T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

TIMELIKE YÜZEYLER İÇİN BERNSTEIN TEOREMİ ÜZERİNE

Ecehan ER

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2019

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TIMELIKE YÜZEYLER İÇİN BERNSTEIN TEOREMİ ÜZERİNE

Ecehan ER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 28/01/2019 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN

Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU

Dr. Öğr. Üyesi Ayşe YILMAZ CEYLAN

ÖZET

TIMELIKE YÜZEYLER İÇİN BERNSTEIN TEOREMİ ÜZERİNE

Ecehan ER

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN

Ocak 2019, 38 sayfa

Bu tezin amacı timelike yüzeyler için Bernstein Teoremi üzerine çalışmaktır. İlk bölümde Bernstein Teoremi, Bernstein Teoremi'nin yüksek boyutlara taşınması, Lorentz uzayları ve Bernstein Teoremi'nin Lorentz uzaylarına uyarlanmasının tarihiyle ilgili bilgiler yer almaktadır. İkinci bölümde ise yarı-Riemann manifoldların geometrisi ve Lorentz uzaylarla ilgili bazı tanımlar, teoremler ve ispatlar bulunmaktadır.

Üçüncü bölümde ise, timelike ve spacelike düzlemler üzerindeki grafların şekil operatörleri bulunarak minimal yüzey olmaları için sağlamaları gereken denklemler elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise minimal yüzey bulma problemi $\mathbb{E}^2$'den H_1^3'e izometrik immersiyonların sınıflandırılması problemine indirgenmiştir. Sonra, $\mathbb{E}^2$'den S^3'e izometrik immersiyonların birinci ve ikinci temel formlarının Öklidyen koordinat sistemi $\{x, y\}$'ye göre, $\mathbb{E}^2$'deki global asimptotik koordinatlar $\{u, v\}$'ye göre ifade edilişleri üzerine çalışılmıştır. Daha sonra $\mathbb{E}^2$'den H_1^3 izometrik immersiyonlar sınıflandırılmıştır. Ardından sıfır ortalama eğrilikli yüzey üretmek için teoremler verilmiştir. Son olarak sıfır ortalama eğrilikli böyle grafların kesitsel eğrilikleri farklı yollarla hesaplanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Bernstein Teoremi, minimal yüzey, spacelike yüzey, timelike yüzey.

JÜRİ: Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN

Dr. Öğr. Üyesi Melek ERDOĞDU

Dr. Öğr. Üyesi Ayşe YILMAZ CEYLAN

ABSTRACT

THE BERNSTEIN PROBLEM FOR TIMELIKE SURFACES

Ecehan ER

MSc Thesis in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN

January 2019, 38 pages

The aim of this thesis is to study Bernstein's Theorem for timelike surfaces. In the first chapter, there is information about the history of Bernstein's Theorem, the transfer of the Bernstein's Theorem to higher dimensions, the Lorentz spaces and the adaptation of the Bernstein's Theorem to the Lorentz spaces. In the second part, there are some definitions, theorems and proofs about the geometry of semi-Riemannian manifolds and Lorentz spaces.

In the third chapter, the graphs on the timelike and spacelike planes are found by obtaining the shape operators and the equations that they need to provide to be minimal surface. In the fourth chapter, minimal surface finding problem is reduced classification problem of isometric immersions from $\mathbb{E}^2$ to H_1^3 . Then, the first and second fundamental forms of isometric immersions from $\mathbb{E}^2$ to S^3 are studied according to the global asymptotic coordinates $\{u, v\}$ in $\mathbb{E}^2$ and according to the Euclidean coordinate system $\{x, y\}$ respectively. Then the isometric immersions are classified from $\mathbb{E}^2$ to H_1^3. After that, theorems are given to produce the entire surface that has zero mean curvature. Finally, sectional curvatures of such graphs with zero mean curvature are calculated in several ways.

KEYWORDS: Bernstein Theorem, minimal surface, spacelike surface, timelike surface.

COMMITTEE: Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN

Asst. Prof. Dr. Melek ERDOĞDU

Asst. Prof. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN

ÖNSÖZ

Bana bu çalışma konusunu veren ve çalışmalarım boyunca yardımını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN'e saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET . . . i
ABSTRACT . . . ii
ÖNSÖZ . . . iii
AKADEMİK BEYAN . . . v
SİMGELER VE KISALTMALAR . . . vi
1. GİRİŞ . . . 1
2. KAYNAK TARAMASI . . . 3
3. MATERYAL VE METOT . . . 11
4. BULGULAR VE TARTIŞMA . . . 16
4.1. $\mathbb{E}^2$'den H_1^3'e İzometrik İmmersiyonlar . . . 16
4.2. $\mathbb{E}^2$'den S^3'e İzometrik İmmersiyonlar . . . 21
4.3. $\mathbb{E}^2$'den H_1^3'e İzometrik İmmersiyonların Sınıflandırılması . . . 24
4.4. Kesitsel Eğrilik . . . 31
5. SONUÇLAR . . . 35
6. KAYNAKLAR . . . 36
ÖZGEÇMİŞ

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Timelike Yüzeyler İçin Bernstein Teoremi Üzerine" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

28/01/2019
Ecehan ER
İmza

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{E}^n$	n boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^n_\nu$	indeksi ν olan n boyutlu Öklid uzayı
H^n_ν	indeksi ν olan n boyutlu pseudo-hiperbolik uzay
S^n_ν	indeksi ν olan n boyutlu pseudo-küre
$\langle , \rangle$	Simetrik bilineer form
T_pM	M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	M manifoldundan $\mathbb{R}$'ye sonsuz türevlenebilen fonksiyonlar kümesi
$\chi(M)$	M manifoldu üzerindeki tüm düzgün vektör alanları kümesi
κ	Kesitsel eğrilik
$\bigtriangledown$	Gradiyent operatörü
$[,]$	Lie braketi
$\mathfrak{I}^r_s$	V üzerindeki (r, s) tipindeki tüm tensörler kümesi
I_p	p noktasındaki birinci temel form
II_p	p noktasındaki ikinci temel form

1. GİRİŞ

Minimal yüzeyler ilk olarak Lagrange (1761) tarafından çalışılmaya başlanmıştır.

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında verilen sonlu sayıda basit bağlantılı bir eğri ailesi için, bu eğri ailesinden geçen en küçük alana sahip yüzeyi bulma problemi Pleteu Problemi olarak adlandırılmıştır. Plateau (1873)'nun sabun köpükleriyle ilgili deneysel çalışmasında, verilen bir sınır eğrisine karşılık minimal yüzey bulunabileceği iddia edilmiştir. Radó (1930) ve Douglas (1931) birbirlerinden bağımsız olarak, Pleteu'nun bu iddiasını ispatlamıştır (Chopp 1991).

Daha sonra bu teori, 19. yüzyıl boyunca büyük gelişme göstermiştir. Bu dönemdeki önemli gelişmeler Darboux (1894) ve Bianchi (1894)'nin kitaplarında yer almaktadır (Osserman 2002).

Bernstein (1914)'ın makalesinde, diğerlerinden farklı olarak, minimal yüzey problemi bir kısmi diferensiyel denklem problemine indirgenmiştir. Bu yolla $\mathbb{E}^3$'deki tüm minimal yüzeylerin sadece düzlemler olduğu ispatlanmıştır. Sonra problem daha yüksek boyutlara, Riemann uzaylarına, daha geniş yüzey sınıflarına genelleştirilmiştir. (Osserman 2002).

Fleming (1962) $\mathbb{E}^3$'de minimal konilerin bulunmadığını kullanılarak Bernstein Teoremi'nin yeni bir ispatı vermiştir. De Giorgi (1965) Fleming'in argümanı iyileştirerek $\mathbb{E}^n$'de Bernstein Teoremi'nin geçerli olmaması için $\mathbb{E}^{n-1}$'de minimal konilerin var olması gerektiğini göstermiştir. Böylece Bernstein Teoremi $\mathbb{E}^4$ için ispatlanmış oldu. Daha sonra Almgren (1966) $\mathbb{E}^4$'de minimal konilerin olmadığı göstermiştir. Simons (1968) Bernstein Teoremi'ni $\mathbb{E}^7$'ye kadar genelleştirdi ve ayrıca $m \geq 4$ için $\mathbb{E}^{2m}$'de lokal olarak stable konilerin varlığını gösterdi. Bu sonuçlardan sonra $n < 8$ için Bernstein Teoremi ispatlanmış oldu (Bombieri vd. 1969).

Bombieri vd. (1969) ve Simons (1968) stable konilerin minimal yüzeyler olduğunu göstermiştir. Böylece $n \geq 8$ için Bernstein Teoremi'nin doğru olmadığı gösterilmiş oldu.

Öklid geometrisi iç çarpımlı bir afin uzaydır. Metrik $(-, +, \ldots, +)$ şeklinde alınırsa bu durumda Lorentz geometrisi denir. Bu geometri H. Lorentz tarafından, Einstein'dan önce, Lorentz dönüşümleri ile başlamıştır. Einstein'ın özel görelilik teorisinden sonra H. Minkowski Lorentz Geometrisini geliştirmiştir. 4 boyutlu Lorentz geometrisi özel görelilik teorisine en uygun matematiksel yapı olarak kabul edilir (Birman ve Nomizu 1984).

$\mathbb{E}_1^n$'deki spacelike hiperyüzeyler için konformal Bernstein Teoremi $n = 3, 4, 5$ için Calabi (1970) tarafından, daha sonra $n \geq 3$ için Cheng ve Yau (1976) tarafından ispatlanmıştır.

Fakat timelike yüzeyler için durum farklıdır. Örnek olarak $\mathbb{E}_1^3$'de $y = z \tanh x$

yüzeyi, düzlem olmayan entire minimal timelike yüzeydir.

Kulkarni (1985) Lorentz konformal yapısının ve Lorentz yüzeylerinin global çalışmasına başlamıştır. Daha önce lokal yapı için Jee (1984), Smith (1960) ve Burns (1977)'e bakılabilir. T. Weinstein (T. K. Milnor) tarafından, Lorentz yüzeyleri incelenmiştir ve Lorentz yüzeylerin sınırlarının global davranışı üzerine ilginç sonuçlar bulunmuştur. Smyth (1996, 2002) konformal sınırların tamlanışlarına çalışmıştır. Klarreich (2002)'de konformal sınırların düzgünlüğünü çalışılmıştır. Bu çalışmalarda Lorentz yüzeylerinin üç boyutlu Minkowski uzayında timelike minimal olması için gerekli şartlar incelenmiştir (Inoguchi ve Toda 2004).

Diğer yandan, Luo ve Stong (1997)'da Lorentz metriğine sahip bir diskin Minkowski düzlemine konformal embedingleri çalışılmıştır (Inoguchi ve Toda 2004).

Milnor (1987)'da timelike minimal yüzeyler için Bernstein Teoremi'nin konformal anlamda ele alınabileceği gösterildi. $\mathbb{E}_1^3$'deki konformal Bernstein Teoremi Milnor (1987) ve Magid (1991) tarafından birbirinden bağımsız olarak çözülmüştür. Lin ve Weinstein (2000)'da da daha ileri genellemeler yapılmıştır. McNertney (1980)'de timelike minimal yüzeyler için Weistrass formulü verilmiş ve timelike minimal dönel yüzeyleri ve onlarla ilişkili olan helikoidler sınıflandırılmıştır. Sonra de Woestijne (1990)'de bu çalışmalardan bağımsız olarak timelike minimal dönme yüzeyleri için benzer bir sınıflandırma verilmiş. Ayrıca bu çalışmada timelike minimal regle yüzeyler ve timelike minimal öteleme yüzeyleri de sınıflandırılmış (Inoguchi ve Toda 2004).

Chaohao (1985), Magid (1989) ve Weinstein (1996)'de Weierstrass formüllerinin değişik versiyonlarını verilmiştir. Chaohao (1985)'da timelike minimal yüzey teorisiyle akışkan dinamiği arasındaki ilişki incelenmiştir (Inoguchi ve Toda 2004).

Dajczer ve Nomizu (1981)'da sabit kesitsel eğrilikleri 1 ve -1 olan, Öklidiyen düzlem $\mathbb{E}^2$ ve Lorentziyen düzlem L^2'den 3-boyutlu Lorentz manifoldları S_1^3 ve H_1^3'e izometrik immersiyonlar çalışılmıştır.

Dey ve Singh (2017)'de Born-Infeld solitonunun timelike düzlem üzerinde ya spacelike minimal graf ya da timelike minimal graf veya bunların bir kombinasyonu olduğu gösterilmiştir. Ayrıca maksimal yüzey denkleminin bilinen çözümleri kullanılarak Born-Infeld denkleminin bazı tam çözümleri elde edilmiştir.

Akamine ve Singh (2017)'de 3-boyutlu Öklid uzayındaki minimal yüzey denklemi, 3-boyutlu Lorentz uzayındaki sıfır ortalama eğrilik denklemi ve Wick dönüşümü altında Born-Infeld denklemi arasındaki ilişki incelenmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Tanım 2.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü, her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $u, v, w \in V$ için

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
(ii) $\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$
$\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle$

özelliklerine sahip ise $\langle , \rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2. V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle , \rangle$ olsun.

(i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,
(ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,
(iii) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $\langle , \rangle$ ye pozitif yarı-tanımlı,
iv) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle , \rangle$ ye negatif yarı-tanımlı,
v) $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ dan $v = 0$ olmak zorunda ise $\langle , \rangle$'ya non-dejenere, non-dejenere değilse dejeneredir denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3. V bir vektör uzayı ve $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ bir simetrik bilineer form olsun. $\langle , \rangle_w : W \times W \to \mathbb{R}$ negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.4. M bir C^∞ manifold olsun.

$$\langle , \rangle_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$
$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_p = \langle u_p, v_p \rangle$$

şeklinde tanımlı, sabit indeksli, simetrik, bilineer, dejenere olmayan M üzerinde $(0, 2)$ tensör alanına M üzerinde bir metrik tensör denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.5. M bir C^∞ manifold olsun. M bir $\langle , \rangle$ metrik tensörü ile donatılmışsa, M ye bir semi-Riemann manifold denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.6. Bir semi-Riemann M manifoldun üzerinde $\langle , \rangle$ metrik tensörünün indeksine semi-Riemann manifoldun indeksi denir ve υ ile gösterilir.

Eğer $\nu = 0$ ise M bir Riemann manifold olur.

Eğer $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ ise M bir Lorentz manifoldu olur (O'Neill 1983).

Tanım 2.7. M bir C^∞ semi-Riemann manifoldu ve $\langle , \rangle$ ise M üzerinde tanımlanmış bir metrik tensör olsun. $\forall p \in M$ ve $v \in T_pM$ için,

$$\langle , \rangle_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

olmak üzere,

(a) Eğer $\langle v, v\rangle > 0$ veya $v = 0$ ise v tanjant vektörüne spacelike,
(b) $\langle v, v\rangle < 0$ ise v tanjant vektörüne timelike,
(c) $\langle v, v\rangle = 0$, $v \neq 0$ ise v tanjant vektörüne lightlike (null)

denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.8. W; V Lorentz vektör uzayının bir altuzayı ve V deki skaler çarpım $\langle , \rangle$ olsun. W için üç durum vardır:

(a) $\langle , \rangle_w$ pozitif tanımlı ise W ya spacelike uzay,
(b) $\langle , \rangle_w$ non-dejenere ve 1 indeksli ise W ya timelike uzay,
(c) $\langle , \rangle_w$ dejenere ise W ya lightlike uzay

denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.9. Her $p \in M$ için $d\phi_p$ diferansiyel dönüşümü birebir ise $\phi : M \to N$ düzgün dönüşümüne bir immersiyon denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.10. $\phi : M \to N$ düzgün dönüşüm olsun. $s \geq 1$ ve her $v_i \in T_pM$, $p \in M$ için $(\phi^* A)(v_1, \ldots, v_s) = A(d\phi v_1, \ldots, d\phi v_s)$ olmak üzere $A \in \Im_s^0(N)$ ise $\phi^* A$'ya A'nın ϕ ile pullback dönüşümü denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.11. M ve $\bar{M}$, sırasıyla $\langle , \rangle$ ve $\overline{\langle , \rangle}$ metrik tensörleriyle birlikte semi-Riemann manifoldları olsunlar. $\phi^* \left(\overline{\langle , \rangle}\right) = \langle , \rangle$ olacak şekildeki düzgün immersiyona M'den $\bar{M}$'ye bir izometrik immersiyon denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.12. M bir yüzey olsun. Eğer tüm tanjant düzlemleri $\left(T_pM, x^*\left(\langle , \rangle_p\right)\right)$ için spacelike (timelike, lightlike) ise $x : M \to \mathbb{E}_1^3$ immersiyonu spacelike (timelike, lightlike) olarak adlandırılır (López 2008).

x, spacelike veya timelike immersiyon; $X = X(u, v)$, x'in bir lokal parametrizasyonu; $\{X_u, X_v\}$ ise X'in her noktasındaki tanjant düzlemlerinin lokal tabanı olsun. Birinci temel form T_pM üzerindeki metriktir, öyle ki

$$\begin{aligned} I_p : \langle , \rangle_p : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto I_p(u, v) = < u, v >_p \end{aligned}$$

dır.

$B = \{X_u, X_v\}$ tabanına göre I nın matris gösterimi,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, F = \langle X_u, X_v \rangle, G = \langle X_v, X_v \rangle$$

olmak üzere, $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ olur. M yüzeyi, $EG - F^2 > 0$ ise spacelike, $EG - F^2 < 0$ ise timelike olur.

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

şeklinde verilen normal vektör alanı alınsın.

p noktasındaki ikinci temel form şu şekildedir:

$$\begin{aligned} II_p : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto II_p(u, v) = -\left\langle (dN)_p(u), v \right\rangle = \langle A_p(u), v \rangle \end{aligned}$$

B tabanına göre II nin matris gösterimi $\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$ şeklindedir.

Burada,

$$\begin{aligned} e &= -\langle X_u, N_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle \\ f &= -\langle X_u, N_v \rangle = -\langle X_v, N_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle \\ g &= -\langle X_v, N_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle \end{aligned}$$

dır. $a, b \in T_pM$ ise

$$a^t \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} b = a^t \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} Ab$$

olur. Böylece şekil operatörünün matrisi A,

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

dır (López 2008).

Tanım 2.13. Bir düzgün M manifoldu üzerinde bir

$$\begin{array}{rcl} D:\chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ (V,W) & \to & D(V,W)=D_VW \end{array}$$

konneksiyonu aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde bir fonksiyondur.

D1) D_VW, V üzerinde (V'ye göre) $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ lineerdir.
D2) D_VW, W'ya göre $\mathbb{R}$-lineerdir.
D3) Her $f\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için $D_V(fW)=(Vf)W+fD_VW$

D_VW'ya, D konneksiyonu için W'nun V'ye göre kovaryant türevi denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.14. *Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde bir tek D konneksiyonu vardır. Her $X,V,W\in\chi(M)$ için*

D4) $[V,W]=D_VW-D_WV$
D5) $X\langle V,W\rangle=\langle D_XV,W\rangle+\langle V,D_XW\rangle$

ise, D ye M nin Levi-Civita konneksiyonu denir ve Kozsul formülüyle karakterize edilir:

$$\begin{array}{l} 2\langle D_VW,X\rangle= \\ V\langle W,X\rangle+W\langle X,V\rangle-X\langle V,W\rangle-\langle V,[W,X]\rangle+\langle W,[X,V]\rangle+\langle X,[V,W]\rangle \end{array}$$

(O'Neill 1983).

Tanım 2.15. M, D Levi-Civita konneksiyonuyla semi-Riemann manifoldu olsun.

$$\begin{array}{rcl} R:\chi(M)^3\to & & \chi(M) \\ R_{XY}Z & = & D_{[X,Y]}Z-[D_X,D_Y]Z \end{array}$$

şeklinde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde $(1,3)$ tensör alanıdır ve M'nin Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Lemma 2.16. *v,w tanjant vektörleri için $Q(v,w)=\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle-\langle v,w\rangle^2$ tanımlansın. Π, M'nin p noktasındaki non-dejenere tanjant düzlemi olsun. Böylece,*

$$K(v,w)=\frac{\langle R_{vw}v,w\rangle}{Q(v,w)}$$

değeri taban seçiminden bağımsızdır ve $K(\Pi)$ değerine Π'nin kesitsel eğriliği denir (O'Neill 1983).

İspat. Π'nin herhangi iki bazı arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} v &= ax + by \\ w &= cx + dy \end{aligned}$$

burada katsayılar determinantı $ad - bc$ sıfır değildir. Buradan

$$\begin{aligned} \langle R_{vw}v, w\rangle &= (ad-bc)^2 \langle R_{xy}x, y\rangle \\ Q(v,w) &= (ad-bc)^2 Q(x,y) \end{aligned}$$

olur (O'Neill 1983). □

Teorem 2.17. $\mathbb{E}^n$*'nin kesitsel eğriliği her noktada sıfırdır.*

İspat. $\mathbb{E}^n$, n-boyutlu Öklid uzayının A açık alt kümesi üzerinde tanımlı X, Y ve Z vektör alanları C^∞ sınıfından ise

$$R(X,Y)Z = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X,Y]}Z \equiv 0$$

olduğunu gösterilecektir. $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} D_X(D_Y Z) &= D_X(Y[z_1], Y[z_2], \ldots, Y[z_n]) \\ &= D_X(\langle \nabla z_1, Y\rangle, \langle \nabla z_2, Y\rangle, \ldots, \langle \nabla z_n, Y\rangle) \\ &= (X[\langle \nabla z_1, Y\rangle], X[\langle \nabla z_2, Y\rangle], \ldots, X[\langle \nabla z_n, Y\rangle]) \end{aligned}$$

dır ve benzer şekilde

$$D_Y(D_X Z) = (Y[\langle \nabla z_1, X\rangle], Y[\langle \nabla z_2, X\rangle], \ldots, Y[\langle \nabla z_n, X\rangle])$$

olur. Diğer taraftan

$$D_{[X,Y]}Z = ([X,Y][z_1], [X,Y][z_2], \ldots, [X,Y][z_n])$$

ve

$$\begin{aligned} [X,Y][z_i] &= D_X Y[z_i] - D_Y X[z_i] \\ &= X[\langle \nabla z_i, Y\rangle] - Y[\langle \nabla z_i, X\rangle] \end{aligned}$$

olduğundan

$$D_{[X,Y]}Z = \Big(X[\langle \nabla z_1, Y\rangle] - Y[\langle \nabla z_1, X\rangle], \ldots, X[\langle \nabla z_n, Y\rangle] - Y[\langle \nabla z_n, X\rangle] \Big)$$

elde edilir. Ohalde

$$D_{[X,Y]}Z = (X[\langle \nabla z_1, Y\rangle], X[\langle \nabla z_2, Y\rangle], \ldots, X[\langle \nabla z_n, Y\rangle]) \\ - (Y[\langle \nabla z_1, X\rangle], Y[\langle \nabla z_2, X\rangle], \ldots, Y[\langle \nabla z_n, X\rangle])$$

bulunur. Bu değerler yerlerine yazılırsa $\forall X, Y, Z \in \chi(\mathbb{E}^n)$ için

$$R(X,Y)Z \equiv 0$$

olduğu görülür (Hacısalihoğlu, H. Hilmi 2012). □

Teorem 2.18. *$n \geq 2$ ve $0 \leq v \leq n$ olsun.*

(a) $S_v^n(r)$ pseudo-hiperküresi, sabit pozitif $\frac{1}{r^2}$ kesitsel eğrilikli bir tam yarı-Riemann manifoldudur.
(b) $H_v^n(r)$ pseudo-hiperbolik uzayı, $-\frac{1}{r^2}$ sabit negatif kesitsel eğrilikli bir tam yarı-Riemann manifoldudur (O'Neill 1983).

Tanım 2.19. M, $\bar{M}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. $\bar{D} : \chi(M) \times \bar{\chi}(M) \to \bar{\chi}(M)$ Levi Civita konneksiyonuna M üzerinde indirgenmiş konneksiyon denir (O'Neill 1983).

Sonuç 2.20. *$\bar{D}$, $M \subset \bar{M}$ üzerinde indirgenmiş konneksiyon olsun. V, $W \in \chi(M)$ ve X, $Y \in \bar{\chi}(M)$ ise*

(a) $\bar{D}_V X$, V üzerinde (V'ye göre) $C^\infty(M,\mathbb{R})$ lineerdir.
(b) $D_V X$, X'e göre $\mathbb{R}$-lineerdir.
(c) $f \in C^\infty(M,R)$ için $\bar{D}_V(fX) = (Vf)X + f\bar{D}_V X$.
(d) $[V,W] = D_V W - D_W V$.
(e) $V\langle X,Y\rangle = \langle D_V X, Y\rangle + \langle X, D_V Y\rangle$ (O'Neill 1983).

Lemma 2.21. *M, $\bar{M}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. V, $W \in \chi(M)$ ve D, M'nin Levi Civita konneksiyonu olmak üzere,*

$$D_V W = \tan \bar{D}_V W$$

olarak ifade edilir (O'Neill 1983).

Lemma 2.22. *$II : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)^\perp$ olmak üzere*

$$II(V,W) = nor\bar{D}_V W$$

şeklindeki II fonksiyonu $C^\infty(M,\mathbb{R})$-bilineer ve simetriktir. Burada II fonksiyonuna M manifoldunun şekil tensörü (veya ikinci temel formu) denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.23. $V, W \in \chi(M)$ için

$$\bar{D}_V W = D_V W + II(V, W)$$

denklemine Gauss denklemi adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.24. M, $\bar{M}$ manifoldunun altmanifoldu; R ile $\bar{R}$ sırasıyla M ve $\bar{M}$'nin Riemann eğrilikleri; II şekil tensörü olsun. V, W, X, $Y \in \chi(M)$ için

$$\langle R_{VW}X, Y\rangle = \left\langle \bar{R}_{VW}X, Y\right\rangle + \langle II(V, X), II(W, Y)\rangle - \langle II(V, Y), II(W, X)\rangle$$

olur (O'Neill 1983).

Sonuç 2.25. *v ve w, M'nin nondejenere teğet uzayının bir tabanı ise M'nin kesitsel eğriliği K ve $\bar{M}$'nin kesitsel eğriliği $\bar{K}$ arasındaki ilişki,*

$$K(v, w) = \bar{K}(v, w) + \frac{\langle II(v, v), II(w, w)\rangle - \langle II(v, w), II(v, w)\rangle}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$$

denklemi ile verilir. Ayrıca bu denkleme Gauss denklemi denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.26. M, $\bar{M}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. M'nin normal konneksiyonu,

$$D^{\perp} : \chi(M) \times \chi^{\perp}(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

fonksiyonudur öyle ki $V \in \chi(M)$ ve $Z \in \chi^{\perp}(M)$ için,

$$D_V^{\perp} Z = \text{nor}\, \bar{D}_V Z$$

dir. Burada $D_V^{\perp} Z$, Z'nin V'ye göre normal kovaryant türevi olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Tanım 2.27. M, $\bar{M}$ manifoldunun altmanifoldu ve II, M'nin şekil tensörü olsun. V, X, $Y \in \chi(M)$ ise,

$$(\nabla_V II)(X, Y) = D_V^{\perp}(II(X, Y)) - II(D_V X, Y) - II(X, D_V Y)$$

dir ve $\nabla_V II : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$ fonksiyonu simetrik, $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$-bilineerdir (O'Neill 1983).

Tanım 2.28. M, yarı-Riemann manifoldu ve $\bar{M}$'nin altmanifoldu olsun. V, W, $X \in \chi(M)$ ise,

$$\text{nor}\bar{R}_{VW}X = (\nabla_V II)(W, X) - (\nabla_W II)(V, X)$$

olur ve bu denkleme Codazzi denklemi denir (O'Neill 1983).

Sonuç 2.29. *$\bar{M}$ sabit kesitsel eğriliğe sahip olsun.*

(a) $M \subset \bar{M}$ için Codazzi denklemi, her V, W, $X \in \chi(M)$ olmak üzere

$$(\nabla_V II)(W, X) = (\nabla_W II)(V, X)$$

biçimindedir.

(b) M, $\bar{M}$'de şekil operatörü S olan bir hiperyüzeyse, V, $W \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$(D_V S)(W) = (D_W S)(V)$$

dır (O'Neill 1983).

Teorem 2.30 (Yüzeylerin Temel Teoremi)**.** *Null koordinat sistemiyle bir basit bağlantılı Lorentz yüzeyi verilsin, birinci ve ikinci temel form I ve II ile bir timelike immersiyonun varlığı için gerek ve yeter şart I ve II birinci ve ikinci temel formunun Gauss ve Mainardi-Codazzi denklemlerini sağlamasıdır (Lee 2006).*

3. MATERYAL VE METOT

Tanım 3.1. $\mathbb{E}_1^3$'deki metriğin standart formu

$$\langle (x,y,z),(x,y,z)\rangle = -x^2+y^2+z^2$$

olarak kabul edilsin. $f:\mathbb{E}^2\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, timelike bir düzlem üzerindeki bir graf

$$\mathcal{F}(x,y) = (x,y,f(x,y)) \tag{3.1}$$

şeklinde ve $h:\mathbb{E}^2\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere spacelike bir düzlem üzerindeki bir graf da

$$\mathcal{H}(y,z) = (h(y,z),y,z) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlıdır (Magid 1989).

Denklem 3.1 ve Denklem 3.2'den,

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} = (1,0,f_x) \qquad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y} = (h_y,1,0)$$
$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y} = (0,1,f_y) \qquad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z} = (h_z,0,1)$$

yazılabilir, Denklem 3.1'deki grafdan elde edilen metriğin determinantı A olmak üzere,

$$\begin{aligned}
A &= \det\begin{bmatrix}\left\langle\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x},\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right\rangle & \left\langle\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x},\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right\rangle\\ \left\langle\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y},\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right\rangle & \left\langle\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y},\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right\rangle\end{bmatrix}\\
&= \left\langle\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x},\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right\rangle\left\langle\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y},\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x},\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right\rangle^2 \qquad (3.3a)\\
&= \langle(1,0,f_x),(1,0,f_x)\rangle\langle(0,1,f_y),(0,1,f_y)\rangle\\
&\quad -\langle(1,0,f_x),(0,1,f_y)\rangle^2\\
&= \left(-1^2+0^2+f_x^2\right)\left(-0^2+1^2+f_y^2\right)\\
&\quad -\left(-1\cdot 0+0\cdot 1+f_xf_y\right)^2\\
&= \left(f_x^2-1\right)\left(f_y^2+1\right)-f_x^2f_y^2\\
&= -1-f_y^2+f_x^2 \qquad (3.3b)
\end{aligned}$$

ve Denklem 3.2'deki grafdan elde edilen metriğin determinantı B olmak üzere,

$$B = \det\begin{bmatrix}\left\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y},\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}\right\rangle & \left\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y},\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}\right\rangle\\ \left\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y},\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}\right\rangle & \left\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z},\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}\right\rangle\end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} \right\rangle^2 && (3.3c)\\
&= \langle (h_y, 1, 0), (h_y, 1, 0) \rangle \langle (h_z, 0, 1), (h_z, 0, 1) \rangle \\
&\quad - \langle (h_y, 1, 0), (h_z, 0, 1) \rangle^2 \\
&= \left(-h_y^2 + 1^2 + 0^2\right)\left(-h_z^2 + 0^2 + 1^2\right) \\
&\quad - \left(-h_y h_z + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1\right)^2 \\
&= \left(-h_y^2 + 1\right)\left(-h_z^2 + 1\right) - h_y^2 h_z^2 \\
&= 1 - h_y^2 - h_z^2 && (3.3d)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Elde edilen metriklerin timelike olması için Denklem 3.3b ve Denklem 3.3d'deki determinantlar negatif olmalı, yani

$$
\begin{aligned}
&1 + f_y^2 - f_x^2 > 0 && (3.4a)\\
&h_y^2 + h_z^2 - 1 > 0 && (3.4b)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri sağlanmalıdır. $\mathcal{F}$'nin birim normal vektörü

$$
\begin{aligned}
\xi(x, y) &= \frac{\mathcal{F}_x \times \mathcal{F}_y}{\|\mathcal{F}_x \times \mathcal{F}_y\|} \\
&= \frac{\det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{bmatrix}}{\|\mathcal{F}_x \times \mathcal{F}_y\|} \\
&= \frac{(f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{|\langle (f_x, -f_y, 1), (f_x, -f_y, 1) \rangle|}} \\
&= \frac{(f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_y^2 - f_x^2}} && (3.5)
\end{aligned}
$$

ve $\mathcal{H}$'nin birim normal vektörü

$$
\begin{aligned}
\xi(y, z) &= \frac{\mathcal{H}_y \times \mathcal{H}_z}{\|\mathcal{H}_y \times \mathcal{H}_z\|} \\
&= \frac{\det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ h_z & 0 & 1 \\ h_y & 1 & 0 \end{bmatrix}}{\|\mathcal{H}_y \times \mathcal{H}_z\|} \\
&= \frac{(1, h_y, h_z)}{\sqrt{|\langle (1, h_y, h_z), (1, h_y, h_z) \rangle|}} \\
&= \frac{(1, h_y, h_z)}{\sqrt{h_y^2 + h_z^2 - 1}}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Buradan $\mathcal{F}$'nin şekil operatörünün matrisi A,

$$
\begin{aligned}
e &= \langle \xi, \mathcal{F}_{xx} \rangle = \left\langle \frac{(f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}}, (0,0,f_{xx}) \right\rangle = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}} \\
f &= \langle \xi, \mathcal{F}_{xy} \rangle = \left\langle \frac{(f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}}, (0,0,f_{xy}) \right\rangle = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}} \\
g &= \langle \xi, \mathcal{F}_{yy} \rangle = \left\langle \frac{(f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}}, (0,0,f_{yy}) \right\rangle = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}} \\
E &= \langle \mathcal{F}_x, \mathcal{F}_x \rangle = \langle (1,0,f_x), (1,0,f_x) \rangle = f_x^2 - 1 \\
F &= \langle \mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y \rangle = \langle (1,0,f_x), (0,1,f_y) \rangle = f_x f_y \\
G &= \langle \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_y \rangle = \langle (0,1,f_y), (0,1,f_y) \rangle = f_y^2 + 1
\end{aligned}
$$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} f_x^2-1 & f_y f_y \\ f_y f_y & f_y^2+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}} & \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}} \\ \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}} & \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f_x^2-1 & f_y f_y \\ f_y f_y & f_y^2+1 \end{bmatrix}^{-1} \frac{\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}} \\
&= \frac{\text{ek} \begin{bmatrix} f_x^2-1 & f_x f_y \\ f_x f_y & f_y^2+1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} f_x^2-1 & f_y f_y \\ f_y f_y & f_y^2+1 \end{bmatrix}} \frac{\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} \left(f_y^2+1\right) & -f_x f_y \\ -f_x f_y & \left(f_x^2-1\right) \end{bmatrix}}{\left(f_x^2-1\right)\left(f_y^2+1\right) - f_x^2 f_y^2} \frac{\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}} \\
&= \frac{1}{f_x^2-f_y^2-1} \frac{1}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}} \begin{bmatrix} \left(f_y^2+1\right) & -f_x f_y \\ -f_x f_y & \left(f_x^2-1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \\
&= \frac{-1}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} f_{xx}\left(f_y^2+1\right) - f_x f_y f_{xy} & f_{xy}\left(f_y^2+1\right) - f_x f_y f_{yy} \\ -f_x f_y f_{xx} + \left(f_x^2-1\right) f_{xy} & -f_x f_y f_{xy} + f_{yy}\left(f_x^2-1\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. A'nın izi

$$
\text{iz}\,(A) = -\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \left[\left(1+f_y^2\right) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + \left(f_x^2-1\right) f_{yy}\right]
$$

dir. $\mathcal{F}$'nin şekil operatörünün izinin sıfır olması için

$$
\left(1+f_y^2\right) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + \left(f_x^2-1\right) f_{yy} = 0 \tag{3.6}
$$

şeklinde olması gerektiği görülür (Magid 1989). Benzer şekilde $\mathcal{H}$'nin şekil operatörünün matrisi A,

$$
\begin{aligned}
e &= \langle \xi, \mathcal{H}_{yy} \rangle = \left\langle \frac{(1,h_y,h_z)}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}}, (h_{yy},0,0) \right\rangle = \frac{-h_{yy}}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}} \\
f &= \langle \xi, \mathcal{H}_{yz} \rangle = \left\langle \frac{(1,h_y,h_z)}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}}, (h_{yz},0,0) \right\rangle = \frac{-h_{yz}}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}} \\
g &= \langle \xi, \mathcal{H}_{zz} \rangle = \left\langle \frac{(1,h_y,h_z)}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}}, (h_{zz},0,0) \right\rangle = \frac{-h_{zz}}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E &= \langle \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_y \rangle = \langle (h_y,1,0), (h_y,1,0) \rangle = 1-h_y^2 \\
F &= \langle \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_z \rangle = \langle (h_y,1,0), (h_z,0,1) \rangle = -h_y h_z \\
G &= \langle \mathcal{H}_z, \mathcal{H}_z \rangle = \langle (h_z,0,1), (h_z,0,1) \rangle = 1-h_z^2
\end{aligned}
$$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1-h_y^2 & -h_y h_z \\ -h_y h_z & 1-h_z^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-h_{yy}}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}} & \frac{-h_{yz}}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}} \\ \frac{-h_{yz}}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}} & \frac{-h_{zz}}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-h_y^2 & -h_y h_z \\ -h_y h_z & 1-h_z^2 \end{bmatrix}^{-1} \frac{\begin{bmatrix} -h_{yy} & -h_{yz} \\ -h_{yz} & -h_{zz} \end{bmatrix}}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}} \\
&= \frac{\operatorname{ek} \begin{bmatrix} 1-h_y^2 & -h_y h_z \\ -h_y h_z & 1-h_z^2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1-h_y^2 & -h_y h_z \\ -h_y h_z & 1-h_z^2 \end{bmatrix}} \frac{\begin{bmatrix} -h_{yy} & -h_{yz} \\ -h_{yz} & -h_{zz} \end{bmatrix}}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 1-h_z^2 & h_y h_z \\ h_y h_z & 1-h_y^2 \end{bmatrix}}{\left(1-h_y^2\right)\left(1-h_z^2\right) - h_y^2 h_z^2} \frac{\begin{bmatrix} -h_{yy} & -h_{yz} \\ -h_{yz} & -h_{zz} \end{bmatrix}}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}} \\
&= \frac{1}{-\left(h_y^2+h_z^2-1\right)} \frac{1}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}} \begin{bmatrix} 1-h_z^2 & h_y h_z \\ h_y h_z & 1-h_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h_{yy} & -h_{yz} \\ -h_{yz} & -h_{zz} \end{bmatrix} \\
&= \frac{-1}{\left(h_y^2+h_z^2-1\right)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} -h_{yy}\left(1-h_z^2\right) - h_y h_z h_{yz} & -h_{yz}\left(1-h_z^2\right) - h_{zz} h_y h_z \\ -h_{yy} h_y h_z - h_{yz}\left(1-h_y^2\right) & -h_{yz} h_y h_z - h_{zz}\left(1-h_y^2\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir. A'nın izi,

$$
\operatorname{iz}(A) = \left(h_y^2+h_z^2-1\right)^{-\frac{3}{2}} \left[\left(1-h_z^2\right) h_{yy} + 2 h_y h_z h_{yz} + \left(1-h_y^2\right) h_{zz}\right]
$$

dir. $\mathcal{H}$'nin şekil operatörünün izinin sıfır olması için

$$
\left(1-h_z^2\right) h_{yy} + 2 h_y h_z h_{yz} + \left(1-h_y^2\right) h_{zz} = 0 \tag{3.7}
$$

şeklinde olması gerektiği görülür (Magid 1989). Buna göre 3.6 ve 3.7 denklemlerinin 3.4a ve 3.4b koşullarını sağlayan bazı basit çözümleri aşağıda verilmiştir:

(a) $f(x,y) = k(x \pm y)$, herhangi C^2 fonksiyon k için,
(b) $f(x,y) = x \tanh(y)$,
(c) $f(x,y) = x + k(y)$, $k \neq 0$ için
(d) $h(y,z) = y + k(z)$, $k' \neq 0$ için

(a),(c) ve (d) çözümleri sıfır kesitsel eğriliğe, (b) çözümü pozitif kesitsel eğriliğe sahiptir (Magid 1989).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. $\mathbb{E}^2$'den H_1^3'e İzometrik İmmersiyonlar

Denklem 3.4a ve Denklem 3.6'yı sağlayan Denklem 3.1'deki gibi $\mathcal{F}(x,y)$ fonksiyonu göz önüne alınırsa, $p = f_x$, $q = f_y$ ve $W = \sqrt{1+q^2-p^2}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+q^2}{W}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{pq}{W}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{pq}{W}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p^2-1}{W}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\varphi_{xx} = \frac{p^2-1}{W} \tag{4.1}$$

$$\varphi_{xy} = \frac{pq}{W} \tag{4.2}$$

$$\varphi_{yy} = \frac{q^2+1}{W} \tag{4.3}$$

eşitliklerini sağlayan $\varphi : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$ bulunabilir (Magid 1989).

Önerme 4.1. *φ fonksiyonu*

$$\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \left(\varphi_{xy}\right)^2 = -1 \tag{4.4}$$

hiperbolik Monge-Ampère denklemini sağlar (Magid 1989).

İspat.

$$\begin{aligned}\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \left(\varphi_{xy}\right)^2 &= \left(\frac{p^2-1}{W}\right)\left(\frac{q^2+1}{W}\right) - \frac{p^2q^2}{W^2}\\ &= \frac{p^2q^2+p^2-q^2-1}{W^2} - \frac{p^2q^2}{W^2}\\ &= \frac{-\left(1+q^2-p^2\right)}{W^2} = -1\end{aligned}$$

□

Önerme 4.2. *Denklem 3.4a ve Denklem 3.6'yı sağlayan fonksiyon f olmak üzere,*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+q^2}{W}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{pq}{W}\right)$$

dır (Magid 1989).

İspat. $\frac{1+q^2}{W}$ ifadesinin x'e göre kısmi türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+q^2}{W}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+f_y^2}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}}\right) \\
&= \frac{2f_yf_{xy}\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}-\frac{\left(1+f_y^2\right)\left(f_{xy}f_y-f_xf_{xx}\right)}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}}}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)} \\
&= \frac{2f_yf_{xy}\left(1+f_y^2-f_x^2\right)-\left(1+f_y^2\right)\left(f_{xy}f_y-f_xf_{xx}\right)}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2f_yf_{xy}+2f_y^3f_{xy}-2f_x^2f_yf_{xy}}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad +\frac{-f_yf_{xy}+f_xf_{xx}-f_y^3f_{xy}+f_y^2f_xf_{xx}}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{f_yf_{xy}+f_y^3f_{xy}-2f_x^2f_yf_{xy}+f_xf_{xx}+f_y^2f_xf_{xx}}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

olur ve bu ifade düzenlenerek,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+q^2}{W}\right)=\frac{f_xf_{xx}\left(1+f_y^2\right)+f_yf_{xy}\left(1+f_y^2-2f_x^2\right)}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. Burada Denklem 3.6 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+q^2}{W}\right) &= \frac{2f_x^2f_yf_{xy}-\left(f_x^2-1\right)f_xf_{yy}+f_yf_{xy}\left(1+f_y^2-2f_x^2\right)}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left[f_yf_{xy}\left(1+f_y^2\right)-\left(f_x^2-1\right)f_xf_{yy}\right]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

olur. Benzer şekilde $\frac{pq}{W}$ ifadesinin y'ye göre kısmi türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{pq}{W}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_xf_y}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}}\right) \\
&= \frac{\left(f_yf_{xy}+f_xf_{yy}\right)\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}-\frac{f_xf_y\left(f_yf_{yy}-f_xf_{xy}\right)}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}}}{1+f_y^2-f_x^2} \\
&= \frac{\left(f_yf_{xy}+f_xf_{yy}\right)\left(1+f_y^2-f_x^2\right)-f_xf_y\left(f_yf_{yy}-f_xf_{xy}\right)}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{f_yf_{xy}+f_xf_{yy}+f_y^3f_{xy}+f_xf_y^2f_{yy}-f_x^2f_yf_{xy}-f_x^3f_{yy}}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{-f_x f_y^2 f_{yy} + f_x^2 f_y f_{xy}}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left[f_y f_{xy}\left(1+f_y^2\right)-\left(f_x^2-1\right) f_x f_{yy}\right] \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece, Denklem 4.6 ile Denklem 4.7'den $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+q^2}{W}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{pq}{W}\right)$ elde edilir ve ispat biter. □

Önerme 4.3. *Denklem 3.4a ve Denklem 3.6'yı sağlayan fonksiyon f olmak üzere,*

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{pq}{W}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p^2-1}{W}\right)
$$

eşitliği sağlanır(Magid 1989).

İspat. $\frac{p^2-1}{W}$ ifadesinin y'ye göre kısmi türevi alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p^2-1}{W}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_x^2-1}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}}\right) \\
&= \frac{2 f_x f_{xy}\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}-\frac{\left(f_x^2-1\right)\left(f_y f_{yy}-f_x f_{xy}\right)}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}}}{1+f_y^2-f_x^2} \\
&= \frac{2 f_x f_{xy}\left(1+f_y^2-f_x^2\right)-\left(f_x^2-1\right)\left(f_y f_{yy}-f_x f_{xy}\right)}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2 f_x f_{xy}+2 f_x f_{xy} f_y^2-2 f_x^3 f_{xy}}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad +\frac{-f_x^2 f_y f_{yy}+f_x^3 f_{xy}+f_y f_{yy}-f_x f_{xy}}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{f_x f_{xy}+2 f_x f_{xy} f_y^2-f_x^3 f_{xy}-f_x^2 f_y f_{yy}+f_y f_{yy}}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

olur ve bu ifade düzenlenerek,

$$
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p^2-1}{W}\right)=\frac{f_x f_{xy}\left(1-f_x^2+2 f_y^2\right)-f_y f_{yy}\left(f_x^2-1\right)}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}}
$$

elde edilir.Burada Denklem 3.6 kullanılırsa,

$$
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p^2-1}{W}\right)=\frac{f_x f_{xy}\left(1-f_x^2+2 f_y^2\right)+\left(1+f_y^2\right) f_y f_{xx}-2 f_x f_y^2 f_{xy}}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}}
$$

$$= \left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left[f_x f_{xy}\left(1-f_x^2\right)+\left(1+f_y^2\right)f_y f_{xx}\right] \tag{4.8}$$

olur. Benzer şekilde $\frac{pq}{W}$ ifadesinin x'e göre kısmi türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{pq}{W}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x f_y}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}}\right)\\
&= \frac{\left(f_{xx}f_y+f_x f_{xy}\right)\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}-\frac{f_x f_y\left(f_y f_{xy}-f_x f_{xx}\right)}{\sqrt{1+f_y^2-f_x^2}}}{1+f_y^2-f_x^2}\\
&= \frac{\left(f_{xx}f_y+f_x f_{xy}\right)\left(1+f_y^2-f_x^2\right)-f_x f_y\left(f_y f_{xy}-f_x f_{xx}\right)}{\left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left[f_{xx}f_y+f_x f_{xy}+f_y^3 f_{xx}+f_y^2 f_x f_{xy}-f_x^2 f_y f_{xx}\right.\\
&\quad \left.-f_x^3 f_{xy}-f_x f_y^2 f_{xy}+f_x^2 f_y f_{xx}\right]\\
&= \left(1+f_y^2-f_x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left[f_x f_{xy}\left(1-f_x^2\right)+\left(1+f_y^2\right)f_y f_{xx}\right] \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

olur. Böylece, Denklem 4.8 ile Denklem 4.9'dan $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{pq}{W}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p^2-1}{W}\right)$ elde edilir ve ispat biter. □

Denklem 3.4b ve Denklem 3.7'yi sağlayan $H(y,z)$ için $p = h_y$ $q = h_z$ $W = \sqrt{p^2+q^2-1} > 0$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-q^2}{W}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{pq}{W}\right)\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{pq}{W}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1-p^2}{W}\right)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\psi_{yy} = \frac{1-p^2}{W} \tag{4.10}$$

$$\psi_{yz} = -\frac{pq}{W} \tag{4.11}$$

$$\psi_{zz} = \frac{1-q^2}{W} \tag{4.12}$$

olacak şekilde $\psi : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$ elde edilir (Magid 1989).

Önerme 4.4. *ψ fonksiyonu*

$$\psi_{yy}\psi_{zz}-\left(\psi_{yz}\right)^2 = -1 \tag{4.13}$$

hiperbolik Monge-Ampère denklemini sağlar (Magid 1989).

İspat.

$$\begin{aligned}\psi_{yy}\psi_{zz} - \left(\psi_{yz}\right)^2 =& \frac{1-p^2}{W}\frac{1-q^2}{W} - \frac{p^2q^2}{W^2}\\ =& \frac{1-q^2-p^2+p^2q^2}{W^2} - \frac{p^2q^2}{W^2}\\ =& \frac{-\left(p^2+q^2-1\right)}{W^2}\\ =& -1\end{aligned}$$

□

Önerme 4.5. *Denklem 3.4b ve Denklem 3.7'yi sağlayan fonksiyon h olmak üzere,*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-q^2}{W}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{pq}{W}\right)$$

eşitliği sağlanır (Magid 1989).

İspat. $\frac{1-q^2}{W}$ ifadesinin y'ye göre kısmi türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-q^2}{W}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-h_z^2}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}}\right)\\ &= \frac{-2h_zh_{yz}\sqrt{h_y^2+h_z^2-1} - \frac{\left(1-h_z^2\right)\left(h_yh_{yy}+h_zh_{yz}\right)}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}}}{\left(h_y^2+h_z^2-1\right)}\\ &= \frac{-2h_zh_y^2h_{yz} - h_z^3h_{yz} + h_zh_{yz} - h_yh_{yy} + h_yh_z^2h_{yy}}{\left(h_y^2+h_z^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

olur ve bu ifade düzenlenerek,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-q^2}{W}\right) = \frac{h_zh_{yz}\left(-2h_y^2-h_z^2+1\right) - h_yh_{yy}\left(1-h_z^2\right)}{\left(h_y^2+h_z^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. Burada Denklem 3.7 kullanılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-q^2}{W}\right) = \left(h_y^2+h_z^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}\left[h_zh_{yz}\left(1-h_z^2\right) + h_{zz}h_y\left(1-h_y^2\right)\right] \tag{4.14}$$

olur. Benzer şekilde $-\frac{pq}{W}$ ifadesinin z'ye göre kısmi türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{pq}{W}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{h_yh_z}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\left(h_{yz}h_z + h_y h_{zz}\right)\sqrt{h_y^2+h_z^2-1} + \frac{h_y h_z \left(h_y h_{yz} + h_z h_{zz}\right)}{\sqrt{h_y^2+h_z^2-1}}}{\left(h_y^2+h_z^2-1\right)} \\
&= \frac{-\left(h_{yz}h_z + h_y h_{zz}\right)\left(h_y^2+h_z^2-1\right) + h_y h_z \left(h_y h_{yz} + h_z h_{zz}\right)}{\left(h_y^2+h_z^2-1\right)} \\
&= \left(h_y^2+h_z^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}\left[-h_z h_y^2 h_{yz} - h_z^3 h_{yz} + h_z h_{yz} - h_y^3 h_{zz}\right. \\
&\quad \left. -h_z^2 h_y h_{zz} + h_y h_{zz} + h_y^2 h_z h_{yz} + h_y h_z^2 h_{zz}\right] \\
&= \left(h_y^2+h_z^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}\left[h_z h_{yz}\left(1-h_z^2\right) + h_{zz}h_y\left(1-h_y^2\right)\right] \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece, Denklem 4.14 ile Denklem 4.15'den $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-q^2}{W}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{pq}{W}\right)$ elde edilir ve ispat biter. □

4.1, 4.2, 4.3 denklemlerini sağlayan φ için ve 4.10, 4.11, 4.12 denklemlerini sağlayan ψ için aşağıdaki matrisler yazılabilir.

$$
A = \begin{bmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} \end{bmatrix}
$$

$$
B = \begin{bmatrix} \psi_{yy} & \psi_{yz} \\ \psi_{yz} & \psi_{zz} \end{bmatrix}
$$

Yüzeylerin Temel Teoreminden A ve B matrisleri, $\mathbb{E}^2$ den H_1^3'e izometrik immersiyonun şekil operatörüdür. Gauss denklemleri sağlanır, çünkü $\det A = \det B = -1$ dir. $(\varphi_{xx})_y = (\varphi_{xy})_x$, $(\varphi_{xy})_y = (\varphi_{yy})_x$ ve $(\psi_{yy})_z = (\psi_{yz})_y$, $(\psi_{yz})_z = (\psi_{zz})_y$ Codazzi denklemlerini verir (Magid 1989).

4.2. $\mathbb{E}^2$'den S^3'e İzometrik İmmersiyonlar

$\tilde{f}$, $\mathbb{E}^2$'den S^3'e izometrik immersiyonu göz önüne alınsın. $\tilde{f}$ 'in birim normal vektörü N olmak üzere, $\tilde{f}$ immersiyonun $\left\{\tilde{f}, \tilde{f}_x, \tilde{f}_y, N\right\}$ çatısına göre birinci ve ikinci temel formu,

$$
\begin{aligned}
I &: dx^2 + dy^2 \qquad (4.16) \\
II &: adx^2 + bdxdy + cdy^2 \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

olur. Burada $a = -\langle f_x, N_x\rangle$, $b = -\langle f_x, N_y\rangle$, $c = -\langle f_y, N_y\rangle$ dır ve a, b, c Codazzi denklemlerini sağlar, öyle ki

$$
\begin{aligned}
a_y &= b_x \\
b_y &= c_x \\
ac - b^2 &= -1
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan, $a = \varphi_{xx}$, $b = \varphi_{xy}$, $c = \varphi_{yy}$ olacak şekilde, $\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \left(\varphi_{xy}\right)^2 = -1$ hiperbolik Monge-Ampere denklemini sağlayan $\varphi(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ bulunabilir. Böylece,

$$II : \varphi_{xx}dx^2 + 2\varphi_{xy}dxdy + \varphi_{yy}dy^2$$

yazılabilir. $\tilde{f}$ yüzeyi, $\omega(u, v) \in C^\infty(R^2)$, $0 < \omega(u, v) < \pi$ ve $\omega_{uv} = 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} I &: du^2 + 2\cos\omega dudv + dv^2 \\ II &: 2\sin\omega dudv \end{aligned}$$

olacak şekilde yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} dx^2 &= x_u^2du^2 + 2x_ux_vdudv + x_v^2dv^2 \\ dy^2 &= y_u^2du^2 + 2y_uy_vdudv + y_v^2dv^2 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} x_u^2 + y_u^2 &= 1 \\ x_ux_v + y_uy_v &= \cos\omega \\ x_v^2 + y_v^2 &= 1 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir ve çözümleri, $U, V \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\omega = U + V$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_u &= -\cos U \\ x_v &= -\cos V \\ y_u &= -\sin U \\ y_v &= \sin V \end{aligned}$$

formundadır. $(x_u)_v = (x_v)_u$ ve $(y_u)_v = (y_v)_u$ olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} (\sin U)(U)_v &= (\sin V)(V)_u \\ (-\cos U)(U)_v &= (\cos V)(V)_u \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Buradan, $\sin(U + V) = 0$ olamayacağı için $(U)_v = (V)_u = 0$ dır. Böylece 4.16 ve 4.16 birinci ve ikinci temel formlarındaki ω fonksiyonu, U, $V \in C^\infty(R)$ olmak üzere

$$\omega(u, v) = U(u) + V(v)$$

formunda yazılabilir (León-Guzmán vd. 2011).

Öklidiyen koordinat sistemi $\{x, y\}$'ye göre $II : \varphi_{xx}dx^2 + \varphi_{xy}dxdy + \varphi_{yy}dy^2$ ikinci temel formu, u ve v'ye göre

$$
\begin{aligned}
&II : \varphi_{xx}\left(x_u^2 du^2 + 2x_u x_v dudv + x_v^2 dv^2\right)\\
&+2\varphi_{xy}\left(x_u y_u du^2 + \left(x_u y_v + x_v y_u\right) dudv + x_v y_v dv^2\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \varphi_{yy}\left(y_u^2 du^2 + 2y_u y_v dudv + y_v^2 dv^2\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilebilir ve x_u, x_v, y_u, y_v değerleri bu ifadede yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&II : \varphi_{xx}\left(\cos^2 U du^2 + 2\cos U \cos V dudv + \cos^2 V dv^2\right)\\
&+2\varphi_{xy}\left(\cos U \sin U du^2 + \left(-\cos U \sin V + \cos V \sin U\right) dudv - \cos V \sin V dv^2\right)\\
&\qquad\qquad\qquad + \varphi_{yy}\left(\sin^2 U du^2 - 2\sin U \sin V dudv + \sin^2 V dv^2\right)
\end{aligned}
$$

olur.

$$
\begin{aligned}
&II : \left(\varphi_{xx}\cos^2 U + 2\varphi_{xy}\cos U \sin U + \varphi_{yy}\sin^2 U\right) du^2\\
&+\left(2\varphi_{xx}\cos U \cos V + 2\varphi_{xy}\sin\left(U - V\right) - 2\varphi_{yy}\sin U \sin V\right) dudv\\
&\qquad\qquad\qquad + \left(\varphi_{xx}\cos^2 V - 2\varphi_{xy}\cos V \sin V + \varphi_{yy}\sin^2 V\right) dv^2
\end{aligned}
$$

şeklinde düzenlenen ifade

$$
II : 2\sin\left(U+V\right) dudv
$$

ifadesine eşitlenirse,

$$
\begin{aligned}
\varphi_{xx}\cos^2 U + 2\varphi_{xy}\cos U \sin U + \varphi_{yy}\sin^2 U &= 0\\
2\varphi_{xx}\cos U \cos V + 2\varphi_{xy}\sin\left(U - V\right) - 2\varphi_{yy}\sin U \sin V &= 2\sin\left(U+V\right)\\
\varphi_{xx}\cos^2 V - 2\varphi_{xy}\cos V \sin V + \varphi_{yy}\sin^2 V &= 0
\end{aligned}
$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü,

$$
\begin{aligned}
\varphi_{xx} &= \frac{2\sin U \sin V}{\sin\left(U+V\right)}\\
\varphi_{xy} &= \frac{\sin\left(U-V\right)}{\sin\left(U+V\right)}\\
\varphi_{yy} &= \frac{-2\cos U \cos V}{\sin\left(U+V\right)}
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

olur. Buradan, Öklidiyen koordinat sistemi $\{x, y\}$'ye göre, $\mathbb{E}^2$'den S^3'e izometrik immersiyonların şekil operatörü; $\{u, v\}$, $\mathbb{E}^2$'deki global asimptotik koordinat sistemi ve $0 < U\left(u\right) + V\left(v\right) < \pi$ olmak üzere,

$$
\frac{1}{\sin\left(U+V\right)}\begin{bmatrix} 2\sin U \sin V & \sin\left(U-V\right)\\ \sin\left(U-V\right) & -2\cos U \cos V \end{bmatrix}
$$

formundadır.

4.3. $\mathbb{E}^2$'den H_1^3'e İzometrik İmmersiyonların Sınıflandırılması

Öklidiyen koordinat sistemi $\{x, y\}$'ye göre, $\mathbb{E}^2$'den H_1^3'e izometrik immersiyonların şekil operatörü; $\{u, v\}$, $\mathbb{E}^2$'deki global asimptotik koordinat sistemi ve $0 < U(u) + V(v) < \pi$ olmak üzere

$$\frac{1}{\sin(U+V)}\begin{bmatrix} 2\sin U \sin V & \sin(U-V) \\ \sin(U-V) & -2\cos U \cos V \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

formundadır.

$\{x, y\}$ ve $\{u, v\}$ arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{-\sin(V)}{\sin(U+V)}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\sin(U)}{\sin(U+V)}\frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{-\cos(V)}{\sin(U+V)}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\cos(U)}{\sin(U+V)}\frac{\partial}{\partial v} \end{aligned} \tag{4.20}$$

biçiminde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= \frac{-\cos(U+V) + \cos(U-V)}{\sin(U+V)} = \frac{2\sin U \sin V}{\sin(U+V)} \\ \varphi_{xy} &= \frac{\sin(U-V)}{\sin(U+V)} \\ \varphi_{yy} &= \frac{-\cos(U+V) - \cos(U-V)}{\sin(U+V)} = \frac{-2\cos U \cos V}{\sin(U+V)} \end{aligned} \tag{4.21}$$

olarak alındığında,

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}\varphi_{yy} - \left(\varphi_{xy}\right)^2 &= \frac{-4\sin U \sin V \cos U \cos V}{\sin^2(U+V)} - \frac{\sin^2(U-V)}{\sin^2(U+V)} \\ &= \frac{1}{\sin^2(U+V)}\left[-4\sin U \sin V \cos U \cos V - \sin^2 U \cos^2 V \right. \\ &\left. +2\sin U \sin V \cos U \cos V - \sin^2 V \cos^2 U\right] \\ &= \frac{-\left(\sin^2 U \cos^2 V + 2\sin U \sin V \cos U \cos V + \sin^2 V \cos^2 U\right)}{\sin^2(U+V)} \\ &= \frac{-\sin^2(U+V)}{\sin^2(U+V)} = -1 \end{aligned}$$

olduğundan φ'nin Denklem 4.4'ü sağladığı görülür (Magid 1989).

Önerme 4.6. *$\{u, v\}$, $\mathcal{F}$'den indirgenmiş metrik ile birlikte $\mathbb{E}^2$ de global null koordinat sistemidir (Magid 1989).*

İspat. $\mathcal{F}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), f(x(u,v), y(u,v)))$ göz önüne alınsın.

Böylece $\mathcal{F}_u = (x_u, y_u, f_x x_u + f_y y_u)$ ve $F_v = (x_v, y_v, f_x x_v + f_y y_v)$ olur. Burada 4.20 kullanılarak x_u,y_u, x_v, y_v yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_u &= (-\cos U, -\sin U, -\cos U f_x - \sin U f_y) &(4.22a)\\ \mathcal{F}_v &= (-\cos V, \sin V, -\cos V f_x + \sin V f_y) &(4.22b)\end{aligned}$$

biçiminde olur. Denklem 4.6 ve Denklem 4.21 kullanılarak $\langle \mathcal{F}_u, \mathcal{F}_u \rangle$ yu hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}_u, \mathcal{F}_u \rangle &= \left(f_x^2 - 1\right)\cos^2 U + \left(f_y^2 + 1\right)\sin^2 U + 2 f_x f_y \sin U \cos U\\ &= W\left(\varphi_{xx}\cos^2 U + \varphi_{yy}\sin^2 U + 2\varphi_{xy}\sin U \cos U\right)\\ &= \frac{W}{\sin(U+V)}\left[2\cos^2 U \sin U \sin V - 2\sin^2 U \cos U \cos V\right]\\ &\quad +2\cos U \sin U \sin(U-V)]\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\langle \mathcal{F}_v, \mathcal{F}_v \rangle$ ve $\langle \mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v \rangle$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}_v, \mathcal{F}_v \rangle &= \left(f_x^2 - 1\right)\cos^2 V + \left(f_y^2 + 1\right)\sin^2 V - 2 f_x f_y \sin V \cos V\\ &= W\left(\varphi_{xx}\cos^2 V + \varphi_{yy}\sin^2 V - 2\varphi_{xy}\sin V \cos V\right)\\ &= \frac{W}{\sin(U+V)}\left[2\cos^2 V \sin U \sin V - 2\sin^2 V \cos U \cos V\right.\\ &\quad -2\cos V \sin V \sin(U-V)]\\ &= 0\\ \langle \mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v \rangle &= \left(f_x^2 - 1\right)\cos U \cos V - \left(f_y^2 + 1\right)\sin U \sin V + f_x f_y \sin(U-V)\\ &= W\left(\varphi_{xx}\cos U \cos V - \varphi_{yy}\sin U \sin V + \varphi_{xy}\sin(U-V)\right)\\ &= \frac{W}{\sin(U+V)}[2\sin U \sin V \cos U \cos V\\ &\quad \left.+2\sin U \sin V \cos U \cos V + \sin^2(U-V)\right]\\ &= W\sin(U+V)\\ &\neq 0\end{aligned}$$

olduğu görülür (Magid 1989). □

Önerme 4.7. *Lokal null koordinat sistemine göre $\mathcal{F}(u,v)$ sıfır ortalama eğriliğe sahiptir ancak ve ancak $\mathcal{F}(u,v)$ nin her koordinat fonksiyonu $\alpha(u) + \beta(v)$ formundadır (Magid 1989).*

Böylece

$$\mathcal{F}(u,v) = (\alpha_1(u) + \beta_1(v), \alpha_2(u) + \beta_2(v), \alpha_3(u) + \beta_3(v)) \tag{4.23}$$

yazılabilir.

Aynı değişken değişimi, sıfır ortalama eğrilikli spacelike düzlem üzerindeki graf $H(y,z) = (h(y,z), y, z)$ için daha ilginçi sonuçlar verir. Denklem 4.7 ve Denklem 4.13'ü sağlayacak şekilde verilmiş U ve V için

$$\psi_{yy} = \frac{-\cos(U+V) + \cos(U-V)}{\sin(U+V)} = \frac{2\sin U \sin V}{\sin(U+V)} \tag{4.24a}$$

$$\psi_{yz} = \frac{\sin(U-V)}{\sin(U+V)} \tag{4.24b}$$

$$\psi_{zz} = \frac{-\cos(U+V) - \cos(U-V)}{\sin(U+V)} = \frac{-2\cos U \cos V}{\sin(U+V)} \tag{4.24c}$$

biçiminde ψ bulunur.

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{-\sin(V)}{\sin(U+V)}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\sin(U)}{\sin(U+V)}\frac{\partial}{\partial v} \tag{4.24d}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{-\cos(V)}{\sin(U+V)}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\cos(U)}{\sin(U+V)}\frac{\partial}{\partial v} \tag{4.24e}$$

kullanılarsa, buradan

$$y_u = -\cos U, \; y_v = -\cos V \tag{4.25}$$

$$z_u = -\sin U, \; z_v = \sin V \tag{4.26}$$

elde edilir. $\mathcal{H}(u,v) = (h(y(u,v), z(u,v)), y(u,v), z(u,v))$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_u &= (h_y y_u + h_z z_u, y_u, z_u) \\ \mathcal{H}_v &= (h_y y_v + h_z z_v, y_v, z_v) \end{aligned}$$

olacak şekilde yazılabilir (Magid 1989).

Önerme 4.8. $\{u,v\}$, *$\mathcal{H}$ den indirgenmiş metrik ile birlikte $\mathbb{E}^2$ de global null koordinat sistemidir (Magid 1989).*

Timelike bir düzlem üzerindeki bir graf için aşağıdaki önerme verilebilir.

Lemma 4.9. $(\sin U + \cos U)(\sin V + \cos V) \leq 0$ *ve* $0 < U + V < \pi$ *ise*

$$\cos(2U)\cos(2V) \geq 0$$

dır (Magid 1989).

İspat. $(\sin U+\cos U)(\sin V+\cos V)\leq 0$ ifadesi

$$-\sin U\sin V-\cos U\cos V\geq \sin U\cos V+\cos U\sin V$$

olmasına denktir. $\sin(U+V)>0$ olduğundan

$$(\sin U\sin V+\cos U\cos V)^2\geq(\sin U\cos V+\cos U\sin V)^2$$

ve

$$\begin{aligned}\cos^2U\cos^2V+\sin^2U\sin^2V-\sin^2U\cos^2V-\cos^2U\sin^2V &\geq 0\\ \cos(2U)\cos(2V) &\geq 0\end{aligned}$$

olur (Magid 1989). □

Önerme 4.10. *Sabit olmayan $U(u)$ ve $V(v):\mathbb{E}^2\to\mathbb{R}$, $0<U+V<\pi$ fonksiyonları verilmiş olsun. Böylece*

(i) $1+p^2-q^2>0$,
(ii) $\frac{p^2-1}{\sqrt{1+p^2-q^2}}=\frac{2\sin U\sin V}{\sin(U+V)}$,
(iii) $\frac{q^2+1}{\sqrt{1+p^2-q^2}}=\frac{-2\cos U\cos V}{\sin(U+V)}$

koşullarını sağlayan p ve $q:\mathbb{E}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının var olması için gerek ve yeter şart

(a) $\cos U\cos V<0$
(b) $(\sin U+\cos U)(\sin V+\cos V)\leq 0$
(c) $\cos(2U)\geq 0$ *ve* $\cos(2V)\geq 0$

olmasıdır (Magid 1989).

İspat. $\frac{2\sin U\sin V}{\sin(U+V)}$ için φ_{xx} ve $\frac{-2\cos U\cos V}{\sin(U+V)}$ için φ_{yy} kısaltmaları kullanılsın. p ve q'nun Önerme 4.10'daki (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağladığı kabul edilsin. $W=(1+p^2-q^2)^{1/2}$ olsun.

$$\frac{-(q^2+1)}{W}\frac{\sin(U+V)}{2}<0$$

olduğundan $\cos U \cos V < 0$ olur.

$$\varphi_{yy} - \varphi_{xx} = \frac{q^2+1-p^2+1}{W} = \frac{W^2+1}{W}$$

denklemi W'ya göre düzenlenirse,

$$W^2 + W\left(\varphi_{yy} - \varphi_{xx}\right) + 1 = 0 \tag{4.27}$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Kuadratik formülden, W çözümün pozitif olması için gerek ve yeter şart $\varphi_{yy} - \varphi_{xx} \leq -2$ olmasıdır. Burada φ_{yy} ve φ_{xx} yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{2\sin U \sin V + 2\cos U \cos V}{\sin(U+V)} &\leq -2 \\ 2\sin U \sin V + 2\cos U \cos V + 2\sin U \cos V + 2\cos U \sin V &\leq 0 \end{aligned}$$

olur. $q^2 \geq 0$ ise $\varphi_{yy} W \geq 1$ dır. 4.27 denklemini W için çözülür ve $1 \leq \varphi_{yy} W$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa, $\sigma = \pm 1$ için

$$1 \leq \frac{-2\cos U \cos V}{\sin(U+V)} \left[\frac{-\left(\cos U \cos V + \sin U \sin V\right) + \sigma\sqrt{\cos(2U)\cos(2V)}}{\sin(U+V)}\right]$$

$$\begin{aligned} \left(\sin U \cos V + \cos U \sin V\right)^2 \leq 2\cos^2 U \cos^2 V &+ 2\cos U \sin U \cos V \sin V \\ &- 2\sigma \cos U \cos V \sqrt{\cos(2U)\cos(2V)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2\sigma \cos U \cos V \sqrt{\cos(2U)\cos(2V)} \\ &\qquad \leq 2\cos^2 U \cos^2 V - \sin^2 U \cos^2 V - \cos^2 U \sin^2 V \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlik trigonometrik eşitlikler kullanılarak yeniden düzenlenirse,

$$2\sigma \cos U \cos V \sqrt{\cos(2U)\cos(2V)} \leq \cos^2 U \cos(2V) + \cos^2 V \cos(2U) \tag{4.28}$$

elde edilir. Lemma 4.9'dan $\cos(2U)$ ve $\cos(2V)$ aynı işaretli olduğu görülür. İkisinin de negatif olması koşulunda $2\sigma \cos U \cos V \leq 0$ olur. 4.28'de' her iki tarafın karesi alınırsa,

$$\begin{aligned} \cos^4 U \cos^2(2V) + \cos^4 V \cos^2(2U) &+ 2\cos^2 U \cos^2 V \cos(2U)\cos(2V) \\ &\leq 4\cos^2 U \cos^2 V \cos(2U)\cos(2V) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu

$$\left(\cos^2 U \cos(2V) + \cos^2 V \cos(2U)\right)^2 = 0$$

olmasını gerektirir. Buradan $\sin^2 U = \sin^2 V$ olur. U sadece u'ya ve V sadece v'ye bağlı olduğundan bu eşitsizliğin sağlanması için U'nun ve V'nin sabit olması gerekir. Böylece $\cos(2U)$ ve $\cos(2V)$'nin negatif olamayacağı görülür. (a), (b), (c) koşullarının sağlandığını kabul edilsin. $\sigma = \pm 1$ için,

$$W = \frac{-\cos(U-V) + \sigma\sqrt{\cos(2U)\cos(2V)}}{\sin(U+V)}$$

yazılabilir. W, Denklem 4.27'nin pozitif çözümüdür. p ve q yu bulmak için $0 \leq \varphi_{xx}W + 1$ ve $0 \leq \varphi_{yy}W - 1$ eşitsizliklerini elde edilmesi gerekmektedir. $0 \leq \varphi_{xx}W + 1$ eşitsizliğinden

$$-1 \leq \frac{2\sin U \sin V}{\sin(U+V)}\left[\frac{-(\cos U\cos V + \sin U \sin V) + \sigma\sqrt{\cos(2U)\cos(2V)}}{\sin(U+V)}\right]$$

$$\begin{aligned}&-\sin^2 U\cos^2 V - \cos^2 U \sin^2 V\\ &\qquad\leq -2\sin^2 U\sin^2 V + 2\sigma \sin U \sin V\sqrt{\cos(2U)\cos(2V)}\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade denk olarak,

$$\sin^2 U\cos(2V) + \sin^2 V\cos(2U) \geq -2\sigma\sin U\sin V\sqrt{\cos(2U)\cos(2V)}$$

şeklinde elde edilir. $0 \leq \left(\sin U\sqrt{\cos(2V)} + \sigma\sin V\sqrt{\cos(2U)}\right)^2$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik sağlanır. Benzer şekilde, $0 \leq \varphi_{yy}W - 1$ eşitsizliğinin sağlanması,

$$\cos^2 U\cos(2V) + \cos^2 V\cos(2U) - 2\sigma\cos U\cos V\sqrt{\cos(2U)\cos(2V)} \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasına denktir. Son olarak $p^2 = \varphi_{xx}W + 1$ ve $q^2 = \varphi_{yy}W - 1$ ise $1 + q^2 - p^2 = \left(\varphi_{xx} - \varphi_{yy}\right)W - 1 = W^2 > 0$ olur.

$p^2 = \varphi_{xx}W + 1$ ve $q^2 = \varphi_{yy}W - 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}p &= \pm\frac{\sin U\sqrt{\cos(2V)} + \sigma\sin V\sqrt{\cos(2U)}}{\sin(U+V)}\\ q &= \mp\frac{\sigma\cos V\sqrt{\cos(2U)} - \cos U\sqrt{\cos(2V)}}{\sin(U+V)}\end{aligned}$$

elde edilir (Magid 1989). □

Teorem 4.11. $\mathcal{F} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3_1$ *sıfır ortalama eğrilikli, timelike düzlem üzerinde timelike* *graf ise* $\mathbb{E}^2$ *de* $\{u, v\}$ *koordinatları ve*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_u &= \left(-\cos U, -\sin U, \pm(\cos 2U)^{1/2}\right) \\ \mathcal{F}_v &= \left(-\cos V, \sin V, \pm(\cos 2V)^{1/2}\right)\end{aligned}$$

olacak şekilde $U(u)$ *ve* $V(v)$ *fonksiyonları vardır (Magid 1989).*

Spacelike bir düzlem üzerindeki bir graf için aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.12. $\pi > U + V > 0$ *eşitsizliğini sağlayan* U *ve* V *fonksiyonları verilsin,*

(i) $p^2 + q^2 - 1 > 0$
(ii) $\frac{1-p^2}{\sqrt{p^2+q^2-1}} = \frac{2\sin U \sin V}{\sin(U+V)}$
(iii) $\frac{1-q^2}{\sqrt{p^2+q^2-1}} = \frac{-2\cos U \cos V}{\sin(U+V)}$

koşullarını sağlayacak şekilde p ve q fonksiyonları vardır (Magid 1989).

İspat. $\frac{2\sin U \sin V}{\sin(U+V)}$ için ψ_{yy}, $\frac{-2\cos U \cos V}{\sin(U+V)}$ için ψ_{zz} kısaltmalarını kullanılsın.

$$W = \frac{-\left(\psi_{yy} + \psi_{zz}\right) + \sqrt{\left(\psi_{yy} + \psi_{zz}\right)^2 + 4}}{2}$$

alınırsa, W

$$W^2 + W\left(\psi_{yy} + \psi_{zz}\right) - 1 = 0 \tag{4.29}$$

denkleminin tek pozitif çözümü olur. p ve q'nun tanımlanabilmesi ve 4.12 önermesindeki (i) koşulunun sağlanması için $0 \leq 1 - W\psi_{yy}$ ve $0 \leq 1 - W\psi_{zz}$ eşitsizliklerinin sağlandığı gösterilmelidir.

$$W\psi_{yy} \leq 1$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\frac{2\sin U \sin V}{\sin(U+V)}\left[\frac{-(\sin U \sin V - \cos U \cos V) + 1}{\sin(U+V)}\right] \leq 1$$

olmasıdır. Bu ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned}-2\sin^2 U \sin^2 V + 2\sin V \sin U &\leq \sin^2 U \cos^2 V + \cos^2 U \sin^2 V \\ 0 &\leq \sin^2 U + \sin^2 V - 2\sin U \sin V\end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitsizlikler her zaman doğrudur. Benzer şekilde,

$$W\psi_{zz} \leq 1$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\frac{-2\cos U\cos V}{\sin^2(U+V)}\left[-\sin U\sin V+\cos U\cos V+1\right]\leq 1$$

olmasıdır. Bu ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned} -2\cos^2 U\cos^2 V+2\cos U\cos V &\leq \sin^2 U\cos^2 V+\cos^2 U\sin^2 V \\ 0 &\leq \cos^2 V+\cos^2 U+2\cos U\cos V \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, p ve q tanımlanırsa

$$p^2+q^2-1=1-W\psi_{yy}+1-W\psi_{zz}-1=1-W\left(\psi_{yy}+\psi_{zz}\right)=W^2>0$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} p &= \pm\frac{\sin U-\sin V}{\sin(U+V)} \\ q &= \mp\frac{\cos U+\cos V}{\sin(U+V)} \end{aligned}$$

elde edilir (Magid 1989). □

Teorem 4.13. $\mathcal{H}:\mathbb{E}^2\to\mathbb{R}_1^3$ *sıfır ortalama eğrilikli, spacelike düzlem üzerinde timelike graf ise* $\mathbb{E}^2$ *de* $\{u,v\}$ *koordinatları ve*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_u &= (\pm 1,-\cos U,-\sin U) \\ \mathcal{H}_v &= (\pm 1,-\cos V,\sin V) \end{aligned}$$

olacak şekilde $U(u)$ *ve* $V(v)$ *fonksiyonları vardır (Magid 1989).*

4.4. Kesitsel Eğrilik

Teorem 4.11 ve Teorem 4.13'deki temsiller kullanılarak global Lorentz grafların kesitsel eğriliğini hesaplanabilir. Timelike düzlem üzerindeki graf göz önüne alınsın, $\sigma=\pm 1$ ve $\tau=\pm 1$ olmak üzere, Lorentz vektörel çarpımla normal vektörü,

$$N = \left(-\cos U,-\sin U,\sigma\sqrt{\cos(2U)}\right)\times\left(-\cos V,\sin V,\tau\sqrt{\cos(2V)}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ -\cos U & -\sin U & \sigma\sqrt{\cos(2U)} \\ -\cos V & \sin V & \tau\sqrt{\cos(2V)} \end{bmatrix} \\ &= \Big(\tau \sin U \sqrt{\cos(2V)} + \sigma \sin V \sqrt{\cos(2U)} \\ &\quad , \tau \cos U \sqrt{\cos(2V)} - \sigma \cos V \sqrt{\cos(2U)}, -\sin(U+V)\Big) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$\langle N, N\rangle = \left(\tau \cos(U-V) - \sigma\sqrt{\cos(2U)\cos(2V)}\right)^2$$

olduğundan, birim normal vektör,

$$\begin{aligned} \xi = \frac{N}{\sqrt{|\langle N, N\rangle|}} &= \left(\frac{\tau \sin U \sqrt{\cos(2V)} + \sigma \sin V \sqrt{\cos(2U)}}{\tau\cos(U-V) - \sigma\sqrt{\cos(2U)\cos(2V)}}\right. \\ &\quad , \frac{\tau \cos U \sqrt{\cos(2V)} - \sigma \cos V \sqrt{\cos(2U)}}{\tau\cos(U-V) - \sigma\sqrt{\cos(2U)\cos(2V)}} \\ &\quad \left., \frac{-\sin(U+V)}{\tau\cos(U-V) - \sigma\sqrt{\cos(2U)\cos(2V)}}\right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\{\partial/\partial u, \partial/\partial v\}$ null tabanına göre şekil operatörü $A_\xi = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ olur. Kesitsel eğrilik,

$$\begin{aligned} \kappa &= -bc = -\left\langle D_{\partial/\partial u}\frac{\partial}{\partial u}, \xi\right\rangle \left\langle D_{\partial/\partial v}\frac{\partial}{\partial v}, \xi\right\rangle \\ &= \frac{-1}{\langle N, N\rangle}\left\langle D_{\partial/\partial u}\frac{\partial}{\partial u}, N\right\rangle \left\langle D_{\partial/\partial v}\frac{\partial}{\partial v}, N\right\rangle \end{aligned}$$

dir.

$$D_{\partial/\partial u}\frac{\partial}{\partial u} = U'\left(\sin U, -\cos U, \frac{-\sigma\sin(2U)}{\sqrt{\cos(2U)}}\right)$$

ve

$$D_{\partial/\partial v}\frac{\partial}{\partial v} = \dot{V}\left(\sin V, \cos V, \frac{-\tau\sin(2V)}{\sqrt{\cos(2V)}}\right)$$

dir. Böylece kesitsel eğrilik,

$$\kappa = \frac{\sigma\tau U'\dot{V}}{\sqrt{\cos(2U)\cos(2V)}}$$

olarak elde edilir (Magid 1989).

$\mathcal{H}(y,z)$ grafı göz önüne alınırsa, birim normal vektörü,

$$\begin{aligned}
N &= (\sigma, -\cos U, -\sin U) \times (\tau, -\cos V, \sin V) \\
&= \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma & -\cos U & -\sin U \\ \tau & -\cos V & \sin V \end{bmatrix} \\
&= (\sin(U+V), -\tau \sin U - \sigma \sin V, -\sigma \cos V + \tau \cos U) \\
\langle N, N \rangle &= (\tau - \sigma \cos(U+V))^2 \\
\xi &= \frac{(\sin(U+V), -\tau \sin U - \sigma \sin V, -\sigma \cos V + \tau \cos U)}{(\tau - \sigma \cos(U+V))}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{uu} &= U'(0, \sin U, -\cos U) \\
\mathcal{H}_{uv} &= (0,0,0) \\
\mathcal{H}_{vv} &= \dot{V}(0, \sin V, \cos V)
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{H}_u, \mathcal{H}_u \rangle &= -\sigma^2 + \cos^2 U + \sin^2 U = -1 + 1 \\
&= 0 \\
\langle \mathcal{H}_u, \mathcal{H}_v \rangle &= -\sigma\tau + \cos U \cos V - \sin U \sin V \\
&= -\sigma\tau + \cos(U+V) \\
\langle \mathcal{H}_v, \mathcal{H}_v \rangle &= -\tau^2 + \cos^2 V + \sin^2 V = -1 + 1 \\
&= 0 \\
\langle \xi, \mathcal{H}_{uu} \rangle &= \frac{U'\left(-\tau \sin^2 U - \sigma \sin U \sin V + \sigma \cos U \cos V - \tau \cos^2 U\right)}{(\tau - \sigma \cos(U+V))} \\
&= U' \frac{-\tau + \sigma \cos(U+V)}{\tau - \sigma \cos(U+V)} \\
&= -U' \\
\langle \xi, \mathcal{H}_{uv} \rangle &= 0 \\
\langle \xi, \mathcal{H}_{vv} \rangle &= \frac{\dot{V}\left(-\tau \sin U \sin V - \sigma \sin^2 V - \sigma \cos^2 V + \tau \cos U \cos V\right)}{(\tau - \sigma \cos(U+V))} \\
&= \dot{V} \frac{\tau \cos(U+V) - \sigma}{\tau - \sigma \cos(U+V)}
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Şekil operatörü A olsun. O zaman,

$$A = \begin{bmatrix} \langle H_u, H_u \rangle & \langle H_u, H_v \rangle \\ \langle H_u, H_v \rangle & \langle H_v, H_v \rangle \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \langle \xi, H_{uu} \rangle & \langle \xi, H_{uv} \rangle \\ \langle \xi, H_{uv} \rangle & \langle \xi, H_{vv} \rangle \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & -\sigma\tau + \cos(U+V) \\ -\sigma\tau + \cos(U+V) & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -U' & 0 \\ 0 & \dot{V}\frac{\tau\cos(U+V)-\sigma}{\tau-\sigma\cos(U+V)} \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sigma\tau - \cos(U+V)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -U' & 0 \\ 0 & \dot{V}\frac{\tau\cos(U+V)-\sigma}{\tau-\sigma\cos(U+V)} \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sigma\tau - \cos(U+V)} \begin{bmatrix} 0 & \dot{V}\frac{\tau\cos(U+V)-\sigma}{\tau-\sigma\cos(U+V)} \\ -U' & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\tau\dot{V}}{(\tau-\sigma\cos(U+V))} \\ \frac{-\sigma U'}{(\tau-\sigma\cos(U+V))} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olur. Böylece kesitsel eğrilik

$$
\kappa = \frac{-\sigma\tau U'\dot{V}}{(\tau - \sigma\cos(U+V))^2}
$$

olarak elde edilir (Magid 1989).

5. SONUÇLAR

Bu tezde timelike yüzeyler için Bernstein Teoremi üzerine çalışıldı. İlk bölümde Bernstein Teoremi, Bernstein Teoremi'nin yüksek boyutlara taşınması, Lorentz uzayları ve Bernstein Teoremi'nin Lorentz uzaylarına uyarlanmasının tarihiyle ilgili bilgilere yer verildi. İkinci bölümde, yarı-Riemann manifoldların geometrisi ve Lorentz uzaylarla ilgili bazı tanımlar, teoremler ve ispatlar verildi.

Üçüncü bölümde, timelike ve spacelike düzlemler üzerindeki grafların şekil operatörleri elde edilerek minimal yüzey olmaları için sağlamaları gereken denklemler elde edildi. Dördüncü bölümde, minimal yüzey bulma problemi $\mathbb{E}^2$'den H_1^3 izometrik immersiyonların sınıflandırılması problemine indirgendi. Sonra, $\mathbb{E}^2$'den S^3'e izometrik immersiyonların birinci ve ikinci temel formlarının Öklidiyen koordinat sistemi $\{x, y\}$'ye göre, $\mathbb{E}^2$'deki global asimptotik koordinatlar $\{u, v\}$'ye göre ifade edilişleri üzerine çalışıldı. Sonra $\mathbb{E}^2$'den H_1^3 izometrik immersiyonlar sınıflandırıldı. Daha sonra sıfır ortalama eğrilikli yüzey üretmek için teoremler ve ispatları verildi. Son olarak da sıfır ortalama eğrilikli böyle grafların kesitsel eğrilikleri farklı yollarla hesaplandı.

Bu çalışmanın devamında $\mathbb{E}^2$'den S_1^3'e ve $\mathbb{E}_1^2$'den S_2^3'e izometrik immersiyonlar araştırılabilir. Ayrıca, H_1^3 ile S_2^3 arasındaki anti-izometri durumları göz önüne alınarak $\mathbb{E}^2$'den S_2^3'e izometrik immersiyonlar incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

Akamine, S. and Singh, R. K. 2017. Wick rotations of solutions to the minimal surface equation, the zero mean curvature equation and the Born-Infeld equation.

Almgren, F. J. 1966. Some Interior Regularity Theorems for Minimal Surfaces and an Extension of Bernstein's Theorem. *Ann. Math.*, 84(2):277.

Bernstein, S. 1914. Sur la meilleure approximation de |x| par des polynomes de degrés donnés. *Acta Math.*, 37:1–57.

Bianchi, L. 1894. *Lezioni di geometria differenziale*, Enrico Spoerri.

Birman, G. S. and Nomizu, K. 1984. The Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional spacetimes. *Michigan Math. J.*, 31(1):77–81.

Bombieri, E., De Giorgi, E. and Giusti, E. 1969. Minimal cones and the Bernstein problem. *Invent. Math.*, 7(3):243–268.

Burns, J. T. 1977. Curvature forms for Lorentz 2-manifolds. *Proc. Am. Math. Soc.*, 63(1):134–134.

Calabi, E. 1970. Examples of Bernstein problems for some non-linear equations. *Glob. Anal.*, 223–230 pp.

Chaohao, G. 1985. The extremal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space. *Acta Math. Sin.*, 1(2):173–180.

Cheng, S.-Y. and Yau, S.-T. 1976. Maximal Space-like Hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski Spaces. *Ann. Math.*, 104(3):407.

Chopp, D. L. 1991. *Computing Minimal Surfaces Via Level Set Curvature Flow*, LBNL Report: LBL-30685.

Dajczer, M. and Nomizu, K. 1981. *On Flat Surfaces in* S_1^3 *and* H_1^3, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 71–108 pp.

Darboux, G. 1894. *Leçons sur la théorie générale des surfaces.*

De Giorgi, E. 1965. Una estensione del teorema di Bernstein. *Ann. della Sc. Norm. Super. di Pisa - Cl. di Sci.*, 19(1):79–85.

de Woestijne, I. 1990. Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space. *Geom. Topol. submanifolds, II*, 344–369 pp.

Dey, R. and Singh, R. K. 2017. Born-Infeld solitons, maximal surfaces, and Ramanujan's identities. *Arch. der Math.*, 108(5):527–538.

Douglas, J. 1931. Solution of the Problem of Plateau. *Trans. Am. Math. Soc.*, 33(1):263.

Fleming, W. H. 1962. On the oriented Plateau Problem. *Rend. del Circ. Mat. di Palermo*, 11(1):69–90.

Hacısalihoğlu, H. Hilmi 2012. *Diferensiyel Geometri*, Hacısalihoğlu Yayınları, 2, Ankara, 338 s.

Inoguchi, J. and Toda, M. 2004. Timelike Minimal Surfaces via Loop Groups. *Acta Appl. Math.*, 83(3):313–355.

Jee, D. 1984. Gauss-Bonnet formula for general Lorentzian surfaces. *Geom. Dedicata*, 15(3).

Klarreich, N. 2002. Smoothability of the Conformal Boundary of a Lorentz Surface Implies 'Global Smoothability'. *Geom. Dedicata*, 89(1):57–105.

Kulkarni, R. S. 1985. An Analogue of the Riemann Mapping Theorem for Lorentz Metrics. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 401(1820):117–130.

Lagrange, J. L. 1761. Essai d'une nouvelle methode pour de'terminer les maxima, et les minima des formules integrales indefinies. *Gauthier-Villars, Paris*.

Lee, S. 2006. Timelike surfaces of constant mean curvature 1 in anti-de Sitter 3-space. *Ann. Glob. Anal. Geom.*, 29(4):355–401.

León-Guzmán, M. A., Mira, P. and Pastor, J. A. 2011. The space of Lorentzian flat tori in anti-de Sitter 3-space. *Trans. Am. Math. Soc.*, 363(12):6549–6573.

Lin, S. and Weinstein, T. 2000. A Better Conformal Bernstein's Theorem. *Geom. Dedicata*, 81(1):53–59.

López, R. 2008. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space. 7(1):44–107.

Luo, F. and Stong, R. 1997. Conformal embedding of a disc with a Lorentz metric into the plane. *Math. Ann.*, 309(3):359–373.

Magid, M. A. 1989. the Bernstein Problem for Timelike Surfaces. *Yokohama Math. J.*, 37(2):125–137.

Magid, M. A. 1991. Timelike surfaces in Lorentz 3-space with prescribed mean curvature and Gauss map. *Hokkaido Math. J.*, 20(3):447–464.

McNertney, L. V. 1980. *One-parameter Families of Surfaces with Constant Curvature in Lorentz 3-space*. PhD thesis, Brown University.

Milnor, T. K. 1987. A conformal analog of Bernstein's theorem for timelike surfaces in Minkowski 3-space. *Leg. Sonya Kovalevskaya (Cambridge, Mass., Amherst, Mass., 1985),*, 64:123–132.

O'Neill, B. 1983. *Semi-Riemannian Geometry-with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, London, 468 p.

Osserman, R. 2002. *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover Publications, 207 p.

Plateau, J. A. F. 1873. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Gauthier-Villars, 2.

Radó, T. 1930. The problem of the least area and the problem of Plateau. *Math. Zeitschrift*, 32(1):763–796.

Simons, J. 1968. Minimal Varieties in Riemannian Manifolds. *Ann. Math.*, 88(1):62.

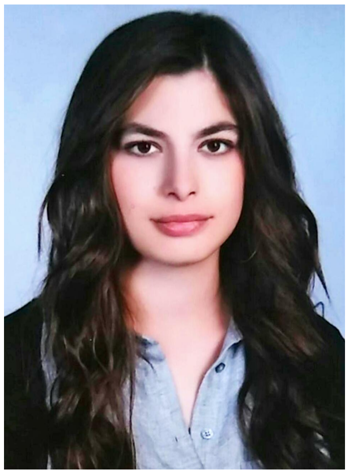
Smith, J. W. 1960. Lorentz Structures on the Plane. *Trans. Am. Math. Soc.*, 95(2):226.

Smyth, R. 1996. Uncountably many C^0 conformally distinct Lorentz surfaces and a finiteness theorem.

Smyth, R. 2002. Completing the conformal boundary of a simply connected Lorentz surface. *Proc. Am. Math. Soc.*, 130(3):841–847.

Weinstein, T. 1996. *An Introduction to Lorentz Surfaces*, De Gruyter, 22, Berlin, New York, 213 p.

ÖZGEÇMİŞ



Ecehan ER
ecehan679@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans: 2016-2019	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans: 2012-2016	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

ÖDÜLLER

- **Fakülte Birinciliği:** Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya, 2016.