# TEDİRGİNME KURAMININ MİNİMUM EYLEM İLKESİNDEN TÜRETİLMESİ VE HARMONİK OLMAYAN SALINICININ TEKİL TEDİRGİNME KURAMI İLE 1. VE 2. BASAMAKTAN TEDİRGİNMİŞ ÇÖZÜMLERİ



**H.İbrahim DURU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**FİZİK ANABİLİM DALI**

**1996**

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



# TEDİRGİNME KURAMININ MİNİMUM EYLEM İLKESİNDEN TÜRETİLMESİ VE HARMONİK OLMAYAN SALINICININ TEKİL TEDİRGİNME KURAMI İLE 1 VE 2. BASAMAKTAN TEDİRGİNMİŞ ÇÖZÜMLERİ

H. İbrahim DURU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

Bu tez ../../1996 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından .......... (......................) takdir edilerek oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir

Prof.Dr. Nuri ÜNAL (Danışman)
Prof.Dr. Zeki ASLAN
Doç.Dr.Haydar AKÇA

# ÖZ

## TEDİRGİME KURAMININ MİNİMUM EYLEM İLKESİNDEN TÜRETİLMESİ VE HARMONİK OLMAYAN SALINICININ TEKİL TEDİRGİNME KURAMI İLE 1. VE 2. BASAMAKTAN TEDİRGİNMİŞ ÇÖZÜMLERİ

**H.İbrahim DURU**

**Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı**

**Danışman: Prof.Dr.Nuri ÜNAL**

**1996, 36 Sayfa**

Standart tedirginme yönteminin yaklaşık çözümleri klasik mekanikteki minimum eylem ilkesinden yola çıkarak yeniden türetildi. Bu sonuçlar kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümler standart tedirginme teorisiyle karşılaştırıldığında bu çözümlerin uyuştuğu gözlendi

Bölüm (3.2) de yeni bir yaklaşım tekniği geliştirilerek singüler tedirginme tekniğiyle harmonik olmayan salınıcı için 1. ve 2. basamaktan yaklaşık çözümleri bulunmuş, bu sonuçların standart tedirginme tekniğiyle elde edilen sonuçlara eşdeğer olduğu gözlenmiştir

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Tekil Tedirginme Kuramı, Harmonik Olmayan Salınıcı

Jüri Prof.Dr.Nuri ÜNAL (Danışman)

Prof.Dr.Zeki ASLAN

Doç.Dr Haydar AKÇA

# ABSTRACT


## DERIVATION OF THE SINGULAR PERTURBATION THEORY FROM THE MINIMUM ACTION PRINCIPLE AND THE 1ST AND 2ND ORDER SOLUTIONS OF THE UNHARMONIC OSCILLATOR WITH THE SINGULAR PERTURBATION THEORY

**H.İbrahim DURU**

**M.S. in Physics**
**Adviser: Prof.Dr.Nuri ÜNAL**
**1996, 36 pages**

In this study, the results of standard perturbation theory were rederived from the principle of minimum action. By using these results, the solutions of unharmonic oscillator were reobtained. On the other hand, the same problem was solved by using newly proposed singular perturbation theory.

We show that the results of singular perturbation theory and standard perturbation theory are the same



KEY WORDS: Singular Perturbation Theory, Unharmonic Oscillator


COMMITTE Prof.Dr.Nuri ÜNAL
Prof.Dr.Zeki ASLAN
Doç.Dr.Haydar AKÇA

# ÖNSÖZ

Kuantum mekaniğindeki standart yöntemde tedirginmenin dalga fonksiyonlarında ve enerji spektrumunda küçük değişiklikler yaptığı düşünülerek hesaplamalar yapılır.

Son zamanlarda önerilmiş olan tekil tedirginme kuramında ise fonksiyonlarda değil bağımsız değişkenlerde küçük değişikler yapılmaktadır. Bu yöntem daha önce yalnızca pozitronyum atomunun bağlı durum spektrumundaki tedirginmiş düzeltmeleri hesaplamak için önerilmişti. Pozitronyum probleminin karmaşıklığı yüzünden dalga fonksiyonları çok detaylı olarak incelenmemişti. Bu çalışmada ise kuantum mekaniğinin kuramsal laboratuvarı durumundaki harmonik salınıcı probleminde bu yöntem uygulanarak birinci ve ikinci basamaktan enerji spektrumları ile dalga fonksiyonlarının standart yöntemle bulunan sonuçlarla aynı olduğu gösterilmiştir.

Standart yöntemde tedirginmiş dalga fonksiyonları ancak integral hesaplarıyla seri olarak hesaplanabilmektedir. Tekil tedirginme kuramında ise önerilen problem için lineer cebirsel denklemlerdeki katsayılar çözülerek serinin toplanabildiği gösterilmiştir.

Bu yöntemin değişik potansiyeller için gerek kuantum mekaniğindeki Schrödinger denklemi ve gerekse relativistik kuantum mekaniğindeki Dirac denkleminin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında, serilerin toplamını vermesi açısından önemlidir.

Tez konusunun belirlenmesi ve çalışmalarım sırasında bana her türlü yardım ve uyarılarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof.Dr. Nuri ÜNAL'a teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZ ... i
ABSTRACT ... ii
ÖNSÖZ ... iii
İÇİNDEKİLER ... iv
1. GİRİŞ ... 1
2. METOD ... 3
  2.1 Standart Tedirginme Yöntemi ... 3
  2.2 Minimum Eylem Yöntemi ... 4
  2.3. Tekil Tedirginme Yöntemi ... 5
3. BULGULAR ... 6
  3.1 Tedirginme Kuramının Minimum Eylem İlkesinden Türetilmesi ... 6
  3.2 Harmonik Olmayan Salınıcının 1. ve 2. Basamaktan Tedirginmiş Çözümleri ... 12
  3.3 Tekil Tedirginme Kuramı İle Harmonik Olmayan Salınıcının 1. ve 2. Basamaktan Tedirginmiş Çözümleri ... 15
4. TARTIŞMA ... 27
5. SONUÇ ... 31
6. ÖZET ... 32
7. SUMMARY ... 34
8. KAYNAKLAR ... 36
9. ÖZGEÇMİŞ ... 37

# 1. GİRİŞ

Klasik mekanikteki çoğu problemlerde olduğu gibi kuantum mekaniğinde de Schrödinger denkleminin tam olarak çözülebildiği problemler sınırlı sayıdadır. Bu nedenle varyasyon ve tedirginme gibi yaklaşık çözüm teknikleri kuantum mekaniği uygulamalarında büyük önem kazanmışlardır. Bu yöntemlerden hangisinin uygulanacağı probleme göre değişebilir. Varyasyon yöntemi Hamiltoniyenin, çözümü bilinen ve bilinmeyen olarak iki kısma ayrılamadığı (tedirginmenin uygulanamadığı) durumlarda değişik dalga fonksiyonları kullanılarak enerjisinin minimum kılınıp taban durumu enerjisini bulmayı hedefler (Erbil 1990).

Standart tedirginme kuramında tedirginmiş çözümleri bulmak için zamandan bağımsız Schrödinger dalga denklemi alınır. Daha sonra problem iki parçaya ayrılır. Birinci parça tam tedirginmiş problemin çözümleri olup, tedirginmemiş problemin çözümlerinin sonsuz serisi olarak alınır ve integral dönüşümlerinde bilinen yöntemler kullanılarak açılım katsayıları hesaplanır. Böylece yaklaşık özdeğer ve özfonksiyonlar bulunur ve bu işlem basamak basamak tekrarlanır.

Bölüm (3.1) de işlemler farklı bir yöntemle türetilmiştir. Schrödinger denklemi yerine dalga fonksiyonlarını klasik alanlar olarak ele alıp, bu alanlar için bir eylem yazılabilir. O zaman bu eylemi minimum yapan alan fonksiyonları ile Schrödinger denkleminin çözümleri aynıdır. Bu matematik kavramdan yola çıkarak, alanlar için yazılan eylemi basamak basamak minimize etme denenmiştir. Böylece standart tedirginme kuramının ifadeleri hareket denklemlerine gelmeden türetilmiştir. Eylemin minimum yapılması, özellikle çizgisel olmayan problemler ve klasik mekanikteki problemler için önemlidir. Daha sonra bulunan bu ifadeler kullanılarak harmonik olmayan salınıcının tedirginme yöntemiyle birinci ve ikinci basamaktan çözümleri yapılmıştır. Burada daha sonraki bölümde farklı yöntemle bulunacak sonuçlarla karşılaştırabilmek için birinci ve ikinci basamaktan, hem enerji özdeğerlerini hem de dalga fonksiyonları türetilmiştir.

Bölüm (3.1) de tartışılan ve farklı bir türetilişi verilen standart yöntemde, yaklaşık tedirginmiş problemin $\Psi_n(x)$ özfonksiyonları ile tedirginmemiş problemin $\Psi_n^{(0)}(x)$

özfonksiyonları farklı fonksiyonlardır (Bu fonksiyonların her ikisi de aynı bağımsız değişkenle ifade edilir). Bundan dolayı $\Psi_n(x)$ fonksiyonunu bulmak için onu $\Psi_n^{(0)}(x)$ öz fonksiyonlarının serisi olarak yazabiliriz. Bunun yerine önerilen bir yöntem şudur: $\Psi_n(x)$ fonksiyonu ile $\Psi_n^{(0)}(x)$ fonksiyonu aynı olup, bunların bağımsız değişkenleri farklı olmaktadır. O zaman tedirginmiş problemin fonksiyonları için temel alacağımız y bağımsız değişkeni ile tedirginmemiş problemin x bağımsız değişkeni arasında bir ilişki kurmaktır. Bu klasik mekanikteki yörüngeler açısından şu demektir: $\langle y \rangle_t$'de tedirginmiş problemin zamana bağlı yörüngesi ve $\langle x \rangle_t$'de tedirginmemiş problemin zamana bağlı yörüngesi olsun. O zaman bu ikisinin de aynı zamanın sinüssel bir fonksiyonu olacaktır. Sorun $\langle y \rangle_t$ ile $\langle x \rangle_t$ arasında anlamlı bir fonksiyonel ilişki bulmaktır.

Tekil tedirginme kuramında farklı bir yol izlenerek üçüncü bölümde harmonik olmayan salınıcı problemi 1. ve 2. basamaktan yaklaşık olarak çözülecektir. y değişkeni x değişkeninin bir fonksiyonu olsun. Bu fonksiyonu seçerken tedirginmiş problemdeki differansiyel denklemin tekillikleri ile tedirginmemiş problemin tekillikleri karşılaştırılsın. Daha önce incelenmiş pozitronyum probleminde tedirginmemiş problem x=0'da düzenli tekildir ve tedirginme terimleri, bu tekilliği artırarak düzensiz hale getirmektedir (Barut vd 1993). Onun için orada y ile x arasındaki fonksiyonel ilişkide $y=x+\Sigma\theta_n/x^n$ şeklinde bir ilişki seçilmelidir ve $\theta_n$ katsayıları yalnızca birinci basamaktan bulunmaktadır. Burada aynı yöntemi izleyerek harmonik olmayan salınıcı problemini karşılaştıracağız ve y ile x arasındaki tekilliğin artışı yönünde bir ilişki kestirerek problemi çözmeye çalışacağız. Daha sonra harmonik olmayan salınıcı için bölüm (3.1) de standart yöntemle bulunan ve seri olarak ifade edilen fonksiyonlar ile bölüm (3.3) de tekil tedirginme kuramı kullanılarak bulunan ve kapalı (toplanmış) biçimde ifade edilen fonksiyonları ve enerji özdeğerleri karşılaştırılmıştır.

## 2.METOD

### 2.1 Standart Tedirginme Yöntemi

Kaynaklarda bilinen standart tedirginme yöntemi Schrödinger denkleminin çözülemediği yani $E_n$ enerji özdeğerleri ile $\psi_n$ dalga fonksiyonlarının bulunamadığı durumlarda şöyle uygulanır:

Hamiltoniyen, çözümü bilinen (tedirginmemiş) sistem ile çözümü bilinmeyen tedirginmiş sistemin Hamiltoniyeni olarak iki kısma ayrılır. Tedirginmiş sistemin çözümleri tedirginmemiş sistemin çözümlerinin sonsuz serisi olarak alınarak açılım katsayıları integral dönüşümleri ile hesaplanır ve buradan aranılan özdeğer ve öz fonksiyonlar basamak basamak hesaplanır. Bu hesaplamalar sonucu enerji özdeğerlerinin ve dalga fonksiyonlarının 1. ve 2. basamaktan yaklaşık çözümlerini içeren ifadeler n kuantum sayısı cinsinden,

$$E_n^{(1)} = \varepsilon_n + V_{nn} \tag{2.1.1}$$

$$E_n^{(2)} = \varepsilon_n + V_{nn} + \sum_{i \neq n} \frac{|V_{in}|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_i} \tag{2.1.2}$$

$$\psi_n^{(1)} = u_n + \sum_{i \neq n} \frac{V_{in}}{\varepsilon_n - \varepsilon_i} u_i \tag{2.1.3}$$

$$\psi_n^{(2)} = u_n + \sum_{j \neq n} \left[ \frac{V_{jn}}{\varepsilon_n - \varepsilon_j} - \frac{V_{nn} V_{jn}}{(\varepsilon_n - \varepsilon_j)^2} + \sum_{i \neq n} \frac{V_{ji} V_{in}}{(\varepsilon_n - \varepsilon_j)(\varepsilon_n - \varepsilon_i)} \right] u_j \tag{2.1.4}$$

şeklinde belirlenir (Karaoğlu 1993). Burada $\varepsilon_n$ ve $u_n$ tedirginmemiş çözüme karşı gelen enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonlarıdır. $V_{nn}$ ve $V_{in}$ ise tedirgin edici potansiyelin matris elemanlarıdır.

## 2.2 Minimum Eylem Yöntemi

Kuantum mekaniğinde denklemler klasik fizik yöntemleriyle elde edilemezler. Ancak matematiksel olarak Schrödinger denklemini, klasik Schrödinger alanları için bir eylem tanımlayıp bunu varyasyon hesabıyla minimize ederek elde edebiliriz.

Schrödinger denklemi eylemden türetildiğine göre ve bu denklem kullanılarak (2.1), (2.2) (2.3) ve (2.4) tedirginme ifadeleri türetildiğine göre bu ifadeleri , (Schrödinger denklemine inmeden) doğrudan eylemi minimum yaparak bölüm (3.1) de yeniden türeteceğiz. Ayrıca bu tedirginme ifadeleri bölüm (3.1) de harmonik olmayan salınıcıya uygulanarak enerji spektrumundaki ve dalga fonksiyonundaki değişmeler hesaplanmaya çalışılmıştır.

## 2.3 Tekil Tedirginme Kuramı

Standart Tedirginme Tekniğinde $E_n$ enerji özdeğerleri ile $\Psi_n(x)$ dalga fonksiyonları tedirginmemiş sistemin çözümleri olan $E_n^{(o)}$ enerji özdeğerleri ve $\Psi_n^{(0)}(x)$ dalga fonksiyonlarının serisi olarak bulunmaya çalışılır. Burada $\Psi_n(x)$ ve $\Psi_n^{(0)}(x)$ fonksiyonları aynı bağımsız değişkenle ifade edilmekte olan farklı fonksiyonlardır.

Tekil Tedirginme Kuramında ise yeni bir yaklaşım tekniği getirilerek fonksiyonların farklı olması yerine, fonksiyonların bağımsız değişkeninin farklı seçilmesi yöntemi denenmiştir.

Bölüm (3.3) de harmonik olmayan salınıcı için uyguladığımız bu yöntemde bağımsız değişkene artan tekillik yönünde tekil terimler ekleyerek 1 ve 2 basamaktan enerji spektrumundaki ve dalga fonksiyonundaki değişmeler hesaplanarak Bölüm 3.1 de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

# 3. BULGULAR

## 3.1 Tedirginme Kuramının Minimum Eylem İlkesinden Türetilmesi

Klasik olarak Lagranjiyeni L olan bir sistemin $t_1$ anındaki $q_1$ konumundan $t_2$ anındaki $q_2$ konumuna kadar çizmesi olası tüm yörüngeler arasından seçeceği yörünge

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{3.1.1}$$

çizgisel integralini extremum yapan yörüngedir (Goldstein 1980). Hamilton ilkesine göre bu integral değişimi $t_1$ ve $t_2$ için minimum olmalıdır. Diğer bir deyişle

$$W = \int d^3x dt \mathcal{L} \tag{3.1.2}$$

(3.1.2) integrali klasik mekanikte minimum eylem prensibi olarak bilinir. $\Psi(\mathbf{x},t)$ ve $\Psi^*(\mathbf{x},t)$ klasik alanlar olarak ele alınarak sistemin Lagrange yoğunluğu

$$\mathcal{L} = \Psi^*(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi) - \frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*\nabla^2\Psi + \Psi^*(V_0 + \lambda V_1)\Psi \tag{3.1.3}$$

olduğu bilinir. Burada $V_0$ sistemin potansiyelini, $V_1$ tedirgin edici potansiyeli $\lambda$ ise gerçel bir parametredir. (3.1.3) eşitliğinin (3.1.2) de kullanımı ile

$$W = \int d^3x dt \Psi^* \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_0 + \lambda V_1 - i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \right]\Psi \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Burada parantez içerisindeki ifade Schrödinger denklemidir, denklemde m sistemin kütlesini, h Planck sabitini ve

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \tag{3.1.5}$$

değerini gösterir $H_0$ tedirginmemiş Hamiltoniyeni, $H_1$ tedirginmiş Hamiltoniyeni ve E enerji özdeğerleri sırasıyla

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_0 \tag{3.1.6}$$

$$\lambda V_1 = \lambda H_1 \tag{3.1.7}$$

$$E\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi \tag{3.1.8}$$

dır. (3.1.6), (3.1.7) ve (3.1.8) değerleri (3.1.4) te yerlerine konularak

$$W = \int d\mathbf{x}dt\Psi^*(\mathbf{x},t)(H_0 + \lambda H_1 - E)\Psi(\mathbf{x},t) \tag{3.1.9}$$

integrali elde edilir. Klasik alanlar yerine kuantum mekaniğindeki dalga fonksiyonu olan

$$\Psi = \sum_n e^{-iE_n t}\Psi_n(\mathbf{x}) \tag{3.1.10}$$

alınarak (3.1.9) da yerine yazılıp zamana göre integre edilirse

$$W = \sum_{n\,m} \int d\mathbf{x}\; \Psi_m^*(\mathbf{x})\left(H_0 + \lambda H_1 - E_n\right)\Psi_N(\mathbf{x})\delta\left(E_n - E_m\right) \tag{3.1.11}$$

eşitliği elde edilir.

Tedirgin edici potansiyelin olmaması durumunda ($\lambda$ tedirginme şiddetini belirleyen sabit olmak üzere)

$$0(\lambda) \cong 0 \tag{3 1 12}$$

olarak ifade edilip, $H_0$ hamiltoniyeninin özdeğer denkleminin

$$H_0 \Psi_n(\mathbf{x}) = E_n^{(0)} \Psi(\mathbf{x}) \tag{3 1 13}$$

olduğu hatırlanırsa (3 1 11) denklemi

$$W^{(0)} = \sum_{nm} (E_n - E_m) \left[ \langle H_0 \rangle_{nm} - E_n^{(0)} \right] \delta_{nm} \tag{3 1 14}$$

biçiminde yazılabilir Birinci basamak tedirginme denklemini elde etmek için (3 1 12) de olduğu gibi

$$0(\lambda^2) \cong 0 \tag{3 1 15}$$

alınırsa, I Basamaktan tedirginme denklemi

$$W^{(1)} = \sum_{nm} \delta (E_n - E_m) \int dx \left[ \Psi_m^{*(0)} + \lambda \Psi_m^{*(1)} \right] (H_0 + \lambda H_1 - E_n) \left[ \Psi_n^{(0)} + \lambda \Psi_n^{(1)} \right] \tag{3 1 16}$$

ya da

$$W = \sum_{nm} \delta (E_n - E_m) \Big[ \delta_{nm} \left( \langle H_0 \rangle_{nm} + \lambda \langle H_1 \rangle_{nm} - E_n \right) + (1 - \delta_{nm}) \lambda \langle H_1 \rangle_{nm}$$

$$+ \lambda \Psi_m^{+(0)} (H_0 - E_n) \Psi_n^{(1)} \Big] \tag{3 1 17}$$

$\Psi_n$ dalga fonksiyonuna I Basamaktan katkı fonksiyonu

$$\Psi_n^{(1)}(\mathbf{x}) = C_{nn} \Psi_n^{(0)}(x) + \sum_{m_l \neq n} C_{nm_l} \Psi_{m_l}^{(0)}(\mathbf{x}) \tag{3 1 18}$$

biçiminde tanımlansın. Burada $\Psi_n^{(o)}$ lar tedirginmemiş problemin çözümleri olan ortanormal fonksiyonlar kümesidir. (3.1.18) eşitliğinin (3.1.17) de kullanımı ile,

$$W = \sum_{nm} \delta(E_n - E_m) \left\{ \sum_{i=1}^{2} K_i \right\} \qquad (3.1.19)$$

elde edilir. Burada

$$K_1 = \delta_{nm}[< H_o >_{nn} + \lambda < H_1 >_{nn} - E_n] \qquad (3.1.20)$$

ve

$$K_2 = (1 - \delta_{nm})[< H_1 >_{nm} - C_{nm}(E_n - < H_o >_{mm})] \qquad (3.1.21)$$

dır. Böylece (3.1.20) den

$$E_n = \langle H_o \rangle_{nn} + \lambda \langle H_1 \rangle_{nn} \qquad (3.1.22)$$

ve (3.1.21) den

$$C_{nm} = \frac{\langle H_1 \rangle_{nm}}{E_n - E_m^{(0)}} \qquad (3.1.23)$$

bağıntısı elde edilir. (3.1.22) enerji özdeğerinin birinci basamaktan yaklaşık çözümüdür. $C_{nm}$ katsayıları (3.1.18) de yerlerine yazılarak dalga fonksiyonuna I. Basamaktan katkıyı içeren yaklaşık çözüm

$$\Psi_n^{(1)}(x) = \Psi_n^{(0)} + \frac{\langle H_1 \rangle_{nm}}{E_n - E_m^{(0)}} \Psi_m \qquad (3.1.24)$$

olarak bulunur. II. Basamaktan tedirginmiş çözümleri elde etmek için

$$0(\lambda^3) \cong 0 \qquad (3.1.25)$$

olarak alınırsa,

$$W^{(2)} = \sum_{nm} \delta(E_n - E_m) \int dx F \qquad (3.1.26)$$

olur. Burada

$$F = \left[ \sum_{m_1} (1 + \lambda C_{nm_1})^* \Psi_{m_1}^{*(0)} + \lambda^2 \Psi_m^{*(2)} \right] [H_0 + \lambda H_1 - E_n] \left[ \sum_{m_2} (1 + \lambda C_{nm_2}) \Psi_{m_2}^{(0)} + \lambda^2 \Psi_n^{(2)} \right] \qquad (3.1.27)$$

dir. Birinci basamaktaki çözümlerde olduğu gibi benzer adımlar izlenerek gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra enerji ve dalga fonksiyonlarının II. Basamak çözümleri sırasıyla ;

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda \langle H_1 \rangle_{nn} + \lambda^2 (1 - \delta_{nm}) \frac{\langle H_1 \rangle_{nm} \langle H_1 \rangle_{mn}}{E_n - E_m^{(0)}} \qquad (3.1.28)$$

ve

$$\Psi_n = \Psi_n^{(0)} + \lambda A + \lambda^2 B \qquad (3.1.29)$$

biçiminde elde edilir Burada

$$A = \sum_m (1 - \delta_{nm}) \frac{\langle H_1 \rangle_{nm} \Psi_m^{(0)}}{E_n - \langle H_0 \rangle_{mm} - \lambda \langle H \rangle_{mm}} \qquad (3.1.30)$$

$$B = \sum_{m_1 m} (1 - \delta_{nm})(1 - \delta_{nm_1}) \frac{\langle H_1 \rangle_{nm_1} \langle H_1 \rangle_{m_1 m}}{\left(E_n - E_m^{(0)}\right)\left(E_n - E_{m_1}^{(0)}\right)} \Psi_m^{(0)} \qquad (3.1.31)$$

olup, (3.1.28) ve (3.1.29) sonuçları standart yöntemle elde edilen sonuçlara eşdeğerdir

## 3.2. Harmonik Olmayan Salınıcının 1. ve 2. Basamaktan Tedirginmiş Çözümleri

Bölüm (2 1) de verilen (2 1 1), (2 1.2), (2.1.3) ve (2 1 4) tedirginme ifadelerini kullanarak tek boyutta harmonik salınıcı probleminde tedirgin edici potansiyelin $V = \alpha^2(\lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^4)$ olması durumunda, enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonun'un 1.Basamaktan yaklaşık çözümleri sırasıyla

$$E_n = E_n^{(0)} + \frac{3}{4}\lambda_2(2n^2 + 2n + 1) \quad \text{(Flügge 1974)} \qquad (3\ 2\ 1)$$

ve

$$\Psi_n = e^{-x^2/2} \sum_{m=n-4}^{n+4} \beta_m H_m \qquad (3\ 2.2)$$

dir. Burada $\beta$ nın aldığı değerler

$$\beta_{n-3} = \alpha^2 \frac{\lambda_1}{3} n(n-1)(n-2) \qquad (3\ 2\ 2\ 1)$$

$$\beta_{n-1} = \alpha^2 \frac{3}{2} \lambda_1 n^2 \qquad (3\ 2\ 2\ 2)$$

$$\beta_{n+1} = -\alpha^2 \frac{3}{4} \lambda_1 (n+1) \qquad (3\ 2\ 2\ 3)$$

$$\beta_{n+3} = -\alpha^2 \frac{\lambda_1}{24} \qquad (3\ 2\ 2\ 4)$$

$$\beta_{n-4} = \alpha^2 \frac{\lambda_2}{4} n(n-1)(n-2)(n-3) \qquad (3\ 2\ 2\ 5)$$

$$\beta_{n-2} = \alpha^2 \frac{\lambda_2}{2} n(n-1)(2n-1) \qquad (3\ 2\ 2\ 6)$$

$$\beta_{n+2} = -\alpha^2 \frac{\lambda_2}{8}(2n+3) \tag{3.2.2.7}$$

$$\beta_{n+4} = -\alpha^2 \frac{\lambda_2}{64} \tag{3.2.2.8}$$

dır. II. Basamaktan yaklaşık çözümlere ilişkin enerji özdeğerleri

$$E_n^{(2)} = -\frac{15\lambda_1^2}{4}(n^2+n+\frac{11}{30}) - \frac{\lambda_2^2}{8}(34n^3+51n^2+59n+21) \tag{3.2.3}$$

ve dalga fonksiyonu

$$\Psi_n^{(2)} = e^{-x^2/2} \sum_{m=n-8}^{n+8} \gamma_m H_m \tag{3.2.4}$$

olarak elde edilir. Burada $\gamma$ nın aldığı değerler

$$\gamma_{n-8} = \alpha^4 \frac{1}{32} \lambda_2^2 \frac{n!}{(n-8)!} \tag{3.2.4.1}$$

$$\gamma_{n-7} = \alpha^4 \frac{7}{84} \lambda_1 \lambda_2 \frac{n!}{(n-7)!} \tag{3.2.4.2}$$

$$\gamma_{n-6} = \alpha^4 \left( \frac{1}{18} \lambda_1^2 \frac{n!}{(n-6)!} + \frac{1}{24} \lambda_2^2 \frac{n!}{(n-6)!}(6n-11) \right) \tag{3.2.4.3}$$

$$\gamma_{n-5} = \alpha^4 \lambda_1 \lambda_2 \frac{n!}{(n-5)!} \left( \frac{17}{24} n - \frac{13}{15} \right) \tag{3.2.4.4}$$

$$\gamma_{n-4} = \alpha^4 \frac{1}{4} \frac{n!}{(n-4)!} \left[ \frac{\lambda_2}{\alpha^2} + \frac{5}{66} \lambda_2^2 (6n^2 - 10n + 6) + \frac{1}{2} \lambda_1^2 (4n-3) \right] \tag{3.2.4.5}$$

$$\gamma_{n-3} = \alpha^4 \frac{1}{3} \frac{n!}{(n-3)!} \left[ \frac{\lambda \lambda_1}{\alpha^2} + \frac{1}{16} \lambda_1 \lambda_2 (7\, n^2 - 182n + 43) \right] \tag{3.2.4.6}$$

$$\gamma_{n-2} = \alpha^4 \frac{1}{2} \frac{n!}{(n-2)!} \left[ \frac{(2n-1)\lambda_2}{\alpha^2} + \frac{(13n^2 - 16n + 4)\lambda_1^2}{4} + \frac{(12n^3 + 100n - 39)\lambda_2^2}{8} \right] \qquad (3\,2\,4\,7)$$

$$\gamma_{n-1} = \alpha^4 \left( \frac{3}{2} \frac{\lambda_1 n^2}{\alpha^2} + \frac{1}{48}(21n^4 - 96n^3 + 81n^2 - 36n)\lambda_1\lambda_2 \right) \qquad (3\,2.4\,8)$$

$$\gamma_{n+1} = -\alpha^4 \frac{1}{4} \left[ 3(n+1)\frac{\lambda_1}{\alpha^2} + \frac{1}{12}\lambda_1\lambda_2(153n^3 + 699n^2 + 750n + 258) \right] \qquad (3\,2\,4\,9)$$

$$\gamma_{n+2} = -\alpha^4 \frac{1}{8} \left[ (2n+3)\frac{\lambda_2}{\alpha^2} + \frac{1}{64}(64n^3 + 88n^2 - 102n + 25)\lambda_2^2 \right] \qquad (3\,2\,4\,10)$$

$$\gamma_{n+3} = -\alpha^4 \frac{1}{24} \left[ \frac{\lambda_1}{\alpha^2} - \frac{59n^2 + 292n + 272)}{16}\lambda_1\lambda_2 \right] \qquad (3\,2\,4\,11)$$

$$\gamma_{n+4} = \alpha^4 \frac{1}{64} \left[ -\frac{\lambda_2}{\alpha^2} + \frac{1}{16}(26n^2 + 122n + 117)\lambda_2^2 + \frac{4n+7}{2}\lambda_1^2 \right] \qquad (3\,2\,4.12)$$

$$\gamma_{n+5} = -\alpha^4 \frac{1}{128}\lambda_1\lambda_2(29n + 66) \qquad (3\,2\,4\,13)$$

$$\gamma_{n+6} = \alpha^4 \left( \frac{1}{1152}\lambda_1^2 + \frac{1}{1536}(6n + 17)\lambda_2^2 \right) \qquad (3.2\,4\,14)$$

$$\gamma_{n+7} = \alpha^4 \frac{1}{10752}\lambda_1\lambda_2 \qquad (3\,2\,4\,15)$$

$$\gamma_{n+8} = \alpha^4 \frac{1}{8192}\lambda_2^2 \qquad (3\,2\,4\,16)$$

dir

### 3.3. Tekil Tedirginme Kuramı İle Harmonik Olmayan Salınıcının 1. ve 2. Basamaktan Tedirginmiş Çözümleri

Tek boyutta harmonik salınıcı için Schrödinger denklemi

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+(2\lambda_0^2-x^2)\right]\Psi^{(o)}(x)=0 \qquad (3.3.1)$$

dir. Burada $\Psi^{(o)}_{(x)}$ dalga fonksiyonunu, $\lambda_0^2$ enerji özdeğerini ve $x$ ise, konumu belirleyen değişkendir. (3.3.1) in çözümü

$$\Psi^{(o)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\Psi_n^{(0)}(x) \qquad (3.3.2)$$

$$\Psi_n^{(0)}(x)=e^{-x^2/2}H_n(x) \qquad (3.3.3)$$

dir.(3.3.2) ve (3.3.3) çözümlerinde $C_n$ katsayıları $H_n$, Hermite polinomlarını gösterir. Bu fiziksel sistem tedirginmemiş problemdir. Eğer $\lambda_1$ ve $\lambda_2$ birer sabit olmak üzere, Hamiltoniyene harmonik olmayan tedirgin edici potansiyel $\alpha^2$ $(\lambda_1x^3+\lambda_2x^4)$ eklenirse (3.3.1) denklemi

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+2\lambda_0{}^2-x^2-2\alpha^2(\lambda_1x^3+\lambda_2x^4)\right]\Psi(x)=0 \qquad (3.3.4)$$

şekline dönüşür. (3.3.4) de $\lambda^2$ tedirginmiş sistemin enerji özdeğeri, $\alpha^2$ tedirginmenin şiddetini belirleyen sabittir.

Şimdi

$$x=\frac{1}{z} \tag{3.3.5}$$

değişken değişimi yapılarak (3.3.1) ve (3.3.4) denklemleri yeniden yazılırsa sırasıyla

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2}+\frac{2}{z}\frac{d\Psi}{dz}+\left[\frac{2\lambda^2}{z^4}-\frac{1}{z^6}\right]\Psi^{(o)}(x)=0 \tag{3.3.6}$$

ve

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2}+\frac{2}{z}\frac{d\Psi}{dz}+\left[\frac{2\lambda^2}{z^4}-\frac{1}{z^6}-\alpha^2\left(\frac{\lambda_1}{z^7}-\frac{\lambda_2}{z^8}\right)\right]\Psi=0 \tag{3.3.7}$$

elde edilir. (3.3.6) denkleminin z=0 daki tekillik derecesi 6 dır. (3.3.7) de ise tekillik derecesi 8 dir.

Görüldüğü gibi harmonik olmayan terimlerin eklenmesiyle problemin tekilliği artmaktadır. Bu artışı karşılamak için çözümede aynı yönde tekil terimler eklemek gerekir. Bu amaçla (3.3.4) denkleminde $x=y-\alpha^2P_1(x)$ şeklinde bir değişken değiştirmesi yapılarak yeni değişken cinsinden (3.3.1) denklemi elde edilmeye çalışılır. Sıfırıncı basamaktan (tedirginmemiş) çözüm için

$$x=y \tag{3.3.8}$$

bulunur. Bu durumda I. Basamaktan çözüm için

$$y=x+\alpha^2P_1(y) \tag{3.3.9}$$

olur.(3.3.8) değeri (3.3.9) da kullanılarak $x$'e göre ifade düzenlenirse

$$x\cong y-\alpha^2P_1(y) \tag{3.3.10}$$

olarak elde edilir. Burada $P_1(y)$ tekillik artışını karşılamak için çözüme eklenen $\theta_m$ sabitlerine bağlı bir polinom olup

$$P_1(y)=\sum_{m=0}^{m}\theta_m y^m \tag{3.3.11}$$

dir. (m'nin en büyük değeri çözümün akışı içerisinde iki problemin aynı fonksiyonla ifade edilen çözümünün varolması koşulu ile daha sonra belirlenecektir.)

(3.3.10) denklemini kullanarak dalga fonksiyonunun 1. ve 2. türevlerinin değerleri

$$\frac{d\Psi(x)}{dx}=(1+\alpha^2 P_1'(y))\frac{d\Psi(y)}{dy} \tag{3.3.12}$$

$$\frac{d^2\Psi(x)}{d^2x}=(1+\alpha^2 P_1'(y))\frac{d^2\Psi(y)}{d^2y}(1+\alpha^2 P_1'(y))+\frac{d\Psi(y)}{dy}(1+\alpha^2 P_1'(y))\alpha^2 P_1''(y) \tag{3.3.13}$$

olarak bulunur. Burada $P_1$ (y) nin birinci ve ikinci türevleri y ye göredir. (3.3.12) ve (3.3.13) değerleri (3.3.4) de yerlerine yazılarak (3.3.14) diferansiyel denklemi elde edilir

$$\frac{d^2\Psi(y)}{d\,y^2}+\alpha^2 P_1''(y)\frac{d\Psi(y)}{dy}+[S_1+S_2+S_3]\Psi(y)=0 \tag{3.3.14}$$

Burada

$$S_1=2\lambda^2(1-2\alpha^2 P_1'(y)) \tag{3.3.15}$$

$$S_2=-(1-2\alpha^2 P_1'(y))(y-\alpha^2 P_1(y))^2 \tag{3.3.16}$$

$$S_3=-2\lambda^2(_1y^3+\lambda_2 y^4) \tag{3.3.17}$$

dır. (3.3.14) denkleminin çözümünü bulmak için

$$\Psi=f(y)\upsilon(y) \tag{3.3.18}$$

değişken değişimi yapılırsa

$$\frac{d\Psi}{dy} = f'\upsilon + f\upsilon' \qquad (3.3.19)$$

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} = f''\upsilon + 2f'\upsilon' + f\upsilon'' \qquad (3.3.20)$$

Böylece (3.3.19) ve (3.3.20) (3.3.14) eşitliğinde kullanılır ve

$$f(y) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 P_1'(y)} \cong (1 - \frac{\alpha^2}{2} P_1'(y)) \qquad (3.3.21)$$

alınırsa (3.3.14) denklemi

$$\upsilon'' - \left[(1-2\alpha^2 P_1'(y))(y^2 - 2\alpha^2 P_1(y)y - 2\lambda^2) + 2\alpha^2(\lambda_1 y^3 + \lambda_2 y^4) + \frac{\alpha^2}{2} P_1'''(y)\right]\upsilon = 0 \qquad (3.3.22)$$

şekline dönüşmüş olur. (3.3.22) denklemindeki $\upsilon$' nin katsayısı durumundaki ifade de $^2$ li terimler $y^2 P_1'(y)$, $yP_1(y)$, $(\lambda_1 y^3 + \gamma_2 y^4)$ ve $P_1'''(y)$ dir. Burada $y^3$ ve $y^4$ terimlilerinden kurtulabilmek (en yüksek dereceden terimin $y^2$ olması ) için $P_1(y)$ çok terimlisinde en büyük üs 3 olmalıdır. Açık olarak yazmak gerekirse,

$$P_1(y) = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \theta_3 y^3 \qquad (3.3.23)$$

olur. $P_1(y)$ ve türevleri (3.3.22) de yerine konulur ve gerekli cebirsel işlemler yapılırsa yeni denklem

$$\upsilon'' + \left(\sum_{n=0}^{4} u_n y^n\right)\upsilon = 0 \qquad (3.3.24)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $u_n$ katsayılarının değerleri

$$u_0 = 2\lambda^2 - 3\alpha^2\theta_3 - 4\alpha^2\lambda^2\theta_1 \tag{3.3.25}$$

$$u_1 = -2\alpha^2(4\theta_2\lambda^2 - \theta_0) \tag{3.3.26}$$

$$u_2 = -(1 - 4\alpha^2\theta_1 + 12\alpha^2\lambda^2\theta_3) \tag{3.3.27}$$

$$u_3 = 2\alpha^2(\lambda_1 - 3\theta_2) \tag{3.3.28}$$

$$u_4 = 2\alpha^2(\lambda_2 - 4\theta_3) \tag{3.3.29}$$

olarak bulunur. (3.3.24) de $u_0$ sabit olmak üzere

$$\upsilon'' + \left[u_0 - y^2\right]\upsilon = 0 \tag{3.3.30}$$

formunda ifade edilebilmesi ($y$, $y^3$, ve $y^4$ ün katsayılarının sıfır olabilmesi )için $u_1$ ,$u_3$ ve $u_4$ ün katsayılarının sıfıra, $u_2$ nin katsayısı da 1'e eşit olmalıdır. (3.3.26), (3.3.28) ve (3.3.29) eşitlikleri sıfıra (3.3.27) de 1'e eşitlenerek, $\theta_m$ değerleri

$$\theta_0 = \frac{4}{3}\lambda_1\lambda^2 \tag{3.3.31}$$

$$\theta_1 = \frac{3}{4}\lambda_2\lambda^2 \tag{3.3.32}$$

$$\theta_2 = \frac{\lambda_1}{3} \tag{3.3.33}$$

$$\theta_3 = \frac{\lambda_2}{4} \tag{3.3.34}$$

olarak bulunur.

$y \to \mp\infty$ için (3.3.30) denkleminde $u_0$ ihmal edilebileceğinden

$$\upsilon'' - y^2\upsilon = 0 \tag{3.3.35}$$

biçimine dönüşür. (3.3.35) in çözümü

$$\upsilon = e^{-\frac{1}{2}y^2} z_0(y) \tag{3.3.36}$$

olarak kabul edilirse (3.3.35) Hermite diferansiyel denklemine dönüşür.

$$z'' - 2yz' + (u_0 - 1)z = 0 \tag{3.3.37}$$

Denklemin seri çözümü yapıldığında indirgeme bağıntısı

$$C_{m+2} = \frac{2m + 1 - u_0}{(m+1)(m+2)} C_m \tag{3.3.38}$$

bulunur. m=n için pay sıfır olacağından yakınsak bir çözüm elde edilir. I. Basamak çözümde

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 + \alpha^2 \in_1 \tag{3.3.39}$$

olarak alınır. Burada $\in_1$, I Basamak çözümde enerji özdeğerine katkıyı ifade eder. Sıfırıncı basamak çözümde enerji özdeğeri

$$\lambda_0^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad \text{dir.} \tag{3.3.40}$$

Enerji özdeğeri (I. Basamak Çözüm) için (3.3.39) ve (3.3.40) dan

$$\in_1 = \frac{3}{4} \lambda_2 (2n^2 + 2n + 1) \tag{3.3.41}$$

elde edilir. Dalga fonksiyonu (I Basamak çözümü) için (3.3.14) diferansiyel denkleminin çözümü için f(y), (3.3.21) eşitliği ile tanımlı olmak üzere $\Psi(y) = f(y).\upsilon(y)$ dönüşümü uygulanır ve (3.3.3) eşitliği kullanılır ise

$$\Psi_n^{(1)}(y) = e^{-\frac{1}{2}(y^2 + \alpha^2 P_1(y))} H_n(y) \tag{3.3.42}$$

sonucu elde edilir. Başlangıçtaki x değişkenine geri dönülür ve bu çözüm (3.3.4) de yerine konursa

$$\Psi_n^{(1)}(x) = e^{-\frac{1}{2}(x + \alpha^2 P_1(x))^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2} P_1(x)} H_n(x \cdot \alpha^2 P_1(x)) \tag{3.3.43}$$

$$\Psi(x) = e^{-x^2/2} \sum_{m=n-4}^{n+4} G_m \qquad (3.3.51)$$

bulunur. Burada $G_m$ değerleri

$$G_n = \left[1 - \alpha^2 \lambda_2 \frac{9}{8}(n + \frac{1}{2})\right] H_n \qquad (3.3.51.1)$$

$$G_{n-4} = \alpha^2 \lambda_2 \left[\frac{1}{4}\frac{n!}{(n-4)!}\right] H_{n-4} \qquad (3.3.51.2)$$

$$G_{n-3} = \alpha^2 \lambda_1 \left[\frac{1}{3}\frac{n!}{(n-3)!}\right] H_{n-3} \qquad (3.3.51.3)$$

$$G_{n-2} = \alpha^2 \lambda_2 \left[\frac{1}{2}\frac{n!}{(n-2)!}(2n-1)\right] H_{n-2} \qquad (3.3.51.4)$$

$$G_{n-1} = \alpha^2 \lambda_1 \frac{3}{2} n^2 H_{n-1} \qquad (3.3.51.5)$$

$$G_{n+1} = \alpha^2 \lambda_1 \left[-\frac{3}{4}(n+1)\right] H_{n+1} \qquad (3.3.51.6)$$

$$G_{n+2} = \alpha^2 \lambda_2 \left[-\frac{1}{8}(2n+3)\right] H_{n+2} \qquad (3.3.51.7)$$

$$G_{n+3} = \alpha^2 \lambda_1 \left[-\frac{1}{24}\right] H_{n+3} \qquad (3.3.51.8)$$

$$G_{n+4} = \alpha^2 \lambda_2 \left[-\frac{1}{64}\right] H_{n+4} \qquad (3.3.51.9)$$

elde edilir. Bu çözümler ile standart tedirginme yönteminin verdiği çözümü karşılaştırmak için çözümdeki terimler seriye açılırsa

$$e^{-\frac{1}{2}(x+\alpha^2 P_1(x))^2} = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x\alpha^2 P_1(x)) \qquad (3.3.44)$$

$$e^{-\frac{\alpha^2}{2}P_1'(x)} = (1 - \frac{1}{2}\alpha^2 P_1'(x)) \qquad (3.3.45)$$

alınır ve $H_n(x+\alpha^2 P_1(x))$ ifadesinin Taylor açılımı alınarak

$$H_n(x+\alpha^2 P_1(x)) = H_n(x) + H_n'(x)\alpha^2 P_1(x) + \ldots \qquad (3.3.46)$$

elde edilir. Burada

$$P_1(x) = \sum_{m=0}^{3} \theta_m x^m \qquad (3.3.47)$$

olarak tanımlanırsa,

$$P_1'(x) = \theta_1 + 2\theta_2 x + 3\theta_3 x^2 \qquad (3.3.48)$$

elde edilir. (3.3.44), (3.3.45) ve (3.3.46) denklemleri (3.3.40) da kullanılarak $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ ve $\theta_3$ ‘ e bağlı

$$\Psi(x) = \left\{1 - \alpha^2\left[\frac{\theta_1}{2} + (\theta_0+\theta_2)x + (\theta_1 + \frac{3}{2}\theta_3)x^2 + \theta_2 x^3 + \theta_3 x^4\right]\right\}\left[H_n(x) + H_n'(x)\alpha^2 P_1(x)\right] \qquad (3.3.49)$$

çözümü elde edilir. Hermite polinomlarının

$$xH_n = nH_{n-1} + \frac{1}{2}H_{n+1} \qquad (3.3.50)$$

yineleme bağıntısı (3.3.49) ‘a uygulandığında

$$\Psi(x) = e^{-x^2/2} \sum_{m=n-4}^{n+4} G_m \qquad (3.3.51)$$

bulunur. Burada $G_m$ değerleri

$$G_n = \left[1 - \alpha^2 \lambda_2 \frac{9}{8}(n + \frac{1}{2})\right] H_n \qquad (3.3.51.1)$$

$$G_{n-4} = \alpha^2 \lambda_2 \left[\frac{1}{4}\frac{n!}{(n-4)!}\right] H_{n-4} \qquad (3.3.51.2)$$

$$G_{n-3} = \alpha^2 \lambda_1 \left[\frac{1}{3}\frac{n!}{(n-3)!}\right] H_{n-3} \qquad (3.3.51.3)$$

$$G_{n-2} = \alpha^2 \lambda_2 \left[\frac{1}{2}\frac{n!}{(n-2)!}(2n-1)\right] H_{n-2} \qquad (3.3.51.4)$$

$$G_{n-1} = \alpha^2 \lambda_1 \frac{3}{2} n^2 H_{n-1} \qquad (3.3.51.5)$$

$$G_{n+1} = \alpha^2 \lambda_1 \left[-\frac{3}{4}(n+1)\right] H_{n+1} \qquad (3.3.51.6)$$

$$G_{n+2} = \alpha^2 \lambda_2 \left[-\frac{1}{8}(2n+3)\right] H_{n+2} \qquad (3.3.51.7)$$

$$G_{n+3} = \alpha^2 \lambda_1 \left[-\frac{1}{24}\right] H_{n+3} \qquad (3.3.51.8)$$

$$G_{n+4} = \alpha^2 \lambda_2 \left[-\frac{1}{64}\right] H_{n+4} \qquad (3.3.51.9)$$

biçimindedeir. (3.3.51 1)bağıntısı, standart yöntemde ancak normalizasyon integrali ile elde edilir.

Şimdi II. Basamak çözümleri oluşturmak için (3.3.9)denklemi yerine bir basamak daha ilerleyerek

$$y = x + \alpha^2 P_1(x) + \alpha^4 P_2(x) \qquad (3.3.52)$$

alınır ve (3.3.8) ,(3.3.9) denklemleri (3.3.52) de kullanılarak $\alpha^6$ basamağına kadar Taylor serisine açılırsa

$$x = y - \alpha^2 P_1(y) + \alpha^4\left(P_1(y)P_1'(y)' - P_2(y)\right) \qquad (3.3.53)$$

edilir. Burada

$$P_2(y) = \sum_{m=0} C_m y^m \qquad (3.3.54)$$

dir. (3.3.53) kullanılarak I. Basamak çözümde yapılan işlemler tekrarlanırsa

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} - \frac{D'}{D}\frac{d\Psi}{dy} - [x^2 - 2\lambda^2 + 2\alpha^2(\lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^4)]D^2\Psi = 0 \qquad (3.3.55)$$

Diferensiyel denklemi elde edilir. Burada

$$D = 1 - \alpha^2 P_1'(y) + \alpha^4 (P_1 P_1''(y) + P_1'^2(y) - P_2'(y)) \qquad (3.3.56)$$

olup,

$$\Psi = U\,W \qquad (3.3.57)$$

değişken değiştirmesi yapılarak

$$U = \sqrt{D} \qquad (3.3.58)$$

ve

$$W = e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) \qquad (3.3.59)$$

dönüşümleri uygulanırsa (3.3.55) denklemi

$$\frac{d^2W}{dy^2}+\left[\alpha^4\sum_{m=0}^{4}Y_m+\alpha^2\sum_{n=0}^{2}T_n\right]W=0 \tag{3.3.60}$$

şekline dönüşür. Bu denklemde $Y_m$ ve $T_n$ değerleri ;

$$Y_0=\frac{3}{4}P_1''^2-\frac{P_2'''}{2}+\frac{3}{2}P_1'P_1'''-4\lambda^2P_2'+6\lambda^2P_1'^2-P_1^2+4\lambda^2P_1'P_1'' \tag{3.3.61.1}$$

$$Y_1=4\lambda_2P_1'y^4 \tag{3.3.61.2}$$

$$Y_2=(8\lambda_2P_1+4\lambda_1P_1')y^3 \tag{3.3.61.3}$$

$$Y_3=\left(2P_2'+6\lambda_1P_1-2P_1P_1''-3P_1'^2\right)y^2 \tag{3.3.61.4}$$

$$Y_4=\left(2P_2-6P_1P_1'\right)y \tag{3.3.61.5}$$

$$T_0=2\lambda^2-y^2-\frac{P_1'''}{2} \tag{3.3.61.6}$$

$$T_1=-2\lambda_2y^4 \tag{3.3.61.7}$$

$$T_2=-2\lambda y^3 \tag{3.3.61.8}$$

$$T_3=2P_1'y^2 \tag{3.3.61.9}$$

$$T_4=2P_1y \tag{3.3.61.10}$$

$$T_5=-4\lambda^2P_1' \tag{3.3.61.11}$$

dir (3.3.60) denkleminde W nin katsayısı içerisinde en büyük üslü terimler $P_1'y^4$ ve $P_1'^2 y^2$ terimleri $y^8$ mertebesindendir. O halde $P_2(y)y$ terimi de $y^8$ mertebesindedir. Yani

$$P_2(y)=\sum_{m=0}^{7} C_m y^m \tag{3.3.62}$$

olmalıdır.

$P_1(y)$ve $P_2(y)$ terimleri ile bunların türev değerleri Denk. (3.3.60) da yerine konulduğunda

$$W''+\left[\alpha^4\sum_{m=0}^{6} R_m y^m+\alpha^2\sum_{n=0}^{4} Q_n y^n\right]W=0 \tag{3.3.63}$$

denklemi elde edilir. Burada $R_m$ ve $T_n$ değerleri;

$$R_0=3\theta_2^2-4C_1\lambda^2-3C_3+9\theta_1\theta_3+6\lambda^2\theta_1^{\,2}-\theta_0^{\,2}+8\theta_0\theta_2\lambda^2 \tag{3.3.64.1}$$

$$R_1=36\theta_2\theta_3+32\theta_1\theta_2\lambda^2+24\theta_0\theta_3\lambda^2-8\theta_0\theta_3\lambda^2-8\theta_0\theta_1-12C_4+2C_0-8C_2\lambda^2 \tag{3.3.64.2}$$

$$R_2=54\theta_3^2+6\lambda_1\theta_0-18\theta_0\theta_2-10\theta_1^2+32\theta_2^2\lambda^2+60\theta_1\theta_3\lambda^2+4C_1-30C_5-12C_3\lambda^2 \tag{3.3.64.3}$$

$$R_3=10\lambda_1\theta_1+8\lambda_2\theta_0-36\theta_1\theta_2-32\theta_0\theta_3+104\theta_2\theta_3\lambda^2+6C_2-16C_4\lambda^2 \tag{3.3.64.4}$$

$$R_4=12\theta_1\lambda_2+14\theta_2\lambda^1-29\theta_2^2-56\theta_1\theta_3+78\lambda^2\theta_3^2+8C_3-20C_5\lambda^2 \tag{3.3.64.5}$$

$$R_5=16\lambda_2\theta_2+18\lambda_1\theta_3-84\theta_2\theta_3+10C_4 \tag{3.3.64.6}$$

$$R_6=20\lambda_2\theta_3-58\theta_3^2+12C_5 \tag{3.3.64.7}$$

$$Q_0=2\lambda^2-y^2 \tag{3.3.64.8}$$

$$Q_1=2\theta_0-8\lambda^2 \tag{3.3.64.9}$$

$$Q_2=4\theta_1-12\lambda^2\theta_3 \tag{3.3.64.10}$$

$$Q_3 = 6\theta_2 - 2\lambda_1 \qquad (3\ 3\ 64\ 11)$$

$$Q_4 = 8\theta_3 - 2\lambda_2 \qquad (3\ 3.64\ 12)$$

şeklindedir (3.3 63) denkleminin (3.3.30) şeklinde ifade edilebilmesi için y, $y^3$, $y^4$, $y^5$ ve $y^6$ nın katsayıları sıfıra eşitlendiğinde, $C_m$ katsayıları;

$$C_5 = -\frac{11}{96}\lambda_2^2 \qquad (3\ 3.65\ 1)$$

$$C_4 = -\frac{17}{60}\lambda_1\lambda_2 \qquad (3\ 3.65\ 2)$$

$$C_3 = -\frac{17}{24}\lambda^2\lambda_2^2 - \frac{13}{72}\lambda_1^2 \qquad (3\ 3.65.3)$$

$$C_2 = -\frac{83}{6}\lambda^2\lambda_1\lambda_2 \qquad (3\ 3\ 65\ 4)$$

$$C = -\frac{103}{72}\lambda\lambda - \frac{113}{32}\lambda\lambda - \frac{109}{64}\lambda \qquad (3\ 3\ 65\ 5)$$

$$C_0 = -\frac{21}{2}\lambda_1\lambda_2 - \frac{200}{3}\lambda^4\lambda_1\lambda_2 - 4\lambda^2\lambda_1\lambda_2 \qquad (3\ 3\ 65\ 6)$$

olarak bulunur. II Basamak için

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 + \alpha^2 \in_1 + \alpha^4 \in_2 \qquad (3.3\ 66)$$

alınarak (3 3 38) de yerine yazılırsa II. Basamaktan enerji özdeğerine katkı olarak

$$\in_2 = -\frac{15}{4}\left(n^2 + n + \frac{11}{30}\right)\lambda_1^2 - \frac{1}{8}\left(34n^3 + 51n^2 + 59n + 21\right)\lambda_2^2 \qquad (3.3\ 67)$$

elde edilir.

## 4. TARTIŞMA

Harmonik olmayan salınıcı için kaynaklarda bilinen Standart Tedirginme Tekniğini kullanarak elde ettiğimiz sonuçlar ile Tekil Tedirginme Tekniğinin verdiği sonuçları karşılaştıralım.

Tekil Tedirginme tekniği ile hesaplanan enerji özdeğerlerine I. ve II. basamaktan katkıları içeren (3.3.41) ve (3.3.67), Standart Teknikle elde edilen (3.2.1) ve (3.2.3) ile karşılıklı olarak aynı sonuçları verir.

Şimdi, dalga fonksiyonlarının I. ve II. Basamak çözümlerini karşılaştıralım. Standart teknikle elde edilen, dalga fonksiyonun I. Basamak çözümü olan (3.2.2.)ve bu denklemdeki β değerlerini veren (3.2.2.1)-(3.2.2.13) ifadeleri Tekil Tedirginme Tekniği ile elde edilen (3.3.51) ve buradaki G değerlerini veren (3.3.51.2)-(3.3.51.9) ifadeleri birbirine eşdeğerdir.

Dalga fonksiyonun II. basamaktan çözümleri için ise, (3.3.52) denklemi , (3.3.59) denkleminde yerine yazılarak $\alpha^6$ basamağına kadar seriye açılırsa dalga fonksiyonu

$$\Psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(D_1)(D_2)(D_3) \tag{3.3.68}$$

olarak bulunur. Burada;

$$D_1 = 1 - \frac{1}{2}[\alpha^2 P_1'(x) + \alpha^4 (P_1^2(x) - x^2 P_1^2(x) + 2xP_2(x))] \tag{3.3.68.1}$$

$$D_2 = 1 - \frac{1}{2}[\alpha^2 x P_1(x) + \alpha^4 (P_1^2(x) - x^2 P_1^2(x) + 2xP_2(x))] \tag{3.3.68.2}$$

ve

$$D_3 = H_n(x) + \alpha^2 P_1(x) H_n'(x) + \alpha^4 \left( P_2(x) H_n(x) + P_1^2(x) \frac{H_n''}{2} \right) \tag{3.3.68.3}$$

dir.

(3.3.68.1), (3.3.68.2) ve (3.3.68.3) eşitliklerinde $P_1(x)$, $P_2(x)$ ve türev değerleri yerlerine konulup I. Basamak çözümde yapılan işlemler tekrarlanırsa II. Basamaktan katkıyıda içeren dalga fonksiyonu.

$$\Psi^{(2)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=n-8}^{n+8} J_k H_k \tag{5.1}$$

olarak bulunur. Burada $J_k$ değerleri;

$$J_{n-8} = \alpha^4 \frac{1}{32} \lambda_2^2 \frac{n!}{(n-8)!} \tag{5.1.1}$$

$$J_{n-7} = \alpha^4 \frac{7}{84} \lambda_1 \lambda_2 \frac{n!}{(n-7)!} \tag{5.1.2}$$

$$J_{n-6} = \alpha^4 \left[ \frac{1}{18} \lambda_1^2 \frac{n!}{(n-6)!} + \frac{1}{24} \lambda_2^2 \frac{n!}{(n-6)!} (6n-11) \right] \tag{5.1.3}$$

$$J_{n-5} = \alpha^4 \lambda_1 \lambda_2 \frac{n!}{(n-5)!} \left( \frac{17}{24} n - \frac{13}{15} \right) \tag{5.1.4}$$

$$J_{n-4} = \alpha^4 \frac{1}{4} \frac{n!}{(n-4)!} \left[ \frac{\lambda_2}{\alpha^2} + \frac{5}{66} \lambda_2^2 (6n^2 - 10n + 6) + \frac{1}{2} \lambda_1^2 (4n-3) \right] \tag{5.1.5}$$

$$J_{n-3} = \alpha^4 \frac{1}{3} \frac{n!}{(n-3)!} \left[ \frac{\lambda_1}{\alpha^2} + \frac{1}{16} \lambda_1 \lambda_2 (71n^2 - 182n + 43) \right] \tag{5.1.6}$$

$$J_{n-2} = \frac{\alpha^4}{2} \frac{n!}{(n-2)!} \left[ (2n-1) \frac{\lambda_2}{\alpha^2} + \frac{(13n^2 - 16n + 4)\lambda_1^2}{4} + \frac{(12n^3 + 100n - 39)\lambda_2^2}{8} \right] \tag{5.1.7}$$

$$J_{n-1} = \alpha^4 \left[ \frac{3}{2} \frac{\lambda_1}{\alpha^2} n^2 + \frac{1}{48} (21n^4 - 96n^3 + 81n^2 - 36n) \lambda_1 \lambda_2 \right] \tag{5.1.8}$$

$$J_{n+1} = -\alpha^4 \frac{1}{4}\left[\frac{3(n+1)\lambda}{\alpha^2} + \frac{1}{12}\lambda_1\lambda_2(153n^3 + 699n^2 + 750n + 258)\right] \tag{5.1.9}$$

$$J_{n+2} = -\alpha^4 \frac{1}{8}\left[\frac{(2n+3)\lambda_2}{\alpha^2} + \frac{1}{64}(64n^3 - 88n^2 - 102n + 25)\lambda_2^2\right] \tag{5.1.10}$$

$$J_{n+3} = -\alpha^4 \frac{1}{24}\left[\frac{\lambda_1}{\alpha^2} - \frac{59n^2 + 292n + 272)}{16}\lambda_1\lambda_2\right] \tag{5.1.11}$$

$$J_{n+4} = \alpha^4 \frac{1}{64}\left[\frac{-\lambda_2}{\alpha^2} + \frac{1}{16}(26n^2 + 122n + 117)\lambda_2^2 + \frac{4n+7}{2}\lambda^2\right] \tag{5.1.12}$$

$$J_{n+5} = -\alpha^4 \frac{1}{128}\lambda_1\lambda_2(29n + 66) \tag{5.1.13}$$

$$J_{n+6} = \alpha^4\left[\frac{1}{1152}\lambda_1^2 + \frac{1}{1536}(6n + 17)\lambda\right] \tag{5.1.14}$$

$$J_{n+7} = \alpha^4 \frac{1}{10752}\lambda_1\lambda_2 \tag{5.1.15}$$

$$J_{n+8} = \alpha^4 \frac{1}{8192}\lambda_2^2 \tag{5.1.16}$$

olarak belirlenir

İkinci basamak dalga fonksiyonlarının çözüm ifadelerini içeren (5.1.1)-(5.1.16) denklemleri Standart Teknikle elde edilen (3.2.4.1)- (3.2.4.16) çözümlerle uyum içindedir.

Standart tedirginme kuramında özdeğer ve özfonksiyonların açılım katsayılarının doğrudan eylemi minimize ederek üretildiği gösterilmiştir. Bu yöntem kolayca çizgisel olmayan denklemlere genellenebildiği için önemlidir.

Ayrıca harmonik olmayan salınıcı için Standart ve Tekil Tedirginme Kuramı aynı sonuçları vermektedir Bir önemli özellikte Tekil Tedirginme Kuramının yaklaşık çözümleri standart yöntemle bulunan fonksiyonların seri ifadelerinin toplamıdır.

Bu yöntem fonksiyonel serilerin toplamlarını bulmak için geliştirilebilir.

# 5. SONUÇ

Bu çalışmada alışılmışın dışında farklı bir yöntemle tedirginme yöntemi klasik mekanik olarak ele alınmış ve dalga fonksiyonları klasik alanlar olarak kabul edilerek, minimum eylem prensibinden tedirginmenin I. ve II. Basamak çözümleri elde edilmiştir. Bu sonuçların standart tedirginme yöntemi ile elde edilen sonuçlarla aynı olduğu doğrulanmıştır. Bu yöntemin amacı problemi çizgisel olamayan denklemlere genellemektir.

Standart tedirginme yöntemi yerine yeni bir yaklaşım getirilerek çözüm fonksiyonunda değişiklik yapmak yerine fonksiyonun bağımsız değişkenine diferensiyel denklemin tekilliğinin artışı yönünde tekil terimler eklenerek harmonik olmayan salınıcı probleminin dalga fonksiyonları ve enerji özdeğerleri hesaplanmıştır.

Geliştirilmiş tekil tedirginme kuramında bu fonksiyonlar seriler yerine, bunların toplamı olan fonksiyonlar olarak ifade edilebilmektedir. Böylece klasik ve kuantum mekaniğindeki tedirgenme teknikleri aynı düşünceden yola çıkarak anlaşılmış olacaktır.

## 6. ÖZET

Tedirginme yöntemi tam olarak çözülemeyen problemleri yaklaşık olarak çözmek için geliştirilmiştir. Kuantum mekaniğindeki çizgisel dalga denklemlerinin çözümünde bu yöntemi türetmek için özdeğeri bulunacak işlemci iki parçaya ayrılır. Bu parçalardan birisinin özdeğeri ve özvektörleri bilinmektedir. İkinci parçanın özdeğer ve özvektörlere katkısını bulabilmek için aranılan özvektörler, bilinenlerin bir serisi olarak yazılır ve buradan özdeğer ve özvektörler basamak basamak yaklaşık olarak bulunur.

Çalışmanın ikinci bölümünde farklı bir yol izlenmiştir. Bu yöntemde, dalga denklemi yerine Euler-Lagrange denklemlerini veren eylemden yola çıkılmıştır. Bu durumda dalga denklemini çözme problemi yerine, verilen eylem ifadesini minimum yapan fonksiyonları bulma problemine bakılır. Bu fonksiyonlar, çözümleri bilinen fonksiyonların serisi olarak seçilmiş ve basamak basamak eylemin minimum yapılması tartışılarak tedirginme kuramındaki birinci ve ikinci basamaktan çözümlerin ifadeleri yeniden türetilmiştir. Yöntem kolayca çizgisel olmayan problemlere genelleştirilebilir. (Açıkgöz vd 1995) , (Barut ve Unal 1990), (Barut vd 1992)

Bölüm (3.3) de son yıllarda positronyum probleminin enerji düzeylerinin hesabı için önerilmiş olan tekil tedirginme kuramı, harmonik olmayan salınıcı problemine uygulanmıştır.

Bölüm (3.1) de yeni bir türetilişi verilmiş olan standart tedirginme kuramında tedirginmiş problemin çözümü olacak olan fonksiyonlar, çözümü bilinen tedirginmemiş problemin fonksiyonlarının sonsuz serisi olarak ifade edilmiştir. Bu bölümde harmonik olmayan salınıcıya uyguladığımız tekil tedirginme kuramında ise tedirginmiş ve tedirginmemiş problemin çözümleri aynı fonksiyonlarla ifade edilir. Örneğin harmonik olmayan salınıcının çözümü, tedirginmemiş problem olan harmonik salınıcı ile aynı fonksiyonlara sahip olacaktır. Burada kullanacağımız fonksiyonlar çizgisel diferansiyel denklemlerin çözümleridir. Çizgisel diferansiyel denklemler katsayılarının tanımlı olmadığı noktalarda tekildir.

Bazı problemlerde örneğin harmonik olmayan salınıcı, (hidrojen atomunda olduğu gibi) tedirginme terimleri denklemin bazı noktalardaki tekilliklerinin derecesini artırır. Bu nedenle tedirginmiş problemin çözümü olan fonksiyonların bağımsız değişkenleri uygun derecede daha çok tekilleştirilir. Böylece problem tekillik artışı için uygun derecenin ne olduğunun bulunmasına dönüştürülür. Burada incelenilen harmonik olmayan salınıcı diferansiyel denklemindeki potansiyelin $x^4$ lü teriminden dolayı 8 dereceden , harmonik salınıcı diferansiyel denklemindeki potansiyelin $x^2$ li teriminden dolayı 6 dereceden tekilliğe sahiptir.

Bu yöntem ile tedirginmiş problemin yaklaşık özfonksiyonları, standart yöntemle bulunan fonksiyonların serisel ifadelerinin toplamı olduğu ve iki halde de özdeğerlerin eşdeğer olduğu gösterilmiştir.

## 7. SUMMARY

Standart perturbation theory has been developed for approximate solutions of the problems which have no exact solutions. In order to derive this method to solve the linear wave equations in the quantum mechanics, the operator whose eigenvalue will be found, is seperated into two parts. Eigenvalues and eigenvectors of one of these parts are known. To find the effect of second part on the eigenvalues and eigenvectors, we expand the eigenvectors of the total problem into the series of eigenvectors of the first part. This the approximate eigenvalues and eigenvectors are found step by step

In chapter (3.1) of this thesis, a different way is introduced In this new method, minimum action principle was used instead of wave equation In this formulation, the problem of solving the wave equation is replaced by problem of finding the functions which minimize the given action Here these unknown functions are chosen as series of functions which minimize the zeroth order action The expression of the first and second order solutions of the perturbation theory is rederived by the minimization of the action

The differantial equation of harmonic oscillator is 6th order singular at infinity and 7th (or 8th) order singular at the same point Thus, we calculate the eigenvalues and eigenfunctions by choosing the independent variable more singular in the first order of perturbation

By this method we derive the approximate eigenfunctions of perturbative problem which are the sum of the serial expression of the functions found by the standart methods, and it has also been shown that eigenvalues have the same value This method can be used to sum the some series.

This method can easily be generalized to nonlinear differantial equations

In chapter (3.3), singular perturbation theory, which has been suggested for the calculation of the energy levels of positronium problem, was applied to the unharmonic oscillator problem. In the standard perturbation theory, the eigenfunctions of the perturbative problem are expressed as infinite series of the eigenfunctions of the unperturbative problem. In the singular perturbation theory, the solutions of perturbative and unperturbative problems are expressed with the same functions. For instance, the solution of unharmonic oscillator problem will have the same functions with the unperturbative harmonic oscillator problem. We used the solutions of linear differantial equations which are singular at the points where their coefficients are indefinite.

In some problems, for instance as in harmonic oscillator, the hydrogen atom, the perturbative terms increases the degree of singularity of this differantial equation at some points. For this reason we chose the independent variables of the perturbative functions, more singular than the solutions of the unperturbative problems. Thus the perturbation problem is converted to determining appropriate order for the increase in the singularity.

## KAYNAKLAR

AÇIKGÖZ, I. Barut, A.O., KRAUS, J. and ÜNAL, N. 1995
Self-field quantum electrodynamics without infinities. A new calculation of vacuum polarization.
Phys. Lett., A 198, 126.

BARUT, A.O., BRACKEN, A.J., KOMY, S. and ÜNAL, N. 1993.
New approach to the determination of eigenvalues and eigenfunctions for a relativistic two-fermion equation
J. Math. Phys., 34(6), 2089.

BARUT, A.O., KRAUS, J., SALAMIN, Y and ÜNAL, N. 1992
Relativistic theory of the Lamb Shift in self-field quantum electrodynamics
Phys. Rev. A, 45, 7740.

BARUT, A.O. and ÜNAL, N. 1990.
Regularized analytic evoluation of vacuum polarization in a Coulomb field.
Phys. Rev D 41, 3822

ERBİL, H. 1990. Kuantum Fiziği. Ege Üniversitesi Basımevi, 2, İzmir

FLUGGE, S. 1974. Practical Quantum Mechanics. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin.

GOLDSTEIN, H. 1980. Classical Mechanics. Addison Wesley Publishing Company U.S.A.

KARAOĞLU, B. 1993. Kuantum Mekaniğine Giriş. Murat Dersanesi Basımevi, İstanbul.

## ÖZGEÇMİŞ

1956 yılında Ş Karaağaç 'ta doğdu. İlk, Orta ve Lise öğrenimini aynı ilçede tamamladı 1975 yılında Ortadoğu Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümüne girdi; 1981 yılında mezun oldu 1982-1983 yılları arasında askerlik hizmetinden sonra, özel bir kuruluşta ithalat ve ihracat servisinde çalıştı. 1986-1993 yılları arasında, çeşitli özel öğretim kurumlarında Fizik öğretmenliği yaptı 1993 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünde Yüksek Lisans Programına başladı 1994 yılında aynı Üniversitenin Fizik Anabilim Dalına Fizik Araştırma Görevlisi olarak girdi.

Halen aynı kurumda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.