T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

POZİTİF TAMSAYILARDA MAC MAHON PARÇALANMA ANALİZİ

Büşra AL

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAYIS 2018

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

POZİTİF TAMSAYILARDA MAC MAHON PARÇALANMA ANALİZİ

Büşra AL

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAYIS 2018

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF TAMSAYILARDA MAC MAHON PARÇALANMA ANALİZİ

Büşra AL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez T.C. Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimi tarafindan FYL-2017-2393 nolu proje ile desteklenmistir.

MAYIS 2018

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF TAMSAYILARDA MAC MAHON PARÇALANMA ANALİZİ

Büşra AL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 04/05/2018 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Mustafa ALKAN (Danışman)
Prof.Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE

ÖZET

POZİTİF TAMSAYILARDA MAC MAHON PARÇALANMA ANALİZİ

Büşra AL

Yüksek Lisans Tezi Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof.Dr. Mustafa ALKAN
Mayıs 2018, 63 sayfa

Bu yüksek lisans tezinin amacı parçalanış teorisini ve Mac Mahon parçalanma analizini inceleyerek parçalanış teorisine yeni sonuçlar ile katkı sağlamaktır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, parçalanış teorisinin tarihsel başalangıcını içeren bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümün, ilk kısmında parçalanış teorisinden bahsedilerek bazı temel problemleri ispatsız olarak ele alınmıştır. Ayrıca serbest parçalanıştan bahsedilmiş, parçalanışların geometrik gösterimi hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra parçalanış teorisi için önemli bağıntılardan biri olan Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği ve ispatı verilmiştir. Üreteç fonksiyonlarından bahsedildikten ve $p(n)$ için üreteç fonksiyonu verildikten sonra $Q(n)$ ve $Z(n)$'in üreteç fonksiyonları ispatsız olarak verilmiştir. Çalışmaların devamında beşgensel sayıların tanımı verilerek beşgensel sayılar ile parçalanış arasındaki bağıntıya değinilmiştir. Ayrıca Euler'in Beşgensel Sayı Teoremi ve ispatı verilmekle birlikte Euler'in beşgensel sayı teoreminin kombinatorik ispatına da değinilmiştir. Euler'in parçalanış için özyineleme formülü ve ispatına da bu bölümde verilmiştir.

Üçüncü bölüme, Mac Mahon parçalanma analizini anlamakta önemli bir yere sahip olan $\Omega_{\geq}$ operatörünün tanımı ve özellikleri ile başlanmıştır. Daha sonra Mac Mahon parçalanma analizinin temel özelliklerinin incelenip araştırılmasıyla devam edilmiştir.

Dördüncü bölümde, k-gensel sayılar tanımlanarak, çokgensel sayılar için Jacobi Özdeşliği verilmiştir. Daha sonra beşgensel ve altıgensel sayılar ile beşgensel ve yedigensel sayılar arasındaki bağıntılar incelenmiştir. Çalışmalara Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinin bazı özellikleri verilerek devam edilmiştir. Son olarak $Q(n)$ ile $p(n)$, $p(n)$ ile $Z(n)$ ve $Q(n)$ ile $Z(n)$ arasında yeni bağıntılar elde edilmiştir.

Son bölümde, yeni bulunan yineleme formülleri Euler'in ve Ewell'in yineleme formülleri ile karılaştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Beşgensel Sayılar, Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği, Parçalanma Analizi, MacMahon's Parçalama Analizi, Parçalanış Sayısı, Tek Parçalanış Sayısı, Tek ve Düzensiz Parçalanış Sayısı.

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Dr. Öğr. Üyesi Rahime DERE

ABSTRACT

MAC MAHON PARTITION ANALYSIS IN POSITIVE INTEGERS

Büşra AL

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ALKAN

May 2018, 63 pages

This master thesis is to examine and contribute to the partition theory with new results and the Mac Mahon partition analysis.

This thesis consists of five parts. In the first chapter, the historical beginning of the partition theory is given.

In second chapter, the partition theory is introduced and some problems are given. In addition, unrestricted partitions is mentioned and geometric representations of partitions are given. Then, Jacobi triple product identity with proof, which is one of the important relativities for partition theory, are given. After we mention the generating functions, the generating functions for $p(n)$, $Q(n)$ and $Z(n)$ are given without proof. The definition of pentogonal numbers is given and the connection between the pentogonal numbers and the partition is mentioned. Euler's Pentogonal Number Theorem and the combination of Euler's pentogonal number theorem are stated. Euler's recursion formula for partition is also studied in this section.

The third chapter begins with the definition and properties of the $\Omega_{\geq}$ operator, which has an important place in understanding the Mac Mahon partition analysis. Then, the basic properties of the Mac Mahon partition analysis are studied.

In the fourth chapter, the Jacobi identity is given for polygonal numbers. Then, the relations between the pentogonal and hexagonal numbers are examined. Some properties of the Jacobi Triple Product Identification have been continued. Finally, new correlations between $Q(n)$ and $p(n)$, $p(n)$ and $Z(n)$ and $Q(n)$ and $Z(n)$ are obtained.

In the last chapter, the new recurrence formulas are compared with Euler's and Ewell's recurrence formulas.

KEYWORDS: Pentoganal Number, Jacobi triple product, Partition Analiysis, MacMahon's Partition Analiysis, Number of Partition, Number of Odd Partition, Number of Odd and Unequal Partition.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Asst. Prof. Dr. Rahime DERE

ÖNSÖZ

Bu tezin konusunun parçalanma analizi olmasındaki en büyük etmen konunun ve uygulama alanlarının güncel olmasıdır. Bilimde ve teknolojide birçok alanda aktif rol alan bir konudur. Simetrik polinomlarla ilişkili olduğu için simülatör ve modern cebirde kullanılır. Basit bir örnek verecek olursak, parçalanışın, çok parçacıklı bosonik / fermiyonik sistemleri sayabilmede ve "parçalanış" fonksiyonlarını hesaplamak için istatistiksel mekaniklerde kullanılabilir. Bir diğer önemli uygulaması da; moleküler kimya, kristalografi ve kuantum mekaniği uygulamalarına sahip olan permütasyon grubu S_n ve $U(n)$ üniter grubu gibi önemli grupların indirgenemez temsillerini gruplandırmaktır. Ayrıca homojen simetrik polinomların vektör uzayı için temel elemanları da gruplandırır ve bunlar, çok sayıda kuantum sistemlerinin dalga fonksiyonlarını ve rastgele matrislerin istatistiksel teorisini temsil eden çok değişkenli integrallerin hesaplanması için önemlidir. Örneğin karmaşık ağları, düzensiz medyayı ve kaotik kuantum sistemlerini modellemek için kullanılır. Bu şekilde istatistiksel ve nükleer fizikte de uygulama alanları vardır.

Bu tez çalışması boyunca bilgi ve desteğiyle yanımda olan çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Mustafa ALKAN'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca hayatım boyunca yanımda olan maddi-manevi desteklerini esirgemeyen, her zaman bana destek olan ve beni bu günlere getiren canım aileme yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "POZİTİF TAMSAYILARDA MAC MAHON PARÇALANMA ANALİZİ" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

04/05/2018

Büşra AL

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
P	: Pozitif tamsayılar kümesi
$p(n)$	: n tamsayısının parçalanışlarının sayısı
$p_k(n)$	: n tamsayısının, parça sayısı en çok k olan parçalanış sayısı
$p_m(j,n)$	: n tamsayısının üstten sınırlı koşullu m'li parçalanışı
$Q(n)$	: n tamsayısının tek parçalanışlarının sayısı
$Q_m(n)$	: n tamsayısının m li parçalanış sayısı
$Q_m^{(k,l)}(n)$	: n tamsayısının koşullu m'li parçalanışı
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$Z(n)$	: n tamsayısının tek ve düzensiz parçalanışlarının sayısı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

1674 yılında Leibniz'in bir pozitif tamsayının, pozitif tamsayıların toplamı olarak kaç farklı şekilde yazılabileceği sorusu büyük ilgi uyandırmış ve bu konuda pek çok çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar da pozitif bir tamsayının parçalanması konusunun başlamasına neden olmuştur. Pozitif bir tamsayının parçalanması, bu sayının pozitif tamsayıların toplamı olarak ifade edilmesidir. Bu parçalanışların sayısı $p(n)$ ile gösterilecektir. Leibniz bu parçalanış sayısının yani $p(n)$'lerin her zaman asal olacağını iddea etmiştir ancak bunun doğru olmadığı $p(7) = 15$ ters örneği ile hemen anlaşılmıştır. Bununla ilgili hala açık olan problem ise bu tip sayıların sonlu olup olmayacağıdır. Ayrıca parçalanış teorisinin istatistik ve diğer alanlarda da değişik uygulamaları bulunması önemli bir teori olmasını sağlamıştır. Diğer taraftan bu parçalanma sayısını bulmak için değişik yöntemler geliştirilmiş ve bunlardan en önemlisi ise MacMahon parçalama analiz yöntemidir.

Bu alan ile ilgi en önemli kavramlardan bir olan, beşgensel sayı teoremine ilk defa Euler ile Daniel I Bernoulli 1740'deki yazışmalarında rastlanmaktadır (Juskevic, Smirnov and Habicht 1975). Euler Daniel I Bernoulli'e gönderdiği mektup ile bir tamsayının parçalanışının bulunuşuna ait sorunlardan söz etmiştir. Söz konusu problem ile Daniel 1 Bernoulli ilgilenirken Euler'e bir mektup göndermiş ve

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^3}\right)...$$

ifadesinin

$$1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^7}-\frac{1}{n^{12}}-\frac{1}{n^{15}}+\cdots$$

serisine dönüştürme probleminden bahsetmiştir. Euler 15 Eylül 1740'da yazdığı mektubunda sonsuz bir seriden bahsetmiştir. 6 Nisan 1741'de Euler, St. Petersburg'a sunduğu "Observationes analyticae variae de combinationibus" çalışmasında beşgensel sayı teoreminden ilk defa bahsetmiştir. Ayrıca Euler, Niklaus I Bernoulli ile de yazışmalarda ve Niklaus I Bernoulli'ye 1 Eylül 1742'de yazdığı 3 Opera omnia mektubunda, sonsuz çarpımın $\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)$'nin bir seriye açıldığı ortaya çıkmıştır (Fellmann and Mikhajlov 1998). Niklaus I Bernoulli, 24 Ekim 1742'de Euler'e, 4. mektupla cevap vermiştir (Fellmann and Mikhajlov 1998). Opera omnia'daki Bernoulli yazışmalarından sonra Bernoulli, parçalanış fonksiyonu için $\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)$ üreteç fonksiyonundan bahsettikten sonra beşgen sayı teoremini tartışmaya devam etmiştir.

Daha sonra, Euler, 10 Kasım 1742 tarihinde Niklaus I Bernoulli'ye gönderdiği 5. mektubunda beşgensel sayı teorisini ele almıştır (Fellmann ve Mikhajlov 1998). Euler, gelecek yazışmalarda da beşgensel sayı teoremi için ilerlemeler kaydetmeye devam etmiştir. 15 Ekim 1743'te Christian Goldbach'a, 74. mektubunu yazdı (Juskevic ve Winter 1965). Goldbach, Euler'in sorununa, Aralık 1743 tarihli 75. Mektup ile Euler-Goldbach yazışmalarında cevap olarak beşgensel sayı teoreminin ispatına nasıl başlanacağına dair bir fikri olmadığını belirtmiştir (Juskevic and Winter 1965). Daha sonra, Jean le Rond d'Alembert'a 30 Aralık 1747'de 11. Mektubunda sağlığının iyi olmadığını öğrendiğini söylüyor. Jean le Rond d'Alembert sağlığını yeniden elde etmek için bir süre matematik araştırmasını bırakmak istediğini belirttiği halde Euler boş zamanında çok fazla gayret gerektirmeyen bir araştırma yapmasını istediğini belirtir (Juskevic ve Taton 1980).

En sonunda Euler'den Goldbach'a 9 Haziran 1750'de gönderilen 144. mektubunda Euler beşgensel sayı teorisinin ispatını yaptığını belirtmiştir (Juskevic ve Winter 1965). Daha sonra da bu çalışmaları 1751'de Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae'de yayınlanmıştır (Euler 1751). Bu çalışmada, Euler parçalanış fonksiyonu için üreteç fonksiyonunu

$$\prod_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-n^x}\right) = 1 + n + 2n^2 + 3n^3 + 5n^4 + 7n^5 + 11n^6 + 15n^7 + 22n^8 ...$$

şeklinde vermiştir.

Yukarıdaki tarihi bilgilerden de anlaşıldığı üzere beşgensel sayı teoremi parçalanış teorisinin temelini oluşturduğundan, bu yüksek lisans tezinde de ilk olarak beşgensel sayılar araştırılmış ve Jacobi Üçlü Çarpım ile olan ilişkisi incelendikten sonra, bunların $p(n)$ fonksiyonu ile olan bağıntısı çalışılmıştır. Ayrıca Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği yardımıyla yeni bağıntılar elde edilmiş ve n sayısının parçalanışlarının sayısı $p(n)$, n sayısının tek parçalanışlarının sayısı $Q(n)$ ve n sayısının tek ve düzensiz parçalanışları- nın sayısı $Z(n)$'lerin arasındaki bağıntılar incelenerek yeni sonuçlar elde edilmiştir. Ek olarak farklı özyineleme formülleri de incelenerek, birbirleri ile karşılaştırılmıştır. Beşgensel sayılar gibi, yedigensel sayılar tanımlanarak, özellikleri çalışılarak $p(n)$ ile olan bağlantısı da araştırılmıştır.

Ayrıca parçalanış teorisi için temel fakat yararlı bir yöntem olan MacMahon parçalanma analizi incelenmiştir. Çalışmalara Mac Mahon parçalanma analizini anlamakta önemli bir yere sahip olan $\Omega_{\geq}$ operatörünün tanımı ve özellikleri ile başlanmıştır. Daha sonra Mac Mahon parçalanma analizinin temel özelliklerinin incelenip araştırılmasıyla devam edilmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Doğal sayılar kümesinin özel bir alt kümesi A (elemanları asal sayılar, kareler, küpler, üçgensel sayılar gibi özel sayılardan oluşabilir) verildiği zaman parçalanış teorisindeki temel sorun pozitif n tamsayısını, A kümesindeki sayıların toplamı şeklinde yazılmasıdır. Buradaki yazılış şekli, n tamsayısının parçalanışı olarak adlandırılır ve parçalanışların sayısı $A(n)$ ile gösterilir. Özel bazı kümeler için parçalanış aşağıdaki gibi sıralanabilir;

Goldbach Sanısı: (Apostol, 1976) Her $n \geq 4$ çift sayısı iki tek asalın toplamı şeklindedir. A asal sayılar kümesi olmak üzere, Goldbach'ın iddeası $n \geq 4$ çift sayısı için $A(n) \geq 2$'dir.

Bu varsayım 1742'ye kadar uzanır. 1937 yılında Rus matematikçi Vinagradov yeterince büyük olan her tek sayının üç asal sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini kanıtlamıştır. Ve 1966'da Çin matematikçi Jing-Run yeterince büyük her çift sayının iki asal sayıdan fazla olmayacak sayıların toplamı şeklinde ifade edilebiliceğini kanıtlamıştır.

Karelerin Temsili: (Apostol, 1976) $n, k \geq 2$ tamsayısı verildiğinde. x_i tamsayı olmak üzere sıra dikkate alınarak $n = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2$ şeklinde yazılmasına n'nin karesel parçalanışı olarak adlandırılır. Bu parçalanış sayısıda $r_k(n)$ ile gösterilir.

$d_1(n)$ ve $d_3(n)$ sırasıyla $\bmod 4$'te 1 ve 3'ün denklik sınıfındaki eleman sayısını göstermek üzere $k = 2, 4, 6, 8$ için Jacobi $r_k(n)$'yi belirlemiştir. $k = 2$ için

$$r_2(n) = 4\left(d_1(n) - d_3(n)\right)$$

olduğunu kanıtlamıştır.

Bu nedenle $r_2(5) = 8$. Aslında 4 parçalanış vardır:

$$5 = 2^2 + 1^2 = (-2)^2 + 1^2 = (-1)^2 + 2^2 = (-1)^2 + (-2)^2,$$

ve ters toplamlar sırasına göre 4 tane daha vardır. Yani toplamda 8 parçalanış vardır.

Waring'in Problemi: (Apostol, 1976) İngiliz matematikçi E. Waring 1770'de tamsayıların bazı sayıların kuvveti şeklinde yazılabileceğini ispatsız olarak ifade ettiği için Waring problemi olarak adlandırılan parçalanış problemi, n tamsayısı için $A(n) = s$ olacak şekilde s tamsayısının var olup olmadığıdır. Daha açık olarak, bir k pozitif tamsayı ve $n \geq 1$ tamsayısı için, en az s tamsayısı (sadece k'ya bağlı) vardır öyle ki

$$n = x_1^k + x_2^k + ... + x_s^k \tag{2.1}$$

şeklinde yazılır.

Belli bir k için s varsa ve s tamsayısının en küçük değeri $g(k)$ ile gösterilmek üzere $g(2)$'nin varlığı 1770 Lagrange tarafından gösterilmiş ve sonraki 139 yıl boyunca yapılan çalışmalarda da $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ve 10 için $g(k)$'nın varlığı kanıtlanmıştır. 1909'da ise Hilbert tümevarim yöntemi ile her k için $g(k)$'nın varlığını kanıtladı fakat $g(k)$ nasıl olduğunu tam olarak belirleyemedi. Daha sonra $k = 4$ hariç her k için $g(k)$'nın tam değeri belirlenmiştir.

2.1. Serbest (Kısıtlanmamış, Sınırsız) Parçalanış

n pozitif doğal sayı olmak üzere $A = \{a \in \mathbb{N} : a < n\}$ kümesi alındığında $A(n)$ değeri n'nin parçalanış sayısını verecektir. Yani pozitif bir tamsayının parçalanması, bu sayının pozitif tamsayıların toplamı olarak yazılmasıdır. Toplamanın değişmeli olduğu göz önüne alınırsa, örneğin 5 sayısının

$$\begin{aligned} 5 &= 3+1+1 \\ &= 1+3+1 \end{aligned}$$

parçalanmaları tek bir parçalanmayı ifade etmektedir.

Esasında 5'in parçalanmaları,

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4+1 \\ &= 3+2 \\ &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

olmak üzere, 5'in parçalanmalarının sayısı 7 olur ve bu, $p(5) = 7$ biçiminde gösterilir.

Bu parçalanmaları, parçalanışlarındaki elemanların sayısına göre de belirlemek önemlidir. Genel durumda parça sayısı en çok k olan parçalanış sayısı $p_k(n)$ ile gösterilir. 5'in 7 parçalanmada parça sayısı en çok 2 olanlar,

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4+1 \\ &= 3+2 \end{aligned}$$

olmak üzere bunların sayısı 3'tür. Bu ifade $p_2(5) = 3$ biçiminde gösterilir.

Benzer şekilde 7 parçalanmadan parça sayısı en çok 3 olanlara bakılırsa;

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4+1 \\ &= 3+2 \\ &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1 \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu parçalanışların sayısı da 5 olduğundan $p_3(5) = 5$. Bu şekilde incelemeye devam edilirse;

$$p_1(5) = 1$$

$$p_2(5) = 3$$

$$p_3(5) = 5$$

$$p_4(5) = 6$$

$$p_5(5) = 7$$

olduğu görülür.

Bir tamsayının parçalanışlarındaki elemanların özellikleri de önemli olduğundan ayrı ayrı incelenmelidir. Toplamların sayısı sınırsız, tekrarlanabilir ve toplamların sırası dikkate alınmayarak n pozitif tam sayısının tek parçalanışlarına karşılık gelen parçalanış sayısı $Q(n)$ ile gösterilirse 5'in 3 parçalanışı vardır;

$$5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

dir. Böylece $Q(5) = 3$'tür.

Toplamların sayısı sınırsız, toplamların sırası dikkate alınmayarak ve tekrarlanamaz şartıyla n pozitif tam sayısının tek ve düzensiz parçalanışlarına karşılık gelen parçalanış fonksiyonu $Z(n)$ ile gösterilirse 5'in tek ve tekrarlamayan parçalanışı sadece kendisi olduğundan 5'in 1 parçalanışı vardır ve $Z(5) = 1$'dir.

7 tam sayısının $p(7) = 15$ parçalanışı vardır. Hepsi tek sayı olan parçalanış sayısı (parçalanışları tek olanlar kalın yazılmıştır) 5 olduğundan $Q(7) = 5$ ve tek ve düzensiz olan tek sayı 7, yani $Z(7) = 1$. Bu üç değeri bir arada görmek için 7 sayısı parçalanışlarına ayrılarak incelenecek olursa

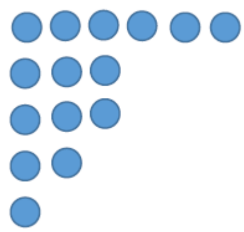
$1+1+1+1+1+2$	$1+2+4$	$\mathbf{1+3+3}$
$1+6$	$1+1+2+3$	$\mathbf{1+1+1+1+3}$
$2+5$	$3+2+2$	$\mathbf{1+1+5}$
$3+4$	$2+2+2+1$	$\mathbf{7}$
$1+1+1+2+2$	$1+1+1+4$	$\mathbf{1+1+1+1+1+1+1}$

olur.

Parçalanışların Geometrik Gösterimi: Graf denilen örgü, noktaların kullanımıyla geometriksel parçalanışların temsilinde basit bir yoldur. Örneğin 15'in parçalanışları;

$$6 + 3 + 3 + 2 + 1$$

dir. Aşağıdaki 5 sıra şeklinde düzenlenmiş 15 örgü nokta ile temsil edilebilir.



Şekil 2.1. 15=6+3+3+2+1 parçalanışının geometrik gösterimi

Bu grafiği dikey olarak okursak 15 sayısının farklı bir parçalanışı olan

$$5+4+3+1+1+1$$

ortaya çıkar.

Parçalanış sayılarını bulmada kullanılan analiz yöntemlerinden en önemlileri Jacobi Üçlü Çarpım ve üreteç fonsiyonu kavramlarıdır. Şimdi ilk önce Jacobi Üçlü Çarpımı ve bazı temel özelikleri hatırlayalım.

Teorem 2.1 (Jacobi Üçlü Çarpım)**.** *x ve z kompleks sayıları olmak üzere $\mid x \mid < 1$ ve $z \neq 0$ için*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1+x^{2n-1}z^2)(1+x^{2n-1}z^{-2}) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n}) \tag{2.2}$$

dir.

İspat $\mid x \mid < 1$ kısıtlaması, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n-1}z^2)$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n-1}z^{-2})$ çarpımlarının her birinin (2.2) serisinde mutlak yakınsamasını sağlar. (2.2)'nin her bir üyesi $z \neq 0$ için z kompleks sayısının analitik fonksiyonudur. Şimdi (2.2)'yi kanıtlamak için, x sabit tutulur ve $z \neq 0$ için $F(z)$ tanımlanırsa

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n-1}z^2)(1+x^{2n-1}z^{-2}) \tag{2.3}$$

dir. İlk olarak,

$$xz^2F(xz) = F(z) \tag{2.4}$$

eşitliği gösterilecek olursa (2.3)'ten

$$F(xz) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n+1}z^2)(1+x^{2n-3}z^{-2}) = \prod_{m=2}^{\infty}(1+x^{2m-1}z^2)\prod_{r=0}^{\infty}(1+x^{2r-1}z^{-2})$$

bulunur. $xz^2 = (1+xz^2)/(1+x^{-1}z^{-2})$ olduğundan, son denklemin xz^2 ile çarpıldığında (2.4) elde edilir. Şimdi (2.2) eşitliğinin sol tarafı $G(z)$ ile gösterilirse

$$G(z) = F(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n}) \tag{2.5}$$

dir. Ayrıca (2.5)'te (2.4) eşitliği yazılırsa, $G(z)$'nin z'nin çift fonksiyonu olduğu görülür ki bu fonksiyon tüm $z \neq 0$ için analitiktir, bu yüzden Laurent serisi;

$$G(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^{2m} \tag{2.6}$$

şeklindedir. Burada $G(z) = G(z^{-1})$ olduğundan $a_{-m} = a_m$ dir (a_m katsayıları x'e bağlıdır). (2.6)'da (2.4) fonksiyonel denklemi kullanarak, katsayıların özyineleme formülü

$$a_m = x^{2m-1} a_{m-1}$$

bulunur. Yinelendiğinde $1 + 3 + ... + (2m-1) = m^2$ olduğundan $a_m = a_0 x^{m^2}$ (Her $m \geq 0$ için). Bu aynı zamanda $m < 0$ için de geçerlidir. Dolayısıyla (2.6) eşitliği görülür.

$$G_x(z) = a_0(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} z^{2m} \tag{2.7}$$

dir. Eşitliğinde $G(z)$ için $G_x(z)$ ve a_0 için $a_0(x)$ yazılmasının sebebi x'e bağlılığını belirtmektir. (2.7) $a_0(x) \to 1$'i $x \to 0$ olarak ifade eder. İspat tüm x'ler için $a_0(x) = 1$ olduğu gösterildiğinde tamamlanır. (2.7) eşitliğinde $z = e^{\frac{\pi i}{4}}$ alınırsa ve m tek ise $i^m = i^{-m}$ olduğundan

$$\frac{G_x(e^{\frac{\pi i}{4}})}{a_0(x)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} i^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{(2n)^2} \tag{2.8}$$

dir. (2.7) eşitliğinden (2.8) bağıntısında sağdaki seriler $\frac{G_{x^4}(i)}{a_0(x^4)}$'dir. Böylece

$$\frac{G_x(e^{\frac{\pi i}{4}})}{a_0(x)} = \frac{G_{x^4}(i)}{a_0(x^4)} \tag{2.9}$$

olduğu görülür. Şimdi $G_x(e^{\frac{\pi i}{4}}) = G_{x^4}(i)$ olduğu gösterilmelidir. Aslında (2.3) ve (2.5)

$$G_x(e^{\frac{\pi i}{4}}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n})(1 + x^{4n-2})$$

ifadesini verir. Her çift sayı, $4n$ veya $4n-2$ formunda olduğundan

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{4n})(1 - x^{4n-2})$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} G_x(e^{\frac{\pi i}{4}}) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{4n})(1 - x^{4n-2})(1 + x^{4n-2}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{4n})(1 - x^{8n-4}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{8n})(1 - x^{8n-4})(1 - x^{8n-4}) = G_{x^4}(i) \end{aligned}$$

görülür. Dolayısıyla (2.9) $a_0(x) = a_0(x^4)$'ü gerektirir. $a_0(x) = a_0(x^{4^k})$, $k = 1, 2, 3, ...$ için $x, x^4, x^{4^2}, x^{4^3}, ...$ bulunur. Fakat $k \to \infty$ iken $x^{4^k} \to 0$ ve $x \to 0$ iken $a_0(x) = 1$ yani tüm x'ler için $a_0(x) = 1$'dir. Bu da ispatı tamamlar.(Apostol 1976) □

Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinde özel değerler verilerek farklı yeni özdeşikler elde edilebilir.

Jacobi Özdeşliğinde x yerine x^a ve z^2 yerine de x^b yazılırsa

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2na})(1+x^{2na-a+b})(1+x^{2na-a-b}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{am^2+bm} \tag{2.10}$$

bulunur. Benzer şekilde $z^2 = -x^b$ ise

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2na})(1-x^{2na-a+b})(1-x^{2na-a-b}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m x^{am^2+bm} \tag{2.11}$$

ifadesi elde edilir.

Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinden yararlanılarak sonuç olarak verilen (2.11) eşitliğinde $a = 1$ ve $b = 0$ alınarak

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)(1-x^{2n-1}) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^{k^2}. \tag{2.12}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 2.2. $|\, x \,| < 1$ *ise*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3 = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)x^{(m^2+m)/2} \tag{2.13}$$

dir.

İspat Jacobi eşitliğinde z^2 yerine $-xz$ yazılırsa

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1-x^{2n}z)(1-x^{2n-2}z^{-1}) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{m^2+m}(z^m - z^{-m-1})$$

olur. Terimler yeniden düzenlenirse;

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-2}z^{-1}) = (1-z^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n}z^{-1})$$

ve

$$z^m - z^{-m-1} = (1-z^{-1})(1+z^{-1}+z^{-2}+...+z^{-2m})z^m$$

elde edilir. $1-z^{-1}$ yok edilirse;

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1-x^{2n}z)(1-x^{2n}z^{-1}) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^{m^2+m} z^m(1+z^{-1}+z^{-2}+...+z^{-2m})$$

elde edilir. Bu eşitlikte de $z = 1$ alınır ve x yerine $x^{1/2}$ yazılırsa (2.13) elde edilir. $\square$

Şimdi de iki serinin çarpımında yararlı olan Cauchy çarpımı ve q serisi aşağıdaki tanımlarla hatırlatılmıştır.

Tanım 2.3 (Cauchy Çarpımı)**.** $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ *ve* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ *olarak tanımlanan iki yakınsak serinin Cauchy Çarpımları*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} x^k$$

şeklinde tanımlanır (Andrews 1998).

Tanıma denk olarak serilerin kuvvetleri farklı ise $c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^{cn}}{(cn)!} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left\|\frac{n}{c}\right\|} \frac{b_k a_{n-ck}}{(ck)!(n-ck)!} t^n$$

eşitliğide görülebilir. Burada $\|.\|$ tam değer fonksiyonudur.

Tanım 2.4. *n negatif olmayan bir sayı ve a kompleks bir sayı olmak üzere*

$$(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - aq^k\right)$$

dır. Eğer $n = 0$ ise yukarıdaki çarpımın 1'e eşit olduğu yorumlanır.

Herhangi a ve q kompleks sayıları için, $\mid q \mid < 1$ olmak üzere

$$(a;q)_\infty = \lim_{n\to\infty} (a;q)_n = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - aq^k\right)$$

dır (Berndt).

Tanım 2.5 (Üreteç Fonksiyonu)**.** *$f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

fonksiyonuna, $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$ katsayılarının üreteç fonksiyonu denir (Koshy 2001).

Üreteç fonksiyonları için birkaç örnek verilecek olursa; $\mid x \mid < 1$ için,

i) 1 sayısını üreten fonksiyon $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$,

ii) Doğal sayıları üreten fonksiyon $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$,

iii) Karesel sayıları üreten fonksiyon $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$,

iv) Kübik sayılarını üreten fonksiyon $\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$,

v) 4. dereceden sayılarını üreten fonksiyon $\frac{x(x+1)(x^2+10x+1)}{(1-x)^5} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n^4 x^n$ ile ifade edilir.

vi) Fibonacci sayılarını F_n veren üreteç fonksiyonu ise

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

dir. Yani;

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + ...$$

şeklinde ifade edilir (Koshy 2001).

2.2. Tam Sayıların Parçalanışları İçin Üreteç Fonksiyonları

$F(s)$ fonksiyonu Dirichlet Serisi tarafından tanımlanır. $F(s) = \sum f(n) n^{-s}$ ($f(n)$ katsayılarının üreteç fonksiyonu). Dirichlet serisinin, çarpımsal sayılar teorisinde

$$n^{-s} m^{-s} = (nm)^{-s}$$

formülünden dolayı kullanışlı üreteç fonksiyonları vardır.

Sayılar teorisine ek olarak kuvvet serileri tarafından temsil edilen üreteç fonksi-yonlarını kullanmak $x^n x^m = x^{n+m}$ bağıntısından dolayı daha uygundur.

$$F[x] = \sum f(n) x^n$$

Teorem 2.6. *$p(0) = 1$ olmak üzere $\mid x \mid < 1$ için,*

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n \tag{2.14}$$

dir.

İspat İlk olarak özdeşliği elde edebilmek için yakınsama problemi göz ardı edilmelidir. Daha sonra çarpımdaki her bir eleman kuvvet serisi olarak yazılırsa

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = (1 + x + x^2 + ...)(1 + x^2 + x^4 + ...)(1 + x^3 + x^6 + ...)...$$

ifadesi elde edilir. Şimdi sağdaki seri çarpımı polinommuş gibi davranacağından bir kuvvet serisi

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} a(k)x^k$$

formundadır.

Burada $a(k) = p(k)$ olduğu görülmelidir. Her $k_i \geq 0$ için, ilk seriden x^{k_1}, ikinci seriden x^{2k_2}, üçüncüden x^{3k_3}, ..., m. terimden x^{mk_m} terimlerinin alındığı varsayılsın. Onların çarpımına x^k ise

$$x^{k_1}x^{2k_2}x^{3k_3}...x^{mk_m} = x^k$$

olur. Böylece $k = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... + mk_m$ eşitliği

$$k = (1 + 1 + .. + 1) + (2 + 2 + ... + 2) + ... + (m + m + ... + m),$$

şeklinde de yazılabilir. Burada ilk parantez k_1 tane 1, ikinci parantez k_2 tane 2, ..., m. parantez k_m tane m içerir. Bu pozitif toplamlar da k'nın parçalanışı olacaktır. Bu nedenle $a(k)$ (x^k'nın katsayısı) ile $p(k)$ (k'nın parçalanışlarının sayısı) eşittir.

Buraya kadar yapılan ispatta yakınsaklık problemi göz ardı edilmişti ancak yakınssaklık kavramı ile daha titiz bir kanıta dönüştürülebilir.

$$F_m(x) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - x^k}, \text{ ve } \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k} = \lim_{m\to\infty} F_m(x) \tag{2.15}$$

olmak üzere eğer $0 \leq x < 1$ ise $\lim_{m\to\infty} F_m(x) = F(x)$ olduğu görülmelidir.

$$F_{m+1}(x) = \frac{1}{1 - x^{m+1}} F_m(x) \geq F_m(x)$$

olduğundan her x sabiti için $\{F_m(x)\}$ dizisi artandır ve her m için $F_m(x) \leq F(x)$ elde edilir. $F_m(x)$ mutlak yakınsak serinin sonlu sayıda çarpımı olduğundan

$$F_m(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_m(k)x^k \tag{2.16}$$

kesin yakınsak serisi yazılabilir. Burada $p_m(k)$ denklemin çözümlerinin sayısıdır.

$$k = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... + mk_m$$

yani $p_m(k)$, k'nın m'yi aşmayan parçalanış sayısıdır.

Eğer $m \geq k$ ise $p_m(k) = p(k)$. Bu nedenle her zaman $m \geq k$ iken $p_m(k) \leq p(k)$ vardır. Başka bir deyişle

$$\lim_{m\to\infty} p_m(k) = p(k)$$

dır. Şimdi $F_m(x)$ serisini iki parçaya ayrılırsa;

$$\begin{aligned} F_m(x) &= \sum_{k=0}^{m} p_m(k)x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} p(k)x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k)x^k \end{aligned}$$

dir. $x \geq 0$ iken

$$\sum_{k=0}^{m} p(k)x^k \leq F_m(x) \leq F(x)$$

olur. $\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir. Dahası $p_m(k) \leq p(k)$ iken

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k \leq F(x)$$

dir. $m \to \infty$ alınırsa

$$F(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{m\to\infty} p_m(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k,$$

$0 < x < 1$ için Euler eşitliği kanıtlanır. Daha sonra analitik devamla $\mid x \mid< 1$ için ifadenin geçerli olduğu görülür (Apostol 1976). $\square$

Aşağıda bu tezde sık kullanılacak iki önemli üreteç fonksiyonu daha hatırlatılacaktır.

i) $\mid x \mid< 1$ için, n pozitif tam sayısının tek parçalanışlarına karşılık gelen parçalanış sayısı $Q(n)$ için üreteç fonksiyonu

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2m-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n$$

şeklindedir.

ii) $\mid x \mid< 1$ için, n sayısının tek ve düzensiz parçalanışlarının sayısı $Z(n)$ için üreteç fonksiyonu

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^{2m-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} Z(n)x^n$$

şeklindedir.

Yukarıda verilen üreteç fonksiyonlarının seri açılımından yararlanılarak $n = 7$ kadar değerleri aşağıdaki gibi verilebilir.

n	$p(n)$	$Q(n)$	$Z(n)$
1	1	1	1
2	2	1	0
3	3	2	1
4	5	2	1
5	7	3	1
6	11	4	1
7	15	5	1

.

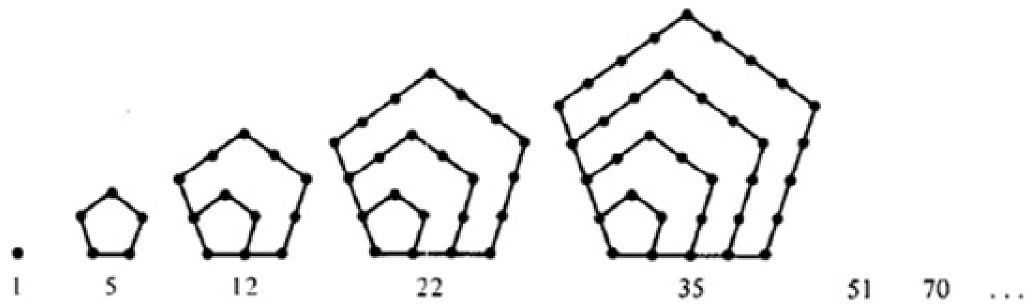
Parçalanışlar ile ilgili diğer birkaç üreteç fonksiyonu daha verilecek olursa;

Üreteç Fonksiyonu	n nin parçalanışları
$\prod\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m-1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n$	tek
$\prod\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m}}$	çift
$\prod\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{m^2}}$	kareler
$\prod\limits_{p} \frac{1}{1-x^{p}}$	asallar
$\prod\limits_{m=1}^{\infty} (1+x^m)$	düzensiz
$\prod\limits_{m=1}^{\infty} (1+x^{2m-1}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Z(n)x^n$	tek ve düzensiz
$\prod\limits_{m=1}^{\infty} (1+x^{2m})$	çift ve düzensiz
$\prod\limits_{m=1}^{\infty} (1+x^{m^2})$	farklı kareler
$\prod\limits_{p} (1+x^{p})$	farklı asallar

(Apostol 1976).

2.3. Beşgensel Sayılar ile Parçalanış Arasındaki İlişki

Tek noktaya 4 nokta daha eklenerek bir kenarı 1 birim uzunluğunda bir beşgen elde edilebilir. Elde edilen bu beşgene 7 nokta daha eklenerek, ilk beşgenin dışında bir kenarı 2 birim olan ikinci bir beşgen daha oluşturulabilir. Aynı şekilde ikinci beşgene 10 nokta daha eklenerek ikinci beşgenin dışında olacak ve bir kenarı 3 birim uzunluğundaki üçüncü beşgen elde edilebilir.



Şekil 2.2. Beşgensel sayılar (Apostol 1976)

Bu adımlar böyle devam ederse oluşturulacak her bir beşgen için gereken nokta sayısı

$$1, 4, 7, 10, 13, ..., 3n+1, ..$$

aritmetik dizisi şeklinde ilerleyecektir. $w(n)$, bu ilerlemedeki ilk n terimin toplamını göstermek üzere

$$w(n) = \sum_{k=0}^{n-1}(3k+1) = \frac{3n(n-1)}{2} + n = \frac{3n^2-n}{2}$$

şeklinde olacaktır. Buradaki $w(n)$ ve $w(-n)$ şeklindeki sayılara beşgensel sayılar denir.

Teorem 2.7 (Euler'in Beşgensel Sayı Teoremi)**.** $\mid x \mid < 1$ *ise*

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m) &= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + ... \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\{x^{w(n)} + x^{w(-n)}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{w(n)} \end{aligned} \tag{2.17}$$

dir (Apostol, 1976).

İspat Jacobi özdeşliğinın sonuçu olan (2.11) denkleminde $a = 3/2$ ve $b = 1/2$ yazıldığında

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{3n})(1-x^{3n-1})(1-x^{3n-2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{3}{2}m^2+\frac{1}{2}m}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi yukarıdaki eşitliğin sol tarafı göz önünde bulundurulursa

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{3n})(1-x^{3n-1})(1-x^{3n-2}) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)$$

olduğu görülür.

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{3n})(1-x^{3n-1})(1-x^{3n-2})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{3}{2}m^2+\frac{1}{2}m}.$$

Ayrıca (2.17) eşitliğinin sağ tarafı tanım gereği $w(n)=\frac{3n^2-n}{2}$ ve $w(-n)=\frac{3n^2+n}{2}$ olduğundan beşgensel sayılara eşittir. Böylece ispat biter. □

Euler'in Beşgensel Sayı Teoreminin Kombinatorik İspatı

Daha önce belirtildiği gibi

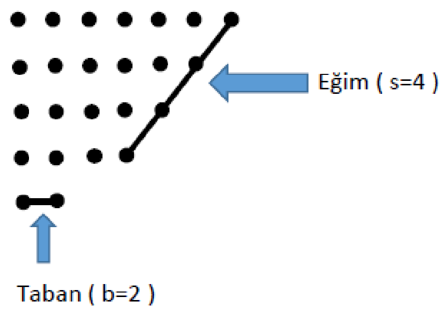
$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\{p_e(n)-p_o(n)\}x^n,$$

dir. Burada $p_e(n)$, n tamsayısının eşit olmayan çift sayılara ve $p_o(n)$ de eşit olmayan tek sayılara bölünme sayısını ifade eder.

Euler Beşgensel Sayı Teoremini 1750'de tümevarımla kanıtlamıştır. Daha sonra 1830'da Legendre, 1846'da da Jacobi tarafından kanıtlar elde edilmiştir. 1881'de F. Franklin tarafından kombinatorik ispat yapılmıştır. Franklin bölmelerin grafiksel temsilini çapraz kullanmıştır.

n tamsayısının eşit olmayan bölümlerle parçalanışlarının grafiklerine standart formdadır denilir. (Eğer parçalar azalan sırada düzenlenirse Şekil 2.3 gibidir.)

Son satırdaki noktalara grafiğin tabanı denir. Ve tabandaki çarpraz noktalar b ile gösterilsin. Böylece $b \geq 1$. En uzun $45°$'lik eğri parçasına (Birinci satırdaki son noktaya grafiğin diğer noktalarını birleştiren çizgi) eğim denir. Ve eğimdeki çapraz noktaların sayısı s ile gösterilir. Böylece $s \geq 1$. Şekil 2.3 de $b=2$ ve $s=4$.

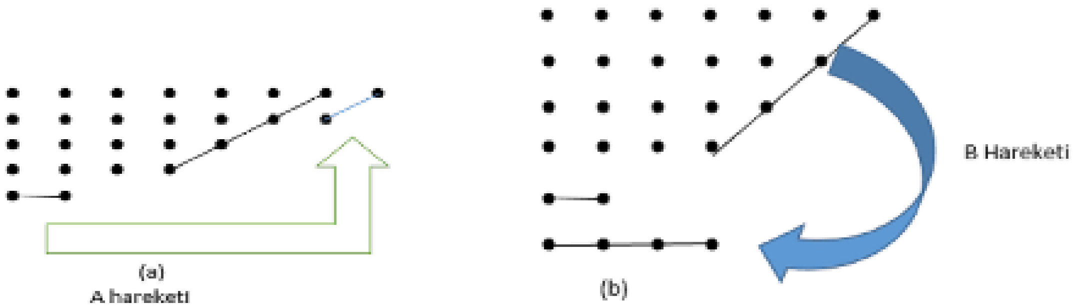


Şekil 2.3. Taban ve eğimi gösteren parçalanış (Apostol 1976)

Şimdi bu grafikte A ve B gibi iki işlem tanımlansın.

A hareketi, taban üzerindeki noktaları, eğime paralel çizgiye taşır.(Şekil 2.4(a))

B hareketi eğimli noktaları hareket ettirir. Böylece Şekil 2.4(b)'deki gibi tabana paralel bir çizgi üzerine uzanırlar. Eğer grafiğin standart formunu koruyorsa, yani eğer yeni grafik yine azalan düzende düzenlenmiş eşit olmayan parçalara sahipse, işleme izin verilebilir.



Şekil 2.4. A ve B hareketi (Apostol 1976)

A hareketine izin verilirse, n tamsayısının eşit olmayan parçalarından yeni bir parçalanış elde edilir, ancak parça sayısı öncekinden bir azdır. B hareketine izin verilirse bölüm eşit olmayan parçalara bölünür, ancak parça sayısı bir öncekinden bir tane büyüktür. Bu nedenle n tamsayısının her bir bölümü için tam olarak A veya B hareketinden birine izin verilirse n sayısının tek ve çift eşit olmayan bölümleri arasında birebir benzeşmeler olacaktır. Böylece $p_e(n) = p_o(n)$.

A veya B'ye izin verilip verilmeyeceğini belirlemek için üç durum incelenir;

$$1)b < s \qquad 2)b = s \qquad 3)b > s$$

Durum 1; Eğer $b < s$ ise $b \leq s - 1$, böylece A işlemine izin verilir, ancak B'ye izin verilmez. Çünkü B standart formu yok eder (Şekil 2.4).

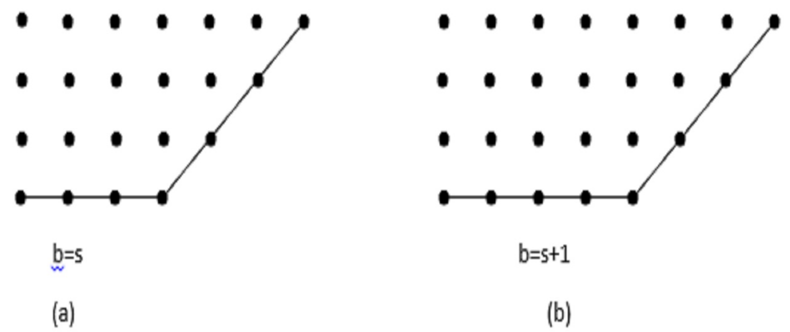
Durum 2; $b = s$ ise, B işlemine izin verilmez. Çünkü yeni bir sonuç verir. Grafik standart formda değil. A hareketi taban ve eğim Şekil 2.5(a)'da gösterdiği gibi kesişir; bu durumda yeni grafik standart biçimdedir.

Durum 3; $b > s$ ise, A'ya izin verilmez ancak B'ye verilir. $b = s + 1$ ve taban ve eğim kesiştiği sürece, Şekil 2.5(b)'de gösterildiği gibi. Bu durumda yeni grafik iki eşit parçayı içerir.

Dolayısıyla iki istisna durum dışında A veya B'den tam olarak birine izin verilir. Grafikte k sıra olduğu varsayılarak Şekil 2.5(a)'da gösterilen ilk istisnai durum ele alınsın. Sonra $b = k$ için n sayısı

$$n = k + (k+1) + (k+2) + ... + (2k-1) = \frac{3k^2 - k}{2} = w(k)$$

dır.



Şekil 2.5. Parçalanışta istisnai durumlar

n tamsayısının parçalanışı için k çiftse, çift parçalarda fazladan bir parça vardır ve k tekse, tek parçalara fazladan parçalama yapılır. Bu yüzden

$$p_e(n) - p_o(n) = (-1)^k$$

dır.

Şekil 2.5(b)'de gösterilen diğer istisnai durumda her sıradaki çapraz noktalar olduğundan

$$n = \frac{3k^2 - k}{2} + k = \frac{3k^2 + k}{2} = w(-k).$$

Yine $p_e(n) - p_o(n) = (-1)^k$. Bu da Franklin'in ispatını tamamlar (Apostol 1976).

2.4. Euler'in Parçalanış İçin Özyineleme Formülü

Teorem 2.8. *$p(0) = 1$ olsun ve $n < 0$ ise $p(n)$'nin 0 olduğu kabul edilsin. Pozitif n tamsayısı için,*

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\{p(n-w(k)) + p(n+w(k))\} \tag{2.18}$$

dir.

İspat (2.14) ve (2.17) eşitliklerini veren teoremlerden

$$(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\{x^{w(k)} + x^{w(-k)}\})(\sum_{m=0}^{\infty}p(m)x^m) = 1$$

eşitliğini elde edilir. Sağ taraftaki ifadede $n \geq 1$ için x^n'nin katsayısı 0'dır. (2.18) denkleminin sol tarafında gerekli işlemler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(p(n) - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\{p(n-w(k)) + p(n+w(k))\}\right)x^n = 1$$

elde edilir ve katsayıları eşitlenirse sonuç elde edilir (Apostol 1976). □

$p(n)$ için; $p(0) = 1$ olmak üzere

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) + ... = 0$$

dır. Şimdi $p(7)$ değerine kadar hesaplanırsa;

$$p(1) = 1,\ p(2) = 2,\ p(3) = 3\ , p(4) = 5,\ p(5) = 7,\ p(6) = 11,\ p(7) = 15$$

bulunur.

2004'te Ewell tamsayıların parçalanışı üzerine çalışmalar yaparak Euler'in özyineleme formülünü biraz daha geliştirmiş ve daha verimli formüller bulmuştur. Bu formülleri vermeden önce bir kaç temel eşitliği hatırlamak gerekir.

Teorem 2.9. *Pozitif n tamsayısı için,*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)(1-x^{2n-1}) = 1 \tag{2.19}$$

dir.

İspat İspata ilk olarak $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)$ serisini $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$ serisi ile çarpıp-bölerek başlanırsa.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+x^n)(1-x^n)}{(1-x^n)}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında gerekli işlemler yapılırsa

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-x^{2n}}{1-x^n}$$

dır. Ayrıca elde edilen son eşitlikte sağ taraftaki ifadenin paydası açılarak

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) &= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-x^{2n}}{(1-x^{2n-1})(1-x^{2n})} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2n-1}}.\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2n-1}}$$

eşitliğinden (2.19) eşitliği görülür (Ewell 2004). □

Ayrıca (2.19) eşitliği gereğince tek parçalanışlarının sayısı olan $Q(n)$ için yeni üreteç fonksiyonu

$$\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2m-1}} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}Q(n)x^n$$

şeklinde de olacaktır.

Teorem 2.10. $\mid x \mid < 1$ *olmak üzere, pozitif* n *tamsayısı için,*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-x^{2n}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty}x^{k(k+1)/2} \tag{2.20}$$

dir.

İspat Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliğinden yararlanılarak sonuç olarak verilen (2.10) eşitliğinde $a = 1/2$ ve $b = 1/2$ alınarak

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)(1+x^n)(1+x^{n-1}) &= 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{k(k+1)/2} \\ \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1+x^{n-1}) &= 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{k(k+1)/2} \\ \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{n-1}) &= 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{k(k+1)/2}\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafındaki ikinci seride indis düzenlenirse

$$2\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1+x^n) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{k(k+1)/2}$$

eşitliği elde edilir. Buradan 2.19 yardımıyla ispat tamamlanır (Ewell 2004). □

(2.20) eşitliği de göz önünde bulundurulursa Ewell'in $p(n)$ için verdiği özyineleme formülleri verilebilir;

Teorem 2.11. *n bir doğal sayı olmak üzere*

$$p(n) = \sum_{k=0}^{\infty} p\left(\frac{n-k(k+1)/2}{4}\right) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}p(n-2k^2)$$

dir.

İspat (2.12) eşitliğinin sol tarafına x yerine x^2 yazılırsa

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1-x^{4n-2}) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)(1+x^n)(1-x^{2n-1})(1+x^{2n-1})\\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)(1+x^{2n-1})\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliği (2.19) eşitliğinden dolayı yazılabilir.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1}\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^{2k^2}\right\} \tag{2.21}$$

Daha sonra sol taraf (2.19) yardımıyla (2.20) olarak yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}x^{k(k+1)/2} &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1+x^n) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1+x^{2n})(1+x^{2n-1})\\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{4n})(1+x^{2n-1})\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{4n})^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}x^{k(k+1)/2}$$

dir. Eşitliğin sol tarafı yerine (2.21) eşitliği yazılırsa

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1}\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^{2k^2}\right\} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{4n})^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}x^{k(k+1)/2}$$

veya

$$\sum_{j=0}^{\infty} p(j)x^j \left\{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^{2k^2}\right\} = \sum_{j=0}^{\infty} p(j)x^{4j} \sum_{k=0}^{\infty} x^{k(k+1)/2}$$

eşitliği açılır ve x^n'in katsayıları eşitliğinden ispat tamamlanır (Ewell 2004). □

Teorem 2.12. *n bir doğal sayı olmak üzere*

$$p(n) = \sum_{k=0}^{\infty} p\left(\frac{n-k(k+1)/2}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\{p(n-k(3k-1)) + p(n-k(3k+1))$$

dir.

İspat (2.17) de x yerine x^2 yazılırsa

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(x^{k(3k-1)}+x^{k(3k+1)}\right)\right\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} p(j)x^j\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(x^{k(3k-1)}+x^{k(3k+1)}\right)\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k p(n-k(3k-1)) \\
&\quad + \sum_{n=4}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k p(n-k(3k+1))
\end{aligned} \tag{2.22}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan (2.19) ve (2.20) eşitlikleri yardımıyle aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}x^{k(k+1)/2} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} p(j)x^{2j}\sum_{k=0}^{\infty}x^{k(k+1)/2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{\infty} p\left(\frac{n-k(k+1)/2}{2}\right).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

(2.22) ve (2.23) ifadelerinin eşitliğinden x'in katsayıları eşitlenirse ispat tamamlanmış olur (Ewell 2004). □

3. MATERYAL VE METOT

Bazı özel parçalanışların üreteç fonksiyonunu bulmak için Mac Mahon Parçalanışı oldukça yararlıdır.

3.1. Mac Mahon Parçalanış Analizi Hakkında Bazı Bilgiler

n tamsayısının en fazla m parçaya bölünmesinin sayısı $p_m(n)$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)q^n = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq ... n_m \geq 0} q^{n_1+n_2+...+n_m}$$

eşitliği görülebilir.

İndisler üzerindeki koşulu hafifletmek, negatif olmayan kuvvetleri göz önünde bulundurmak için $1 \leq j \leq m-1$ ve $n_2 \geq n_3 \geq, ..., \geq n_{m-1} \geq n_m$ koşulu ile

$$\sum_{n_1 \geq n_2 \geq ... n_m \geq 0} q^{n_1+n_2+...+n_m} = \sum_{n_1, n_2, ..., n_m \geq 0} q^{n_1+n_2+...+n_m} \lambda_1^{n_1-n_2} \lambda_2^{n_2-n_3} ... \lambda_{m-1}^{n_{m-1}-n_m}$$

şeklinde de yazılabilecektir.

Tanım 3.1. *Yukarıdaki gibi bir Laurent serisindeki negatif üslü terimleri yok eden ve kalan λ_j terimleri 1'e eşitleyen operatöre $\Omega_{\geq}$ operetörü denir. Başka bir deyişle*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)q^n &= \Omega_{\geq} \sum_{n_1, n_2, ..., n_m \geq 0} q^{n_1+n_2+...+n_m} \lambda_1^{n_1-n_2} \lambda_2^{n_2-n_3} ... \lambda_{m-1}^{n_{m-1}-n_m} \\
&= \Omega_{\geq} \sum_{n_1=0}^{\infty} (q\lambda_1)^{n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} (q\lambda_2/\lambda_1)^{n_2} \sum_{n_3=0}^{\infty} (q\lambda_3/\lambda_2)^{n_3} ... \\
&\quad ... \sum_{n_{m-1}=0}^{\infty} (q\lambda_{m-1}/\lambda_{m-2})^{n_{m-1}} \sum_{n_m=0}^{\infty} (q/\lambda_{m-1})^{n_m} \\
&= \Omega_{\geq} \frac{1}{(1-q\lambda_1)(1-q\lambda_2/\lambda_1)...(1-q\lambda_{m-1}/\lambda_{m-2})(1-q/\lambda_{m-1})} \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

dir.

Önerme 3.2. *$\Omega_{\geq}$ operatörü yukarıdaki şekilde tanımlanmak üzere,*

$$\Omega_{\geq} \frac{1}{(1-\lambda x)(1-y/\lambda)} = \frac{1}{(1-x)(1-xy)} \qquad (3.2)$$

dir.

İspat $k = n - m$ olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}
\Omega_{\geq} \frac{1}{(1-\lambda x)(1-y/\lambda)} &= \Omega_{\geq} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda x)^n \sum_{m=0}^{\infty} (y/\lambda)^m \quad (3.3) \\
&= \Omega_{\geq} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n \sum_{m=0}^{\infty} y^m \lambda^{-m} \\
&= \Omega_{\geq} \sum_{n=0,m=0}^{\infty} x^n y^m \lambda^{n-m} \\
&= \sum_{n \geq m \geq 0}^{\infty} x^n y^m
\end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki kabulden dolayı eşitliğin sağ tarafına $n = k + m$ yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^{m+k} y^m = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{m=0}^{\infty} (xy)^m = \frac{1}{(1-x)(1-xy)} \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.3) ve (3.4)'ten eşitlik görülür. □

Önerme 3.3. *m tamsayı olmak üzere*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n) q^n = \frac{1}{(q;q)_m} \quad (3.5)$$

dir.

İspat İspat için (3.2) birkaç kez uygulamalıdır.

İlk durumda x yerine q, λ yerine λ_1 ve y yerine de $\lambda_2 q$ yazılırsa, ikinci uygulamada x yerine q^2 ve y yerine $q\lambda_3$ yazılır ve (3.1) ve (3.2) yardımı ile

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n) q^n &= \Omega_{\geq} \frac{1}{(1-q\lambda_1)(1-q\lambda_2/\lambda_1)...(1-q\lambda_{m-1}/\lambda_{m-2})(1-q/\lambda_{m-1})} \\
&= \Omega_{\geq} \frac{1}{(1-q)(1-q^2\lambda_2)(1-q\lambda_3/\lambda_2)...(1-q\lambda_{m-1}/\lambda_{m-2})(1-q/\lambda_{m-1})} \\
&= \Omega_{\geq} \frac{1}{(1-q)(1-q^2\lambda_2)(1-q^3\lambda_3)...(1-q\lambda_{m-1}/\lambda_{m-2})(1-q/\lambda_{m-1})}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde işlemler yapılmaya devam edilirse eşitliğin sağ tarafının

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)...(1-q^m)}$$

ifadesine eşit olduğu gözlemlenir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 3.4. *α negatif olmayan bir sayı olmak üzere*

$$\Omega_{\geq} \frac{\lambda^{-\alpha}}{(1-\lambda x)(1-y/\lambda)} = \frac{x^{\alpha}}{(1-x)(1-xy)} \tag{3.6}$$

dir.

İspat Seri açılımından

$$\begin{aligned} \Omega_{\geq} \frac{\lambda^{-\alpha}}{(1-\lambda x)(1-y/\lambda)} &= \Omega_{\geq} \lambda^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda x)^n \sum_{m=0}^{\infty} (y/\lambda)^m \\ &= \Omega_{\geq} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^n y^m \lambda^{n-m-\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir. $k = n - m - \alpha$ ise tanım gereği eşitliğin sağ tarafı

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m+\alpha} x^n y^m &= \sum_{k=0}^{\infty} x^{m+k+\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} y^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} (xy)^m \end{aligned}$$

ifadesine eşittir. □

Mac Mahon parçalanışı yardımı ile bazı özel parçalanışlar için üreteç fonksiyonu bulunabilmektedir.

Kenarı tamsayı ve çevresi n olan üçgenlerin sayısı da n'nin özel bir parçalanışlarının sayısı olacağından bu yöntem ile bulunabilir.

n tamsayısı için $n_2 + n_3 \geq n_1 + 1$, $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ ve $n = n_1 + n_2 + n_3$ olacak şe-kildeki parçalanış sayısı, çevresi n ve kenar uzunlukları tamsayı olan üçgenlerin sayısı olacaktır. Bu şekildeki üçgenlerin sayısı $\Delta(n)$ ile gösterilsin.

Örnek 3.5. ***i)*** *Çevresi $n = 3$ olan üçgen sayısı $\Delta(3) = 1$'dir (Kenarları $1 - 1 - 1$).*

ii) *Benzer şekilde $n = 5$ için üçgen sayısı $\Delta(5) = 1$ (Kenarları $2 - 2 - 1$) ve $n = 7$ için üçgen sayısı $\Delta(7) = 2$'dir (Kenarları $3 - 2 - 2$ ve $3 - 3 - 1$).*

Teorem 3.6. *$\Delta(n)$ için üreteç fonksiyonu;*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n) q^n = \frac{q^3}{(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)} \tag{3.7}$$

dir.

İspat $n_1 \geq n_2 \geq n_3$, $n_2 + n_3 \geq n_1 + 1$ üçgenin kenarlarnı belirtsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n) q^n &= \Omega_{\geq} \sum_{n_1,n_2,n_3=0}^{\infty} q^{n_1+n_2+n_3} \lambda_1^{n_1-n_2} \lambda_2^{n_2-n_3} \lambda_3^{n_2+n_3-n_1-1} \\ &= \Omega_{\geq} \frac{\lambda_3^{-1}}{(1-\lambda_1 q/\lambda_3)(1-q\lambda_2\lambda_3/\lambda_1)(1-q\lambda_3/\lambda_2)}\end{aligned}$$

dir. (3.6)'da λ yerine λ_1, x yerine q/λ_3 ve y yerine $q\lambda_2\lambda_3$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n) q^n &= \Omega_{\geq} \frac{\lambda_3^{-1}}{(1-\lambda_1 q/\lambda_3)(1-q\lambda_2\lambda_3/\lambda_1)(1-q\lambda_3/\lambda_2)} \\ &= \Omega_{\geq} \frac{\lambda_3^{-1}}{(1-q/\lambda_3)(1-q^2\lambda_2)(1-q\lambda_3/\lambda_2)}\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi tekrar (3.6) uygulamak için λ yerine λ_2, x yerine q^2 ve y yerine $q\lambda_3$ yazılısa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n) q^n = \Omega_{\geq} \frac{\lambda_3^{-1}}{(1-q/\lambda_3)(1-q^2)(1-q^3\lambda_3)}$$

olur. Son kez λ yerine λ_3, x yerine q^3, y yerine q ve $\alpha = 1$ olursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n) q^n = \frac{q^3}{(1-q^4)(1-q^2)(1-q^3)}$$

elde edilmiş olur. □

Örnek 3.7. *$\Delta(n)$ için seri açılımı*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta(n) q^n &= q^3 + q^5 + q^6 + 2q^7 + q^8 + 3q^9 + 2q^{10} + 4q^{11} + 3q^{12} + 5q^{13} \\ &\quad + 4q^{14} + 7q^{15} + 5q^{16} + 8q^{17} + 7q^{18} + 10q^{19} + 8q^{20} + 12q^{21} + 10q^{22} \ldots\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu seri yardımıyla çevresi $n = 3$ olan üçgen sayısının $\Delta(3) = 1$, $n = 5$ olan üçgen sayısının $\Delta(5) = 1$, $n = 7$ için üçgen sayısının $\Delta(7) = 2$ ve benzer şekilde de çevresi $n = 22$ olan üçgen sayısının $\Delta(22) = 10$ olduğu gözlemlenir.

Teorem 3.8. *$\Omega_{\geq}$ operatörü için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.*

$$\Omega_{\geq} \frac{1}{(1-\lambda x)(1-y_1/\lambda)(1-y_2/\lambda)\ldots(1-y_j/\lambda)} = \frac{1}{(1-x)(1-xy_1)\ldots(1-xy_j)} \tag{3.8}$$

$$\Omega_{\geq} \frac{1}{(1-\lambda x)(1-\lambda y)(1-z/\lambda)} = \frac{1-xyz}{(1-x)(1-y)(1-xz)(1-yz)} \tag{3.9}$$

$$\Omega_{\geq} \frac{1}{(1-\lambda x)(1-\lambda y)(1-z/\lambda^2)} = \frac{1+xyz-x^2yz-xy^2z}{(1-x)(1-y)(1-x^2z)(1-y^2z)} \tag{3.10}$$

İspat (3.8) bağıntısında $j = 1$ yazılırsa (3.2) ile aynı olduğu görülür. Böylece j üzerinde tümevarım uygulanabilir.

(3.8) bağıntısında $j-1$ geçerli olduğu varsayılsın. Daha sonra

$$\frac{1}{(1-y_{j-1}/\lambda)(1-y_j/\lambda)} = \frac{1}{y_{j-1}-y_j}\left(\frac{y_{j-1}}{1-y_{j-1}/\lambda} - \frac{y_j}{1-y_j/\lambda}\right) \tag{3.11}$$

olduğu görülebilir. (3.8)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \underset{\geq}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda x)(1-y_1/\lambda)(1-y_2/\lambda)...(1-y_j/\lambda)} \\ = \quad & \frac{1}{y_{j-1}-y_j}\underset{\geq}{\Omega}\left(\begin{array}{c} \frac{y_{j-1}}{(1-\lambda x)(1-y_1/\lambda)(1-y_{j-2}/\lambda)...(1-y_{j-1}/\lambda)} \\ -\frac{y_j}{(1-\lambda x)(1-y_1/\lambda)...(1-y_{j-2}/\lambda)(1-y_j/\lambda)} \end{array}\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

dir. Şimdi tümevarım hipotezini kullanırsak, (3.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{y_{j-1}-y_j}\underset{\geq}{\Omega}\left(\begin{array}{c} \frac{y_{j-1}}{(1-x)(1-xy_1)(1-xy_2)...(1-xy_{j-2})(1-xy_{j-1})} \\ -\frac{y_j}{(1-x)(1-xy_1)...(1-xy_{j-2})(1-xy_j)} \end{array}\right) \\ = \quad & \frac{1}{(1-x)(1-xy_1)...(1-xy_j)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.8) bağıntısının kanıtı tamamlanır.

Şimdi (3.9) bağıntısını ispatlamak için bağıntının sol tarafına (3.11) uygulanırsa

$$\underset{\geq}{\Omega}\frac{1}{(1-\lambda x)(1-\lambda y)(1-z/\lambda)} = \frac{1}{x-y}\underset{\geq}{\Omega}\left(\frac{x}{1-x\lambda} - \frac{y}{1-y\lambda}\right)\frac{1}{1-z/\lambda}$$

elde edilir. (3.2) de kullanılararak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x-y}\underset{\geq}{\Omega}\left(\frac{x}{1-x\lambda} - \frac{y}{1-y\lambda}\right)\frac{1}{1-z/\lambda} \\ = \quad & \frac{x}{(x-y)(1-x)(1-xz)} \\ & -\frac{y}{(x-y)(1-y)(1-yz)} \\ = \quad & \frac{x(1-y)(1-yz) - y(1-x)(1-xz)}{(x-y)(1-x)(1-y)(1-xz)(1-yz)} \\ = \quad & \frac{x + xy^2z - y - x^2yz}{(x-y)(1-x)(1-y)(1-xz)(1-yz)} \\ = \quad & \frac{(x-y)(1-xyz)}{(x-y)(1-x)(1-y)(1-xz)(1-yz)} \\ = \quad & \frac{(1-xyz)}{(1-x)(1-y)(1-xz)(1-yz)} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(3.10) bağıntısının kanıtı için yukarıdaki ispatlardaki gibi tanım ve tümevarım kullanılarak aşağıdaki adımlar ile görülebilir.

$$\Omega_{\geq} \frac{1}{(1-\lambda x)(1-\lambda y)(1-z/\lambda^2)} = \frac{1}{x-y}\Omega_{\geq}\left(\frac{x}{1-x\lambda} - \frac{y}{1-y\lambda}\right)\frac{1}{1-z/\lambda^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{(x-y)(1-x)(1-x^2z)} - \frac{y}{(x-y)(1-y)(1-y^2z)} \\
&= \frac{x(1-y)(1-y^2z) - y(1-x)(1-x^2z)}{(x-y)(1-x)(1-y)(1-x^2z)(1-y^2z)} \\
&= \frac{(x-xy)(1-y^2z) - (y-yx)(1-x^2z)}{(x-y)(1-x)(1-y)(1-x^2z)(1-y^2z)} \\
&= \frac{(x-y)(1+xyz-x^2yz-xy^2z)}{(x-y)(1-x)(1-y)(1-x^2z)(1-y^2z)} \\
&= \frac{(1+xyz-x^2yz-xy^2z)}{(1-x)(1-y)(1-x^2z)(1-y^2z)}.
\end{aligned}$$

□

Aşağıda n'nin bazı özel parçalanışları tanımlanmış ve bunlar için de birer üreteç fonksiyonu verilmiştir.

Tanım 3.9. *n bir tamsayı olmak üzere $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ ve $n_j \geq n_{j+1} + 1$, $1 \leq j \leq m-1$ şeklindeki parçalanışına n'nin m'li farklı parçalanısı denir ve bunların sayısı da $Q_m(n)$ ile gösterilir. Yani $Q_m(n)$, n tamsayısının m farklı parça olarak kaç türlü ifade edilebileceğinin sayısıdır.*

Örnek 3.10. ***i)*** *6 farklı 3 parça ile yazılırsa yani 6'nin 3'lü farklı parçalanışı bulmak istenilirse tek parçalanışının $6 = 3+2+1$ olduğu görülür. O halde $Q_3(6) = 1$.*

ii) *8'i farklı 3 parça ile yazılırsa yani 8'in 3'lü farklı parçalanışı bulmak istenirse parçalanışlarının*

$$\begin{aligned}
8 &= 5+2+1 \\
&= 4+3+1
\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $Q_3(8) = 2$. Benzer şekilde $Q_3(10) = 4$, $Q_3(15) = 12$, $Q_3(20) = 24$'tür.

iii) *15'yi farklı 4 parça ile yazılırsa yani 15'in 4'lü farklı parçalanışı bulmak istenirse parçalanışlarının*

$$\begin{aligned} 15 &= 1+2+3+9 \\ &= 1+2+4+8 \\ &= 1+2+5+7 \\ &= 1+3+4+7 \\ &= 1+3+5+6 \\ &= 2+3+4+6 \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $Q_4(15) = 6$. Benzer şekilde $Q_4(10) = 1$, $Q_4(20) = 23$'tür.

Teorem 3.11. *m pozitif tam sayı olmak üzere $Q_m(n)$ için üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_m(n)q^n = \frac{q^{m(m+1)/2}}{(q;q)_m} \tag{3.13}$$

dir.

İspat n_i tam sayı olmak üzere $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ ve $n_j \geq n_{j+1} + 1$, $1 \leq j \leq m-1$ olduğu varsayılsın. Ayrıca $n_m \geq 1$ kabul edilsin. Daha sonra

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} Q_m(n)q^n &= \Omega_{\geq} \sum_{n_1,n_2,...,n_m=0} q^{n_1+n_2+...+n_m} \lambda_1^{n_1-n_2-1} \lambda_2^{n_2-n_3-1} ... \lambda_{m-1}^{n_{m-1}-n_m-1} . \lambda_m^{n_m-1} \\ &= \Omega_{\geq} \frac{\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}...\lambda_m^{-1}}{(1-\lambda_1 q)(1-\lambda_2 q/\lambda_1)...(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})} \end{aligned}$$

dir. Şimdi (3.6)'da $\alpha = 1$ uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_m(n)q^n = \Omega_{\geq} \frac{q\lambda_2^{-1}...\lambda_m^{-1}}{(1-q)(1-\lambda_2 q/\lambda_1)(1-\lambda_3 q/\lambda_2)...(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})}.$$

Bu işlem tekrar uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_m(n)q^n = \Omega_{\geq} \frac{q.q^2.\lambda_3^{-1}\lambda_4^{-1}...\lambda_m^{-1}}{(1-q)(1-q^2)(1-\lambda_3 q/\lambda_2)(1-\lambda_4 q/\lambda_3)...(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})}$$

elde edilir. Bu işlem m adım tekrarlanırsa, m. adımda

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_m(n)q^n = \frac{q.q^2.q^3...q^{m-1}q^m}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)...(1-q^{m-1})(1-q^m)}$$

ifadesi elde edilecektir. Böylece ispat tamamlanır (Berndt). □

Örnek 3.12. ***i)*** *n tamsayısının farklı 3'lü parçalanışlarının sayısı aşağıdaki seri yardımı ile görülebilir.*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Q_3(n)q^n &= q^6+q^7+2q^8+3q^9+4q^{10}+5q^{11}+7q^{12}+8q^{13}+10q^{14}\\ &\quad +12q^{15}+14q^{16}+16q^{17}+19q^{18}+21q^{19}+24q^{20}+27q^{21}+...\end{aligned}$$

O halde $Q_3(19)=21$.

ii) *n tamsayısının farklı 4'lü parçalanışlarının sayısı da*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Q_4(n)q^n &= q^{10}+q^{11}+2q^{12}+3q^{13}+5q^{14}+6q^{15}+9q^{16}+11q^{17}+15q^{18}\\ &\quad +18q^{19}+23q^{20}+27q^{21}+34q^{22}+39q^{23}+47q^{24}+54q^{25}\\ &\quad +64q^{26}+72q^{27}+84q^{28}+94q^{29}+...\end{aligned}$$

serisi yardımıyla kolayca görülür. O halde $Q_4(19)=18,\ Q_4(29)=94,...$

Tanım 3.13. *n tamsayısını m farklı parçadan oluşan parçalanışının parçaları, en az k kadar farklılaşarak (azalan sırada) ve bu parçaların en küçük parçası l'den büyük eşit olmak şartı ile ifade edilmesine n tamsayısının koşullu m'li parçalanışı denilir. Bu sayıda $Q_m^{(k,l)}(n)$ ile gösterilir.*

Örnek 3.14. ***i)*** *5 tamsayısını 2 farklı parçadan oluşan parçalanışının parçaları, en az 1 kadar farklılaşarak (azalan sırada) ve bu parçaların en küçük parçası 1'den büyük eşit olmak şartı ile ifade edilmesi*

$$\begin{aligned}5 &= 4+1\\ &= 3+2\end{aligned}$$

şeklinde mümkündür. Yani $Q_2^{(1,1)}(5)=2$'dir.

ii) *5 tamsayısını 2 farklı parçadan oluşan parçalanışının parçaları, en az 1 kadar farklılaşarak (azalan sırada) ve bu parçaların en küçük parçası 2'den büyük eşit olmak şartı ile ifade edilmesi*

$$5=3+2$$

şeklinde mümkündür. Yani $Q_2^{(1,2)}(5)=1$'dir. $4+1$ parçalanışı en küçük parça 2 olma koşulundan alınamaz.

iii) *10 tamsayısını 2 farklı parçadan oluşan parçalanışının parçaları, en az 1 kadar farklılaşarak (azalan sırada) ve bu parçaların en küçük parçası 1'den büyük eşit olmak şartı ile ifade edilmesi*

$$\begin{aligned} 10 &= 9+1 \\ &= 8+2 \\ &= 7+3 \\ &= 6+4 \end{aligned}$$

şeklinde mümkündür. Yani $Q_2^{(1,1)}(10) = 4$'tür.

iv) *10 tamsayısını 3 farklı parçadan oluşan parçalanışının parçaları, en az 1 kadar farklılaşarak (azalan sırada) ve bu parçaların en küçük parçası 1'den büyük eşit olmak şartı ile ifade edilmesi*

$$\begin{aligned} 10 &= 7+2+1 \\ &= 6+3+1 \\ &= 5+4+1 \\ &= 5+3+2 \end{aligned}$$

şeklindedir. $Q_3^{(1,1)}(10) = 4$'tür.

Teorem 3.15. *k, l, m tamsayı olmak üzere $Q_m^{(k,l)}$'nin üreteç fonksiyonu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_m^{(k,l)}(n)q^n = \frac{q^{lm+km(m-1)/2}}{(q;q)_m}$$

dir.

İspat n_i tamsayı olmak üzere $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$ ve $n_j = n_{j+1} + k$, $n_m \geq l$ olduğu varsayılsın.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} Q_m^{(k,l)}(n)q^n &= \Omega_{\geq} \sum_{n_1,n_2,...,n_m=0} q^{n_1+n_2+...+n_m} \lambda_1^{n_1-n_2-k} \lambda_2^{n_2-n_3-k} ... \lambda_{m-1}^{n_{m-1}-n_m-k} \lambda_m^{n_m-l} \\ &= \Omega_{\geq} \frac{\lambda_1^{-k}\lambda_2^{-k}...\lambda_m^{-l}}{(1-\lambda_1 q)(1-\lambda_2 q/\lambda_1)...(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})}. \end{aligned}$$

Şimdi (3.6) uygulamak için λ yerine λ_1, x yerine q ve y yerine $q\lambda_2$ ve $\alpha = k$ yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_m^{(k,l)}(n)q^n = \Omega_{\geq} \frac{q^k \lambda_2^{-k}\lambda_3^{-k}...\lambda_m^{-l}}{(1-q)(1-\lambda_2 q/\lambda_1)(1-\lambda_3 q/\lambda_2)...(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})}$$

olur. Şimdi tekrar (3.6) uygulamak için λ yerine λ_2, x yerine q/λ_1 ve y yerine $q\lambda_3$ ve $\alpha = k$ yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_m^{(k,l)}(n)q^n = \Omega_{\geq} \frac{q^k.q^{2k}.\lambda_3^{-k}\lambda_4^{-k}...\lambda_m^{-l}}{(1-q)(1-q^2)(1-\lambda_3 q/\lambda_2)(1-\lambda_4 q/\lambda_3)...(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})}$$

elde edilir. Benzer şekilde $(m-1)$. adımda

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_m^{(k,l)}(n)q^n = \Omega_{\geq} \frac{q^k.q^{2k}.q^{3k}...q^{(m-1)k}\lambda_m^{-l}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)...(1-q^{m-1})(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})}$$

dir. Şimdi (3.6)'da $\alpha = l$ uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_m^{(k,l)}(n)q^n = \Omega_{\geq} \frac{q^k.q^{2k}.q^{3k}...q^{(m-1)k}q^{ml}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)...(1-q^{m-1})(1-q^m)}$$

ifadesi elde edilecektir. □

Örnek 3.16. ***i)*** *n tamsayısını 2 farklı parçadan oluşan parçalanışının parçaları, en az 1 kadar farklılaşarak (azalan sırada) ve bu parçaların en küçük parçası 1'den büyük eşit olmak şartı ile ifade edilmesine n tamsayısının koşullu 2'li parçalanışının sayısı $Q_2^{(1,1)}(n)$ ile gösterilecektir. Seri açılımı*

$$\begin{aligned} Q_2^{(1,1)}(n) &= q^3 + q^4 + 2q^5 + 2q^6 + 3q^7 + 3q^8 + 4q^9 + 4q^{10} + 5q^{11} + 5q^{12} + \\ &\quad 6q^{13} + 6q^{14} + 7q^{15} + 7q^{16} + 8q^{17} + 8q^{18} + 9q^{19} + 9q^{20} + 10q^{21}... \end{aligned}$$

dir. O halde; $Q_2^{(1,1)}(3) = 1$, $Q_2^{(1,1)}(5) = 2$, $Q_2^{(1,1)}(17) = 8$, $Q_2^{(1,1)}(21) = 10, ...$

ii) *Benzer şekilde n tamsayısını 2 farklı parçadan oluşan parçalanışının parçaları, en az 1 kadar farklılaşarak (azalan sırada) ve bu parçaların en küçük parçası 2'den büyük eşit olmak şartı ile ifade edilmesine n tamsayısının koşullu 2'li parçalanışının sayısı $Q_2^{(1,2)}(n)$ ile gösterilecektir. Seri açılımı*

$$\begin{aligned} Q_2^{(1,2)}(n) &= q^5 + q^6 + 2q^7 + 2q^8 + 3q^9 + 3q^{10} + 4q^{11} + 4q^{12} + 5q^{13} + 5q^{14} + \\ &\quad 6q^{15} + 6q^{16} + 7q^{17} + 7q^{18} + 8q^{19} + 8q^{20} + 9q^{21} + 9q^{22} + 10q^{23} + ... \end{aligned}$$

dir. O halde; $Q_2^{(1,2)}(5) = 1$, $Q_2^{(1,2)}(7) = 2$, $Q_2^{(1,2)}(22) = 9$, $Q_2^{(1,2)}(23) = 10, ...$

iii) *n tamsayısını 3 farklı parçadan oluşan parçalanışının parçaları, en az 1 kadar farklılaşarak(azalan sırada) ve bu parçaların en küçük parçası 1'den büyük eşit olmak* *şartı ile ifade edilmesine n tamsayısının koşullu 3'lü parçalanışının sayısı $Q_3^{(1,1)}(n)$ ile gösterilir. Seri açılımı*

$$\begin{aligned} Q_3^{(1,1)}(n) &= q^6+q^7+2q^8+3q^9+4q^{10}+5q^{11}+7q^{12}+8q^{13}+10q^{14}+12q^{15}+ \\ & \quad 14q^{16}+16q^{17}+19q^{18}+21q^{19}+24q^{20}+27q^{21}+30q^{22}+33q^{23}+... \end{aligned}$$

dir. O halde; $Q_3^{(1,1)}(4)=0$, $Q_3^{(1,1)}(6)=1$, $Q_3^{(1,1)}(10)=4$, $Q_3^{(1,1)}(21)=27$, $Q_3^{(1,1)}(23)=33, ...$

Tanım 3.17. *n tamsayısının en büyük parçası j olmak üzere, parçalanış sayısı en fazla m ise n tamsayısının üstten sınırlı koşullu m'li parçalanışı denir ve $p_m(j,n)$ ile gösterilir.*

Örnek 3.18. ***i)*** *5 tamsayısının en büyük parçası 5 olmak üzere, parçalanış sayısı en fazla 2 ise 5 tamsayısının üstten sınırlı koşullu 2'li parçalanışı*

$$5=5$$

şeklindedir. Yani $p_2(5,5)=1$'tür.

ii) *5 tamsayısının en büyük parçası 4 olmak üzere, parçalanış sayısı en fazla 2 ise 5 tamsayısının üstten sınırlı koşullu 2'li parçalanışı*

$$5=4+1$$

şeklindedir. Yani $p_2(4,5)=1$'dir.

iii) *5 tamsayısının en büyük parçası 3 olmak üzere, parçalanış sayısı en fazla 2 ise 5 tamsayısının üstten sınırlı koşullu 2'li parçalanışı*

$$5=3+2$$

şeklindedir. Yani $p_2(3,5)=1$'dir.

iv) *4 tamsayısının en büyük parçası 2 olmak üzere, parçalanış sayısı en fazla 3 ise 4 tamsayısının üstten sınırlı koşullu 3'lü parçalanışı*

$$\begin{aligned} 4 &= 2+2 \\ &= 1+1+2 \end{aligned}$$

şeklindedir. Yani $p_3(2,4)=2$'dir.

Teorem 3.19. *m, j pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$\sum_{j,n=0}^{\infty} p_m(j,n) z^j q^n = \frac{1}{(zq;q)_m}. \tag{3.14}$$

İspat $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$, $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_m$, $n_j \geq n_{j+1} + 1$, ve $m - 1 \leq j$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\sum_{j,n=0}^{\infty} p_m(j,n) z^j q^n &= \Omega_{\geq} \sum_{n_1,n_2,...,n_m=0} z^{n_1} q^{n_1+n_2+...+n_m} \lambda_1^{n_1-n_2} \lambda_2^{n_2-n_3} ... \lambda_{m-1}^{n_{m-1}-n_m} \\ &= \Omega_{\geq} \frac{1}{(1-zq\lambda_1)(1-\lambda_2 q/\lambda_1)...(1-q\lambda_{m-1}/\lambda_{m-2})(1-q/\lambda_{m-1})}\end{aligned}$$

dir. Şimdi (3.6)'da x yerine zq, λ yerine λ_1, y yerine $\lambda_2 q$ ve $\alpha = 0$ alınırsa

$$\sum_{j,n=0}^{\infty} p_m(j,n) z^j q^n = \Omega_{\geq} \frac{1}{(1-zq)(1-\lambda_2 q/\lambda_1)...(1-\lambda_{m-1} q/\lambda_{m-2})(1-q/\lambda_{m-1})}$$

elde edilir. Ardından (3.6)'da x yerine q/λ_1, λ yerine λ_2, y yerine $\lambda_3 q$ ve $\alpha = 0$ uygulanırsa

$$\sum_{j,n=0}^{\infty} p_m(j,n) z^j q^n = \Omega_{\geq} \frac{1}{(1-zq)(1-zq^2)(1-\lambda_3 q/\lambda_2)...(1-\lambda_{m-1} q/\lambda_{m-2})(1-q/\lambda_{m-1})}$$

olur. Benzer şekilde m adım kadar devam edilirse

$$\sum_{j,n=0}^{\infty} p_m(j,n) z^j q^n = \frac{1}{(1-zq)(1-zq^2)...(1-zq^{m-1})(1-zq^m)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Örnek 3.20. ***i)*** *(3.14) serisinde $m = 2$ yazılırsa aşağıdaki seri elde edilir.*

$$\begin{aligned}\sum_{j,n=0}^{\infty} p_2(j,n) z^j q^n &= zq + \left(z^2 + z\right) q^2 + \left(z^3 + z^2\right) q^3 + \left(z^4 + z^3 + z^2\right) q^4 + \\ &\quad \left(z^5 + z^4 + z^3\right) q^5 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3) q^6 + ...\end{aligned}$$

Buradan $p_2(5,5) = 1$, $p_2(4,5) = 1$, $p_2(3,5) = 1$ ve $p_2(3,6) = 1$ olduğu görülür.

ii) *(3.14) serisinde $m = 3$ yazılırsa aşağıdaki seri elde edilir.*

$$\begin{aligned}&\sum_{j,n=0}^{\infty} p_3(j,n) z^j q^n \\ = \; & 1 + zq + \left(z^2 + z\right) q^2 + \left(z^3 + z^2 + z\right) q^3 + \left(z^4 + z^3 + 2z^2\right) q^4 + \\ & \left(z + 2z^3 + z^4 + z^5\right) q^5 + \left(z^2 + 2z^3 + 2z^4 + z^5 + z^6\right) q^6 + \\ & \left(2z^3 + 2z^4 + 2z^5 + z^6 + z^7\right) q^7 + ...\end{aligned}$$

Buradan $p_3(5,5) = 1$, $p_3(4,7) = 2$, $p_3(2,4) = 2$ ve $p_3(3,6) = 2$ olduğu görülür.

Tanım 3.21. *n tamsayısının en büyük parçası j olmak üzere, m farklı parçadan oluşuyorsa kesin koşullu parçalanışı denir ve $Q_m(j,n)$ ile gösterilir.*

Örnek 3.22. ***i)*** *5 tamsayısının en büyük parçası 4 olmak üzere, 2 farklı parçadan oluşan kesin koşullu parçalanışı*

$$5 = 4 + 1$$

şeklindedir, yani $Q_2(4,5) = 1$'dir.

ii) *5 tamsayısının en büyük parçası 2 olmak üzere, 3 farklı parçadan oluşan kesin koşullu parçalanışı $Q_3(2,5) = 0$'dır. Çünkü bu koşulları sağlayan tek parçalanış*

$$5 = 2 + 2 + 1$$

dir. Fakat tekrarlı olduğu için kabul edilemez.

iii) *6 tamsayısının en büyük parçası 3 olmak üzere, 3 farklı parçadan oluşan kesin koşullu parçalanışı $Q_3(3,6) = 1$'dır. Bu parçalanış*

$$6 = 3 + 2 + 1$$

dir.

iv) *9 tamsayısının en büyük parçası 6 olmak üzere, 3 farklı parçadan oluşan kesin koşullu parçalanışı*

$$9 = 1 + 2 + 6$$

şeklindedir, yani $Q_3(6,9) = 1$'dir.

Teorem 3.23. *m, j pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$\sum_{j,n=0}^{\infty} Q_m(j,n) z^j q^n = \frac{z^m q^{m(m+1)/2}}{(zq;q)_m} \tag{3.15}$$

dir.

İspat $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$, $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_m$, $n_j \geq n_{j+1} + 1$, ve $m - 1 \leq j$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\sum_{j,n=0}^{\infty} Q_m(j,n) z^j q^n \quad &= \quad \Omega_{\geq} \sum_{n_1,n_2,...,n_m=0}^{\infty} z^{n_1} q^{n_1+n_2+...+n_m} \lambda_1^{n_1-n_2-1} \lambda_2^{n_2-n_3-1} ... \\ &\quad ..\lambda_{m-1}^{n_{m-1}-n_m-1} . \lambda_m^{n_m-1}\end{aligned}$$

dir. (3.6)'da x yerine q, λ yerine λ_1, y yerine $\lambda_2 q$ ve $\alpha = 1$ uygulanırsa

$$\sum_{j,n=0}^{\infty} Q_m(j,n) z^j q^n = \Omega_{\geq} \frac{z^{n_1}\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}...\lambda_m^{-1}}{(1-\lambda_1 q)(1-\lambda_2 q/\lambda_1)...(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})}$$

olur. Ardından (3.6)'da x yerine q^2, λ yerine λ_2, y yerine $\lambda_3 q$ ve $\alpha = 0$ alınırsa

$$\sum_{j,n=0}^{\infty} Q_m(j,n) z^j q^n = \Omega_{\geq} \frac{zq\lambda_2^{-1}...\lambda_m^{-1}}{(1-zq)(1-q^2\lambda_2)(1-\lambda_3 q/\lambda_2)...(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})}$$

dir. Buradan

$$\sum_{j,n=0}^{\infty} Q_m(j,n) z^j q^n = \Omega_{\geq} \frac{zq.zq^2.\lambda_3^{-1}\lambda_4^{-1}...\lambda_m^{-1}}{(1-zq)(1-zq^2)(1-q^3\lambda_3)(1-\lambda_4 q/\lambda_3)...(1-\lambda_m q/\lambda_{m-1})}$$

elde edilir. m adım kadar devam edilirse eşitliğin sağ tarafının

$$\begin{aligned}\sum_{j,n=0}^{\infty} Q_m(j,n) z^j q^n &= \Omega_{\geq} \frac{zq.zq^2.zq^3...zq^{m-1}\lambda_m^{-1}}{(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)...(1-zq^{m-1})(1-q^m\lambda_m)} \\ &= \frac{zq.zq^2.zq^3...zq^{m-1}zq^m}{(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)...(1-zq^{m-1})(1-zq^m)}\end{aligned}$$

olduğu görülür ve bu ifade düzenlenirse

$$\sum_{j,n=0}^{\infty} Q_m(j,n) z^j q^n = \frac{z^m q.q^2.q^3...q^{m-1}q^m}{(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)...(1-zq^{m-1})(1-zq^m)}$$

elde edilerek ispat tamamlanır. □

Örnek 3.24. ***i)*** *(3.15) serisinde $m = 2$ yazılırsa aşağıdaki seri elde edilir.*

$$\sum_{j,n=0}^{\infty} Q_2(j,n) z^j q^n = z^2q^3 + z^3q^4 + \left(z^4+z^3\right)q^5 + \left(z^5+z^4\right)q^6 + \left(z^6+z^5+z^4\right)q^7 + ...$$

Buradan $Q_2(3,5) = 1$, $Q_2(4,6) = 1$, $Q_2(6,7) = 1$ ve $Q_2(3,6) = 0$ olduğu görülür.

ii) *(3.15) serisinde $m = 3$ yazılırsa aşağıdaki seri elde edilir.*

$$\begin{aligned}\sum_{j,n=0}^{\infty} Q_3(j,n) z^j q^n &= z^3q^6 + z^4q^7 + \left(z^5+z^4\right)q^8 + \\ &\quad \left(z^6+z^5+z^4\right)q^9 + \left(z^7+z^6+z^5\right)q^{10} + ...\end{aligned}$$

Buradan $Q_3(3,6) = 1$, $Q_3(4,8) = 1$, $Q_3(6,9) = 1$ ve $Q_3(7,10) = 1$ olduğu görülür.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Çokgensel Sayılara Genel Bir Bakış

Beşgensel sayıların bir sayının parçalananışındaki önemini daha önceki bölümde gördük. Beşgensel sayı tanımı tekrar incelenirse, herhangi bir k için k-gensel sayı tanımı vermek vermek mümkün olacaktır. Ayrıca bu tür yeni sayı dizilerinin tamsayıların parçalanışındaki etkisi de merak konusu olacaktır.

Tek noktadan başlayıp o noktayı sabit tutarak bir düzgün k-gen elde edebilmek için $(k-1)$ noktaya yani k tane bir birim uzunluğunda parçaya ihtiyaç vardır. Daha sonra bu düzgün k-genin dışında sabit tutulan nokta değişmeksizin birinci düzgün k-genin bir kenar uzunluğunu iki katına çıkararak bir k-gen daha çizmek istenirse $(2k-3)$ nokta daha gerekir. Bu şekilde k-genler büyütülmeye çalışıldığında bir kenarı n birim olan düzgün k-gen için $nk-(2n-1)$ adet noktaya ihtiyaç vardır. Bunlar yardımı ile

$$1, k-1, 2k-3, 3k-5, ..., nk-(2n-1), ..$$

dizisi k-gensel dizi olarak adlandırılsın ve $w_k(n)$, bu ilerlemedeki ilk n terimin toplamını gösterirse

$$w_k(n) = \sum_{t=0}^{n-1}(tk-(2t-1)) = \frac{((k-2)n-(k-4))n}{2} = \frac{n^2k-2n^2-kn+4n}{2}$$

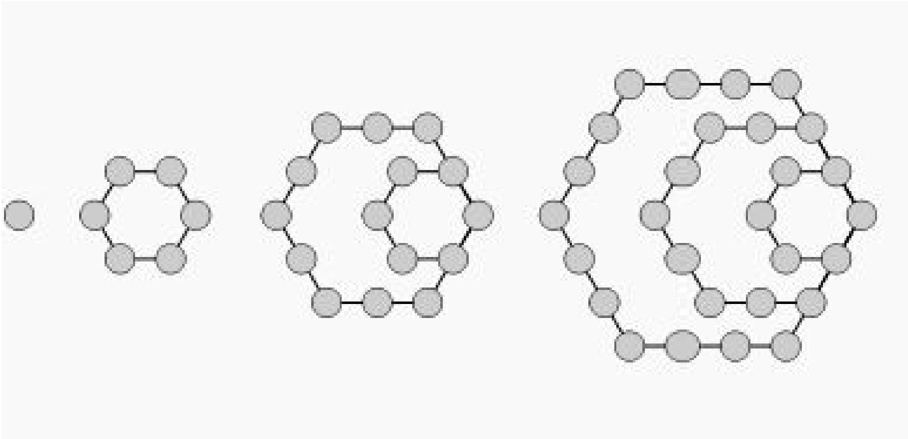
olacaktır.

Tanım 4.1. *n tamsayısı için $w_k(n) = \frac{((k-2)n-(k-4))n}{2}$ genel terimi ile elde edilen dizinin her bir terimine k-gensel sayılar denir.*

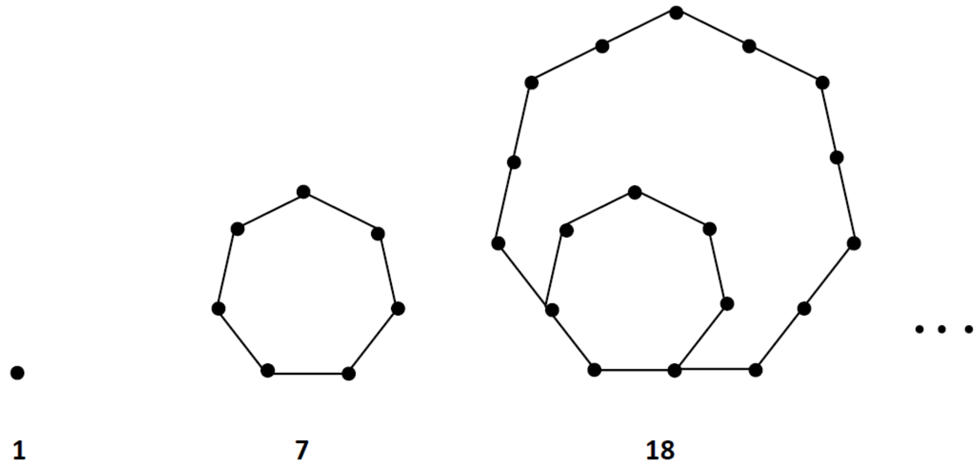
Örnek 4.2. *$n=6$ için altıgensel sayılar $1, 5, 9, 13, 17, .., 4n+1, ...$ serisinin ilk n terimin toplamı $w_6(n)$ ile gösterilirse*

$$w_6(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 4k+1 = \frac{4n^2-2n}{2} \text{ ve } w_6(-n) = \frac{4n^2+2n}{2}$$

bu sayılara 6-gensel sayıları verir.



Şekil 4.6. Altıgensel sayılar (www.msxlabs.org)



Şekil 4.7. Yedigensel sayılar

Örnek 4.3. *$k = 7$ için 7-gensel dizi $1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, ..., 5n+1, ...$ $w_7(n)$, bu ilerlemedeki ilk n terimin toplamını göstersin.*

$$w_7(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 5k + 1 = \frac{5n^2 - 3n}{2} \text{ ve } w_7(-n) = \frac{5n^2 + 3n}{2}$$

şeklindeki sayılara yedigensel sayılar denir.

Jacobi özdeşliği k-genseller için de verilebilir.

Teorem 4.4. $k \geq 4$ *ve* $|\ x\ | < 1$ *olmak üzere*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{(k-2)n})(1-x^{(k-2)n-1})(1-x^{(k-2)n-k+3}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{w_k(n)} \tag{4.1}$$

dir.

İspat $w_k(n) = \frac{((k-2)n-(k-4))n}{2}$ ve $w(-n) = \frac{((k-2)n+(k-4))n}{2}$'den dolayı

$$a = \frac{k-2}{2} \text{ ve } b = \frac{k-4}{2}$$

alınır ve (2.11)'de yerine yazılırsa

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{(k-2)n})(1-x^{(k-2)n-1})(1-x^{(k-2)n-k+3}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{k-2}{2}n^2+\frac{k-4}{2}n}$$

eşitliği elde edilir. b negatif olmayacağı için $k \geq 4$ olmalıdır. Bu eşitlik Jacobi özdeşliğinin k-gensel sayılar için ifadesidir. □

Jacobi Üçlü Çarpım Özdeşliği kullanılarak altıgensel ve yedigensel sayılar elde edilebilir. $k = 6$ için altıgensel sayılar elde edilir.

Sonuç 4.5. $|\ x\ | < 1$ *için,*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{4n})(1-x^{4n-1})(1-x^{4n-3}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{w_6(n)} \tag{4.2}$$

dir.

(2.11) eşitliğinde $a = 5/2$ ve $b = 3/2$ alınırsa yedigensel sayılar elde edilir.

Sonuç 4.6. $|\ x\ | < 1$ *için,*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{5n})(1-x^{5n-1})(1-x^{5n-4}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{w_7(n)} \tag{4.3}$$

dir.

4.1.1. Beşgensel ve altıgensel sayılar arasındaki bağıntı

Altıgensel sayılar ile beşgensel sayılar arasında bağıntı kurulabilmesi için (4.2) eşitliğinin sol tarafı $(1-x^{4n-2})$ ile çarpıp bölündüğünde, Euler'in beşgensel sayı teoremindeki ifade pay kısmında elde edilir, yani;

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^{4n})(1-x^{4n-1})(1-x^{4n-2})(1-x^{4n-3})}{(1-x^{4n-2})}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^{n})}{(1-x^{4n-2})}$$

bağıntısı görülür. Seri olarak yazılırsa

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{w_6(m)}=\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{4n-2})}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{w_5(m)}\right)$$

olur.

4.1.2. Beşgensel ve yedigensel sayılar arasındaki bağıntı

Yedigensel sayılar ile beşgensel sayılar arasında bağıntı kurulabilmesi için (4.3) eşitliğinin sol tarafı $(1-x^{5n-2})(1-x^{5n-3})$ ile çarpıp bölündüğünde, Euler'in beşgensel sayı teoremindeki ifade pay kısmında elde edilir, yani;

$$\begin{aligned}&\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^{5n})(1-x^{5n-1})(1-x^{5n-2})(1-x^{5n-3})(1-x^{5n-4})}{(1-x^{5n-2})(1-x^{5n-3})}\\ =&\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^{n})}{(1-x^{5n-2})(1-x^{5n-3})}\end{aligned}$$

bağıntısı görülür. Seri olarak yazılırsa

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{w_7(m)}=\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{5n-2})(1-x^{5n-3})}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{w_5(m)}\right) \tag{4.4}$$

olur. (4.19) eşitliğini kullanılarak

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{w_7(m)}=\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x^{i})}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{w_5(m)}\right) \tag{4.5}$$

ifadesini elde edilir. Tam sayıların parçalanışı ile olan bağlantısı için 4.3 bölümünde (4.4) ve (4.5) denklemleri tekrar kullanılacaktır. Şimdi aşağıda Jacobi özdeşliğinin bazı özelikleri incelenmeye devam edilecektir.

4.2. Parçalanışlar Arasındaki İlişkiler

Bir tamsayının parçalınışı ve kısıtlı parçalanış üzerine çalışmalar güncelliğini kaybetmeden devam etmektedir. (Andrews 2010), (Chen 2011), (Merca 2016), (Merca 2017), (Merca 2017) çalışmalarda bazı parçalanış ve kısıtlı parçalanışlar için yeni bağıntılar elde etmişlerdir. Bu bölümde n tamsayısının tek ve düzensiz parçalanışları-nın sayısı $Z(n)$ ve tek parçalanışlarına karşılık gelen parçalanış sayısı $Q(n)$'ları arasındaki ilişki incelenektir. Ayrıca altıgensel ve yedigensel sayılar yardımı ile bir tamsayının parçalanışı için bağıntılar elde edilecektir.

Teorem 4.7. *n pozitif doğal sayısı için,*

$$p(n) = \left(\sum_{i=0}^{\|\frac{n}{2}\|} p(i)Q(n-2i) \right) \tag{4.6}$$

dir. Burada $\|.\|$ tam değer fonksiyonudur.

İspat $\mid x \mid < 1$ olmak üzere, n pozitif doğal sayısı için,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{2n})} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2n-1}} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n \right) \end{aligned}$$

burada seri çarpımı yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\|\frac{n}{2}\|} p(i)Q(n-2i) \right) x^n$$

elde edilir. □

Teorem 4.8. *Her n pozitif tamsayısı için,*

$$Q(\frac{n}{2}) = p(n) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left[p(n-(2k^2 \mp k)) \right].$$

İspat (2.11)'de $a = 2$, $b = 1$ alınırsa

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^{4n})(1-x^{4n-1})(1-x^{4n-3}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^m x^{2m^2+m}$$

elde edilir. Daha sonra eşitliğin sol tarafı $1-x^{4n-2}$ ile çarpılıp bölünürse

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-x^{n}}{1-x^{4n-2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{m}x^{2m^{2}+m}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}Q(\frac{n}{2})x^{n} &= \sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^{n}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}x^{2m^{2}-m}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}x^{2m^{2}+m}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(p(n)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}p(n-(2k^{2}\mp k))\right)x^{n}\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.9. *n tek tamsayısı için*

$$p(n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}p(n-(2k^{2}\mp k)) \tag{4.7}$$

dır.

Teorem 4.10. *$n>1$ pozitif doğal sayısı için,*

i)

$$Q(2n)=p(n)+\sum_{\substack{t=1\\ t,(t-3)\in 4\mathbb{Z}}}^{2n-1}p(n-\frac{1}{4}t\,(t+1)), \tag{4.8}$$

ii)

$$Q(2n-1)=\sum_{\substack{t=1\\ (t-1),(t-2)\in 4\mathbb{Z}}}^{2n-2}p(\frac{1}{2}(2n-1)-\frac{1}{4}t\,(t+1)) \tag{4.9}$$

dir.

İspat (2.10) eşitliğinde a yerine $1/2$ ve b yerine de $1/2$ yazılırsa

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{n})(1+x^{n})\left(1+x^{n-1}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x^{\frac{1}{2}m(m+1)}$$

elde edilir. Burada indisler düzenlenirse

$$2\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{n})\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^{2n}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x^{\frac{1}{2}m(m+1)}$$

ifadesinden

$$2\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{n})=\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{2n})}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}x^{\frac{1}{2}m(m+1)}$$

elde edilir.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)=\sum_{n=0}^{\infty}Q(n)x^n \quad \text{ve} \quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{2n})}=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^{2n}$$

yerlerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}Q(n)x^n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^{2n}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}x^{\frac{1}{2}m(m+1)}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}x^{\frac{1}{2}m(m+1)}=1+\sum_{m=1}^{\infty}x^{\frac{1}{2}m(m+1)}+\sum_{m=1}^{\infty}x^{\frac{1}{2}m(m-1)}$$

eşitliğinden

$$\sum_{n=0}^{\infty}Q(n)x^n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^{2n}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}x^{\frac{1}{2}m(m\pm1)}\right)$$

elde edilir. Burada gerekli aritmetik işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}Q(n)x^n &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^{2n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{t=1}^{n}p(\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}t\,(t\pm1))\right)x^n \qquad (4.10)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(p(\frac{n}{2})\ +\ \left(\sum_{t=1}^{n}p(\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}t\,(t\pm1))\right)\right)x^n\end{aligned}$$

olur. Şimdi $Q(n)$ düzenlenirse, $l=t+1$ iken

$$p(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}t\,(t+1))=p(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}l\,(l-1))$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n}\left(p(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}t\,(t\pm1))\right) &= 2\sum_{t=1}^{n-1}p(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}t\,(t+1))+p(\frac{n}{2})\\ &= p(\frac{n}{2})+2\sum_{t=1}^{n-1}p(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}t\,(t+1))\end{aligned}$$

dir. O halde son eşitlik ile (4.10) birleştirlir ve katsayılar eşitlenirse

$$Q(n)=p(\frac{n}{2})+\sum_{t=1}^{n-1}p(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}t\,(t+1)) \qquad (4.11)$$

elde edilir.

Şimde de toplam üzerindeki kısıtlamayı görmek için aşağıdaki ifadeler gözlemlenebilir.

$i)$ n çift sayı iken $\frac{n}{2} - \frac{1}{4}t\,(t+1) \in \mathbb{Z}$ ancak ve ancak $t, (t-3) \in 4\mathbb{Z}$. O halde $p(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}t\,(t+1)) = 0$ ancak ve ancak $(t-1), (t-2) \in 4\mathbb{Z}$.

$ii)$ n tek sayı sayı iken $\frac{n}{2} - \frac{1}{4}t\,(t+1) \in \mathbb{Z}$ ancak ve ancak $(t-1), (t-2) \in 4\mathbb{Z}$. O halde $p(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}t\,(t+1)) = 0$ ancak ve ancak $t, (t-3) \in 4\mathbb{Z}$.

Şimde (4.10) birleştirilirse

$$Q(2n) = p(n) + \sum_{\substack{t=1 \\ t,(t-3)\in 4\mathbb{Z}}}^{2n-1} p(n - \frac{1}{4}t\,(t+1)),$$

$$Q(2n-1) = \sum_{\substack{t=1 \\ (t-1),(t-2)\in 4\mathbb{Z}}}^{2n-2} p(\frac{1}{2}(2n-1) - \frac{1}{4}t\,(t+1))$$

elde edilir. □

Teorem (4.7) ve Teorem (4.10) birleştirilirse parçalanış için yeni bir bağıntı elde edilir. Bu bağıntı yardımıyla bir tamsayının parçalanışı daha küçük parçalanışlarla hesaplanabilecektir.

Teorem 4.11. *n pozitif doğal sayısı için,*

$$p(n) = \sum_{i=0}^{\|\frac{n}{2}\|} p(i) \left[p(\frac{n}{2} - i) + \sum_{t=1}^{\|\sqrt{n}+1\|} p(\frac{n}{2} - i - \frac{1}{4}t\,(t+1)) \right] \tag{4.12}$$

dir. Burada $\|.\|$ tam değer fonksiyonudur.

Sonuç 4.12. *n tek tamsayısı için*

$$p(n) = \sum_{i=0}^{\|\frac{n}{2}\|} \sum_{t=1}^{\|\sqrt{n}+1\|} p(i)p(\frac{n}{2} - i - \frac{1}{4}t\,(t+1))$$

dir. Burada $\|.\|$ tam değer fonksiyonudur.

Teorem 4.13. *n pozitif doğal sayısı için,*

$$\sum_{k=0}^{n} p(n - \frac{k^2+k}{2}) = \sum_{j=0}^{n} Q(j)Q(n-j)$$

dir.

İspat $\mid x \mid < 1$ ve n pozitif doğal sayı olmak üzere

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-x^{2n}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{\frac{k(k+1)}{2}}$$

eşitliğinden yola çıkılırsa sol taraf

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-x^{2n}}{1-x^{2n-1}} &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^n)(1+x^n)(1+x^n)}{(1-x^{2n-1})\,(1+x^n)} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)^2\end{aligned}$$

ifadesine eşittir.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)} = \sum_{m=0}^{\infty} p(m)x^m \quad \text{ve} \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n$$

ifadeleri eşitlikte yerine yazılarak

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{\frac{k(k+1)}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} p(m)x^m = \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n\right)^2$$

olduğu görülür. Sonraki adımda seri çarpımı yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p(n-\frac{k^2+k}{2})\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} Q(j)Q(n-j)\right)x^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} p(n-\frac{k^2+k}{2}) = \sum_{j=0}^{n} Q(j)Q(n-j)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.14. $n \geq 1$ *pozitif doğal sayısı için,*

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j Q(j)Z(n-j) = 0 \tag{4.13}$$

dir.

İspat $n \geq 1$ pozitif doğal sayısı için,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)(1-x^{2n-1}) = 1$$

eşitliğinde x yerine $-x$ yazılırsa

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+(-x)^n)\left(1+x^{2n-1}\right) = 1$$

olur. Ayrıca

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^{2n-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n Z(n)x^n \quad \text{ve} \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1+(-x)^n)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n Q(n)x^n$$

olduğundan

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n Q(n)x^n\sum_{n=0}^{\infty}Z(n)x^n$$

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j Q(j)Z(n-j)\right)x^n$$

dir. Her n doğal sayı için x^n'in katsayıları eşitlenirse sonuç elde edilir. □

Teorem 4.15. *n pozitif doğal sayısı için,*

$$Q(n)=\sum_{j=0}^{\left\|\frac{n}{2}\right\|}Q(j)Z(n-2j) \tag{4.14}$$

dir. Burada $\|.\|$ tam değer fonksiyonudur.

İspat n pozitif doğal sayısı için,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n Q(n)x^n &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+(-x)^n)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-x)^{2n}\right)\left(1-x^{2n-1}\right)\\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+x^{2n}\right)\left(1-x^{2n-1}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}Q(n)x^{2n}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n Z(n)x^n\end{aligned}$$

dir. Son olarak seri çarpımı yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n Q(n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\left\|\frac{n}{2}\right\|}(-1)^{n-2j}Q(j)Z(n-2j)\right)x^n$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.16. *n pozitif doğal sayısı için,*

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{\left\|\frac{j}{2}\right\|}(-1)^j Q(k)Z(j-2k)Z(n-j)=0$$

dır. Burada $\|.\|$ tam değer fonksiyonudur.

İspat (4.13) bağıntısında (4.14) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(\sum_{k=0}^{\|\frac{j}{2}\|}Q(k)Z(j-2k)\right)Z(n-j) &= 0\\
\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{\|\frac{j}{2}\|}(-1)^jQ(k)Z(j-2k)Z(n-j) &= 0\\
\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{\|\frac{j}{2}\|}(-1)^jQ(k)Z(j-2k)Z(n-j) &= 0
\end{aligned}$$

olur. □

Teorem 4.17. *n pozitif doğal sayısı için,*

$$\sum_{j=1}^{n}Z(j)Z(n-j)=p(\frac{n}{2})+2\sum_{j=0}^{n}p(\frac{n-j^2}{2})$$

dir.

İspat (2.10) eşitliğinde indisi 0'dan başlatıp a yerine 1 ve b yerine de 0 yazarsak

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2n+1}\right)\left(1+x^{2n+1}\right)\left(1-x^{2n+2}\right)\\
=&\left(\sum_{i=0}^{\infty}Z(i)x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}Z(j)x^j\right)\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-x^{2(n+1)}\right)=1+2\sum_{1}^{\infty}x^{m^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada seri çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}Z(j)Z(n-j)\right)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^{2n}+2\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^{2n}\sum_{m=1}^{\infty}x^{m^2}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^{2n}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i=0\\2i+j^2=n,j\in\mathbb{N}}}^{n}p(i)\right)x^n\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(p(\frac{n}{2})+2\left(\sum_{\substack{i=0\\2i+j^2=n,j\in\mathbb{N}}}^{n}p(i)\right)\right)x^n
\end{aligned}$$

dir. Her n doğal sayısı için x^n in katsayılarını eşitlersek istenen sonuç elde edilir. □

Teorem 4.18. *n pozitif doğal sayısı için,*

$$Z(n) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^l \left(l.p(l) + \sum_{t=1}^{l} \left(2(-1)^t p(n-t^2)\right) - Z(1) \right)$$

dir.

İspat (2.11) eşitliğinde indisi 0'dan başlatıp a yerine 1 ve b yerine de 0 yazarsak

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - x^{2n+1}\right) \left(1 - x^{2n+1}\right) \left(1 - x^{2n+2}\right) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m x^{m^2}$$

eşitliği elde edilir. Buradan indisler düzenlenirse

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - x^{2n-1}\right) (1-x) \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - x^{2n+1}\right) \left(1 - x^{2n}\right) \right) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m x^{m^2}$$

bulunur. Eşitliğinde $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n-1})$ yerine $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Z(n) x^n$ yazılırsa

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Z(n) x^n \right) (1-x) \left(\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) \right) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m x^{m^2}$$

elde edilir. Gerekli aritmetik işlemler yapılarak devam edilirse

$$\begin{aligned} & Z(0) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n Z(n) - (-1)^{n-1} Z(n-1)) \right) x^n \\ = \; & \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n \right) (1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m x^{m^2}) \end{aligned}$$

seriler çarpılıp indisler düzenlenirse

$$\begin{aligned} & Z(0) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n Z(n) - (-1)^{n-1} Z(n-1)\right) \right) x^n \\ = \; & \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{t=1}^{n} p(n-t^2)(-1)^t \right) x^n \end{aligned}$$

elde edilir ve bu ifadenin sağ tarafı biraz daha düzenlenirse

$$\begin{aligned} & Z(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n Z(n) - (-1)^{n-1} Z(n-1)\right) x^n \\ = \; & p(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{t=1}^{n} p(n) + 2(-1)^t p(n-t^2) \right) x^n \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $Z(0) = p(0) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} Z(n) + Z(n-1) &= (-1)^n \sum_{t=1}^{n} \left(p(n) + 2(-1)^t p(n-t^2)\right) \\ Z(n) + Z(n-1) &= (-1)^n \left(n.p(n) + \sum_{t=1}^{n} \left(2(-1)^t p(n-t^2)\right)\right). \end{aligned}$$

□

Teorem 4.19. *n pozitif tamsayısı için,*

$$n.Q(n) = o(n) + \sum_{l=1}^{n} 2(-1)^{l+1} Q(n-l^2)$$

burada

$$o(n) = \begin{cases} (-1)^m, & n = \frac{m}{2}(3m \pm 1) \text{ olacak şekilde } m \in \mathbb{Z}^+ \text{ varsa} \\ 0 \quad , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir.

İspat (2.11) eşitliğinde indisi 0'dan başlatıp a yerine 1 ve b yerine de 0 yazılırsa

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - x^{2n+1}\right)\left(1 - x^{2n+1}\right)\left(1 - x^{2n+2}\right) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m x^{m^2}$$

elde edilir. Her taraf $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} &\left(\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n-1}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)\right) (1 - x) \left(\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)\right) \\ = \; &\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n) \left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m x^{m^2}\right) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$(1 - x)\left(\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q(n) x^n\right)\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m x^{m^2}\right) \tag{4.15}$$

olur. Euler'in Beşgensel Sayı Teoremindeki (2.17) özdeşliğinden (4.15) eşitliğinin sol tarafı

$$\begin{aligned}
(1-x)\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\right) &= (1-x)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{m}{2}(3m-1)}\right) \\
&= (1-x)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{m}{2}(3m\pm 1)}\right) \\
&= (1-2x-x^3+\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{m}{2}(3m\pm 1)} \qquad (4.16) \\
&\quad -\sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l x^{\frac{l}{2}(3l\pm 1)+1})
\end{aligned}$$

dir. Seriyi daha kısa yazabilmek için serilerdeki x'in ortak kuvetleri belirlenmelidir. Bunun için aşağıdaki ifadeler gözlemlenebilir:

$$\frac{m}{2}(3m-1)=\frac{t}{2}(3t+1)$$

olacak şekilde $m, t \in \mathbb{Z}^+$ yoktur.

$$\frac{m}{2}(3m-1)=\frac{k}{2}(3k+1)+1$$

olacak şekilde $m, k \in \mathbb{Z}^+$ yoktur.

$$\frac{t}{2}(3t+1)=\frac{k}{2}(3k+1)+1$$

olacak şekilde $k, t \in \mathbb{Z}^+$ yoktur.

$$\frac{m}{2}(3m-1)+1=\frac{k}{2}(3k+1)+1$$

olacak şekilde $m, k \in \mathbb{Z}^+$ yoktur.

$$\frac{t}{2}(3t+1)=\frac{l}{2}(3l-1)+1$$

eşitliği pozitif tamsayılarda sadece $t=l=1$ için çözüme sahiptir.

Bu nedenle (4.16) eşitliğinde her bir seri için x kuvvetleri farklıdır. Diğer yandan (4.15) eşitliğinin sağ tarafında gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n\right)\left(1+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m x^{m^2}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m x^{m^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{n} Q(n-l^2)(-1)^l\right)x^n \\
&= Q(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{n} Q(n) + 2(-1)^l Q(n-l^2)\right)x^n \\
&= Q(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{n} \left[Q(n) + 2(-1)^l Q(n-l^2)\right]\right)x^n \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (4.16) ve (4.17) eşitlikleri kullanılarak, (4.15) eşitliğinde x^n katsayıları karşılaştırılabilir.

$$n = \frac{m}{2}(3m-1) \text{ veya } n = \frac{m}{2}(3m+1),$$

olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}^+$ varsa denklemde x^n katsayıları karşılaştırılarak

$$\sum_{l=1}^{n}\left[Q(n) + 2(-1)^l Q(n-l^2)\right] = (-1)^m$$

dir. Aksi takdirde

$$\sum_{l=1}^{n}\left[Q(n) + 2(-1)^l Q(n-l^2)\right] = 0$$

eşitliği elde edilir. □

Şimdi beşgensel ile yedigensel sayılar arasındaki bağıntı kullanılarak tamsayıların parçalanışı için yeni formüller verilecektir.

Teorem 4.20. *m pozitif doğal sayısı için,*

$$p(m) = \sum_{i=1}^{\|\sqrt{m}\|} p_i(m - i(i+1)) + (-1)^{i+1} p(m - \frac{5i^2 \pm 3i}{2}) \qquad (4.18)$$

dir. Burada $\|.\|$ tam değer fonksiyonudur.

İspat $\mid x \mid < 1$ olmak üzere (4.4)'den

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m x^{\frac{5m^2+3m}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-x^n}{(1-x^{5n-2})(1-x^{5n-3})}$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{5n-2})(1-x^{5n-3})} \\
&= 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...(1-x^m)} \\
&= 1+\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x^i)} \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

dır. (4.5) eşitliğinden

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{5k^2+3k}{2}} = \left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x^i)}\right)\left(\prod_{n=1}^{\infty}1-x^n\right)$$

ve

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n\right)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{5k^2\pm 3k}{2}}\right) = \left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x^i)}\right)$$

elde edilir. Son ifadede, sol taraf incelenirse

$$\begin{aligned}
1+\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x^i)} &= \sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{5k^2\pm 3k}{2}} \\
1+\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x^i)} &= \sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k p(n-\frac{5k^2\pm 3k}{2})\right)x^n \\
1+\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x^i)} &= p(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[p(n)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k p(n-\frac{5k^2\pm 3k}{2})\right]x^n
\end{aligned}$$

olur. (2.15) ve (2.16) eşitlikleri göz önünde bulundurularak eşitliğin sağ tarafı incelenirse

$$\begin{aligned}
1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x^i)}\right) &= 1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(x^{m(m+1)}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}p_m(i)x^i\right)\right) \\
&= 1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(x^{m(m+1)}+\sum_{i=1}^{\infty}p_m(i)x^{m(m+1)+i}\right) \\
&= 1+\sum_{m=1}^{\infty}x^{m(m+1)}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}p_m(i)x^{m(m+1)+i}
\end{aligned}$$

elde edilir. İndislerde düzenleme yapılırsa

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}p_m(i)x^{m(m+1)+i} = \sum_{m=3}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}p_i(m-i(i+1))x^m$$

olduğu bulunur ki buradan da

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x^i)}\right) = 1+x^2+\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}p_i(m-i(i+1))x^m$$

olur. Eşitliğin sağ ve sol taraflarının x^n katsayıları eşitlenirse

$$p(m) = \sum_{i=1}^{\|\sqrt{m}\|} p_i(m - i(i+1)) + (-1)^{i+1} p(m - \frac{5i^2 \pm 3i}{2}).$$

$\square$

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında beşgensel sayı tanımı incelenerek, herhangi bir k için k-gensel sayılar

$$w_k(n) = \sum_{t=0}^{n-1}(tk - (2t-1)) = \frac{((k-2)n - (k-4))n}{2} = \frac{n^2k - 2n^2 - kn + 4n}{2}$$

olarak tanımlanmıştır. Daha sonra da özel olarak beşgensel sayılar ile altıgensel ve yedigensel sayılar arasındaki bağıntılar bulunmuştur.

Beşgensel ve altıgensel sayılar arasındaki bağıntı

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{w_6(m)}\right) = \left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{4n-2})}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{w_5(m)}\right)$$

dır.

Beşgensel ve yedigensel sayılar arasındaki bağıntının

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{w_7(m)}\right) = \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x^i)}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{w_5(m)}\right)$$

olduğu görülmüştür. Daha sonra n tamsayısının parçalanışları çalışılıp yeni bağıntılar elde edilmiştir.

n tamsayısının parçalanışlarının sayısı $p(n)$ için birkaç yeni yineleme bağıntısı bulunmştur.

i) n tek tamsayısı için

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}p(n - (2k^2 \mp k))$$

dır.

ii) n pozitif doğal sayısı için,

$$p(n) = \sum_{i=0}^{\|\frac{n}{2}\|} p(i)\left[p(\frac{n}{2} - i) + \sum_{t=1}^{\|\sqrt{n}+1\|} p(\frac{n}{2} - i - \frac{1}{4}t\,(t+1))\right]$$

dir. Burada $\|.\|$ tam değer fonksiyonudur.

iii) m pozitif doğal sayısı için,

$$p(m) = \sum_{i=1}^{\|\sqrt{m}\|} p_i(m - i(i+1)) + (-1)^{i+1}p(m - \frac{5i^2 \pm 3i}{2})$$

dir. Burada $\|.\|$ tam değer fonksiyonudur.

Ayrıca n tamsayısının tek parçalanışlarına karşılık gelen parçalanış sayısı $Q(n)$'lar için,

$$n.Q(n) = o(n) + \sum_{l=1}^{n} 2(-1)^{l+1}Q(n-l^2)$$

yineleme bağıntısı verilmiştir, burada

$$o(n) = \begin{cases} (-1)^m, & n = \frac{m}{2}(3m \pm 1) \text{ olacak şekilde } m \in \mathbb{Z}^+ \text{ varsa} \\ 0 \quad , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dır.

n tamsayısının parçalanışlarının sayısı $p(n)$, tek ve düzensiz parçalanışlarının sayısı $Z(n)$ ve tek parçalanışlarına karşılık gelen parçalanış sayısı $Q(n)$'lar arasındaki ilişki incelenmiş, bunlarla ilgili birkaç bağıntı elde edilmiştir.

1) $p(n)$ ve $Q(n)$'lar arasındaki ilişkilerden bazıları aşağıdaki gibidir: n pozitif doğal sayısı için,

i)

$$p(n) = \left(\sum_{i=0}^{\|\frac{n}{2}\|} p(i)Q(n-2i) \right)$$

dir. Burada $\|.\|$ tam değer fonksiyonudur.

ii)

$$Q(\frac{n}{2}) = p(n) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \left[p(n-(2k^2 \mp k))\right]$$

dir.

iii) $n > 1$ pozitif doğal sayısı için,

- $$Q(2n) = p(n) + \sum_{\substack{t=1 \\ t,(t-3)\in 4\mathbb{Z}}}^{2n-1} p(n - \frac{1}{4}t\,(t+1)),$$

- $$Q(2n-1) = \sum_{\substack{t=1 \\ (t-1),(t-2)\in 4\mathbb{Z}}}^{2n-2} p(\frac{1}{2}(2n-1) - \frac{1}{4}t\,(t+1))$$

dir.

iv)

$$\sum_{k=0}^{n} p(n-\frac{k^2+k}{2}) = \sum_{j=0}^{n} Q(j)Q(n-j)$$

dir.

$2)$ $Z(n)$ ve $Q(n)$'lar arasındaki ilişkilerden bazıları aşağıdaki gibidir:

i) $n \geq 1$ pozitif doğal sayısı için,

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j Q(j) Z(n-j) = 0$$

dir.

ii) n pozitif doğal sayısı için,

$$Q(n) = \sum_{j=0}^{\|\frac{n}{2}\|} Q(j) Z(n-2j)$$

dir. Burada $\|.\|$ tam değer fonksiyonudur.

$3)$ $Z(n)$ ve $p(n)$'ler arasındaki ilişkilerden bazıları n pozitif doğal sayısı için,

i)

$$\sum_{j=1}^{n} Z(j)Z(n-j) = p(\frac{n}{2}) + 2\sum_{j=0}^{n} p(\frac{n-j^2}{2})$$

dir.

ii)

$$Z(n) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^l \left(l.p(l) + \sum_{t=1}^{l} \left(2(-1)^t p(n-t^2)\right) - Z(1)\right)$$

dir.

Yineleme formülündeki en önemli temel problemlerden biri, $p(m)$ 'nin artışının, m tamsayısının artışından daha hızlı olduğu için, her bir adımda kurulan basamakların büyüklüğü ve sayıların büyüklüğüdür. Bu nedenle parçalanışın değerlerini küçük tamsayıların yardımıyla hesaplayan formüller çok yararlı ve etkilidir. Örneğin Euler'in formülü ile $p(200) = 3.972.999.029.388$, değerini hesaplamak için $p(199), p(198), p(195)$, $p(193), p(188), p(185), p(178)$,... değerlerine ihtiaç vardır. Bu nedenle akla gelen ilk soru $p(.)$ değerlerini daha küçük tamsayılar yardımıyla yazabilmektir. Euler'in özyineleme formülünden sonra, son yıllarda Ewell (Ewell 2004) ve Merca (Merca 2016) da yeni yineleme formülleri bulmuşlardır.

Şimdi, Euler ve Ewell'in özyineleme formülleri ile yeni bulunan özyineleme formülleri karşılaştırılırılması için $n = 16, 21$ değerlerine bakılabilir. Bu tamsayıların parçalanışları hesaplandığında aşağıdaki veriler elde edilir.

i) Euler'in özyineleme formülünü kullanarak, $0 \leq i \leq n$ için $p(n - \frac{3i^2 \mp i}{2})$ parçalanışının tüm değerlerini hesaplamak için $\left\| \sqrt{\frac{8n}{3}} \right\|$'den daha az değerler gerekir. $p(16)$ ve $p(21)$ değerleri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} p(16) &= p(15) + p(14) - p(11) - p(9) + p(4) + p(1) \\ &= 176 + 135 - 56 - 30 + 5 + 1 = 231 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} p(21) &= p(20) + p(19) - p(16) - p(14) + p(9) + p(6) \\ &= 627 + 490 - 231 - 135 + 30 + 11 = 792 \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde Euler'in formülünde $p(21)$'i hesaplamak için $ER = \{p(n) : 0 \leq n \leq 20\}$ kümesini belirlemek gerekir.

ii) Ewell'in özyineleme formülünü kullanarak $0 \leq m < n$ için $p(m)$ değerleri hesaplanırsa $\left\| 2\sqrt{n/2} \right\| = \left\| \sqrt{2n} \right\|$'den daha az değerlere ihtiyaç duyulacaktır. $p(16)$ ve $p(21)$ değerleri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} p(16) &= 2(p(14) - p(8)) + p(4) \\ &= 2(135 - 22) + 5 = 231 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} p(21) &= 2(p(19) - p(13) + p(3)) + p(5) + p(0) \\ &= 2(490 - 101 + 3) + 7 + 1 = 792 \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $p(21)$'i hesaplamak için Ewel'in requrans formülünde

$$EWR = \{p(19), p(17), p(15), p(13), p(11), p(9), p(7), p(5), p(4), p(3), p(2), p(1), p(0)\}$$

kümesini belirlemek gerekir.

iii) (4.7)'daki tek sayı tamsayısının parçalanmasını hesaplamak için gereken adım sayısı, Euler'in yinelemesinden daha azdır ve her adımda gereken sayıların değeri daha küçüktür. (4.7)'deki yineleme formülü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} p(21) &= p(20)+p(18)-p(15)-p(11)+p(0)+p(6) \\ &= 627+385-176-56+1+11=792. \end{aligned}$$

O halde $p(21)$'i hesaplamak için $NOR = \{p(n) : 0 \leq n \leq 20\}$ kümesini belirlemek gerekir. Euler'e göre daha küçük $p(n)$'ler ile hesaplandığından (4.7) formülünün daha verimli olduğu söylenebilir.

iv) (4.12)'de yineleme formülünü kullanarak, tüm $0 \leq i \leq \left\|\frac{n}{2}\right\|$ için $p(\frac{n}{2}-i)$ bölümlerinin değerleri bulunmalıdır. Bu yüzden $\left\|\frac{n}{2}\right\|$'ye kadar değerler bulunmalıdır.

$$\begin{aligned} p(16) &= p(0)\left[p(8)+p(5)+p(3)\right]+p(1)\left[p(7)+p(4)+p(2)\right]+ \\ &\quad p(2)\left[p(6)+p(3)+p(1)\right]+p(3)\left[p(5)+p(2)+p(0)\right]+ \\ &\quad p(4)\left[p(4)+p(1)\right]+p(5)\left[p(3)+p(0)\right]+p(6)p(2)+ \\ &\quad p(7)p(1)+p(8)p(0) \\ &= 1\left[22+7+3\right]+1\left[15+5+2\right]+2\left[11+3+1\right]+3\left[7+2+1\right] \\ &\quad +5\left[3+1\right]+7\left[3+1\right]+11.2+15.1+22.1 \\ &= 231 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} p(21) &= p(0)\left[p(10)+p(9)+p(3)+p(0)\right]+p(1)\left[p(9)+p(8)+p(2)\right]+ \\ &\quad p(2)\left[p(8)+p(7)+p(1)\right]+p(3)\left[p(7)+p(6)+p(0)\right]+ \\ &\quad p(4)\left[p(6)+p(5)\right]+p(5)\left[p(5)+p(4)\right]+p(6)\left[p(4)+p(3)\right]+ \\ &\quad p(7)\left[p(3)+p(2)\right]+p(8)\left[p(2)+p(1)\right]+p(9)\left[p(1)+p(0)\right]+p(10)p(0) \\ &= 1\left[42+30+3+1\right]+1\left[30+22+2\right]+2\left[22+15+1\right]+3\left[15+11+1\right] \\ &\quad +5\left[11+7\right]+7\left[7+5\right]+11\left[5+3\right]+15\left[3+2\right]+22.\left[2+1\right]+30.\left[1+1\right] \\ &\quad +42.1 \\ &= 792 \end{aligned}$$

dir.

(4.12) formülünde $p(21)$'i hesaplamak için $NR = \{p(n) : 0 \leq n \leq 10\}$ kümesini belirlemek gerekir. (4.12) formülünde $p(21)$ için bulunan en büyük değer $p(10) = 42$, Euler'in yinelemesinde $p(20) = 627$ ve Ewell yinelemesinde $p(19) = 490$ olduğu görülür. Bu nedenle (4.12) bağıntısı hem Euler'in hem de Ewell'in yinelemesinden daha kullanışlıdır.

v) (4.18)'deki yineleme formülü ile, $0 \leq i \leq n$ olmak üzere i'yi aşmayan tüm k parçaları için $p(n - \frac{5i^2 \pm 3i}{2})$ parçalanışlarının ve parçalanışların sayılarının her ikisi de hesaplanmalıdır. Böylece, hem $\left\| \sqrt{\frac{8n}{5}} \right\|$ değerini hem de parçalanışın $0 \leq i \leq n$ için i'yi geçmeyen k parçalanışlarının sayısı hesaplanabilir. Bu nedenle, $p(n)$ 'nin (4.18) ile hesaplanması, Euler'in yinelemesi ile hesaplanırken ihtiyaç duyulan parça değerinden daha azını gerektirir ve k tamsayısı için $p_m(k)$, $p(k)$ değerlerinden çok daha küçük olduğundan, (4.18) yineleme formülü daha etkilidir.

(4.18) yineleme formülü ile $p(15)$ ve $p(20)$ değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} p(15) &= p(14) + p(11) - p(8) + p_2(9) + p_3(3) - p(2) + p_1(13) \\ &= 135 + 56 - 22 + 5 + 3 - 2 + 1 = 176. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(20) &= p(19) + p(16) - p(13) - p(7) + p_3(8) + p_2(14) + p(2) + p_1(18) + p_4(0) \\ &= 490 + 231 - 101 - 15 + 10 + 8 + 2 + 1 + 1 = 627. \end{aligned}$$

Yineleme formüllerini karşılaştırırken, elde edilmesi gereken kümelerin eleman sayılarını da karşılaştırmak yararlı olabilir. Özel olarak, $p(21)$'i hesaplamak için ihtiyaç duyulan kümeler arasındaki ilişkiye ve kapsama bağıntılarına bakılabilir. $p(21)$ için oluşturulan, NR kümesinde 10 , ER kümesinde 20 $(NR \subset ER)$ ve EWR kümesinde 13 eleman var olduğundan NR kümesini belirlemek hem daha kolay, hem de değerleri daha küçüktür. O halde (4.12) formülü ile $p(21)$'i hesaplamak daha hızlı olacaktır.

6. KAYNAKLAR

Andrews, G. E. 1976. The Theory of Partitions. Addison-Wesley Publishing, New York.

Andrews, G. E. Nov. 1983.Euler's Pentagonal Number Theorem. Mathematics Magazine, 56 (5): 279-284.

Andrews, G. E. 1998.The Theory of Partitions. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Andrews, L. C. 1998. Special Functions of Mathematics for Engineers. 2nd ed. SPIE Press and Oxford University Press, 479.

Andrews, G. E. K. Erikson, 2004. Integer Partitions. Cambridge University Press, Cambridge.

Andrews, G. E. Hirschhorn, M. D. and Sellers, J. A. 2010. Arithmetic properties of partitions with even parts distinct, *Ramanujan Journal* , 23 (1–3): 169–181.

Apostol, 1951. On the lerch zeta function. Pacific J. Math. 1 (2): 161–167.

Apostol, T. M. 1976. Introduction to analytic number theory. Springer-Verlag, pp.304-321.

Bell,J. 2008. Euler and the Pentogonal Number Theorem. 2000 Mathematics Subject Classification.

Bernedt, B. C. Lecture Notes on the Theory of Partitions. pp.1-21.

Chen, S. C. 2011. On the number of partitions with distinct even parts. *Discrete math*. 311 (12): 940-943.

Donatz, M., Marsaglia, N. 2011. Generalizing Euler's Pentagonal Number Theorem To Multipartitions. REU Program in Mathematics at Oregon State University.

Euler, L. 1751b. Observationes analyticae variae de combinationibus. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 13: 64–93. E158.

Euler, L. 1988. Introduction To Analysis Of The Infinite. Springer-Verlag (translation by J.D. Blanton).

Ewell, J.A. 1980. Recurrences for two restricted partition functions. *Fibonacci Quarterly*. 18 (1): 1-2.

Ewell, J. A. 2004. Recurrences for the partition function and its relatives. *Rocky Mountaın Journal Of Mathematıcs*, 34 (2), Springer.

Fellmann, E. A. and Mikhajlov, G. K.,(editors) 1998. Leonhardi Euleri opera omnia. Series quarta A: Commercium epistolicum. Volumen secundum: Commercium cum Johanne (I) Bernoulli et Nicolao (I) Bernoulli. Birkäuser, Basel.

Hardy, G.H. and Wright, E.M. 1960. An Introduction to the Theory of Numbers. 4th ed., Clarendon Press, Oxford.

Juskevic, A. P. and Winter, E.,(editors) 1965. Leonhard Euler und Christian Goldbach: Briefwechsel 1729–1764. Akademie-Verlag, Berlin. Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrgang. 1.

Juskevic, A. P. Smirnov, V. I., and Habicht, W.,(editors) 1975. Leonhardi Euleri Opera Omnia. Series quarta A: Commercium epistolicum. Volumen primum: Descriptio commercii epistolici. Birkhäuser, Basel.

Juskevic, A. P. and Taton, R., (editors) 1980. Leonhardi Euleri Opera Omnia. Series quarta A: Commercium epistolicum. Volumen quintum: Correspondance de Leonhard Euler avec A. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange. Birkhäuser, Basel.

Koch, D. 2016. The Pentagonal Number Theorem and All That.

Koshy, T. 2001, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Wiley-Interscience Publication. Canada, 6-38.

MacMahon, P.A. 1921. Note On The Parity Of The Number Which Enumerates The Partitions Of A Number. Proc. Cambridge Philos. Soc. 20, 281-283.

Merca, M. 2016. Fast computation of the partition function. *Journal of Number Theory*, 164, 405-416.

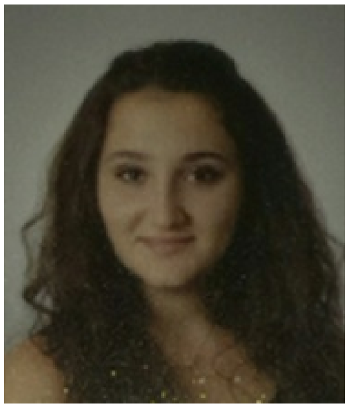
Merca, M. 2016. A note on the partitions involving parts of k different magnitudes. *Journal of Number Theory*, 162, 23-34.

Merca, M. 2017. New relations for the number of partitions with distinct even parts. *Journal of Number Theory*, 176, 1-12.

Merca, M. 2017. On the number of partitions into parts of k different. *Discrete Mathematics* 340, 644-648.

Watson, G.N. 1937. Two Tables Of Partitions. Proc. London Math. Soc. 42, 550-556.

ÖZGEÇMİŞ



Büşra AL

bushral_07@outlook.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2015-2018	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2011-2015	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya