T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BESSEL KAYMASININ DOĞURDUĞU RİESZ POTANSİYELLERİNDEN OLUŞAN FONKSİYONEL UZAYLAR VE ONLARIN DALGACIK TİPLİ DÖNÜŞÜMLER YARDIMIYLA NİTELENDİRİLMESİ

Esra SAĞLIK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2018

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BESSEL KAYMASININ DOĞURDUĞU RİESZ POTANSİYELLERİNDEN OLUŞAN FONKSİYONEL UZAYLAR VE ONLARIN DALGACIK TİPLİ DÖNÜŞÜMLER YARDIMIYLA NİTELENDİRİLMESİ

Esra SAĞLIK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2018

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BESSEL KAYMASININ DOĞURDUĞU RİESZ POTANSİYELLERİNDEN OLUŞAN FONKSİYONEL UZAYLAR VE ONLARIN DALGACIK TİPLİ DÖNÜŞÜMLER YARDIMIYLA NİTELENDİRİLMESİ

Esra SAĞLIK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 21./.06/2018 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. İlham ALİYEV (Danışman)
Prof.Dr. Salih AYTAR
Prof.Dr. Anar ADİLOĞLU
Doç.Dr. Simten BAYRAKÇI
Doç.Dr. Gültekin TINAZTEPE

ÖZET

BESSEL KAYMASININ DOĞURDUĞU RİESZ POTANSİYELLERİNDEN OLUŞAN FONKSİYONEL UZAYLAR VE ONLARIN DALGACIK TİPLİ DÖNÜŞÜMLER YARDIMIYLA NİTELENDİRİLMESİ

Esra SAĞLIK

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. İlham ALİYEV

Haziran 2018, 52 sayfa

Laplace diferansiyel operatörü diye adlandırılan

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

diferansiyel operatörü, matematiğin en ünlü diferansiyel operatörlerinden biridir. Örneğin, n boyutlu Euclid uzayı $\mathbb{R}^n$'de klasik dalga denklemi ve ısı geçirme denklemi bu diferansiyel oparatör yardımıyla ifade edilir. Bu tez çalışmasında üzerinde çalışılan konu, Laplace diferansiyel operatörü ile singüler Bessel diferansiyel operatörünün toplamı olarak ortaya çıkan ve Laplace-Bessel diferansiyel operatörü diye adlandırılan hibrit bir diferansiyel operatörün doğurduğu ve Fourier-Bessel Harmonik Analiz denilen harmonik analiz ile ilgilidir.

1950'li yıllardan sonra gelişmeye başlayan Fourier-Bessel Harmonik Analiz'in en önemli vasıtalarından biri de, Bessel kayması (genelleşmiş kayma) ile ilişkilendirilen Riesz potansiyelleri olmuştur.

Klasik Fourier Harmonik Analizinde Riesz potansiyellerinin oynadığı rolü Fourier-Bessel Harmonik Analizinde genelleşmiş Riesz potansiyelleri üstlenmektedir.

Fourier-Bessel Harmonik Analizinin önemli teknik araçlarından biri olan genelleşmiş Riesz potansiyellerinin ele alındığı bu tez çalışmasının esas amacı, söz konusu potansiyeller ve onların tersleri için yeni gösterim vermek ve bu potansiyellerin doğurduğu

uzaylar için bir karakterizasyon sunmaktır. Bunun için, öncelikle Abel-Poisson ve Gauss-Weierstrass yarı gruplarının ikisini de genelleyen yeni bir yarı grup tanımlanmış ve bu yarı grup yardımıyla genelleşmiş Riesz potansiyelleri için bir boyutlu yeni bir integral gösterimi verilmiştir. Bir dalgacık tipli dönüşüm tanımlanarak, ters bulma formülü elde edilmiş ve bu potansiyellerin tersi bulunmuştur. Bundan başka, değişkenlerden yalnız birine değil, birkaçına genelleşmiş kayma uygulanarak ortaya çıkan genelleşmiş Riesz potansiyelleri için yeni bir gösterim daha sunulmuş ve son olarak da bu potansiyellerin doğurduğu uzayın karakterizasyonu (nitelendirilmesi) verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bessel kayma operatörü, Dalgacık tipli dönüşüm, Fourier-Bessel dönüşümü, Genelleşmiş Abel-Poisson yarı grup, genelleşmiş Gauss-Weierstrass yarı grup, Genelleşmiş Riesz potansiyelleri, Genelleşmiş Riesz potansiyelleri uzayı

JÜRİ: Prof.Dr. İlham ALİYEV
Prof.Dr. Salih AYTAR
Prof.Dr. Anar ADİLOĞLU
Doç.Dr. Simten BAYRAKÇI
Doç.Dr. Gültekin TINAZTEPE

ABSTRACT

THE FUNCTIONAL SPACES FORMED BY THE RIESZ POTENTIALS, GENERATED BY BESSEL SHIFT AND THEIR CHARACTERIZATION WITH THE AID OF WAVELET TYPE TRANSLATION

Esra SAĞLIK

PhD Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. İlham ALİYEV
June 2018, 52 pages

The differantial operator, named Laplace differential operator,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

is one of the most famous operators in mathematics. For example, classical wave equation and heat equation in $n-$dimensional space $\mathbb{R}^n$, are expressed with the aid of this differential operator. The subject, studied in this thesis, is related to Harmonic Analysis which is named Fourier-Bessel Harmonic Analysis, arised as the sum of Laplace differential operator and singular Bessel differential operator and generated by a hibrit differential operator named Laplace-Bessel differential operator.

One of the most important means of Fourier-Bessel Harmonic Analysis, starting to develop after the 1950s, is the Riesz potentials which is associated with Bessel shift.

The role of Riesz potentials in Classical Fourier Harmonic Analiyisis, plays generalized Riesz potentials in Fourier-Bessel Harmonic Analysis.

The real aim of this thesis study which deals with the generalized Riesz potentials, one of the important technical tools of Fourier-Bessel Harmonic Analysis, is to give a new presentation for this potentials and its inverse and a new characterization for the spaces generated by these potentials. Firstly for this, a new semi group was identified which is generalized both of Abel-Poisson and Gauss-Weierstrass semi groups and a new one dimensional integral repesentation is given with the aid of this semi group. A wavelet type transform is identified, the inverse formula is obtained and the opposite of this potentials are found. Moreover, a new representation is given to generalized Riesz potentials, by applying generalized shift to a few of the variables, not only to one variable, and finally, the characterization of the space which is generated by these potentials, is presented.

KEYWORDS: Bessel shift operator, Fourier-Bessel transform, Generalized Abel-Poisson semi group, Generalized Gauss-Weierstrass semi group, Generalized Riesz potentials, Generalized Riesz potential spaces, Wavelet type transform

COMMITTEE: Prof.Dr. İlham ALİYEV
Prof.Dr. Salih AYTAR
Prof.Dr. Anar ADİLOĞLU
Assoc.Prof.Dr. Simten BAYRAKÇI
Assoc.Prof.Dr. Gültekin TINAZTEPE

ÖNSÖZ

Matematik literatürde Fourier Analizi olarak da bilinen Klasik Harmonik Analiz'in en önemli operatörlerinden olan

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Laplace diferansiyel operatörünün negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanan Riesz potansiyelleri, hem Harmonik Analiz'in kendisinde ve hem de onun çeşitli uygulamalarında önemli matematiksel araç olarak kullanılmaktadır. Örneğin, ünlü Sobolev uzaylarının ve onların bazı genelleşmelerinin incelenmesinde, Radon dönüşümlerinin terslerinin bulunmasında Riesz potansiyellerinin önemli rol oynadığı bilinmektedir.

Geçen yüzyılın ortalarında gelişmeye başlayan Fourier-Bessel Harmonik Analizi'nde bir teknik araç olarak kullanılan genelleşmiş Riesz potansiyelleri, Klasik Harmonik Analiz' deki Riesz potansiyellerinin oynadığı rolün benzerini oynamaktadır.

Bu tez çalışmasında öncelikle, ilk $n-1$ değişkene göre Euclid kayması ve sonuncu değişkene göre de Bessel kaymasının doğurduğu Abel-Poisson ve Gauss-Weierstrass yarı gruplarının her ikisini de genelleştiren bir yarı grup tanımlanmış, sonra bu yarı grup yardımıyla genelleşmiş Riesz potansiyelleri için yeni bir integral gösterimi verilmiştir. Daha sonra bir dalgacık (wavelet) ölçümü vasıtasıyla yeni bir dalgacık tipli dönüşüm tanımlanmıştır. Ardından, tanımlanan bu dalgacık tipli dönüşüm yardımıyla genelleşmiş Riesz potansiyelleri için ters çevirme formülü bulunmuş ve yeni gösterimi sunulan genelleşmiş Riesz potansiyellerinin doğurduğu fonksiyonel uzaylar için bir karakterizasyon verilmiştir. Son olarak da ele alınan Bessel kaymasının farklı bir tanımı kullanılarak, ortaya çıkan genelleşmiş Riesz potansiyelleri için yeni bir gösterim daha verilmiştir.

Bu çalışma boyunca benden zamanını, bilgisini ve desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. İlham ALİYEV'e ve bölümümüz hocalarına, her zaman desteği benimle olan kıymetli eşim Serkan SAĞLIK'a ve çok değerli aileme ve doktora eğitimim süresince bana verdiği maddi destekten ötürü TÜBİTAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT iii
ÖNSÖZ v
AKADEMİK BEYAN vii
SİMGELER VE KISALTMALAR viii
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK TARAMASI 3
3. MATERYAL VE METOT 10
3.1. $F_{\nu}^{-1}\left(\exp(-t\,|x|^{\beta})\right)$ Tarafından Üretilen Beta Yarıgrup ve Özellikleri . . 10
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 21
4.1. Dalgacık Tipli Bir İntegral Dönüşüm 21
4.2. Genelleşmiş Riesz Potansiyelleri için Yeni Bir Ters Bulma Formülü . . . 25
4.3. Genelleşmiş Riesz Potansiyelleri Uzayının Bir Karakterizasyonu 29
4.4. Riesz Potansiyellerinin Bir Başka Genelleşmesi için Bir Boyutlu İntegral Gösterimi ve Ters Bulma Formülü 34
5. SONUÇLAR 48
6. KAYNAKLAR 49
ÖZGEÇMİŞ

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum "BESSEL KAYMASININ DOĞURDUĞU RİESZ POTANSİYELLERİNDEN OLUŞAN FONKSİYONEL UZAYLAR VE ONLARIN DALGACIK TİPLİ DÖNÜŞÜMLER YARDIMIYLA NİTELENDİRİLMESİ" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

21/06/2018

Esra SAĞLIK

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu Euclid uzayı
$\mathbb{R}^n_+$	: $\mathbb{R}^n$'nin son değişken x_n'nin pozitif olduğu alt kümesi
$S(\mathbb{R}^n)$	: Schwartz test fonksiyonları uzayı
$S(\mathbb{R}^n_+)$	: Schwartz test fonksiyonları uzayının $\mathbb{R}^n_+$'ya uyarlaması
$L_{p,\nu}(\mathbb{R}^n_+)$	: Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$F\varphi$	: φ'nin Fourier dönüşümü
$F^{-1}\varphi$	: φ'nin ters Fourier dönüşümü
$F_\nu\varphi$	: φ'nin Fourier-Bessel dönüşümü
$F_\nu^{-1}\varphi$	: φ'nin ters Fourier-Bessel dönüşümü
$T_x^y f$	: f fonksiyonuna uygulanmış Euclid kayması (klasik kayma)
$T^y\varphi$	: φ fonksiyonuna uygulanmış Bessel kayması (genelleşmiş kayma)
$I_\nu^\alpha f$	: f'nin genelleşmiş Riesz potansiyelleri
$P_t^{(\nu)} f$	: Abel-Poisson yarı grubu
$G_t^{(\nu)} f$	: Gauss-Weierstrass yarı grubu
$\omega_\nu^{(\beta)}\left(\lvert y\rvert, t\right)$	: $e^{-t\lvert x\rvert^\beta}$'nın ters Fourier-Bessel dönüşümü
$W_t^{(\beta)} f$	: $\omega_\nu^{(\beta)}\left(\lvert y\rvert, t\right)$ çekirdeği tarafından üretilen yarı grup
$L_{\infty,\nu}(\mathbb{R}^n_+)$	: $\mathbb{R}^n_+$'da sürekli ve $\lvert x\rvert \to \infty$ için 0'a yakınsayan fonksiyonlar uzayı
$I^\alpha\left(L_p\right)$	: Klasik Riesz potansiyelleri uzayı
$I_\nu^\alpha\left(L_{p,\nu}\right)$	: Genelleşmiş Riesz potansiyelleri uzayı
h.h.h.	: Hemen hemen her

1. GİRİŞ

Harmonik Analiz'in önemli teknik araçlarından biri olan Riesz potansiyelleri, Laplace diferansiyel operatörü olarak bilinen

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

operatörünün negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanmaktadır. Bu diferansiyel operatör, Matematiksel Fiziğin önemli kısmi türevli denklemleri olan Dalga Denklemi ve Isı Geçirme Denkleminde ortaya çıkmakla beraber, onun negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanan Riesz potansiyelleri de ünlü Sobolev uzaylarının nitelendirilmesinde, özelliklerinin incelenmesinde, Radon dönüşümünün tersinin belirlenmesinde ve başka alanlarda kullanılmaktadır. 1950'li yıllardan bu yana, Laplace diferansiyel operatörünün yanı sıra, singüler Laplace-Bessel diferansiyel operatörü de matematikte ciddi şekilde uygulama alanı bulmuş ve bu operatör ile sıkı bağlantılı olan Fourier-Bessel Harmonik Analizi denilen analiz alanı gelişmeye başlamıştır. Klasik Fourier Harmonik Analizin'de Riesz potansiyelleri önemli teknik araç olduğu gibi, Fourier- Bessel Harmonik Analizi'nin de önemli teknik araçlarından biri Laplace-Bessel operatörünün doğurduğu Bessel kayması (birçok kaynakta "genelleşmiş kayma" olarak da biliniyor) ile ilişkilendirilen Riesz potansiyelleridir. Bu potansiyellerin temel özellikleri Gadjiev ve Aliyev'in 1988 yılında yayımlanan iki makelesinde verilmiştir. Birçok yayında hem genelleşmiş Riesz potansiyelleri hem de genelleşmiş kayma ile ilişkilendirilen Bessel potansiyelleri çeşitli açılardan incelenmiştir.

Bu çalışmanın esas amacı, genelleşmiş kayma olarak da bilinen Bessel kayması kullanılarak genelleşmiş Riesz potansiyelleri için yeni bir integral gösterimi sunmak ve bu potansiyellerin doğurduğu genelleşmiş Riesz potansiyelleri uzayı için bir karakterizasyon vermektir.

Bu tez çalışması, Giriş ve Kaynaklar bölümleri hariç, dört bölümden ibarettir.

İkinci bölümde, kaynak taraması yapılarak çalışma için gerekli araştırmalar ve önbilgiler sunulmuştur.

Üçüncü bölüm olan "Materyal ve Metot" kısmında, Bessel kaymasının doğurduğu Abel-Poisson ve Gauss-Weierstrass yarı gruplarının her ikisini de genelleştiren bir yarı grup tanımlanarak, bu çalışmada gerekli olan tüm özellikleri incelenmiş ve bu yarı grup yardımıyla genelleşmiş Riesz potansiyellerinin tek değişkene bağlı integral gösterimi bulunmuştur.

Dördüncü bölüm olan "Bulgular ve Tartışma" kısmı, dört alt başlıktan oluşmaktadır. İlk olarak, bir dalgacık (wavelet) ölçümü tanımlanarak, bu ölçüm yardımıyla yeni bir dalgacık tipli integral dönüşüm oluşturulmuş ve uygun bir Calderon ters belirleme formülü bulunmuştur. İkinci olarak, bu dalgacık tipli dönüşüm ve Bessel kaymasının doğurduğu genelleşmiş Riesz potansiyellerinin yeni tek değişkenli integral gösterimi kullanılarak, söz konusu potansiyellerin tersleri belirlenmiştir. Üçüncü olarak, genelleşmiş Riesz potansiyelleri uzayının bir karakterizasyonu (nitelendirilmesi) verilmiştir. Son olarak da; buraya kadar elde edilen sonuçların temelinde kullanılan Bessel kaymasının tanımı değiştirilerek, k değişkene göre Bessel kayması, $n-k$ değişkene göre Öklid kayması uygulanmış ve ortaya çıkan genelleşmiş Riesz potansiyelleri için bir integral gösterimi verilmiştir.

Beşinci bölüm olan "Sonuç" kısmında da tez çalışmasında elde edilen sonuçların kısa bir özeti sunulmuştur.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde tez çalışması boyunca kullanılacak bazı temel bilgiler verilecektir.

$\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, ..., x_n), \forall i = 1, ..., n,\ x_i \in \mathbb{R}\}$, n boyutlu Öklid uzayı ve bu uzay üzerindeki norm

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

şeklinde tanımlıdır. Şimdi n boyutlu Öklid uzayının tez çalışması boyunca kullanılacak bir alt metrik uzayı verilecektir.

$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ şeklinde tanımlansın. Burada, $\mathbb{R}^n$'deki doğal normun doğurduğu metrik kullanılmaktadır:

$$x, y \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{için} \quad d(x, y) = |x - y| \, .$$

$S(\mathbb{R}^n)$ ile kendisi ve tüm türevleri hızla azalan, diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayı olan Schwartz test fonksiyonları uzayı temsil edilecektir.

(Bir f fonksiyonu için $\lambda - \imath nc\imath$ mertebeden türevin hızla azalması demek; her $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ için, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$ ve $D^\lambda \equiv \frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} ... \partial x_n^{\lambda_n}}$ olmak üzere,
$\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha| \left| D^\lambda f(x) \right| < \infty$ olmasıdır.)

$S(\mathbb{R}_+^n)$; $\mathbb{R}^n$'de x_n son değişkene göre çift olan Schwartz test fonksiyonlarının $\mathbb{R}_+^n$'ya uyarlanmış fonksiyonlar uzayı ve $S(\mathbb{R}_+^n)$'nın

$$\|f\|_{p,\nu} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p \, x_n^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.1}$$

normu ile kapanışı $L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı olarak tanımlansın. $L_{p,\nu}$ uzayı, bir Banach uzayıdır. Burada, $\nu > 0$ belirlenmiş bir parametre,
$dx = dx_1 ... dx_{n-1} dx_n$ ve $1 \leq p < \infty$'dır. $S(\mathbb{R}_+^n)$ uzayının supremum normunda kapanışı

$$L_{\infty,\nu}(\mathbb{R}_+^n) \equiv C_0(\mathbb{R}_+^n)$$

$\mathbb{R}_+^n$'da sürekli ve $|x| \to \infty$ için 0'a yakınsayan fonksiyonlar uzayıdır.

Şimdi tezin esas çalışmalarında kullanılacak bazı tanım, kavram ve özel integral dönüşümler ifade edilecektir.

• Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü

$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\hat{f}$, her $x \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi ixt}dt\ .$$

Bir $g \in L_1$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü de şu şekilde tanımlanır:

$$\breve{g}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{2\pi itx}dx\ .$$

Bazı kaynaklarda $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü sırasıyla,

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-ixt}dt$$

ve

$$\check{f}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\lambda x}dx$$

şeklinde tanımlanır (Spigel 1974).

$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü için $f^\wedge$, Ff ve ters Fourier dönüşümü için $f^\vee$, $F^{-1}f$ gibi gösterimler de kullanılmaktadır.

Fourier dönüşümünün iyi bilinen bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibidir:

$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda,

a) $f^\wedge(x)$ fonksiyonu tüm $\mathbb{R}^n$'de düzgün süreklidir.

b) $f^\wedge(x)$ sınırlı fonksiyondur ve $\|f^\wedge\|_\infty \leq \|f\|_1$.

c) $f \geq 0$ olsun. O zaman

$$\|f^\wedge\|_\infty = \|f\|_1 = f^\wedge(0)$$

eşitliği sağlanır.

d) $\lim\limits_{|x|\to\infty} f^\wedge(x) = 0$ 'dır.

e) $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g^\wedge(x)dx$$

eşitliği sağlanır (Stein 1970; Sadosky 1979).

• **Fourier-Bessel dönüşümü ve ters Fourier-Bessel dönüşümü**

$$\begin{aligned}(F_\nu \varphi)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(y) e^{-ix'\cdot y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) y_n^{2\nu} dy \\ \left(F_\nu^{-1}\varphi\right)(x) &= c_\nu(n)\,(F_\nu \varphi)(-x', x_n)\end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada, $x' \cdot y' = x_1 y_1 + ... + x_{n-1} y_{n-1}$, $\varphi \in L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$,

$$c_\nu(n) = \left[(2\pi)^{n-1} 2^{2\nu-1} \Gamma^2(\nu + \frac{1}{2})\right]^{-1}, \tag{2.3}$$

ve $J_s(t)$ I. tip Bessel fonksiyonu olmak üzere, $j_s(t)$ $(t > 0,\ s > -\frac{1}{2})$ normalleştirilmiş Bessel fonksiyonu olup

$$j_s(t) = \frac{2^s \Gamma(p+1) J_s(t)}{t^s}$$

şeklinde tanımlıdır (Kipriyanov 1967).

Fourier-Bessel dönüşümü $S(\mathbb{R}_+^n)$ uzayının bir otomorfizmidir. Ayrıca, $\varphi \in L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ radial ise $F_\nu \varphi$ de radial olur (Zasorin 1986; Kipriyanov 1997).

Hatırlatalım ki, $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ olmak üzere bir φ fonksiyonu yalnız $|x|$'e bağlı ise, bu fonksiyon radial fonksiyon diye adlandırılır. Örneğin $e^{-|x|^2}$ bir radial fonksiyondur.

• **Klasik Euclid (Öklid) kayması**

$$T_x^y f(x) = f(x+y)$$

şeklinde tanımlıdır. $T_x^y f$ Euclid kayması L_p'den L_p'ye sınırlıdır; dahası, $f \in L_p$ için,

$$\|T_x^y f\|_p = \|f\|_p$$

sağlanır.

• **Euclid kayması tarafından üretilen girişim (konvolüsyon, convolution)**

f,$g \in L_p$ için, f ile g'nin klasik girişimi

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy$$

biçiminde tanımlıdır.

Klasik girişim ve Klasik Fourier dönüşümü arasında iyi bilinen

$$(f * g)^\wedge(x) = f^\wedge(x) g^\wedge(x)$$

özelliği sağlanır (Stein ve Weiss 1971).

• T^y **genelleşmiş kayma (öteleme) operatörü**

Bu çalışmada aşağıdaki tanımı kullanılmıştır:

$$\left(T^y\varphi\right)(x) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\pi \varphi\left(x'-y'; \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n\cos\theta + y_n^2}\right)\sin^{2\nu-1}\theta d\theta \quad (2.4)$$

(Kipriyanov 1997; Levitan 1951).

• T^y **kayması tarafından üretilen Bessel girişimi,**

$$\left(\varphi \circledast \psi\right)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(\xi)T^\xi\psi(x)\xi_n^{2\nu}d\xi,\ (d\xi = d\xi_1...d\xi_n) \quad (2.5)$$

biçiminde tanımlıdır. Bessel girişiminin (konvolüsyonunun) bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

a) Bessel girişimi değişme özelliğini sağlar : $\varphi \circledast \psi = \psi \circledast \varphi$

b) Bessel girişimi ile Fourier Bessel dönüşümü arasında

$$F_\nu(\varphi \circledast \psi) = \left(F_\nu\varphi\right).\left(F_\nu\psi\right)$$

özelliği sağlanır.

c) Bessel girişimi aşağıda verilen **Young eşitsizliği**ni de sağlar:

$$\|\varphi \circledast \psi\|_{r,\nu} \leq \|\varphi\|_{p,\nu}\|\psi\|_{q,\nu},\ 1 \leq p,q,r \leq \infty \text{ ve } \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{1}{r}+1 \quad (2.6)$$

(Kipriyanov 1997).

• **Klasik Riesz potansiyelleri**

Klasik Riesz potansiyelleri şöyle tanımlıdır:

$$\begin{aligned} I^\alpha f(x) &= c_{n,\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\frac{1}{|y|^{n-\alpha}}dy \\ &= c_{n,\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \\ &= c_{n,\alpha}.f * \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \end{aligned}$$

Burada,

$$c_{n,\alpha} = \frac{2^\alpha\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}$$

şeklindedir.

Klasik Riesz potansiyellerinin Fourier dönüşümü

$$(I^{\alpha} f)^{\wedge}(x) = |x|^{-\alpha} f^{\wedge}(x)$$

şeklinde olduğu bilinmektedir (Samko 2002).

• **Genelleşmiş Riesz potansiyelleri**

(2.4) ile verilen genelleşmiş kayma tarafından üretilen genelleşmiş Riesz potansiyelleri, Fourier-Bessel dönüşümüleri dilinde, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$I_{\nu}^{\alpha} f = F_{\nu}^{-1}\left(|\xi|^{-\alpha} F_{\nu} f\right); f \in S(\mathbb{R}_{+}^{n}), 0 < \alpha < n + 2\nu\,. \tag{2.7}$$

Bu potansiyeller Bessel girişimi dilinde, aşağıdaki gibi verilir:

$$\left(I_{\nu}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\gamma_{n,\nu}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}_{+}^{n}} |y|^{\alpha-n-2\nu}\, T^{y} f(x) y_{n}^{2\nu} dy\,. \tag{2.8}$$

Burada,

$$\gamma_{n,\nu}(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2\nu-\alpha}{2}\right)}, 0 < \alpha < n + 2\nu \tag{2.9}$$

(Gadjiev ve Aliev 1988a; Aliev ve Rubin 2001; Aliev ve Bayrakci 1998,2002).

• $I_{\nu}^{\alpha} f$ potansiyellerinin; genelleşmiş T^{y} kayması tarafından üretilen Abel-Poisson ve Gauss-Weierstrass yarıgrupları terimleri dilinde bir boyutlu integral gösterimleri sırasıyla şu şekildedir:

$$\left(I_{\nu}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1}\left(P_{t}^{(\nu)} f\right)(x) dt; \tag{2.10}$$

$$\left(I_{\nu}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{0}^{\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(G_{t}^{(\nu)} f\right)(x) dt \tag{2.11}$$

(Aliev ve Rubin 2001).

Burada genelleşmiş kayma tarafından üretilen $P_{t}^{(\nu)} f$ Abel-Poisson yarıgrubu ve $G_{t}^{(\nu)} f$ Gauss-Weierstrass yarıgrubu olup;

$$\left(P_{t}^{(\nu)} f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}_{+}^{n}} p_{\nu}(y;t) T^{y} f(x) y_{n}^{2\nu} dy\,, (t > 0), \tag{2.12}$$

$$p_{\nu}(y;t) \equiv F_{\nu}^{-1}(e^{-t|x|})(y) = \frac{2}{\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \frac{t}{\left(|y|^{2}+t^{2}\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}}; \tag{2.13}$$

$$\left(G_t^{(\nu)}f\right)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} g_\nu(y;t)T^yf(x)y_n^{2\nu}dy\ ,\ (t>0), \tag{2.14}$$

$$g_\nu(y;t)\equiv F_\nu^{-1}(e^{-t|x|^2})(y)=\frac{2\pi^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}(4\pi t)^{-\frac{n+2\nu}{2}}e^{-\frac{|y|^2}{4t}}\ . \tag{2.15}$$

biçimindedirler. Klasik Riesz potansiyelleri için (2.10) ve (2.11) formüllerinin benzerleri, daha önce sırasıyla Stein ve Weiss (1960) ve Johnson (1973) makalelerinde verildiğini hatırlatalım.

• **Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu**

$f\in L_{p,\nu}$, $(1\le p<\infty)$ olmak üzere, Hardy-Littlewood maksimal operatörü şu şekilde tanımlıdır:

$$\left(M_\nu f\right)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n+2\nu}\omega(n;\nu)}\int\limits_{B_r^+}\left|T^xf(y)\right|y_n^{2\nu}dy,\ x\in\mathbb{R}_+^n. \tag{2.16}$$

Burada, $B_r^+=\left\{x: x\in\mathbb{R}_+^n, |x|\le r\right\}$ ve $\omega(n;\nu)=\int\limits_{B_1^+}x_n^{2\nu}dx.$

$1<p<\infty$ için,

$$\left\|M_\nu f\right\|_{p,\nu}\le c_1\left\|f\right\|_{p,\nu}$$

sağlanır. Bu $M_\nu f$ Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $1<p<\infty$ için güçlü (p,p) tipli olduğu anlamına gelir.

$p=1$ için,

$$\mu\{x\in\mathbb{R}_+^n : |M_\nu f(x)|>\lambda\}\le c_2\frac{\|f\|_{1,\nu}}{\lambda}, (\forall\lambda>0)$$

sağlanır. Bu da $M_\nu f$ Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $p=1$ için zayıf $(1,1)$ tipli olduğu anlamına gelir.Burada, $E\subset\mathbb{R}_+^n$ için $\mu E=\int\limits_E x_n^{2\nu}dx$ biçiminde tanımlanır (Guliev 2003).

• **Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği**

$\varphi\left(x,y\right), \mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_y^m$'de ölçülebilir bir fonksiyon ve $1\le p\le\infty$ olmak üzere,

$$\left\|\int_{\mathbb{R}_y^m}\varphi\left(x,y\right)dy\right\|_{L_p(\mathbb{R}_x^n)}\le\int_{\mathbb{R}_y^m}\left\|\varphi\left(\cdot,y\right)\right\|_{L_p(\mathbb{R}_x^n)}dy$$

eşitsizliği sağlanır (Folland 1984).

• **Hölder Eşitsizliği**

$f_1 \in L_p$, $f_2 \in L_q$, $1 \leq p, q \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x) f_2(x)| \, dx \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_q \tag{2.17}$$

olur. Burada $p = \infty$ için $q = 1$ olup $\|f\|_\infty = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{ess \sup} |f(x)|$'tir (Samko vd. 1993).

Teorem 2.1. ***(Lebesgue Baskın Yakınsama Teoremi)*** *$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, L_1 uzayında,*

(i) $f_n \to f$ $(h.h.h.)$

(ii) Bir g pozitif fonksiyonu ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $|f_n| \leq g$

özelliklerini sağlayan bir dizi olsun. O zaman $f \in L_1$'dir ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_n(x)dx$$

dir (Folland 1984).

Teorem 2.2. ***(Fubini Teoremi)*** *(X, M, μ) ve (Y, N, ν) $\sigma-$sonlu ölçüm uzayları, $\mu \times \nu$ ölçümü de $M \times N$ üzerinde μ ve ν'nün çarpımı olsun. Eğer, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu \times \nu$ ölçümüne göre integrallenebilir ise, $h.h.h.$ $y \in Y$ için $\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)$ integrali ve $h.h.h.$ $x \in X$ için $\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)$ integrali sonludur ve*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

eşitliği sağlanır (Folland 1984).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, ilk bölümde tanıtılan, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Abel-Poisson ve Gauss-Weierstrass yarı gruplarının her ikisini de genelleştiren bir yarı grup tanımlanacak ve bazı özellikleri verilecektir.

3.1. $F_\nu^{-1}\left(\exp(-t\,|x|^\beta)\right)$ Tarafından Üretilen Beta Yarıgrup ve Özellikleri

$\beta > 0$ verilsin. F_ν^{-1} ters Fourier-Bessel dönüşümü olmak üzere, $F_\nu^{-1}\left(\exp(-t\,|x|^\beta)\right)(y)$, $(t > 0;\, x, y \in \mathbb{R}_+^n)$ fonksiyonu tanımlansın. $\varphi \in L_{1,\nu}$ radial ise o zaman $F_\nu\varphi$ ve $F_\nu^{-1}\varphi$ de radialdir. Böylece, $F_\nu^{-1}\left(\exp(-t\,|x|^\beta)\right)(y)$ de radial bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonu $\omega_\nu^{(\beta)}(|y|\,, t)$ ile gösterelim:

$$\omega_\nu^{(\beta)}(|y|\,, t) = F_\nu^{-1}\left(\exp(-t\,|x|^\beta)\right) = c_\nu(n) \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-t|x|^\beta} e^{ix'\cdot y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) x_n^{2\nu} dx \qquad (3.1)$$

Şimdi bu "çekirdek fonksiyonun" bir $f \in L_{p,\nu}$ fonksiyonu ile girişiminden ortaya çıkan integral operatörler ailesi oluşturalım.

Tanım 3.3. *(3.1) çekirdeği tarafından üretilen Beta yarı grup, girişim tipli bir operatör biçiminde olup ifadesi şu şekildedir:*

$$\left(W_t^{(\beta)} f\right)(x) = \left(\omega_\nu^{(\beta)}(|.|\,, t) \circledast f\right)(x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)}(|y|\,, t)\, T^y f(x) y_n^{2\nu} dy. \qquad (3.2)$$

- (3.2) tanımında özel olarak, $\beta = 1$ durumu genelleşmiş Abel-Poisson yarıgrubunu, $\beta = 2$ durumu ise genelleşmiş Gauss-Weierstrass yarıgrubunu vermektedir.

  (2.13) ve (2.15) Abel-Poisson ve Gauss-Weierstrass çekirdeklerinin tersine $\omega_\nu^{(\beta)}(|y|\,, t)$ çekirdeği açıkça ifade edilemese de, bazı önemli özellikleri aşağıdaki önteoremde ispatlanmıştır.

Önteorem 3.4. $x, y \in \mathbb{R}_+^n$, $0 < t < \infty$ *ve* $0 < \beta < \infty$ *olsun. O zaman,*

(a)

$$\omega_\nu^{(\beta)}\left(\lambda^{\frac{1}{\beta}}\,|y|\,, \lambda t\right) = \lambda^{-\frac{n+2\nu}{\beta}} \omega_\nu^{(\beta)}(|y|\,, t)\,, \quad (\lambda > 0)$$

eşitliği sağlanır.

Özel olarak, $\lambda = \frac{1}{t}$ *için,*

$$\omega_\nu^{(\beta)}\left(|y|, t\right) = t^{-\frac{n+2\nu}{\beta}} \omega_\nu^{(\beta)}\left(t^{-\frac{1}{\beta}}|y|, 1\right) \tag{3.3}$$

olur.

(b) $0 < \beta \leq 2$ *ise o zaman her* $y \in \mathbb{R}_+^n$ *ve her* $t > 0$ *için,*

$$\omega_\nu^{(\beta)}\left(|y|, t\right) > 0$$

sağlanır.

(c) $\beta = 2k$, $(k \in \mathbb{N})$ *biçiminde ise o zaman her* $t > 0$ *için,*

$$\omega_\nu^{(\beta)}\left(|y|, t\right) \in S(\mathbb{R}_+^n)$$

olur.

(d) $0 < \beta \leq 2$ *ya da* $\beta = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ *sağlanırsa,her* $t > 0$ *için,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)}\left(|y|, t\right) y_n^{2\nu} dy = 1$$

olur.

(e) $f \in L_{p,\nu}$, $1 \leq p \leq \infty$ *olsun.* $0 < \beta \leq 2$ *ya da* $\beta = 2k$, $(k \in \mathbb{N})$ *ise o zaman,*

$$\left\|W_t^{(\beta)} f\right\|_{p,\nu} \leq c(\beta) \left\|f\right\|_{p,\nu}$$

sağlanır. Burada, $c(\beta)$ *katsayısı aşağıdaki şekildedir:*

$$c(\beta) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left|\omega_\nu^{(\beta)}\left(|y|, 1\right)\right| y_n^{2\nu} dy < \infty$$

Ayrıca, $0 < \beta \leq 2$ *için* $c(\beta) = 1$ *'dir.*

(f) $f \in L_{p,\nu}$, $1 \leq p \leq \infty$ *olsun.* $0 < \beta \leq 2$ *ya da* $\beta = 2k$, $(k \in \mathbb{N})$ *ise o zaman,*

$$\sup_{t>0} \left|\left(W_t^{(\beta)} f\right)(x)\right| \leq c\left(M_\nu f\right)(x)$$

sağlanır. Burada, $M_\nu f$ *(2.16) ile tanımlanmış genelleşmiş Hardy-Littlewood maximal fonksiyon olup aşağıdaki şekildedir:*

$$\left(M_\nu f\right)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n+2\nu}\omega(n;\nu)} \int\limits_{B_r^+} \left|T^x f(y)\right| y_n^{2\nu} dy,$$

$B_r^+ = \left\{x : x \in \mathbb{R}_+^n, |x| \leq r\right\}$ *ve* $\omega(n;\nu) = \int\limits_{B_1^+} x_n^{2\nu} dx.$

(g) $0 < \beta \leq 2$ *ya da* $\beta = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ *için,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+^n} \left| \left(W_t^{(\beta)} f\right)(x)\right| \leq ct^{-\frac{n+2\nu}{p\beta}} \|f\|_{p,\nu}\,,\ 1 \leq p < \infty$$

olur.

(h) $0 < \beta \leq 2$ *ya da* $\beta = 2k$, $(k \in \mathbb{N})$ *ise o zaman her* $f \in L_{p,\nu}$ *ve her* $t, \tau \in (0, \infty)$ *için,*

$$W_t^{(\beta)} \left(W_\tau^{(\beta)} f\right) = W_{t+\tau}^{(\beta)} f, \textit{(yarıgrup özelliği);}$$

sağlanır.

(i) $f \in L_{p,\nu}$, $1 \leq p \leq \infty$ *olsun. O zaman,* $0 < \beta \leq 2$ *ya da* $\beta = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ *ise,*

$$\lim_{t\to 0^+} \left(W_t^{(\beta)} f\right)(x) = f(x)$$

dir. Burada, limit hem $L_{p,\nu}$ *normunda hem de h.h.h.* $x \in \mathbb{R}_+^n$ *için noktasal anlamdadır.* $f \in L_{\infty,\nu} \equiv C_0$ *durumunda, yakınsama düzgündür.*

İspat (a)

$$\begin{aligned}
\omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t) &= c_\nu(n) \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-t|x|^\beta} e^{ix'\cdot y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) x_n^{2\nu} dx \\
&\quad \left(x = \lambda^{\frac{1}{\beta}} z,\ dx = \lambda^{\frac{n}{\beta}} dz \text{ dönüşümü yapılırsa}\right) \\
&= c_\nu(n) \lambda^{\frac{2\nu}{\beta}} \lambda^{\frac{n}{\beta}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\lambda t|z|^\beta} e^{iz'\cdot\lambda^{\frac{1}{\beta}} y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(z_n \lambda^{\frac{1}{\beta}} y_n) z_n^{2\nu} dz \\
&= \lambda^{\frac{n+2\nu}{\beta}} \omega_\nu^{(\beta)} \left(\lambda^{\frac{1}{\beta}} |y|, \lambda t\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $\beta = 1$ ve $\beta = 2$ durumları için, $\omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t) \equiv F_\nu^{-1}(e^{-t|x|^\beta})(y)$'nin pozitifliği, Abel-Poisson ve Gauss-Weierstrass çekirdeklerinin (2.13) ve (2.15) tanımlarından kolayca görülür. Şimdi, $0 < \beta < 2$ durumu ele alınsın. I.A. Golubov (1980)'un makalesindeki Bernstein teoreminden görülür ki; $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan, sonlu, $\mu_\beta([0, \infty)) = 1$ koşulunu ve

$$e^{-z^{\beta/2}} = \int\limits_0^\infty e^{-\tau z} d\mu_\beta(\tau), z \in [0, \infty)$$

eşitliğini sağlayan bir μ_β ölçümü vardır. Burada, z yerine $|x|^2$ yazılacak olursa,

$$e^{-|x|^\beta} = \int_0^\infty e^{-\tau|x|^2} d\mu_\beta(\tau), \, (0 < \beta < 2) \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4)'ten

$$\begin{aligned} \omega_\nu^{(\beta)}(|y|, 1) &\equiv F_\nu^{-1}(e^{-|x|^\beta})(y) \\ &= \int_0^\infty F_\nu^{-1}(e^{-\tau|x|^2})(y) d\mu_\beta(\tau) \end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^\infty (4\pi\tau)^{-\frac{n+2\nu}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}} d\mu_\beta(\tau) > 0 \tag{3.5}$$

olur.

(c) F_ν dönüşümü $S(\mathbb{R}_+^n)$ uzayında bir otomorfizm ve

$$e^{-|x|^{2k}} \in S(\mathbb{R}_+^n)$$

olduğundan,

$$F_\nu^{-1}(e^{-t|x|^{2k}})(y) \equiv \omega_\nu^{(2k)}(|y|, t) \in S(\mathbb{R}_+^n)$$

elde edilir. Böylece, $\omega_\nu^{(2k)}(|y|, t)$; $\mathbb{R}_+^n$ üzerinde sonsuz pürüzsüz ve hızla azalandır. (Yani, negatif olmayan her $k_{1,...}, k_n$ ve $m_1, ..., m_n$ tamsayıları için

$$\lim_{|x|\to\infty} |x_1|^{m_1} ... |x_n|^{m_n} \frac{\partial^{k_1+...+k_n}}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} \omega_\nu^{(2k)}(|x|, t) = 0$$

eşitliği sağlanır.)

(d) (c)'den elde edilen sonuç gereği, $k \in \mathbb{N}$ ve $\forall t > 0$ için $\omega_\nu^{(2k)}(|y|, t) \in S(\mathbb{R}_+^n)$ olduğundan, her $t > 0$ için,

$$\omega_\nu^{(2k)}(|y|, t) \in L_{1,\nu}$$

olur. Buradan,

$$F_\nu\left(\omega_\nu^{(2k)}(|y|, t)\right) = e^{-t|x|^{2k}}$$

yani

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t) e^{ix' \cdot y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) y_n^{2\nu} dy = e^{-t|x|^{2k}}$$

elde edilir. Son eşitlikte $x = (0, ..., 0)$ alınırsa,

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(2k)} \left(|y|, t\right) y_n^{2\nu} dy = 1$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi $0 < \beta < 2$ durumunu inceleyelim. (3.5) ve Aliev (1987)'in makalesindeki

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}} y_n^{2\nu} dy = \frac{1}{2} \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \, (4\tau)^{\frac{n+2\nu}{2}} \tag{3.6}$$

formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)} \left(|y|, 1\right) y_n^{2\nu} dy &= \frac{2\pi^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int\limits_0^\infty (4\pi\tau)^{-\frac{n+2\nu}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}} y_n^{2\nu} dy \right) d\mu_\beta(\tau) \\ &= \pi^{\frac{n+2\nu}{2}} \pi^{-\frac{n+2\nu}{2}} \int\limits_0^\infty d\mu_\beta(\tau) = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.3) formülü ile ifade edilen homojenlik özelliğinden, $0 < \beta < 2$ için,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)} \left(|y|, t\right) y_n^{2\nu} dy &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \lambda^{\frac{n+2\nu}{\beta}} \omega_\nu^{(\beta)} \left(\lambda^{\frac{1}{\beta}} |y|, \lambda t\right) y_n^{2\nu} dy \\ (\lambda &= \frac{1}{t} \text{ yerine konursa}) \\ &= t^{-\frac{n+2\nu}{\beta}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)} \left(t^{-\frac{1}{\beta}} |y|, 1\right) y_n^{2\nu} dy \\ &\quad \left(y = t^{\frac{1}{\beta}} u, \;\; dy = t^{\frac{n}{\beta}} du, \;\; y_n^{2\nu} = t^{\frac{2\nu}{\beta}} u_n \text{ dönüşümü yapılarak}\right) \\ &= t^{-\frac{n+2\nu}{\beta}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)} \left(|u|, 1\right) t^{\frac{n+2\nu}{\beta}} u_n^{2\nu} du \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)} \left(|u|, 1\right) u_n^{2\nu} du \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)} \left(|y|, t\right) y_n^{2\nu} dy = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)} \left(|y|, 1\right) y_n^{2\nu} dy = 1.$$

elde edilir.

(e) Minkowski eşitsizliği kullanılır:

$$\begin{aligned}\left\|W_t^{(\beta)}f\right\|_{p,\nu} &= \left\|\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\omega_\nu^{(\beta)}\left(|y|,t\right)T^y f(x) y_n^{2\nu}dy\right\|_{p,\nu}\\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left|\omega_\nu^{(\beta)}\left(|y|,t\right)\right|\left\|T^y f(x)\right\|_{p,\nu} y_n^{2\nu}dy\\ &= c(\beta)\left\|T^y f\right\|_{p,\nu} \leq c(\beta)\left\|f\right\|_{p,\nu}.\end{aligned}$$

Burada, genelleşmiş kayma için Lofstorm ve Peetre (1969)'nin iyi bilinen

$$\left\|T^y f\right\|_{p,\nu} \leq \left\|f\right\|_{p,\nu}$$

eşitsizliği kullanıldı.

(f) Aliev ve Bayrakci(1998)'nin makalesinde Teorem 2.1'den, eğer $\varphi \in L_{1,\nu}$ fonksiyonunun,

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\psi(|x|)x_n^{2\nu}dx < \infty$$

koşulunu sağlayan, azalan, pozitif ve radial $\psi(|x|)$ majorantı varsa, o zaman her $f \in L_{p,\nu}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ve

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n-2\nu}\varphi(\frac{1}{\varepsilon}x)$$

için,

$$\sup_{\varepsilon>0}\left|\left(\varphi_\varepsilon \circledast f\right)(x)\right| \leq \left\|\psi\right\|_{1,\nu}\left(M_\nu f\right)(x) \tag{3.7}$$

olur.

$$\psi(|x|) = \omega_\nu^{(\beta)}\left(|x|,1\right), \varepsilon = t^{\frac{1}{\beta}}$$

koyularak ve (3.3) ve (3.7) hesaba katılarak, her $0 < \beta \leq 2$ ya da $\beta = 2k$ için,

$$\sup_{t>0}\left|\left(W_t^{(\beta)}f\right)(x)\right| \leq c\left(M_\nu f\right)(x);$$

$$c = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left|\omega_\nu^{(\beta)}\left(|y|,1\right)\right| y_n^{2\nu}dy < \infty.$$

bulunur. (3.5)'ten açıkça görülür ki, $\omega_\nu^{(\beta)}\left(|y|,1\right)$ monoton azalandır. $\beta = 2k$ için, $\omega_\nu^{(\beta)}\left(|y|,1\right) \in S(\mathbb{R}_+^n)$ olduğundan, azalan, radial ve integrallenebilir bir majorantı vardır.

(g) Young eşitsizliğinden, ((2.6)'da $r=\infty$ durumu)

$$
\begin{aligned}
\left|\left(W_t^{(\beta)}f\right)(x)\right| &\leq \|f\|_{p,\nu}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|\omega_\nu^{(\beta)}(|y|,t)\right|^{p'}y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|f\|_{p,\nu}\,t^{-\frac{n+2\nu}{\beta}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|\omega_\nu^{(\beta)}\left(t^{-\frac{1}{\beta}}|y|,1\right)\right|^{p'}y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\
(y &= t^{\frac{1}{\beta}}x,\ dy=t^{\frac{n}{\beta}}dx \text{ konursa}) \\
&= \|f\|_{p,\nu}\,t^{-\frac{n+2\nu}{\beta}}t^{\frac{n+2\nu}{\beta}\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|\omega_\nu^{(\beta)}(|x|,1)\right|^{p'}x_n^{2\nu}dx\right) \\
(1-\frac{1}{p'} &= \frac{1}{p}\text{ eşitliği kullanılır.}) \\
&= ct^{-\frac{n+2\nu}{p\beta}}\|f\|_{p,\nu}
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada, c sayısı f fonksiyonuna bağlı değildir.

(h) $f\in S(\mathbb{R}^n_+)$ ise, o zaman Fourier-Bessel dönüşümü terimleri dilinde yarıgrup özelliğinin sağlandığı aşikardır. Gerçekten $f\in S(\mathbb{R}^n_+)$ durumunda, ispatlanması gereken eşitliğin her iki tarafına Fourier-Bessel dönüşümü uygulanırsa, doğruluğu aşikar olan

$$e^{-t|x|^\beta}.e^{-\tau|x|^\beta}F_\nu f=e^{-(t+\tau)|x|^\beta}F_\nu f$$

eşitliği elde edilir. Keyfi $f\in L_{p,\nu}$ için, $S(\mathbb{R}^n_+)$ uzayının $L_{p,\nu}$ uzayında yoğun olması nedeniyle ve (e)'den, sonuca ulaşılır.

(i) $0<\beta\leq 2$ ya da $\beta=2k$ olursa,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\omega_\nu^{(\beta)}(|y|,t)\,y_n^{2\nu}dy=1,(\forall t>0)$$

eşitliği ve her $f\in L_{p,\nu}$ için,

$$W_t^{(\beta)}f(x)-f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\omega_\nu^{(\beta)}(|y|,t)\,T^yf(x)y_n^{2\nu}dy-\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}f(x)\omega_\nu^{(\beta)}(|y|,t)\,y_n^{2\nu}dy$$

sağlanır. Buradan, Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\left\|W_t^{(\beta)}f-f\right\|_{p,\nu} &\leq \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left|\omega_\nu^{(\beta)}(|y|,t)\right| \|T^y f(.)-f(.)\|_{p,\nu}\, y_n^{2\nu}dy \\ &= t^{-\frac{n+2\nu}{\beta}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left|\omega_\nu^{(\beta)}\left(t^{-\frac{1}{\beta}}|y|,1\right)\right| \|T^y f(.)-f(.)\|_{p,\nu}\, y_n^{2\nu}dy \\ &\quad \left(y=t^{\frac{1}{\beta}}z, dy=t^{\frac{n}{\beta}}dz \text{ alınırsa}\right) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left|\omega_\nu^{(\beta)}(|z|,1)\right| \left\|T^{t^{\frac{1}{\beta}}z}f(.)-f(.)\right\|_{p,\nu} z_n^{2\nu}dz\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left\|T^{t^{\frac{1}{\beta}}z}f(.)-f(.)\right\|_{p,\nu} \leq 2\|f\|_{p,\nu}$$

eşitsizliğinden ve

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|T^{t^{\frac{1}{\beta}}z}f(.)-f(.)\right\|_{p,\nu}=0,$$

olduğundan, Lebesgue baskın yakınsama teoremi gereğince,

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|W_t^{(\beta)}f-f\right\|_{p,\nu}=0,\ \ 1\leq p\leq\infty,\ (L_{\infty,\nu}\equiv C_0)$$

olur.

$f\in L_{p,\nu}\cap C_0$ için $W_t^{(\beta)}f(x)$ ailesi $f(x)$'e noktasal (aslında düzgün) yakınsadığından ve bu sınıf $L_{p,\nu}$, $(1\leq p<\infty)$ uzaylarında yoğun olduğundan, o zaman, (f) maddesi gereğince ve Stein ve Weiss (1971)'ın kitabındaki noktasal yakınsama ile ilgili ünlü teoremden,

$$\lim_{t\to 0^+}W_t^{(\beta)}f(x)=f(x)\quad h.h.h.x\in\mathbb{R}_+^n$$

olduğu sonucuna ulaşılır.

Böylece önteoremin ispatı tamamlanmış oldu. □

Not 1: Bu önteoremin klasik Euclid kayması için olan benzeri, daha önce Aliev vd. (2008) ve Aliev (2009) makalelerinde ifade edilerek kanıtlanmıştır.

Not 2: **(a)** $W_t^{(\beta)}f$ ailesinin, önteoremdeki (i) özelliğine dayanarak,

$$W_0^{(\beta)}f=f$$

kabul edebiliriz.

(b) Önteoremdeki β parametresi için $0 < \beta \leq 2$ ya da $\beta = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ kısıtlamasını kullandık. Bizim öngörümüze göre, önteoremin (b) ve (c) dışındaki tüm önerileri

$$\forall\beta \neq 2k, (k \in \mathbb{N})$$

için de doğrudur. Bunu kanıtlamak için, $\beta \neq 2k$ durumunda,

$$\omega_\nu^{(\beta)}(|y|, 1) = c_\beta |y|^{-n-2\nu-\beta}(1 + o(1)), |y| \to \infty$$

asimptotik formülünü kanıtlamak yeterlidir. Bu asimptotik formül Euclid kayması durumunda doğru olup Aliev vd. (2008) makalesinde verilmiştir. Genelleşmiş kayma durumunda ise açık problemdir.

Yukarıda tanımlanan genelleşmiş $W_t^{(\beta)} f$ beta yarıgrubu kullanılarak, $I_\nu^\alpha f$ genelleşmiş Riesz potansiyellerinin bir boyutlu yeni bir integral gösterimini elde etmek mümkündür. Bu yeni gösterim aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 3.5. $0 < \alpha < n + 2\nu$, $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$, $1 \leq p < \frac{n+2\nu}{\alpha}$ *olsun. O zaman, (2.8) formülü ile tanımlanmış olan* $I_\nu^\alpha f$ *genelleşmiş Riesz potansiyelleri aşağıdaki gibi bir boyutlu gösterime sahiptir:*

$$\left(I_\nu^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(W_t^{(\beta)} f\right)(x) dt. \tag{3.8}$$

Burada, $0 < \beta \leq 2$ *ya da* $\beta = 2k$, *(*$k \in \mathbb{N}$*) olduğu varsayılır.*

İspat (3.8) formülü açıkça, Sezer ve Aliev (2010)'in klasik kayma ile ilgili makalesindeki (17) ile aynı formdadır ve operatörlerin kesirsel kuvvetleri için klasik Balakrishnan formüllerine benzer (Samko vd. 1993).

$1 \leq p < \frac{n+2\nu}{\alpha}$ durumu, $\left(I_\nu^\alpha f\right)(x)$'in klasik anlamda bir fonksiyon olmasını sağlar. (3.8) formülünü kanıtlamak için, $W_t^{(\beta)} f$ ailesinin (3.2) tanımı kullanılır:

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(W_t^{(\beta)} f\right)(x) dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t) T^y f(x) y_n^{2\nu} dy \right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} T^y f(x)\left(\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}t^{-\frac{n+2\nu}{\beta}}\omega_\nu^{(\beta)}\left(t^{-\frac{1}{\beta}}\left|y\right|,1\right)dt\right)y_n^{2\nu}dy \\
(t &= \left|y\right|^\beta\tau^{-\beta}; dt=(-\beta)\left|y\right|^\beta\tau^{-\beta-1}d\tau; t^{-\frac{1}{\beta}}\left|y\right|=\tau \text{ alınırsa}) \\
&= \frac{\beta}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int\limits_0^\infty \tau^{n+2\nu-\alpha-1}\omega_\nu^{(\beta)}\left(\tau,1\right)d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|y\right|^{\alpha-n-2\nu}T^y f(x)y_n^{2\nu}dy \\
&= c\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|y\right|^{\alpha-n-2\nu}T^y f(x)y_n^{2\nu}dy;
\end{aligned}$$

olur. Burada,

$$c=\frac{\beta}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int\limits_0^\infty \tau^{n+2\nu-\alpha-1}\omega_\nu^{(\beta)}\left(\tau,1\right)d\tau.$$

(2.8)-(2.9) formülleri ve son eşitlik hesaba katılırsa,

$$c=\frac{2^{\alpha-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2\nu-\alpha}{2})} \tag{3.9}$$

olduğu gösterilmelidir.

c ile gösterilen bu iki sayının birbirine eşit olduğunu göstermek için, Sezer ve Aliev (2010)'in makalesinde uyguladıkları metodun benzeri kullanılmıştır. Söz konusu makalede Fourier dönüşümü tekniği uygulanmıştır. Burada da, Fourier-Bessel dönüşümü tekniği kullanılır. Yukarıdaki

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(W_t^{(\beta)}f\right)(x)dt=c\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\left|y\right|^{\alpha-n-2\nu}T^y f(x)y_n^{2\nu}dy$$

eşitliği her $f\in L_{p,\nu}$, $1\le p<\frac{n+2\nu}{\alpha}$ için sağlandığından, genelleşmiş Schwartz test fonksiyonları için de sağlanır. $f\in S(\mathbb{R}^n_+)$ olsun.

Kolaylık için $F_\nu(g) = g^\wedge$ ile gösterilecektir. $0 < \alpha < n + 2\nu$ için,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(W_t^{(\beta)}f\right)(.)dt\right]^\wedge(y) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left[\left(W_t^{(\beta)}f\right)(.)\right]^\wedge(y)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left[\omega_\nu^{(\beta)}(|.|,t)\right]^\wedge(y)f^\wedge(y)dt \\
&= f^\wedge(y)\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t|y|^\beta}dt \\
(t\,|y|^\beta &= \tau \text{ alınırsa}) \\
&= f^\wedge(y)\,|y|^{-\alpha}\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-\tau}d\tau \\
&= f^\wedge(y)\,|y|^{-\alpha} \\
&= \left[\left(I_\nu^\alpha f\right)(.)\right]^\wedge(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $I_\nu^\alpha f$, (2.8) ile tanımlanmış olan genelleşmiş Riesz potansiyelidir.

Yani,

$$\left(I_\nu^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(W_t^{(\beta)}f\right)(x)dt, \forall f \in S(\mathbb{R}_+^n)$$

sonucuna ulaşılır. □

Biz, (3.8) formülünü, genelleşmiş Riesz potansiyelleri için yeni bir ters bulma formülünü elde etmek için kullanacağız.

Not: (3.8) formülünde $\beta = 1$ ve $\beta = 2$ konulursa, genelleşmiş Riesz potansiyellerinin sırasıyla, genelleşmiş Abel-Poisson ve genelleşmiş Gauss-Weierstrass yarıgrupları ile ifadeleri elde edilmiş olur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Dalgacık Tipli Bir İntegral Dönüşüm

(3.2) ile tanımlanan β yarıgrup kullanılarak, aşağıdaki integral dönüşüm tanımlansın:

$g \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ olmak üzere,

$$(Ag)(x,t) \equiv (A_{\beta,\nu,\mu}g)(x,t) = \int_0^\infty \left(W_{t\eta}^{(\beta)}g\right)(x)d\mu(\eta). \quad (4.1)$$

Burada $x \in \mathbb{R}_+^n$, $t > 0$ ve μ ölçümü, $\mu([0,\infty)) = 0$ koşulunu sağlayan $[0,\infty)$'da tanımlı sonlu bir Borel ölçümüdür. Bu μ Borel ölçümü bir dalgacık ölçümü ve (4.1)'de verilen $(Ag)(x,t)$ integral dönüşümü de dalgacık tipli dönüşüm diye adlandırılır.

(4.1)'deki $(Ag)(x,t)$ integral dönüşümü $L_{p,\nu}$ uzaylarında sınırlıdır:

Gerçekten Önteorem 3.4 (e)'den ve Minkowski eşitsizliğinden, $1 \le p \le \infty$ için,

$$\begin{aligned}\|(Ag)(.,t)\|_{p,\nu} &\le \int_0^\infty \left\|W_{t\eta}^{(\beta)}g\right\|_{p,\nu} d|\mu|(\eta) \\ &\le c(\beta)\|\mu\|\,\|g\|_{p,\nu}\end{aligned}$$

olur. Burada, $\|\mu\|$ sayısı μ ölçümünün tam varyasyonunu göstermiş olup

$$\|\mu\| = \int_{[0,\infty)} d|\mu|(\eta) < \infty$$

şeklinde tanımlıdır.

Örneğin, $d\mu(t) = h(t)dt$ ise, $\|\mu\| = \int_0^\infty |h(t)|\,dt$ dir.

Aşağıda gösterileceği üzere, (4.1) ile tanımlanan dalgacık tipli dönüşüm yardımıyla, (3.8)'de verilen $I_\nu^\alpha f$ genelleşmiş Riesz potansiyellerinin, $f \in L_{p,\nu}$, $1 \le p < \frac{n+2\nu}{\alpha}$ için yeni bir ters bulma formülü elde edilebilir.

Şimdi, verilen $I_\nu^\alpha f$ genelleşmiş Riesz potansiyelleri için ters bulma formülüne ulaşılacak esas teroremlerden birinin ifade ve ispatında ihtiyaç duyulacak bazı hazırlıklar yapılacaktır.

Önteorem 4.6. *(Gradshteyn ve Ryzhik 1994)*

$$\int_1^s t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}(s-t)^{\frac{\alpha}{\beta}-1}dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}\frac{1}{s}(s-1)^{\frac{\alpha}{\beta}}, (s>1)$$

Önteorem 4.7. *(Rubin 1999)*

$$\left(I_{+}^{\theta+1}\mu\right)(\tau)=\frac{1}{\Gamma(1+\theta)}\int_{0}^{\tau}(\tau-\eta)^{\theta}\,d\mu(\eta),(\theta>0)$$

μ ölçümünün $(\theta+1)$-inci mertebeden Riemann-Liouville kesirsel integrali olsun. μ ölçümü aşağıdaki koşulları sağlasın:

$\gamma>\theta$ için,

$$\int_{1}^{\infty}\eta^{\gamma}d\left|\mu\right|(\eta)<\infty; \tag{4.2}$$

$$\int_{0}^{\infty}\eta^{j}d\mu(\eta)=0,\ \forall j=0,1,...,[\theta]\quad \text{(} [\theta]\text{, } \theta\text{'nın tam kısmıdır).} \tag{4.3}$$

O zaman

$$K_{\theta}(\tau)=\frac{1}{\tau}\left(I_{+}^{\theta+1}\mu\right)(\tau),$$

şeklinde tanımlı $K_{\theta}(\tau)$ fonksiyonu azalan ve integrallenebilir bir majoranta sahiptir ve

$$\int_{0}^{\infty}K_{\theta}(\tau)d\tau\equiv c_{\theta,\mu}=\left\{\begin{array}{c}\Gamma(-\theta)\int_{0}^{\infty}\eta^{\theta}d\mu(\eta),\ \theta\neq 1,2,...\ \textit{ise}\\ \frac{(-1)^{\theta+1}}{\theta!}\int_{0}^{\infty}\eta^{\theta}\ln\eta d\mu(\eta),\ \theta=1,2,...\ \textit{ise}\end{array}\right\} \tag{4.4}$$

eşitliğini sağlar.

Özel olarak, $0<\theta<1$ ise, yukarıda μ üzerindeki koşullar ve $c_{\theta,\mu}$ sayısı aşağıdaki gibi daha sade şekilde ifade edilebilir:

$$\int_{1}^{\infty}\eta d\left|\mu\right|(\eta)<\infty\quad \textit{ve}\quad \int_{0}^{\infty}d\mu(\eta)=0 \tag{4.5}$$

$$\int_{0}^{\infty}K_{\theta}(\tau)d\tau\equiv c_{\theta,\mu}=\Gamma(-\theta)\int_{0}^{\infty}\eta^{\theta}d\mu(\eta). \tag{4.6}$$

Önteorem 4.8. *$f\in L_{p,\nu}$, $1\leq p<\frac{n+2\nu}{\alpha}$, ve Ag fonksiyonu (4.1)'deki gibi tanımlı olsun. O zaman $\varphi=I_{\nu}^{\alpha}f$ alırsak,*

$$\left(A\varphi\right)(x,t)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}(\tau-\eta t)_{+}^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(W_{\tau}^{(\beta)}f\right)(x)d\tau\right)d\mu(\eta) \tag{4.7}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$a_+^\lambda = \left\{ \begin{array}{ll} a^\lambda, & a > 0 \textit{ ise} \\ 0, & a \leq 0 \textit{ ise} \end{array} \right\}$$

olarak tanımlanmıştır.

İspat $I_\nu^\alpha f$ ve $W_t^{(\beta)}$ operatörleri girişim tipli ve değişme özelliğine sahip olduğundan $\varphi = I_\nu^\alpha f$ için,

$$\begin{aligned} (A\varphi)(x,t) &= \int_0^\infty \left(W_{t\eta}^{(\beta)} I_\nu^\alpha f\right)(x) d\mu(\eta) \\ &= \int_0^\infty \left(I_\nu^\alpha W_{t\eta}^{(\beta)} f\right)(x) d\mu(\eta), \\ & \text{((3.8) kullanılırsa)} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(W_\tau^{(\beta)} W_{t\eta}^{(\beta)} f\right)(x) d\tau \right) d\mu(\eta) \\ W_t^{(\beta)}, (t &> 0) \text{ ailesinin yarıgrup özelliği kullanılırsa} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(W_{\tau+t\eta}^{(\beta)} f\right)(x) d\tau \right) d\mu(\eta) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty (\tau - \eta t)_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(W_\tau^{(\beta)} f\right)(x) d\tau \right) d\mu(\eta) \end{aligned}$$

olur. □

Önteorem 4.9.

$$(D_\varepsilon^\alpha \varphi)(x) \equiv \left(D_{\varepsilon,\beta}^\alpha \varphi\right)(x) = \int_\varepsilon^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (A\varphi)(x,t) dt, \ (\varepsilon > 0) \tag{4.8}$$

tanımlansın. O zaman $\varphi = I_\nu^\alpha f$, *(*$f \in L_{p,\nu}$, $1 \leq p < \frac{n+2\nu}{\alpha}$*) için,*

$$(D_\varepsilon^\alpha \varphi)(x) = \int_0^\infty \left(W_{\varepsilon\tau}^{(\beta)} f\right)(x) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau \tag{4.9}$$

sağlanır. Burada $K_\theta(\tau)$ *fonksiyonu önteorem 4.7'de tanımlandığı gibidir.*

İspat (4.7), (4.8) ve Fubini teoremi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\left(D_\varepsilon^\alpha \varphi\right)(x) &= \int_\varepsilon^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(A\varphi\right)(x,t)dt \\
&= \int_\varepsilon^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty (\tau-\eta t)_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(W_\tau^{(\beta)}f\right)(x)d\tau\right)d\mu(\eta)\right]dt \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\int_\varepsilon^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\int_0^\infty d\mu(\eta)\int_0^\infty (\tau-\eta t)_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(W_\tau^{(\beta)}f\right)(x)d\tau\right)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\int_0^\infty \left(W_\tau^{(\beta)}f\right)(x)\left(\int_0^{\frac{\tau}{\varepsilon}}\eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1}d\mu(\eta)\int_\varepsilon^{\frac{\tau}{\eta}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\frac{\tau}{\eta}-t\right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1}dt\right)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\int_0^\infty \left(W_{\varepsilon\tau}^{(\beta)}f\right)(x)\left(\int_0^{\tau}\eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1}d\mu(\eta)\int_1^{\frac{\tau}{\eta}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\frac{\tau}{\eta}-t\right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1}dt\right)d\tau \\
&\quad \text{(Önteorem 4.6 kullanılırsa)} \\
&= \int_0^\infty \left(W_{\varepsilon\tau}^{(\beta)}f\right)(x)\left(\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}\int_0^\tau (\tau-\eta)^{\frac{\alpha}{\beta}}d\mu(\eta)\right)d\tau \\
&= \int_0^\infty \left(W_{\varepsilon\tau}^{(\beta)}f\right)(x)K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Önteorem 4.10. *μ ölçümü önteorem 4.7'nin koşullarını sağlasın. O halde, maksimal operator*

$$f(x) \to \sup_{\varepsilon>0}\left|\left(D_\varepsilon^\alpha I_\nu^\alpha f\right)(x)\right| \tag{4.10}$$

$1 \leq p < \frac{n+2\nu}{\alpha}$ için, zayıf (p,p) tiplidir. Daha doğrusu, $1 < p < \frac{n+2\nu}{\alpha}$ için güçlü (p,p) tipli ve $p=1$ için zayıf $(1,1)$ tiplidir.

İspat Önteorem 4.7'den

$$\int_0^\infty \left|K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau)\right|d\tau < \infty$$

elde edilir.

O zaman (4.9) ve Önteorem 3.4 (f)'den,

$$\begin{aligned}\left|\left(D_\varepsilon^\alpha I_\nu^\alpha f\right)(x)\right| &\leq \sup_{t>0}\left|\left(W_t^{(\beta)} f\right)(x)\right| \int_0^\infty \left|K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau)\right| d\tau \\ &\leq c\left(M_\nu f\right)(x).\end{aligned}$$

olur. $M_\nu f$ Hardy-Littlewood tipli maksimal operator $1 < p < \frac{n+2\nu}{\alpha}$ için güçlü (p,p) tipli ve zayıf $(1,1)$ tipli olduğundan (Guliev 1998, 2003), 4.10'daki maksimal operatör de $1 < p < \frac{n+2\nu}{\alpha}$ için güçlü (p,p) tipli ve $p=1$ için zayıf $(1,1)$ tipli operatördür. □

Gerekli ön hazırlıklardan sonra esas teoremlerden birinin ifade ve ispatı verilebilir.

4.2. Genelleşmiş Riesz Potansiyelleri için Yeni Bir Ters Bulma Formülü

Bu bölümde, bir önceki bölümde gerekli hazırlıkları yapılan ters bulma formülünün ifade ve ispatı yer alacaktır. Sonra da, bulunan ters bulma formülü vasıtasıyla üzerinde çalışılan genelleşmiş Riesz potansiyelleri uzayı için bir karakterizasyon verilecektir.

Teorem 4.11. *$\alpha > 0$, $1 \leq p < \frac{n+2\nu}{\alpha}$, $f \in L_{p,\nu}$ ve $\beta > \alpha$ olup, $\beta = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ formunda olsun. Ayrıca μ ölçümü, $[0,\infty)$'da tanımlı sonlu Borel ölçümü olup aşağıdaki koşulları sağlasın:*

$$(\mathbf{a}) \quad \int_0^\infty d\mu(\eta) = 0$$

$$(\mathbf{b}) \quad \int_1^\infty \eta d\left|\mu\right|(\eta) < \infty$$

O zaman, A operatörü (4.1)'deki gibi tanımlanmak üzere,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(AI_\nu^\alpha f\right)(x,t) t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} dt &\equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \left(AI_\nu^\alpha f\right)(x,t) t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} dt \\ &= c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} f(x)\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada, $\theta = \frac{\alpha}{\beta}$ olmak üzere, $c_{\theta,\mu}$ katsayısı Önteorem 4.7'de tanımlandığı gibidir. Limit, $L_{p,\nu}$-normunda ve h.h.h. $x \in \mathbb{R}_+^n$ için noktasal anlamda sağlanır. Eğer $f \in C_0 \cap L_{p,\nu}$ ise, yakınsama tüm $\mathbb{R}_+^n$'da düzgündür.

İspat (4.8) ve (4.9)'dan,

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \left(AI_{\nu}^{\alpha} f\right)(x,t) t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} dt \equiv \left(D_{\varepsilon}^{\alpha} I_{\nu}^{\alpha} f\right)(x)$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} \left(W_{\varepsilon\tau}^{(\beta)} f\right)(x) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau \tag{4.11}$$

$\beta > \alpha$ olduğundan, $\theta = \frac{\alpha}{\beta} < 1$ olup $[\theta] = 0$ olur. Böylece, Önteorem 4.7'den, $K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau)$ fonksiyonu azalan bir integral majoranta sahiptir ve $\theta = \frac{\alpha}{\beta} < 1$ için,

$$\int\limits_{0}^{\infty} K_{\theta}(\tau) d\tau \equiv c_{\theta,\mu} = \Gamma(-\theta) \int\limits_{0}^{\infty} \eta^{\theta} d\mu(\eta)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliği de dikkate alarak, $f \in L_{p,\nu}$, $(1 \leq p < \frac{n+2\nu}{\alpha})$ için aşağıdakiler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\left(D_{\varepsilon}^{\alpha} I_{\nu}^{\alpha} f\right)(x) - c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} f(x) &= \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \left(AI_{\nu}^{\alpha} f\right)(x),t) t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} dt - f(x) \int\limits_{0}^{\infty} K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} \left(W_{\varepsilon\tau}^{(\beta)} f\right)(x) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau - \int\limits_{0}^{\infty} f(x) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} \left[\left(W_{\varepsilon\tau}^{(\beta)} f\right)(x) - f(x)\right] K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

Buradan, genelleşmiş Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$\left\|D_{\varepsilon}^{\alpha} I_{\nu}^{\alpha} f - c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} f\right\|_{p,\nu} \leq \int\limits_{0}^{\infty} \left\|W_{\varepsilon\tau}^{(\beta)} f - f\right\|_{p,\nu} \left|K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau)\right| d\tau.$$

elde edilir. Önteorem 3.4 (i) maddesi ve Lebesgue baskın yakınsama teoremi gereği,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\|D_{\varepsilon}^{\alpha} I_{\nu}^{\alpha} f - c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} f\right\|_{p,\nu} = 0$$

sağlanır. Böylece $L_{p,\nu}$ normuna göre yakınsama elde edilir. Ayrıca,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}_{+}^{n}} \left|W_{\varepsilon\tau}^{(\beta)} f(x) - f(x)\right| = 0$$

sağlandığından, yine Lebesgue baskın yakınsama teoremine göre,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}_{+}^{n}} \left|D_{\varepsilon}^{\alpha} I_{\nu}^{\alpha} f(x) - c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} f(x)\right| = 0$$

olur. Yani, $f \in C_0 \cap L_{p,\nu}$ için, yakınsama düzgündür.

Noktasal yakınsamanın ispatı için maksimal fonksiyon tekniği kullanılacaktır. Önteorem (4.10)'a göre,

$$f(x) \to \sup_{\varepsilon>0} |D_\varepsilon^\alpha I_\nu^\alpha f(x)|$$

maksimal fonksiyonu $1 \leq p < \frac{n+2\nu}{\alpha}$ için zayıf (p,p) tipli operatördür. Diğer yandan, $(D_\varepsilon^\alpha I_\nu^\alpha f)(x)$ ailesi, her $f \in C_0 \cap L_{p,\nu}$ için, f'e düzgün yakınsaktır. (Dolayısıyla noktasal yakınsaktır.) Ayrıca, $C_0 \cap L_{p,\nu}$ alt uzayı $L_{p,\nu}$'de yoğun olduğundan, noktasal yakınsama ile ilgili ünlü teoreme göre (Stein ve Weiss 1971, sf. 60),

$$(D_\varepsilon^\alpha I_\nu^\alpha f)(x) \to c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} f(x),\ \varepsilon \to 0^+.$$

yakınsaması h.h.h $x \in \mathbb{R}_+^n$ için sağlanır. Böylece, teoremin ispatı tamamlanmış oldu. □

Şimdi teoremin koşullarını sağlayan dalgacık ölçümü örnekleri verelim.

Örnek 4.12. $0 \leq \eta < \infty$ *olmak üzere,*

$$d\mu(\eta) = (1-\eta)e^{-\eta}d\eta$$

tanımlayalım. Basit hesaplamalarla, μ *ölçümünün Teorem 4.11'deki koşulları sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.*

$$\int_0^\infty d\mu(\eta) = \int_0^\infty (1-\eta)e^{-\eta}d\eta = 0$$

olduğu görülür. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \eta d|\mu|(\eta) &= \int_1^\infty \eta(\eta-1)e^{-\eta}d\eta \\ &= \frac{3}{e} < \infty\end{aligned}$$

sağlanır. Bundan başka, $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ *için,*

$$\begin{aligned}c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} &= \Gamma(-\frac{\alpha}{\beta})\int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}}(1-\eta)e^{-\eta}d\eta \\ &\neq 0\end{aligned}$$

olduğu da açıktır.

Dolayısıyla bu μ *ölçümü teoremin tüm koşullarını sağlar.*

Örnek 4.13. $0 \leq \eta < \infty$ *olmak üzere,*

$$h(\eta) = \begin{cases} 1, \ 0 \leq \eta < 1 \\ -1, \ 1 \leq \eta < 2 \\ 0, \ 2 \leq \eta < \infty \end{cases}$$

olsun. μ *ölçümü şu şekilde tanımlansın:*

$$d\mu(\eta) = h(\eta)d\eta$$

O halde

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\mu(\eta) &= \int_0^\infty h(\eta)d\eta \\ &= \int_0^1 d\eta - \int_1^2 d\eta \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \eta d\left|\mu\right|(\eta) &= \int_1^2 \eta d\eta \\ &= \frac{3}{2} < \infty \end{aligned}$$

olur. Dahası,

$$\begin{aligned} c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} &= \Gamma(-\frac{\alpha}{\beta}) \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}} h(\eta)d\eta \\ &= \Gamma(-\frac{\alpha}{\beta}) \left[\int_0^1 \eta^{\frac{\alpha}{\beta}} d\eta - \int_1^2 \eta^{\frac{\alpha}{\beta}} d\eta \right] \\ &= \Gamma(-\frac{\alpha}{\beta}) \frac{2}{\frac{\alpha}{\beta}+1}(1 - 2^{\frac{\alpha}{\beta}}) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla bu μ *ölçümü de teoremin tüm koşullarını sağlar.*

4.3. Genelleşmiş Riesz Potansiyelleri Uzayının Bir Karakterizasyonu

Klasik Riesz potansiyelleri uzayı diye adlandırılan $I^{\alpha}(L_p)$ $(1 \leq p < \infty)$ uzayı şöyle tanımlıdır:

$$I^{\alpha}(L_p) = \{\varphi : \varphi = I^{\alpha} f,\ f \in L_p(\mathbb{R}^n)\},\ 1 \leq p < \frac{n}{\alpha}.$$

Bu kısımda, Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilen genelleşmiş Riesz potansiyelleri uzayı tanımlanıp, bu uzayın bir karakterizasyonu verilmiştir.

Klasik Riesz potansiyelleri uzayı $I^{\alpha}(L_p)$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ için çeşitli karakterizasyonlar Samko vd. (1993)'nin kitabında ve Rubin (1986) makalesi ile Rubin (2008)'in kitabında verilmiştir. Söz konusu teoremlerden biri şöyledir:

Teorem 4.14. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ *olsun.* $l \in \mathbb{N}$ *sayısı,* $l > \alpha$ *koşulunu sağlayan herhangi tamsayı olsun.* $P_t f$ *ve* $G_t f$ *, (t*≥ 0*) ile, sırasıyla, Klasik Abel-Poisson ve Gauss-Weierstrass yarı grupları gösterilsin.*

$$E : L_p \to L_p$$

birim operatör olsun. Bu durumda,

$f \in I^{\alpha}(L_p)$ *olması için gerek ve yeter koşul,* $f \in L_q$ *olup aşağıdakilerden en az birini sağlamasıdır:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-1-\alpha}(E - P_t)^l f dt \in L_p$$

veya

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-1-\alpha}(E - G_t)^l f dt \in L_p.$$

(Burada, limit, L_p *anlamındadır. Yani,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_{\varepsilon} f = g \Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \|A_{\varepsilon} f - g\|_p = 0.$$

Ayrıca, $(E - G_t)^l f(x)$*,*

$$(E - G_t)^l f(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k G_{kt} f(x)$$

şeklinde tanımlıdır.)

Biz burada genelleşmiş Riesz potansiyellerinin doğurduğu fonksiyonel uzay için bir karakterizasyon (nitelendirme) vereceğiz. Bu karakterizasyon, genelleşmiş Gauss-Weierstrass yarı grup vasıtasıyla tanımlanan dalgacık dönüşümü dilinde verilecektir.

Genelleşmiş Riesz potansiyelleri uzayı aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$I_\nu^\alpha\left(L_{p,\nu}\right) = \left\{\varphi : \varphi = I_\nu^\alpha f,\ f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)\right\},\ 1 < p < \frac{n+2\nu}{\alpha}.$$

$I_\nu^\alpha\left(L_{p,\nu}\right)$ uzayındaki norm,

$$\|\varphi\|_{I_\nu^\alpha(L_{p,\nu})} = \|f\|_{p,\nu}$$

bağıntısı ile tanımlanmıştır. Klasik Riesz potansiyelleri uzayında olduğu gibi bu normla birlikte bu uzay bir Banach uzayı olur.

$I_\nu^\alpha\left(L_{p,\nu}\right)$ uzayının bir Banach uzayı olduğunu gösterelim:

Öncelikle, $I_\nu^\alpha\left(L_{p,\nu}\right)$ uzayının, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+2\nu}$ olmak üzere, $L_{q,\nu}$ uzayının bir alt uzayı olduğunu hatırlatalım. (Bu genelleşmiş Riesz potansiyelleri için, Hardy-Littlewood-Sobolev teoreminin bir sonucudur.) (Gadjiev ve Aliev 1988)

Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi: $f \in L_{p,\nu}$, $1 < p < \frac{n+2\nu}{\alpha}$ olsun.

$\|I_\nu^\alpha f\|_{q,\nu} \leq c\,\|f\|_{p,\nu}$ sağlanması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+2\nu}$ olmasıdır. (Burada n uzayın boyutudur.) Ayrıca, $p = 1$ için I_ν^α operatörü zayıf $(1,1)$ tiplidir.(Gadjiev ve Aliev 1988a)

Şimdi,

$$\varphi_k = I_\nu^\alpha f_k \ \text{ ve } \ \varphi_m = I_\nu^\alpha f_m$$

olsun. Bu durumda, $I_\nu^\alpha\left(L_{p,\nu}\right)$ uzayındaki normun tanımına göre,

$$\begin{aligned}
\|f_k - f_m\|_{p,\nu} &= \|I_\nu^\alpha\left(f_k - f_m\right)\|_{I_\nu^\alpha(L_{p,\nu})} \\
&= \|I_\nu^\alpha f_k - I_\nu^\alpha f_m\|_{I_\nu^\alpha(L_{p,\nu})} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

ve buradan da $\forall k, m > n_\varepsilon$ için, $\|f_k - f_m\|_{p,\nu} < \varepsilon$ olur. $L_{p,\nu}$ tam uzay olduğundan, (f_k) dizisi yakınsaktır. $\lim\limits_{(L_{p,\nu})} f_k = f$ olsun. Şimdi,

$$\begin{aligned}
\|I_\nu^\alpha f_k - I_\nu^\alpha f\|_{I_\nu^\alpha(L_{p,\nu})} &= \|I_\nu^\alpha\left(f_k - f\right)\|_{I_\nu^\alpha(L_{p,\nu})} \\
&= \|f_k - f\|_{p,\nu}
\end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$\lim_{k\to\infty} \|I_\nu^\alpha f_k - I_\nu^\alpha f\|_{I_\nu^\alpha(L_{p,\nu})} = 0$$

sağlanır. Buradan, $\varphi = I_\nu^\alpha f$ dersek, $I_\nu^\alpha(L_{p,\nu})$ uzayının normunda

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$$

elde edilir. Yani, $I_\nu^\alpha(L_{p,\nu})$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Çalışmanın bu bölümünün esas sonuçlarından bir diğeri de aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir. Bu teorem, $I_\nu^\alpha(L_{p,\nu})$ uzayının, bu tez çalışmasında tanımlanan $W_t^{(\beta)} f$ yarıgrubu yardımıyla bir karakterizasyonunu vermektedir.

Teorem 4.15. *$0 < \alpha < n + 2\nu$, $1 < p < \frac{n+2\nu}{\alpha}$ ve $\beta = 2k > \alpha$, ($k \in \mathbb{N}$) olsun. μ, $[0, \infty)$ aralığında sonlu bir Borel ölçümü olup, aşağıdaki koşulları sağlasın:*

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a}) \quad \int_0^\infty d\mu(\eta) = 0 \\ &(\mathbf{b}) \quad \int_1^\infty \eta d\,|\mu|\,(\eta) < \infty \\ &(\mathbf{c}) \quad c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} \neq 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Burada $c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} = \Gamma(-\frac{\alpha}{\beta})\int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}} d\mu(\eta)$'dir.

$$(D_\varepsilon^\alpha\varphi)(x) \equiv \left(D_{\varepsilon,\beta}^\alpha\varphi\right)(x) = \int_\varepsilon^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}(A\varphi)(x,t)dt,\ (\varepsilon > 0), \tag{4.13}$$

tanımlansın. Buradaki $(A\varphi)(x,t)$ fonksiyonu (4.1) ile verilen dalgacık dönüşümüdür. Bu taktirde, $\varphi \in I_\nu^\alpha(L_{p,\nu})$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$\varphi \in L_{q,\nu}, q = \frac{p(n+2\nu)}{n+2\nu-\alpha p}\ ve \sup_{\varepsilon>0}\|D_\varepsilon^\alpha\varphi\|_{p,\nu} < \infty$$

sağlanmasıdır.

İspat $\varphi \in I_\nu^\alpha(L_{p,\nu})$ olsun. O zaman, uygun bir $f \in L_{p,\nu}$ için $\varphi = I_\nu^\alpha f$ olur. Gadjiev ve Aliev (1988a)'in ve Aliev ve Rubin (2005)'in makalelerindeki Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi gereği,

$$\varphi \in L_{q,\nu} \quad (\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+2\nu},\ \ q = \frac{p(n+2\nu)}{n+2\nu-\alpha p})$$

olduğu bilinir. Ayrıca,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon^\alpha \varphi$$

limitinin $L_{p,\nu}$ anlamında var olduğu daha önce Teorem 4.11'de gösterilmişti. O zaman,

$$\sup_{\varepsilon>0} \|D_\varepsilon^\alpha \varphi\|_{p,\nu} < \infty$$

olur.

Şimdi, teoremin "yeterlilik kısmının" kanıtı için farklı bir teknik kullanılacaktır.

$\phi_+ \equiv \phi_+(\mathbb{R}_+^n)$ ile, $\mathbb{R}_+^n$'ya uyarlanmış Schwartz test fonksiyonları uzayı olan $S(\mathbb{R}_+^n)$ uzayının aşağıdaki koşulu sağlayan alt uzayı gösterilsin:

$$\omega \in \phi_+ \Leftrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \omega(x) x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{2k_n} x_n^{2\nu} dx = 0, \ \forall k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{Z}^+.$$

ϕ_+ uzayı, klasik Semyanisty-Lizorkin uzayının, Fourier-Bessel Harmonik Analizi'ndeki benzeridir.

ϕ_+ sınıfı, $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$'da yoğundur ve I_ν^α operatörü ϕ_+'nın otomorfizmidir (Aliev 1993). (Klasik Semyanisty-Lizorkin uzayları ϕ'nin $L_p(\mathbb{R}^n)$'de yoğunluğu ve genelleşmesi hakkında daha fazla bilgi için, Samko (1982)'nun makalesine ve Samko vd. (1993)'nun kitabında syf. 487'ye bakılabilir.)

Bir fonksiyonel olan f distribüsyonunun (genelleşmiş fonksiyonunun) $\omega \in \phi_+$ test fonksiyonu üzerine etkisi (f, ω) ile gösterilecektir. $\mathbb{R}_+^n$'da lokal integrallenebilir bir f fonksiyonu için, f'nin ω'ya etkisi,

$$(f, \omega) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(x)\omega(x) x_n^{2\nu} dx, \tag{4.14}$$

integrali ile tanımlansın. Bu integralin her $\omega \in \phi_+$ için sonlu olduğu varsayılacaktır. I_ν^α operatörü girişim tipli bir operatör olduğundan aşağıdaki özelliği sağlar:

$$(I_\nu^\alpha f, \omega) = (f, I_\nu^\alpha \omega), \ \forall \omega \in \phi_+, \ \alpha > 0, \ f \in L_{p,\nu}. \tag{4.15}$$

$\forall \omega \in \phi_+$ için, $(f, \omega) = (g, \omega)$ sağlanıyorsa, o zaman; $x \in \mathbb{R}_+^n$ olmak üzere ve

$$P = P(x)$$

polinomu, son değişken x_n'e göre çift olan bir polinom olmak üzere,

$$f = g + P$$

olduğu bilinir (Aliev 1993).

Şimdi, $D_{\varepsilon}^{\alpha}\varphi$ (4.13)'te tanımlanan operatör olmak üzere,

$$\mathbf{D}_{\varepsilon}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu}} D_{\varepsilon}^{\alpha}\varphi$$

tanımlansın.

$$\sup_{\varepsilon>0} \|\mathbf{D}_{\varepsilon}^{\alpha}\varphi\|_{p,\nu} < \infty$$

olduğundan, Banach-Alaoglu teoremi gereğince, $\mathbf{D}_{\varepsilon}^{\alpha}\varphi$, $(\varepsilon > 0)$ ailesinin zayıf yakınsayan bir $\mathbf{D}_{\varepsilon_k}^{\alpha}\varphi$ alt ailesi (alt dizisi) vardır. Yani,

$$\lim_{\varepsilon_k\to 0} \left(\mathbf{D}_{\varepsilon_k}^{\alpha}\varphi, \omega\right) = (f, \omega), \forall\omega \in \phi_+. \tag{4.16}$$

sağlayan bir (ε_k) dizisi ve $f \in L_{p,\nu}$ fonksiyonu vardır. (4.13), (4.1) ve (3.2)'den, $\mathbf{D}_{\varepsilon_k}^{\alpha}\varphi$ integral operatörü, radial bir çekirdek ile genelleşmiş girişim olarak gösterilebilir. O halde, aşağıdaki eşitlik her $\upsilon \in \phi_+$ için sağlanır:

$$\left(\mathbf{D}_{\varepsilon_k}^{\alpha}\varphi, \upsilon\right) = \left(\varphi, \mathbf{D}_{\varepsilon_k}^{\alpha}\upsilon\right) \tag{4.17}$$

Öncelikle,

$$(I_{\nu}^{\alpha} f, \omega) = (\varphi, \omega), \ \ \forall\omega \in \phi_+.$$

olduğu gösterilmelidir. Her $\omega \in \phi_+$ için,

$$\begin{aligned}
(I_{\nu}^{\alpha} f, \omega) &\overset{(4.15)}{=} (f, I_{\nu}^{\alpha}\omega) \\
&\overset{(4.16)}{=} \lim_{\varepsilon_k\to 0} \left(\mathbf{D}_{\varepsilon_k}^{\alpha}\varphi, I_{\nu}^{\alpha}\omega\right) \\
&\overset{(4.17)}{=} \lim_{\varepsilon_k\to 0} \left(\varphi, \mathbf{D}_{\varepsilon_k}^{\alpha} I_{\nu}^{\alpha}\omega\right) \\
&\overset{(4.11)}{=} \lim_{\varepsilon_k\to 0} \left(\varphi, \frac{1}{c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu}} \int_0^{\infty} \left(W_{\varepsilon_k\tau}^{(\beta)}\omega\right)(x) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau\right)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir. Şimdi, son limitin (φ, ω) sayısına eşit olduğu gösterilmelidir. Önce Hölder eşitsizliği sonra Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
& \left|\left(\varphi, \frac{1}{c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu}} \int_0^\infty \left(W_{\varepsilon_k \tau}^{(\beta)} \omega\right)(x) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau\right) - (\varphi, \omega)\right| \\
= & \left|\left(\varphi, \frac{1}{c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu}} \int_0^\infty \left(W_{\varepsilon_k \tau}^{(\beta)} \omega\right)(x) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau - \omega(x)\right)\right| \\
\leq & \frac{1}{\left|c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu}\right|} \|\varphi\|_{p,\nu} \left\| \int_0^\infty \left(W_{\varepsilon_k \tau}^{(\beta)} \omega\right)(x) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau - c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu}\omega(x) \right\|_{p',\nu} \\
(c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} = & \int_0^\infty K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau \text{ yerine konursa}) \\
\leq & \frac{1}{\left|c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu}\right|} \|\varphi\|_{p,\nu} \int_0^\infty \left|K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau)\right| \left\|W_{\varepsilon_k \tau}^{(\beta)} \omega - \omega\right\|_{p',\nu} d\tau, \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Önteorem 3.4 (i) ve Lebesgue baskın yakınsama teoreminden, son ifade $\varepsilon_k \to 0$ iken 0'a yakınsar.

Böylelikle, $(I_\nu^\alpha f, \omega) = (\varphi, \omega), \forall \omega \in \phi_+$ bulunur.

Bu da, $P = P(x)$ polinomu son değişken x_n'e göre çift polinom olmak üzere,

$$I_\nu^\alpha f = \varphi + P$$

olmasını gerektirir. Ama, $\varphi \in L_{q,\nu}$ ve $I_\nu^\alpha f \in L_{q,\nu}$ $(q = \frac{p(n+2\nu)}{n+2\nu-\alpha p})$ olduğuna göre,

$$P = 0$$

olmak zorundadır. Böylece, $I_\nu^\alpha f = \varphi$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$\varphi \in I_\nu^\alpha (L_{p,\nu})$$

olur ve ispat tamamlanır. □

4.4. Riesz Potansiyellerinin Bir Başka Genelleşmesi için Bir Boyutlu İntegral Gösterimi ve Ters Bulma Formülü

Çalışmanın bu kısmından itibaren, buraya kadar kullanılan Bessel (genelleşmiş) kaymasının farklı bir tanımı ele alınarak, ortaya çıkan genelleşmiş Riesz potansiyelleri için yeni bir integral gösterimi verilecektir. Esasen verilecek olan bu yeni gösterim şekil olarak (3.8)'de verilen $I_\nu^\alpha f$ genelleşmiş Riesz potansiyelleri gösterimine benzese de, temelinde kullanılan kayma tanımlarının farklı olmasından, gösterimler de birbirinden farklıdır.

Gerekli kavramlar

$\mathbb{R}^{n,+} = \{x = (x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0, x_2 > 0, ...x_n > 0\}$ şeklinde tanımlansın.

$\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m = \left\{(x, x^{'}) : \ x \in \mathbb{R}^{n,+}, \ x^{'} = (x_1^{'}, ..., x_m^{'}) \in \mathbb{R}^m\right\}$

$S(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$; $\mathbb{R}^{n+m}$'de ilk n değişkene göre çift olan Schwartz fonksiyonlarının $\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m$'ye uyarlanmış fonksiyonlar uzayıdır.

$S(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$'nin

$$\|f\|_{p,\nu} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} \left| f(x, x^{'}) \right|^p x^{2\nu} dx dx^{'} \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile kapanışı; $L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$ uzayı olarak tanımlansın. Burada, $1 \leq p \leq \infty$ olup, $p = \infty$ için

$$L_{\infty,\nu}(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m) \equiv C_0(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$$

uzayı, $S(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$ Schwartz uzayının sup-normunda kapanışıdır. Ayrıca, $\nu = (\nu_1, \nu_2, ...\nu_n)$, $\nu_1 > 0, ..., \nu_n > 0$ verilmiş parametreler olup,

$$x^{2\nu} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{2\nu_i}$$

ve $dx = dx_1...dx_n, \ dx^{'} = dx_1^{'}...dx_m^{'}$'dir.

Fourier-Bessel dönüşümü ve ters dönüşümü,

$$\begin{aligned} \left(F_\nu \varphi\right)(x, x^{'}) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} \varphi(y, y^{'}) e^{-ix^{'} \cdot y^{'}} \left(\prod_{i=1}^{n} j_{\nu_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i) \right) y^{2\nu} dy dy^{'} \\ \left(F_\nu^{-1} \varphi\right)(x, x^{'}) &= \frac{c_\nu(n)}{(2\pi)^m} \left(F_\nu \varphi\right)(x, -x^{'}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada, $x^{'} \cdot y^{'} = x_1^{'} y_1^{'} + ... + x_m^{'} y_m^{'}, \ \ \varphi \in L_{1,\nu}(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$,

$$c_\nu(n) = \left[2^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \Gamma^2(\nu_i + \frac{1}{2}) \right]^{-1},$$

ve $J_s(t)$ fonksiyonu I. tip Bessel fonksiyonu olmak üzere, $j_s(t)$ $(t > 0,\ s > -\frac{1}{2})$ normalleştirilmiş Bessel fonksiyonu olup

$$j_s(t) = \frac{2^s \Gamma(p+1) J_s(t)}{t^s}$$

dir. Görüldüğü gibi, yukarıdaki Fourier-Bessel dönüşümü, bir hibrit dönüşüm olup, m değişkene klasik Fourier dönüşümü ve n değişkene de Fourier-Bessel (kimi kaynaklarda Hankel) dönüşümü uygulanarak elde edilmiştir.

$T^{y,y'}$ genelleşmiş kayma (shift) operatörü olup, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\left(T^{y,y'}\varphi\right)(x,x') = \pi^{-\frac{n-2|\nu|}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(\nu_i + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu_i)} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \times$$

$$\times \varphi(\sqrt{x_1^2 - 2x_1 y_1 \cos\theta_1 + y_1^2}, .., \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\theta_n + y_n^2}, x' - y') \left(\prod_{i=1}^{n} \sin^{2\nu_i - 1}\theta_i\right) d\theta.$$

Burada, $x' - y' = (x_1' - y_1', \dots x_m' - y_m')$ klasik Öklid kayması olup,
$d\theta = d\theta_1 \dots d\theta_n$'dir (Altinkol 2009; Lyakhov ve Shishkina 2009; Yildirim H. ve Sarikaya M.Z. 2001).

$T^{y,y'}$ kayması tarafından üretilen Bessel girişimi,

$$(\varphi \circledast \psi)(x,x') = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^{n,+}} \varphi(y,y') T^{y,y'} \psi(x,x') y^{2\nu} dy dy',$$

şeklinde tanımlıdır.

Bessel girişimi

$$\varphi \circledast \psi = \psi \circledast \varphi$$

değişme özelliğini sağlar. Ayrıca, Fourier-Bessel dönüşümü ile Bessel girişimi arasında,

$$F_\nu(\varphi \circledast \psi) = (F_\nu \varphi)(F_\nu \psi)$$

şeklindeki özellik ve aşağıdaki Young eşitsizliği de sağlanır:

$$\|\varphi \circledast \psi\|_{r,\nu} \le \|\varphi\|_{p,\nu} \|\psi\|_{q,\nu},$$

$1 \le p, q, r \le \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ (Kipriyanov 1997).

$L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$ uzayında tanımlanmış beta yarıgrup ve özellikleri

Aşağıda, $\left|(x, x^{'})\right|$ ile, $(x, x^{'})$ vektörünün normu gösterilecektir:

$$\left|(x, x^{'})\right| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2 + \left(x_1^{'}\right)^2 + ... + (x_m^{'})^2}.$$

Şimdi bir $\beta > 0$ parametresi verilsin. Üçüncü bölümdeki (3.1) formülüne benzer olarak, $t > 0$; $(x, x^{'}), (y, y^{'}) \in \mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m$ olmak üzere,
$F_\nu^{-1}\left(\exp(-t\left|(x, x^{'})\right|^\beta)\right)(y, y^{'})$ fonksiyonu tanımlansın:

$$\begin{aligned} \omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y, y^{'})\right|, t\right) &= F_\nu^{-1}\left(\exp(-t\left|(x, x^{'})\right|^\beta)\right)(y, y^{'}) \qquad (4.19) \\ &= \frac{c_\nu(n)}{(2\pi)^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} e^{-t\left|(x,x^{'})\right|^\beta} e^{ix^{'}\cdot y^{'}}\left(\prod_{i=1}^n j_{\nu_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i)\right) x^{2\nu} dx dx \end{aligned}$$

şeklinde gösterilen $\omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y, y^{'})\right|, t\right)$ çekirdek fonksiyonu radialdir.

Tanım 4.16. *(4.19) çekirdeği tarafından üretilen Beta yarı grup girişim tipli bir operatör olup ifadesi şu şekildedir:*

$$\begin{aligned} \left(W_t^{(\beta,+)} f\right)(x, x^{'}) &= \left(\omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(\cdot,\cdot)\right|, t\right) \circledast f\right)(x, x^{'}) \qquad (4.20) \\ &\equiv \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} \omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y, y^{'})\right|, t\right) T^{y,y^{'}} f(x, x^{'}) y^{2\nu} dy dy^{'}. \end{aligned}$$

Burada, $(x, x^{'}), (y, y^{'}) \in \mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m$, $0 < t < \infty$ *ve* $0 < \beta < \infty$*'dır.*

Şimdi tanımlanan $W_t^{(\beta,+)} f$ integral operatörünün ve $\omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y, y^{'})\right|, t\right)$ radial çekirdek fonksiyonunun sağladığı bazı özellikleri verelim. Görüleceği üzere, bu özellikler üçüncü bölümde önteorem (3.4)'te verilmiş özelliklere benzerdir.

Önteorem 4.17. $(x, x^{'}), (y, y^{'}) \in \mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m$, $0 < t < \infty$ *ve* $0 < \beta < \infty$ *olsun. O zaman,*

(a)$\omega_\nu^{(\beta)}\left(\lambda^{\frac{1}{\beta}}\left|(y, y^{'})\right|, \lambda t\right) = \lambda^{-\frac{n+m+2|\nu|}{\beta}}\omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y, y^{'})\right|, t\right)$, $(\lambda > 0)$ *dir.*

Özel olarak, $\lambda = \frac{1}{t}$ *için,*

$$\omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y, y^{'})\right|, t\right) = t^{-\frac{n+m+2|\nu|}{\beta}}\omega_\nu^{(\beta)}\left(t^{-\frac{1}{\beta}}\left|(y, y^{'})\right|, 1\right) \qquad (4.21)$$

dir. Burada, $|\nu| = \nu_1 + ... + \nu_n$*'dir.*

(b) *$0 < \beta < 2$ ise o zaman her $(y, y^{'}) \in \mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^{m}$ ve her $t > 0$ için,*

$$\omega_{\nu}^{(\beta)}\left(\left|(y, y^{'})\right|, t\right) > 0$$

sağlanır.

(c) *$\beta = 2k$, $(k \in \mathbb{N})$ biçiminde ise o zaman her $t > 0$ için,*

$$\omega_{\nu}^{(\beta)}\left(\left|(y, y^{'})\right|, t\right) \in S(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^{m})$$

olur.

(d) *$0 < \beta \leq 2$ ya da $\beta = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ sağlanırsa, her $t > 0$ için,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} \omega_{\nu}^{(\beta)}\left(\left|(y, y^{'})\right|, t\right) y^{2\nu} dy dy^{'} = 1$$

olur.

(e) *$f \in L_{p,\nu}$, $1 \leq p \leq \infty$ olsun. $0 < \beta \leq 2$ ya da $\beta = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ ise o zaman,*

$$\left\|W_{t}^{(\beta,+)} f\right\|_{p,\nu} \leq c(\beta) \left\|f\right\|_{p,\nu}$$

sağlanır. Burada,

$$c(\beta) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} \left|\omega_{\nu}^{(\beta)}\left(\left|(y, y^{'})\right|, 1\right)\right| y^{2\nu} dy dy^{'} < \infty$$

dır. Özel olarak $0 < \beta \leq 2$ ise, $c(\beta) = 1$'dir.

(f) *$f \in L_{p,\nu}$, $1 \leq p \leq \infty$ olsun. $0 < \beta \leq 2$ ya da $\beta = 2k$, $(k \in \mathbb{N})$ ise o zaman,*

$$\sup_{t>0}\left|\left(W_{t}^{(\beta,+)} f\right)(x, x^{'})\right| \leq c \left(M_{\nu} f\right)(x, x^{'})$$

sağlanır. Burada, $M_{\nu} f$ genelleşmiş Hardy-Littlewood maximal fonksiyon olup, aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\left(M_{\nu} f\right)(x, x^{'}) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n+m+2|\nu|}\omega(n, m; \nu)} \int\limits_{B_{r}^{+}} \left|T^{x,x^{'}} f(y, y^{'})\right| y^{2\nu} dy dy^{'},$$

$B_{r}^{+} = \left\{(x, x^{'}) : (x, x^{'}) \in \mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^{m},\ \left|(x, x^{'})\right| \leq r\right\}$ *ve* $\omega(n, m; \nu) = \int\limits_{B_{1}^{+}} x^{2\nu} dx dx^{'}$.

(g) *$0 < \beta \leq 2$ ya da $\beta = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ için,*

$$\sup_{(x,x^{'}) \in \mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^{m}} \left|\left(W_{t}^{(\beta,+)} f\right)(x, x^{'})\right| \leq c t^{-\frac{n+m+2|\nu|}{p\beta}} \left\|f\right\|_{p,\nu}, 1 \leq p < \infty$$

olur.

(h) $0 < \beta \leq 2$ *ya da* $\beta = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ *ise o zaman her* $f \in L_{p,\nu}$ *ve her* $t, \tau \in (0, \infty)$ *için,*

$$W_t^{(\beta,+)}\left(W_t^{(\beta,+)}f\right) = W_{t+\tau}^{(\beta,+)}f, \textit{(yarıgrup özelliği)}$$

sağlanır.

(i) $f \in L_{p,\nu}$*,* $1 \leq p \leq \infty$ *olsun. O zaman,* $0 < \beta \leq 2$ *ya da* $\beta = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ *ise,*

$$\lim_{t \to 0^+}\left(W_t^{(\beta,+)}f\right)(x, x') = f(x, x')$$

dir. Burada, limit hem $L_{p,\nu}$*-normunda hem de h.h.h.* $(x, x') \in \mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m$ *için noktasal anlamdadır.* $f \in L_{\infty,\nu} \equiv C_0$ *durumunda, yakınsama düzgündür.*

Bu önteoremin ispatı Önteorem 3.4'ün ispatına benzer şekilde yapılır.

İspat (a)

$$\omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y, y')\right|, t\right) = \frac{c_\nu(n)}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} e^{-t\left|(x,x')\right|^\beta} e^{ix'\cdot y'}\left(\prod_{i=1}^n j_{\nu_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i)\right) x^{2\nu} dx dx'$$

$$\left(\ (x, x') = \lambda^{\frac{1}{\beta}}(z, z')\ \ dx = \lambda^{\frac{n}{\beta}}dz,\ \ dx' = \lambda^{\frac{m}{\beta}}dz' \text{ dönüşümü yapılırsa}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c_\nu(n)}{2\pi}\lambda^{\frac{2|\nu|}{\beta}}\lambda^{\frac{n+m}{\beta}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} e^{-\lambda t\left|(z,z')\ \right|^\beta} e^{iz'\cdot\lambda^{\frac{1}{\beta}}y'}\left(\prod_{i=1}^n j_{\nu_i - \frac{1}{2}}(z_i\lambda^{\frac{1}{\beta}}y_i)\right) z^{2\nu} dz dz' \\ &= \lambda^{\frac{n+m+2|\nu|}{\beta}}\omega_\nu^{(\beta)}\left(\lambda^{\frac{1}{\beta}}\left|(y, y')\right|, \lambda t\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $0 < \beta < 2$ olsun. I.A. Golubov (1980)'un makalesindeki Bernstein teoreminden görülür ki; $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan, sonlu, $\mu_\beta([0, \infty)) = 1$ koşulunu ve

$$e^{-z^{\beta/2}} = \int\limits_0^\infty e^{-\tau z} d\mu_\beta(\tau), \quad z \in [0, \infty)$$

eşitliğini sağlayan bir μ_β ölçümü vardır. Hatırlatalım ki, yukarıda yazdığımız $\mu_\beta([0, \infty)) = 1$ eşitliği $\int\limits_0^\infty d\mu_\beta(\tau) = 1$ demektir. Burada, z yerine $\left|(x, x')\right|^2$ yazılacak olursa,

$$e^{-\left|(x,x')\right|^\beta} = \int\limits_0^\infty e^{-\tau\left|(x,x')\right|^2} d\mu_\beta(\tau), \ (0 < \beta < 2) \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.22)'ten

$$\omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,1\right) \equiv F_\nu^{-1}(e^{-\left|(x,x^{'})\right|^\beta})(y,y^{'}) = \int_0^\infty F_\nu^{-1}(e^{-\tau\left|(x,x^{'})\right|^2})(y,y^{'})d\mu_\beta(\tau)$$

$$= \frac{2\pi^{|\nu|+\frac{1}{2}}}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\nu_i+\frac{1}{2})}\int_0^\infty (4\pi\tau)^{-\frac{n+m+2|\nu|}{2}} e^{-\frac{\left|(y,y^{'})\right|^2}{4\tau}} d\mu_\beta(\tau) > 0 \tag{4.23}$$

olur.

(c) F_ν dönüşümü $S(\mathbb{R}^{n,+}\times\mathbb{R}^m)$ uzayında bir otomorfizm ve $k\in\mathbb{N}$ için,

$$e^{-\left|(x,x^{'})\right|^{2k}} \in S(\mathbb{R}^{n,+}\times\mathbb{R}^m)$$

olduğundan,

$$F_\nu^{-1}(e^{-t\left|(x,x^{'})\right|^{2k}})(y,y^{'}) \equiv \omega_\nu^{(2k)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,t\right) \in S(\mathbb{R}^{n,+}\times\mathbb{R}^m)$$

elde edilir. Yani, $\omega_\nu^{(2k)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,t\right)$; $\mathbb{R}^{n,+}\times\mathbb{R}^m$ üzerinde sonsuz pürüzsüz ve hızla azalandır.

(d) (c)'den elde edilen sonuç gereği, $k\in\mathbb{N}$ ve $\forall t>0$ için,

$$\omega_\nu^{(2k)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,t\right) \in S(\mathbb{R}^{n,+}\times\mathbb{R}^m)$$

olduğundan, $\forall t>0$ için,

$$\omega_\nu^{(2k)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,t\right) \in L_{1,\nu}$$

olur. Buradan,

$$F_\nu\left(\omega_\nu^{(2k)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,t\right)\right) = e^{-t\left|(x,x^{'})\right|^{2k}},$$

yani

$$\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}} \omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,t\right) e^{-ix^{'}\cdot y^{'}}\left(\prod_{i=1}^n j_{\nu_i-\frac{1}{2}}(x_iy_i)\right) y^{2\nu}dydy^{'} = e^{-t\left|(x,x^{'})\right|^{2k}}$$

elde edilir. Son eşitlikte $(x,x^{'})=(0,...,0)$ alınırsa,

$$\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}} \omega_\nu^{(2k)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,t\right) y^{2\nu}dydy^{'} = 1$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi $0 < \beta < 2$ durumunu inceleyelim. (3.6) formülünden elde edilen

$$\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}} e^{-\frac{\left|(y,y^{'})\right|^2}{4\tau}} y^{2\nu} dy dy^{'} = \frac{1}{2}\pi^{\frac{n+m-1}{2}} \prod_{i=1}^{n} \Gamma(\nu_i + \frac{1}{2})\,(4\tau)^{\frac{n+m+2|\nu|}{2}}$$

formülü ve (4.23) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}} \omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,1\right) y^{2\nu} dy dy^{'} &= \frac{2\pi^{|\nu|+\frac{1}{2}}}{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(\nu_i+\frac{1}{2})} \int_0^\infty (4\pi\tau)^{-\frac{n+m+2|\nu|}{2}} \times \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}} e^{-\frac{\left|(y,y^{'})\right|^2}{4\tau}} y^{2\nu} dy dy^{'}\right) d\mu_\beta(\tau) \\
&= \pi^{\frac{n+m+2|\nu|}{2}} \pi^{-\frac{n+m+2|\nu|}{2}} \int_0^\infty d\mu_\beta(\tau) \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.21) formülü ile ifade edilen homojenlik özelliğinden, $0 < \beta < 2$ için,

$$\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}} \omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,t\right) y^{2\nu} dy dy^{'} = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}} \omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,1\right) y^{2\nu} dy dy^{'} = 1$$

olur.

(e) Minkowski eşitsizliği kullanılır:

$$\begin{aligned}
\left\|W_t^{(\beta,+)}f\right\|_{p,\nu} &= \left\|\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}} \omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,t\right) T^{y,y^{'}} f(x) y^{2\nu} dy dy^{'}\right\|_{p,\nu} \\
&\le \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}} \left|\omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,t\right)\right| \left\|T^{y,y^{'}} f(x)\right\|_{p,\nu} y^{2\nu} dy dy^{'} \\
&= c(\beta)\left\|T^{y,y^{'}} f\right\|_{p,\nu} \le c(\beta)\left\|f\right\|_{p,\nu}.
\end{aligned}$$

Burada, Lofstorm ve Peetre (1969)'nin genelleşmiş kayma için iyi bilinen

$$\left\|T^{y,y^{'}} f\right\|_{p,\nu} \le \left\|f\right\|_{p,\nu}$$

eşitsizliği kullanıldı.

(f) Aliev ve Bayrakci (1998)'nin makalesinden yararlanılarak, eğer $\varphi \in L_{1,\nu}$ fonksiyonunun,

$$\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}} \psi(\left|(x,x^{'})\right|) x^{2\nu} dx dx^{'} < \infty$$

koşulunu sağlayan, azalan, pozitif ve radial $\psi(\left|(x,x^{'})\right|)$ majorantı varsa, o zaman her $f\in L_{p,\nu}$ $(1\leq p\leq\infty)$ ve

$$\varphi_{\varepsilon}(x,x^{'})=\varepsilon^{-n-m-2|\nu|}\varphi(\frac{1}{\varepsilon}(x,x^{'}))$$

için,

$$\sup_{\varepsilon>0}\left|\left(\varphi_{\varepsilon}\circledast f\right)(x,x^{'})\right|\leq\|\psi\|_{1,\nu}\left(M_{\nu}f\right)(x,x^{'}) \tag{4.24}$$

elde edilir.

$$\psi(\left|(x,x^{'})\right|)=\omega_{\nu}^{(\beta)}\left(\left|(x,x^{'})\right|,1\right)$$

denilir ve (4.21)'de $\varepsilon=t^{\frac{1}{\beta}}$ alınırsa, (4.24) eşitsizliğinden, her $0<\beta\leq 2$ ya da $\beta=2k$ için,

$$\sup_{t>0}\left|\left(W_t^{(\beta,+)}f\right)(x,x^{'})\right|\leq c\left(M_{\nu}f\right)(x,x^{'})$$

elde edilir. Burada c katsayısı aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$c=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}}\left|\omega_{\nu}^{(\beta)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,1\right)\right|y^{2\nu}dydy^{'}<\infty.$$

(g) Hölder eşitsizliğinden, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{'}}=1$ için,

$$\begin{aligned}\left|\left(W_t^{(\beta,+)}f\right)(x,x^{'})\right| &\leq \|f\|_{p,\nu}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}}\left|\omega_{\nu}^{(\beta)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,t\right)\right|^{p^{'}}y^{2\nu}dydy^{'}\right)^{\frac{1}{p^{'}}}\\ &= \|f\|_{p,\nu}\,t^{-\frac{n+m+2|\nu|}{\beta}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}}\left|\omega_{\nu}^{(\beta)}\left(t^{-\frac{1}{\beta}}\left|(y,y^{'})\right|,1\right)\right|^{p^{'}}y^{2\nu}dydy^{'}\right)^{\frac{1}{p^{'}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((y,y^{'}) &= t^{\frac{1}{\beta}}(x,x^{'}),\ dy=t^{\frac{n}{\beta}}dx,\ dy^{'}=t^{\frac{m}{\beta}}dx^{'}\ \text{alınırsa})\\ &= \|f\|_{p,\nu}\,t^{-\frac{n+m+2|\nu|}{\beta}}t^{\frac{n+m+2|\nu|}{\beta}\frac{1}{p^{'}}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}}\left|\omega_{\nu}^{(\beta)}\left(\left|(x,x^{'})\right|,1\right)\right|^{p^{'}}x^{2\nu}dxdx^{'}\right)^{\frac{1}{p^{'}}}\\ &= ct^{-\frac{n+m+2|\nu|}{p\beta}}\|f\|_{p,\nu}\end{aligned}$$

bulunur. Burada, c katsayısı f fonksiyonuna bağlı değildir.

(h) $f\in S(\mathbb{R}^{n,+}\times\mathbb{R}^m)$ ise, ispatlanması gereken eşitliğin her iki tarafına Fourier-Bessel dönüşümü uygulanırsa, doğruluğu aşikar olan

$$e^{-t\left|(x,x^{'})\right|^{\beta}}e^{-\tau\left|(x,x^{'})\right|^{\beta}}F_{\nu}f=e^{-(t+\tau)\left|(x,x^{'})\right|^{\beta}}F_{\nu}f$$

eşitliği elde edilir. Keyfi $f \in L_{p,\nu}$ için, $S(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$ uzayının $L_{p,\nu}$ uzayında yoğun olması nedeniyle ve yukarıdaki (e) özelliğinden, istenilene ulaşılır.

(i) $0 < \beta \leq 2$ ya da $\beta = 2k$ olursa,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} \left|\omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y,y')\right|, t\right)\right| y^{2\nu} dy dy' = 1, (\forall t > 0)$$

eşitliği ve dolayısıyla her $f \in L_{p,\nu}$ için,

$$\begin{aligned} W_t^{(\beta,+)} f(x,x') - f(x,x') &= \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} \omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y,y')\right|, t\right) T^{y,y'} f(x,x') y^{2\nu} dy dy' - \\ &\quad - \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} f(x,x')\omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y,y')\right|, t\right) y^{2\nu} dy dy' \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} \omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y,y')\right|, t\right)\left(T^{y,y'} f(x,x') - f(x,x')\right) y^{2\nu} dy dy' \end{aligned}$$

sağlanır. Buradan, Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$\left\|W_t^{(\beta,+)} f - f\right\|_{p,\nu} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} \left|\omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y,y')\right|, t\right)\right| \left\|T^{y,y'} f(\cdot,\cdot) - f(\cdot,\cdot)\right\|_{p,\nu} y^{2\nu} dy dy'$$

$$= t^{-\frac{n+m+2|\nu|}{\beta}} \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} \left|\omega_\nu^{(\beta)}\left(t^{-\frac{1}{\beta}}\left|(y,y')\right|, 1\right)\right| \left\|T^{y,y'} f(\cdot,\cdot) - f(\cdot,\cdot)\right\|_{p,\nu} y^{2\nu} dy dy'$$

$$\left((y,y') = t^{\frac{1}{\beta}}(z,z'),\ dy = t^{\frac{n}{\beta}} dz,\ dy' = t^{\frac{m}{\beta}} dz' \text{ alınırsa}\right)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} \left|\omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(z,z')\right|, 1\right)\right| \left\|T^{t^{\frac{1}{\beta}}(z,z')} f(\cdot) - f(\cdot)\right\|_{p,\nu} z^{2\nu} dz dz'$$

bulunur.

$$\left\|T^{t^{\frac{1}{\beta}}(z,z')} f(\cdot,\cdot) - f(\cdot,\cdot)\right\|_{p,\nu} \leq 2\left\|f\right\|_{p,\nu}$$

eşitsizliği ve Lofstrom ve Peetre (1969)'nin makalesindeki bilgiye dayanarak elde edilen

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|T^{t^{\frac{1}{\beta}}(z,z')} f(\cdot,\cdot) - f(\cdot,\cdot)\right\|_{p,\nu} = 0$$

eşitliği dikkate alınırsa, Lebesgue baskın yakınsama teoremi gereğince,

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|W_t^{(\beta,+)} f - f\right\|_{p,\nu} = 0,\ \ 1 \leq p \leq \infty,\ (L_{\infty,\nu} \equiv C_0)$$

olur.

$f \in L_{p,\nu} \cap C_0$ için $W_t^{(\beta,+)} f(x, x^{'})$ ailesi $f(x, x^{'})$'e noktasal (aslında düzgün) yakınsadığından ve bu sınıf $L_{p,\nu}$, $(1 \leq p < \infty)$ uzaylarında yoğun olduğundan, o zaman, bu Önteoremin (f) maddesi gereğince ve Stein ve Weiss (1971)'ın kitabında 60. sayfadaki noktasal yakınsama ile ilgili ünlü teoremden,

$$\lim_{t \to 0^+} W_t^{(\beta,+)} f(x, x^{'}) = f(x, x^{'}), \quad (h.h.h.(x, x^{'}) \in \mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$$

olduğu sonucuna ulaşılır.

Böylece önteoremin ispatı tamamlanmış oldu. □

Tanımlanan bu $W_t^{(\beta,+)} f$ genelleşmiş yarıgrup kullanılarak, $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$ fonksiyonları için tanımlanmış $I_\nu^\alpha f$ genelleşmiş Riesz potansiyellerinin bir boyutlu yeni bir integral gösterimini elde etmek mümkündür. Öncelikle $I_\nu^\alpha f$ genelleşmiş Riesz potansiyellerinin genel ifadesini verelim:

$$\left(I_\nu^\alpha f\right)(x, x^{'}) = c \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n,+}} \left|(y, y^{'})\right|^{\alpha-n-m-2|\nu|} T^{y,y^{'}} f(x, x^{'}) y^{2\nu} dy dy^{'} ,$$

$$c = \left[\frac{2^{\alpha - \frac{n+m+2|\nu|}{2}} \pi^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma^2(\nu_i + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+n+m+2|\nu|}{2})} \right]^{-1} , \ 0 < \alpha < n + m + 2\left|\nu\right|.$$

Elde edilen yeni gösterim aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir.

Teorem 4.18. $0 < \alpha < n + m + 2|\nu|$, $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$, $1 \leq p < \frac{n+m+2|\nu|}{\alpha}$ *olsun. O zaman,* $I_\nu^\alpha f$ *genelleşmiş Riesz potansiyelleri aşağıdaki gibi bir boyutlu gösterime sahiptir:*

$$\left(I_\nu^\alpha f\right)(x, x^{'}) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})} \int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(W_t^{(\beta,+)} f\right)(x, x^{'}) dt. \tag{4.25}$$

Burada, $0 < \beta \leq 2$ *ya da* $\beta = 2k$, $k \in \mathbb{N}$*'dir.*

Bu teoremin ispatı da Teorem (3.5)'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

İspat $1 \leq p < \frac{n+m+2|\nu|}{\alpha}$ durumu, $\left(I_\nu^\alpha f\right)(x, x^{'})$'in klasik anlamda bir fonksiyon olmasını sağlar. (4.25) formülünü kanıtlamak için, $W_t^{(\beta,+)} f$ ailesinin (4.20) tanımı kullanılırsa:

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})} \int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(W_t^{(\beta,+)} f\right)(x, x^{'}) dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}} \omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(y,y^{'})\right|,t\right) T^{y,y^{'}}f(x,x^{'})y^{2\nu}dydy^{'}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}} T^{y,y^{'}}f(x,x^{'})\left(\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}t^{-\frac{n+m+2|\nu|}{\beta}}\omega_\nu^{(\beta)}\left(t^{-\frac{1}{\beta}}\left|(y,y^{'})\right|,1\right)dt\right)y^{2\nu}dydy^{'}$$

$$(t = \left|(y,y^{'})\right|^{\beta}\tau^{-\beta};\ \ dt=(-\beta)\left|(y,y^{'})\right|^{\beta}\tau^{-\beta-1}d\tau;\ \ t^{-\frac{1}{\beta}}\left|(y,y^{'})\right| = \tau \text{ alınırsa})$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty \tau^{n+m+2|\nu|-\alpha-1}\omega_\nu^{(\beta)}(\tau,1)\,d\tau\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}}\left|(y,y^{'})\right|^{\alpha-n-m-2|\nu|}T^{y,y^{'}}f(x,x^{'})y^{2\nu}dydy^{'}$$

$$= c\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}}\left|(y,y^{'})\right|^{\alpha-n-m-2|\nu|}T^{y,y^{'}}f(x,x^{'})y^{2\nu}dydy^{'}$$

elde edilir. Burada,

$$c = \frac{\beta}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty \tau^{n+m+2|\nu|-\alpha-1}\omega_\nu^{(\beta)}(\tau,1)\,d\tau$$

olur. Aynı zamanda

$$c = \left[\frac{2^{\alpha-\frac{n+m+2|\nu|}{2}}\pi^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})\prod_{i=1}^{n}\Gamma^2(\nu_i+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+n+m+2|\nu|}{2})}\right]^{-1},\quad 0<\alpha<n+m+2|\nu|$$

olduğu gösterilmelidir.

c ile gösterilen bu iki sayının birbirine eşit olduğunu göstermek için, Fourier-Bessel dönüşümü tekniği kullanılır. Yukarıdaki

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(W_t^{(\beta,+)}f\right)(x,x^{'})dt = c\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^{n,+}}\left|(y,y^{'})\right|^{\alpha-n-m-2|\nu|}T^{y,y^{'}}f(x,x^{'})y^{2\nu}dydy^{'}$$

eşitliği her $f \in L_{p,\nu}$, $1 \leq p < \frac{n+m+2|\nu|}{\alpha}$ için sağlandığından, genelleşmiş Schwartz test fonksiyonları için de sağlanır. $f \in S(\mathbb{R}^{n,+}\times\mathbb{R}^m)$ olsun.

Kısaca $F_\nu(g) = g^\wedge$ ile gösterilecektir. $0<\alpha<n+m+2|\nu|$ için,

$$\left[\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(W_t^{(\beta,+)}f\right)(\cdot,\cdot)dt\right]^\wedge(y,y^{'}) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left[\left(W_t^{(\beta,+)}f\right)(\cdot,\cdot)\right]^\wedge(y,y^{'})dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left[\omega_\nu^{(\beta)}\left(\left|(\cdot,\cdot)\right|,t\right)\right]^\wedge(y,y^{'})f^\wedge(y,y^{'})dt \\
&= f^\wedge(y,y^{'})\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t\left|(y,y^{'})\right|^\beta}dt \\
(t\left|(y,y^{'})\right|^\beta &= \tau \text{ alınırsa}) \\
&= f^\wedge(y,y^{'})\left|(y,y^{'})\right|^{-\alpha}\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int\limits_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-\tau}d\tau \\
&= f^\wedge(y,y^{'})\left|(y,y^{'})\right|^{-\alpha} \\
&= \left[\left(I_\nu^\alpha f\right)(.)\right]^\wedge(y,y^{'})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada, $I_\nu^\alpha f$, (2.8) ile tanımlanmış olan genelleşmiş Riesz potansiyelidir.

Yani,

$$
\left(I_\nu^\alpha f\right)(x,x^{'}) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\left(W_t^{(\beta,+)}f\right)(x,x^{'})dt,\ \ \forall f\in S(\mathbb{R}^{n,+}\times\mathbb{R}^m)
$$

sonucuna ulaşılır. □

Daha evvel de değinildiği gibi (4.25)'te verilen gösterim ile (3.8) gösterimi şekil olarak benzemektedir. Fakat, bu iki gösterimin temelinde kullanılan Bessel kayması (genelleşmiş kayma) tanımları farklı olduğundan, bu gösterimler de birbirinden farklıdır. Bu yeni bir boyutlu integral gösterim kullanılarak $I_\nu^\alpha f(x,x^{'})$ potansiyellerinin ters çevirme formülünü bulmak için Bölüm 4.1'deki dalgacık tipli dönüşüme benzer bir dönüşüm verilebilir.

$L_{p,\nu}(\mathbb{R}^{n,+}\times\mathbb{R}^m)$ uzayında verilmiş genelleşmiş Riesz potansiyelleri için ters bulma formülü

Buraya kadar yapılan çalışmalarda Bessel girişiminin farklı bir tanımı kullanılarak yeni bir çekirdek fonksiyonu ve beta yarıgrup tanımlanarak, genelleşmiş Riesz potansiyelleri için bir boyutlu yeni bir gösterim verilmişti. Şimdi verilen bu yeni gösterim, ters belirleme formülü elde etmemizi sağlayacak ve daha evvel Bölüm 4.1'de yapılan çalışmalara benzer çalışmalar yapılacaktır.

$\varphi \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$ olmak üzere,

$$(A\varphi)\left((x,x^{'}),t\right) \equiv (A_{\beta,\nu,\mu}\varphi)\left((x,x^{'}),t\right) = \int_0^\infty \left(W_{t\eta}^{(\beta,+)}\varphi\right)(x,x^{'})d\mu(\eta) \tag{4.26}$$

integral dönüşümünü tanımlayalım. Burada $(x,x^{'}) \in \mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m$, $t > 0$ ve μ ölçümü, $\mu\left([0,\infty)\right) = 0$ koşulunu sağlayan $[0,\infty)$'da tanımlı sonlu bir Borel ölçümüdür. Bu μ Borel ölçümü bir dalgacık ölçümü ve (4.26)'da verilen $(A\varphi)\left((x,x^{'}),t\right)$ integral dönüşümü de dalgacık tipli dönüşüm diye adlandırılır.

$L_{p,\nu}(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$ uzayında verilmiş genelleşmiş Riesz potansiyellerinin yeni gösterimi kullanılarak, potansiyeller için ters bulma formülünün verildiği teroemin ifadesi aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.19. *$\alpha > 0$, $1 \leq p < \frac{n+m+2|\nu|}{\alpha}$, $f \in L_{p,\nu}$ ve $\beta > \alpha$ olup, $\beta = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ formunda olsun. Ayrıca μ ölçümü, $[0,\infty)$'da tanımlı sonlu Borel ölçümü olup aşağıdaki koşulları sağlasın:*

$$(\mathbf{a}) \quad \int_0^\infty d\mu(\eta) = 0$$

$$(\mathbf{b}) \quad \int_1^\infty \eta d\left|\mu\right|(\eta) < \infty$$

O zaman, A operatörü (4.26)'deki gibi tanımlanmak üzere,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(AI_\nu^\alpha f\right)((x,x^{'}),t)t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}dt &\equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \left(AI_\nu^\alpha f\right)((x,x^{'}),t)t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}dt \\ &= c_{\frac{\alpha}{\beta},\mu} f(x,x^{'}) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada, $\theta = \frac{\alpha}{\beta}$ olmak üzere, $c_{\theta,\mu}$ katsayısı Önteorem 4.7'de tanımlanan katsayıya benzerdir. Limit, $L_{p,\nu}$-normunda ve h.h.h. $(x,x^{'}) \in \mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m$ için noktasal anlamda sağlanır. Eğer $f \in C_0 \cap L_{p,\nu}$ ise, yakınsama tüm $\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m$'de düzgündür.

Bu teoremin ispatı da Teorem (4.11)'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Böylelikle, bu bölümde hedeflendiği gibi, $L_{p,\nu}(\mathbb{R}^{n,+} \times \mathbb{R}^m)$ uzayında tanımlanmış genelleşmiş Riesz potansiyelleri için yeni bir gösterim ve yeni bir ters bulma formülü verilmiş oldu.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında Laplace-Bessel diferansiyel operatörü denilen

$$\Delta_\nu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2\nu}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (\nu > 0)$$

singüler diferansiyel operatörün negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanan genelleşmiş Riesz potansiyelleri üzerine çalışılmış ve Riesz potansiyellerinden oluşan uzay ile ilgili birtakım özgün sonuçlar elde edilmiştir.

Tez çalışması Sonuçlar bölümü hariç dört bölümden ibarettir.

İlk bölüm olan "Giriş" bölümünde tez çalışmasının kapsamı, çalışılan konunun tarihçesi ve hangi alanlara katkısının olduğu hakkında bilgiler verilmiş ve literatürdeki kaynaklarla ilgili yapılan araştırmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, kaynak taraması yapılarak çalışma için gerekli araştırmalar ve önbilgiler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, Bessel kaymasının doğurduğu Abel-Poisson ve Gauss-Weierstrass yarıgruplarının her ikisini de genelleştiren yeni bir yarıgrup tanımlanmış ve bu yarıgrup yardımıyla genelleşmiş Riesz potansiyelleri için tek değişkene bağlı yeni bir integral gösterim verilmiştir.

Dördüncü bölümde, bir dalgacık (wavelet) ölçümü vasıtasıyla yeni bir dalgacık tipli dönüşüm tanımlanmıştır. Sonra, tanımlanan bu dalgacık tipli dönüşüm yardımıyla genelleşmiş Riesz potansiyelleri için ters çevirme formülü bulunmuş ve ardından genelleşmiş Riesz potansiyelleri uzayı tanımlanarak, bu uzay için bir karakterizasyon verilmiştir. Son olarak da dördüncü bölümün son alt bölümünde, Bessel kaymasının farklı bir tanımı kullanılarak, ortaya çıkan genelleşmiş Riesz potansiyelleri için yeni bir integral gösterimi ve bu yeni gösterime uygun ters belirleme formülü verilmiştir.

Bu tez çalışmasından elde dilen özgün sonuçlar, yeni gösterimler ve ters belirleme formülleri, Laplace-Bessel Harmonik Analiz'in çeşitli alanlarında, Fonksiyonel Uzaylar'da, integral dönüşümler (özellikle Fourier-Bessel dönüşümü ve dalgacık (wavelet) tipli dönüşümler) alanında ve zayıf tekilliğe sahip çekirdekli integral denklemler alanında çalışan matematikçiler için yardımcı kaynak rolü oynayacak niteliktedir.

6. KAYNAKLAR

Aliev, I.A. 1987. Riesz transforms generated by a generalized shift operator. *Izvestiya Akad. Nauk Azerbaijan Rep. (Ser. Fiz. Techn. Mat. Nauk)*, 1: 7-13.

Aliev, I.A. 1993. Investigation on the Fourier-Bessel harmonic analysis, Doctoral Dissertation, Baku (in Russian).

Aliev, I.A. and Bayrakci, S. 1998. On inversion of B-elliptic potentials by the method of Balakrishnan-Rubin. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 1(4): 365-384.

Aliev, I.A. and Rubin, B. 2001. Wavelet-like transforms for admissible semi-groups; inversion formulas for potentials and Radon transforms. *The Journal of Fourier Analysis and Applications,* 11(3): 333-352.

Aliev, I.A. and Bayrakci, S. 2002. On inversion of Bessel potentials associated with the Laplace-Bessel differential operator. *Acta Math. Hungar,* 95(1-2): 125-145.

Aliev, I.A. Rubin, B. Sezer, S. and Uyhan, S.B. 2008. Composite Wavelet Transforms: Applications and Perspectives, Radon Transforms, Geometry, and Wavelets. *Contemporary Mathematics. Amer. Math. Soc.*, 464: 1-25, Providence, RI.

Aliev, I.A. 2009. Bi-parametric potentials, relevant function spaces and wavelet-like transform. *Integral Equations and Operator Theory,* 65: 151-167.

Aliev, I.A. and Saglik, E. 2016a. Generalized Riesz potential spaces and their characterization via wavelet-type transform. *Filomat*, 30(10), 2809-2823. Doi:10.2288/FIL1610809A.

Aliev, I.A. and Saglik, E. 2016b. A new wavelet-like transforms associated with the Riesz-Bochner integral and relevant reproducing formula. *Mediterr. J. Math.,* 13, 4711-4722

Altinkol, S. 2009. Riesz parabolik potansiyellerinin yakınsama özellikleri. Yüksek lisans tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 24 s.

Cevik, E. and Aliev, I.A. 2013. A new integral representation of generalized Riesz potentials. Algerian-Turkish International Days on Mathematics, 12-14 September 2013, s. 136, Istanbul, TURKEY.

Feller, W. 1971. An introduction to probability theory and its applications. Wiley and Sons, New York.

Folland, G.B. 1984. Real Analysis, Modern Techniquies and Their Applications. 549 pp., USA.

Gadjiev, A.D. and Aliev, I.A. 1988a. Riesz and Bessel potentials generated by a generalized translation and their inverses, *Proc. IV. All-Union Winter Conf. Theory of funtions and Approximation*, Saratov(Russia), 47-53.

Gadjiev, A.D. and Aliev, I.A. 1988b. On a class of potential type operator generated by a generalized shift operator, *Reports Seminar of the I.N. Vekua Inst. Appl. Math.*, 3(2): 21-24, Tbilisi.

Golubov, I.A. 1980. On the summability method of Abel-Poisson type for multiple Fourier integrals, *Math. USSR Sbornik,* 36(2): 213-229.

Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. 1994. Table of Integrals, Series and Products, 5th ed., Academic Press.

Guliev, V.S. 1998. Sobolev's theorem for Riesz B-potentials, *Dokl. Rus. Akad. Nauk*, 358(4): 450-451.

Guliev, V.S. 2003. On maximal function and fractional integral associated with the Bessel differential operator. *Mathematical Inequalities and Applications*, 6: 317-330.

Johnson, R. 1973. Temperatures, Riesz potentials and Lipschitz spaces of Herz. *Proc. London Math. Soc., 27(3): 290-316.*

Keles, S. and Bayrakci, S. 2013. On β-semigroup generated by Fourier-Bessel transform and Riesz potential associated with β-semigroup. *EÜFBED*, 6(2): 175-186.

Kipriyanov, I.A. 1967. Fourier-Bessel transforms and imbedding theorems for weight classes. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova,* 89: 130-213.

Kipriyanov, I.A. 1997. Singular elliptic boundary problems. *Mirovozrenie Zhizn Moskow*, Fizmatlit, Nauka, Mirovozrenie Zhizn Moskow.

Koldobsky, A. 2005. Fourier Analysis in convex geometry, Math. Surveys Monogr. *Amer. Math. Soc.*, 116.

Levitan, B.M. 1951. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk,* 6(2): 102-143.

Lofstorm, J. and Peetre, J. 1969 Approximation theorems connected with generalized translation. *Math. Ann.,* 18:, 255-268.

Lyakhov, L.N. and Shishkina, E.L. 2009. Inversion of general Riesz B-Potentials with homogeneous characteristic in weight classes of functions. *Doklady Akademii Nauk,* 426(4): 443-447.

Rubin, B. 1986. A method of characterization and inversion of Bessel and Riesz potentials. *Sov. Math. (IZ-VUZ),* 30(5): 78-89.

Rubin, B. 1999. Fractional integrals and wavelet transforms associated with Blaschke-Levy representation on the sphere. *Israel J. Math.*, 114: 1-27.

Rubin, B. 2008a. Fractional ıntegrals and potentials. *Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math.,* 218: 696-727.

Rubin, B. 2008b. Intersection bodies generalized cosine transforms. *Advances in Math.*, 218(3): 696-727.

Sadosky, C. 1979. Interpolation of operators and singular integrals. Marcel Dekker, Inc. New York.

Saglik(Cevik), E. ve Aliyev, I.A. 2015. Dalgacık tipli bir integral dönüşün ve geneelleşmiş Riesz potansiyelleri için yeni bir ters bulma formülü. 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, 7-9 Eylül, s. 29-30, Akdeniz Üniversitesi, Antalya.

Saglik(Cevik), E. ve Aliyev, I.A. 2016. Bessel Kaymasının Doğurduğu Yeni Bir Dalgacık Tipli Dönüşüm ve Genelleşmiş Riesz Potansiyellerine Uygulaması, 29. Ulusal Matematik Sempozyumu, 28-31 Ağustos, Mersin Üniversitesi, Mersin.

Saglik(Cevik), E. ve Aliyev, I.A. 2017. Genelleşmiş Riesz potansiyelleri uzayının yeni bir karakterizasyonu. 30. Ulusal Matematik Sempozyumu, 6-9 Eylül, Atılım Üniversitesi, Ankara.

Samko, S.G. Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. 1993. Fractionals integrals and derivates, theroy and applications, Gordon and Breach Science Publishers, London, New York.

Samko, S.G. 1976. On spaces of Riesz potentials. *Math. USSR Izv.,* 10(5): 1089-1117.

Samko, S.G. 1982. Denseness of Lizorkin-type spaces ϕ_ν in $L_p(\mathbb{R}^n)$. *Math. Zametki,* 31(6): 655-665.

Samko, S.G. 2002. Hypersingular integrals and their applications. *Internat. Ser. Monogr. Math.*, 5, Taylor&Francis.

Sezer, S. and Aliev, I.A. 2010. A new characterization of the Riesz potential spaces with the aid of a composite wavelet transform. *J. Math. Anal. Appl.*, 372: 549-558.

Spiegel, M.R. 1974. Shaum's Outline Series Theory and Problems of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems. R.P. Ins., New York.

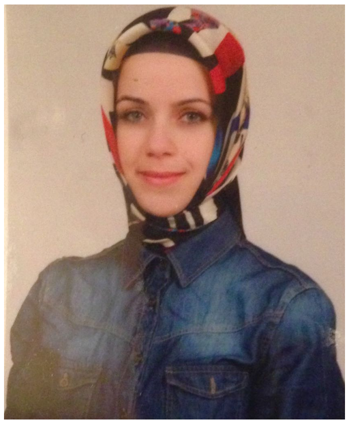
Stein, E. and Weiss, G. 1960. On the theory of harmonic funtions of several variables, The Teory of H^p Spaces. *Acta. Math.,* 103(1-2): 25-62.

Stein, E. and Weiss, G. 1971. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, Princeton NJ.

Yildirim, H. and Sarikaya, M.Z. 2001. On the generalized Riesz type potentials. *Jour. of Inst. of Math. and Comp. Sci. (Math. Ser.),* 14(3): 217-224.

Zasorin, Y.V. 1986. On the symetry properties of the Fourier-Bessel transform, *Nonclassical equations of Mathematical Physics*, Novosibirsk, 52-58.

ÖZGEÇMİŞ



ESRA SAĞLIK

esracevik66@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2010-2012	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Antalya
Lisans 2006-2010	Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1-Aliev, I.A. and Saglik, E. (2016). Generalized Riesz potential spaces and their characterization via wavelet-type transform. *Filomat*, 30(10), 2809-2823. Doi:10.2288/FIL1610809A.

2-Aliev, I.A. and Saglik, E. (2016). A new wavelet-like transforms associated with the Riesz-Bochner integral and relevant reproducing formula. *Mediterr. J. Math.,* 13, 4711-4722.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1-Cevik, E. ve Aliyev, I.A. 2012. Bir yaklaşık birim operatörün doğurduğu dalgacık tipli integral dönüşüm ve Calder*ó*n formülü. 25. Ulusal Matematik Sempozyumu, 5-7 Eylül, s. 89-90, Niğde Üniversitesi, Niğde.(Özet Bildiri).

2-Cevik, E. and Aliev, I.A. 2013. A new integral representation of generalized Riesz potentials. Algerian-Turkish International Days on Mathematics, 12-14 September 2013, s. 136, Istanbul, TURKEY.(Özet Bildiri).

3-Saglik(Cevik), E. ve Aliyev, I.A. 2015. Dalgacık tipli bir integral dönüşün ve geneelleşmiş Riesz potansiyelleri için yeni bir ters bulma formülü. 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, 7-9 Eylül, s. 29-30, Akdeniz Üniversitesi, Antalya.(Özet Bildiri).

4-Saglik(Cevik), E. ve Aliyev, I.A. 2016. Bessel Kaymasının Doğurduğu Yeni Bir Dalgacık Tipli Dönüşüm ve Genelleşmiş Riesz Potansiyellerine Uygulaması, 29. Ulusal Matematik Sempozyumu, 28-31 Ağustos, s. 53, Mersin Üniversitesi, Mersin.(Özet Bildiri).

5-Saglik(Cevik), E. ve Aliyev, I.A. 2017. Genelleşmiş Riesz potansiyelleri uzayının yeni bir karakterizasyonu. 30. Ulusal Matematik Sempozyumu, 6-9 Eylül, s. 64, Atılım Üniversitesi, Ankara. (Özet Bildiri).