T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FUBİNİ TİPLİ SAYILAR VE BUNLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Neslihan KILAR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EKİM 2017

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FUBİNİ TİPLİ SAYILAR VE BUNLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Neslihan KILAR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EKİM 2017

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FUBİNİ TİPLİ SAYILAR VE BUNLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Neslihan KILAR

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez T.C. Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimi tarafından FYL-2017-2377 nolu proje ile desteklenmiştir.

EKİM 2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUBİNİ TİPLİ SAYILAR VE BUNLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Neslihan KILAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 27/10/2017 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

ÖZET

FUBİNİ TİPLİ SAYILAR VE BUNLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Neslihan KILAR

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Ekim 2017, 39 sayfa

Bu tezde, Fubini tipli sayılar ve bunların üreteç fonksiyonları çalışılmıştır. Fubini tipli sayıların ve polinomların tanımları, fonksiyonel denklemleri ve bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca, bazı özel sayıların ve polinomların üreteç fonksiyonları ve uygulamaları verilmiştir. Diğer yandan Fubini tipli sayılar ve polinomlar ile çok iyi bilinen bazı özel sayılar örneğin, Bernoulli sayıları ve polinomları, Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomları, Apostol-Euler sayıları ve polinomları, Frobenius-Euler sayıları ve polinomları, Apostol-Genocchi sayıları ve polinomları, 2. tür Stirling sayıları ve 2. tür λ-Stirling sayılarının arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Üreteç fonksiyonları yardımıyla, Fubini tipli sayılar ve polinomlar ile bu özel sayıları ve polinomları içeren özdeşlikler ve bağıntılar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Apostol-Bernoulli sayıları, Apostol-Euler sayıları, Apostol-Genocchi sayıları, Bernoulli sayıları, Fubini sayıları, Frobenius-Euler sayıları, İkinci tür Stirling sayıları, İkinci tür λ-Stirling sayıları.

2010 MSC: 05A15, 11B37, 11B68, 11B73, 11B83, 12E10.

JÜRİ: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

ABSTRACT

FUBINI TYPE NUMBERS AND THEIR GENERATING FUNCTIONS

Neslihan KILAR

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

October 2017, 39 pages

In this thesis, Fubini typed numbers and their generating functions are studied. The definitions of Fubini type numbers and polynomials, functional equations and some properties are given. In addition, generating functions and their applications of some special numbers and polynomials are given. On the other hand realtion betwen the of Fubini type numbers and polynomials and other special numbers and polynomilas including the Bernoulli numbers and polynomials, the Apostol-Bernoulli numbers and polynomials, the Apostol-Euler numbers and polynomials, the Frobenius-Euler numbers and polynomials, the Apostol-Genocchi numbers and polynomials, the Stirling numbers of second kind and the λ-Stirling numbers of second kind are investeged. Finally, by help of generating functions of these special numbers and polynomials, many identities relations are obtained.

KEYWORDS: Apostol-Bernoulli numbers, Apostol-Euler numbers, Apostol-Genocchi numbers, Bernoulli numbers, Fubini numbers, Frobenius-Euler numbers, Stirling numbers of the second kind, λ-Stirling numbers of the second kind.

2010 MSC: 05A15, 11B37, 11B68, 11B73, 11B83, 12E10.

COMMITTEE: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Supervisor)
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

ÖNSÖZ

Bu tezde Fubini tipli sayılar ve polinomlar ve bunların üreteç fonksiyonları çalışılmıştır. Ayrıca, bu fonksiyonların fonksiyonel denklemleri ve kısmi türev denklemleri teknikleri ile tanımlananan bu yeni sayı ve polinom ailesinin bazı temel özellikleri incelenmiştir. Bunların yanı sıra bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları incelenmiş, bu sayılarla ilgili formüller, bağıntılar ve diğer özellikler verilmiştir.

Üreteç fonksiyonları, özellikle de son yıllarda matematik, matematiksel fizik, olasılık ve istatistik gibi alanlarda birçok uygulama alanlanına sahiptir ve bu konuda birbirinden değerli eserler verilmiştir. Bu tezde, Fubini tipli sayı ve polinom aileleri, üreteç fonksiyonları, bazı özel sayı ve polinom ailelerini kapsayan temel tanımlar, teoremler ve özellikler verilmiştir. Ayrıca, bu özel sayı ve polinom aileleriyle diğer iyi bilinen sayı ve polinom ailerilerinin ilişkileri verilmiştir. Bu tezdeki sonuçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

Bu tez, Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma olmak üzere dört ana bölümden oluşur.

Giriş bölümünde, Fubini sayılarının kısa bir tarihçesi verilmiştir.

Kaynak Taraması bölümde, kuramsal bilgiler literatür araştırması ile birlikte verilmiştir. Ayrıca, bu tezde kullanılan temel kavramlar ve özellikleri verilmiştir.

Materyal ve Metot bölümde, Fubini tipli sayı ve polinom ailesinin üreteç fonksiyonları, rekürans bağıntıları ve bazı temel özellikleri verilmiştir. Bu sayıların ilişkili olduğu diğer bazı özel sayı ve polinom aileleri arasındaki bağıntılar incelenmiştir. Ayrıca, kombinatorik analizde ve olasılık teorisinde birçok uygulaması olan Stirling sayıları ile ilişkileri de verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde, yüksek mertebeden Fubini tipli sayılar ve polinomlar, Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomları, Apostol-Euler sayıları ve polinomları, Frobenius-Euler sayıları ve polinomları, Apostol-Genocchi polinomları, ikinci tür Stirling sayıları, ikinci tür λ-Stirling sayılarının bazı özellikleri ve üreteç fonksiyonları kullanılarak özdeşlikler bulunmuştur.

Tezin diğer bölümleri Sonuç, Kaynaklar ve Özgeçmiş ile bitmektedir.

Bu tez çalışması boyunca bilgisini ve desteğini esirgemeyen sayın danışmanım Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e teşekkür ederim ve saygılarımı sunarım. Ayrıca eğitim hayatım boyunca her zaman yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZGEÇMİŞ

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “FUBİNİ TİPLİ SAYILAR VE BUNLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

27 / 10 / 2017

Neslihan KILAR

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$	
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$	
$\mathbb{C}$	Karmaşık Sayılar
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar
$\beta_n(x, \lambda)$	Apostol-Bernoulli polinomları
$\beta_n(\lambda)$	Apostol-Bernoulli sayıları
$\mathbf{B}_n(x)$	Bernoulli polinomları
$\mathbf{B}_n$	Bernoulli sayıları
$E_n(x)$	Euler polinomları
E_n	Euler sayıları
$A(u)$	Eulerian polinomları
$A(n, k)$	Eulerian sayıları
$w_g(n)$	Fubini sayıları
$w_M(n)$	Fubini tipli sayılar
$H_n(u)$	Frobenius-Euler sayıları
$f_{n,k}$	Genelleştirilmiş Fubini sayıları
$S_2(n, v; a, b; \lambda)$	İkinci tür Genelleştirilmiş λ-Stirling tipli sayıları
$S_2(n, k; \lambda)$	İkinci tür λ-Stirling sayıları
$S_2(n, k)$	İkinci tür Stirling sayıları
$S_1(n, k)$	Birinci tür Stirling sayıları

$\delta_{n,k}$	Kronecker delta fonksiyonu
$\beta_n^{(k)}(x,\lambda)$	k. mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları
$\beta_n^{(k)}(\lambda)$	k. mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları
$\mathcal{E}_n^{(k)}(\lambda)$	k. mertebeden Apostol-Euler sayıları
$\mathcal{G}_n^{(k)}(x,\lambda)$	k. mertebeden Apostol-Genocchi polinomları
$\mathcal{G}_n^{(k)}(\lambda)$	k. mertebeden Apostol-Genocchi sayıları
$a_n^{(k)}(x)$	k. mertebeden Fubini tipli polinomlar
$a_n^{(k)}$	k. mertebeden Fubini tipli sayılar

1. GİRİŞ

Fubini sayıları, diğer bir adıyla sıralı Bell sayıları, sayılar teorisi ve diğer alanlarda kullanılmaktadır. Sıralı Bell sayıları ilk olarak 1859 yılında Arthur Cayley'in "On the analytical forms called trees, second part" adlı çalışmasında görülmüştür ve daha sonra Louis Comtet tarafından Fubini sayıları olarak adlandırılmıştır.

Bu tezde Fubini tipli sayı ve polinom aileleri ve bu ailelerin bazı özellikleri incelenmiştir. Bu çalışma sırasında incelenen kaynaklarda Fubini sayıları için farklı notasyonlar kullanıldığı görülmüştür ve bu notasyonlar $w(n)$, $a(n)$, ϕm v.s. şeklindedir. Bu çalışmada ise Fubini tipli sayılar için a_n notasyonu, yüksek mertebeden (k. mertebeden) Fubini tipli sayılar için $a_n^{(k)}$ notasyonu ve yüksek mertebeden (k. mertebeden) Fubini tipli polinomlar için $a_n^{(k)}(x)$ notasyonu kullanılmıştır.

Fubini tipli sayı ve polinom aileleri için üreteç fonksiyonları ve bunların bazı özellikleri verilmiştir. Bu sayı ve polinom ailelerinin bazı temel özellikleri incelenmiştir. Bu sayı ve polinom aileleri ile diğer iyi bilinen özel sayı ve polinom aileleri ile ilişkileri incelenmiştir. Örneğin, bu sayılar ve polinomlar yüksek mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomları, yüksek mertebeden Apostol-Euler sayıları ve polinomları, yüksek mertebeden Frobenius-Euler sayıları ve polinomları, yüksek mertebeden Apostol-Genocchi sayıları ve polinomları, Stirling sayıları, ikinci tür λ-Stirling sayıları ile ilişkileri incelenmiştir. Bu sayı ve polinom ailelerini içeren bazı kaynaklar kısaca şu şekilde verilebilir: (Cayley 1859), (Apostol 1951), (Erdelyi 1953), (Riordan 1958), (Rainville 1960), (Comtet 1974), (Good 1975), (Mureşan 2009), (Belbachir, Rahmani ve Sury 2011), (Mansour ve Schork 2016), (Srivastava ve Choi 2012) dir. Ayrıca, bu tezde Comtet'in (1974) kitabında [p. 228, Exercise. 20] yer alan alıştırma üreteç fonksiyonu yardımıyla çözülmüştür.

Bulgular kısmında verilen sonuçlar matematik, olasılık ve istatistik teorisinin birçok alanında kullanılma potansiyeli vardır.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde tezde kullanacağımız temel tanımlar, bağıntılar ve formüller verilecektir.

Tanım 2.1 *Herhangi bir $f_n(x)$ polinomunun üreteç fonksiyonu $F(x,t)$,*

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

kuvvet serisi ile tanımlanır. Burada $F(x,t)$, $f_n(x)$ polinomunu üretir denir (Rainville 1960).

Tanım 2.2

$$A(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{t^n}{n!}$$

ve

$$B(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\frac{t^n}{n!}$$

serileri verilsin. İki serinin Cauchy çarpımı aşağıdaki şekilde verilir:

$$A(t)B(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\frac{1}{k!(n-k)!}\right)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\frac{1}{k!(n-k)!}\right)t^n$$

(Andrews 1998).

Tanım 2.3 *$t\in\mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir x reel sayısı için $B_n(x)$ ile gösterilen Bernoulli polinomları,*

$$F_B(x,t)=\frac{t}{e^t-1}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!},\ \ |t|<2\pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Erdelyi 1953; Carlitz 1968; Conway 1986).

Tanım 2.4 *$t\in\mathbb{C}$ olsun. B_n ile gösterilen Bernoulli sayıları,*

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!},\ \ |t|<2\pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Erdelyi 1953; Carlitz 1968; Conway 1986).

Tanım 2.5 *B_n sayıları $B_0=1$ olmak üzere, $n>1$ için;*

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

dır (Erdelyi 1953; Carlitz 1968; Conway 1986).

Bernoulli sayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, \\ B_1 &= -\frac{1}{2}, \\ B_2 &= \frac{1}{6}, \\ B_4 &= -\frac{1}{30}, \\ B_6 &= \frac{1}{42}, \\ B_8 &= -\frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Not 1 *$n \geq 1$ olmak üzere $B_{2n+1} = 0$'dır (Erdelyi 1953; Carlitz 1968; Conway 1986).*

Not 2 *Bazı kaynaklarda $B_1 = \frac{1}{2}$ olarak alınmaktadır (Arakawa vd. 2014).*

Teorem 2.6 *Bernoulli sayıları ve polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

(Erdelyi 1953; Carlitz 1968; Conway 1986).

Bu teoremin ispatını kısaca verelim. Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır (Erdelyi 1953; Carlitz 1968; Conway 1986).

Bu teorem kullanılarak, Bernoulli polinomları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1, \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.
\end{aligned}$$

Not 3 *$x = 0$ ise $B_n(0) = B_n$ veya $x = 1$ ise $B_n(1) = B_n$'dir (Erdelyi 1953; Carlitz 1968; Conway 1986).*

Tanım 2.7 *$\beta_n(x, \lambda)$ ile gösterilen Apostol-Bernoulli polinomları,*

$$F_\beta(x, t) = \frac{t}{\lambda e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(x, \lambda) \frac{t^n}{n!}, \ \ |t + \log \lambda| < 2\pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Apostol 1951).

Tanım 2.8 *$\beta_n(\lambda)$ ile gösterilen Apostol-Bernoulli sayıları,*

$$\frac{t}{\lambda e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(\lambda) \frac{t^n}{n!}, \ \ |t + \log \lambda| < 2\pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Apostol 1951).

Teorem 2.9 *Apostol-Bernoulli polinomları aşağıdaki özdeşlik ile verilir:*

$$\beta_n(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k(\lambda) x^{n-k}, \ n \geq 0 \tag{2.1}$$

(Apostol 1951).

Bu teoremin ispatını kısaca verelim. Apostol-Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(x, \lambda) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{\lambda e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(\lambda) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_k(\lambda)\,x^{n-k}\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır (Apostol 1951).

Ayrıca, Tanım 2.7'da verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak $n \geq 1$ için;

$$\lambda\beta_n(x+1,\lambda) - \beta_n(x,\lambda) = nx^{n-1}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda $x = 0$ ve $n = 1$ yazılırsa,

$$\beta_1(1,\lambda) = 1 + \beta_1(\lambda) \tag{2.2}$$

olarak bulunur. Eğer $n \geq 2$ ise,

$$\beta_n(1,\lambda) = \beta_n(\lambda) \tag{2.3}$$

dır (Apostol 1951).

Eğer verilen (2.1) bağıntısında $x = 1$ yazılırsa,

$$\beta_n(1,\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_k(\lambda) \tag{2.4}$$

olarak bulunur. Böylece (2.2) ve (2.3) bağıntıları da kullanılarak Apostol-Bernoulli sayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
\beta_0(\lambda) &= 0,\\
\beta_1(\lambda) &= \frac{1}{(\lambda-1)},\\
\beta_2(\lambda) &= -\frac{2\lambda}{(\lambda-1)^2},\\
\beta_3(\lambda) &= \frac{3\lambda(\lambda+1)}{(\lambda-1)^3},\\
\beta_4(\lambda) &= -\frac{4\lambda\left(\lambda^2+4\lambda+1\right)}{(\lambda-1)^4},\\
\beta_5(\lambda) &= \frac{5\lambda\left(\lambda^3+11\lambda^2+11\lambda+1\right)}{(\lambda-1)^5}.
\end{aligned}$$

Teorem (2.9) kullanılarak Apostol-Bernoulli polinomları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}\beta_0(x,\lambda) &= 0,\\ \beta_1(x,\lambda) &= \frac{1}{(\lambda-1)},\\ \beta_2(x,\lambda) &= \frac{1}{\lambda-1}x-\frac{2\lambda}{(\lambda-1)^2},\\ \beta_3(x,\lambda) &= \frac{3}{\lambda-1}x^2-\frac{6\lambda}{(\lambda-1)^2}x+\frac{3\lambda(\lambda+1)}{(\lambda-1)^3}.\end{aligned}$$

Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomları aşağıdaki bazı özellikleri sağlarlar:

1.
$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\beta_n(x,\lambda)=\frac{n!}{(n-m)!}\beta_{n-m}(x,\lambda),\ \ 0\le m\le n$$

2.
$$\beta_n(x+y,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_k(x,\lambda)\,y^{n-k}$$

3.
$$\int_a^b\beta_n(x,\lambda)\,dt=\frac{\beta_{n+1}(b,\lambda)-\beta_n(a,\lambda)}{n+1},\ \ n\ge 0$$

4.
$$\sum_{k=0}^{m-1}k^n=\frac{\lambda-1}{n+1}\sum_{k=1}^{m}\beta_{n+1}(k,\lambda)+\frac{\beta_{n+1}(m,\lambda)-\beta_{n+1}(\lambda)}{n+1}$$

dir (Apostol 1951; Srivastava ve Choi 2012).

Apostol-Bernoulli sayıları ile 2. tür Stirling sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 2.10

$$\beta_n(\lambda)=n\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\,k!\lambda^k(\lambda-1)^{-1-k}\,S_2(n-1,k)$$

dır (Apostol 1951).

Tanım 2.11 *Herhangi bir x reel sayısı için mertebesi k olan $\beta_n^{(k)}(x,\lambda)$ ile gösterilen Apostol-Bernoulli polinomları,*

$$F_\beta(x,t,k)=\left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^k e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n^{(k)}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} \tag{2.5}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Luo ve Srivastava 2005; Srivastava ve Choi 2012).

Not 4 *$\lambda = 1$ ise $B_n^{(k)}(x) = \beta_n^{(k)}(x,1)$ ve $x = 0$ ise $\beta_n^{(k)}(\lambda) = \beta_n^{(k)}(0,\lambda)$' dır. Burada $B_n^{(k)}(x)$ k. mertebeden Bernoulli polinomlarını ve $\beta_n^{(k)}(\lambda)$ k. mertebeden Apostol-Bernoulli sayılarını verir (Luo ve Srivastava 2005; Srivastava ve Choi 2012).*

Önteorem 2.12 *Yüksek mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları aşağıdaki özdeşlik ile verilir:*

$$\beta_n^{(k)}(x,\lambda) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \beta_{n-l}^{(k-1)}(\lambda)\, \beta_l(x,\lambda), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

dır (Luo ve Srivastava 2005).

Tanım 2.13 *$t \in \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir x reel sayısı için $E_n(x)$ ile gösterilen Euler polinomları,*

$$F_E(x,t) = \frac{2}{e^t+1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1970; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.14 *$t \in \mathbb{C}$ olsun. E_n ile gösterilen Euler sayıları,*

$$\frac{2}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1970; Srivastava ve Choi 2012).

Bu üreteç fonksiyonu kullanılarak;

$E_0 = 1$ ve $n \geq 1$ için,

$$E_n = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k \tag{2.6}$$

dır (Erdelyi 1953; Srivastava ve Choi 2012).

(2.6) bağıntısından yararlanarak Euler sayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} E_0 &= 1, \\ E_1 &= -\frac{1}{2}, \\ E_3 &= \frac{1}{4}, \\ E_5 &= -\frac{1}{2}, \\ E_7 &= \frac{17}{8}, \\ E_9 &= -\frac{31}{2}. \end{aligned}$$

Not 5 *$n \geq 1$ olmak üzere $E_{2n} = 0$'dır (Erdelyi 1953; Srivastava ve Choi 2012).*

Teorem 2.15 *Euler sayıları ve polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:*

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k x^{n-k}$$

(Erdelyi 1953; Srivastava ve Choi 2012).

Bu teoremin ispatını kısaca verelim. Euler polinomlarının üreteç fonksiyonu kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t+1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Buradan yukarıdaki eşitlikte Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k x^{n-k} \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır (Erdelyi 1953; Srivastava ve Choi 2012).

Bu teorem kullanılarak, Euler polinomları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 1, \\ E_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ E_2(x) &= x^2 - x, \\ E_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}, \\ E_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x, \\ E_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tanım 2.16 *$u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. Herhangi bir x reel sayısı için mertebesi k olan $H_n^{(k)}(x,u)$ ile gösterilen Frobenius-Euler polinomları,*

$$F_H(x,t;k,u) = \left(\frac{1-u}{e^t-u}\right)^k e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(k)}(x,u)\frac{t^n}{n!} \tag{2.7}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Kim ve Kim 2012; Srivastava ve Choi 2012; Kim vd. 2016; Srivastava vd. 2017).

Tanım 2.17 *$u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. Mertebesi k olan $H_n^{(k)}(u)$ ile gösterilen Frobenius-Euler sayıları,*

$$F_H(t;k,u) = \left(\frac{1-u}{e^t-u}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(k)}(u)\frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Kim ve Kim 2012; Srivastava ve Choi 2012; Srivastava vd. 2017).

Tanım 2.18 *Mertebesi k olan $\mathcal{E}_n^{(k)}(\lambda)$ ile gösterilen Apostol-Euler sayıları,*

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t+1}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(k)}(\lambda)\frac{t^n}{n!} \tag{2.8}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Luo 2006; Srivastava ve Choi 2012).

Not 6 *$\lambda = 1$ ise $\mathcal{E}_n^{(k)}(1) = E_n^{(k)}$ mertebesi k olan Euler sayılarını verir (Luo 2009).*

Tanım 2.19 *$A_n(u)$ ile gösterilen Eulerian polinomları, $A(n,k)$ ile gösterilen Eulerian sayıları olmak üzere;*

$$A_n(u) = \sum_{k=0}^{n} A(n,k)\,u^k,\ n \geq 0$$

dir. $A_n(u)$ Eulerian polinomları,

$$\frac{u-1}{u-e^{t(u-1)}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u)\frac{t^n}{n!} \tag{2.9}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Foata 2010).

Teorem 2.20 *$A(n,k)$ Eulerian sayıları,*

$$A(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n,\ \ (0 \leq k \leq n-1) \tag{2.10}$$

dır (Foata 2010).

Bu teorem yardımıyla Eulerian sayıları aşağıdaki gibi verilir:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1							
2	1	1						
3	1	4	1					
4	1	11	11	1				
5	1	26	66	26	1			
6	1	57	302	302	57	1		
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1

Teorem 2.21 *(Rekürans Formülü)* $A_0(u) = 1$ *ve* $n \geq 1$ *olsun. O halde*

$$A_n(u) = (1 + (n-1)u) A_{n-1}(u) + u(1-u) A_{n-1}^{'}(u)$$

dir (Foata 2010; Petersen 2015).

Bu teorem yardımıyla Eulerian polinomları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
A_0(u) &= 1, \\
A_1(u) &= 1, \\
A_2(u) &= u + 1, \\
A_3(u) &= u^2 + 4u + 1, \\
A_4(u) &= u^3 + 11u^2 + 11u + 1, \\
A_5(u) &= u^4 + 26u^3 + 66u^2 + 26u + 1.
\end{aligned}$$

Tanım 2.22 $\lambda \in \mathbb{C}$ *olmak üzere, mertebesi* k *olan* $\mathcal{G}_n^{(k)}(x,\lambda)$ *ile gösterilen Apostol-Genocchi polinomları,*

$$F_{\mathcal{G}}(x,t;k,\lambda) = \left(\frac{2t}{\lambda e^t + 1}\right)^k e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(k)}(x,\lambda) \frac{t^n}{n!} \tag{2.11}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.23 *$\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, mertebesi k olan $\mathcal{G}_n^{(k)}(\lambda)$ ile gösterilen Apostol-Genocchi sayıları,*

$$\left(\frac{2t}{\lambda e^t + 1}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(k)}(\lambda) \frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Teorem 2.24 *k. mertebeden Apostol-Genocchi sayıları ve polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:*

$$\mathcal{G}_n^{(k)}(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mathcal{G}_j^{(k)}(\lambda) x^{n-j}$$

ve

$$\mathcal{G}_n^{(k)}(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mathcal{G}_{n-j}^{(k-1)}(\lambda) \mathcal{G}_j(x, \lambda)$$

(Srivastava 2011).

Tanım 2.25 *n, k negatif olmayan tamsayılar ve $k < n$ olmak üzere, n elemanlı bir küme üzerinde tanımlı k tane ayrık devirin çarpımından oluşan permütasyonların sayısına "Birinci Tür Stirling Sayıları" denir ve $S_1(n, k)$ ile gösterilir. Birinci tür Stirling sayılarının üreteç fonksiyonu,*

$$\frac{(\log(1+t))^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_1(n, k) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 1$$

dir (Riordan 1958; Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

Bu sayıların bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

1. $k = 0, n = 0$ ise $S_1(0, 0) = 1$

2. $n > 0, k = 0$ ise $S_1(n, 0) = 0$

3. $k = n$ ise $S_1(n, n) = 1$

4. $k > n$ ise $S_1(n, k) = 0$

5. $n > 0, k = 1$ ise $S_1(n, 1) = (n-1)!$

6. $k = n - 1$ ise $S_1(n, n-1) = \binom{n}{2}$

7. $n > 0$ olmak üzere; $S_1(n, k) = (n-1) S_1(n-1, k) + S_1(n-1, k-1)$

dir (Riordan 1958; Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

Birinci tür Stirling sayıları aşağıdaki gibi verilir:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0	0	0
4	0	6	11	6	1	0	0	0
5	0	24	50	35	10	1	0	0
6	0	120	274	225	85	15	1	0
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1

Tanım 2.26 *n ve k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, n elemanlı bir kümenin k tane ayrık ve boş olmayan alt kümeye parçalanışlarının sayısına "İkinci Tür Stirling Sayıları" denir ve $S_2(n,k)$ ile gösterilir. İkinci tür Stirling sayılarının açık formülü,*

$$\begin{aligned} S_2(n,k) &= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}j^n \qquad (2.12)\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j}(k-j)^n \end{aligned}$$

dir (Riordan 1958; Temme 1996; Boyadzhiev 2012; Srivastava ve Choi 2012).

(2.12) bağıntısı yardımıyla İkinci tür Stirling sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F_s(t,k) &= \sum_{n=0}^{\infty}S_2(n,k)\frac{t^n}{n!} \qquad (2.13)\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}e^{tj}\\ &= \frac{(e^t-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir (Riordan 1958; Temme 1996; Boyadzhiev 2012; Srivastava ve Choi 2012).

Bu sayıların bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

1. $n=k=0$ ise $S_2(0,0)=1$

2. $n > 0$, $k = 0$ ise $S_2(n,0) = 0$

3. $k = 1$ ise $S_2(n,1) = 1$

4. $k = n$ ise $S_2(n,n) = 1$

5. $k > n$ ise $S_2(n,k) = 0$

6. $k = n-1$ ise $S_2(n,n-1) = \binom{n}{2}$

7. $n > 0$ olmak üzere; $S_2(n,k) = kS_2(n-1,k) + S_2(n-1,k-1)$

dir (Graham vd. 1994; Srivastava ve Choi 2012).

İkinci tür Stirling sayıları aşağıdaki gibi verilir:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Tanım 2.27 *$a, b \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ olsun. $S_2(n, v; a, b; \lambda)$ ile gösterilen ikinci tür genelleştirilmiş λ-Stirling tipli sayılar*

$$F_{s,k}(t; a, b; \lambda) = \frac{(\lambda b^t - a^t)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n, k; a, b; \lambda) \frac{t^n}{n!} \tag{2.14}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Şimşek 2013).

Tanım 2.27'de $a = 1$ ve $b = e$ alınırsa,

$$S_2(n, k; 1, e; \lambda) = S_2(n, k; \lambda)$$

ikinci tür λ-Stirling sayıları elde edilir. $S_2(n, k; \lambda)$ ile gösterilen ikinci tür λ-Stirling sayıları,

$$\frac{(\lambda e^t - 1)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n, k; \lambda) \frac{t^n}{n!}, \tag{2.15}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Srivastava ve Luo 2011; Şimşek 2013).

Not 7 *(2.15) bağıntısında* $\lambda = 1$ *alınırsa* $S_2(n,k;1) = S_2(n,k)$ *ikinci tür Stirling sayıları elde edilir (Srivastava ve Luo 2011; Şimşek 2013).*

Tanım 2.28 $w_g(n)$ *ile gösterilen Fubini sayıları,*

$$F_{w_g}(t) = \frac{1}{2-e^t} = \sum_{n=0}^{\infty} w_g(n) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \ln 2 \tag{2.16}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Cayley 1859; Good 1975).

Fubini sayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} w_g(0) &= 1, \\ w_g(1) &= 1, \\ w_g(2) &= 3, \\ w_g(3) &= 13, \\ w_g(4) &= 75, \\ w_g(5) &= 541, \\ w_g(6) &= 4683, \\ w_g(7) &= 47293. \end{aligned}$$

Tanım 2.29 $w_M(n)$ *ile gösterilen Fubini tipli sayılar,*

$$F_{w_M}(t) = \frac{e^t-1}{2-e^t} = \sum_{n=0}^{\infty} w_M(n) \frac{t^n}{n!} \tag{2.17}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. Burada $w_M(0) = 0$*'dır (Mureşan 2009).*

Tanım 2.30 a_n *sayıları,*

$$\frac{2}{(2-e^t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Belbachir vd. 2011).

a_n, sayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2, \\ a_1 &= 4, \\ a_2 &= 16, \\ a_3 &= 88, \\ a_4 &= 616, \\ a_5 &= 5224, \\ a_6 &= 51976, \\ a_7 &= 593128. \end{aligned}$$

Tanım 2.31 *$k \in \mathbb{N}_0$ olsun. Herhangi bir x reel sayısı için mertebesi k olan $a_n^{(k)}(x)$ ile gösterilen Fubini tipli polinomlar,*

$$F_a(x;t,k) = \frac{2^k}{(2-e^t)^{2k}} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi \tag{2.18}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Kılar ve Şimşek 2017).

Tanım 2.32 *$k \in \mathbb{N}_0$ olsun. Mertebesi k olan $a_n^{(k)}$ ile gösterilen Fubini tipli sayılar,*

$$F_a(t,k) = \frac{2^k}{(2-e^t)^{2k}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi \tag{2.19}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Kılar ve Şimşek 2017).

Not 8 *$k = 1$ alınırsa $a_n^{(1)} = a_n$'dır.*

Tanım 2.33 *$n \in \mathbb{N}_0$ olsun. $f_{n,k}$ genelleştirilmiş Fubini sayıları,*

$$F_k(t) = \frac{e^t - 1}{k + 1 - ke^t} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k} \frac{t^n}{n!} \tag{2.20}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Mureşan 2009).

Not 9 *$\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ için $f_{n,1} = w_M(n)$ dir. Ayrıca, $f_{0,k} = 1$'dir (Mureşan 2009).*

$f_{n,k}$, Genelleştirilmiş Fubini sayıları aşağıdaki gibi verilir:

$n \setminus k$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	3	5	7	9
3	13	37	73	121
4	75	365	1015	2169
5	541	4501	17641	48601

Tanım 2.34 $\delta_{n,k}$, *Kronecker delta fonksiyonudur ve*

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

dir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde Fubini tipli sayı ve polinom ailelerinin bazı temel özellikleri incelenecektir. Ayrıca, sayılar teorisinin bazı önemli kavramları ve örnekleri verilecektir.

3.1. Fubini Sayılarının Temel Özellikleri

3.1.1. $w_g(n)$ Fubini sayıları için rekürans bağıntısı

$w_g(n)$ için rekürans bağıntısı aşağıdaki şekilde verilir:

$$w_g(n) = \delta_{n,0} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w_g(k).$$

Bu rekürans bağıntısı Good (1974) tarafından verilmiştir. Bu bağıntının ispatı için (2.16) eşitliğini kullanırsak;

$$\left(2 - e^t\right) \sum_{n=0}^{\infty} w_g(n) \frac{t^n}{n!} = 1$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte gerekli düzenlemeler yaptıktan sonra

$$2\sum_{n=0}^{\infty} w_g(n) \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w_g(k) \frac{t^n}{n!} = 1$$

bulunur. O halde elde edilen bu son bağıntıdan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(w_g(n) - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w_g(k) \right) \frac{t^n}{n!} = 1$$

elde edilir. Bu bağıntıda $\delta_{n,0} = 1$ ve $n \neq 0$ ise $\delta_{n,0} = 0$ olmak üzere $\frac{t^n}{n!}$'in katsayıları karşılaştırılırsa,

$$w_g(n) = \delta_{n,0} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w_g(k) \tag{3.1}$$

istenilen rekürans bağıntısı bulunur.

(3.1) denkleminde verilen rekürans bağıntısı aşağıdaki gibi de verilebilir:

$w_g(0) = 1$ olmak üzere, $n > 0$ için;

$$w_g(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} w_g(n-k)$$

dır (Gross 1962; Pippenger 2010).

3.1.2. $w_g(n)$ Fubini sayıları ve 2. tür Stirling sayıları arasındaki ilişki

Bu bölümde, Comtet'in kitabında [p. 228, Exercise. 20] yer alan problem aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$w_g(n) = \sum_{k=0}^{n} k! S_2(n,k)$$

dır (Comtet 1974; Mureşan 2009).

$|e^t - 1| < 1$ olduğunu varsayalım. O zaman (2.16) denklemi yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_g(n)\frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}(e^t - 1)^k$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntı ve (2.13) denklemi yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_g(n)\frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} k! S_2(n,k)\frac{t^n}{n!}$$

dır. $n < k$ ise $S_2(n,k) = 0$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_g(n)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} k! S_2(n,k)\right)\frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılırsa,

$$w_g(n) = \sum_{k=0}^{n} k! S_2(n,k) \tag{3.2}$$

olur.

Ayrıca (3.2) bağıntısı aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$w_g(n) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j} j^n.$$

3.1.3. $w_g(n)$ Fubini sayıları ve Eulerian sayıları arasındaki ilişki

Teorem 3.1

$$w_g(n) = \sum_{k=0}^{n} A_n(n,k)\, 2^k$$

dir (Mureşan 2009).

İspat (2.9) denkleminde verilen üreteç fonksiyonunda $u = 2$ yazılırsa ve

$$\sum_{k=0}^{n} A_n(n,k)\, 2^k = A_n(2) \tag{3.3}$$

bağıntısı yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(2)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2-e^t} = \sum_{n=0}^{\infty} w_g(n)\frac{t^n}{n!} \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.3) ve (3.4) bağıntısından

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_g(n)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A_n(n,k)\,2^k\frac{t^n}{n!}$$

olur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. □

3.2. Yüksek Mertebeden Fubini Tipli Sayıların Temel Özellikleri

3.2.1. Yüksek mertebeden Fubini tipli sayılar için bağıntılar

Teorem 3.2 *$k = u + v$ olmak üzere $a_n^{(k)}$, k. mertebeden Fubini tipli sayılar,*

$$a_n^{(u+v)} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} a_j^{(u)} a_{n-j}^{(v)}, \quad (u, v \in \mathbb{N}) \tag{3.5}$$

dir (Kılar ve Şimşek 2017).

İspat (2.19) bağıntısı kullanılarak aşağıdaki fonksiyonel denklem elde edilir:

$$F_a(t, u+v) = F_a(t,u)F_a(t,v).$$

Bu fonksiyonel denklem yardımıyla;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(u+v)}\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(u)}\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(v)}\frac{t^n}{n!}$$

olarak yazılır. Bu son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(u+v)}\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} a_j^{(u)} a_{n-j}^{(v)}\right)\frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Bu teorem yardımıyla $a_n^{(k)}$, k. mertebeden Fubini tipli sayılar için aşağıdaki hesaplamalar yapılabilir:

(3.5)'de $k = 1$ alınırsa $a_n^{(1)} = a_n$ olduğundan ve Tanım (2.30)'a göre verilen a_n değerleri elde edilir. Bu verilerden faydalanarak $a_n^{(k)}$ sayılarını hesaplarsak;

(3.5)'de $k = 2$ için $u = 1$, $v = 1$ alınırsa,

$$a_n^{(2)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j a_{n-j}$$

olarak bulunur. Buradan

$n = 0$ için;

$$a_0^{(2)} = a_0 a_0 = 2.2 = 4$$

$n = 1$ için;

$$a_1^{(2)} = a_0 a_1 + a_1 a_0 = 2.4 + 4.2 = 16$$

$n = 2$ için;

$$a_2^{(2)} = a_0 a_2 + 2a_1 a_1 + a_2 a_0 = 2.16 + 2.4.4 + 16.2 = 96$$

$n = 3$ için;

$$a_3^{(2)} = a_0 a_3 + 3a_1 a_2 + 3a_2 a_1 + a_3 a_0 = 2.88 + 3.4.16 + 3.16.4 + 88.2 = 736$$

elde edilir.

(3.5)'de $k = 3$ için $u = 2$, $v = 1$ veya $u = 1$, $v = 2$ alınırsa,

$$a_n^{(3)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j^{(2)} a_{n-j}$$

olarak bulunur. Buradan

$n = 0$ için;

$$a_0^{(3)} = a_0^{(2)} a_0 = 4.2 = 8$$

$n = 1$ için;

$$a_1^{(3)} = a_0^{(2)} a_1 + a_1^{(2)} a_0 = 4.4 + 16.2 = 48$$

$n = 2$ için;

$$a_2^{(3)} = a_0^{(2)} a_2 + 2a_1^{(2)} a_1 + a_2^{(2)} a_0 = 4.16 + 2.16.4 + 96.2 = 384$$

$n = 3$ için;

$$a_3^{(3)} = a_0^{(2)} a_3 + 3a_1^{(2)} a_2 + 3a_2^{(2)} a_1 + a_3^{(2)} a_0 = 4.88 + 3.16.16 + 3.96.4 + 736.2 = 3744$$

elde edilir.

(3.5)'de $k=4$ için $u=3$, $v=1$ ya da $u=2$, $v=2$ veya $u=1$, $v=3$ alınırsa,

$$a_n^{(4)}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_j^{(2)}a_{n-j}^{(2)}$$

olarak bulunur. Buradan

$n=0$ için;

$$a_0^{(4)}=a_0^{(2)}a_0^{(2)}=4.4=16$$

$n=1$ için;

$$a_1^{(4)}=a_0^{(2)}a_1^{(2)}+a_1^{(2)}a_0^{(2)}=4.16+16.4=128$$

$n=2$ için;

$$a_2^{(4)}=a_0^{(2)}a_2^{(2)}+2a_1^{(2)}a_1^{(2)}+a_2^{(2)}a_0^{(2)}=4.96+2.16.16+96.4=1280$$

$n=3$ için;

$$a_3^{(4)}=a_0^{(2)}a_3^{(2)}+3a_1^{(2)}a_2^{(2)}+3a_2^{(2)}a_1^{(2)}+a_3^{(2)}a_0^{(2)}=4.736+3.16.96+3.96.16+736.4=15104$$

elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse k. mertebeden Fubini tipli sayılar aşağıdaki gibi verilir:

$n\setminus k$	1	2	3	4	5
0	2	4	8	16	32
1	4	16	48	128	320
2	16	96	384	1280	3840
3	88	736	3744	15104	53120
4	616	6816	42720	204032	827520
5	5224	73696	556128	3093248	14288000

Teorem 3.3 *k. mertebeden Fubini tipli sayılar ve polinomlar arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:*

$$a_n^{(k)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_j^{(k)}x^{n-j}. \tag{3.6}$$

Bu teoremin ispatını kısaca verelim. k. mertebeden Fubini tipli polinomlarının üreteç fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2^k}{(2-e^t)^{2k}}e^{xt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} x^n\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_j^{(k)}x^{n-j}\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır (Kılar ve Şimşek 2017).

Bu teorem kullanılarak, k. mertebeden Fubini tipli polinomlar aşağıdaki gibi verilir:

$n \setminus k$	1	2	3
1	$2x+4$	$4x+16$	$8x+48$
2	$2x^2+8x+16$	$4x^2+32x+96$	$8x^2+96x+384$
3	$2x^3+12x^2+48x+88$	$4x^3+48x^2+288x+736$	$8x^3+144x^2+1152x+3744$

Ayrıca, k. mertebeden Fubini tipli polinomlar ile k. mertebeden Fubini tipli sayılar arasındaki ilişki aşağıdaki önerme yardımıyla da verilebilir:

Önerme 3.4 $k, b \in \mathbb{N}$ *ve* $k \geq b$ *olmak üzere;*

$$a_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_j^{(b)}a_{n-j}^{(k-b)}(x) \tag{3.7}$$

dir (Kılar ve Şimşek 2017).

İspat (2.18) bağıntısı kullanılarak aşağıdaki fonksiyonel denklem elde edilir:

$$F_a(x;t,k) = F_a(t,b)F_a(x;t,k-b).$$

Bu fonksiyonel denklem yardımıyla;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(b)}\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k-b)}(x)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} a_j^{(b)} a_{n-j}^{(k-b)}(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Önerme 3.5

$$a_n^{(k)}(x+1) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} a_j^{(k)}(x) \tag{3.8}$$

dir (Kılar ve Şimşek 2017).

İspat (2.18) bağıntısı kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x+1)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Buradan, bu son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x+1)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} a_j^{(k)}(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. □

3.2.2. Yüksek mertebeden Fubini tipli polinomlar için $\frac{\partial^m}{\partial x^m}$ türev operatörü

k. mertebeden Fubini tipli polinomlar için $\frac{\partial^m}{\partial x^m}$ türev operatörü aşağıdaki önerme ile verilir:

Önerme 3.6 $m, n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere* $n \geq m$ *olsun. O halde,*

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} a_n^{(k)}(x) = m!\binom{n}{m} a_{n-m}^{(k)}(x)$$

dır (Kılar ve Şimşek 2017).

İspat (2.18)' de verilen üreteç fonksiyonunda x değişkenine göre m-kez türev alınırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial x^m} a_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} &= t^m \frac{2^k}{(2-e^t)^{2k}} e^{xt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x) \frac{t^{n+m}}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial x^m} a_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} m! \binom{n}{m} a_{n-m}^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. □

3.3. Genelleştirilmiş Fubini Sayılarının Temel Özellikleri

3.3.1. Genelleştirilmiş Fubini sayıları için bağıntılar

Önerme 3.7 $k = 2, 3, 4, ...$ *olsun.*

$$f_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} f_{j,k} f_{n-j,k-1}$$

dir (Mureşan 2009).

İspat Bu metot, Mureşan (2009) tarafından verilmiştir. $k \geq 2$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f_{n,k} \frac{t^n}{n!} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k} \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{F_k(t)}{F_{k-1}(t)}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k} \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_{n,k} \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k-1} \frac{t^n}{n!} \right)$$

elde edilir. Son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} f_{j,k} f_{n-j,k-1} \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Ayrıca genelleştirilmiş Fubini sayıları aşağıdaki önerme yardımıyla da hesaplanabilir:

Önerme 3.8

$$f_{n,k} = \frac{1}{k\,(k+1)} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{j} j^{n} \tag{3.9}$$

dir (Mureşan 2009).

İspat

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ..., \ \ |x| < 1$$

geometrik serisi ve (2.20) bağıntısı kullanılarak,

$$\begin{aligned} F_k(t) &= -\frac{1}{k} + \frac{1}{k\,(k+1)} \frac{1}{1 - \frac{k}{k+1} e^t} \\ &= -\frac{1}{k} + \frac{1}{k\,(k+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{j} \sum_{n=0}^{\infty} j^n \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k} \frac{t^n}{n!} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k\,(k+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{j} j^n \frac{t^n}{n!}$$

olur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır (Mureşan 2009). □

Önerme 3.9 $f_{1,k} = 1$ *olmak üzere;*

$$f_{n,k} = 1 + k \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} f_{j,k}, \ n \geq 2 \tag{3.10}$$

dir (Mureşan 2009).

3.3.2. Genelleştirilmiş Fubini sayıları için üreteç fonksiyonunun elde edilmesi

Önerme 3.10 $f_{n,k}$*'nın üstel üreteç fonksiyonu*

$$F_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k} \frac{t^n}{n!} = \frac{e^t - 1}{k + 1 - k e^t} \tag{3.11}$$

dir (Mureşan 2009).

Bu metot, Mureşan (2009) tarafından verilmiştir. (3.11) bağıntısını ispatlamak için (3.10) bağıntısını kullanırsak ve $f_{1,k} = 1$ olarak alırsak;

$$\begin{aligned} F_k(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k}\frac{t^n}{n!} = t + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n,k}\frac{t^n}{n!} \\ &= t + \sum_{n=2}^{\infty}\left(1 + k\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j} f_{j,k}\right)\frac{t^n}{n!} \\ &= -1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} + k\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j} f_{j,k}\frac{t^n}{n!} \\ &= -1 + e^t + k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{i=1}^{\infty} f_{i,k}\frac{t^i}{i!} \\ &= -1 + e^t + k\left(e^t - 1\right)F_k(t) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$F_k(t) = \frac{e^t - 1}{k + 1 - ke^t} \tag{3.12}$$

elde edilir.

Ayrıca (3.12) bağıntısından yararlanılarak aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilir:

$$\begin{aligned} \left(k + 1 - k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k}\frac{t^n}{n!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} - 1 \\ \left(1 - k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k}\frac{t^n}{n!}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{n,k}}{n!}t^n - k\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-1} f_{n-j,k}\frac{1}{j!\,(n-j)!}t^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde t^n katsayıları eşitlenirse,

$$\frac{f_{n,k}}{n!} - k\sum_{j=1}^{n-1} f_{n-j,k}\frac{1}{j!\,(n-j)!} = \frac{1}{n!}$$

elde edilir.

Ayrıca yukarıdaki denklem, $n \geq 1$ için, Mureşan tarafından aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$\frac{f_{n,k}}{n!} - k\sum_{\substack{m+j=n \\ m,j\geq 1}} f_{m,k}\frac{1}{j!m!} = \frac{1}{n!}$$

(Mureşan 2009).

3.3.3. Genelleştirilmiş Fubini sayıları ve 2. tür Stirling sayıları arasındaki ilişki

$f_{n,k}$ genelleştirilmiş Fubini sayıları ile ikinci tür Stirling sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki önerme ile verilir:

Önerme 3.11

$$f_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} k^{j-1} j! S_2(n,j)$$

dir (Mureşan 2009).

İspat (2.13) ve (2.20) bağıntıları kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k} \frac{t^n}{n!} &= \left(e^t - 1\right) \sum_{j=0}^{\infty} k^j \left(e^t - 1\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} k^j (j+1)! \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n, j+1) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} k^{j-1} j! \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,j) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir ve $n < j$ için $S_2(n,j) = 0$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} k^{j-1} j! S_2(n,j) \right) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, çok iyi bilinen bazı özel sayı ve polinom ailelerinin özellikleri kullanılarak, yüksek mertebeden (k. meretebeden) Fubini tipli sayı ve polinom aileleri ile ikinci tür λ-Stirling sayıları, yüksek mertebeden Frobenius-Euler sayıları, Apostol-Euler sayıları, Apostol-Bernoulli sayıları ve Apostol-Genocchi polinomları arasındaki ilişkiler verilecektir.

Önerme 4.1 $n = 0$ *ise, o zaman*

$$\sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \binom{n}{m} a_m^{(k)} j^{n-m} (-1)^j 2^{k-j} = 1,$$

ve $n > 0$ *ise, o zaman*

$$\sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \binom{n}{m} a_m^{(k)} j^{n-m} (-1)^j 2^{k-j} = 0,$$

dır.

İspat (2.19) bağıntısından

$$2^k = \left(2 - e^t\right)^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Buradan bazı gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$1 = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (-1)^j 2^{k-j} \sum_{n=0}^{\infty} j^n \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}$$

olur. O halde elde edilen bu son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \binom{n}{m} a_m^{(k)} j^{n-m} (-1)^j 2^{k-j} \right) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Buradan da verilen önermenin sonucu elde edilir. □

$a_n^{(k)}(x)$ polinomu ile ikinci tür λ-Stirling sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki önerme ile verilir:

Önerme 4.2 $S_2(n, k; \lambda)$ *ikinci tür* λ*-Stirling sayıları olmak üzere,*

$$x^n = (2k)! 2^k \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S_2\left(j, 2k; \frac{1}{2}\right) a_{n-j}^{(k)}(x)$$

dir.

İspat (2.18) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak,

$$2^k \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!} = \left(2 - e^t\right)^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

yazılır ve daha sonra (2.15) bağıntısından yararlanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!} = (2k)! 2^k \sum_{n=0}^{\infty} S_2\left(n, 2k; \frac{1}{2}\right) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!} = (2k)! 2^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S_2\left(j, 2k; \frac{1}{2}\right) a_{n-j}^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.3 *n pozitif tamsayı olsun.*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S_2\left(j, 2k; \frac{1}{2}\right) a_{n-j}^{(k)} = 0$$

olarak bulunur.

İspat Önerme (4.2)'de $x = 0$ alınırsa istenilen bağıntı elde edilir. □

Önerme 4.4

$$a_n^{(k)}(x+y) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j^{(k)}(x) y^{n-j}$$

dir.

İspat (2.18) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonundan yararlanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x+y) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Bu bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x+y) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j^{(k)}(x) y^{n-j} \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.5 $y = 1$ *alınırsa; (3.8) denkleminde verilen eşitlik elde edilir.*

$a_n^{(k)}(x+y)$ polinomu ile $H_n^{(k)}(x,u)$ arasındaki ilişki aşağıdaki önerme ile verilir:

Önerme 4.6 $n, k, j \in \mathbb{N}$ *olmak üzere;*

$$a_n^{(k)}(x+y) = 2^k \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} H_j^{(k)}(x;2)\, H_{n-j}^{(k)}(y;2)$$

dir.

İspat (2.7) ve (2.18) bağıntılarında verilen üreteç fonksiyonları kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x+y)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2^k}{(2-e^t)^{2k}} e^{(x+y)t} \\ &= 2^k \frac{(-1)^k}{(e^t-2)^k} e^{xt} \frac{(-1)^k}{(e^t-2)^k} e^{yt} \\ &= 2^k \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(k)}(x,2)\frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(k)}(y,2)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir ve bu son bağıntıda Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x+y)\frac{t^n}{n!} = 2^k \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} H_j^{(k)}(x,2)\, H_{n-j}^{(k)}(y,2)\right)\frac{t^n}{n!} \tag{4.1}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.7 $y = 0$ *alınırsa;*

$$a_n^{(k)}(x) = 2^k \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} H_j^{(k)}(x,2)\, H_{n-j}^{(k)}(2)$$

elde edilir.

$a_n^{(k)}$ sayıları ile $\mathcal{E}_n^{(k)}(\lambda)$ arasındaki ilişki aşağıdaki önerme ile verilir:

Önerme 4.8 $\mathcal{E}_n^{(k)}(\lambda)$ *, mertebesi* k *olan Apostol-Euler sayıları olmak üzere,*

$$a_n^{(k)} = \frac{1}{2^{3k}} \mathcal{E}_n^{(2k)}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

dir.

İspat (2.8) ve (2.19) bağıntıları kullanılarak,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{2^{3k}} \left(\frac{2}{-\frac{1}{2}e^t + 1} \right)^{2k} \\ &= \frac{1}{2^{3k}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(2k)} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. □

$a_n^{(k)}(x)$ polinomu ile $\beta_n^{(k)}(x, \lambda)$ arasındaki ilişki aşağıdaki önerme ile verilir:

Önerme 4.9 *$\beta_n^{(k)}(x, \lambda)$ mertebesi k olan Apostol-Bernoulli sayıları olmak üzere,*

$$a_n^{(k)}(x) = \frac{\beta_{n+2k}^{(2k)}\left(x, \frac{1}{2}\right)}{2^k (2k)! \binom{n+2k}{n}}$$

dir.

İspat (2.5) ve (2.18) bağıntıları kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2^k t^{2k}} \left(\frac{t}{\frac{1}{2}e^t - 1} \right)^{2k} e^{xt}$$

$$2^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x) \frac{t^{n+2k}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(2k)} \left(x, \frac{1}{2} \right) \frac{t^n}{n!} \tag{4.2}$$

elde edilir ve (4.2) bağıntısının sol tarafında n yerine $n - 2k$ yazılırsa,

$$2^k \sum_{n=2k}^{\infty} a_{n-2k}^{(k)}(x) \frac{t^n}{(n-2k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(2k)} \left(x, \frac{1}{2} \right) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$2^k \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-(2k-1))\, a_{n-2k}^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(2k)} \left(x, \frac{1}{2} \right) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılırsa,

$$a_{n-2k}^{(k)}(x) = \frac{\beta_n^{(2k)}\left(x, \frac{1}{2}\right)}{2^k n(n-1)(n-2)\ldots(n-(2k-1))}$$

olur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa önermenin sonucu elde edilir. □

Sonuç 4.10 *$n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $k = 1$ ve $x = 0$ alınırsa,*

$$a_n = \frac{\beta^{(2)}_{n+2}\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(n+1\right)\left(n+2\right)} \tag{4.3}$$

bulunur (Kılar ve Şimşek 2017).

Sonuç 4.11 *(3.6) bağıntısında $k = 1$ alınırsa;*

$$a_n\left(x\right) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j x^{n-j} \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.3) bağıntısı (4.4) bağıntısında yerine yazılırsa,

$$a_n\left(x\right) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{\beta^{(2)}_{j+2}\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(j+1\right)\left(j+2\right)} x^{n-j}$$

elde edilir (Kılar ve Şimşek 2017).

$a^{(k)}_n\left(x\right)$ polinomu ile $\mathcal{G}^{(k)}_n\left(x,\lambda\right)$ arasındaki ilişki aşağıdaki önerme ile verilir:

Önerme 4.12 *$\mathcal{G}^{(k)}_n\left(x,\lambda\right)$ mertebesi k olan Apostol-Genocchi polinomları olmak üzere,*

$$a^{(k)}_n\left(x\right) = \frac{\mathcal{G}^{(2k)}_{n+2k}\left(x,-\frac{1}{2}\right)}{2^{3k}\left(2k\right)!\binom{n+2k}{n}}$$

dir.

İspat (2.11) ve (2.18) bağıntıları kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{(k)}_n\left(x\right)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2^{3k}t^{2k}}\left(\frac{2t}{-\frac{1}{2}e^t+1}\right)^{2k} e^{xt}$$

$$2^{3k}\sum_{n=0}^{\infty} a^{(k)}_n\left(x\right)\frac{t^{n+2k}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}^{(2k)}_n\left(x,-\frac{1}{2}\right)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir ve bazı gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$2^{3k}\sum_{n=0}^{\infty} n\left(n-1\right)\left(n-2\right)...\left(n-\left(2k-1\right)\right)a^{(k)}_{n-2k}\left(x\right)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}^{(2k)}_n\left(x,-\frac{1}{2}\right)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılırsa,

$$a^{(k)}_{n-2k}\left(x\right) = \frac{\mathcal{G}^{(2k)}_n\left(x,-\frac{1}{2}\right)}{2^{3k}n\left(n-1\right)\left(n-2\right)...\left(n-\left(2k-1\right)\right)}$$

olur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa önermenin sonucu elde edilir. □

$w_M\left(n\right)$ ile ikinci tür Stirling sayıları ve $a^{(k)}_n$ sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 4.13 $S_2\left(n,k\right)$ *ikinci tür Stirling sayıları olmak üzere,*

$$w_M^{(2k)}(n) = \frac{(2k)!}{2^k}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}S_2\left(j,2k\right)a_{n-j}^{(k)} \tag{4.5}$$

dir.

İspat (2.17), (2.19) ve (3.2)bağıntıları kullanılarak aşağıdaki fonksiyonel denklem elde edilir:

$$\frac{(2k)!}{2^k}F_s(t,2k)F_a(t,k) = F_M^{2k}(t).$$

Bu fonksiyonel denklem yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_M^{(2k)}(n)\frac{t^n}{n!} = \frac{(2k)!}{2^k}\sum_{n=0}^{\infty} S_2\left(n,2k\right)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}\frac{t^n}{n!}$$

olur. Bu son bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_M^{(2k)}(n)\frac{t^n}{n!} = \frac{(2k)!}{2^k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}S_2\left(j,2k\right)a_{n-j}^{(k)}\right)\frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Ayrıca, (4.5) bağıntısında $k=1$ alınırsa,

$$w_M^{(2)}(n) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}S_2\left(j,2\right)a_{n-j}$$

elde edilir ve $j<2$ için $S_2\left(j,2\right)=0$ olduğundan

$$w_M^{(2)}(n) = \sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}S_2\left(j,2\right)a_{n-j}$$

dir (Kılar ve Şimşek 2017).

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında Fubini tipli sayı ve polinom aileleri çalışılmıştır. Fubini tipli sayılar ve polinomlar için üreteç fonksiyonu elde edilmiş ve bu ailenin bazı temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, Bernoulli sayıları ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları, Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomları, Apostol-Euler sayıları ve polinomları, Frobenius-Euler sayıları ve polinomları, 1. tür Stirling sayıları, 2. tür Stirling sayıları ve 2. tür λ-Stirling sayıları gibi bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları incelenmiş bu ailelerle ilgili formüller, bağıntılar ve diğer özellikler verilmiştir.

Bu tez çalışmasının Bulgular ve Tartışma bölümünde çok iyi bilinen bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları kullanılarak, yüksek mertebeden (k. meretebeden) Fubini tipli sayı ve polinom aileleri arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Elde edilen bu bağıntılar aşağıdaki gibi verilirler:

Önerme (4.2)'de $a_n^{(k)}(x)$ ile gösterilen Fubini tipli polinomlarının ikinci tür λ-Stirling sayılarıyla arasındaki ilişki

$$x^n = (2k)!2^k \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S_2\left(j, 2k; \frac{1}{2}\right) a_{n-j}^{(k)}(x)$$

olarak verilmiştir. Elde edilen bir diğer bağıntı ise,

$n, k, j \in \mathbb{N}$ olmak üzere; $a_n^{(k)}(x+y)$ polinomunun yüksek mertebeden Frobenius-Euler polinomlarıyla olan ilişkisi

$$a_n^{(k)}(x+y) = 2^k \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} H_j^{(k)}(x; 2)\, H_{n-j}^{(k)}(y; 2)$$

dir. Benzer şekilde Önerme (4.8), (4.9) ve (4.12)'de yüksek mertebeden (k. mertebeden) Fubini tipli sayıların ve polinomların sırasıyla yüksek mertebeden Apostol-Euler sayıları, yüksek mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları ve yüksek mertebeden Apostol-Genocchi polinomlarıyla olan ilişkisi

$$a_n^{(k)} = \frac{1}{2^{3k}} \mathcal{E}_n^{(2k)}\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$a_n^{(k)}(x) = \frac{\beta_{n+2k}^{(2k)}\left(x, \frac{1}{2}\right)}{2^k (2k)! \binom{n+2k}{n}}$$

ve

$$a_n^{(k)}(x) = \frac{\mathcal{G}_{n+2k}^{(2k)}\left(x, -\frac{1}{2}\right)}{2^{3k} (2k)! \binom{n+2k}{n}}$$

olarak verilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar analiz ve fonksiyonlar teorisi, sayılar teorisi, istatistik ve olasılık teorisi gibi birçok alanda kullanılabilir.

6. KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1970. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publication, pp. 803–819, New York.

Andrews, L. C. 1998. Special Functions of Mathematics for Engineers, 2nd ed. SPIE Press and Oxford University Press, Washington, 479 p.

Apostol, T. M. 1951. On the Lerch zeta function. *Pacific Journal of Mathematics*, 1 (2): 161–167.

Arakawa, T., Ibukiyama, T. and Kaneko, M. 2014. Bernoulli Numbers and Zeta Functions. Springer, Japan, 274 p.

Belbachir, H., Rahmani, M. and Sury, B. 2011. Sums involving moments of reciprocals of binomial coefficients. *Journal of Integer Sequences*, 14. Article 11.6.6.

Boyadzhziev, K. 2012. Close encounters with the Stirling numbers of the second kind. *Mathematics Magazine*, 85 (4): 252–266.

Carlitz, L. 1953. A note on the multiplication formulas for the Bernoulli and Euler polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4 (2): 184–188.

Carlitz, L. 1959. Eulerian numbers and polynomials. *Mathematics Magazine*, 32 (5): 247–260.

Carlitz, L. 1968. Bernoulli numbers. *Fibonacci Quarterly*, 6 (3): 71–85.

Cayley, A. 1859. On the analytical forms called trees, second part. *Philosophical Magazine*, 18 (121): 374–378.

Comtet, L. 1974. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, Boston, 343 p.

Erdelyi, A. 1953. Higher Transcendental Functions. The Bateman Manuscript Project, Vol. I-III. McGraw Hill Book Company, Inc., pp. 35–43, New York.

Foata, D. 2010. Eulerian polynomials: from Euler's Time to the Present. In The legacy of Alladi Ramakrishnan in the Mathematical Sciences, Springer, pp. 253–273, New York.

Good, I. J. 1975. The number of ordering of n candidates when ties are permitted. *Fibonacci Quarterly*, 13 (1): 11–18.

Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O. 1994. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 657 p.

Gross, O. A. 1962. Preferential arrangements. *The American Mathematical Monthly*, 69 (1): 4–8.

Jordan, C. 1950. Calculus of Finite Differences, Second Edition. Chelsea Publishing Company, New York, 652 p.

Kılar, N. and Şimşek, Y. 2017. A new family of Fubini numbers and polynomials associated with Apostol-Bernoulli numbers and polynomials. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 54 (5): 1605–1621.

Kim, D. S. and Kim, T. 2012. Some new identities of Frobenius-Euler numbers and polynomials. *Journal of Inequalities and Applications*, 307 (2012).

Kim, D. S., Kim, T., Park, J.-W. and Seo, J.-J. 2016. Differential equations associated with higher-order Frobenius-Euler numbers. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12 (3): 2537–2547.

Luo, Q.-M. 2006. Apostol-Euler polynomials of higher order and Gaussian hypergeometric functions. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 10 (4): 917–925.

Luo, Q.-M. 2009. An explicit formula for the Euler polynomials of higher order. *Applied Mathematics and Information Science*, 3 (1): 53–58.

Luo, Q.-M. and Srivastava, H. M. 2005. Some generalizations of the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 308 (1): 290–302.

Mansour, T. and Schork, M. 2016. Commutation Relations, Normal Ordering, and Stirling Numbers. CRC Press Taylor Francis Group, London, New York, 480 p.

Mureşan, M. 2009. A Concrete Approach to Classical Analysis. Springer Science + Business Media, LLC, Canadian Mathematical Society, New York, 433 p.

Özden, H. and Şimşek, Y. 2014. Modification and unification of the Apostol-type numbers and polynomials and their applications. *Applied Mathematics and Computation*, 235: 338–351.

Petersen, T. K. 2015. Eulerian Numbers. Springer Science+Business Media, New York, 456 p.

Pippenger, N. 2010. The hypercube of resistors, asymptotic expansions, and preferential arrangements. *Mathematics Magazine,* 83 (5): 331-346.

Rainville, E. D. 1960. Special Functions. The Macmillan Company, New York, 365 p.

Riordan, J. 1958. An Introduction to Combinatorial Analysis. John Wiley Sons Inc., New York, 244 p.

Srivastava, H. M. 2011. Some generalizations and basic (or q-) extensions of the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 5 (3): 390–444.

Srivastava, H. M., Boutiche, M. A. and Rahmani, M. 2017. Some explicit formulas for the Frobenius-Euler polynomials of higher order. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 11 (2): 621–626.

Srivastava, H. M. and Choi, J. 2012. Zeta and q- Zeta Functions and Associated Series and Integrals. Elsevier, Amsterdam, 657 p.

Srivastava, H. M. and Luo, Q.-M. 2011. Some generalizations of the Apostol-Genocchi polynomials and the Stirling numbers of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*, 217 (12): 5702–5728.

Şimşek, Y., Kim, T., Park, D. W., Ro, Y. S., Jang, L. C. and Rim, S. 2004. An explicit formula for the multiple Frobenius-Euler numbers and polynomials. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 4 (3): 519–529.

Şimşek, Y. 2013. Generating functions for generalized Stirling type numbers, Array type polynomials, Eulerian type polynomials and their applications. *Fixed Point Theory and Applications*, 87 (2013): 1–28.

Temme, N. M. 1996. Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics. John Wiley Sons Inc., New York, 374 p.

ÖZGEÇMİŞ

NESLİHAN KILAR

neslihankilar@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2011-2015	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya
Yüksek Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2015-2017	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

ESERLER:

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1- Kılar, N. and Şimşek, Y. 2017. A new family of Fubini numbers and polynomials associated with Apostol-Bernoulli numbers and polynomials. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 54 (5): 1605–1621.