırlı olduğunu söyeyebiliriz. Bu durumda klasik teoriden bildiğimiz supremum özelliğinden dolayı A kümesinin supremumu vardır. Önerme 4.8 gereği ise A kümesinin aynı zamanda bir bulanık supremumu vardır.■

5. E-BULANIK POZİTİF SINIF

Bu bölümde öncelikle bir küme üzerindeki çok-değerli pozitif sınıfı tanımlayacağız. Daha sonra, klasik teoride kesin sıralama bağıntıları ile pozitif sınıflar arasında yer alan bire bir ilişkinin çok değerli teorideki karşılığını inceleyeceğiz. Bunun için öncelikle klasik tanımı hatırlayalım.

Tanım 5.1 *(Bartle 1976)* $F = (X, \oplus, \odot)$ *klasik bir cisim olsun.* $x \in X$ *için* $\overline{0}$, *ve* $-x$, *sırasıyla* "$\oplus$" *işlemine göre cismin sıfır elemanını ve* x*'in tersini göstersin.*

(i) X'*in bir* P *alt kümesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa* P*'ye pozitif sınıf denir.*

(PC.1) $\bar{0} \notin P$,

(PC.2) $(x \neq \bar{0}) \Rightarrow (x \in P \text{ veya } -x \in P)\ \forall x \in X$,

(PC.3) $x, y \in P \Rightarrow x \oplus y \in P$, $\forall x, y \in X$,

(PC.4) $x, y \in P \Rightarrow x \odot y \in P$, $\forall x, y \in X$.

(ii) Eğer P, F*'nin öğelerinin bir pozitif sınıfıysa* F*'ye* P *tarafından sıralanmış sıralı cisim denir.*

Yukarıdaki tanımın çok değerli karşılığını aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür:

Tanım 5.2 $F = (X, \oplus, \odot)$ *klasik bir cisim ve* E, X *üzerinde bir* $*$*-bulanık denklik bağıntısı olmak üzere;* X*'in bir* P *bulanık alt kümesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa* P*'ye* F*'nin öğelerinin bir E-pozitif sınıfı denir.*

(VPC.1) $P(\bar{0}) = 0$,

(VPC.2) $E(\bar{0}, x) \longrightarrow 0 \leq P(x) \vee P(-x), \forall x \in X$,

(VPC.3) $P(x) * P(y) \leq P(x \oplus y), \forall x, y \in X,$

(VPC.4) $x, y \in Supp(P) \Longrightarrow x \odot y \in Supp(P), \forall x, y \in X.$

(Bartle 1976) Klasik bir $F = (X, \oplus, \odot)$ cismi üzerinde bir P pozitif sınıfı varsa, P, F'nin öğeleri üzerine aşağıda gibi tanımlanan doğal bir $\prec_P$ tam kesin sıralama bağıntısı verir.

$$x \prec_P y \Leftrightarrow y - x \in P, \ \forall x, y \in X.$$

Üstelik bu lineer kesin sıralama bağıntısı $\prec_P$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:
(OF.1) $x \prec_P \bar{0} \Leftrightarrow \bar{0} \prec_P -x, \ \forall x \in X,$
(OF.2) $(\bar{0} \prec_P x \ ve \ \bar{0} \prec_P y) \Rightarrow (\bar{0} \prec_P x \oplus y), \ \forall x, y \in X,$
(OF.3) $(\bar{0} \prec_P x \ ve \ \bar{0} \prec_P y) \Rightarrow (\bar{0} \prec_P x \odot y), \ \forall x, y \in X.$
Tersine X üzerinde (OF.1-OF.3) koşullarını sağlayan bir $\prec$ tam kesin sıralama bağıntısı aracılığıyla $F = (X, \oplus, \odot)$ cismi üzerinde bir $P_\prec$ pozitif sınıfı tanımlanabilir.

$$P_\prec = \{x \in X \mid \bar{0} \prec x\}.$$

Son olarak da $P_{\prec_P} = P$ ve $\prec_{P_\prec} = \prec$ eşitlikleri vardır. Aşağıda bu olguların bulanık olarak nasıl genelleştirilebileceğini göreceğiz.

Teorem 5.3 *$F = (X, \oplus, \odot)$ bir cisim ve E, X üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun. X üzerinde bir $\tilde{\prec}$, tam E-kesin sıralama bağıntısı,*

(VOF.1) $\tilde{\prec}(x, \bar{0}) = \tilde{\prec}(\bar{0}, -x), \forall x \in X,$

(VOF.2) $\tilde{\prec}(\bar{0}, x) * \tilde{\prec}(\bar{0}, y) \leq \tilde{\prec}(\bar{0}, x \oplus y)), \forall x, y \in X,$

(VOF.3) $x, y \in Supp(\tilde{\prec}_{\bar{0}}) \Rightarrow x \odot y \in Supp(\tilde{\prec}_{\bar{0}}), \forall x, y \in X,$ *(burada* $\tilde{\prec}_{\bar{0}}$, X'*in* $\tilde{\prec}_{\bar{0}}(w) = \tilde{\prec}(\bar{0}, w), \forall w \in X,$ *şeklinde tanımlı bir bulanık alt kümesidir),*
özelliklerini sağlıyorsa X'in

$$P_{\tilde{\prec}}(x) = \tilde{\prec}(\bar{0}, x), \ \forall x \in X,$$

şeklinde tanımlı $P_{\tilde{\prec}}$ bulanık alt kümesi F'nin öğelerinin bir E-pozitif sınıfıdır üstelik $P_{\tilde{\prec}}$, E'ye göre genişletilebilirdir.

Kanıt. $\tilde{\prec}$, X üzerinde bir tam E-lineer kesin sıralama bağıntısı olsun ve $P_{\tilde{\prec}}(x) = \tilde{\prec}(\bar{0}, x)$ olarak tanımlayalım.
(VPC.1): $P_{\tilde{\prec}}(\bar{0}) = \tilde{\prec}(\bar{0}, \bar{0}) = 0$ $\tilde{\prec}$'nın yansımasızlık özelliğinden elde edilir.
(VPC.2): $P_{\tilde{\prec}}(x) \vee P_{\tilde{\prec}}(-x) = \tilde{\prec}(\bar{0}, x) \vee \tilde{\prec}(\bar{0}, -x)$'dir ve
bu eşitliğin sağ tarafı VOF.1 özelliğinden dolayı $\tilde{\prec}(\bar{0}, x) \vee \tilde{\prec}(x, \bar{0})$'ye eşittir.
$\tilde{\prec}$'nın tam olmasını kullanarak da $\tilde{\prec}(\bar{0}, x) \vee \tilde{\prec}(x, \bar{0}) \geq E(x, y) \longrightarrow 0$ elde edilir.
(VPC.3): $P_{\tilde{\prec}}(x) * P_{\tilde{\prec}}(y) = \tilde{\prec}(\bar{0}, x) * \tilde{\prec}(\bar{0}, y)$, (VOF.2) özelliğini kullanarak,
$\tilde{\prec}(\bar{0}, x) * \tilde{\prec}(\bar{0}, y) \leq \tilde{\prec}(\bar{0}, x \oplus y)$ eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizliğin sağ tarafı $P_{\tilde{\prec}}(x \oplus y)$'ye eşittir.
(VPC.4): $x, y \in Supp(P_{\tilde{\prec}})$, olsun, bu durumda,
$P_{\tilde{\prec}}(x) > 0$ ve $P_{\tilde{\prec}}(y) > 0$ olur ki bu da,
$[\tilde{\prec}(\bar{0}, x) \wedge \tilde{\prec}(\bar{0}, y)] > 0$, olmasını gerektirir. (VOF.3) özelliğini devreye sokarak
$\tilde{\prec}(\bar{0}, x \odot y) > 0$ elde ederiz. Bu eşitsizlik tanım gereği,
$P_{\tilde{\prec}}(x \odot y) > 0$ olması anlamına gelir ve bu da istediğimiz $x \odot y \in Supp(P_{\tilde{\prec}})$ sonucunu verir.
Son olarak $P_{\tilde{\prec}}$'nin E genişletilebilirliğini görelim:
$\tilde{\prec}$ 2. argumanıyla E genişletilebilir olduğu için,
$\tilde{\prec}(\bar{0}, x) * E(x, y) \leq \tilde{\prec}(\bar{0}, y)$, $\forall x, y \in X$ eşitsizliğini yazabilir ve $P_{\tilde{\prec}}$'nin tanımını kullanarak,
$P_{\tilde{\prec}}(x) * E(x, y) \leq P_{\tilde{\prec}}(y)$, $\forall x, y \in X$ eşitsizliğini elde ederiz ki bu da $P_{\tilde{\prec}}$'nin E'ye göre genişletilebilir olması demektir. ∎

Bir tam E-kesin sıralama bağıntısıyla yola çıkıp E-pozitif sınıfının inşaasına dair formülü elde ettikten sonra akla iki önemli soru gelmektedir. Bunlardan birincisi bir E-pozitif sınıftan yola çıkarak bir tam E-kesin sıralama bağıntısını nasıl inşaa edebileceğimiz sorusu, ikincisi ise bu inşaaların bire bir olup olmadıklarıdır. Aşağıdaki teorem bu sorulara ışık tutmaktadır.

Teorem 5.4 *Verilen bir P, E-pozitif sınıfı için eğer E, $\oplus$ işlemine göre değişmez ve P, E-genişletilebilir ise,*

$$\tilde{\prec}_P(x, y) = P(y - x), \ \forall x, y \in X,$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\prec}_P$ bağıntısı X üzerinde (VOF.1-VOF.3) özelliklerini sağlayan bir tam E-kesin sıralama bağıntısıdır.
Üstelik $P_{\tilde{\prec}_P} = P$ ve eğer $\tilde{\prec}$, $\oplus$, işemine göre değişmez ise $\tilde{\prec}_{P_{\tilde{\prec}}} = \tilde{\prec}$ olur.

Kanıt. Teoremin ilk kısmını kanıtlamak için P bir E-pozitif sınıf olmak üzere $\tilde{\prec}_P(x,y) = P(y-x)$, olarak alalım. Öncelikle $\tilde{\prec}_P$'nın (FSO.1-FSO.4) koşullarını sağladığını görelim:

(FSO.1): $\tilde{\prec}_P(x,x) = P(x-x) = P(\bar{0}) = 0$ burada son eşitlik (VPC.1) özelliğinden elde edilir.

(FSO.2):$\tilde{\prec}_P$'nin tanımından $\tilde{\prec}_P(x,y) * \tilde{\prec}_P(y,z) = P(y-x) * P(z-y)$, diğer taraftan P (VPC.3) özelliğini sağladığı için,

$P(y-x) * P(z-y) \leq P((y-x) \oplus (z-y))$ eşitsizliği vardır, X'in cisim yapısını kullanarak,

$P(y-x) * P(z-y) \leq P((y-x) \oplus (z-y)) = P(z-x)$ elde ederiz ve yine $\tilde{\prec}_P$'nin tanımını kullarak

$P(z-x) = \tilde{\prec}_P(x,z)$, olduğunu görür ve istenilen eşitsizliği elde etmiş oluruz.

(FSO.3) $\tilde{\prec}_P$'nin her iki argümanıyla da E-genişletilebilir olduğunu görmek için P'nin E-genişletilebilir olmasından faydalanacağız:

i) İlk argümana göre E-genişletilebilirlik:

$\tilde{\prec}_P(x,y) * E(x,z) = P(y-x) * E(x,z)$, E toplamaya göre değişmez olduğu için eşitsizliğin sağ tarafını,

$E(x,z) = E(x \oplus (y-x-z), z \oplus (y-x-z)) = E(y-z, y-x) = E(y-x, y-z)$ olmasından yararlanarak,

$P(y-x) * E(x,z) = P(y-x) * E(y-x, y-z)$, olarak yazabilir ve şimdi P'nin E-genişletilebilir olmasını devreye sokarak,

$P(y-x) * E(x,z) = P(y-x) * E(y-x, y-z) \leq P(y-z)$ eşitsizliğini elde deriz ki sağ taraf $\tilde{\prec}_P(z,y)$'ye eşittir.

ii) İkinci argümana göre E-genişletilebilirlik:

$\tilde{\prec}_P(x,y) * E(y,z) = P(y-x) * E(y,z)$, yukardakine benzer şekilde E toplamaya göre değişmez olduğu için eşitsizliğin sağ tarafını,

$P(y-x) * E(y-x, z-x)$, olarak yazabilir ve P'nin E-genişletilebilir olması,

$P(y-x) * E(y-x, z-x) \leq P(z-x)$ eşitsizliğini gerektirir ki bu eşitsizliğin sağ tarafı da $\tilde{\prec}_P(x,z)$'ye eşittir.

(FSO.4): $\tilde{\prec}_P(x,y) \vee \tilde{\prec}_P(y,x) = P(y-x) \vee P(x-y)$ (VPC.2) özelliğinde dolayı biliyoruz ki,

$P(y-x) \vee P(x-y) \leq E(\bar{0}, x-y) \longrightarrow 0$, E'nin $\oplus$-değişmezliğini kullanarak eşitsizliğin sağ tarafının $E(y,x) \longrightarrow 0$'a eşit olduğunu görebiliriz, bu da istenilen eşitsizliği verir.

Şimdi $\tilde{\prec}_P$'nin (VOF.1-VOF.3) özelliklerini sağladığını görelim:

(VOF.1): $\tilde{\prec}_P$'nin tanımını ve $\bar{0}$ 'ın cismin toplamsal etkisiz elemanı olduğunu kullanarak:

$\tilde{\prec}_P(x,\bar{0}) = P(\bar{0}-x) = P(-x) = P(-x-\bar{0}) = \tilde{\prec}_P(\bar{0},-x)$ yazabiliriz.

(VOF.2): Yukarıda sözü geçen özellikleri kullanarak,

$\tilde{\prec}_P(\bar{0},x) * \tilde{\prec}_P(\bar{0},y) = P(x-\bar{0}) * P(y-\bar{0})$

$= P(x) * P(y)$ elde ederiz. P, (VPC.3) özelliğine sahip olduğu için de,

$P(x) * P(y) \leq P(x \oplus y)$ olduğunu ve buna denk olarak,

$P(x) * P(y) \leq P(x \oplus y - \bar{0})$ olduğunu görebiliriz. Eşitsizliğin sağ tarafı ise $\tilde{\prec}_P(\bar{0}, x \oplus y)$'ye eşittir.

(VOF.3): $x, y \in Supp(\tilde{\prec}_P)$ olsun, bu durumda,

$[\tilde{\prec}_P(\bar{0},x) \wedge \tilde{\prec}_P(\bar{0},y)] > 0$ olur bu da,

$P(x) \wedge P(y) > 0$ olmasını gerektirir. Bu eşitsizlik $x, y \in Supp(P)$ anlamına gelir ve (VPC.4) özelliğinden dolayı,

$x, y \in Supp(P) \Longrightarrow x \odot y \in Supp(P)$ olur, böylece,

$\tilde{\prec}_P\,(\bar{0}, x \odot y) > 0 \Longrightarrow x \odot y \in Supp(\tilde{\prec}_P)$ elde edilir.

Teoremin ikinci kısmı için aşağıdaki gözlemleri yapabiliriz:

i) Tanım gereği $P_{\tilde{\prec}_P}(x) = \tilde{\prec}_P(\bar{0},x)$, $(\forall x \in X)$ eşitliği yazılır ve bu sefer $\tilde{\prec}_P$'nın tanımı kullanılırsa,

$P_{\tilde{\prec}_P}(x) = \tilde{\prec}_P(\bar{0},x) = P(x-\bar{0})$, $(\forall x \in X)$, elde edilir. $\bar{0}$'ın cismin toplamsal etkisiz elemanı olmasından dolayı da,

$P_{\tilde{\prec}_P}(x) = \tilde{\prec}_P(\bar{0},x) = P(x-\bar{0}) = P(x)$, $(\forall x \in X)$, olduğu görülür.

ii) Tanımdan $\tilde{\prec}_{P_{\tilde{\prec}}}(x,y) = P_{\tilde{\prec}}(y-x)$, $(\forall x, y \in X)$ eşitliği yazılır ve $P_{\tilde{\prec}}$'nin tanımı kullanılırsa,

$\tilde{\prec}_{P_{\tilde{\prec}}}(x,y) = P_{\tilde{\prec}}(y-x) = \tilde{\prec}(\bar{0}, y-x)$, $(\forall x, y \in X)$ olduğu görülür, bu noktada $\tilde{\prec}$'nın $\oplus$-değişmez olmasından ve $\bar{0}$'ın cismin toplamsal etkisiz elemanı olmasından yararlanarak,

$\tilde{\prec}_{P_{\tilde{\prec}}}(x,y) = P_{\tilde{\prec}}(y-x) = \tilde{\prec}(\bar{0}, y-x) = \tilde{\prec}(\bar{0} \oplus x, (y-x) \oplus x) = \tilde{\prec}(x,y)$, $(\forall x, y \in X)$ olduğu görülür. ■

Not 5.5 *Eğer $\tilde{\prec}$, E'nin $\oplus$'ya göre değişmeyen olduğu bir E-pozitif sınıftan yola çıkılarak inşaa edilirse $\tilde{\prec}$ kendisi de $\oplus$'ya göre değişmeyen olur.*

Bir $F = (X, \oplus, \odot)$ cismi $\preceq$ tarafından tam olarak sıralanmış ve E, X üzerinde $\preceq$ ile uyumlu bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olduğunda karşılık gelen tam $*$-E-sıralamasının aşağıdaki gibi basitçe ifade edilebileceğini teorem 3.24 yardımıyla biliyoruz:

$$\widetilde{\lesssim}(x,y) = \begin{cases} 1 & , x \preceq y \\ E(x,y) & , \text{aksi halde} \end{cases} , \forall\, x, y \in X.$$

Diğer taraftan yukarıdaki formda yazılabilen bir $\widetilde{\lesssim}$ ile inşaa edilen tam $*$-E-kesin sıralama bağıntısının aslında aşağıdaki benzer basit formülle ifade edilebileceğini de biliyoruz:

$$\widetilde{\prec}_{\widetilde{\lesssim}}(x,y) = \begin{cases} 0 & , y \preceq x \\ E(x,y) \to 0 & , \text{aksi halde} \end{cases} \quad \forall\, x, y \in X.$$

Bu formüller $\widetilde{\lesssim}$ ve $\widetilde{\prec}$ nesnelerinin benzerlik tabanlı olduğunu gösteriyor. Bulanık pozitif sınıf için de bunlar gibi benzerlik tabanlı bir formül elde edebilmek için $\widetilde{\prec}$'nin sağlaması gereken VOF1-VOF3 özelliklerinin yerine $\widetilde{\prec}$'nin gerekliliğini ortadan kaldıracak yeni koşullara ihtiyaç olacaktır. Aşağıdaki teorem bu inşaanın nasıl olcağını göstermektedir.

Teorem 5.6 *$F = (X, \oplus, \odot)$ bir cisim, $\preceq$, X üzerinde bir tam sıralama bağıntısı ve E, X üzerinde $\preceq$ ile uyumlu ve $\oplus$ işlemine göre değişmeyen bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun. Eğer $*$'ın kalanlı değillemesi güçlü ise P aşağıdaki gibi inşa edilebilir:*

$$P(x) = \begin{cases} 0 & , x \preceq \bar{0} \\ E(x, \bar{0}) \longrightarrow 0 & , \textit{aksi halde} \end{cases} , \forall x \in X.$$

Kanıt. Teoremde tanımlanan P bulanık kümesinin (VPC1-VPC4) koşullarını sağladığını göstermemiz gerekiyor.

$P(\bar{0}) = 0$, olduğu tanımdan açıktır (VPC1). Diğer yandan $\bar{0}$'dan farklı seçeceğimiz her $x \in X$ için,

$x \succ \bar{0}$ veya $x \prec \bar{0}$ olacağından dolayı

$P(x) = E(x, \bar{0}) \longrightarrow 0$ veya $P(-x) = E(-x, \bar{0}) \longrightarrow 0 = E(x, \bar{0}) \longrightarrow 0$, olacaktır ($E$'nin $\oplus$ işlemine göre değişmez olmasını göz önünde bulundurarak).

Bu ise,

$E(x, \bar{0}) \longrightarrow 0 \leq P(x) \vee P(-x)$ olmasını gerektirir ve eğer $x = \bar{0}$ olarak seçilecek olursa bu eşitsizliğin sol tarafı 0 olacağından eşitsizlik yine doğru olacaktır. Böylece

P'nin (VPC2) özelliğini sağladığını gördük.
(VPC3) özelliğini görmek için $x, y \in X$ alalım.
Eğer $x \preceq \bar{0}$ veya $y \preceq \bar{0}$ ise $P(x) * P(y) = 0$ olacağından istenilen eşitsizlik sağlanır bu yüzden x ve y'nin her ikisinin de $\bar{0}$'dan kesin büyük olduğunu kabul edelim. Cismimizin özellikleri gereği,
$\bar{0} \prec x \prec x \oplus y$ ve benzer olarak, $\bar{0} \prec y \prec x \oplus y$, olduğu gözlenir ve E'nin $\preceq$ uyumluluğu (E'nin $\prec$ uyumluluğuna denktir), devreye sokulursa
$E(\bar{0}, x \oplus y) \leq E(\bar{0}, x)$ ve $E(\bar{0}, x \oplus y) \leq E(\bar{0}, y)$ eşitsizliklerini elde ederiz. Bu ise,
$E(\bar{0}, x) \to \bar{0} \leq E(\bar{0}, x \oplus y) \to \bar{0}$ ve $E(\bar{0}, y) \to \bar{0} \leq E(\bar{0}, x \oplus y) \to \bar{0}$ eşitsizliklerini gerektirir.
P'nin tanımı ve sözkonusu eşitsizliklerin,
$P(x) \leq P(x \oplus y)$ ve $P(y) \leq P(x \oplus y)$ eşitsizliklerini doğurduğunu göz önüne alırsak bu eşitsizlikler,
$P(x) * P(y) \leq P(x \oplus y)$ olmasını gerektirir.
Son olarak P'nin VPC4 özelliğini sağladığını görelim.
$x, y \in Supp(P)$ olsun, bu $x \succ \bar{0}$ ve $y \succ \bar{0}$ anlamına gelir üstelik,
$E(x, \bar{0}) \longrightarrow 0 > 0$ ve $E(y, \bar{0}) \longrightarrow 0 > 0$ olur. Ayrıca cismin özelliklerinden $x \odot y \succ \bar{0}$ olduğunu biliyoruz. Kalanlı değillememiz güçlü olduğundan dolayı
$E(x \odot y, \bar{0}) \longrightarrow 0 > 0$, olacaktır ve bu $x \odot y \in Supp(P)$ olmasını gerektirir. ■

Örnek 5.7 *Cismimiz $F = (\mathbb{R}, +, \cdot)$, ve $*$ Lukasiewicz t-normu olsun. $*$'a karşılık gelen benzerlik bağıntısının $E(x,y) = \max(1 - |x - y|, 0)$ olduğu iyi bilinmektedir (De Baets ve Mesiar 1997, Trillas ve Valverde 1984). Bu durumda $*$'ın kalan işlemine göre değilleme de $N_*(x) = 1 - x$ olmakta ve açıktır ki bu güçlü bir değillemedir. Basit hesaplar sonucunda teorem 5.6'daki P, E-pozitif sınıfın aşağıdaki gibi olacağı görülebilir:*

$$P(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ x & , 0 < x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x \end{cases} , \forall x \in \mathbb{R}.$$

(VOF1-VOF3) koşulları veya denk olarak $*$'a karşılık gelen kalan işlemine göre değillemenin güçlü olması oldukça kısıtlayıcı koşullar olduğu için akla gelen soru kalan işlemine göre değillemesi güçlü olmayan bir $*$-bulanık denklik bağıntısıyla donatılmış bir cisimde bir bulanık pozitif sınıfın oluşturulup oluşturulamayacağıdır. Aşağıdaki teorem bu soruya cevap vermektedir.

Teorem 5.8 *$F = (X, \oplus, \odot)$ bir cisim, $\preceq$, X üzerinde bir tam sıralama bağıntısı ve E, X üzerinde $\preceq$ ile uyumlu ve $\oplus$'ya göre değişmeyen bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun. Eğer N aşağıdaki özelliği sağlayan herhangi bir güçlü değillemeyse,*

$E(x, \bar{0}) \longrightarrow 0 \leq N(E(x, \bar{0}))$, *her* $x \in X$,
P bulanık pozitif sınıfı aşağıdaki gibi inşaa edilebilir:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & , x \preceq \bar{0} \\ N(E(x, \bar{0})) & , \textit{aksi halde} \end{cases} , \forall x \in X. \tag{5.1}$$

Kanıt. Teoremde tanımlanan P bulanık kümesinin (VPC1-VPC4) koşullarını sağladığını göstermemiz gerekiyor.
$P(\bar{0}) = 0$, olduğu tanımdan açıktır (VPC1). Diğer yandan $\bar{0}$'dan farklı seçeceğimiz her $x \in X$ için,
$x \succ \bar{0}$ veya $x \prec \bar{0}$. olacağından dolayı
$P(x) = N(E(x, \bar{0}))$ veya $P(-x) = N(E(-x, \bar{0})) = N(E(x, \bar{0}))$, olacaktır ($E$'nin $\oplus$ işlemine göre değişmez olmasını göz önünde bulundurarak). Bu ise,
$N(E(x, \bar{0})) \leq P(x) \vee P(-x)$ olmasını gerektirir ve eğer $x = \bar{0}$ olarak seçilecek olursa bu eşitsizliğin sol tarafı 0 olacağından eşitsizlik yine doğru olacaktır. Teoremin varsayımındaki $E(x, \bar{0}) \longrightarrow 0 \leq N(E(x, \bar{0}))$, her $x \in X$, eşitsizliğini de göz önüne alırsak P'nin VPC2 özelliğini sağladığını görürüz.
(VPC3) özelliğini görmek için $x, y \in X$ alalım.
Eğer $x \preceq \bar{0}$ veya $y \preceq \bar{0}$ ise $P(x) * P(y) = 0$ olacağından istenilen eşitsizlik sağlanır bu yüzden x ve y'nin her ikisinin de $\bar{0}$'dan kesin büyük olduğunu kabul edelim. Cismimizin özellikleri gereği,
$\bar{0} \prec x \prec x \oplus y$ ve benzer olarak, $\bar{0} \prec y \prec x \oplus y$, olduğu gözlenir ve E'nin $\preceq$ uyumluluğu (E'nin $\prec$ uyumluluğuna denktir), devreye sokulursa
$E(\bar{0}, x \oplus y) \leq E(\bar{0}, x)$ ve $E(\bar{0}, x \oplus y) \leq E(\bar{0}, y)$ eşitsizliklerini elde ederiz. Bu ise,
$N(E(\bar{0}, x)) \leq N(E(\bar{0}, x \oplus y))$ ve $N(E(\bar{0}, y)) \leq N(E(\bar{0}, x \oplus y))$ eşitsizliklerini gerektirir. Bu ise,
$N(E(\bar{0}, x)) * N(E(\bar{0}, y)) \leq N(E(\bar{0}, x \oplus y))$ eşitsizliğini gerektirir ve bu son eşitsizlik P'nin tanımı gereği,
$P(x) * P(y) \leq P(x \oplus y)$, $\forall x, y \in X$ eşitsizliğini verir.

Son olarak P'nin (VPC4) özelliğini sağladığını görelim.

$x, y \in Supp(P)$ olsun, bu $x \succ \bar{0}$ ve $y \succ \bar{0}$ anlamına gelir üstelik, cismin özelliklerinden $x \odot y \succ \bar{0}$ olduğunu biliyoruz. Kalanlı değillememiz güçlü olduğundan dolayı $N(E(x \odot y, \bar{0})) > 0$, olacaktır ve bu $x \odot y \in Supp(P)$ olmasını gerektirir. ■

Örnek 5.9 *Cismimiz $F = (\mathbb{R}, +, \cdot)$, ve $*$ çarpım t-normu olsun.*

$$E(x, y) = \exp(-|x - y|)$$

bulanık bağıntısının bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olduğu bilinmektedir, üstelik E'nin toplamaya göre değişmez ve $\mathbb{R}$ üzerindeki sıralama ile uyumlu olduğu kolayca görülebilir. Çarpım t-normunun ürettiği kalan işlemi,

$x \to y = \begin{cases} 1 & , y = 1 \\ y/x & , \textit{aksi halde} \end{cases}$, $\forall x, y \in X$ *olarak hesaplanabilmektedir, böylece,*

$E(x, 0) \longrightarrow 0 = \begin{cases} 1 & , E(x, 0) = 0 \\ 0 & , \textit{aksi halde} \end{cases}$, $\forall x \in X$ *eşitliği elde edilebilir.*

Bu noktada eğer güçlü değillememiz olarak $N(x) = 1 - x$ seçilecek olursa,

$E(x, 0) \longrightarrow 0 \leq N(E(x, 0))$, *her $x \in \mathbb{R}$ eşitsizliği kolayca görülebilir ve teorem 5.8, gereği P aşağıdaki gibi ifade edilebilir:*

$P(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 - (E(x, 0)) & , \textit{aksi halde} \end{cases}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

6. BULANIK MUTLAK DEĞER

6.1. Tanım ve Temel Teoremler

Klasik bir $F = (X, \oplus, \odot)$ cismi üzerinde bir P pozitif sınıfı varsa, P'nin, F'nin öğeleri üzerinde,

$$x \prec_P y \Leftrightarrow y - x \in P, \ \forall x, y \in X,$$

şeklinde tanımlanan doğal bir $\prec_P$ tam kesin sıralama bağıntısı verdiğini ve yine bir kesin sıralama bağıntısıyla kısmi sıralama bağıntısı arasında aşağıdaki gibi bire bir bir ilişki olduğunu,
$x \leq y \Leftrightarrow x < y$ veya $x = y$, ve
$x < y \Leftrightarrow x \leq y$ ve $x \neq y$
önceki bölümlerde görmüştük.
Diğer taraftan yine klasik teoride bir $F = (X, \oplus, \odot)$ cismi üzerinde, $x \in X$ için $\overline{0}$, ve $-x$, sırasıyla " $\oplus$ " işlemine göre cismin sıfır elemanını ve x'in tersini göstermek üzere, bir P pozitif sınıfı varsa bu sınıf vasıtasıyla X kümesinin üzerinde aşağıdaki şekilde mutlak değer adı verilen bir fonksiyon tanımlanmaktadır:
$$|a| = \begin{cases} \overline{0} & a = \overline{0} \\ a & a \in P \\ -a & -a \in P \end{cases}, \forall a \in X.$$
Bu bölümde amacımız bu tanımdan yola çıkarak mutlak değer kavramının bulanık versiyonunu tanımlamak ve klasik teoridekine benzer özelliklerini incelemektir.

Tanım 6.1 $F = (X, \oplus, \odot)$ $\preceq$ *ile tam sıralanmış klasik bir cisim olsun.* $x \in X$ *için* $\overline{0}$, *ve* $-x$, *sırasıyla* " $\oplus$ " *işlemine göre cismin sıfır elemanını ve* x*'in tersini göstersin* E, X *üzerinde bir* $*$*-bulanık denklik bağıntısı ve* P, X *kümesi üzerinde, bir* E*-pozitif sınıf olsun.* X*'ten* X*'e bir* φ E*'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyonu eğer aşağıdaki özellikleri sağlarsa* φ *bulanık fonksiyonuna "*P*'ye göre bulanık mutlak değer" fonksiyonu denir:*
BMD1: $\varphi(\overline{0}, \overline{0}) = 1$,
BMD2: $x \notin SA\breve{G} \Rightarrow \varphi(x, y) * P(x) \leq E(x, y), \forall x, y \in X$,
BMD3: $x \in SA\breve{G} \Rightarrow \varphi(x, y) \leq E(x, y), \forall x, y \in X$,

BMD4: $-x \notin SA\breve{G} \Rightarrow \varphi(x,y) * P(-x) \leq E(-x,y), \forall x, y \in X,$

BMD5: $-x \in SA\breve{G} \Rightarrow \varphi(x,y) \leq E(-x,y), \forall x, y \in X,$

Buradaki tanımda $SA\breve{G}$ *kümesi,* $SA\breve{G} = ([\overline{0}]_E \backslash \{Supp(P)\}^C) \cup \{\overline{0}\}$ *olarak tanımlanan sıfırın sağ benzerleri kümesidir.*

Teorem 6.2 $F = (X, \oplus, \odot)$ $\preceq$ *ile tam sıralanmış klasik bir cisim olsun.* $x \in X$ *için* $\overline{0}$, *ve* $-x$, *sırasıyla "*$\oplus$*" işlemine göre cismin sıfır elemanını ve* x*'in tersini göstersin* E, X *üzerinde* $\oplus$ *işlemine göre değişmez olan bir* $*$*-bulanık denklik bağıntısı,* P, X *kümesi üzerinde,* N *güçlü değillemesiyle, (5.1) formunda yazılabilen bir* E*-pozitif sınıf,* $|.|$, X *kümesi üzerinde bu kümedeki* $\prec$ *bağıntısının mutlak değer fonksiyonu olsun.* $\theta \in I^{X \times X}$ *bulanık bağıntısı* $\theta(x, |x|) = 1$ *ve* $\theta(x,y) \leq E(|x|, y), \forall x, y \in X$ *koşullarını sağlıyorsa* θ P*'ye göre bulanık mutlak değer fonksiyonudur.*

Kanıt. Öncelikle θ'nın X'ten X'e E'ye göre kuvvetli bir bulanık fonksiyon olduğunu göstermeliyiz, bunun için $|.|$ fonksiyonunun E'ye göre genişletilebilir olduğunu göstermek ve böylece önerme 3.11'i devreye sokmak yeterli olacaktır:

i) $\overline{0} \preceq x$ ve $\overline{0} \preceq y$ olsun,

$E(|x|, |y|) = E(x,y)$ olur.

ii) $x \prec \overline{0}$ ve $y \prec \overline{0}$ olsun,

$E(|x|, |y|) = E(-x,-y) = E(-x \oplus (x+y), -y \oplus (x+y)) = E(y,x) = E(x,y)$ olur.

iii) $\overline{0} \preceq x$ ve $y \prec \overline{0}$ olsun, iki durum söz konusudur:

a) $-y \preceq x$, ki bu durumda,

$y \preceq -y \preceq x$ olduğundan E'nin $\preceq$ ile uyumluluğunu göz önüne alarak,

$E(x,y) \leq E(x,-y) = E(|x|, |y|)$ olduğunu gözleriz.

b) $x \prec -y$, ki bu durumda,

$y \prec -x$ ve dolayısıyla $y \prec -x \prec x \prec -y$ eşitsizliği geçerli olduğundan yine E'nin $\preceq$ ile uyumluluğunu göz önüne alarak,

$E(x,y) \leq E(y,-x) = E(y \oplus (x-y), -x \oplus (x-y)) = E(x,-y) = E(|x|, |y|)$ olduğunu görürüz.

iv)$\overline{0} \preceq y$ ve $x \prec \overline{0}$ olması durumu iii)'e benzer olarak incelenebilir.

i, ii, iii ve iv'ün sonucu olarak,

$E(x,y) \leq E(|x|, |y|), \forall x, y \in X$ eşitsizliğini elde ederiz ki bu $|.|$ fonksiyonunun

E'ye göre genişletilebilir olması demektir. Böylece önerme 3.11'in tüm koşulları sağlandığından θ'nın X'ten X'e E'ye göre kuvvetli bir bulanık fonksiyon olduğunu gözlemlemiş olduk.

Şimdi θ'nın $\theta(x,y) \leq E(|x|,y)$ ve $\theta(x,|x|) = 1$ $(\forall x, y \in X)$ özelliklerini göz önünde bulundurarak (BMD1-BMD5) koşullarını sağladığını görelim:

i) $x = \overline{0} \Rightarrow \theta(\overline{0},\overline{0}) = \theta(\overline{0},\left|\overline{0}\right|) = 1.(BMD1)$

ii) $x \notin SA\breve{G}$ olsun.

$x \succ \overline{0} \Rightarrow P(x) = 1$ ve $\theta(x,y) \leq E(|x|,y) = E(x,y)$

$\Rightarrow \theta(x,y) * P(x) \leq E(x,y).$

$x \preceq \overline{0} \Rightarrow P(x) = 0$

$\Rightarrow \theta(x,y) * P(x) = \theta(x,y) * 0 = 0 \leq E(x,y).(BMD2)$

iii) $x \in SA\breve{G} \Rightarrow |x| = x$ ve $\theta(x,y) \leq E(|x|,y) = E(x,y)$. $(BMD3)$

iv) $x \notin SA\breve{G}$ olsun.

$-x \succ \overline{0} \Rightarrow P(-x) = 1$ ve $\theta(x,y) \leq E(|x|,y) = E(-x,y)$

$\Rightarrow \theta(x,y) * P(-x) \leq E(-x,y).$

$-x \preceq \overline{0} \Rightarrow P(-x) = 0$

$\Rightarrow \theta(x,y) * P(-x) = \theta(x,y) * 0 = 0 \leq E(-x,y).(BMD4)$

v) $x \in SA\breve{G} \Rightarrow |x| = -x$ ve $\theta(x,y) \leq E(|x|,y) = E(-x,y)$. $(BMD5)$ ■

Teorem 6.3 *$F = (X, \oplus, \odot)$ $\preceq$ ile tam sıralanmış bir klasik bir cisim olsun. $x \in X$ için $\overline{0}$, ve $-x$, sırasıyla "$\oplus$" işlemine göre cismin sıfır elemanını ve x'in tersini göstersin E, X üzerinde bir $*$-bulanık eşitlik bağıntısı ve P, X kümesi üzerinde N güçlü değillemesiyle,*

$$P(x) = \begin{cases} 0 & , x \preceq \overline{0} \\ N(E(x,\overline{0})) & , \text{aksi halde} \end{cases}, \forall x \in X,$$

formunda yazılabilen bir E-pozitif sınıf olsun. φ bulanık fonksiyonu X kümesi üzerinde P'ye göre bir bulanık mutlak değer fonksiyonu olsun. Bu durumda $\ker(\varphi)$, *X kümesi üzerinde $\preceq$ bağıntısına karşılık gelen klasik mutlak değer fonksiyonudur.*

Kanıt. i) $x = \overline{0} \overset{(BMD1)}{\Rightarrow} \varphi(\overline{0},\overline{0}) = 1 \Rightarrow \left|\overline{0}\right| = \overline{0}.$

ii) $x \succ \overline{0}$ ve $x \in SA\breve{G} \overset{(BMD3)}{\Rightarrow} \varphi(x,y) \leq E(x,y)$. Buradan,

$\varphi(x,y) = 1 \Rightarrow E(x,y) = 1 \Rightarrow x = y \Rightarrow |x| = x.$

iii) $x \succ \overline{0}$ ve $x \notin SA\breve{G} \overset{(BMD2)}{\Rightarrow} \varphi(x,y) * P(x) \leq E(x,y)$ ve $P(x) = 1$ olduğundan,

$\varphi(x,y) = 1 \Rightarrow E(x,y) = 1 \Rightarrow x = y \Rightarrow |x| = x.$

iv) $x \prec \overline{0}$ ve $-x \notin SA\breve{G} \overset{(BMD4)}{\Rightarrow} \varphi(x,y) * P(-x) \leq E(-x,y)$ ve $P(-x) = 1$ olduğundan,

$\varphi(x,y) = 1 \Rightarrow E(-x,y) = 1 \Rightarrow -x = y \Rightarrow |x| = -x.$

v) $x \prec \overline{0}$ ve $-x \in SA\breve{G} \overset{(BMD5)}{\Rightarrow} \varphi(x,y) \leq E(-x,y)$. Buradan,

$\varphi(x,y) = 1 \Rightarrow E(-x,y) = 1 \Rightarrow -x = y \Rightarrow |x| = -x.$ ■

6.2. Bulanık Mutlak Değerin Özellikleri

Bu bölümde mutlak değer fonksiyonunun klasik teorideki özelliklerinden bazılarını bulanık dilde yazarak bulanık mutlak değer fonksiyonunun bunları nasıl sağladığını inceleyeceğiz. Önceki bölümde verilen Bulanık Mutlak Değer fonksiyonu tanımındaki koşullarda x'leri $-x$'lerle değiştirecek olursak fonksiyonun sağladığı denk özellikleri aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

Sonuç 6.4 *$F = (X, \oplus, \odot)$ $\preceq$ ile tam sıralanmış klasik bir cisim olsun. $x \in X$ için $\overline{0}$, ve $-x$, sırasıyla "$\oplus$" işlemine göre cismin sıfır elemanını ve x'in tersini göstersin E, X üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısı ve P, X kümesi üzerinde, bir E-pozitif sınıf olsun. X'ten X'e bir φ E'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyonu eğer aşağıdaki özellikleri sağlarsa φ bulanık fonksiyonu P'ye göre bulanık mutlak değer fonksiyonudur:*

BMD1 : $\varphi(\overline{0},\overline{0}) = 1,$

BMD2′: $-x \notin SA\breve{G} \Rightarrow \varphi(-x,y) * P(-x) \leq E(-x,y), \forall x,y \in X,$

BMD3′: $-x \in SA\breve{G} \Rightarrow \varphi(-x,y) \leq E(-x,y), \forall x,y \in X,$

BMD4′: $x \notin SA\breve{G} \Rightarrow \varphi(-x,y) * P(x) \leq E(x,y), \forall x,y \in X,$

BMD5′: $x \in SA\breve{G} \Rightarrow \varphi(-x,y) \leq E(x,y), \forall x,y \in X.$

Klasik Teoride bir $F = (X, \oplus, \odot)$ cismi üzerindeki mutlak değer fonksiyonu $|x| = |-x|, \forall x \in X$, özelliğine sahiptir. Bu özellik φ, $F = (X, \oplus, \odot)$ cismi üzerinde bir bulanık mutlak değer fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

Teorem 6.5 *$F = (X, \oplus, \odot)$ $\preceq$ ile tam sıralanmış bir klasik bir cisim olsun. $x \in X$ için $\overline{0}$, ve $-x$, sırasıyla "$\oplus$" işlemine göre cismin sıfır elemanını ve x'in tersini göstersin E, X üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısı ve P, X kümesi üzerinde, N güçlü değillemesiyle, (5.1) formunda yazılabilen bir E-pozitif sınıf olsun. φ, X kümesi üzerinde P'ye göre bir bulanık mutlak değer fonksiyonu olsun. Bu durumda φ, $\varphi(x, y) * \varphi(-x, z) \leq E(y, z), \forall x, y \in X$ özelliğini sağlar.*

Kanıt. i) $x = \overline{0}$ durumunda $-x = \overline{0}$ olacağından ve $\overline{0} \in SA\breve{G}$ olduğundan,
$\varphi(\overline{0}, y) \leq E(\overline{0}, y)$ ve $\varphi(\overline{0}, z) \leq E(\overline{0}, z)$ eşitsizliklerine taraf tarafa $*$ uygulayarak,
$\varphi(\overline{0}, y)*$ $\varphi(\overline{0}, z) \leq E(\overline{0}, y) * E(\overline{0}, z) \leq E(y, z)$ elde edilir.
ii) $x \succ \overline{0}$ ve $x \in SA\breve{G}$ olsun,
$\varphi(-x, y) \leq E(x, y)$ $(BMD5')$ ve
$\varphi(x, z) \leq E(x, z)$ $(BMD3)$ eşitsizliklerine taraf tarafa $*$ uygulayarak,
$\varphi(x, y) * \varphi(-x, z) \leq E(y, z)$ elde edilir.
iii) $x \succ \overline{0}$ ve $x \notin SA\breve{G}$ olsun, bu durumda $P(x) = 1$'dir. Bunu gözönünde bulundurarak;
$\varphi(x, y) * P(x) \leq E(x, y)$ $(BMD2)$ ve
$\varphi(-x, z) * P(x) \leq E(x, z)$ $(BMD4')$ eşitsizliklerinden,
$\varphi(x, y) * \varphi(-x, z) \leq E(y, z)$ eşitsizliği kolayca elde edilir.
iv) $x \prec \overline{0}$ ve $x \in SA\breve{G}$ olsun,
$\varphi(-x, z) \leq E(-x, z)$ $(BMD3')$ ve
$\varphi(x, y) \leq E(-x, y)$ $(BMD5)$ eşitsizliklerine taraf tarafa $*$ uygulayarak,
$\varphi(x, y) * \varphi(-x, z) \leq E(y, z)$ elde edilir.
v) Son olarak da $x \prec \overline{0}$ ve $x \notin SA\breve{G}$ olsun, bu durumda $P(-x) = 1$'dir. Bunu gözönünde bulundurarak;
$\varphi(x, y) * P(-x) \leq E(-x, y)$ $(BMD2)$ ve
$\varphi(-x, z) * P(-x) \leq E(-x, z)$ $(BMD4')$ eşitsizliklerinden,
$\varphi(x, y) * \varphi(-x, z) \leq E(y, z)$ eşitsizliği kolayca elde edilir. Böylece tüm durumlarda eşitsizliğin doğru olduğu görülür. ■

Tanım 6.6 *$F = (X, \oplus, \odot)$ klasik bir cisim, P bu cisimde bir bulanık pozitif sınıf olsun. $x \in X$ için $\overline{0}$, ve $-x$, sırasıyla "$\oplus$" işlemine göre cismin sıfır elemanını ve x'in tersini göstersin. X üzerindeki bir φ P'ye göre bulanık mutlak değer fonksiyonu aşağıdaki özelliği sağlıyorsa φ simetriktir diyeceğiz:*
$\varphi(x, y) = \varphi(-x, y)$, $\forall x, y \in X$.

Örnek 6.7 *$F=(X,\oplus,\odot)$ $\preceq$ ile tam sıralanmış klasik bir cisim olsun. $x\in X$ için $\bar{0}$, ve $-x$, sırasıyla "$\oplus$" işlemine göre cismin sıfır elemanını ve x'in tersini göstersin E, X üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısı ve P, X kümesi üzerinde, N güçlü değillemesiyle,*

$$P(x)=\begin{cases}0 & ,x\preceq\bar{0}\\ N(E(x,\bar{0})) & ,\textit{aksi halde}\end{cases},\ \forall x\in X,$$

formunda yazılabilen bir E-pozitif sınıf olsun. $|.|$ X üzerindeki klasik mutlak değer olmak üzere, $k\in(0,1]$ için,

$$\varphi(x,y)=\left.\begin{cases}k.E(|x|,y) & ,E(|x|,y)\neq 1\\ 1 & ,E(|x|,y)=1\end{cases}\right\}\forall x,y\in X$$ *şeklinde tanımlanırsa, φ P'ye göre bir bulanık mutlak değerdir ve,*

$\varphi(x,y)=\varphi(-x,y)$, $\forall x,y\in X$ olur.

Bundan böyle $\mathbf{1}_{\preceq}(x,y)$ ile aşağıdaki gibi tanımlanan iki değerli fonksiyonu göstereceğiz:

$$\mathbf{1}_{\preceq}(x,y)=\begin{cases}1 & ,x\preceq y\\ 0 & ,\textit{aksi halde}\end{cases},\forall x,y\in X.$$

Bu fonksiyon aslında $\preceq$ bağıntısının karakteristik fonksiyonunun ifadesidir.

Tanım 6.8 *$F=(X,\oplus,\odot)$ $\preceq$ ile tam sıralanmış klasik bir cisim, P bu cisimde bir bulanık pozitif sınıf ve $|.|$ X üzerindeki klasik mutlak değer olsun. φ, X kümesi üzerinde tanımlı bir P'ye göre bulanık mutlak değer fonksiyonu olmak üzere aşağıda tanımlanan φ' fonksiyonuna sağ tip P'ye göre bulanık mutlak değer fonksiyonu diyeceğiz:*

$\varphi'(x,y)=\varphi(x,y)\wedge\mathbf{1}_{\preceq}(|x|,y)$, $\forall x,y\in X$.

Tanım 6.9 *$F=(X,\oplus,\odot)$ $\preceq$ ile tam sıralanmış klasik bir cisim, P bu cisimde bir bulanık pozitif sınıf ve $|.|$ X üzerindeki klasik mutlak değer olsun. φ, X kümesi üzerinde tanımlı bir bulanık P'ye göre mutlak değer fonksiyonu olmak üzere aşağıda tanımlanan φ'' fonksiyonuna sol tip P'ye göre bulanık mutlak değer fonksiyonu diyeceğiz:*

$\varphi''(x,y)=\varphi(x,y)\wedge\mathbf{1}_{\preceq}(y,|x|)$, $\forall x,y\in X$.

Teorem 6.10 *Yukarıdaki şekilde tanımlanan φ' ve φ'' fonksiyonları birer bulanık mutlak değer fonksiyonudur.*

Kanıt. $\varphi'(x,y) \leq \varphi(x,y), \forall x,y \in X$ ve $\varphi''(x,y) \leq \varphi(x,y), \forall x,y \in X$ olduğundan φ' ve φ'''nün E'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyon olduğunu göstermek yeterlidir.
φ bir kuvvetli bulanık fonksiyon olduğundan dolayı $\forall x \in X$ için $\varphi(x,y) = 1$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. Teorem (6.3)'ün ispatından görüleceği gibi $\varphi(x,y) = 1 \Rightarrow y = |x|$'tir. Bu durumda $\mathbf{1}_{\preceq}(|x|, y) = \mathbf{1}_{\preceq}(|x|, |x|) = 1$ ve $\mathbf{1}_{\preceq}(y, |x|) = \mathbf{1}_{\preceq}(|x|, |x|) = 1$ elde edilir. Böylece,
$\forall x \in X, \exists y \in X \ni \varphi'(x,y) = \varphi(x,y) \wedge \mathbf{1}_{\preceq}(|x|, y) = 1 \wedge 1 = 1$ ve
$\forall x \in X, \exists y \in X \ni \varphi''(x,y) = \varphi(x,y) \wedge \mathbf{1}_{\preceq}(y, |x|) = 1 \wedge 1 = 1$ olur ki bu da φ' ve φ'' için kuvvetli bulanık fonksiyon olmanın ilk koşuludur.
Güçlü bulanık fonksiyonların ikinci koşulu için φ bir E'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyon olduğundan dolayı,
$\varphi(x,y) * \varphi(x',y') * E(x,x') \leq E(y,y'), \forall x,y,x',y' \in X$ eşitsizliğini sağlar bunu $\varphi'(x,y) \leq \varphi(x,y), \forall x,y \in X$ ve $\varphi''(x,y) \leq \varphi(x,y), \forall x,y \in X$ eşitsizlikleri ile birleştirirsek,
$\varphi'(x,y) * \varphi'(x',y') * E(x,x') \leq E(y,y'), \forall x,y,x',y' \in X$ ve
$\varphi''(x,y) * \varphi''(x',y') * E(x,x') \leq E(y,y'), \forall x,y,x',y' \in X$ elde edilir ve ispat biter ■

Önerme 6.11 *$F = (X, \oplus, \odot) \preceq$ ile tam sıralanmış klasik bir cisim ve $|.|$ X üzerindeki klasik mutlak değer olsun. φ, X kümesi üzerinde tanımlı bir bulanık mutlak değer fonksiyonu olmak üzere φ simetrikse sağ tip bulanık mutlak değer fonksiyonu φ' simetriktir.*

Kanıt. $\varphi'(x,y) = \varphi(x,y) \wedge \mathbf{1}_{\preceq}(|x|, y)$, $\forall x,y \in X$
$= \varphi'(x,y) = \varphi(-x,y) \wedge \mathbf{1}_{\preceq}(|x|, y)$, ($\varphi$'nin simetrikliğini kullanarak),
$= \varphi'(x,y) = \varphi(-x,y) \wedge \mathbf{1}_{\preceq}(|-x|, y)$ ($|.|$'nin özelliğinden yararlanarak),
$= \varphi'(-x,y)$ (tanımdan). ■

Not 6.12 *Aynı özelliğin sol tip bulanık mutlak değer fonksiyonu için de geçerli olduğu ıspatta φ' yerine φ'' yazılarak görülebilir.*

6.3. Bulanık Üçgen Eşitsizliği

Klasik teoride mutlak değer fonksiyonunun sağladığı en önemli özelliklerden birisi de üçgen eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik bulanık anlamda aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

Tanım 6.13 *$F = (X, \oplus, \odot)$ $\preceq$ ile tam sıralanmış klasik bir cisim, E, X üzerinde $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun $\widetilde{\precsim}$ bir E-sıralama bağıntısı, φ, X üzerinde bir bulanık mutlak değer fonksiyonu olsun. φ fonksiyonu aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa, bulanık üçgen eşitsizliğini sağar denir:*
$\varphi(x,a) * \varphi(y,b) * \varphi(x \oplus y, c) \leq \widetilde{\precsim}(c, a \oplus b), \forall a, b, c, x, y \in X.$

Teorem 6.14 *$F = (X, \oplus, \odot)$ $\preceq$ ile tam sıralanmış klasik bir cisim ve $|.|$ X üzerindeki klasik mutlak değer olsun. E, X üzerinde $\preceq$ ile uyumlu ve $\oplus$'ya göre değişmeyen bir $*$-bulanık denklik bağıntısı, $\widetilde{\precsim}$,*
$\widetilde{\precsim}(x,y) = \begin{cases} 1 & , x \preceq y \\ E(x,y) & , \text{aksi halde} \end{cases}$ *, $\forall\, x, y \in X$ şeklinde tanımlı E-sıralama bağıntısı ve P, X kümesi üzerinde, N güçlü değillemesiyle, (5.1) formunda yazılabilen bir E-pozitif sınıf olsun.*
φ, X üzerinde P'ye göre bir bulanık mutlak değer fonksiyonu olmak üzere, φ', φ'den türetilen sağ tip P'ye göre bulanık mutlak değer fonksiyonu ise φ' bulanık üçgen eşitsizliğini sağlar.

Kanıt. $\varphi'(x,a) * \varphi'(y,b) * \varphi'(x \oplus y, c) \leq \widetilde{\precsim}(c, a \oplus b), \forall a, b, c, x, y \in X$ eşitsizliğini görmek için,
$|x| \preceq a$, $|y| \preceq b$, $|x \oplus y| \preceq c$ ve $a \oplus b \prec c$ durumunu incelemek yeterlidir, diğer durumlarda ya eşitsizliğin sol tarafı sıfır ya da sağ tarafı bir değerini alacaktır.
$|x| \preceq a$ ve $|y| \preceq b$ olduğundan,
$|x \oplus y| \preceq |x| \oplus |y| \preceq a \oplus b \prec c$ dir.
$x \oplus y \succeq \bar{0} \Rightarrow |x \oplus y| = x \oplus y$ ve ($BMD2$ veya $BMD3$ sağlanacağından)
$\varphi'(x \oplus y, c) \leq E(x \oplus y, c)$ olur, E 'nin $\preceq$ uyumluluğundan,
$E(x \oplus y, c) \leq E(c, a \oplus b)$ yazabiliriz. Diğer taraftan,
$\widetilde{\precsim}(c, a \oplus b) = E\ (c, a \oplus b)$ olduğundan,
$\varphi'(x \oplus y, c) \leq E(x \oplus y, c) \leq E(c, a \oplus b) = \widetilde{\precsim}(c, a \oplus b)$ elde edilir.
$x \oplus y \prec \bar{0} \Rightarrow |x \oplus y| = -(x \oplus y)$ ve ($BMD4$ veya $BMD5$ sağlanacağından)
$\varphi'(x \oplus y, c) \leq E(-(x \oplus y), c)$ olur, E 'nin $\preceq$ uyumluluğundan,
$\varphi'(x \oplus y, c) \leq E(-(x \oplus y), c) \leq E(c, a \oplus b) = \widetilde{\precsim}(c, a \oplus b)$ elde edilir. ■

Teorem 6.15 *$F = (X, \oplus, \odot)$ $\preceq$ ile tam sıralanmış klasik bir cisim ve $|.|$ X üzerindeki klasik mutlak değer olsun. E, X üzerinde $\preceq$ ile uyumlu ve $\oplus$'ya göre değişmeyen bir $*$-bulanık denklik bağıntısı, $\widetilde{\preccurlyeq}$,*

$$\widetilde{\preccurlyeq}(x,y) = \begin{cases} 1 & , x \preceq y \\ E(x,y) & , \textit{aksi halde} \end{cases} ,\forall\, x, y \in X$$ *şeklinde tanımlı E-sıralama bağıntısı ve P, X kümesi üzerinde, N güçlü değillemesiyle, (5.1) formunda yazılabilen bir E-pozitif sınıf olsun.*

φ, X üzerinde bir P'ye göre bulanık mutlak değer fonksiyonu olmak üzere, φ'', φ'den türetilen sol tip P'ye göre bulanık mutlak değer fonksiyonu ise φ'' bulanık üçgen eşitsizliğini sağlar.

Kanıt. $\varphi''(x,a) * \varphi''(y,b) * \varphi''(x \oplus y, c) \leq \widetilde{\preccurlyeq}(c, a \oplus b), \forall a, b, c, x, y \in X$ eşitsizliğini görmek için,

$a \preceq |x|$, $b \preceq |y|$, $c \preceq |x \oplus y|$ ve $a \oplus b \prec c$ durumunu incelemek yeterlidir, diğer durumlarda ya eşitsizliğin sol tarafı sıfır ya da sağ tarafı bir değerini alacaktır.

Bu durumda elimizde,

$a \oplus b \prec c \preceq |x \oplus y| \preceq |x| \oplus |y|$ eşitsizliği vardır. Diğer taraftan (BMD1-BMD5) koşulları gereği $\varphi''(x,y) \leq E(|x|, y)$ özelliğini de göz önünde bulundurarak aşağıdaki gibi devam edebiliriz:

$\varphi''(x,a) * \varphi''(y,b) * \varphi''(x \oplus y, c) \leq E(|x|, a) * E(|y|, b) * E(|x \oplus y|, c)$

$\leq E(|x|, a) * E(|y|, b)$, E'nin $\oplus$-değişmezliğini ve $*$-geçişliliğini devreye sokarak,

$E(|x|, a) * E(|y|, b) = E(|x| \oplus -|x|, a \oplus -|x|) * E(|y| \oplus -b, b \oplus -b)$

$= E(0, a \oplus -|x|) * E(|y| \oplus -b, 0) \leq E(a \oplus -|x|, |y| \oplus -b)$

$= E(a \oplus -|x| \oplus (|x| \oplus b), |y| \oplus -b \oplus (|x| \oplus b)) = E(a \oplus b, |y| \oplus |x|)$, olduğunu görür ve son olarak E'nin $\preceq$ ile uyumlu olmasından faydalanarak,

$E(a \oplus b, |y| \oplus |x|) \leq E(c, a \oplus b) = \widetilde{\preccurlyeq}(c, a \oplus b)$, olduğunu gözler ve ispatı bitiririz. ■

7. BULANIK METRİK

Bulanık metrik yaklaşımları içerisinde literatürde üzerinde en çok çalışılmış olanı tanımı George ve Veeramani tarafından aşağıdaki gibi verilmiş olandır:

Tanım 7.1 *(George ve Veeramani 1994) X bir küme, $*$ sürekli bir t-norm olmak üzere $M : X^2 \times (0, \infty) \to [0, 1]$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa (George-Veeramani anlamında) bulanık metrik adını alır:*
GV1: $M(x, y, t) > 0$,
GV2: $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,
GV3: $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
GV4: $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$,
GV5: $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \to [0, 1]$ *süreklidir,* $\forall x, y, z \in X$ *ve* $\forall t, s > 0$.

Bu tanım aslında önceden verilmiş bir tanımın (Kramosil ve Michalek 1975) küçük bir modifikasyonudur. Şöyle ki sözü geçen ilk tanımda M'nin tanım kümesi $X^2 \times [0, \infty)$ olarak alınmış ve (GV1) koşulu yerine $M(x, y, 0) = 0, \forall x, y \in X$ koşulu seçilmiştir. Bu tanımların çıkış noktası istatistiksel metriklerdir (Scweizer ve Sklar 1960) dolayısıyla bir $M(x, y, t)$ değerini x ile y arasındaki uzaklığın t olmasının doğruluk değeri olarak yorumlamak mümkün değildir. Klasik metriğin bir genellemesi gözüyle bakılacak olursa (GV2) koşulu anlam taşımamaktadır, ayrıca (GV4) koşulu da klasik üçgen eşitsizliğinin bir genellemesi değildir. Diğer taraftan konuyla ilgili yapılan çalışmalar incelenecek olursa George-Veeramani anlamında bulanık metrikten yola çıkılarak klasik topolojiler elde edilmiş ve çalışılmıştır. Bu çalışmaların en önemli sonuçlarından biri de şudur (Gregori ve Romaguera 2000): George-Veeramani anlamındaki her bulanık metrikten yola çıkılarak elde edilen klasik topoloji metriklenebilirdir ve bu metrikten $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ formülüyle elde edilen ve George-Veeramani anlamında standart bulanık metrik adı verilen bulanık metrik aracılığıyla tekrar elde edilen klasik topoloji ilk topoloji ile aynıdır. Bu ise George-Veeramani anlamında her bulanık metriğin aslında bir metrikle elde edilecek bir George-Veeramani anlamında standart bulanık metrik ile denk olduğunu göstermekte ve teoriyi topolojik anlamda fakirleştirmektedir.

Bizim bu bölümdeki amacımız yukarıda tanıttığımız yaklaşımdan farklı olarak çıkış noktası klasik metrik olan bir çok-değerli metrik tanımlayıp bunu kullanarak bulanık limit kavramını öne sürmek ve bulanık topoloji ile olan ilişkisini incelemektir. Bunun için aşağıdaki tanımı öneriyoruz:

Tanım 7.2 *E, $\mathbb{R}$ üzerinde $\leq$ ile uyumlu bir $*$-bulanık eşitlik, $\widetilde{\preccurlyeq}$ $\mathbb{R}$ üzerinde E-sıralama bağıntısı, F, $X \times X$ üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun. δ, $X \times X$'ten $\mathbb{R}$'ye tanımlı bir F ve E'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyon olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bir bulanık metriktir:*

BM1: $r < 0 \Rightarrow \delta(x, y, r) < 1$, $\forall x, y \in X$,

BM2: $\delta(x, y, r) = \delta(y, x, r)$, $\forall x, y \in X$, $\forall r \in \mathbb{R}$,

BM3: $\delta(x, y, 0) = 1 \Longleftrightarrow x = y$, $\forall x, y \in X$,

BM4: $\delta(x, y, a) * \delta(y, z, b) * \delta(x, z, c) \leq \widetilde{\preccurlyeq}(c, a + b), \forall x, y, z \in X, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
$(X, \delta, E, F, \widetilde{\preccurlyeq})$ beşlisine bulanık metrik uzay denir.

Teorem 7.3 *E, $\mathbb{R}$ üzerinde $\leq$ ile uyumlu bir $*$-bulanık eşitlik, E', $X \times X$ üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntıs ve $\widetilde{\preccurlyeq}$ $\mathbb{R}$ üzerinde*
$\widetilde{\preccurlyeq}(x, y) = \begin{cases} 1 & , x \leq y \\ E(x, y) & , \text{aksi halde} \end{cases}$ *$, \forall\ x, y \in \mathbb{R}$ formulüyle verilen E-sıralama bağıntısı olsun. δ, X kümesi üzerinde bir bulanık metrikse $\ker(\delta)$ X üzerinde bir metriktir.*

Kanıt. $\delta(x, y, r) = 1 \Leftrightarrow d(x, y) = r$, $\forall x, y \in X$ şeklinde tanımlı d fonksiyonunun metrik olduğunu göstermeliyiz.
δ E' ve E'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyon olduğundan $\forall x, y \in X$ için $\delta(x, y, r) = 1$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{R}$ vardır. Üstelik E ayrık olduğundan bu r sayısı tektir.
$x, y \in X$ için $d(x, y) = r$ olsun.
(i) BM1 koşulundan $r \geq 0$ olduğu açıktır.
(ii) BM2 koşulundan $d(y, x) = r$ olduğu da kolayca görülebilir.

(iii) BM3 koşulu ise basitçe $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$ denkliğini verir.
(iv) Üçgen eşitszliğini görmek için $d(x,y)=a$, $d(y,z)=b$ ve $d(x,z)=c$ olsun, BM4 koşulundan $\widetilde{\preccurlyeq}(c,a+b)=1$ elde edilir ki bu da $c \leq a+b$ anlamına gelir bu da ispatı bitirir. ■

Aşağıdaki teoremde klasik bir metrik uzaydan yola çıkılarak bir bulanık metriğin nasıl inşaa edilebileceği görülmektedir.

Teorem 7.4 *(X,d) bir metrik uzay, E, $\mathbb{R}$ üzerinde $\leq$ ile uyumlu bir $*$-bulanık eşitlik bağıntısı ve $\widetilde{\preccurlyeq}$ $\mathbb{R}$ üzerinde*
$\widetilde{\preccurlyeq}(x,y) = \begin{cases} 1 & , x \leq y \\ E(x,y) & , \textit{aksi halde} \end{cases}$ *,$\forall\ x,y \in \mathbb{R}$ formulüyle verilen E-sıralama bağıntısı, F, $X \times X$ üzerinde*
$F((x,y),(x',y')) = E(d(x,y),d(x',y')), \forall x,y,x',y' \in X$, şeklinde tanımlı $*$-bulanık denklik bağıntısı olsun.
$\delta'(x,y,r) = E(d(x,y),r) \wedge \mathbf{1}_{\leq}(d(x,y),r), \forall x,y \in X, \forall r \in \mathbb{R}$ formülüyle verilen δ' fonksiyonu bir bulanık metriktir.

Kanıt. Öncelikle δ''nın bir E ve F'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyon olduğunu göstermeliyiz:
(F.1): $x,y \in X$ ve $d(x,y)=m$ olsun. δ''nın tanımından $\delta'(x,y,m) = E(d(x,y),m) = E(m,m) = 1$ olacağı görülür.
(F.2): $\delta'(x,y,r) * \delta'(x',y',r') * F((x,y),(x',y')) \leq E(r,r')$ olduğunu görmeliyiz.
$[E(d(x,y),r) \wedge \mathbf{1}_{\leq}(d(x,y),r)] * [E(d(x',y'),r') \wedge \mathbf{1}_{\leq}(d(x',y'),r')] * E(d(x,y),d(x',y'))$
$\leq E(d(x,y),r) * E(d(x',y'),r') * E(d(x,y),d(x',y'))$
$\leq E(r,d(x',y')) * E(d(x',y'),r')$
$\leq E(r,r')$
Geriye δ''nın BM1-BM4 koşullarını sağladığını göstermek kalır:
BM1: $r<0$ olsun. $\mathbf{1}_{\leq}(d(x,y),r)=0$ $(\forall x,y \in X)$ olacağından $\delta'(x,y,r)=0$ olur.
BM2: $\delta'(x,y,r) = E(d(x,y),r) \wedge \mathbf{1}_{\leq}(d(x,y),r) = E(d(y,x),r) \wedge \mathbf{1}_{\leq}(d(y,x),r) = \delta'(y,x,r)$, δ' tanımınından ve d'nin simetrikliğinden elde edilir.
BM3: $\delta'(x,y,0) = 1 \overset{tanım}{\Leftrightarrow} E(d(x,y),0) \wedge \mathbf{1}_{\leq}(d(x,y),0) = 1 \Leftrightarrow E(d(x,y),0) = 1 \overset{E\ ayrık}{\Leftrightarrow} d(x,y)=0 \overset{d\ metrik}{\Leftrightarrow} x=y$.
BM4: $\delta'(x,y,a)*\delta'(y,z,b)*\delta'(x,z,c) \leq \widetilde{\preccurlyeq}(c,a+b), \forall x,y,z \in X, \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ olduğunu

görmek için $d(x,y) \leq a$, $d(y,z) \leq b$, $d(x,z) \leq c$ ve $a+b<c$ durumuna bakmamız yeterli olacaktır, aksi hallerde ya eşitsizliğin sol tarafı sıfıra ya da sağ tarafı bire eşit olacaktır.
Bu durumda üçgen eşitsizliği $\widetilde{\preccurlyeq}$'nin tanımını da göz önüne alarak,
$E(d(x,y),a)*E(d(y,z),b)*E(d(x,z),c) \leq E(c,a+b)$ şeklini alacağından bu eşitsizliğin sağlandığını görelim:
$x,y,z \in X$,ve $a,b,c \in \mathbb{R}$, $d(x,y) \leq a$, $d(y,z) \leq b$, $d(x,z) \leq c$ ve $a+b<c$ olduğunu hatırlayalım. d metriğinin üçgen eşitsizliğini sağladığını göz önüne alırsak,
$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ olduğundan,
$d(x,z) \leq a+b < c$ eşitsizliğini elde ederiz. E'nin $\leq$ ile uyumluluğunu devreye sokarsak
$E(d(x,z),c) \leq E(c,a+b)$ eşitsizliğini elde ederiz ki buradan,
$E(d(x,y),a)*E(d(y,z),b)*E(d(x,z),c) \leq E(d(x,z),c) \leq E(c,a+b)$ eşitsizliğini elde ederiz. ■

Reel sayılar kümesi üzerinde $d_{adi}(x,y) = |x-y|$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı fonksiyon ile mutlak değerden bir metrik elde edilebilmektedir. Bir bulanık mutlak değer fonksiyonundan hangi şartlar altında bir bulanık metrik elde edilebileceğini de aşağıdaki teoremde görüyoruz.

Teorem 7.5 *E, $\mathbb{R}$ üzerinde bir $*$-bulanık eşitlik bağıntısı E', $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ üzerinde, $E'((x,y),(x',y')) = E((x-y),(x'-y')), \forall x,y,x',y' \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı $*$-bulanık denklik bağıntısı ve $\widetilde{\preccurlyeq}$ $\mathbb{R}$ üzerinde, $\widetilde{\preccurlyeq}(x,y) = \begin{cases} 1 & , x \leq y \\ E(x,y) & , \text{aksi halde} \end{cases}$ $, \forall\ x,y \in \mathbb{R}$ formulüyle verilen E-sıralama bağıntısı olsun. φ, $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde $|.| = \ker(\varphi)$ özelliğini sağlayan bir bulanık mutlak değer fonksiyonu ve φ', φ'den türetilen sağ tip bulanık mutlak değer fonksiyonu olmak üzere $\delta(x,y,r) = \varphi'(x-y,r)$, $\forall x,y,r \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bulanık bağıntının bir bulanık metrik olması için gerek ve yeter koşul φ'nin simetrik olmasıdır.*

Kanıt. $(\Leftarrow)$: φ' fonksiyonunun E'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyon olduğunu teorem 6.10'dan biliyoruz. δ'nın da E' ve E'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyon olduğunu görelim:
(F.1): $x,y \in \mathbb{R}$ olsun, φ' fonksiyonu E'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyon olduğundan

$\varphi'(x-y,k)=1$ olacak şekilde bir $k\in\mathbb{R}$ vardır ve $\delta(x,y,k)=1$ olur.

(F.2): $\delta(x,y,r)*\delta(x',y',r')*E'((x,y),(x',y'))$

$=\varphi'(x-y,r)*\varphi'(x'-y',r')*E((x-y),(x'-y'))$ δ'nın ve E''nün tanımı gereği yazılabilir diğer taraftan φ' fonksiyonu E'ye göre kuvvetli bulanık fonksiyon olduğu için de aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$\varphi'(x-y,r)*\varphi'(x'-y',r')*E((x-y),(x'-y'))\leq E(r,r')$

Bundan sonra δ'nın (BM1-BM4) koşullarını sağladığını göstermek yetecektir.

(BM1): $r<0$ olsun. $\varphi'(x-y,r)=1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\varphi(x-y,r)=1$ olur ve φ'nin çekirdeği $\mathbb{R}$ üzerinde standart mutlak değeri verdiğinden $|x-y|=r<0$ olur bu da bir çelişkidir. Bu durumda $\delta(x,y,r)=\varphi'(x-y,r)<1$ eşitsizliği doğrudur.

(BM2): $\delta(x,y,r)=\varphi'(x-y,r)=\varphi'(y-x,r)=\delta(y,x,r)$ eşitliği φ'nin simetrik olması ve önerme 6.11 sayesinde elde edilir.

(BM3): φ'nin kuvvetli bulanık fonksiyon ve çekirdeğinin standart mutlak değer olmasından yararlanarak $\delta(x,y,0)=1\Leftrightarrow\varphi'(x-y,0)=1\Leftrightarrow|x-y|=0\Leftrightarrow x=y$ denkliği yazılabilir.

(BM4): $\delta(x,y,a)*\delta(y,z,b)*\delta(x,z,c)$

$=\varphi'(x-y,a)*\varphi'(y-z,b)*\varphi'(x-z,c)\leq\preccurlyeq(c,a+b)$'dir çünkü φ' bulanık üçgen eşitsizliğini sağlar.

$(\Rightarrow)$: $\delta(x,y,r)=\varphi'(x-y,r)$, $\forall x,y,r\in\mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bulanık bağıntı bir bulanık metrik olsun. BM2 koşulundan

$\varphi'(x-y,r)=\delta(x,y,r)=\delta(y,x,r)=\varphi'(y-x,r),\forall x,y,r\in\mathbb{R}$ elde edilir bu da φ''nün simetrik olduğu anlamına gelir ve bu φ'nin simetrik olmasını gerektirir. ■

Not 7.6 *Yukarıdaki teorem sağ tip bulanık mutlak değer fonksiyonu φ' yerine sol-tip bulanık mutlak değer fonksiyonu φ'' alındığında da doğrudur. İspat şeması değişmemektedir.*

8. BULANIK LİMİT

8.1. Bulanık Limitin Tanımı ve Temel Teoremler

Tezin bu son kısmında $\mathbb{R}^*$ ile $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ şeklinde tanımlı genişletilmiş reel ekseni göstereceğiz. Literatüre uygun olarak (Royden 1988), $\sup\emptyset = -\infty$ ve $\inf\emptyset = +\infty$ yazacağız.

Tanım 8.1 *E, $\mathbb{R}$ üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olmak üzere,*

$\forall y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (E(x, y)) = 0$ *oluyorsa E'ye sonsuzda kaybolandır denir.*

Tanım 8.2 *E, $\mathbb{R}$ üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısı olmak üzere, E^* ile göstereceğimiz E'nin $\mathbb{R}^*$ üzerine genişlemesi aşağıdaki gibidir:*

$$E^*(x, y) = \begin{cases} E(x, y) & , \quad x, y \in \mathbb{R} \\ 0 & , \quad x \in \{-\infty, +\infty\} \text{ veya } y \in \{-\infty, +\infty\} \end{cases}, \forall\, x, y \in \mathbb{R}^*.$$

(X, d) bir metrik uzay ve $(x_n) \subseteq X$ bir dizi olsun, $A^d_{(x_n),x}$ ile
$\{\varepsilon : \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n \geqslant n_\varepsilon, d(x_n, x) < \varepsilon\}$, kümesini belirteceğiz.
Böylelikle klasik analizde bir dizinin yakınsaması tanımı aşağıdaki gibi verilebilir:
$(x_n) \to x \Leftrightarrow \inf A^d_{(x_n),x} = 0$. Bu tanımın çok-değerli bir karşılığı aşağıdaki tanımda verilmiştir:

Tanım 8.3 *$(X, \widetilde{d}, E, F, \widetilde{\preccurlyeq})$ bir bulanık metrik uzay olmak üzere,*
$\widetilde{\lim}((x_n), x) = E^*(0, \inf\{\varepsilon : \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n \geqslant n_\varepsilon, \exists t_n < \varepsilon \ni \widetilde{d}(x_n, x, t_n) = 1\})$,
şeklinde tanımlı bulanık kümeyi bulanık limit fonksiyonu olarak isimlendireceğiz.

Bu tanım $d = \ker(\widetilde{d})$ olmak şartıyla $\widetilde{\lim}((x_n), x) = E^*(0, \inf A^d_{(x_n),x})$ olarak da ifade edilebilir. Bundan böyle kolaylık açısından $d = \ker(\widetilde{d})$ olduğu veya başka bir metrikle karışma olasılığı olmadığı sürece $A^d_{(x_n),x}$ yerine $A_{(x_n),x}$ yazacağız.

Burada $\widetilde{\lim}((x_n), x) \in [0,1]$ reel sayısı (x_n) dizisinin limitinin x olması derecesi olarak yorumlanabilir. Tanımın geçerliliği ile ilgili önemli bir kriter şudur: Bir dizi bir noktaya klasik anlamda yakınsıyorsa bulanık limit fonksiyonunun o noktada 1 değerini alması ve tersine bulanık limit fonksiyonu bir noktada 1 değerini alıyorsa dizinin o noktaya klasik anlamda yakınsaması beklenir. Sıradaki teorem bu kriterin yerine getirildiğini göstermektedir.

Teorem 8.4 *$(X, \widetilde{d}, E, F, \widetilde{\preccurlyeq})$ bulanık metrik uzayında $\widetilde{\preccurlyeq}$,*
$\widetilde{\preccurlyeq}(x,y) = \begin{cases} 1 & , x \preceq y \\ E(x,y) & , \text{aksi halde} \end{cases}$ *,$\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı ve $ker(\widetilde{d}) = d$ olsun. Bir $(x_n) \subseteq X$ dizisi için,*
$\widetilde{\lim}_{\widetilde{d}}((x_n), x) = 1 \Leftrightarrow \lim_d(x_n) = x$.

Kanıt. $\widetilde{\lim}_{\widetilde{d}}((x_n), x) = 1 \Leftrightarrow \inf\{\varepsilon : \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n \geqslant n_\varepsilon, \exists t_n < \varepsilon \ni \widetilde{d}(x_n, x, t_n) = 1\} = 0$, olduğu bulanık limit tanımından ve E'nin ayrık olmasından görülebilir. Diğer taraftan $\widetilde{\preccurlyeq}$'nın tanımı gereği d X üzerinde bir metriktir. Buradan hareketle,

$\inf\{\varepsilon : \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n \geqslant n_\varepsilon, \exists t_n < \varepsilon \ni \widetilde{d}(x_n, x, t_n) = 1\} = 0$
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n \geqslant n_\varepsilon, \exists t_n < \varepsilon \ni \widetilde{d}(x_n, x, t_n) = 1$
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ d(x_n, x) < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} {}_d\, d((x_n), x) = 0$
$\Leftrightarrow \lim_d(x_n) = x$. ■

Önerme 8.5 $\inf A_{(x_n),x} = r$ *olsun,* $A_{(x_n),x} = [r, \infty)$ *veya* $A_{(x_n),x} = (r, \infty)$ *eşitliği vardır.*

Kanıt. $\inf A_{(x_n),x} = r$ olduğundan $A_{(x_n),x} \subseteq [r, \infty)$ olduğu açıktır. İstenen sonucu elde etmek için, $(r, \infty) \subseteq A_{(x_n),x}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için; her $\delta > 0$ sayısı için $r + \delta \in A_{(x_n),x}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Olmayana ergi yöntemini kullanarak en az bir $\delta_0 > 0$ için $r + \delta_0 \notin A_{(x_n),x}$ varsayalım,

$r + \delta_0 \notin A_{(x_n),x} \Rightarrow \left[\forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_{\delta_0} \in \mathbb{N} \ni n_{\delta_0} \geqslant n,\ d(x_{n_{\delta_0}}, x) \geq r + \delta_0\right]$
$\Rightarrow \forall k \in [r - \delta_0, r + \delta_0],\ d(x_{n\delta_0}, x) \geq k$
$\Rightarrow [r - \delta_0, r + \delta_0] \cap A_{(x_n),x} = \emptyset$

Diğer taraftan $\inf A_{(x_n),x} = r$ olduğundan $(y_n) \to r$ olacak şekilde $(y_n) \subseteq A_{(x_n),x}$ dizisi vardır ancak bu
$(r - \delta_0, r + \delta_0) \cap A_{(x_n),x} = \emptyset$ olmasıyla çelişir, dolayısıyla her $\delta > 0$ sayısı için $r + \delta \in A_{(x_n),x}$ olur. ■

Tezdeki amacımız Reel ekseni bulanık araçlarla donatmak olduğu için bulanık limit tanımının özel olarak $X = \mathbb{R}$ ve $ker(\widetilde{d}) = d_{adi}$ durumunda verdiği sonuç aşağıdaki teoremde incelenmiştir.

Teorem 8.6 $(\mathbb{R}, \widetilde{d}, E, F, \widetilde{\preccurlyeq})$ *bulanık metrik uzayında,* E, $\mathbb{R}$ *üzerinde* $+$*'ya göre değişmeyen bir* $*$*-bulanık eşitlik,* $ker(\widetilde{d}) = d_{adi}$, *olsun. Bir* $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ *dizisi ve* $x \in \mathbb{R}$ *için,*
$\lim(x_n) = x \Rightarrow \widetilde{\lim}((x_n), y) = E(x, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Kanıt. $\lim(x_n) = x$ olduğunu varsayalım. İki durum söz konusudur:
i) $x = y$
Bu durumda,
$\widetilde{\lim}((x_n), y) = \widetilde{\lim}((x_n), x) \overset{teorem(8.4)}{=} 1 = E(x, y)$ olur.
ii) $x \neq y$
Bu durumda tanım gereği,
$\widetilde{\lim}((x_n), y) = E^*(0, \inf\{\varepsilon : \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n \geqslant n_\varepsilon, \exists t_n < \varepsilon \ni \widetilde{d}(x_n, y, t_n) = 1\})$'dir. Kolaylık açısından,
$\{\varepsilon : \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n \geqslant n_\varepsilon, \exists t_n < \varepsilon \ni \widetilde{d}(x_n, y, t_n) = 1\} = A$ yazarak,
$\inf\{A\} = |x - y|$ olduğunu görelim:
$\delta > 0$ ve $\varepsilon = |x - y| + \delta$ olsun, $\lim(x_n) = x$ olduğundan $\exists n_\delta \in \mathbb{N} \ni \forall n \geqslant n_\delta$, $d(x_n, x) < \delta$ olduğunu göz önünde bulunurarak,
$n \geqslant n_\delta$ için $t_n = d(x_n, y)$ olarak alındığında,
$d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(x, y) < \delta + |x - y|$ eşitsizliğinden $t_n < \varepsilon$ olduğunu görürüz.
Diğer taraftan $t_n = d(x_n, y)$ olduğundan,
$\widetilde{d}(x_n, y, t_n) = \widetilde{d}(x_n, y, d(x_n, y)) = 1$ olur ve böylece $\varepsilon \in A$ olduğu anlaşılır. Bu ise,
$\forall \delta > 0$, $\inf\{A\} \leq |x - y| + \delta$ olması demektir ve,
$\inf\{A\} \leq |x - y|$ eşitsizliği böylece elde edilir.
Diğer yöndeki eşitsizliği görebilmek için $\inf\{A\} < |x - y|$ olduğunu varsayalım.

$\inf\{A\} < r < |x-y|$ olacak şekilde $r \in \mathbb{R}$ seçildiğinde önerme 8.5 gereği $r \in A$'dır.
$r \in A \Rightarrow \exists n_r \in \mathbb{N} \ni \forall n \geqslant n_r, \exists t_n < r \ni \widetilde{d}(x_n, y, t_n) = 1$ olur bu ise,
$\forall n \geqslant n_r$, $t_n = d(x_n, y) < r$ anlamına gelir ve,
$\lim[d((x_n), y)] \leq r < |x-y|$ elde ederiz ancak $\lim[d((x_n), y)] = \lim |x_n - y| = |x-y|$'dir, bu çelişki
$\inf\{A\} \geq |x-y|$ olmasını gerektirir bu şekilde
$|x-y| \leq \inf\{A\} \leq |x-y| \Rightarrow \inf\{A\} = |x-y|$ olduğu görülür. Bunun sonucu olarak $|x-y| < \infty$ olduğundan,
$\widetilde{\lim}((x_n), y) = E(0, |x-y|)$ yazabilir ve E'nin toplamaya göre değişmeyen olmasını devreye sokarak, $|x-y|$'nin iki durumu için,
a) $\widetilde{\lim}((x_n), y) = E(0, x-y) = E(0+y, x-y+y) = E(y, x) = E(x, y)$,
b) $\widetilde{\lim}((x_n), y) = E(0, -x+y) = E(0+x, -x+y+x) = E(x, y)$ elde eder ve ispatı bitiririz. ■

Bu teorem bir x noktasına yakınsayan bir dizinin limitinin y olmasının doğruluk derecesinin y noktasının x noktasına benzerlik derecesine eşit olması şeklindeki beklentimizin tanım tarafından karşılandığını göstermektedir. Sıradaki iki sonuç klasik limitin sağladığı iki önemli özelliği çok-değerli olarak ifade edip sağlandıklarını göstermektedir.

Sonuç 8.7 $(\mathbb{R}, \widetilde{d}, E, F, \widetilde{\preccurlyeq})$ *bulanık metrik uzayında,* E, $\mathbb{R}$ *üzerinde* $+$*'ya göre değişmeyen bir* $*$*-bulanık eşitlik,* $ker(\widetilde{d}) = d_{adi}$*, olsun.* $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ *ve* $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$ *dizileri için* $\lim(x_n) = x$ *ve* $\lim(y_n) = y$ *olsun,*
$\widetilde{\lim}((x_n), a) * \widetilde{\lim}((y_n), b) \leq \widetilde{\lim}((x_n) + (y_n), a+b)$.

Kanıt. Teorem 8.6'yı kullanarak
$\widetilde{\lim}((x_n), a) * \widetilde{\lim}((y_n), b) = E(x, a) * E(y, b)$
$= E(x+y, a+y) * E(y+a, b+a)$
$\leq E(x+y, a+b) = \widetilde{\lim}((x_n) + (y_n), a+b)$. ■

Sonuç 8.8 $(\mathbb{R}, \widetilde{d}, E, F, \widetilde{\preccurlyeq})$ *bulanık metrik uzayında,* E, $\mathbb{R}$ *üzerinde* $+$*'ya göre değişmeyen bir* $*$*-bulanık eşitlik,* $ker(\widetilde{d}) = d_{adi}$*, olsun.* $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ *dizisi için,*
$\lim(x_n) = x \Rightarrow \widetilde{\lim}(k(x_n), y) = E(kx, y), \forall k \in \mathbb{R}$.

Kanıt. Teorem 8.6'yı kullancağız. $k \in \mathbb{R}$ olsun,
$\lim(x_n) = x \Rightarrow \lim kx_n = kx \Rightarrow \widetilde{\lim}(kx_n, y) = E(kx, y)$. ■

8.2. Bulanık Limitin Bulanık Topolojik Altyapısı

Tezin bu son kısmında bir (X,d) metrik uzayından bahsettiğimizde , E'nin, $\mathbb{R}$ üzerinde $\leq$ ile uyumlu bir $*$-bulanık eşitlik olduğu ve $\widetilde{\preccurlyeq}$'nın,
$\widetilde{\preccurlyeq}(x,y) = \begin{cases} 1 & , x \leq y \\ E(x,y) & , \text{aksi halde} \end{cases}$ $, \forall\ x,y \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı olduğu bir $(X, \widetilde{d}, E, F, \widetilde{\preccurlyeq})$ bulanık metrik uzayından hareket edilerek X üzerinde $d = \ker(\widetilde{d})$ yoluyla tanımlanmış bir metrik uzay kastedilecektir.

Önceki kısımdaki bulanık limit tanımında bir (X,d) metrik uzayından yola çıkarak noktalar arası uzaklığı ölçen d metriğini bu uzaklığı sıfırla karşılaştıran E benzerlik bağıntısıyla değiştirdik. Tanımladığımız bulanık limitin bulanık topoloji ile ilişkisini kurabilmek için ilerleyen kısımlarda bulanık limit tanımımızla Höhle ve Sostak tarafından tanımlanan limit fonksiyonlarının (Höhle ve Sostak 1999) ilişkisini inceleyeceğiz. Daha sonra yaptığımız tanımın Burgin tarafından ortaya atılan bulanık limit tanımını (Burgin 2000, Burgin ve Kalina 2005) bir özel hal olarak kapsadığını göstereceğiz. Bunu yapabilmek için ilk iş olarak benzerlik bağıntımızı X uzayına aktaracak bir araca ihtiyacımız olacaktır. Aşağıda bu aktarmanın nasıl yapılabileceğini göreceğiz.

Önerme 8.9 (X,d) *bir metrik uzay ve* E, $\mathbb{R}$ *üzerinde* $+$*'ya göre değişmeyen ve* $\leq$ *ile uyumlu ayrık bir* $*$*-bulanık eşitlik bağıntısı olsun.* $F_{E,d} : X \times X \to [0,1]$,
$F_{E,d}(x,y) = E[0, d(x,y)], \forall (x,y) \in X \times X$,
şeklinde tanımlı bulanık bağıntı X *üzerinde bir* $*$*-bulanık eşitlik bağıntısıdır.*

Kanıt. i) $F_{E,d}$'nin yansıma özelliği:
$F_{E,d}(x,x) = E[0, d(x,x)] = E(0,0) = 1.$
ii) $F_{E,d}$'nin simetri özelliği:
$F_{E,d}(x,y) = E[0, d(x,y)] = E[0, d(y,x)] = F_{E,d}(y,x), \forall (x,y) \in X \times X.$
iii) $F_{E,d}$'nin $*$-geçişliliği:
$F_{E,d}(x,y) * F_{E,d}(y,z) = E[0, d(x,y)] * E[0, d(y,z)]$
$= E[d(y,z), d(x,y) + d(y,z)] * E[0, d(y,z)]$ (E'nin $+$ işlemine göre değişmezliğinden)
$\leq E[0, d(x,y) + d(y,z)]$ (E'nin $*$ geçişliliğinden)

$\leq E[0, d(x,z)]$ (d'nin üçgen eşitsizliği özelliği ile E'nin $\leq$ uyumluluğunun birlikte kullanılmasından)
$= F_{E,d}(x,z)$.
iv) $F_{E,d}$'nin ayrık olma özelliği:
$F_{E,d}(x,y) = 1 \Rightarrow E[0, d(x,y)] = E[0, d(x,y)] = 1 \Rightarrow d(x,y) = 0$ (E ayrık olduğu için)
$\Rightarrow x = y$. ■

İhtiyaç duyacağımız için bu noktada bir tanım ve bir özellik hatırlatacağız.

Tanım 8.10 *(Royden, 1988) $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ bir dizi olmak üzere, bu dizinin lim-inf'i $\underline{\lim}(x_n)$ sembolü ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$\underline{\lim}(x_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k:k\geq n} x_k \right).$$

Önerme 8.11 *(Royden, 1988) $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ bir dizi ve $l \in \mathbb{R}$ olmak üzere,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \Rightarrow \underline{\lim}(x_n) = l \text{ gerektirmesi vardır.}$$

Aşağıdaki önermede bulanık eşitlik bağıntısının üzerinde ilave bir varsayımla bulanık limitin tanımının yeni bir ifadesini vereceğiz:

Önerme 8.12 (X,d) *bir metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve E, $\mathbb{R}$ üzerinde sonsuzda kaybolan ve $+$ işlemine göre değişmeyen bir $*$-bulanık eşitlik ve $E(0,.)$ fonksiyonu sürekli olsun,*
$$\widetilde{\lim}(x_n, l) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k:k\geq n} F_{E,d}(x_k, l) \right).$$

Kanıt. (X,d) bir metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve E, $\mathbb{R}$ üzerinde sonsuzda kaybolan $+$ işlemine göre değişmeyen bir $*$-bulanık eşitlik, $E(0,.)$ fonksiyonu sürekli olsun ve $F_{E,d}(x,y) = E[0, d(x,y)], \forall (x,y) \in X \times X$ ve $\widetilde{\lim}((x_n), l) = E^*(0, \inf A_{(x_n),l})$ tanımlarını göz önünde bulunduralım.

İki durum söz konusu olabilir:

i) $d((x_n), l)$ sınırlı değildir ki bu durumda,

$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, l) = \infty$ üstelik $E(0, .)$ fonksiyonu sürekli ve E sonsuzda kaybolan olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}(E[0, d(x_n, l)]) = E[0, \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, l)] = 0$ olduğu görülür. Diğer taraftan önerme 8.11 gereği,
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k:k\geq n} F_{E,d}(x_k, l)\right) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k:k\geq n} E[0, d(x_k, l)]\right) = \lim\limits_{n\to\infty}(E[0, d(x_n, l)]) = 0$ elde edilir.

Diğer taraftan $d((x_n), l)$ sınırlı olmadığından $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall n \geqslant n_\varepsilon, d(x_n, l) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir ε sayısı bulunamaz ve böylece,

$A_{(x_n),l} = \emptyset$ ve $\inf A_{(x_n),l} = +\infty$ olur ve E^*'ın tanımı gereği,

$\widetilde{\lim}(x_n, l) = E^*(0, \inf A_{(x_n),l}) = E^*(0, +\infty) = 0$ elde edilir.

ii) $d((x_n), l)$ sınırlıdır.

$l \in X$ ve $\inf A_{(x_n),l} = r$ olsun.

a) $r = 0$ kabul edelim, bu durumda $\widetilde{\lim}((x_n), l) = 1$'dir.

Şimdi $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k:k\geq n} F_{E,d}(x_k, l)\right) = 1$ olduğunu görelim; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ olduğunu göz önünde bulundurarak,

$\lim\limits_{n\to\infty}(E[0, d(x_n, l)]) = E[0, \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, l)] = E(0, 0) = 1$ olduğu görülür. Diğer taraftan önerme 8.11 gereği,
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k:k\geq n} F_{E,d}(x_k, l)\right) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k:k\geq n} E[0, d(x_k, l)]\right) = \lim\limits_{n\to\infty}(E[0, d(x_n, l)]) = 1$ elde edilir.

b) $r > 0$ olsun.

Önerme 8.5 gereği $A_{(x_n),l} = (r, +\infty)$ veya $[r, +\infty)$ olduğunu göz önünde bulunduralım.

Her $\delta > 0$ için $(r + \delta) \in A_{(x_n),l}$, olacaktır, bu nedenle,

$\exists n_\delta \in \mathbb{N}$, öyle ki, $\forall k \geq n_\delta, d(x_k, l) < r + \delta$, şimdi E'nin $\mathbb{R}$ üzerindeki sıralamayla uyumlu olması nedeniyle son eşitsizlik,

$E[0, d(x_k, l)] \geq E(0, r + \delta)$, olmasını gerektirir. Bu eşitsizlikten yararlanarak,
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k:k\geq n} F_{E,d}(x_k, l)\right) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k:k\geq n} E[0, d(x_k, l)]\right) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k:k\geq n} E[0, d(x_k, l)]\right)$
$\geq \inf\limits_{k:k\geq n_\delta} E[0, d(x_k, l)] \geq \inf\limits_{k:k\geq n_\delta} E(0, r + \delta) = E(0, r + \delta)$.
eşitsizliklerini elde edebiliriz. Diğer yandan $0 < \delta \leq r$ olacak şekilde seçilen her δ reel sayısı için $(r - \delta) \notin A_{(x_n),l}$ olmasından dolayı,

her $n \in \mathbb{N}$, için $n \leq k_n \in \mathbb{N}$, olacak şekilde bir k_n doğal sayısı vardır öyle ki $d(x_{k_n}, l) \geq r - \delta$, ki bu da aşağıdaki eşitsizliği gerektirir,

$E[0, d(x_{k_n}, l)] \leq E(0, r - \delta)$

$\Rightarrow \inf\limits_{k:k\geq n} E[0,d(x_k,l)] \leq E[0,d(x_{k_n},l)] \leq E(0,r-\delta)$, $(\forall n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k:k\geq n} E[0,d(x_k,l)]\right) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k:k\geq n} E[0,d(x_k,x)]\right) \leq E(0,r-\delta)$, böylece,

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k:k\geq n} F_{E,d}(x_k,l)\right) \leq E(0,r-\delta)$ elde edilir.

Şimdi elde ettiğimiz iki eşitsizliği birleştirerek aşağıdaki gözlemleri yapabiliriz,

her $0<\delta\leq r$ için,

$E(0,r+\delta) \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k:k\geq n} F_{E,d}(x_k,l)\right) \leq E(0,r-\delta)$,

$\overset{(E(0,.)\text{'ın sürekliliğinden})}{\Rightarrow} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k:k\geq n} F_{E,d}(x_k,l)\right) = E(0,r) = E^*(0,\inf A_{(x_n),l}) = \widetilde{\lim}((x_n),l)$.

■

Bu noktadan sonra tanımladığımız bulanık limit kavramının topolojik temellerini inceleyebilmek için $[0,1]$-değerli topolojiler (Höhle ve Sostak 1999) ile ilgili bazı kavramları hatırlayacağız, hemen ardından da bulanık limit kavramımızın Höhle ve Sostak tarafından tanımlanmış olan (Höhle ve Sostak 1999), $[0,1]$-değerli toplojilerin limit-fonksiyonları ile nasıl örtüştüğünü göstereceğiz.

X bir küme olmak üzere, bir $\tau \subseteq [0,1]^X$ kümesi Chang (Chang 1968) tarafından belirlenen aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X üzerinde $[0,1]$-değerli bir topolojidir.

FT1) $1_X \in \tau$ ve $1_\varnothing \in \tau$,

FT2) $f_1, f_2 \in \tau \Rightarrow f_1 \wedge f_2 \in \tau$,

FT3) K herhangi bir damga kümesi olmak üzere, $\forall i \in K,\ f_i \in \tau \Rightarrow \bigvee\limits_{i\in K} f_i \in \tau$.

Bu yapı (Höhle ve Sostak 1999) çalışmasında daha genel olarak, M ile bir integral, değişmeli cl-monoidin belirtildiği, M-değerli topolojiler adı altında incelenmiştir ve yukarıdaki tanım $M=[0,1]$ ve bağlacın minimum olarak seçildiği özel durumu ifade eder hale gelmiştir.

Bir X kümesinden ve X üzerinde bir E $*$-bulanık denklik bağınıtısından hareket ederek X üzerine bir $[0,1]$-değerli topoloji kondurmanın yolu klasik anlamda topolojik uzaylar ile ön-sıralı kümeler arasında bilinen ilişkilere (Johnstone 1982) dayandırılarak (Boixader vd 200b) ve (Demirci 2004) kaynaklarında aşağıdaki şekilde gösterilmiştir:

X bir küme ve E X üzerinde bir $*$-bulanık denklik bağıntısı ve $f: X \to [0,1]$ olsun, eğer

$f(x) * E(x,y) \leq f(y)$, $\forall x,y \in X$, ise f'ye E-genişletilebilir denir.

$\Gamma(X,E)$ ile göstereceğimiz tüm E-genişletilebilir bulanık kümesi X üzerinde bir $[0,1]$-değerli toplojidir.

X üzerindeki bir τ $[0,1]$-değerli topolojisine göre bir $[0,1]$-değerli kümenin içi aşağıdaki gibi verilmiştir:

$\mathcal{I}(f) = \bigvee\{g \in \tau : g \leq f\}, \forall f \in [0,1]^X$.

İç operatörü her $f, g \in [0,1]^X$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

IO1) $f \leq g \Rightarrow \mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}(g)$,

IO2) $\mathcal{I}(\mathcal{I}(f)) = \mathcal{I}(f)$,

IO3) $\mathcal{I}(1_X) = 1_X$,

IO4) $\mathcal{I}(f) \leq f$,

IO5) $\mathcal{I}(f) \wedge \mathcal{I}(g) = \mathcal{I}(f \wedge g)$.

$f \in \tau \Leftrightarrow \mathcal{I}(f) = f$, özelliği ile iç öperatörü verildiğinde $[0,1]$-değerli topoloji tanımlanmış olur.

$\mu_x(f) = [\mathcal{I}(f)](x), \forall f \in [0,1]^X$ şeklinde tanımlı fonksiyon iç operatörüne bir $x \in X$ noktasında karşılık gelen komşuluk filtresidir.

Topolojiden bağımsız olarak X üzerinde bir $[0,1]$-değerli filtre aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\nu : [0,1]^X \to [0,1]$ fonksiyonudur.

FF1) $\nu(1_X) = 1$,

FF2) $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \nu(f_1) \leq \nu(f_2), \forall f_1, f_2 \in [0,1]^X$,

FF3) $\nu(f_1) \wedge \nu(f_2) \leq \nu(f_1 \wedge f_2), \forall f_1, f_2 \in [0,1]^X$,

FF4) $\nu(1_\emptyset) = 0$.

μ_x bir $x \in X$ noktası için X üzerindeki bir τ $[0,1]$-değerli topolojisine karşılık gelen bir komşuluk filtresi ise μ_x, X üzerinde bir $[0,1]$-değerli filtredir.

Bir $(x_n) \subseteq X$ dizisine karşılık gelen $[0,1]$-değerli $\nu_{\mathcal{F}}$ Fréchet filtresi ise aşağıdaki gibidir:

$\nu_{\mathcal{F}}(f) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf\limits_{k:k \geq n} f(x_k) \right), \forall f \in [0,1]^X$.

Son olarak yukarıda tanımlanan araçlar yardımıyla Höhle ve Sostak'ın limit fonksiyonları aşağıdaki gibi verilmektedir (Höhle ve Sostak,1999):

$[\lim(\nu)](x) = \inf\limits_{f \in [0,1]^X} (\mu_x(f) \to \nu(f))$, bu tanım aşağıdaki gibi de ifade edilebilir,

$[\lim(\nu)](x) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid \forall f \in [0,1]^X : \mu_x(f) * \alpha \leq \nu(f)\}$ (Höhle 2005).

$[\lim(\nu)](x)$ reel sayısı "x'in ν $[0,1]$-değerli filtresinin bir limit noktası olmasının doğruluk derecesi ile μ_x komşuluk filtresinin ν filtresi tarafından kapsanmasının doğruluk derecesine eşittir" şeklinde yorumlanabilir.

Aşağıdaki teorem limit fonksiyonu ile benzerlik tabanlı bulanık limit fonksiyonunun reel eksen üzerindeki $*$-bulanık denklik bağıntısının bazı koşulları sağlaması durumunda çakıştığını ifade etmektedir.

Teorem 8.13 (X, d) *bir metrik uzay,* (x_n) *bu uzayda bir dizi ve* E, $\mathbb{R}$ *üzerinde sonsuzda kaybolan ve* $+$ *işlemine göre değişmeyen bir* $*$*-bulanık eşitlik ve* $E(0, .)$ *fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda,*
$\widetilde{\lim}((x_n), l) = [\lim(\nu_{\mathcal{F}})](l), \forall l \in X$ *eşitliği vardır.*
Burada $\lim(\nu_{\mathcal{F}})$, X *üzerindeki* $\Gamma(X, F_{E,d})$ $[0, 1]$*-değerli topolojisinde* (x_n) *dizisinin* $\nu_{\mathcal{F}}$, $[0, 1]$*-değerli Fréchet filtresine karşılık gelen limit fonksiyonudur.*

Kanıt. (x_n) X uzayında bir dizi olsun, önerme 8.12 sayesinde,
$\widetilde{\lim}((x_n), l) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf\limits_{k:k\geq n} F_{E,d}(x_k, l) \right)$ olduğunu biliyoruz.
Diğer taraftan $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf\limits_{k:k\geq n} F_{E,d}(x_k, l) \right) = [\lim(\nu_{\mathcal{F}})](l)$ eşitliği, akışı aşağıda verildiği şekilde Höhle tarafından ispatlanmıştır (Höhle 2005).
X üzerindeki $[0, 1]$-değerli $\Gamma(X, F_{E,d})$ topolojisini, bu topolojinin iç operatörü $\mathcal{I}_\Gamma$ ve (x_n) dizisinin $[0, 1]$-değerli Fréchet filtresi $\nu_{\mathcal{F}}$'yi göz önüne alalım.
$\nu_{\mathcal{F}}$'nin limit fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilmişti:
$[\lim(\nu_{\mathcal{F}})](l) = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid \forall f \in [0, 1]^X, \mu_l(f) * \alpha \leq \nu_{\mathcal{F}}(f)\}$.
Bu tanım (Höhle 2005)'te aşağıdaki gibi yeniden yazılmıştır:

$$[\lim(\nu_{\mathcal{F}})](l) = \sup\{\alpha \in [0, 1] | \forall g \in \Gamma(X, F_{E,d}), g(l) * \alpha \leq \nu_{\mathcal{F}}(g)\}. \qquad (8.1)$$

$g \in \Gamma(X, F_{E,d})$'nin $F_{E,d}$'ye göre genişletilebilir ve $*$'ın sol sürekli olmasından yararlanarak,
$g(l) * \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf\limits_{k:k\geq n} F_{E,d}(x_k, l) \right) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\inf\limits_{k:k\geq n} F_{E,d}(x_k, l) \right) * g(l) \right)$
$\leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf\limits_{k:k\geq n} (F_{E,d}(x_k, l) * g(l)) \right) \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k:k\geq n} g(x_k) = \nu_{\mathcal{F}}(g)$, eşitsizliği elde edilir ki bu da, $\widetilde{\lim}((x_n), l)$ sayısının (8.1) eşitliğindeki koşulu sağladığını gösterir ve dolayısıyla, $\widetilde{\lim}((x_n), l) \leq [\lim(\nu_{\mathcal{F}})](l)$ eşitsizliğini elde ederiz.
Ters yöndeki eşitsizlik için yine (Höhle 2005)'te aşağıdaki gibi devam edilmiştir:
$F_{E,d,x}(y) = F_{E,d}(x, y), \forall y \in X$, şeklinde tanımlı $F_{E,d,x}$'in $F_{E,d}$'ye göre genişletilebilir olmasını ve dolayısıyla $\Gamma(X, F_{E,d})$ topolojisinin bir elemanı olduğunu göz önüne

alalım. (8.1) eşitliğinde $g = F_{E,d,l}$ ve $\alpha = [\lim(\nu_{\mathcal{F}})](l)$ seçilidiğinde $F_{E,d,l}(l) = 1$ olmasından da yararlanarak aşağıdaki gibi devam edebiliriz,

$[\lim(\nu_{\mathcal{F}})](l) = F_{E,d,l}(l) * [\lim(\nu_{\mathcal{F}})](l) \leq \nu_{\mathcal{F}}(F_{E,d,l}) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k:k\geq n} F_{E,d,l}(x_k)\right)$

$= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k:k\geq n} F_{E,d}(l, x_k)\right) = \widetilde{\lim}_d((x_n), l).$

İki eşitsizliği birleştirirsek ispat biter. ■

Örnek 8.14 $(X, d) = (\mathbb{R}, |.|)$ *olsun. Çarpım t-normu* $*_P(x, y) = x \cdot y$, *için* $E(x, y) = \exp(-|x - y|)$*'nin* $\mathbb{R}$ *üzerinde bir* $*_P$*-eşitlik olduğu bilinmektedir, üstelik bu bağıntının* $+$*'ya göre değişmeyen,* $\leq$ *ile uyumlu ve sonsuzda kaybolan olduğu kolayca görülebilir.* $(x_n) = \frac{(-1)^n}{c}$ *dizisini bir* $c \in \mathbb{R}$ *için göz önüne alalım. Basit hesaplamalarla,*
$\widetilde{\lim}((x_n), l) = \min\{\exp(-\left|l - \frac{1}{c}\right|), \exp(-\left|l + \frac{1}{c}\right|)\}, \forall l \in \mathbb{R}$ *olduğunu görebiliriz.*
$c = 2$ *ve* $l = 0$, *seçilirse formülden elde edeceğimiz değer* $0,606$ *olur.*

Örnek 8.15 $(X, d) = (\mathbb{R}, |.|)$, *olsun, bu sefer Lukasiewiecz t-normu* $*_{Lckw}(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$, *için* $E(x, y) = \max(1 - |x - y|, 0)$*'nin* $\mathbb{R}$ *üzerinde bir bulanık eşitlik olduğu bilinmektedir. Diğer yandan yine bu bağıntının* $+$*'ya göre değişmeyen,* $\leq$ *ile uyumlu ve sonsuzda kaybolan olduğu kolayca görülebilir. Önceki örnekteki* $(x_n) = \frac{(-1)^n}{c}$ *dizisini göz önüne alırsak bu sefer,*
$\widetilde{\lim}((x_n), l) = \min\{\max(1 - \left|l - \frac{1}{c}\right|, 0), \max(1 - \left|l + \frac{1}{c}\right|, 0)\}, \forall l \in \mathbb{R}$ *olduğunu hesaplayabiliriz.*
$c = 2$ *ve* $l = 0$, *seçilirse formülden elde edeceğimiz değer* $0,5$ *olur. Bu farklılık Lukasiewiecz t-normunun reel sayıları daha ince ayırt etmesinden kaynaklanmaktadır.*

Son olarak tanımladığımız bulanık limit kavramının M.Burgin tarafından öne sürülen bulanık limit kavramından (Burgin 2000) daha genel olduğunu göstermek amacıyla Burgin'in çalışmasının ana hatlarını gözden geçireceğiz. Bunun için bundan sonra (X, d) bir metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi, $a \in X$, r negatif olmayan bir reel sayı belirtecektir.

Tanım 8.16 *(Burgin 2000)* $\forall k > 0$ *için* $\exists n_k \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_k$, $d(a, x_n) \leq r + k$ *özelliği sağlanıyorsa* a, (x_n)*'in bir r-limtidir denir ve* $a = r - \lim(x_n)$ *şeklinde gösterilir.*

Tanım 8.17 *(Burgin 2000) Bir* (x_n) *dizisinin limtinin* a *olmasının üst etkisi* $\delta(a = \lim(x_n))$ *ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:*
$\delta(a = \lim(x_n)) = inf\{r : a = r - \lim(x_n)\}.$

Tanım 8.18 *(Burgin 2000) Bir* (x_n) *dizisinin limtinin* a *olmasının üst ölçümü* $\mu(a = \lim(x_n))$ *ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:*
$\mu(a = \lim(x_n)) = \frac{1}{1+\delta(a=\lim(x_n))}$

Yukarıdaki şekilde tanımlanan μ ile $\widetilde{\lim_B}((x_n), l) = \mu(l = \lim(x_n))$ şeklinde tanımlanan bulanık bağıntı (x_n) dizisinin yakınsaklığının üst ölçümüdür veya Burgin anlamında bulanık limittir (Burgin 2005). Diğer taraftan Höhle Burgin'in tanımıyla ilgili aşağıdaki gözlemleri yapmıştır:

Önerme 8.19 *(Höhle 2005)* $* = *_L$ *olmak üzere* $E_d(x, y) = \frac{1}{1+d(x,y)}, \forall x, y \in X$ *bulanık* $*$*-eşitliği göz önüne alındığında,*
$\widetilde{\lim_B}((x_n), l) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k:k\geq n} E_d(l, x_k) \right), \forall l \in X.$

Önerme 8.20 *(Höhle 2005)* $* = *_L$ *olmak üzere* $E_d(x, y) = \frac{1}{1+d(x,y)}, \forall x, y \in X$ *bulanık* $*$*-eşitliği,* X *üzerindeki* $[0, 1]$*-değerli* $\Gamma(X, E_d)$ *topolojisi, bu topolojide* (x_n) *dizisinin* $[0, 1]$*-değerli Fréchet filtresi* $\nu_{\mathcal{F}}$ *ve bu filtrenin limit fonksiyonu* $\lim(\nu_{\mathcal{F}})$*göz önüne alındığında,*
$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k:k\geq n} E_d(l, x_k) \right) = [\lim(\nu_{\mathcal{F}})](l), \forall l \in X.$

Sonuç 8.21 (X, d) *bir metrik uzay* (x_n) *bu uzayda bir dizi ve* E, $\mathbb{R}$ *üzerinde* $* = *_L$ *olmak üzere* $E(x, y) = \frac{1}{1+|x-y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}$ *şeklinde tanımlı bir* $*$*-bulanık eşitlik bağıntısı olsun bu durumda bulanık limit tanımı M.Burgin'in tanımladığı yakınsaklığın üst ölçümü ile çakışır.*

Kanıt. $E(x, y) = \frac{1}{1+|x-y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}$, olsun, X üzerine,
$F_{E,d}(x, y) = E(0, d(x, y))$ şeklinde bir benzerlik inşaa edersek,

$F_{E,d}(x,y) = \frac{1}{1+d(x,y)}$, elde ederiz ve bu benzerliğin X üzerine kondurduğu $[0,1]$-değerli $\Gamma(X, E_d)$ topolojisi, bu topolojide (x_n) dizisinin $[0,1]$-değerli Fréchet filtresi $\nu_{\mathcal{F}}$ ve bu filtrenin limit fonksiyonu $\lim(\nu_{\mathcal{F}})$göz önüne alındığında önerme (8.20) gereği,
$[\lim(\nu_{\mathcal{F}})](l) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf\limits_{k:k\geq n} F_{E,d}(l, x_k) \right), \forall l \in X$ elde edilir ki bu önerme (8.19) gereği,
$[\lim(\nu_{\mathcal{F}})](l) = \widetilde{\lim_B}((x_n), l), \forall l \in X$ anlamına gelir.
Diğer taraftan E, $\mathbb{R}$ üzerinde $\leq$ ile uyumlu, sonsuzda kaybolan ve $+$ işlemine göre değişmeyen bir $*$-bulanık eşitlik ve $E(0,.)$ fonksiyonu sürekli olduğundan teorem (8.13) gereği,
$\widetilde{\lim}((x_n), l) = [\lim(\nu_{\mathcal{F}})](l), \forall l \in X$, eşitliği vardır, sonuç olarak,
$\widetilde{\lim}((x_n), l) = \widetilde{\lim_B}((x_n), l), \forall l \in X$ olduğunu görürüz. ■

9. SONUÇ

Bu tezde Reel eksen üzerindeki bazı temel kavramların bulanık versiyonları çalışılmıştır. Klasik teoriye paralel olarak hareket etmek amacıyla bulanık pozitif kavramı tanımlanıp incelendikten sonra bu kavram aracılığıyla bulanık mutlak değer tanımlanmış, özellikleri incelenmiş, üçgen eşitsizliği genelleştirililerek bu eşitsizliği sağlayan bulanık mutlak değerlerin varlığı araştırılmıştır. Bu noktadan sonra bulanık metrik kavramı tanıtılmış ve klasik teoride olduğu gibi reel eksen üzerindeki bulanık mutlak değer fonksiyonu ile bir bulanık metrik inşaa etmenin mümkün olduğu gösterilmiştir. Son olarak bulanık metrik aracılığıyla bulanık limit kavramı tanıtılmış, özellikleri incelenmiş ve bütünlüğü ve bağlantılılığı sağlayabilmek amacıyla bulanık limit kavramının bulanık topolojik limit kavramıyla örtüştüğü gösterilmiştir. Neticede ortaya atılan yeni kavramların bu alanda yapılmış hazırdaki çalışmalarla ilişkili olması sağlanarak teorideki bütünlüğü kaybetmeden teoriye katkılar yapılmasına gayret edilmiştir.

10. KAYNAKLAR

BARTLE, R.G. 1976. The Elements of Real Analysis, Second Edition, Wiley, New York

BELOHLAVEK, R. 2002. Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles. Kluwer Academic/Plenum Press, 369 pp, New York.

BODENHOFER, U. 2000. Similarity-Based Generalization of Fuzzy Orderings Preserving the Classical Axioms. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 8, (3), 593-610.

BODENHOFER, U. 2003. Representations and Constructions of Similarity-Based Fuzzy Orderings. *Fuzzy Sets and Systems*, 137, 113-136.

BODENHOFER, U. and KLAWONN, F. 2007. A Formal Study of Linearity Axioms for Fuzzy Orderings, *Fuzzy Sets and Systems* (In Press).

BODENHOFER, U. and DEMİRCİ, M. 2005. Strict Fuzzy Orderings in a Similarity-Based Setting, *Joint 4th EUSFLAT & 11th LFA Conference*,7-9 September, 2005 - Barcelona, Spain.

BODENHOFER, U. and DEMİRCİ, M. 2008. Strict Fuzzy Orderings with a Given Context of Similarity, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems,* 16(2), 147-178.

BOIXADER, D., JACAS, J. and RECASENS, J. 2000a. Fuzzy Equivalence Relations: Advanced Material. in: D. Dubois and H. Prade (Eds.), Fundamentals of Fuzzy Sets, The handbooks of fuzzy sets series, Vol. 7, Kluwer Academic Publishers, Boston, 261-290.

BOIXADER, D., JACAS, J. and RECASENS, J. 2000b. Upper and Lower Approximations of Fuzzy Sets. *Int, J. General Systems*, 29, 555-568.

BURGIN, M. 2000. Theory of fuzzy limits, *Fuzzy Sets and Sysetms*, 115, 433-443.

BURGIN, M. and KALINA, M. 2005. Fuzzy conditional convergence and nearness relations, *Fuzzy Sets and Systems*, 149, 383-398.

CHANG, C. L. 1968. Fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 24, 182-190.

DE BAETS, B. and MESIAR, R. 1997. Pseudo-Metrics and $\mathcal{T}$-Equivalences. *J. Fuzzy Math.*, 5, 471-481.

DE BAETS, B. and MESIAR, R. 2002. Metrics and $\mathcal{T}$-Equalities. *J. Math. Anal. Appl.*, 267, 531-547.

DEMİRCİ, M. 2000. Fuzzy Functions and Their Applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 252, 495-517.

DEMİRCİ, M. 2002. Fundamentals of M-Vague Algebra and M-Vague Arithmetic Operations. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 10, (1), 25-75.

DEMİRCİ, M. 2003a. Foundations of Fuzzy Functions and Vague Algebra Based on Many-Valued Equivalence Relations, Part I: Fuzzy Functions and Their Applications. *Int. J. General Systems*, 32, (2), 123-155.

DEMİRCİ, M. 2003b. Foundations of Fuzzy Functions and Vague Algebra Based on Many-Valued Equivalence Relations, Part II: Vague Algebraic Notions. *Int. J. General Systems* 32 (2), 157-175.

DEMİRCİ, M. 2003c. On Many-valued partitions and Many-valued Equivalence Relations. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems,* 11, (2), 235-253.

DEMİRCİ, M. 2003d. Representations of the Extensions of Many-valued Equivalence Relations. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems,* 11, (3), 319-341.

DEMİRCİ, M. 2004. Topological Properties of the Class of Generators of an Indistinguishibility Operator. *Fuzzy Sets and Systems*, 143, 413-426.

DEMİRCİ, M. 2005. A Theory of Vague Lattices Based on Many-Valued Equivalence Relations-I: General Representation Results. *Fuzzy Sets and Systems*, 151, (3), 437-472.

DEMİRCİ, M. and EKEN, Z. 2007. An Introduction to Vague Complemented Ordered Sets. *Information Science* 177, 150-160.

FODOR, J. and ROUBENS, M. 1994. Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support, Kluwer, Dordrecht.

GEORGE, A. and VEERAMANI, P. 1994. On some results in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 64, 395-399.

HAJEK, P. 1998. Mathematics of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, pp 297.

HÖHLE, U. and BLANCHARD, N. 1985. Partial Ordering in L-underdeterminate sets. *Information Science, 35, 133-144.*

HÖHLE, U. 1988., Quotients with Respect to Similarity Relations, *Fuzzy Sets and Systems*, 27, 31-44.

HÖHLE, U. 1995. Commutative, Residuated l-monoids. in: U. Höhle and E.P. Klement (Eds.), Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets. Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, pp. 53-106.

HÖHLE, U. 1998. Many-valued Equalities, Singletons and Fuzzy Partitions. *Soft Computing*, 2,134-140.

HÖHLE, U. and ŠOSTAK, A.P. 1999. Axiomatic Foundations of Fixed-Basis Fuzzy Topology. in: U. Höhle and S. E. Rodabaugh (Eds.), Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, The hand books of fuzzy sets series, Vol.3, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, pp. 123-273.

HÖHLE, U. 2005. Topological aspects of non-convergent sequences—a comment on Burgin's concept of fuzzy limits, *Fuzzy Sets and Systems,* 149, 399-412.

JACAS, J. and RECASENS, J. 1993b. Fuzzy Numbers and Equality Relations. *Proc. FUZZ'IEEE* 93, San Francisco, pp. 1298-1301.

JOHNSTONE, P.T. 1982. Stone Spaces, Cambridge University Press, Cambrdige.

KLAWONN, F. 1994. Fuzzy sets and vague environments. *Fuzzy Sets and Systems*, 66, 207-221.

KLAWONN, F. and CASTRO, J. L. 1995. Similarity in Fuzzy Reasoning. *Mathware Soft Computing*, 2, 197-228.

KLAWONN, F. 2000. Fuzzy Points, Fuzzy Relations and Fuzzy Functions. in: V. Novâk and I. Perfilieva (Eds.), Discovering World with Fuzzy Logic, Physica-Verlag, Heidelberg, pp. 431-453.

KLEMENT, E.P., MESIAR, R. and PAP, E. 2000. Triangular Norms, pp 385.

KRAMOSIL, O. and MICHALEK, J. 1975. Fuzzy metric and statistical metric spaces, *Kybernetika*, 11, 326-334.

LOWEN, R. 1996. Fuzzy Set Theory, Kluwer Academic Publishers, pp 428.

NOVAK, V. 1989. Fuzzy Sets and Their Applications. Adam Hilger, Bristol, pp 247.

NOVAK, V., PERFILIEVA, I. and MOCKOR, J. 1999. Mathematical Principles of Fuzzy Logic, pp 320.

OVCHINNIKOV, S. V. and ROUBENS, M. 1991. On Strict Preference Relations, *Fuzzy Sets and Systems*, 43, 319-326.

OVCHINNIKOV, S. V. 1991. Similarity relations, fuzzy partitions and fuzzy orderings, *Fuzzy Sets and Systems*, 40(1), 107-126.

ROYDEN, H.L. 1988. Real Analysis, Third Edition, Macmillan Publishing Company, New York.

SCHWEIZER, B. and SKLAR, A. 1960. Statistical metric spaces, *Pacific J. Maths*, 10, 314-334

TRILLAS, E. and VALVERDE, L. 1984. An inquiry into indistinguishability operators. In H. J. Skala, S. Termini and E. Trillas, editors, Aspects of Vagueness, pages 231-256, Reidel Dordrecht.

VALVERDE, L. 1985. On the Structure of F-Indistinguishability Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 17, 313-328.

ZADEH, L. A. 1965. Fuzzy Sets, *Inform. Control.* 8, 338-353.

ZADEH, L. A. 1971. Similarity Relations and Fuzzy Orderings, *Inform. Sci.* 3, 177-200.

ÖZGEÇMİŞ

Gültekin Soylu 1972 yılında Almanya'da doğdu. İlk öğrenimini Almanya'da, orta ve lise öğrenimini İzmir'de tamamladı. İstanbul Teknik Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü'nden 1999'da mezun oldu. Eylül-2001'de Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansını tamamladı ve doktora öğrenimine başladı. Halen Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.