

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ WOODS-SAXON POTANSİYELİNİN BİR BOYUTTA
SAÇILMA, BAĞLI VE YARI-BAĞLI DURUMLAR İÇİN KUANTUM
MEKANİKSEL İNCELENMESİ**

Ferhan AKDENİZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI**

2016

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ WOODS-SAXON POTANSİYELİNİN BİR BOYUTTA
SAÇILMA, BAĞLI VE YARI-BAĞLI DURUMLAR İÇİN KUANTUM
MEKANİKSEL İNCELENMESİ**

Ferhan AKDENİZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI**

**Bu tez Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyonu Birimi
tarafından 1031 nolu proje ile desteklenmiştir..**

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ WOODS-SAXON POTANSİYELİNİN BİR BOYUTTA
SAÇILMA, BAĞLI VE YARI-BAĞLI DURUMLAR İÇİN KUANTUM
MEKANİKSEL İNCELENMESİ

Ferhan AKDENİZ

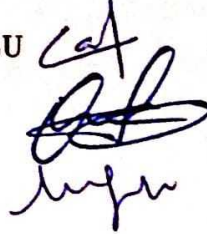
YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

Bu tez 27/10/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Bekir Can LÜTFÜOĞLU

Doç. Dr. Orhan BAYRAK

Yrd. Doç. Dr. Muzaffer ERDOĞAN



ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ WOODS-SAXON POTANSİYELİNİN BİR BOYUTTA SAÇILMA, BAĞLI VE YARI-BAĞLI DURUMLAR İÇİN KUANTUM MEKANİKSEL İNCELENMESİ

Ferhan AKDENİZ

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Bekir Can LÜTFÜOĞLU

Ekim 2016, 68 sayfa

Bu çalışmada, Genelleştirilmiş Woods-Saxon potansiyelinin, tek boyutta sabit kütleli Schrödinger diferansiyel denkleminde saçılma ve bağlı durumlar için, analitik çözümleri incelendi. Saçılma durumunda, olasılık yoğunluğunun korunduğu analitik olarak ispatlandı. Yansıma ve geçme olasılığının enerjiye ve keyfi seçilmiş parametrelere göre değişimini gösteren grafik çizildi. Ayrıca tünellenmenin hangi koşullarda gerçekleşebileceği parametrelere bağlı olarak belirlendi. Potansiyelin yapısından dolayı bağlı durum, sıkı-bağlı ve yarı-bağlı durum olarak iki ayrı başlık altında çalışılmıştır. Her iki durum için enerji özdeğer spektrumu elde edildi ve dalga fonksiyonları keyfi seçilen parametrelerle belirlendi.

ANAHTAR KELİMELER: Genelleştirilmiş Woods-Saxon potansiyeli, Saçılma durumu, Sıkı-bağlı durum, Yarı-bağlı durum, Analitik çözümler

JÜRİ: Yrd. Doç. Dr. Bekir Can LÜTFÜOĞLU

Doç. Dr. Orhan BAYRAK

Yrd. Doç. Dr. Muzaffer ERDOĞAN

ABSTRACT

QUANTUM MECHANICAL ANALYSING OF GENERALIZED WOODS-SAXON POTENTIAL IN ONE DIMENSION FOR SCATTERING, BOUND AND QUASI-BOUND STATES

Ferhan AKDENİZ

MSc Thesis in Physics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Bekir Can LÜTFÜOĞLU

October 2016, 68 pages

In this work, the exact analytical solutions of the one-dimensional Schrödinger equation for the generalized symmetric Woods-Saxon potential are solved for the scattering and bound states. There is a various information about Woods-Saxon potential. The energy eigenvalues that gives the bound states are found. It is calculated analitically on the scattering states that protected probability density. Also, it is determined tunneling which conditions may occur depending parameters. The bound states for generalized Woods-Saxon potential are investigated as tight-bound state and quasi-bound state. Then, we obtained the energy eigenvalues spectrum for two states and determined wave functions with arbitrary parameters.

KEYWORDS: Generalized Woods-Saxon potential, Scattering states, Bound states, Quasi-bound states, Analytical solutions

COMMITTEE: Assist. Prof. Dr. Bekir Can LÜTFÜOĞLU (Supervisor)
Assoc. Prof. Dr. Orhan BAYRAK
Assist. Prof. Dr. Muzaffer ERDOĞAN

ÖNSÖZ

Akademik süreçteki çalışmalarında bana destek ve yardımcı olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Bekir Can LÜTFÜOĞLU'na, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Orhan BAYRAK'a, tez yazım aşamasındaki yardımlarından dolayı Ramazan DAĞTAŞ'a içtenlikle teşekkür ederim. Desteklerini benden hiçbir zaman esirgememiş olan sevgili ailem, desteğini herdaim yanımda hissettiğim çok sevdiğim eşim Süleyman AKDENİZ ve uzun çalışma sürelerimi sabırla bekleyen biricik kızım Ayşe Hande, iyiki varsınız.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI	4
2.1. Schrödinger Denklemi	4
2.2. Woods-Saxon Potansiyelinin Genelleştirilmesi	4
3. MATERYAL VE METOT	8
3.1. Genelleştirilmiş Woods-Saxon Potansiyelinin Schrödinger Denkleminde Çözümü	8
3.1.1. Pozitif ve negatif bölgelerde dalga denklemleri	8
3.1.1.1. Negatif bölge dalga denklemi	8
3.1.1.2. Pozitif bölge dalga denklemi	17
3.2. Saçılma Durumu	25
3.2.1. Pozitif ve negatif bölge saçılma durumu dalga denklemleri	25
3.2.1.1. Negatif bölge saçılma durumu dalga denklemi	25
3.2.1.2. Pozitif bölge saçılma durumu dalga denklemi	25
3.2.2. Saçılma durumunda süreklilik	26
3.2.3. Olasılık yoğunluğunun korunumu	27
3.3. Bağlı Durum	32

3.4. Sıkı-Bağlı Durum	32
3.4.1. Pozitif ve negatif bölgelerde sıkı-bağlı durum dalga denklemleri	32
3.4.1.1. Negatif bölge sıkı-bağlı durum dalga denklemi . . .	32
3.4.1.2. Pozitif bölge sıkı-bağlı durum dalga denklemi	34
3.4.2. Sıkı-bağlı durumda süreklilik	34
3.4.3. Sıkı-bağlı durum enerji özdeğerleri	36
3.4.3.1. Sıkı-bağlı durum çift çözümlerin enerji özdeğerleri . .	36
3.4.3.2. Sıkı-bağlı durum tek çözümlerin enerji özdeğerleri . .	39
3.5. Yarı-bağlı Durum	41
3.5.1. Negatif ve pozitif bölgelerde yarı-bağlı durum dalga denklemleri	42
3.5.1.1. Negatif bölge yarı-bağlı durum dalga denklemi	42
3.5.1.2. Pozitif bölge yarı-bağlı durum dalga denklemi	42
3.5.2. Yarı-bağlı durumda süreklilik	42
3.5.3. Yarı-bağlı durum enerji özdeğeri	44
3.5.3.1. Yarı-bağlı durum çift çözümler	44
3.5.3.2. Yarı-bağlı durum tek çözümler	46
4. BULGULAR VE TARTIŞMALAR	49
4.1. Saçılma Durumu	49
4.2. Sıkı-bağlı Durum	51
4.3. Yarı-bağlı Durum	54
5. SONUÇ	58
7. KAYNAKLAR	60
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\theta(x)$	Basamak fonksiyonu
$\psi(x)$	Dalga fonksiyonu
E	Enerji
T	Geçme katsayısı
m	Kütle
\hbar	Planck sabiti
V_0	Potansiyel dip parametresi
W	Potansiyel dip parametresi
$V(x)$	Potansiyel enerji
a	Sızma parametresi
R	Yansımaya katsayısı
L	Yarıçap

Kısaltmalar

E_n^b	Sıkı-bağlı durumun n . enerji özdeğeri
$\psi_{sol}(x)$	$x < 0$ Bölgesi dalga fonksiyonu
$\psi_{sag}(x)$	$x > 0$ Bölgesi dalga fonksiyonu
GWS	Genelleştirilmiş Woods-Saxon
KG	Klein-Gordon
MWS	Modifiye Woods-Saxon
E^s	Saçılma durumu enerjisi
OM	Optik Model
WS	Woods-Saxon
E_n^{yb}	Yarı-bağlı durumun n . enerji özdeğeri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	WS, MWS ve GWS potansiyellerinin rastsal seçilmiş saçılma, sıkı-bağlı ve yarı-bağlı durum enerjilerinin konuma göre değişimi. Kullanılan tüm parametreler Çizelge-2.2'de verilmiştir.	7
Şekil 4.1	Yansıma(R) ve geçme(T) olasılığının, enerjiye göre değişimi. Kullanılan tüm parametreler Çizelge-2.2'de verilmiştir.	49
Şekil 4.2	Yansıma(R) ve geçme(T) olasılığı ile bariyer yüksekliğinin(HB), potansiyel dip parametreleri(W, V_0), $E^s = 20MeV$ ve Çizelge-2.2'de verilen diğer parametrelere göre değişimi.	50
Şekil 4.3	Yansıma(R) ve geçme(T) olasılığının, $E^s < HB$ için, potansiyel parametreleri (L, a), $E^s = 20MeV < HB = 22.5MeV$ (Kuantum tünelleme) ve Çizelge-2.2'de verilen diğer parametrelere göre değişimi	51
Şekil 4.4	Yansıma (R) ve geçme(T) olasılığının, $E^s > HB$ için, potansiyel parametrelerine(L, a) göre, $E^s = 30MeV > HB = 22.5MeV$ (Saçılma rezonansı) ve Çizelge-2.2'de verilen diğer parametrelere göre değişimi	51
Şekil 4.5	Çift çözümler için bulunan normalize edilmemiş dalga denkleminin, E_n^b bazı enerji özdeğerilerine göre değişimi. Kullanılan tüm parametreler Çizelge-2.2'de verilmiştir.	53
Şekil 4.6	Tek çözümler için bulunan normalize edilmemiş dalga denkleminin, E_n^b bazı enerji özdeğerilerine göre değişimi. Kullanılan tüm parametreler Çizelge-2.2'de verilmiştir.	55
Şekil 4.7	Çift çözümler için bulunan normalize edilmemiş dalga denkleminin, E_n^{yb} bazı enerji özdeğerilerine göre değişimi. $W = 450MeV$ ve Çizelge-2.2'de verilen parametre değerleri kullanılmıştır.	56
Şekil 4.8	Tek çözümler için bulunan normalize edilmemiş dalga denkleminin, E_n^{yb} bazı enerji özdeğerilerine göre değişimi. $W = 450MeV$ ve Çizelge-2.2'de verilen parametre değerleri kullanılmıştır.	57

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1	Potansiyeller	5
Çizelge 2.2	Potansiyeller için parametre değerleri	7
Çizelge 5.1	Enerji spektrumu	59

1. GİRİŞ

19.Yüzyıl başlarına gelindiğinde, Newton yasaları, Maxwell denklemleri ve İstatistik Mekanik kuramı ile zirveye çıkmış olan Klasik Fizik, ilk defa MÖ 4. yüzyılda Democritus tarafından orataya atılan atom kavramı da dahil, tüm fiziksel olayları açıklamak için yeterli bulunuluyordu. Bu nedenle fizik bilimindeki ilerlemenin yavaş yavaş sona ereceği düşünülüyordu. Buna karşın 1899 yılında kara cisim ışınması ile başlayan, fotoelektrik olay ile devam eden bir takım deneysel gözlemler Klasik Fizik ile izah edilemiyordu. 1920'li yıllarda madde parçacıklarının dalga fonksiyonu ile temsil edildiği matematiksel bir formülasyonla ifade edilen Kuantum Fiziği, Klasik Fizik ile açıklanamayan gözlemleri başarıyla izah etti. Planck, Einstein, Bohr, De Broglie, Schrödinger, Heisenberg, Dirac ve Pauli gibi birçok değerli biliminsanın katkılarıyla oluşan Kuantum teorisi üzerine o tarihten beri birçok deneysel ve teorik çalışma yapılmıştı ve halen de yapılmaktadır. Yapılan tüm çalışmalarda ortak amaç atomun yapısındaki bilinmeyenleri anlaşılır kılınmaktır. Önerilen bu tez çalışmasıyla da insanlığın bu sonu gelmeyen çabasına küçük bir katkı hedeflenmiştir.

Atom, yörüngelerine elektrostatik kuvvet ile bağlanmış elektronlardan ve bir çekirdekten meydana gelir. Boyutuna ve kütesine bakılarak durgun ve noktasal kabul edilen çekirdek ise birbirine kuvvetlice bağlı ama aynı zamanda hareketli nükleonlardan oluşur. Bir atom çekirdeği hakkındaki bilgiler, çekirdeğin başka parçacıklarla bombardıman edilmesiyle yapılan saçılma deneyleri sonucunda elde edilebilmektedir. Bu deneysel çalışmaların teorisinde ise nükleonları bir arada tutan bir potansiyel enerjiden bahsedilmektedir. Bu potansiyel enerji, elektronları atoma bağlayan Coulomb potansiyel enerjisinden farklıdır ve çoğu zaman nükleer potansiyel olarak adlandırılmaktadır.

Optik model (OM), çekirdeklerin yapısal özelliklerini ve saçılma reaksiyonlarındaki genel davranışı inceleyen modellerden biridir (Satchler 1980, Krane 1988). Esasında OM, ışığın isli bir küreye gönderilmesi ile ortaya çıkan yansıma, soğurulma ve kırınım özelliklerinden esinlenilerek, esnek ve esnek olmayan saçılmayı temsil eden bir potansiyeli baz alarak isimlendirilmiştir. Bir optik model potansiyelinin kabuk modeline uygun olarak gerçel kısmı esnek saçılmayı, sanal kısmı ise esnek olmayan saçılmayı, ki bunlar soğurulma ve reaksiyonlarıdır, temsil etmektedir(Satchler 1980, Satchler 1983). Literatürdeki ilk optik potansiyel ifadesi, aşağıdaki biçimde verilen kare kuyu potansiyelidir (Feshbach 1954).

$$V(r) = \begin{cases} -(V_0 + iW) & r \leq r_0 A^{\frac{1}{3}} \\ 0 & r \geq r_0 A^{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad (1.1)$$

Burada r , hedef ve mermi çekirdek arasındaki merkezi uzaklığı; r_0 , nükleer yarıçapı ve A , kütle numarasını ifade etmektedir. Ayrıca hedef ve mermi etkileşmesini doğru olarak verebilmesi için, aralarındaki mesafeye bağlı şekilde üstel olarak azalan

bir formda olması gerektiği öngörülmüştür(Krane 1988). Woods-Saxon (WS) potansiyelinin

$$f^n(r, r_i, a_i) = \frac{1}{\left[1 + \exp\left(\frac{r-r_i A^{\frac{1}{3}}}{a_i}\right)\right]^n} \quad (1.2)$$

biçiminde verilen yapısı öngörülen bu özelliği sağlamaktadır(Woods ve Saxon 1954). Burada, mermi ile hedef çekirdeğin merkezleri arasındaki uzaklık r , çekirdek potansiyelinin merkez değerinin yarısına düştüğü yarıçap r_i , ve atom kütle numarası da A ile gösterilmiştir. Yaygınlık veya sızma parametresi olarak da adlandırılan a_i ise potansiyelin maksimum değerinin %90'dan %10'a düştüğü noktalar arasındaki uzaklıktan elde edilen bir parametredir(Aytekin vd 2007).

Woods ve Saxon (1954) yılındaki çalışmasında, 20 MeV'lik protonların, alüminyum, nikel veya platin gibi bazı orta ve hafif çekirdeklerden saçılmasını, kendi isimleriyle de anılan, nükleer kısmı kompleks ve spin olmayan bir potansiyel enerji fonksiyonu önererek nümerik olarak incelemişlerdir.

$$V_{WS}(r) = \frac{V + iW}{1 + e^{\frac{(r-r_0)}{a}}} \quad (1.3)$$

Bu potansiyel enerjinin Schrödinger denklemindeki çözümüyle dalga fonksiyonunun radyal kısmı başarıyla hesaplanmıştır.

WS potansiyeli, sadece çekirdek-çekirdek etkileşimlerini değil(Brandan ve Satchler 1997, Khoa vd 1997, Satchler 1991), çekirdeklerin içine hapsolmuş nükleonların enerji düzeylerini belirlemek için de uygundur (Bohr ve Mottelson 1998, Gomez vd 2003). Literatürde WS potansiyelinin analitik çözümlerine sıkça rastlanır (Aydoğdu vd 2012, Hassanabadi vd 2012, Livertz vd 2007, Pannelle vd 2010, Rojas ve Villalba 2005).

İster çekirdek-çekirdek etkileşmeleri, isterse de çekirdek nükleon etkileşmeleri olsun, etkileşmeler yüzeyden başlar ve çekirdeğe doğru değişir. WS potansiyeli yukarıdaki şekliyle yüzey etkileşmelerini ifade etmekte yetersiz kalmaktadır. Bundan dolayı WS potansiyeli modifiye edilmeye (MWS)(Hassanabadi vd 2013, Ikhdair ve Sever 2007, Ikot ve Apkan 2012, Yazarloo ve Mehraban 2016) veya genelleştirilmeye (GWS) çalışılmıştır (Aldoğan vd 2012, Alpdoğan ve Havare 2014, Bayrak ve Açiksöz 2015, Benamira vd 2007, Berkdemir vd 2005, 2006, Fakhri ve Sadeghi 2004, Gönül ve Köksal 2007, Hamzavi ve Rajavi 2013, Ikhdair ve Sever 2007, 2008, 2010, Pannelle vd 2010). Her ne kadar GWS potansiyeli literatürde zamandan bağımsız Schrödinger denkleminde, Bayrak ve Açiksöz 2015, Berkdemir vd 2005, Fakhri ve Sadeghi 2004, Gönül ve Köksal 2007 tarafından; Klein-Gordon denleminde, Ikhdair ve Sever 2007 tarafından; Dirac denkleminde, Ikhdair ve Sever 2010 tarafından çalışılmışsa da tek boyutlu Schrödinger denklemi kullanılarak hiç çalışılmamıştır. Bu tez çalışması bir

boyutta Schrödinger denkleminde GWS potansiyelinin saçılma ve bağlı durumları için analitik çözümlerini içermektedir.

$$V(x) = \theta(-x) \left[\frac{-V_0}{1 + e^{-a(x+L)}} + \frac{W e^{-a(x+L)}}{(1 + e^{-a(x+L)})^2} \right] + \theta(x) \left[\frac{-V_0}{1 + e^{a(x-L)}} + \frac{W e^{a(x-L)}}{(1 + e^{a(x-L)})^2} \right] \quad (1.4)$$

Burada $\theta(x)$ ve $\theta(-x)$ basamak fonksiyonu olmak üzere, pozitif ($x > 0$) ve negatif ($x < 0$) bölgelerinde 0 veya 1'e eşit olur. Potansiyelin biçimini belirleyen reel parametreler ise V_0 ve W dip parametrelerine, a sızma katsayısına ve L etkin çekirdek yarıçapına karşılık gelir.

Kaynak araştırmalarında, önce Schrödinger denklemi hakkında bilgi verilmiştir sonra MWS ve GWS potansiyellerinin özel durumlarına değinilmiştir. WS, MWS ve GWS potansiyelinin karşılaştırmalı grafiklerine yer verilmiştir. Materyal ve Yöntem kısmında ilk olarak GWS potansiyeli etkisi altında hareket eden, spinsiz ve sabit m kütleli parçacığın pozitif ve negatif bölgelerdeki davranışı çalışılmıştır. Her iki bölge çözümlerinde farklı değişken dönüşümleri yapılarak diferansiyel denklem sadeleştirilmiş, tekillik noktaları etrafındaki davranışları tespit edilerek uygun çözümler önerilmiştir. Önerilen bu çözümlerin Hipergeometrik fonksiyonların karakterinde olduğu görülmüştür. Saçılma ve bağlı durumlarındaki çözümler farklı sınır şartlarına sahiptir. Saçılma durumuna uygun olarak eksi sonsuzdan gelen ve yansıyan, artı sonsuzda ise sadece ilerleyen dalga çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca olasılığın korunumu analitik olarak ispat edilmiştir. Bağlı durum ise sıkı-bağlı ve yarı-bağlı olarak iki başlık altında incelenmiştir. Sıkı-bağlı durumda, saçılma durumundan farklı olarak parçacık potansiyel kuyu içinde hapsolmüştür. Bu koşul artı ve eksi sonsuzda dalga denklemlerinin yok olmasını gerektirirken potansiyel kuyu içindeki süreklilik koşulu ise enerjinin kuantizasyonunu vermiştir. Böylelikle dalga denklemleri düğüm sayılarına göre elde edilmiştir. Yarı-bağlı durumda ise hapsolan parçacıkların çekirdek yüzeyinden sızması mümkündür. Bundan dolayı sınır koşullarının artı ve eksi sonsuzda sadece o yönlere ilerleyen dalgalara sahip olmalıdır. Süreklilik şartı da kullanılarak enerji spektrumu ve düğüm sayılarına bağlı olarak dalga denklemleri elde edilmiştir. Tezin bulgular kısmında ise keyfi parametreler seçilerek saçılma durumunda rezonans koşullarının, her bir parametreye ve enerjiye göre değişim grafikleri detaylı olarak değerlendirilmiştir. Sıkı-bağlı ve yarı-bağlı durumların dalga fonksiyonları ise, GWS potansiyelinin simetrik yapısı da kullanılarak, çift ve tek dalga fonksiyonları olarak ayrı ayrı grafikler yardımıyla tartışılmıştır. Tez, sıkı-bağlı ve yarı-bağlı durumun enerji spektrumunun da verildiği sonuç kısmında genel değerlendirmeler yapılarak neticelendirilmiştir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Schrödinger Denklemi

Schrödinger (1926) yılında, kütleli fakat spin içermeyen ve de görelili olmayan parçacıkların kuantum durumlarını kendi ismiyle anılan Schrödinger diferansiyel denkleminin çözümleriyle ifade etmiştir. Eğer potansiyel enerji fonksiyonu zamandan bağımsız ise, bu diferansiyel denklem

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (2.1)$$

olarak verilir. Esasında bir özdeğer özvektör problemi olan bu denklemin zamandan bağımsız Schrödinger denklemi olarak ifade edilmesi gerekse de literatürdeki yaygın kullanımında Schrödinger denklemi olarak isimlendirilmiştir. Burada $\psi(x)$; bağlı durum dalga özfonksiyonu, m ; parçacığın kütlesi, \hbar ; Planck sabitinin 2π 'ye bölümüdür. Bağlı durumda dalga fonksiyonu, enerji özdeğerleri ve karşılık gelen dalga özfonksiyonları kullanılarak

$$\Psi(x, t) = \sum_n C_n \psi_n(x) e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} \quad (2.2)$$

ile ifade edilir. Burada C_n katsayıları ile her bir durumunda bulunma olasılıkları hesaplanır. Bu noktadan sonra literatürdeki yaygın kullanımına uygun olarak dalga fonksiyonu olarak dalga özfonksiyonu kullanılacaktır.

Çekirdek-parçacık etkileşimlerini açıklayabilmek için WS, Hultén, Cusp, Pöschl-Teller, Morse potansiyelleri Schrödinger denkleminde çözülerek saçılma ve bağlı durumlar için çalışılmıştır (Bianchi 1994, Bohm 1951, Flunge 1917, Morse ve Feshback 1953, Newton 1982, Senn 1988).

2.2. Woods-Saxon Potansiyelinin Genelleştirilmesi

Literatürde WS potansiyelinin genelleştirilmiş ifadelerinin yer aldığı bir çok çalışma bulunmaktadır (Hassanabadi vd 2013, Ikhdair ve Sever 2007, Ikot ve Apkan 2012, Yazarloo ve Mehraban 2016). Bu çalışmalarda potansiyel enerji fonksiyonunun en sık karşılaşılan şekli

$$V(x) = \theta(-x) \left[\frac{-V_0}{p + q e^{-a(x+L)}} \right] + \theta(x) \left[\frac{-V_0}{\tilde{p} + \tilde{q} e^{b(x-\tilde{L})}} \right] \quad (2.3)$$

ile ifade edilir. Denklem (2.3)'de yeni eklenen dört parametre p , \tilde{p} , q ve \tilde{q} pozitif tamsayılar ve özel değerlerinden faydalanılarak farklı potansiyeller elde edilir. Bu özel durumlarından bazılarını, Alpdoğan ve arkadaşları (2012) Tablo-2.1'de verdiği gibi özetlemiştir.

WS potansiyeli	Hulthén potansiyeli	asimetrik Hulthén potansiyeli
$a = b$	$a = b$	$a \neq b$
$L = \tilde{L}$	$L = \tilde{L} = 0$	$L = \tilde{L} = 0$
$q = \tilde{q} = 1$	$q = -\tilde{q} = 1$	$q = -\tilde{q} = 1$
$p = \tilde{p} = 1$	$p = \tilde{p} = 1$	$p = \tilde{p} = 1$

simetrik Cusp potansiyeli	asimetrik cusp potansiyeli
$a = b$	$a \neq b$
$L = \tilde{L} = 0$	$L = \tilde{L} = 0$
$q = \tilde{q} = 1$	$q = \tilde{q} = 1$
$p = \tilde{p} = 0$	$p = \tilde{p} = 0$

Çizelge 2.1 Potansiyeller

Bu tip genelleştirilmeler potansiyel enerji fonksiyonunun genel yapısında önemli farklılıklara neden olmaz, dolayısıyla açıklanmak istenen fiziksel probleme yeni katkılar vermekten uzaktır. Daha açıklayıcı olabilmek için Şekil-2.1'de $V_0 = 100MeV$, $a = 1fm^{-1}$, $L = 6fm$, $p = \tilde{p} = 2$ için önce $q = \tilde{q} = 10$ sonra $q = \tilde{q} = 30$ parametreleri kullanılarak potansiyel enerji fonksiyonu çizilmiştir. Açıkça görüldüğü gibi sabit bir $p = \tilde{p}$ değeri için $q = \tilde{q}$ arttıkça potansiyel enerji derinliği artmakta ve dip noktası, süreksizlik anlamına da gelecek şekilde, sivrileşmektedir. Sabit bir $q = \tilde{q}$ değeri için ise $p = \tilde{p}$ arttıkça potansiyelin derinliği yayvanlaşarak artmaktadır. Her iki durumda da potansiyelin genişliği azalmaktadır. Oysa ki bu etkiler $p, \tilde{p}, q, \tilde{q}$ parametreleri olmadan da sızma ve yarıçap parametreleri ile de elde edilir. Yeni terimler eklenerek elde edilen potansiyel genelleştirilmiş formu iken sadece katsayıların değiştirilmesi ile elde edilen potansiyel modifiye edilmiş formudur. Dolayısıyla bu dört parametre probleme yeni bir katkı vermemektedir. Bu yüzden GWS potansiyeli yerine MWS potansiyeli olarak isimlendirmek doğru olacaktır.

Saçılma probleminde saçılacak parçacık önce çekirdeğin yüzeyi ile etkileşir. Yüzeyin parçacığa, çekirdeğin içine girmemesi için itici bir etkisi vardır. Çekirdek içinde bağlı durumda bulunan bir nükleon ise çekirdek dışına sızmamaları için yüzey tarafından da çekirdeğin içine doğru itici bir kuvvete maruz kalır. Bu yüzey etkisi WS potansiyelinde mevcut haliyle bulunmamaktadır. Literatürde bu yüzey etkileşmesi türevinin veya türevine benzer bir ifadenin eklenmesiyle hesaplanmaya çalışılmıştır (Aldoğan vd 2012, Alpdoğan ve Havare 2014, Bayrak ve Açıksöz 2015, Benamira vd 2007, Berkdemir vd 2005, 2006, Boztosun 2002, Boztosun vd 2005, Dapo vd 2012 Fakhri ve Sadeghi 2004, Gönül ve Köksal 2007, Hamzavi ve Rajavi 2013, Ikhdair ve Sever 2007, 2008, 2010, Koçak vd 2010, Lütfüoğlu vd 2016, Mackintosh ve Kobos 1982, Pannelle vd 2010). GWS potansiyeli, WS potansiyeline yüzey etkisi eklenerek

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{a(r-R)}} + \frac{W e^{a(r-R)}}{(1 + e^{a(r-R)})^2} \quad (2.4)$$

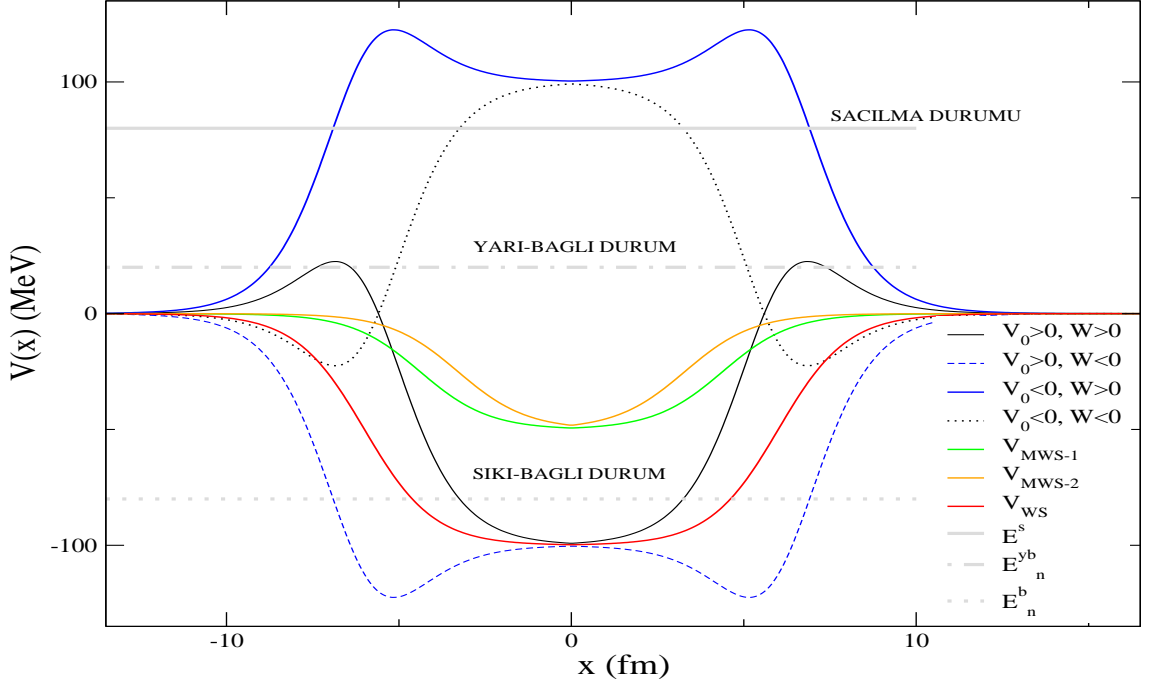
ile ifade edilebilmektedir. a sızma katsayısı, R yarıçap, V_0 ve W dip parametreleri potansiyelin şeklini belirler. a , R ve W parametreleri aynı p , \tilde{p} , q , \tilde{q} parametreleri gibi potansiyelin genişliğini ve dip nokasının sivrilikliğini değiştirir. Öyle ki a parametresi azaldıkça potansiyelin dip kısmı sivrilir, arttıkça da potansiyelin dibi genişler ve kare kuyu formuna doğru potansiyeli değiştirir. R parametresiyle doğru orantılı olarak da potansiyelin genişliği azalacak veya artacaktır. W parametresi ise yüzey etkilerini simgeleyen katsayıdır. Eğer $0 < W \leq V_0$ arasında ise potansiyel kuyu daralır ama henüz itici bir etki gözlenmez, $W > V_0$ olduğunda ise bir bariyer yüksekliği oluşur. Bu yapısal değişiklikten dolayı potansiyel enerjinin bu formuna GWS potansiyel enerjisi demek uygun düşmektedir.

Literatürde, GWS potansiyelinin irdelendiğinin iddia edildiği ama aslında farklı potansiyellerin dikkate alındığı çalışmalar da bulunmaktadır. Arda ve Sever 2008, Arda vd 2010 ve Meyur vd 2010 çalışmalarında GWS potansiyeli ile çalışmaya başlamışlar ama dönüşümleri sonucu genelleştirilmiş Hulthén potansiyeli çalışmışlardır. Hulthén potansiyelinin GWS potansiyelinden farkı etkileşmenin etkin olacağı yarıçap parametresi L 'nin dikkate alınmamasıdır.

Bu tez çalışmasında GWS potansiyelinin tek boyutta çözümleri çalışılmıştır.

$$V(x) = \theta(-x) \left[\frac{-V_0}{1 + e^{-a(x+L)}} + \frac{W e^{-a(x+L)}}{(1 + e^{-a(x+L)})^2} \right] + \theta(x) \left[\frac{-V_0}{1 + e^{a(x-L)}} + \frac{W e^{a(x-L)}}{(1 + e^{a(x-L)})^2} \right] \quad (2.5)$$

Dolayısıyla bu potansiyel kuyunun $V(x) = V(-x)$ simetrisi vardır. Bundan dolayı çözümlerinde simetrik ve antisimetrik isimlendirmeler kullanılmıştır. GWS ve MWS potansiyeli garifikleri Şekil 2.1'de görülmektedir.



Şekil 2.1 WS, MWS ve GWS potansiyellerinin rastsal seçilmiş saçılma, sıkı-bağlı ve yarı-bağlı durum enerjilerinin konuma göre değişimi. Kullanılan tüm parametreler Çizelge-2.2'de verilmiştir.

V_{GWS}	V_{MWS-1}	V_{MWS-2}	V_{WS}
$V_0 = 100MeV$	$V_0 = 100MeV$	$V_0 = 100MeV$	$V_0 = 100MeV$
$W = 250MeV$	$a = 1fm^{-1}$	$a = 1fm^{-1}$	$a = 1fm^{-1}$
$a = 1fm^{-1}$	$L = \tilde{L} = 6fm$	$L = \tilde{L} = 6fm$	$L = 6fm$
$L = 6fm$	$p = \tilde{p} = 2$	$p = \tilde{p} = 2$	
	$q = \tilde{q} = 10$	$q = \tilde{q} = 30$	

E^s	E_n^b	E_n^{yb}	mc^2	$\hbar c$
$80MeV$	$-80MeV$	$20MeV$	$940MeV$	$197.329MeV.fm$

Çizelge 2.2 Potansiyeller için parametre değerleri

3. MATERİYAL VE METOT

Bu bölümde, öncelikle GWS potansiyeli kullanılarak Schrödinger denklemi yazılacaktır. Daha sonra saçılma, sıkı-bağlı ve yarı-bağlı durumlar için enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonları bulunacaktır.

3.1. Genelleştirilmiş Woods-Saxon Potansiyelinin Schrödinger Denkleminde Çözümü

GWS potansiyeli

$$V(x) = \theta(-x) \left[\frac{-V_0}{1 + e^{-a(x+L)}} + \frac{W e^{-a(x+L)}}{(1 + e^{-a(x+L)})^2} \right] + \theta(x) \left[\frac{-V_0}{1 + e^{a(x-L)}} + \frac{W e^{a(x-L)}}{(1 + e^{a(x-L)})^2} \right] \quad (3.1)$$

negatif ve pozitif bölgeleri için ayrı ayrı çözümlenecektir.

3.1.1. Pozitif ve negatif bölgelerde dalga denklemleri

Potansiyelin simetrisinden dolayı parçacığın sol veya sağ taraftan gelmesi arasında bir fark yoktur. Bu tez çalışmasında parçacığın hep sol taraftan geldiği ve sağ tarafa gittiği kabul edilmektedir. Önce negatif bölge için çözümler yapılacaktır.

3.1.1.1. Negatif bölge dalga denklemi

Bu bölgede basamak fonksiyonları

$$\begin{aligned} \theta(-x) &= 1 \\ \theta(x) &= 0 \end{aligned}$$

değerlerini alır ve GWS potansiyeli

$$V(x) = \frac{-V_0}{1 + e^{-a(x+L)}} + \frac{W e^{-a(x+L)}}{(1 + e^{-a(x+L)})^2}$$

şekline indirgenir. Bu potansiyel etkisinde hareket eden sabit m kütleli parçacığa ait Schrödinger denklemi ise

$$\psi''_{sol}(x) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E + \frac{V_0}{1 + e^{a(x-L)}} - \frac{W e^{a(x-L)}}{(1 + e^{a(x-L)})^2} \right] \psi_{sol}(x) = 0 \quad (3.2)$$

gibidir. Bu denklem için

$$y \equiv -e^{-a(x+L)} \quad (3.3)$$

değişken değişimi yapılarak

$$dy = e^{-a(x+L)} a dx$$

$$\frac{d}{dx} = -a y \frac{d}{dy}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = a^2 \left(y^2 \frac{d^2}{dy^2} + y \frac{d}{dy} \right)$$

bulunur ve Denklem (3.2)'de yerlerine konularak y 'ye bağlı Schrödinger denklemi

$$\psi''_{sol}(y) + \frac{1}{y} \psi'_{sol}(y) + \left[\frac{-\varepsilon^2}{y^2} + \frac{\beta^2}{y^2(1-y)} + \frac{\gamma^2}{y^2(1-y)^2} \right] \psi_{sol}(y) = 0 \quad (3.4)$$

olarak elde edilir. Denklem (3.4)'de yer alan

$$-\varepsilon^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2 a^2} \quad (3.5)$$

$$\beta^2 \equiv \frac{2m(V_0 - W)}{\hbar^2 a^2} \quad (3.6)$$

$$\gamma^2 \equiv \frac{2mW}{\hbar^2 a^2} \quad (3.7)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Elde edilen Denklem (3.4), tekillik noktalarının daha kolay tespit edilebilmesi için düzenlenerek

$$\begin{aligned} & \psi''_{sol}(y) + \frac{1}{y} \psi'_{sol}(y) \\ & + \left[\frac{-\varepsilon^2 + \beta^2 + \gamma^2}{y^2} + \frac{\beta^2 + 2\gamma^2}{y} + \frac{\beta^2 + 2\gamma^2}{1-y} + \frac{\gamma^2}{(1-y)^2} \right] \psi_{sol}(y) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

bulunur. Burada $y = 0$ ve $y = 1$ noktaları tekillik göstermektedir. İlk tekil nokta $y \rightarrow 0$ iken, Schrödinger denklemindeki baskın terimlerin

$$\psi''_{sol}(y) + \frac{1}{y} \psi'_{sol}(y) + \left[\frac{-\varepsilon^2 + \beta^2 + \gamma^2}{y^2} \right] \psi_{sol}(y) \approx 0 \quad (3.9)$$

olduğu görülür. Böyle bir diferansiyel denkleme polinom tarzı çözüm önerilebilir.

$$\psi_{sol}(y) = y^\delta \quad (3.10)$$

Denklem (3.10) ve türevleri

$$\psi_{sol}(y) = y^\delta$$

$$\psi'_{sol}(y) = \delta y^{\delta-1}$$

$$\psi''_{sol}(y) = \delta(\delta-1)y^{\delta-2}$$

Denklem (3.9)'da yerine yazılarak

$$\delta(\delta-1)y^{\delta-2} + \frac{1}{y}\delta y^{\delta-1} + \left[\frac{-\varepsilon^2 + \beta^2 + \gamma^2}{y^2} \right] y^\delta = 0$$

elde edilir. Bu ifadeden δ 'nın eşiti

$$\delta^2 = \varepsilon^2 - \beta^2 - \gamma^2 \quad (3.11)$$

olarak elde edilir.

İkinci tekil nokta $y \rightarrow 1$ tekilliğinde ise, Schrödinger denkleminin baskın terimleri

$$\psi''_{sol}(y) + \frac{\gamma^2}{(1-y)^2} \psi_{sol}(y) \approx 0 \quad (3.12)$$

olarak yazılır ve benzer şekilde polinom tarzı

$$\psi_{sol}(y) = (1-y)^\tau \quad (3.13)$$

bir çözüme sahip olması gerektiği görülür. Denklem (3.13)'ü ve türevlerini,

$$\psi_{sol}(y) = (1-y)^\tau$$

$$\psi'_{sol}(y) = \tau(1-y)^{\tau-1}$$

$$\psi''_{sol}(y) = \tau(\tau-1)(1-y)^{\tau-2}$$

Denklem (3.12)'de yerine yazarak

$$\tau(\tau-1)(1-y)^{\tau-2} + \left[\frac{\gamma^2}{(1-y)^2} \right] (1-y)^\tau = 0$$

elde edilir. Bu da τ 'nın eşitini

$$\tau^2 - \tau = -\gamma^2 \quad (3.14)$$

olarak verir. Denklem (3.10) ve (3.13) sonuçlarını kullanarak $\psi_{sol}(y)$ için genel ifadesine, tekillik noktalarındaki davranışlarıyla genel bir fonksiyonun çarpımı olarak

$$\psi_{sol}(y) = y^\delta (1-y)^\tau f(y) \quad (3.15)$$

çözümü önerilir. Bu genel çözüm ve türevleri Denklem (3.8)'de yerine yazılarak

$$y(1-y)f''(y) + \left[(2\delta+1) - (2\delta+2\tau+1)y \right] f'(y) - \left[-\beta^2 - 2\gamma^2 + 2\delta\tau + \tau \right] f(y) = 0 \quad (3.16)$$

bulunur. Bu denklem Hipergeometrik diferansiyel denklem

$$y(1-y)f''(y) + \left[c - (1+a_1+b_1)y \right] f'(y) - a_1 b_1 f(y) = 0 \quad (3.17)$$

ile benzemektedir. Dolayısıyla çözümleri Hipergeometrik fonksiyon kullanılarak

$$f(y) = D_1 {}_2F_1(a_1, b_1, c_1; y) + D_2 y^{1-c_1} {}_2F_1(a_1-c_1+1, b_1-c_1+1, 2-c_1; y) \quad (3.18)$$

ile ifade edilir. Burada yer alan parametreler benzeştirme metoduyla

$$a_1 = \delta + \tau \mp \varepsilon$$

$$b_1 = \delta + \tau \pm \varepsilon$$

$$c_1 = 1 + 2\delta \quad (3.19)$$

olarak tanımlanır. a_1 ve b_1 için pozitif veya negatif seçim serbestliği vardır. Pozitif işaret seçilirse, b_1 için negatif işaretli olur.

$$a_1 = \delta + \tau + \varepsilon \quad (3.20)$$

$$b_1 = \delta + \tau - \varepsilon \quad (3.21)$$

Denklem (3.18), Denklem (3.15)'de yerine yazılarak dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned} \psi_{sol}(y) &= D_1 y^\delta (1-y)^\tau {}_2F_1(a_1, b_1, c_1; y) \\ &+ D_2 y^{-\delta} (1-y)^\tau {}_2F_1(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; y) \end{aligned} \quad (3.22)$$

bulunur. Dalga fonksiyonunun $x \rightarrow -\infty$ asimptotik davranışı incelenmelidir. Bunun için y değişkeninin bu limitte hangi değere gittiği

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y = -e^{-a(x+L)}) \rightarrow -\infty$$

olarak belirlenir. Bu sebeple y değeri de yaklaşık olarak

$$y \cong -e^{-a(x+L)} \quad (3.23)$$

değerini alır. Dalga fonksiyonunun Denklem (3.22)'de yer alan terimleri tek tek ele alınacaktır. $y \rightarrow -\infty$ limit durumu için

$${}_2F_1(a_1, b_1, c_1; y) \rightarrow -\infty$$

$${}_2F_1(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; y) \rightarrow -\infty$$

olur. Dolayısıyla dalga fonksiyonu da iyi tanımlı olmaz. Bu nedenle, Hipergeometrik fonksiyon özellikleri kullanılarak

$${}_2F_1(a_1, b_1, c_1; y) = \frac{\Gamma(c_1)\Gamma(b_1 - a_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1 - a_1)} (-y)^{-a_1} + \frac{\Gamma(c_1)\Gamma(a_1 - b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c_1 - b_1)} (-y)^{-b_1} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; y) &= \frac{\Gamma(2 - c_1)\Gamma(b_1 - a_1)}{\Gamma(b_1 - c_1 + 1)\Gamma(1 - a_1)} (-y)^{-(a_1 - c_1 + 1)} \\ &+ \frac{\Gamma(2 - c_1)\Gamma(a_1 - b_1)}{\Gamma(a_1 - c_1 + 1)\Gamma(1 - b_1)} (-y)^{-(b_1 - c_1 + 1)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

kullanılır. Denklem (3.24) ve (3.25)'de yer alan sabitleri

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{\Gamma(c_1)\Gamma(b_1 - a_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1 - a_1)} \\ &= \frac{\Gamma(1 + 2\delta)\Gamma(-2\varepsilon)}{\Gamma(\delta + \tau - \varepsilon)\Gamma(1 + \delta - \tau - \varepsilon)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} B &\equiv \frac{\Gamma(c_1)\Gamma(a_1 - b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c_1 - b_1)} \\ &= \frac{\Gamma(1 + 2\delta)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\delta + \tau + \varepsilon)\Gamma(1 + \delta - \tau + \varepsilon)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
F &\equiv \frac{\Gamma(2 - c_1)\Gamma(b_1 - a_1)}{\Gamma(b_1 - c_1 + 1)\Gamma(1 - a_1)} \\
&= \frac{\Gamma(1 - 2\delta)\Gamma(-2\varepsilon)}{\Gamma(-\delta + \tau - \varepsilon)\Gamma(1 - \delta - \tau - \varepsilon)} \tag{3.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &\equiv \frac{\Gamma(2 - c_1)\Gamma(a_1 - b_1)}{\Gamma(a_1 - c_1 + 1)\Gamma(1 - b_1)} \\
&= \frac{\Gamma(1 - 2\delta)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(-\delta + \tau + \varepsilon)\Gamma(1 - \delta - \tau + \varepsilon)} \tag{3.29}
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanarak Denklem (3.24) ve (3.25) fonksiyonları

$${}_2F_1(a_1, b_1, c_1; y) = \left[A(-y)^{-a_1} + B(-y)^{-b_1} \right] \tag{3.30}$$

$${}_2F_1(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; y) = \left[F(-y)^{-(a_1 - c_1 + 1)} + G(-y)^{-(b_1 - c_1 + 1)} \right] \tag{3.31}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, bu limit durumunda yaklaşık olarak

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (1 - y) = e^{-a(x+L)} \tag{3.32}$$

olur.

Denklem (3.23), (3.30), (3.31) ve (3.32), Denklem (3.22)'de yerlerine yazılarak

dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\psi_{sol}(x \rightarrow -\infty) &= D_1 \left(-e^{-a(x+L)} \right)^\delta \left(e^{-a(x+L)} \right)^\tau \\
&\times \left[A \left(e^{-a(x+L)} \right)^{-\delta-\tau-\varepsilon} + B \left(e^{-a(x+L)} \right)^{-\delta-\tau+\varepsilon} \right] \\
&+ D_2 \left(-e^{-a(x+L)} \right)^{-\delta} \left(e^{-a(x+L)} \right)^\tau \\
&\times \left[F \left(e^{-a(x+L)} \right)^{\delta-\tau-\varepsilon} + G \left(e^{-a(x+L)} \right)^{\delta-\tau+\varepsilon} \right] \\
&= D_1 (-1)^\delta \left[A \left(e^{-a(x+L)} \right)^{-\varepsilon} + B \left(e^{-a(x+L)} \right)^\varepsilon \right] \\
&+ D_2 (-1)^{-\delta} \left[F \left(e^{-a(x+L)} \right)^{-\varepsilon} + G \left(e^{-a(x+L)} \right)^\varepsilon \right] \quad (3.33)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada yer alan $\delta, \varepsilon, \tau$ parametrelerinden δ eşitliğini bulmak için Denklem (3.5), (3.6), (3.7) ve (3.11) kullanır ve

$$\begin{aligned}
\delta^2 &= \varepsilon^2 - \beta^2 - \gamma^2 \\
&= \frac{-2mE}{\hbar^2 a^2} - \frac{2m(V_0 - W)}{\hbar^2 a^2} - \frac{2mW}{\hbar^2 a^2} \\
&= -\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2 a^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$k_1^2 \equiv \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0) \quad (3.34)$$

olarak tanımlanarak

$$\delta^2 = \frac{-k_1^2}{a^2}$$

ve

$$\delta = \pm \frac{i}{a} k_1$$

bulunur. δ için pozitif değeri tercih edilmektedir.

$$\delta = \frac{i}{a}k_1 \quad (3.35)$$

ε eşitliğini bulmak için ise Denklem (3.5) kullanılmaktadır. Ayrıca

$$k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (3.36)$$

olarak tanımlanarak

$$-\varepsilon^2 = \left(\frac{k}{a}\right)^2$$

ve

$$\varepsilon = \pm \frac{i}{a}k$$

bulunur. ε için de pozitif değeri tercih edilmektedir.

$$\varepsilon = \frac{ik}{a} \quad (3.37)$$

Son olarak τ eşitliği için Denklem (3.14) kullanılmaktadır.

$$\tau = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}$$

olur. τ için pozitif değeri tercih edilmektedir.

$$\tau = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2} \quad (3.38)$$

Son olarak

$$(-1) = e^{i\pi} \quad (3.39)$$

eşitliği de kullanılarak dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned} \psi_{sol}(x \rightarrow -\infty) = e^{ik(x+L)} & \left[D_1 A e^{\frac{-\pi}{a}k_1} + D_2 F e^{\frac{\pi}{a}k_1} \right] \\ & + e^{-ik(x+L)} \left[D_1 B e^{\frac{-\pi}{a}k_1} + D_2 G e^{\frac{\pi}{a}k_1} \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

olarak bulunur.

Negatif bölgenin diğer sınırında, $x \rightarrow 0^-$ limit durumunda y değişkeni

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (y = -e^{-a(x+L)}) = 0$$

yakınsar ve

$$aL \gg 1$$

için

$$y \cong -e^{-a(x+L)} \quad (3.41)$$

değerini alır. Denklem (3.22)'de ki dalga fonksiyonunda yer alan terimler tek tek ele alınacaktır.

$y \rightarrow 0^-$ limit durumu için

$${}_2F_1(a, b, c; y) \rightarrow 1 \quad (3.42)$$

$${}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; y) \rightarrow 1 \quad (3.43)$$

olur. Ayrıca, $(1 - y)$ teriminin limit durumu ise

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - y) = 1 + e^{-aL}$$

olur. Dolayısıyla yaklaşık değeri

$$aL \gg 1$$

için

$$1 - y \cong 1 \quad (3.44)$$

bulunur. O halde sıfıra negatif bölgeden yaklaşıldıkça dalga fonksiyonunun davranışı Denklem (3.41), (3.42), (3.43) ve (3.44), Denklem (3.22)'de yerlerine yazılarak

$$\psi_{sol}(x \rightarrow 0^-) = D_1 (-1)^\delta e^{-a(x+L)\delta} + D_2 (-1)^{-\delta} e^{a(x+L)\delta} \quad (3.45)$$

ve de, Denklem (3.35), (3.37) ve (3.38) de yerlerine yazılarak

$$\psi_{sol}(x \rightarrow 0^-) = D_1 e^{\frac{-\pi}{a}k_1} e^{-ik_1(x+L)} + D_2 e^{\frac{\pi}{a}k_1} e^{ik_1(x+L)} \quad (3.46)$$

olarak bulunur.

3.1.1.2. Pozitif bölge dalga denklemleri

Bu bölgede basamak fonksiyonları

$$\begin{aligned}\theta(-x) &= 0 \\ \theta(x) &= 1\end{aligned}$$

değerlerini alır ve GWS potansiyeli

$$V(x) = \frac{-V_0}{1 + e^{a(x-L)}} + \frac{W e^{a(x-L)}}{(1 + e^{a(x-L)})^2} \quad (3.47)$$

şekline indirgenir. Bu potansiyel etkisinde hareket eden sabit m kütleli parçacığa ait Schrödinger denklemleri ise

$$\psi''_{sağ}(x) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E + \frac{V_0}{1 + e^{a(x-L)}} - \frac{W e^{a(x-L)}}{(1 + e^{a(x-L)})^2} \right] \psi_{sağ}(x) = 0 \quad (3.48)$$

gibidir. Bu denklem için

$$z = \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}} \quad (3.49)$$

değişken değişimi yapılarak

$$dz = -(1 + e^{a(x-L)})^{-2} e^{a(x-L)} a dx$$

$$\frac{d}{dx} = a z (z - 1) \frac{d}{dz}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = a^2 \left(z^2 (z - 1)^2 \frac{d^2}{dz^2} + z (z - 1) (2z - 1) \frac{d}{dz} \right)$$

bulunur ve Denklem (3.48)'de yerlerine yazılarak z 'ye bağlı Schrödinger denklemleri

$$\psi''_{sağ}(z) + \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z - 1} \right] \psi'_{sağ}(z) + \left[\frac{-\varepsilon^2}{z^2(z - 1)^2} + \frac{\beta^2}{z(z - 1)^2} + \frac{\gamma^2}{(z - 1)^2} \right] \psi_{sağ}(z) = 0 \quad (3.50)$$

olarak elde edilir. Burada Denklem (3.5), (3.6) ve (3.7)'deki terimler kullanılmaktadır.

Elde edilen Denklem (3.50), tekillik noktalarının daha kolaylıkla tespit edilebilmesi için düzenlenerek

$$\begin{aligned} \psi''_{sağ}(z) + \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \right] \psi'_{sağ}(z) \\ + \left[\frac{-\varepsilon^2}{z^2} + \frac{\beta^2 - 2\varepsilon^2}{z} + \frac{2\varepsilon^2 - \beta^2}{z-1} + \frac{\beta^2 - \varepsilon^2 + \gamma^2}{(z-1)^2} \right] \psi_{sağ}(z) = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

bulunur. Burada $z = 0$ ve $z = 1$ tekillik göstermektedir. İlk tekil nokta $z \rightarrow 1$ iken Schrödinger denklemindeki baskın terimlerin

$$\psi''_{sağ}(z) + \left[\frac{1}{z-1} \right] \psi'_{sağ}(z) + \frac{1}{(z-1)^2} \left[-\varepsilon^2 + \beta^2 + \gamma^2 \right] \psi_{sağ}(z) \approx 0 \quad (3.52)$$

olduğu görülür. Böyle bir diferansiyel denkleme polinom tarzı çözüm önerilebilir.

$$\psi_{sağ}(z) \equiv (z-1)^\nu \quad (3.53)$$

Denklem (3.56) ve türevleri

$$\psi_{sağ}(z) = (z-1)^\nu$$

$$\psi'_{sağ}(z) = \nu (z-1)^{\nu-1}$$

$$\psi''_{sağ}(z) = \nu(\nu-1)(z-1)^{\nu-2}$$

Denklem (3.52)'de yerlerine yazılarak

$$\left[\nu(\nu-1) + \nu + (-\varepsilon^2 + \beta^2 + \gamma^2) \right] (z-1)^{\nu-2} = 0$$

elde edilir. Bu ifadeden ν 'nün eşiti

$$\nu^2 = \varepsilon^2 - \beta^2 - \gamma^2 \quad (3.54)$$

olarak elde edilir.

İkinci tekil nokta $z \rightarrow 0$ tekilliğinde ise, Schrödinger denkleminin baskın terimleri

$$\psi''_{sağ}(z) + \frac{1}{z} \psi'_{sağ}(z) + \frac{-\varepsilon^2}{z^2} \psi_{sağ}(z) = 0 \quad (3.55)$$

olarak yazılır ve benzer şekilde polinom tarzı

$$\psi_{sağ}(z) \equiv z^\mu \quad (3.56)$$

çözümüne sahip olması gerektiği görülür. Denklem (3.56)'i ve türevlerini

$$\psi'_{sağ}(z) = \mu z^{\mu-1}$$

$$\psi''_{sağ}(z) = \mu(\mu-1) z^{\mu-2}$$

Denklem (3.55)'da yerlerine yazarak

$$\mu(\mu-1) z^{\mu-2} + \frac{1}{z} \mu z^{\mu-1} + \frac{-\varepsilon^2}{z^2} z^\mu = 0$$

elde edilir. Bu da μ 'nün eşitini

$$\mu^2 = \varepsilon^2 \quad (3.57)$$

olarak verir. Denklem (3.56) ve (3.53) sonuçlarını kullanarak $\psi_{sağ}(z)$ için genel ifadesine, tekillik noktalarındaki davranışlarıyla genel fonksiyonun çarpımı olarak

$$\psi_{sağ}(z) = z^\mu (z-1)^\nu f(z) \quad (3.58)$$

çözümü önerilir. Bu genel çözüm ve türevleri, Denklem (3.51)'da yerine yazılarak

$$\begin{aligned} z(z-1)f''(z) + \left[(2\mu+1+2\nu+1)z - (2\mu+1) \right] f'(z) \\ + \left[2\varepsilon^2 - \beta^2 + 2\mu\nu + \nu + \mu \right] f(z) = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

bulunur. Bu denklem Hipergeometrik diferansiyel denklem

$$z(z-1)f''(z) + \left[c_2 - (1+a_2+b_2)z \right] f'(z) - a_2 b_2 f(z) = 0 \quad (3.60)$$

ile benzerdir. Dolayısıyla Hipergeometrik fonksiyon kullanılarak

$$f(z) = D_3 {}_2F_1(a_2, b_2, c_2; z) + D_4 z^{1-c_2} {}_2F_1(a_2-c_2+1, b_2-c_2+1, 2-c_2; z) \quad (3.61)$$

ile ifade edilir. Burada yer alan parametreler benzeştirme metoduyla

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{1}{2} + \mu + \nu \mp \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2} \\
 b_2 &= \frac{1}{2} + \mu + \nu \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2} \\
 c_2 &= 1 + 2\mu
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

olarak tanımlanır. a_2 ve b_2 için pozitif veya negatif seçim serbestliği vardır. Pozitif işaret seçilirse, b_2 için negatif işaretli olur.

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{1}{2} + \mu + \nu - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2} \\
 &= \mu + \nu + \tau
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \frac{1}{2} + \mu + \nu + \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2} \\
 &= 1 + \mu + \nu - \tau
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Denklem (3.61), Denklem (3.58)'de yerine yazılarak dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 \psi_{sağ}(z) &= D_3 z^\mu (z-1)^\nu {}_2F_1(a_2, b_2, c_2; z) \\
 &\quad + D_4 z^{-\mu} (z-1)^\nu {}_2F_1(a_2 - c_2 + 1, b_2 - c_2 + 1, 2 - c_2; z)
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

bulunur. Dalga fonksiyonun $x \rightarrow \infty$ asimptotik davranışları incelenmelidir. Bunun için z değişkeninin bu limitte hangi değere gittiği

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (z) = 0$$

olarak belirlenir. Bu sebeple z değeri de yaklaşık olarak

$$z \cong e^{-a(x-L)} \tag{3.66}$$

değerini alır. Dalga fonksiyonunun Denklem (3.65)'de yer alan terimleri tek tek ele alınacaktır. Fonksiyonlar $z \rightarrow 0$ limit durumunda iyi tanımlıdır ve

$${}_2F_1(a_2, b_2, c_2; z) \rightarrow 1 \tag{3.67}$$

$${}_2F_1(a_2 - c_2 + 1, b_2 - c_2 + 1, 2 - c_2; z) \rightarrow 1 \tag{3.68}$$

olur. Ayrıca, bu limit durumunda yaklaşık olarak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (z - 1) = -1 \quad (3.69)$$

olur. O halde sıfıra pozitif bölgeden yaklaşıldıkça dalga fonksiyonunun davranışı Denklem (3.66), (3.67), (3.68) ve (3.69), Denklem (3.65)'de yerlerine yazılarak

$$\psi_{sağ}(x \rightarrow \infty) = D_3 \left(e^{a(x-L)} \right)^\mu (-1)^\nu + D_4 \left(e^{a(x-L)} \right)^{-\mu} (-1)^\nu \quad (3.70)$$

bulunur. Burada yer alan μ , ν parametrelerinden μ eşitliğini bulmak için Denklem (3.37) ve (3.57) kullanılarak

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \varepsilon^2 \\ &= \left(\frac{i}{a} k \right)^2 \end{aligned}$$

bulunur ve

$$\mu = \pm \frac{i}{a} k$$

elde edilir. μ için pozitif değeri tercih edilmektedir.

$$\mu = \frac{i}{a} k \quad (3.71)$$

ν eşitliğini bulmak için ise Denklem (3.11) ve (3.54) kullanılarak

$$\nu^2 = \varepsilon^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

bulunur ve

$$\nu = \pm \frac{i}{a} k_1$$

elde edilir. ν için pozitif değeri tercih edilmektedir.

$$\nu = \frac{i}{a} k_1 \quad (3.72)$$

O halde pozitif bölge dalga fonksiyonu sonsuzda

$$\psi_{sağ}(x \rightarrow \infty) = \left[D_3 e^{-ik(x-L)} + D_4 e^{ik(x-L)} \right] e^{\frac{-\pi}{a} k_1} \quad (3.73)$$

gibi davranır.

Pozitif bölgenin diğer sınırında, $x \rightarrow 0^+$ limit durumunda z değişkeni

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(z = \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}} \right) = 1$$

değerini alır ve

$$aL \gg 1 \quad (3.74)$$

için

$$z \cong 1 \quad (3.75)$$

değerini alır. Denklem (3.65)'de ki dalga fonksiyonunda yer alan terimler tek tek ele alınacaktır.

$z \rightarrow 1$ limit durumu için

$${}_2F_1(a_2, b_2, c_2; z) \rightarrow \infty$$

$${}_2F_1(a_2 - c_2 + 1, b_2 - c_2 + 1, 2 - c_2; z) \rightarrow \infty$$

olur. Dolayısıyla dalga fonksiyonu da iyi tanımlı olmaz. Bu nedenle Hipergeometrik fonksiyon özellikleri

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a_2, b_2, c_2; z) &= \frac{\Gamma(c_2) \Gamma(c_2 - a_2 - b_2)}{\Gamma(c_2 - a_2) \Gamma(c_2 - b_2)} {}_2F_1(a_2, b_2, a_2 + b_2 - c_2 + 1; 1 - z) \\ &+ (1 - z)^{c_2 - (a_2 + b_2)} \frac{\Gamma(c_2) \Gamma(a_2 + b_2 - c_2)}{\Gamma(a_2) \Gamma(b_2)} \\ &\times {}_2F_1(c_2 - a_2, c_2 - b_2, c_2 - a_2 - b_2 + 1; 1 - z) \end{aligned} \quad (3.76)$$

$${}_2F_1(a_2 - c_2 + 1, b_2 - c_2 + 1, 2 - c_2; z) =$$

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(2 - c_2) \Gamma(c_2 - a_2 - b_2)}{\Gamma(1 - a_2) \Gamma(1 - b_2)} \\ &\times {}_2F_1(a_2 - c_2 + 1, b_2 - c_2 + 1, 1 - a_2 - b_2 + c_2; 1 - z) \\ &+ (1 - z)^{a_2 + b_2 - c_2} \frac{\Gamma(2 - c_2) \Gamma(a_2 + b_2 - c_2)}{\Gamma(a_2 - c_2 + 1) \Gamma(b_2 - c_2 + 1)} \\ &\times {}_2F_1(1 - a_2, 1 - b_2, 1 + a_2 - b_2 - c_2; 1 - z) \end{aligned} \quad (3.77)$$

kullanılır. Denklem (3.76) ve (3.77) fonksiyonlarının içinde yer alan ${}_2F_1(a_2 - c_2 + 1, b_2 - c_2 + 1, 1 - a_2 - b_2 + c_2; 1 - z)$ ve ${}_2F_1(1 - a_2, 1 - b_2, 1 + a_2 - b_2 - c_2; 1 - z)$ fonksiyonlarının değeri ise

$${}_2F_1(a_2, b_2, a_2 + b_2 - c_2 + 1; 1 - z) \rightarrow 1$$

$${}_2F_1(c_2 - a_2, c_2 - b_2, c_2 - a_2 - b_2 + 1; 1 - z) \rightarrow 1$$

$${}_2F_1(a_2 - c_2 + 1, b_2 - c_2 + 1, 1 - a_2 - b_2 + c_2; 1 - z) \rightarrow 1$$

$${}_2F_1(1 - a_2, 1 - b_2), 1 + a_2 - b_2 - c_2; 1 - z) \rightarrow 1$$

biçiminde olur. Bu değerler Denklem (3.77)'de yerlerine yazılır. Ayrıca, Denklem (3.76) ve (3.77)'de yer alan sabitleri

$$\begin{aligned} M &\equiv \frac{\Gamma(c_2)\Gamma(c_2 - a_2 - b_2)}{\Gamma(c_2 - a_2)\Gamma(c_2 - b_2)} \\ &= \frac{\Gamma(2\mu + 1)\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(1 + \mu - \nu - \tau)\Gamma(\mu - \nu + \tau)} \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} N &\equiv \frac{\Gamma(c_2)\Gamma(a_2 + b_2 - c_2)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b_2)} \\ &= \frac{\Gamma(2\mu + 1)\Gamma(2\nu)}{\mu + \nu + \tau)\Gamma(1 + \mu + \nu - \tau)} \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} M_1 &\equiv \frac{\Gamma(2 - c_2)\Gamma(c_2 - a_2 - b_2)}{\Gamma(1 - a_2)\Gamma(1 - b_2)} \\ &= \frac{\Gamma(1 - 2\mu)\Gamma(-2\nu)}{1 - \mu - \nu - \tau)\Gamma(-\mu - \nu + \tau)} \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} N_1 &\equiv \frac{\Gamma(2 - c_2)\Gamma(a_2 + b_2 - c_2)}{\Gamma(a_2 - c_2 + 1)\Gamma(b_2 - c_2 + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(1 - 2\mu)\Gamma(2\nu)}{\Gamma(-\mu + \nu + \tau)\Gamma(1 - \mu + \nu - \tau)} \end{aligned} \quad (3.81)$$

biçiminde tanımlanarak Denklem (3.76) ve (3.77) fonksiyonları

$${}_2F_1(a_2, b_2, c_2; z) = M + (1 - z)^{c_2 - (a_2 + b_2)} N \quad (3.82)$$

$${}_2F_1(a_2 - c_2 + 1, b_2 - c_2 + 1, 2 - c_2; z) = M_1 + (1 - z)^{a_2 + b_2 - c_2} N_1 \quad (3.83)$$

olarak elde edilir. Ayrıca, bu limit durumunda yaklaşık olarak

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (z - 1) = \frac{-1}{e^{aL} + 1}$$

olur. Dolayısıyla yaklaşık değeri

$$aL \gg 1$$

için

$$z - 1 \cong -e^{a(x-L)} \quad (3.84)$$

bulunur. O halde sıfıra pozitif bölgeden yaklaşıldıkça dalga fonksiyonunun davranışı Denklem (3.39), (3.75), (3.82), (3.83) ve (3.84), Denklem (3.65)'de yerlerine yazılarak

$$\begin{aligned} \psi_{sağ}(x \rightarrow 0^+) &= D_3 (1)^\mu \left(-e^{a(x-L)} \right)^\nu \left[M + N \left(e^{a(x-L)} \right)^{-\nu} \right] \\ &+ D_4 (1)^{-\mu} \left(-e^{a(x-L)} \right)^\nu \left[M_1 + N_1 \left(e^{a(x-L)} \right)^{-2\nu} \right] \\ &= D_3 (-1)^\nu \left[M \left(e^{a(x-L)} \right)^\nu + N \right] \\ &+ D_4 (-1)^\nu \left[M_1 \left(e^{a(x-L)} \right)^\nu + N_1 \left(e^{a(x-L)} \right)^{-\nu} \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

ve Denklem (3.71), (3.72) de yerlerine yazılarak dalga fonksiyonunun davranışı

$$\begin{aligned} \psi_{sağ}(x \rightarrow 0^+) &= D_3 \left[M e^{ik_1(x-L)} + N \right] e^{\frac{-\pi}{a} k_1} \\ &+ D_4 \left[M_1 e^{ik_1(x-L)} + N_1 e^{-ik_1(x-L)} \right] e^{\frac{-\pi}{a} k_1} \end{aligned} \quad (3.86)$$

olarak bulunur.

3.2. Saçılma Durumu

Bu potansiyel kuyusunda saçılacak olan parçacıkların enerjisi $E^s > 0$ olmalıdır. Gelen dalganın bir kısmı ilerlerken bir kısmı da saçılabilir. O halde saçılma durumunun sınır şartları, $x \rightarrow -\infty$ 'da hem ilerleyen hem yansıyan dalgaları temsil eden özfonksiyonlardan, $x \rightarrow +\infty$ ise sadece ilerleyen dalgaları temsil eden özfonksiyonlardan oluşabilir.

3.2.1. Pozitif ve negatif bölge saçılma durumu dalga denklemleri

Önce negatif bölgede, sonra pozitif bölgede sınır şartlarına göre dalga fonksiyonu belirlenecektir.

3.2.1.1. Negatif bölge saçılma durumu dalga denklemi

Sınır şartları Denklem (3.40)'de uygulanarak hem ilerleyen hem de yansıyan dalganın temsil edildiği dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned} \psi_{sol}(x \rightarrow -\infty) = e^{ik(x+L)} & \left[D_1 A e^{\frac{-\pi}{a}k_1} + D_2 F e^{\frac{\pi}{a}k_1} \right] \\ & + e^{-ik(x+L)} \left[D_1 B e^{\frac{-\pi}{a}k_1} + D_2 G e^{\frac{\pi}{a}k_1} \right] \end{aligned} \quad (3.87)$$

olarak bulunur.

3.2.1.2. Pozitif bölge saçılma durumu dalga denklemi

Sınır şartları Denklem (3.73)'ye uygulanarak sadece ilerleyen dalganın temsil edildiği dalga fonksiyonunu

$$\psi_{sağ}(x \rightarrow \infty) = \left[D_4 e^{ik(x-L)} \right] e^{\frac{-\pi}{a}k_1} \quad (3.88)$$

olarak bulunur. O halde

$$D_3 = 0 \quad (3.89)$$

olmalıdır.

3.2.2. Saçılma durumunda süreklilik

İyi tanımlı olan dalga fonksiyonlarının süreklilik şartı her noktada kendilerinin ve birinci türevlerinin sürekli olmasıdır. Bu şarta uygun olarak sıfır noktasına giden Denklem (3.46) ve (3.86) dalga fonksiyonlarının kendileri

$$\begin{aligned}\psi_{sol}(x \rightarrow 0^-) &\rightarrow D_1 e^{\frac{-\pi}{a}k_1} e^{-ik_1(x+L)} + D_2 e^{\frac{\pi}{a}k_1} e^{ik_1(x+L)} \\ \psi_{sağ}(x \rightarrow 0^+) &\rightarrow D_4 M_1 e^{ik_1(x-L)} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} + D_4 N_1 e^{-ik_1(x-L)} e^{\frac{-\pi}{a}k_1}\end{aligned}$$

$x = 0$ noktasında

$$\psi_{sol}(x) \Big|_{x=0} = \psi_{sağ}(x) \Big|_{x=0}$$

$$D_1 e^{\frac{-\pi}{a}k_1} e^{-ik_1L} + D_2 e^{\frac{\pi}{a}k_1} e^{ik_1L} = D_4 M_1 e^{-ik_1L} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} + D_4 N_1 e^{ik_1L} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} \quad (3.90)$$

ve birinci türevleri de

$$\begin{aligned}\psi'_{sol}(x \rightarrow 0^-) &\rightarrow ik_1 \left[-D_1 e^{-ik_1(x+L)} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} + D_2 e^{ik_1(x+L)} e^{\frac{\pi}{a}k_1} \right] \\ \psi'_{sağ}(x \rightarrow 0^+) &\rightarrow ik_1 D_4 \left[M_1 e^{ik_1(x-L)} - N_1 e^{-ik_1(x-L)} \right] e^{\frac{-\pi}{a}k_1}\end{aligned}$$

$x = 0$ noktasında

$$\psi'_{sol}(x) \Big|_{x=0} = \psi'_{sağ}(x) \Big|_{x=0}$$

$$\left[D_1 e^{-ik_1L} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} - D_2 e^{ik_1L} e^{\frac{\pi}{a}k_1} \right] = D_4 \left[-M_1 e^{-ik_1L} + N_1 e^{ik_1L} \right] e^{\frac{-\pi}{a}k_1} \quad (3.91)$$

sonuçlarını verir. Burada bulunan Denklem (3.90) ve (3.91) taraf tarafa çıkartılarak

$$D_2 = D_4 M_1 e^{-2ik_1L} e^{\frac{-2\pi}{a}k_1} \quad (3.92)$$

ve taraf tarafa toplanarak

$$D_1 = D_4 N_1 e^{2ik_1L} \quad (3.93)$$

sonuçları elde edilir.

3.2.3. Olasılık yoğunluğunun korunumu

Saçılma durumunda, yansıma olasılığı(R) ve geçme olasılığı(T) toplamı bire eşittir.

$$R + T = 1 \quad (3.94)$$

Yansıma olasılığı, yansıyan dalga genliğinin (J_{yan}),

$$J_{yan} = \left| \left[D_1 B + D_2 G e^{\frac{2\pi}{a} k_1} \right] e^{\frac{-\pi}{a} k_1} \right|^2 \quad (3.95)$$

gelen dalga genliğine (J_{gel})

$$J_{gel} = \left| \left[D_1 A + D_4 F e^{\frac{2\pi}{a} k_1} \right] e^{\frac{-\pi}{a} k_1} \right|^2 \quad (3.96)$$

oranıdır.

$$R = \frac{J_{yan}}{J_{gel}}$$

Geçme olasılığı ise geçen dalga genliğinin (J_{gec}),

$$J_{gec} = \left| D_4 e^{\frac{-\pi}{a} k_1} \right|^2 \quad (3.97)$$

gelen dalga genliğine oranıdır.

$$T = \frac{J_{gec}}{J_{gel}}$$

O halde geçme ve yansıma katsayıları

$$R = \left| \frac{\left[D_1 B + D_2 G e^{\frac{2\pi}{a} k_1} \right] e^{\frac{-\pi}{a} k_1}}{\left[D_1 A + D_2 F e^{\frac{2\pi}{a} k_1} \right] e^{\frac{-\pi}{a} k_1}} \right|^2 \quad (3.98)$$

$$T = \left| \frac{D_4 e^{\frac{-\pi}{a} k_1}}{\left[D_1 A + D_2 F e^{\frac{2\pi}{a} k_1} \right] e^{\frac{-\pi}{a} k_1}} \right|^2 \quad (3.99)$$

olarak hesaplanır.

D_1 ve D_2 'nin eşiti olarak Denklem (3.92) ve (3.93) yerlerine yazılarak R

$$R = \frac{|B|^2|N_1|^2 + |G|^2|M_1|^2 + BN_1G^*M_1^*e^{4ik_1L} + GM_1B^*N_1^*e^{-4ik_1L}}{|A|^2|N_1|^2 + |F|^2|M_1|^2 + AN_1F^*M_1^*e^{4ik_1L} + FM_1A^*N_1^*e^{-4ik_1L}} \quad (3.100)$$

ve T

$$T = \frac{1}{|A|^2|N_1|^2 + |F|^2|M_1|^2 + AN_1F^*M_1^*e^{4ik_1L} + FM_1A^*N_1^*e^{-4ik_1L}} \quad (3.101)$$

bulunur. Buradaki A, B, F, G, M, N, M_1 ve N_1 sabitleri, Denklem (3.26), (3.27), (3.28), (3.29), (3.80) ve (3.81) olarak bulundu. Ancak, M ve N sabitlerinde yer alan μ, ν, γ parametrelerini; $\delta, \tau, \varepsilon$ cinsinden yazmak matematiksel kolaylık sağlayacaktır. Parametrelerin eşitlikleri Denklem (3.71), (3.72), (3.38), (3.35), (3.38) ve (3.37) incelenerek

$$\varepsilon = \mu$$

$$\delta = \nu$$

olduğu farkedilmektedir. Buradan hareketle M_1

$$M_1 = \frac{\Gamma(1 - 2\varepsilon)\Gamma(-2\delta)}{\Gamma(1 - \delta - \tau - \varepsilon)\Gamma(-\delta + \tau - \varepsilon)} \quad (3.102)$$

ve N_1 sabiti

$$N_1 = \frac{\Gamma(1 - 2\varepsilon)\Gamma(2\delta)}{\Gamma(1 + \delta - \tau - \varepsilon)\Gamma(\delta + \tau - \varepsilon)} \quad (3.103)$$

olur. A, B, F, G, M_1 ve N_1 sabitleri ve bu sabitlerin eşlenekleri

$$A^* = \frac{\Gamma(1 - 2\delta)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(-\delta + \theta + \varepsilon)\Gamma(1 - \delta - \theta + \varepsilon)}$$

$$B^* = \frac{\Gamma(1 - 2\delta)\Gamma(-2\varepsilon)}{\Gamma(-\delta + \theta - \varepsilon)\Gamma(1 - \delta - \theta - \varepsilon)}$$

$$F^* = \frac{\Gamma(1 + 2\delta)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\delta + \theta + \varepsilon)\Gamma(1 + \delta - \theta + \varepsilon)}$$

$$G^* = \frac{\Gamma(1 + 2\delta)\Gamma(-2\varepsilon)}{\Gamma(\delta + \theta - \varepsilon)\Gamma(1 + \delta - \theta - \varepsilon)}$$

$$M_1^* = \frac{\Gamma(1 + 2\varepsilon) \Gamma(2\delta)}{\Gamma(1 + \delta - \theta + \varepsilon) \Gamma(\delta + \theta + \varepsilon)}$$

$$N_1^* = \frac{\Gamma(1 + 2\varepsilon) \Gamma(-2\delta)}{\Gamma(1 - \delta - \theta + \varepsilon) \Gamma(-\delta + \theta + \varepsilon)}$$

incelenerek

$$A = G^*$$

$$A^* = G$$

$$\Rightarrow |A|^2 = |G|^2 \quad (3.104)$$

ve

$$F = B^*$$

$$F^* = B$$

$$\Rightarrow |F|^2 = |B|^2 \quad (3.105)$$

eşitlikleri olduğu görülmektedir.

Denklem (3.100) ve (3.101), Denklem (3.104) ve (3.105) eşitlikleri yerlerine yazılarak

$$R + T = \frac{|B|^2 |N_1|^2 + |G|^2 |M_1|^2 + B N_1 G^* M_1^* e^{4ik_1 L} + G M_1 B^* N_1^* e^{-4ik_1 L} + 1}{|A|^2 |N_1|^2 + |F|^2 |M_1|^2 + A N_1 F^* M_1^* e^{4ik_1 L} + F M_1 A^* N_1^* e^{-4ik_1 L}} \quad (3.106)$$

olur. Denklem (3.94) ve (3.106) birbirine eşitlenerek

$$\left(|M_1|^2 - |N_1|^2 \right) \left(|B|^2 - |A|^2 \right) = 1 \quad (3.107)$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuçta yer alan sabitler ise

$$|M_1|^2 = \frac{\Gamma(1 + 2\varepsilon) \Gamma(2\delta) \Gamma(1 - 2\varepsilon) \Gamma(-2\delta)}{\Gamma(1 + \delta - \theta + \varepsilon) \Gamma(\delta + \theta + \varepsilon) \Gamma(1 - \delta - \theta - \varepsilon) \Gamma(-\delta + \theta - \varepsilon)} \quad (3.108)$$

$$|N_1|^2 = \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)\Gamma(2\delta)\Gamma(1+2\varepsilon)\Gamma(-2\delta)}{\Gamma(1+\delta-\theta-\varepsilon)\Gamma(\delta+\theta-\varepsilon)\Gamma(1-\delta-\theta+\varepsilon)\Gamma(-\delta+\theta+\varepsilon)} \quad (3.109)$$

$$|B|^2 = \frac{\Gamma(1+2\delta)\Gamma(2\varepsilon)\Gamma(1-2\delta)\Gamma(-2\varepsilon)}{\Gamma(\delta+\theta+\varepsilon)\Gamma(1+\delta-\theta+\varepsilon)\Gamma(-\delta+\theta-\varepsilon)\Gamma(1-\delta-\theta-\varepsilon)} \quad (3.110)$$

$$|A|^2 = \frac{\Gamma(1+2\delta)\Gamma(-2\varepsilon)\Gamma(1-2\delta)\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\delta+\theta-\varepsilon)\Gamma(1+\delta-\theta-\varepsilon)\Gamma(-\delta+\theta+\varepsilon)\Gamma(1-\delta-\theta+\varepsilon)} \quad (3.111)$$

olarak bulunur. Buradan sonra çözüm için Gama fonksiyonu

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)}$$

$$\Gamma(1+n)\Gamma(1-n) = \frac{n\pi}{\sin(n\pi)}$$

$$\Gamma(-n)\Gamma(n) = \frac{-\pi}{n\sin(n\pi)}$$

ve trigonometrik fonksiyon özellikleri

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{-1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

kullanılarak, Denklem (3.108), (3.109), (3.110) ve (3.111)'de verilen sabitler

$$\begin{aligned} |M_1|^2 &= \frac{\frac{2\pi\varepsilon}{\sin(2\pi\varepsilon)} \frac{-\pi}{2\delta\sin(2\pi\delta)}}{\sin(\pi(\delta+\theta+\varepsilon))\sin(\pi(-\delta+\theta-\varepsilon))} \\ &= \frac{-\varepsilon}{\delta} \frac{\sin(\pi(\delta+\theta+\varepsilon))\sin(\pi(-\delta+\theta-\varepsilon))}{\sin(2\pi\varepsilon)\sin(2\pi\delta)} \\ &= \frac{-\varepsilon}{\delta} \frac{\frac{-1}{2}[\cos(2\pi\theta) - \cos(2\pi(\delta+\varepsilon))]}{\frac{-1}{2}[\cos(2\pi(\delta+\varepsilon)) - \cos(2\pi(\delta-\varepsilon))]} \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} |N_1|^2 &= \frac{-\varepsilon}{\delta} \frac{\sin(\pi(-\delta+\theta+\varepsilon))\sin(\pi(\delta+\theta-\varepsilon))}{\sin(2\pi\varepsilon)\sin(2\pi\delta)} \\ &= \frac{-\varepsilon}{\delta} \frac{\frac{-1}{2}[\cos(2\pi\theta) - \cos(2\pi(\delta-\varepsilon))]}{\frac{-1}{2}[\cos(2\pi(\delta+\varepsilon)) - \cos(2\pi(\delta-\varepsilon))]} \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned}
|B|^2 &= \frac{-\delta}{\varepsilon} \frac{\sin(\pi(-\delta + \theta - \varepsilon)) \sin(\pi(\delta + \theta - \varepsilon))}{\sin(2\pi\varepsilon) \sin(2\pi\delta)} \\
&= \frac{-\delta}{\varepsilon} \frac{\frac{-1}{2} [\cos(2\pi\theta) - \cos(2\pi(\delta + \varepsilon))]}{\frac{-1}{2} [\cos(2\pi(\delta + \varepsilon)) - \cos(2\pi(\delta - \varepsilon))]} \tag{3.114}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A|^2 &= \frac{-\delta}{\varepsilon} \frac{\sin(\pi(-\delta + \theta + \varepsilon)) \sin(\pi(\delta + \theta - \varepsilon))}{\sin(2\pi\varepsilon) \sin(2\pi\delta)} \\
&= \frac{-\delta}{\varepsilon} \frac{\frac{-1}{2} [\cos(2\pi\theta) - \cos(2\pi(\delta - \varepsilon))]}{\frac{-1}{2} [\cos(2\pi(\delta + \varepsilon)) - \cos(2\pi(\delta - \varepsilon))]} \tag{3.115}
\end{aligned}$$

olarak yeniden düzenlenir. Denklem (3.107)'de, Denklem (3.112), (3.113), (3.114) ve (3.115)'de verilen sabitler yerlerine yazılarak

$$\begin{aligned}
(|M_1|^2 - |N_1|^2) (|B|^2 - |A|^2) &= \left[\frac{-\varepsilon}{\delta} \frac{\frac{-1}{2} [\cos(2\pi\theta) - \cos(2\pi(\delta + \varepsilon))]}{\frac{-1}{2} [\cos(2\pi(\delta + \varepsilon)) - \cos(2\pi(\delta - \varepsilon))]} \right. \\
&\quad \left. - \frac{-\varepsilon}{\delta} \frac{\frac{-1}{2} [\cos(2\pi\theta) - \cos(2\pi(\delta - \varepsilon))]}{\frac{-1}{2} [\cos(2\pi(\delta + \varepsilon)) - \cos(2\pi(\delta - \varepsilon))]} \right] \\
&\quad \times \left[\frac{-\delta}{\varepsilon} \frac{\frac{-1}{2} [\cos(2\pi\theta) - \cos(2\pi(\delta + \varepsilon))]}{\frac{-1}{2} [\cos(2\pi(\delta + \varepsilon)) - \cos(2\pi(\delta - \varepsilon))]} \right. \\
&\quad \left. - \frac{-\delta}{\varepsilon} \frac{\frac{-1}{2} [\cos(2\pi\theta) - \cos(2\pi(\delta - \varepsilon))]}{\frac{-1}{2} [\cos(2\pi(\delta + \varepsilon)) - \cos(2\pi(\delta - \varepsilon))]} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\varepsilon}{\delta} \frac{-\delta}{\varepsilon} \left[\frac{\cos(2\pi\theta) - \cos(2\pi(\delta + \varepsilon)) - \cos(2\pi\theta) + \cos(2\pi(\delta - \varepsilon))}{\cos(2\pi(\delta + \varepsilon)) - \cos(2\pi(\delta - \varepsilon))} \right] \\
&\times \left[\frac{\cos(2\pi\theta) - \cos(2\pi(\delta + \varepsilon)) - \cos(2\pi\theta) + \cos(2\pi(\delta - \varepsilon))}{\cos(2\pi(\delta + \varepsilon)) - \cos(2\pi(\delta - \varepsilon))} \right] \\
&= (-1)(-1) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{3.116}$$

Böylece Denklem (3.94) eşitliğinin doğruluğu ispatlanır. Saçılma durumu için tünelleme, geçiş rezonansı olarak da adlandırılır. Geçme katsayısını belli değerlerde 1'e, yansıma katsayısı da belli değerlerde 0'a eşit olmasıyla ifade edilir. Bu koşullar

$$\sin(4k_1L) = \frac{1}{2i} \left[\frac{(BN_1)^2 - (GM_1)^2}{BN_1GM_1} \right] \tag{3.117}$$

ifadesini verir. Bu eşitlik, Denklem (3.34), (3.27), (3.109), (3.29), (3.108)'de yeralan k_1 , B , N_1 , G , M_1 sabitlerinin eşitlikleri gözönüne alındığında, rezonans koşullarının potansiyel parametrelerine ve parçacığın enerjisine bağlı olduğunu açıkça göstermiştir.

3.3. Bağlı Durum

Parçacıklar bağlı durumda, saçılma durumundan farklı olarak, $-V_0 < E_n^b < \frac{(V_0-W)^2}{4W}$ olarak belirli bir bölgeye sıkışmışlardır. Sıkıştıkları bu bölge iki alt bölgeye ayrılabilir. $-V_0 < E_n^b < 0$ bölgesi sıkı-bağlı durumdur. Bu bölgede parçacıkların dışarı sızması mümkün değildir. Diğer bölge ise $0 < E_n^b < \frac{(V_0-W)^2}{4W}$, yarı-bağlı durum olarak adlandırılır ve uygun şartlarda parçacık kaçışlarına izin verir.

3.4. Sıkı-Bağlı Durum

Sıkı-bağlı durumda çekirdek parçacıkları o kadar sıkı tutmaktadır ki, bu parçacıkların kaçışları mümkün değildir. Dolayısıyla $x \rightarrow -\infty$ ve $x \rightarrow \infty$ sınır şartlarında ilerleyen ve yansıyan dalgaları temsil eden fonksiyonlar yoktur.

3.4.1. Pozitif ve negatif bölgelerde sıkı-bağlı durum dalga denklemleri

Önce negatif bölgede, sonra pozitif bölgede sınır şartlarına göre dalga fonksiyonu belirlenecektir.

3.4.1.1. Negatif bölge sıkı-bağlı durum dalga denklemi

Sıkı-bağlı durumu betimleyen enerji özdeğeri negatiftir. Bu nedenle de enerji özdeğeri ifadesinin yer aldığı parametrelerden ε , Denklem (3.36) kullanılarak

$$\varepsilon = \mp \frac{k}{a} \tag{3.118}$$

olarak bulunur. Burada

$$\varepsilon = \frac{k}{a} \quad (3.119)$$

tercih edilmektedir.

Bir diğer parametre

$$\delta^2 = \frac{-2m(E - V_0)}{\hbar^2 a^2} \quad (3.120)$$

ayrıca

$$\kappa^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \quad (3.121)$$

tanımlanarak ve $E < V_0$ olduğu da göz önünde tutularak

$$\delta = \mp \frac{i\kappa}{a} \quad (3.122)$$

bulunur. Burada

$$\delta = \frac{i\kappa}{a} \quad (3.123)$$

tercih edilmektedir.

Dolayısıyla da Denklem (3.33) sıkı-bağlı durum için düzenlenerek dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned} \psi_{sol}(x \rightarrow -\infty) = e^{k(x+L)} & \left[D_1 A e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} + D_2 F e^{\frac{\pi}{a}\kappa} \right] \\ & + e^{-k(x+L)} \left[D_1 B e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} + D_2 G e^{\frac{\pi}{a}\kappa} \right] \end{aligned} \quad (3.124)$$

elde edilir. Sınır şartı, dalga fonksiyonuna uygulanarak

$$\psi_{sol}(x \rightarrow -\infty) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla da

$$D_1 B e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} + D_2 G e^{\frac{\pi}{a}\kappa} = 0 \quad (3.125)$$

olur.

3.4.1.2. Pozitif bölge sıkı-bağlı durum dalga denklemi

Denklem (3.36) ve (3.121) kullanılarak parametreler

$$\mu = \frac{k}{a} \quad (3.126)$$

ve

$$\nu = \frac{i\kappa}{a} \quad (3.127)$$

elde edilir. Dolayısıyla da Denklem (3.70) sıkı-bağlı durum için düzenlenerek dalga fonksiyonu

$$\psi_{sağ}(x \rightarrow \infty) = \left[D_3 e^{k(x-L)} + D_4 e^{-k(x-L)} \right] e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} \quad (3.128)$$

elde edilir. Sınır şartı, dalga fonksiyonuna uygulanarak

$$\psi_{sağ}(x \rightarrow \infty) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla da

$$D_4 = 0 \quad (3.129)$$

olur.

3.4.2. Sıkı-bağlı durumda süreklilik

İyi tanımlı olan dalga özfonksiyonlarının süreklilik şartı her noktada kendilerinin ve birinci türevlerinin sürekli olmasıdır. Sıkı-bağlı durum için Denklem (3.119) ile (3.123), Denklem (3.45)'de ve Denklem (3.126) ile (3.127), Denklem (3.85)'de yerlerine yazılarak bu şarta uygun olarak sıfır noktasına giden dalga fonksiyonlarının kendileri

$$\begin{aligned} \psi_{sol}(x \rightarrow 0^-) &\rightarrow D_1 e^{-i\kappa(x+L)} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} + D_2 e^{i\kappa(x+L)} e^{\frac{\pi}{a}\kappa} \\ \psi_{sağ}(x \rightarrow 0^+) &\rightarrow D_3 M e^{i\kappa(x-L)} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} + D_3 N e^{-i\kappa(x-L)} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} \end{aligned}$$

$x = 0$ noktasında

$$\psi_{sol}(x) \Big|_{x=0} = \psi_{sağ}(x) \Big|_{x=0}$$

$$D_1 e^{-i\kappa L} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} + D_2 e^{i\kappa L} e^{\frac{\pi}{a}\kappa} = D_3 M e^{-i\kappa L} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} + D_3 N e^{i\kappa L} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} \quad (3.130)$$

Denklem (3.125) koşulu kullanılarak her D_2 görülen yere

$$D_2 = -D_1 \frac{B}{G} e^{\frac{-2\pi}{a}\kappa} \quad (3.131)$$

yazılarak

$$\begin{aligned} D_1 \left[e^{-i\kappa L} - \frac{B}{G} e^{i\kappa L} \right] e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} &= D_3 \left[M e^{-i\kappa L} + N e^{i\kappa L} \right] e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} \\ e^{-i\kappa L} \left[D_1 - M D_3 \right] + e^{i\kappa L} \left[-\frac{B}{G} D_1 - N D_3 \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.132)$$

biçiminde yeniden düzenlenir ve birinci türevleri de

$$\begin{aligned} \psi'_{sol}(x \rightarrow 0^-) &\rightarrow i\kappa \left[-D_1 e^{-i\kappa(x+L)} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} + D_2 e^{i\kappa(x+L)} e^{\frac{\pi}{a}\kappa} \right] \\ \psi'_{sağ}(x \rightarrow 0^+) &\rightarrow i\kappa \left[D_3 M e^{i\kappa(x-L)} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} + (-i\kappa) D_3 N e^{-i\kappa(x-L)} e^{\frac{\pi}{a}\kappa} \right] \end{aligned}$$

$x = 0$ noktasında

$$\psi'_{sol}(x) \Big|_{x=0} = \psi'_{sağ}(x) \Big|_{x=0}$$

$$-D_1 e^{-i\kappa L} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} + D_2 e^{i\kappa L} e^{\frac{\pi}{a}\kappa} = D_3 M e^{-i\kappa L} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} - D_3 N e^{i\kappa L} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} \quad (3.133)$$

her D_2 görülen yere Denklem (3.131) eşitliği yazılarak

$$\begin{aligned} D_1 \left[-e^{-i\kappa L} - \frac{B}{G} e^{i\kappa L} \right] e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} &= D_3 \left[M e^{-i\kappa L} - N e^{i\kappa L} \right] e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} \\ e^{-i\kappa L} \left[D_1 + M D_3 \right] + e^{i\kappa L} \left[\frac{B}{G} D_1 - N D_3 \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.134)$$

elde edilir. Burada bulunan Denklem (3.130) ve (3.133), taraf tarafa toplanarak

$$D_2 = D_3 M e^{\frac{-2\pi}{a}\kappa} e^{-2i\kappa L} \quad (3.135)$$

ve taraf tarafa çıkartılarak

$$D_1 = D_3 N e^{2i\kappa L} \quad (3.136)$$

sonuçları elde edilir.

3.4.3. Sıkı-bağlı durum enerji özdeğerleri

Denklem (3.156) ve (3.158)'in ikisi de sıkı-bağlı durum dalga denkleminin sürekliliği sağlamaktadır. O halde bu denklemler birbirini de sağlamalıdır. Sonuçta çift ve tek olarak adlandırılan iki farklı çözüm elde edilecektir.

3.4.3.1. Sıkı-bağlı durum çift çözümlerin enerji özdeğerleri

Denklem (3.132)'yi sağlayan

$$D_1 = MD_3$$

$$D_1 = \frac{-NG}{B} D_3 \quad (3.137)$$

biçiminde iki koşulun olduğu görülür. Bu sonuçlar Denklem (3.134)'ü de sağlamalıdır. Bu nedenle, Denklem (3.132)'de Denklem (3.137) koşulları yerlerine yazılarak

$$e^{-i\kappa L} \left[MD_3 + MD_3 \right] + e^{i\kappa L} \left[\frac{B}{G} \left(\frac{-NG}{B} \right) D_3 - ND_3 \right] = 0$$

$$e^{-i\kappa L} M - e^{i\kappa L} N = 0 \quad (3.138)$$

elde edilir ve burada

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t) \quad (3.139)$$

$$\cos(-t) = \cos(t) \quad (3.140)$$

$$\sin(-t) = -\sin(t) \quad (3.141)$$

trigonometrik fonksiyon özellikleri kullanılarak

$$M \left[\cos(-\kappa L) + i \sin(-\kappa L) \right] - N \left[\cos(\kappa L) + i \sin(\kappa L) \right] = 0$$

$$M \left[\cos(\kappa L) - i \sin(\kappa L) \right] - N \left[\cos(\kappa L) + i \sin(\kappa L) \right] = 0$$

$$(M - N) \cos(\kappa L) - i(M + N) \sin(\kappa L) = 0$$

$$\tan(\kappa L) = \frac{M - N}{i(M + N)} \quad (3.142)$$

biçiminde yeniden düzenlenir. Ayrıca, diğer bir trigonometrik özellik

$$\tan(t \pm n' \pi) = \tan(t); \quad n' = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.143)$$

tanjant fonksiyonunun periyodikliği kullanılarak

$$\tan(\kappa L \pm n' \pi) = \tan(\kappa L); \quad n' = 0, 1, 2, 3, \dots$$

elde edilir.

Denklem (3.143), Denklem (3.142)'de kullanılarak

$$\tan(\kappa L \pm n' \pi) = \frac{M - N}{i(M + N)}$$

$$\kappa L = \arctan \left[\frac{M - N}{i(M + N)} \right] \mp n' \pi$$

$$\kappa = \frac{1}{L} \left[\arctan \left[\frac{M - N}{i(M + N)} \right] \mp n' \pi \right]$$

bulunur. Dalga sayısının tanımı Denklem (3.121) kullanılarak

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} ((E_n^b) + V_0)} = \frac{1}{L} \left[\arctan \left[\frac{M - N}{i(M + N)} \right] \mp n' \pi \right]$$

$$(E_n^b) + V_0 = \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left| \arctan \left[\frac{M - N}{i(M + N)} \right] \mp n' \pi \right|^2$$

çift çözümler için n' 'ye bağlı, reel E_n^b enerji özdeğerini veren bağıntı

$$-E_n^b - V_0 + \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left| \arctan \left[\frac{M - N}{i(M + N)} \right] \mp n' \pi \right|^2 = 0, \quad n' = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.144)$$

biçiminde olur.

Şimdi de, negatif ve pozitif bölgeler için dalga denklemleri bulunacaktır.

Negatif bölge :

Denklem (3.22)'de Denklem (3.38), (3.119) ve (3.123) yerlerine yazılarak

$$\psi_{sol}(y) = MD_3 y^{\frac{i}{a}\kappa} (1 - y)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} {}_2F_1(a_1, b_1, c_1; y)$$

$$+ N D_3 e^{\frac{-2\pi}{a}\kappa} y^{-\frac{i}{a}\kappa} (1 - y)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} {}_2F_1(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; y)$$

elde edilir. Sonra Denklem (3.131) ve (3.137) koşulları ve y değişkeni Denklem (3.3) kullanılarak x 'e dönüştürülüp yerlerine yazılarak

$$\begin{aligned}
\psi_{sol}(x) &= MD_3 \left(-e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{i}{a}\kappa} \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} \\
&\quad \times {}_2F_1 \left(a_1, b_1, c_1; -e^{-a(x+L)} \right) \\
&\quad + ND_3 e^{\frac{-2\pi}{a}\kappa} \left(-e^{-a(x+L)} \right)^{-\frac{i}{a}\kappa} \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} \\
&\quad \times {}_2F_1 \left(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; -e^{-a(x+L)} \right) \\
&= D_3 \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} \left[M \left(e^{i\pi} \right)^{\frac{i}{a}\kappa} \left(e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{i}{a}\kappa} \right. \\
&\quad \times {}_2F_1 \left(a_1, b_1, c_1; -e^{-a(x+L)} \right) \\
&\quad \left. + N e^{\frac{-2\pi}{a}\kappa} \left(e^{i\pi} \right)^{-\frac{i}{a}\kappa} \left(e^{-a(x+L)} \right)^{-\frac{i}{a}\kappa} \right. \\
&\quad \left. \times {}_2F_1 \left(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; -e^{-a(x+L)} \right) \right]
\end{aligned}$$

negatif bölge, çift çözümlerde sıkı-bağlı durum dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\psi_{sol}(x) &= D_3 \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} \left[M e^{-i\kappa(x+L)} {}_2F_1 \left(a_1, b_1, c_1; -e^{-a(x+L)} \right) \right. \\
&\quad \left. + N e^{i\kappa(x+L)} {}_2F_1 \left(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; -e^{-a(x+L)} \right) \right] \quad (3.145)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Pozitif bölge :

Denklem (3.65)'de Denklem (3.38), (3.126), (3.127) yerlerine yazılarak

$$\psi_{sağ}(z) = D_3 z^{\frac{k}{a}} (z - 1)^{\frac{i}{a}\kappa} {}_2F_1(a_2, b_2, c_2; z)$$

olur. Sonra da Denklem (3.129), (3.131), (3.137) ve z değişkeni Denklem (3.49) yerlerine yazılarak

$$\psi_{sağ}(x) = D_3 \left(\frac{1}{1 + e^{a(x-L)}} \right)^{\frac{k}{a}} \left(\frac{1}{1 + e^{a(x-L)}} - 1 \right)^{\frac{i}{a}\kappa} {}_2F_1 \left(a_2, b_2, c_2; \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}} \right)$$

bulunur. Ayrıca

$$\cosh(t) = \frac{e^{-t} + e^t}{2} \quad (3.146)$$

trigonometrik fonksiyon özelliğinden de faydalanarak

$$\begin{aligned} \psi_{sağ}(x) &= D_3 \left(\frac{1}{1 + e^{a(x-L)}} \right)^{\frac{k}{a}} \left(\frac{-e^{a(x-L)}}{1 + e^{a(x-L)}} \right)^{\frac{i}{a}\kappa} {}_2F_1 \left(a_2, b_2, c_2; \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}} \right) \\ &= D_3 \left[\frac{1}{1 + e^{a(x-L)}} \left(\frac{e^{-\frac{a}{2}(x-L)}}{e^{\frac{-a}{2}(x-L)}} \right) \right]^{\frac{k}{a}} \left[\frac{e^{a(x-L)}}{1 + e^{a(x-L)}} \left(\frac{e^{-\frac{a}{2}(x-L)}}{e^{\frac{-a}{2}(x-L)}} \right) \right]^{\frac{i}{a}\kappa} (-1)^{\frac{i}{a}\kappa} \\ &\quad \times {}_2F_1 \left(a_2, b_2, c_2; \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}} \right) \\ &= D_3 \left[\frac{e^{-\frac{a}{2}(x-L)}}{2 \cosh\left(\frac{a}{2}(x-L)\right)} \right]^{\frac{k}{a}} \left[\frac{e^{\frac{a}{2}(x-L)}}{2 \cosh\left(\frac{a}{2}(x-L)\right)} \right]^{\frac{i}{a}\kappa} (e^{i\pi})^{\frac{i}{a}\kappa} \\ &\quad \times {}_2F_1 \left(a_2, b_2, c_2; \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}} \right) \end{aligned}$$

pozitif bölge, çift çözümlerde sıkı-bağlı durum dalga fonksiyonu

$$\psi_{sağ}(x) = D_3 \frac{e^{\frac{i\kappa-k}{2}(x-L)}}{[2 \cosh\left(\frac{a}{2}(x-L)\right)]^{\frac{i\kappa+k}{a}}} e^{-\frac{\pi}{a}\kappa} {}_2F_1 \left(a_2, b_2, c_2; \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}} \right)$$

elde edilir.

3.4.3.2. Sıkı-bağlı durum tek çözümlerin enerji özdeğerleri

Denklem (3.134)'i sağlayan

$$D_1 = -MD_3$$

$$D_1 = \frac{NG}{B} D_3 \quad (3.147)$$

biçiminde iki koşulun olduğu görülür. Bu sonuçlar Denklem (3.132)'i de sağlamalıdır. Bu nedenle, Denklem (3.132)'de, Denklem (3.147) koşulları yerlerine yazılarak

$$e^{-i\kappa L} \left[-MD_3 - MD_3 \right] + e^{i\kappa L} \left[-\frac{B}{G} \left(\frac{NG}{B} \right) D_3 - ND_3 \right] = 0$$

$$e^{-i\kappa L} M + e^{i\kappa L} N = 0 \quad (3.148)$$

elde edilir ve burada Denklem (3.139), (3.141), (3.143) özellikleri ve Denklem (3.34) yerlerine yazılarak, tek çözümler için n' 'ye bağlı, reel E_n^b enerji özdeğerini veren bağıntı

$$-E_n^b - V_0 + \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left| \arctan \left[\frac{M+N}{i(M-N)} \right] \mp n' \pi \right|^2 = 0, n' = 0, 1, 2, 3, \dots$$

biçiminde bulunur.

Şimdi de, negatif ve pozitif bölgeleri için ayrı ayrı genel dalga denklemleri bulunacaktır.

Negatif bölge :

Denklem (3.22)'de Denklem (3.38), (3.119), (3.123) yerlerine yazılarak

$$\psi_{sol}(y) = -MD_3 y^{\frac{i}{a}\kappa} (1-y)^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma^2}} {}_2F_1(a, b, c; y)$$

$$- ND_3 y^{\frac{-i}{a}\kappa} (1-y)^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma^2}} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; y)$$

bulunur. Sonra da Denklem (3.131), (3.147), (3.129) koşulları ve y değişkeni Denklem (3.3) kullanılarak x 'e dönüştürülüp yerlerine yazılarak

$$\psi_{sol}(x) = -MD_3 \left(-e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{i}{a}\kappa} \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma^2}}$$

$$\times {}_2F_1 \left(a_1, b_1, c_1; -e^{-a(x+L)} \right)$$

$$- ND_3 e^{\frac{-2\pi}{a}\kappa} \left(-e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{-i}{a}\kappa} \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma^2}}$$

$$\times {}_2F_1 \left(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; -e^{-a(x+L)} \right)$$

$$= D_3 \left(1 + e^{-a(x+L)}\right)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} \left[-M\left(e^{i\pi}\right)^{\frac{i}{a}\kappa} {}_2F_1\left(a_1, b_1, c_1; -e^{-a(x+L)}\right) - N e^{\frac{-2\pi}{a}\kappa} \left(e^{i\pi}\right)^{-\frac{i}{a}\kappa} {}_2F_1\left(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; -e^{-a(x+L)}\right) \right]$$

negatif bölge, tek çözümlerde sıkı-bağlı durum dalga fonksiyonu

$$\psi_{sol}(x) = D_3 \left(1 + e^{-a(x+L)}\right)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} \quad (3.149)$$

$$\times \left[-M e^{-i\kappa(x+L)} {}_2F_1\left(a_1, b_1, c_1; -e^{-a(x+L)}\right) - N e^{i\kappa(x+L)} {}_2F_1\left(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; -e^{-a(x+L)}\right) \right] \quad (3.150)$$

elde edilir.

Pozitif bölge :

Denklem (3.65)'de Denklem (3.38), (3.126), (3.127) ile Denklem (3.155), (3.147), (3.129) koşulları ve z değişkeni Denklem (3.49) yerlerine yazılarak Denklem (3.146) özelliği uygulanır. Böylece, pozitif bölge, tek çözümlerde sıkı-bağlı durum dalga fonksiyonu

$$\psi_{sağ}(x) = D_3 \frac{e^{\frac{i\kappa-k}{2}(x-L)}}{\left[2 \cosh\left(\frac{a}{2}(x-L)\right)\right]^{\frac{i\kappa+k}{a}}} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} {}_2F_1\left(a_2, b_2, c_2; \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}}\right) \quad (3.151)$$

elde edilir.

3.5. Yarı-bağlı Durum

Parçacıklar, yarı-bağlı durumda $0 < E_n^{yb} < \frac{(V_0-W)^2}{4W}$ şartına uygun olarak bir bölgede sıkışmışlardır. Buradaki $\frac{(V_0-W)^2}{4W}$, potansiyel bariyer yüksekliğidir. Uygun koşullarda bariyerin diğer tarafına sızabilirler. O halde yarı-bağlı durum sınır şartları, $x \rightarrow -\infty$ iken sadece negatif yönde ilerleyen dalgaları temsil eden fonksiyonları, $x \rightarrow \infty$ iken sadece pozitif yönde ilerleyen dalgaları temsil eden fonksiyonları gerektirir.

3.5.1. Negatif ve pozitif bölgelerde yarı-bağlı durum dalga denklemleri

Önce negatif bölgede, sonra pozitif bölgede sınır şartlarına göre dalga fonksiyonu belirlenecektir.

3.5.1.1. Negatif bölge yarı-bağlı durum dalga denklemi

Uygun şartlarda potansiyel kuyudan sızmış dalga fonksiyonu olabilir. Sınır şartı Denklem (3.40)'ye uygulanarak dalga fonksiyonu

$$\psi_{sol}(x \rightarrow -\infty) = e^{ik_1(x+L)} \left[D_1 B e^{-\frac{\pi}{a}k_1} + D_2 G e^{\frac{\pi}{a}k_1} \right]$$

bulunur. Dolayısıyla da potansiyel kuyuya doğru ilerleyen dalga fonksiyonu seçimiyle

$$D_1 A e^{-\frac{\pi}{a}k_1} + D_2 F e^{\frac{\pi}{a}k_1} = 0 \quad (3.152)$$

olması sağlanır.

3.5.1.2. Pozitif bölge yarı-bağlı durum dalga denklemi

Pozitif bölgede sızabilen parçacık sadece ilerleyerek potansiyel kuyudan uzaklaşabilir. Bu sınır şartı Denklem (3.73)'e uygulanarak fonksiyonu

$$\psi_{sağ}(x \rightarrow \infty) = D_4 e^{ik(x-L)} e^{-\frac{\pi}{a}k_1}$$

bulunur. Dolayısıyla da

$$D_3 = 0 \quad (3.153)$$

seçilmelidir.

3.5.2. Yarı-bağlı durumda süreklilik

İyi tanımlı olan dalga fonksiyonlarının süreklilik şartı her noktada kendilerinin ve birinci türevlerinin sürekli olmasıdır. Bu şarta uygun olarak Denklem (3.46) ve (3.86) dalga fonksiyonlarının kendileri

$$\begin{aligned} \psi_{sol}(x \rightarrow 0^-) &\rightarrow D_1 e^{-\frac{\pi}{a}k_1} e^{-ik_1(x+L)} + D_2 e^{\frac{\pi}{a}k_1} e^{ik_1(x+L)} \\ \psi_{sağ}(x \rightarrow 0^+) &\rightarrow D_4 \left[M_1 e^{ik_1(x-L)} + N_1 e^{-ik_1(x-L)} \right] e^{-\frac{\pi}{a}k_1} \end{aligned}$$

$x = 0$ noktasında

$$\psi_{sol}(x) \Big|_{x=0} = \psi_{sağ}(x) \Big|_{x=0}$$

$$D_1 e^{-ik_1L} e^{-\frac{\pi}{a}k_1} + D_2 e^{ik_1L} e^{\frac{\pi}{a}k_1} = D_4 M_1 e^{-ik_1L} e^{-\frac{\pi}{a}k_1} + D_4 N_1 e^{ik_1L} e^{-\frac{\pi}{a}k_1} \quad (3.154)$$

Denklem (3.152) koşulu da kullanılarak her D_2 görülen yere

$$D_2 = -D_1 \frac{A}{F} e^{-\frac{2\pi}{a}k_1} \quad (3.155)$$

yazılarak

$$D_1 \left[e^{-ik_1L} - \frac{A}{F} e^{ik_1L} \right] e^{\frac{-\pi}{a}k_1} = D_4 \left[M_1 e^{-ik_1L} + N_1 e^{ik_1L} \right] e^{\frac{-\pi}{a}k_1}$$

$$e^{-ik_1L} \left[D_1 - M_1 D_4 \right] + e^{ik_1L} \left[-\frac{A}{F} D_1 - N_1 D_4 \right] = 0 \quad (3.156)$$

biçiminde yeniden düzenlenir ve birinci türevleri de

$$\psi'_{sol}(x \rightarrow 0^-) \rightarrow ik_1 \left[-D_1 e^{-ik_1(x+L)} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} + D_2 e^{ik_1(x+L)} e^{\frac{\pi}{a}k_1} \right]$$

$$\psi'_{sağ}(x \rightarrow 0^+) \rightarrow ik_1 \left[D_4 M_1 e^{ik_1(x-L)} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} - D_4 N_1 e^{-ik_1(x-L)} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} \right]$$

$x = 0$ noktasında

$$\psi'_{sol}(x) \Big|_{x=0} = \psi'_{sağ}(x) \Big|_{x=0}$$

$$-D_1 e^{-ik_1L} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} + D_2 e^{ik_1L} e^{\frac{\pi}{a}k_1} = D_4 M_1 e^{-ik_1L} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} - D_4 N_1 e^{ik_1L} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} \quad (3.157)$$

her D_2 görülen yere Denklem (3.155) eşitliği yazılarak

$$D_1 \left[-e^{-ik_1L} - \frac{A}{F} e^{ik_1L} \right] e^{\frac{-\pi}{a}k_1} = D_4 \left[M_1 e^{-ik_1L} - N_1 e^{ik_1L} \right] e^{\frac{-\pi}{a}k_1}$$

$$e^{-ik_1L} \left[D_1 + M_1 D_4 \right] + e^{ik_1L} \left[\frac{A}{F} D_1 - N_1 D_4 \right] = 0 \quad (3.158)$$

elde edilir. Burada bulunan Denklem (3.154) ve (3.157) taraf tarafa toplanarak

$$D_2 = D_4 M_1 e^{-2ik_1L} e^{\frac{-2\pi}{a}k_1} \quad (3.159)$$

taraf tarafa çıkartılarak

$$D_1 = D_4 N_1 e^{2ik_1L} \quad (3.160)$$

sonuçları elde edilir.

3.5.3. Yarı-bağlı durum enerji özdeğeri

Denklem (3.156) ve (3.158)'in ikisi de yarı-bağlı durum dalga denkleminin sürekliliğini sağlamaktadır. O halde bu denklemler birbiriyle de tutarlı olmalıdır. Böylece çift ve tek olarak adlandırılan iki farklı çözüm elde edilecektir.

3.5.3.1. Yarı-bağlı durum çift çözümler

Denklem (3.156)'i sağlayan

$$D_1 = M_1 D_4$$

$$D_1 = \left(\frac{-N_1 F}{A} \right) D_4 \quad (3.161)$$

biçiminde iki koşulun olduğu görülür. Bu sonuçlar Denklem (3.158)'i de sağlamalıdır. Bu nedenle, Denklem (3.158)'da Denklem (3.161) koşulları yazılarak

$$e^{-ik_1 L} \left[M_1 D_4 - M_1 D_4 \right] + e^{ik_1 L} \left[\frac{A}{F} \left(\frac{-N_1 F}{A} \right) D_4 - N_1 D_4 \right] = 0$$

$$e^{-ik_1 L} M_1 - e^{ik_1 L} N_1 = 0 \quad (3.162)$$

elde edilir ve burada Denklem (3.139), (3.141) ve (3.143) özellikleri ve Denklem (3.34) yerlerine yazılarak çift çözümler için n' 'ye bağlı, reel (E_n^{yb}) enerji özdeğerini veren bağıntı

$$-E_n^{yb} - V_0 + \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left| \arctan \left[\frac{M_1 - N_1}{i(M_1 + N_1)} \right] \mp n' \pi \right|^2 = 0, \quad n' = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.163)$$

biçiminde bulunur.

Şimdi de, negatif ve pozitif bölgeleri için dalga fonksiyonları bulunur.

Negatif bölge :

Denklem (3.22)'de Denklem (3.37), (3.35), (3.38) yerlerine yazılarak

$$\psi_{sol}(y) = D_1 y^\delta (1-y)^\tau {}_2F_1(a_1, b_1, c_1; y) + D_2 y^{-\delta} (1-y)^\tau$$

$$\times {}_2F_1(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; y)$$

$$= M_1 D_4 y^{\frac{i}{a} k_1} (1-y)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} {}_2F_1(a_1, b_1, c_1; y)$$

$$+ N_1 D_4 e^{\frac{-2\pi}{a} k_1} y^{-\frac{i}{a} k_1} (1-y)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}}$$

$$\times {}_2F_1(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; y)$$

bulunur. Sonra da Denklem (3.155), (3.161) koşulları ve y değişkeni Denklem (3.3) kullanılarak x 'e dönüştürülüp yerlerine yazılarak

$$\begin{aligned}
\psi_{sol}(x) &= M_1 D_4 \left(-e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{i}{a}k_1} \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} \\
&\quad \times {}_2F_1 \left(a_1, b_1, c_1; -e^{-a(x+L)} \right) \\
&\quad + N_1 D_4 e^{\frac{-2\pi}{a}k_1} \left(-e^{-a(x+L)} \right)^{-\frac{i}{a}k_1} \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} \\
&\quad \times {}_2F_1 \left(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; -e^{-a(x+L)} \right) \\
&= D_4 \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} \\
&\quad \times \left[M_1 \left(e^{i\pi} \right)^{\frac{i}{a}k_1} \left(e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{i}{a}k_1} {}_2F_1 \left(a_1, b_1, c_1; -e^{-a(x+L)} \right) \right. \\
&\quad \left. + N_1 e^{\frac{-2\pi}{a}k_1} \left(e^{i\pi} \right)^{-\frac{i}{a}k_1} \left(e^{-a(x+L)} \right)^{-\frac{i}{a}k_1} \right. \\
&\quad \left. \times {}_2F_1 \left(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; -e^{-a(x+L)} \right) \right]
\end{aligned}$$

negatif bölge, çift çözümlerde yarı-bağlı durum dalga fonksiyonu

$$\psi_{sol}(x) = D_4 \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} \left[M_1 e^{-ik_1(x+L)} \right. \quad (3.164)$$

$$\times {}_2F_1 \left(a_1, b_1, c_1; -e^{-a(x+L)} \right)$$

$$\left. + N_1 e^{ik_1(x+L)} {}_2F_1 \left(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; -e^{-a(x+L)} \right) \right] \quad (3.165)$$

elde edilir.

Pozitif bölge :

Denklem (3.65)'de Denklem (3.71), (3.72), (3.38) ile Denklem (3.155), (3.161)

koşulları ve z değişkeni Denklem (3.49) x 'e dönüştürülüp yerlerine yazılarak Denklem (3.146) özelliği uygulanır. Böylece, pozitif bölge, için çift çözümlerde yarı-bağlı durum dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned} \psi_{sağ}(x) = D_4 \frac{e^{\frac{i(k_1+k)}{2}(x-L)}}{[2 \cosh(\frac{a}{2}(x-L))]^{\frac{i(k_1-k)}{2}}} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} \\ \times {}_2F_1\left(a_2 - c_2 + 1, b_2 - c_2 + 1, 2 - c_2; \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}}\right) \end{aligned} \quad (3.166)$$

elde edilir.

3.5.3.2. Yarı-bağlı durum tek çözümler

Denklem (3.158)'u sağlayan

$$D_1 = -M_1 D_4$$

$$D_1 = \frac{N_1 F}{A} D_4 \quad (3.167)$$

biçiminde iki koşulun olduğu görülür. Bu sonuçlar Denklem (3.156)'i de sağlamalıdır. Bu nedenle, Denklem (3.156)'de, Denklem (3.167) koşulları yazılarak

$$\begin{aligned} e^{-ik_1 L} \left[-M_1 D_4 - M_1 D_4 \right] + e^{ik_1 L} \left[-\frac{A}{F} \left(\frac{N_1 A}{F} \right) D_4 - N_1 D_4 \right] = 0 \\ e^{-ik_1 L} M_1 + e^{ik_1 L} N_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.168)$$

elde edilir ve burada Denklem (3.139), (3.141), (3.146) özellikleri ve Denklem (3.34) yerlerine yazılarak tek çözümler için n' 'ye bağlı, reel E_n^{yb} enerji özdeğerini veren bağıntı

$$-E_n^{yb} - V_0 + \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left| \arctan \left[\frac{M_1 + N_1}{i(M_1 - N_1)} \right] \mp n' \pi \right|^2 = 0, \quad n' = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.169)$$

biçiminde olur.

Şimdi de, negatif ve pozitif bölgeleri için ayrı ayrı dalga fonksiyonları bulunacaktır.

Negatif bölge :

Denklem (3.22)'de Denklem (3.37), (3.35), (3.38) yerlerine yazılarak

$$\begin{aligned}
\psi_{sol}(y) &= D_1 y^\delta (1-y)^\theta \\
&\times {}_2F_1(a, b, c; y) + D_2 y^{-\delta} (1-y)^\theta {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; y) \\
&= -M_1 D_4 y^{\frac{i}{a}k_1} (1-y)^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma^2}} {}_2F_1(a, b, c; y) \\
&\quad - N_1 D_4 e^{\frac{-2\pi}{a}k_1} y^{-\frac{i}{a}k_1} (1-y)^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma^2}} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; y)
\end{aligned}$$

bulunur. Sonra da Denklem (3.155), (3.167) koşulları ve y değişkeni Denklem (3.3) x 'e dönüştürülüp yerlerine yazılarak

$$\begin{aligned}
\psi_{sol}(x) &= -M_1 D_4 \left(-e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{i}{a}k_1} \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma^2}} \\
&\times {}_2F_1\left(a, b, c; -e^{-a(x+L)}\right) \\
&\quad - N_1 D_4 e^{\frac{-2\pi}{a}k_1} \left(-e^{-a(x+L)} \right)^{-\frac{i}{a}k_1} \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma^2}} \\
&\times {}_2F_1\left(a-c+1, b-c+1, 2-c; -e^{-a(x+L)}\right) \\
&= D_4 \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma^2}} \left[-M_1 \left(e^{i\pi} \right)^{\frac{i}{a}k_1} \left(e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{i}{a}k_1} \right. \\
&\times {}_2F_1\left(a, b, c; -e^{-a(x+L)}\right) \\
&\quad \left. - N_1 e^{\frac{-2\pi}{a}k_1} \left(e^{i\pi} \right)^{-\frac{i}{a}k_1} \left(e^{-a(x+L)} \right)^{-\frac{i}{a}k_1} \right. \\
&\times {}_2F_1\left(a-c+1, b-c+1, 2-c; -e^{-a(x+L)}\right) \left. \right]
\end{aligned}$$

negatif bölge, tek çözümlerde yarı-bağlı durum dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned} \psi_{sol}(x) = & D_4 \left(1 + e^{-a(x+L)}\right)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} \\ & \times \left[-M_1 e^{-ik_1(x+L)} {}_2F_1\left(a, b, c; -e^{-a(x+L)}\right) \right. \\ & \left. - N_1 e^{ik_1(x+L)} {}_2F_1\left(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; -e^{-a(x+L)}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.170)$$

elde edilir.

Pozitif bölge :

Denklem (3.65)'de Denklem (3.71), (3.72), (3.38) ile Denklem (3.155), (3.167), (3.89) koşulları ve z değişkeni Denklem (3.49) x 'e dönüştürülüp yerlerine yazılarak Denklem (3.146) özelliği uygulanır. Böylece, pozitif bölge tek çözümlerde yarı-bağlı durum dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned} \psi_{sağ}(x) = & D_4 \frac{e^{\frac{i(k_1+k)}{2}(x-L)}}{\left[2 \cosh\left(\frac{a}{2}(x-L)\right)\right]^{\frac{i(k_1-k)}{2}}} e^{\frac{-\pi}{a}k_1} \\ & \times {}_2F_1\left(a_2 - c_2 + 1, b_2 - c_2 + 1, 2 - c_2; \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}}\right) \end{aligned} \quad (3.171)$$

elde edilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMALAR

Bu bölümde saçılma, sıkı-bağlı ve yarı-bağlı durumlar için hesaplamalara ve grafik çizimlerine yer verilmektedir.

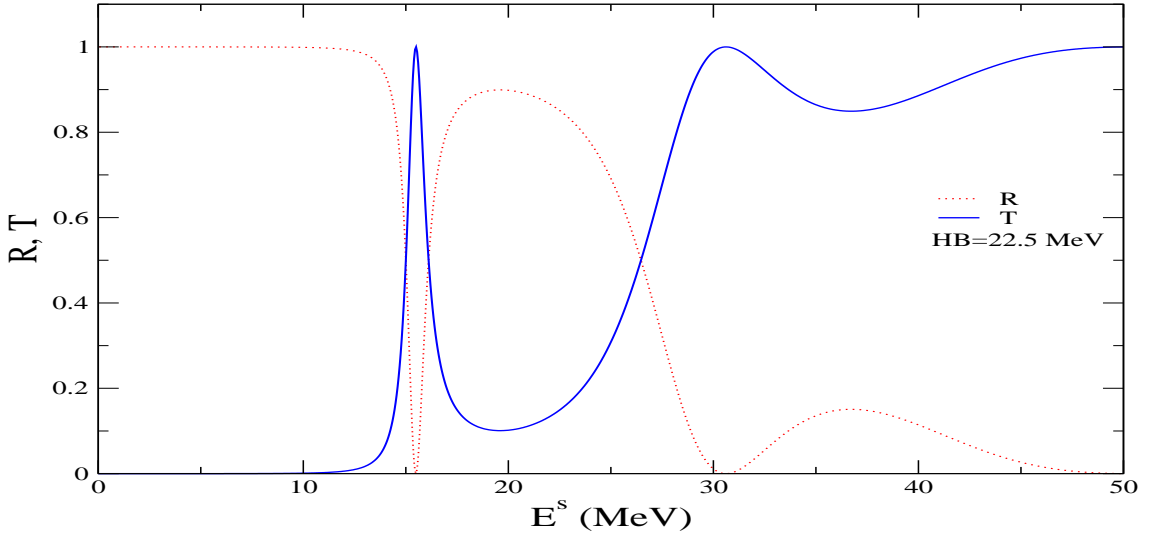
4.1. Saçılma Durumu

GWS potansiyelinin $W > V_0$ durumunda bir bariyeri vardır. Bu bariyer yüksekliği

$$HB = \frac{(V_0 - W)^2}{4W}$$

ile ifade edilir ve $HB = 22.5 \text{ MeV}$ olarak bulunur. Şekil 4.1 ve 4.2'de yansıma ve geçme olasılıkları ile bariyer yüksekliğinin, enerjiye ve dip parametrelerine göre değişimi grafikleri verilmektedir.

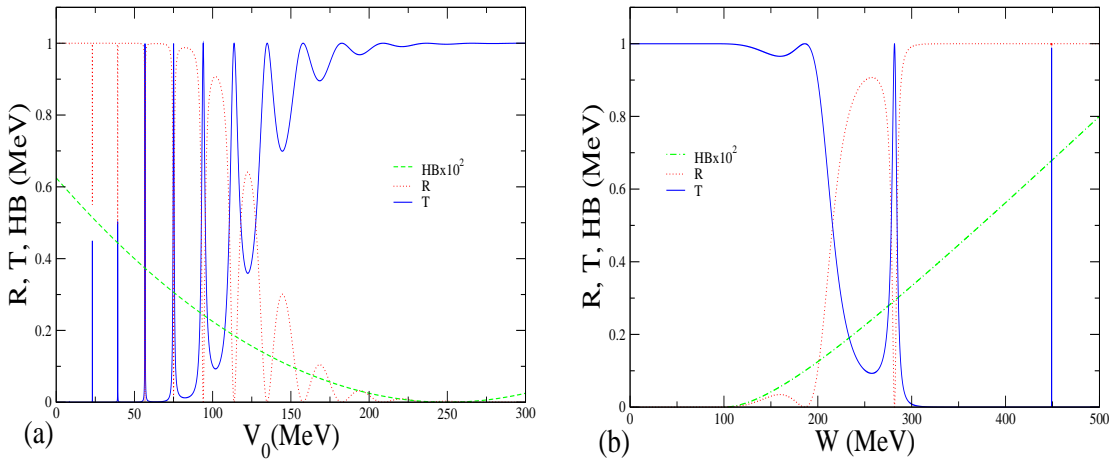
Şekil 4.1'de görüldüğü gibi, ani olarak geçiş olasılığı 1, yansıma olasılığı 0'a düştüğü enerji noktasında rezonans meydana gelmektedir. $E > HB$ olduğu noktalarda geçiş olasılığı 1'e giderken, 50 MeV 'den sonra daima 1 değerindedir.



Şekil 4.1 Yansıma(R) ve geçme(T) olasılığının, enerjiye göre değişimi. Kullanılan tüm parametreler Çizelge-2.2'de verilmiştir.

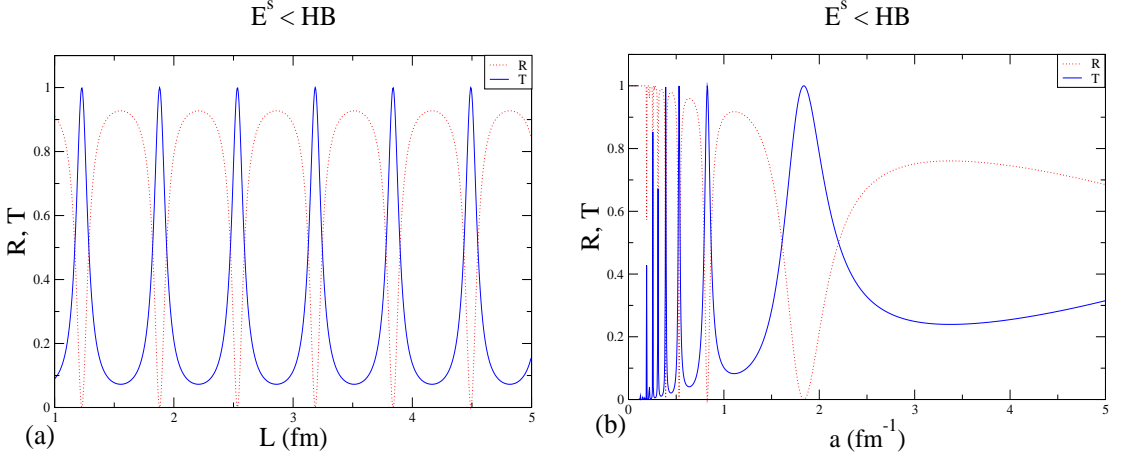
Şekil 4.2.(a)'da yer alan yansıma ve geçme olasılığı ile bariyer yüksekliğinin, potansiyel dip parametrelerine göre değişiminde, bariyer yüksekliğinin $V_0 < W$ için

varolduğu görülmektedir. Grafikte verildiği üzere, V_0 potansiyel dip parametresinin, W parametresinden çok büyük ve çok küçük değerleri için, yansıma ve geçme olasılığı maksimum veya minimum değerlerinde kalmaktadır. Ayrıca, yine grafikte görüldüğü üzere, bariyer yüksekliğinin W parametresinden çok düşük değerlerinde geçme olasılığı 0'a giderken, yansıma olasılığı 1'e gitmektedir. Sonuç olarak, V_0 artarken azalan HB 'ye karşın, yansıma olasılığı 0'a ve geçme olasılığı, 1'e gitmektedir. Şekil 4.2.(b)'de yer alan, yansıma ve geçme olasılığı ile bariyer yüksekliğinin, W potansiyel dip parametresine göre değişimini gösteren grafikte de bariyer yüksekliğinin $V_0 < W$ değerleri için varolduğu görülmektedir. Ayrıca, yine grafikte verildiği üzere W parametresinin, V_0 'dan çok büyük ve çok küçük değerleri için, yansıma olasılığı 0'a ve geçme olasılığı, 1'e gitmektedir.

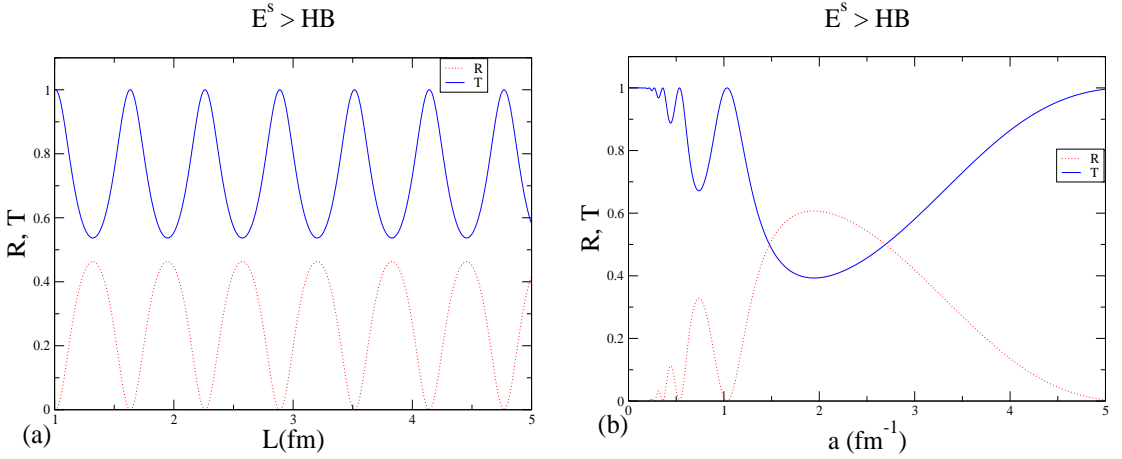


Şekil 4.2 Yansıma(R) ve geçme(T) olasılığı ile bariyer yüksekliğinin(HB), potansiyel dip parametreleri(W , V_0), $E^s = 20MeV$ ve Çizelge-2.2'de verilen diğer parametrelere göre değişimi.

Şekil 4.3.(a)'da parçacığın enerjisi bariyer yüksekliğinin altında iken, L parametresinin, R ve T için düzenli aralıklarla aynı değerleri aldığı görülmektedir. Aynı yorum Şekil 4.4.(a) için de yapılabilir. Şekil 4.3.(b)'de ise parçacığın enerjisi bariyer yüksekliğinin altında iken, a parametresinin, R ve T için farklı farklı değerler aldığı görülmektedir. Yine aynı yorum Şekil 4.4.(b) için de yapılabilir.



Şekil 4.3 Yansıma(R) ve geçme(T) olasılığının, $E^s < HB$ için, potansiyel parametreleri (L, a), $E^s = 20\text{MeV} < HB = 22.5\text{MeV}$ (Kuantum tünelleme) ve Çizelge-2.2'de verilen diğer parametrelere göre değişimi



Şekil 4.4 Yansıma (R) ve geçme(T) olasılığının, $E^s > HB$ için, potansiyel parametrelerine(L, a) göre, $E^s = 30\text{MeV} > HB = 22.5\text{MeV}$ (Saçılma rezonansı) ve Çizelge-2.2'de verilen diğer parametrelere göre değişimi

4.2. Sıkı-bağlı Durum

Sıkı-bağlı durum çift çözümlerde bulunan

$$-E_n^b - V_0 + \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left[\arctan \left[\frac{M - N}{i(M + N)} \right] \mp n' \pi \right]^2 = 0, n' = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1)$$

bağıntısının, Çizelge-2.2'de verilen değerler için nümerik hesaplamalarından elde

edilen $E^b < 0$ izinli enerji değerleri

$$E_n^b = -93.138 \text{ MeV}$$

$$E_n^b = -67.307 \text{ MeV}$$

$$E_n^b = -34.725 \text{ MeV}$$

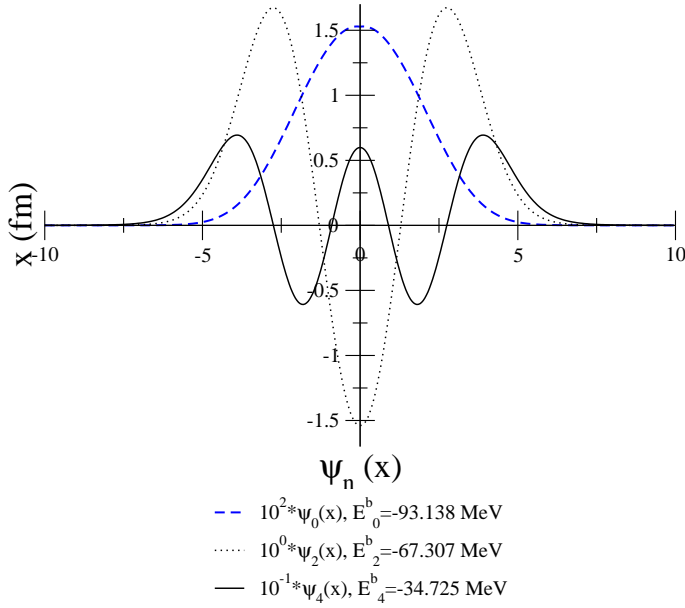
$$E_n^b = -0.125 \text{ MeV}$$

olarak elde edilir. Sıkı-bağlı durum çift çözümler için elde edilen dalga fonksiyonlarının

$$\begin{aligned} \psi_{sol}(x) &= D_3 \left(1 + e^{-a(x+L)} \right)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} \\ &\times \left[M e^{-i\kappa(x+L)} {}_2F_1 \left(a_1, b_1, c_1; -e^{-a(x+L)} \right) \right. \\ &\quad \left. + N e^{i\kappa(x+L)} {}_2F_1 \left(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; -e^{-a(x+L)} \right) \right] \\ \psi_{sağ}(x) &= D_3 \frac{e^{\frac{i\kappa-k}{2}(x-L)}}{\left[2 \cosh \left(\frac{a}{2}(x-L) \right) \right]^{\frac{i\kappa+k}{a}}} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} {}_2F_1 \left(a_2, b_2, c_2; \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}} \right) \end{aligned}$$

E_n ilk üç enerji düzeyi için normalize edilmemiş dalga fonksiyonu eğrileri Şekil 4.5'da görülmektedir.

Çift Dalga Fonksiyonları



Şekil 4.5 Çift çözümler için bulunan normalize edilmemiş dalga denkleminin, E_n^b bazı enerji özdeğerlerine göre değişimi. Kullanılan tüm parametreler Çizelge-2.2'de verilmiştir.

Sıkı-bağlı durum tek çözümlerde bulunan

$$-E_n^b - V_0 + \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left[\arctan \left[\frac{M + N}{i(M - N)} \right] \mp n' \pi \right]^2 = 0, n' = 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

enerji bağıntısının Çizelge-2.2'de verilen parametre değerleri için nümerik hesaplamalarından elde edilen $E^b < 0$ izinli enerji değerleri

$$E_n^b = -81.403 \text{ MeV}$$

$$E_n^b = -51.567 \text{ MeV}$$

$$E_n^b = -17.330 \text{ MeV}$$

olarak bulunur.

Sıkı-bağlı durum tek çözümler için elde edilen

$$\begin{aligned} \psi_{sol}(x) = & D_3 (1 + e^{-a(x+L)})^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} \\ & \times \left[-M e^{-i\kappa(x+L)} {}_2F_1(a_1, b_1, c_1; -e^{-a(x+L)}) \right. \\ & \left. - N e^{i\kappa(x+L)} {}_2F_1(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; -e^{-a(x+L)}) \right] \end{aligned}$$

$$\psi_{sağ}(x) = D_3 \frac{e^{\frac{i\kappa-k}{2}(x-L)}}{\left[2 \cosh\left(\frac{a}{2}(x-L)\right) \right]^{\frac{i\kappa+k}{a}}} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa} {}_2F_1\left(a_2, b_2, c_2; \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}}\right)$$

dalga fonksiyonlarının E_n ilk üç enerji düzeyi için dalga denklemi eğrileri Şekil 4.6'de görülmektedir.

4.3. Yarı-bağlı Durum

Yarı-bağlı durum çift çözümlerde bulunan

$$-E_n^{yb} - V_0 + \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left[\arctan \left[\frac{M_1 - N_1}{i(M_1 + N_1)} \right] \mp n' \pi \right]^2 = 0, \quad n' = 0, 1, 2, 3... \quad (4.3)$$

bağıntısının, $W = 450 MeV$ ve Çizelge-2.2'de verilen parametre değerleri için nümerik hesaplamalarından elde edilen $0 < E^{yb} < \frac{(V_0 - W)^2}{4W}$ izinli enerji değeri

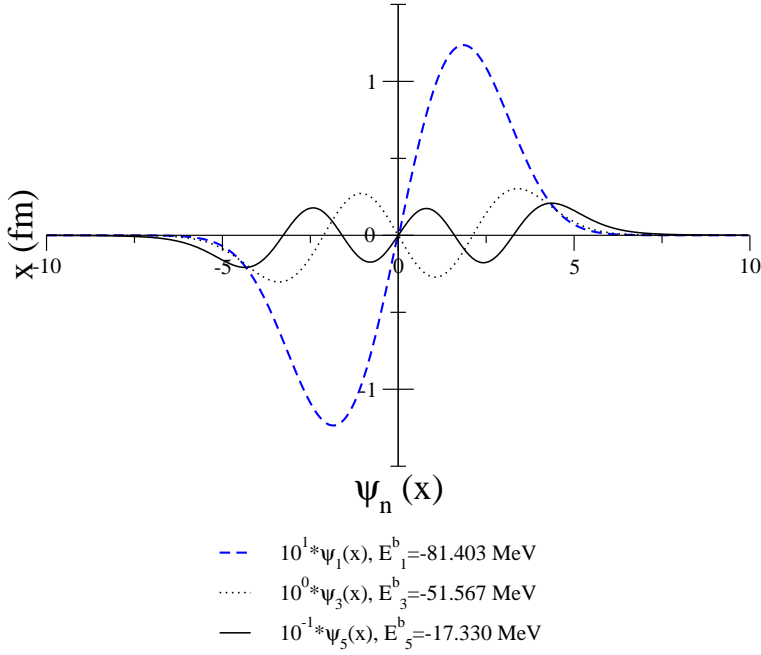
$$E_n = 20.0801 - i0.001379 MeV$$

olarak bulunur.

Yarı-bağlı durum çift çözümler için elde edilen

$$\begin{aligned} \psi_{sol}(x) = & D_4 (1 + e^{-a(x+L)})^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2}} e^{\frac{-\pi}{a}\kappa_1} \left[M_1 e^{-ik_1(x+L)} {}_2F_1(a_1, b_1, c_1; -e^{-a(x+L)}) \right. \\ & \left. + N_1 e^{ik_1(x+L)} {}_2F_1(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; -e^{-a(x+L)}) \right] \end{aligned}$$

Tek Dalga Fonksiyonları



Şekil 4.6 Tek çözümler için bulunan normalize edilmemiş dalga denkleminin, E_n^b bazı enerji özdeğerlerine göre değişimi. Kullanılan tüm parametreler Çizelge-2.2'de verilmiştir.

$$\psi_{sağ}(x) = D_4 \frac{e^{\frac{i(k_1+k)(x-L)}{2}}}{\left[2 \cosh\left(\frac{a}{2}(x-L)\right)\right]^{\frac{i(k_1-k)}{2}}} e^{\frac{-\pi}{a}k_1}$$

$$\times {}_2F_1\left(a_2 - c_2 + 1, b_2 - c_2 + 1, 2 - c_2; \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}}\right)$$

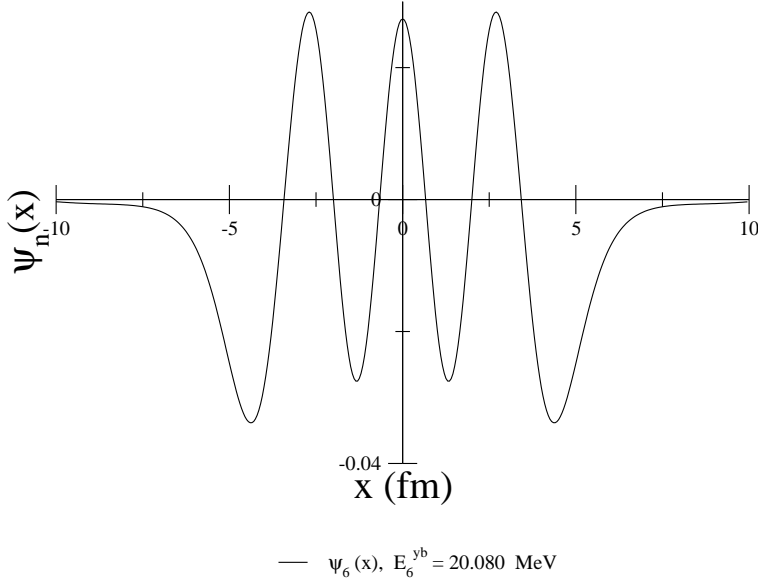
dalga denklemlerinin E_n izinli enerji düzeyi için, dalga denklemleri eğrisi Şekil 4.7'de görülmektedir. Yarı-bağlı durum tek çözümlerde bulunan

$$-E_n^{yb} - V_0 + \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left[\arctan \left[\frac{M_1 + N_1}{i(M_1 - N_1)} \right] \mp n' \pi \right]^2 =, n' = 0, 1, 2, 3... \quad (4.4)$$

bağıntısının, $W = 450 \text{ MeV}$ ve Çizelge-2.2'de verilen parametre değerleri için nümerik hesaplamalarından elde edilen $0 < E_n^{yb} < \frac{(V_0 - W)^2}{4W}$ izinli enerji değeri

$$E_n = 40.926 - i0.064811 \text{ MeV}$$

Çift Dalga Fonksiyonu



Şekil 4.7 Çift çözümler için bulunan normalize edilmemiş dalga denkleminin, E_n^{yb} bazı enerji özdeğerlerine göre değişimi. $W = 450 \text{ MeV}$ ve Çizelge-2.2'de verilen parametre değerleri kullanılmıştır.

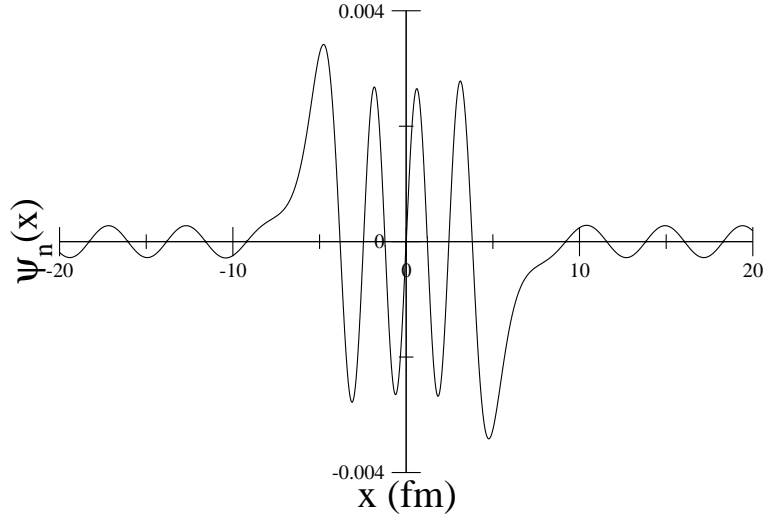
olarak bulunur. Yarı-bağlı durum tek çözümler için elde edilen

$$\begin{aligned} \psi_{sol}(x) = & D_4 \left(1 + e^{-a(x+L)}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma^2} e^{\frac{-\pi}{a} k_1} \\ & \times \left[-M_1 e^{-ik_1(x+L)} {}_2F_1\left(a_1, b_1, c_1; -e^{-a(x+L)}\right) \right. \\ & \left. - N_1 e^{ik_1(x+L)} {}_2F_1\left(a_1 - c_1 + 1, b_1 - c_1 + 1, 2 - c_1; -e^{-a(x+L)}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{sağ}(x) = & D_4 \frac{e^{\frac{i(k_1+k)}{2}(x-L)}}{\left[2 \cosh\left(\frac{a}{2}(x-L)\right)\right]^{\frac{i(k_1-k)}{2}}} e^{\frac{-\pi}{a} k_1} \\ & \times {}_2F_1\left(a_2 - c_2 + 1, b_2 - c_2 + 1, 2 - c_2; \frac{1}{1 + e^{a(x-L)}}\right) \end{aligned}$$

dalga denklemlerinin E_n izinli enerji düzeyi için dalga denklemi eğrisi Şekil 4.8'da görülmektedir.

Tek Dalga Fonsiyonu



— $\psi_7(x)$, $E_7^{yb} = 40.926$ MeV

Şekil 4.8 Tek çözümler için bulunan normalize edilmemiş dalga denkleminin, E_n^{yb} bazı enerji özdeğerilerine göre değişimi. $W = 450$ MeV ve Çizelge-2.2'de verilen parametre değerleri kullanılmıştır.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında GWS potansiyeli etkisi altındaki sabit m kütleli parçacığın zamandan bağımsız bir boyutta Schrödinger diferansiyel denkleminde analitik çözümleri yapılarak saçılma, bağlı ve yarı bağlı durumlar için dalga özfonksiyonları ile durumları betimleyen enerji özdeğerleri elde edildi. Saçılma durumunda olasılık yoğunluğunun korunduğu analitik çözüm yapılarak gösterildi. Yansıma olasılığının sıfıra, geçme olasılığının bire gittiği rezonans şartına göre elde edilen bağıntı transandantal bir eşitlik olduğu için, Çizelge-2.2'de verilen parametre değerlerine göre, nümerik hesaplama yapılarak ilk rezonans enerjisi olarak $E = 15.4913MeV$ değeri bulundu. Bu enerji değerinden daha düşük yada sıfır enerji değerinde yansıma olasılığı 1'e, geçme olasılığı 0'a gider (Bkz. Şekil 4.1). Ayrıca bu bağıntı rezonans koşullarının potansiyel parametrelerine ve parçacığın enerjisine bağlı olduğu da gösterdi. $V_0 \ll W$ için yansıma olasılığı bire ve geçme olasılığı sıfıra giderken, $V_0 \gg W$ için tam tersi olacağı hem nümerik hesaplamalar sonucunda hem de grafiklerde görülür ((Bkz. Şekil 4.2.(a)). W parametresinin de çok büyük ve çok küçük değerlerinde hem yapılan nümerik hesaplamalarında hem de grafiklerde, yansıma olasılığının bire ve geçme olasılığının sıfıra gittiği görüldü (Bkz. Şekil 4.2.(b)).

Sıkı-bağlı ve yarı-bağlı durumlarda elde edilen enerji bağıntıları da transandantal bir eşitlik olduğu için nümerik hesaplama yapıldı. Sıkı-bağlı durum için $V_0 = 100MeV$, $W = 250$, $L = 6fm$, $a = 1fm^{-1}$ parametre değerlerinde hesaplama yapıldı. Bu hesaplar neticesinde sıkı-bağlı durum çift çözümlerde $n' = 1, 2, 3, 4$ değerlerinde ve tek çözümlerde ise $n' = 2, 3, 4$ değerlerinde durumu betimleyen enerji değerleri elde edildi. Bu değerler için dalga fonksiyonu grafikleri elde edildi (Bkz. Şekil 4.5 ve 4.6). Yarı-bağlı durumda $V_0 = 100MeV$, $W = 450MeV$, $L = 6fm$, $a = 1fm^{-1}$ parametre değerlerinde $n' = 5$ için uygun enerji özdeğeri elde edildi. Yarı-bağlı durumda, farklı W parametre değeri kullanılarak bariyer yüksekliği $HB = 68.05MeV$ 'e artırılarak yarı-bağlı durum için hem çift, hem de tek çözümlerde durumu betimleyen enerji değerleri elde edildi. Aksi halde $W = 250MeV$ parametre değerinde yarı-bağlı durum çift çözümler için $E_n^{yb} = 28.6791 - i4.24688MeV$ bulundu. Bu şartlarda, sıkı-bağlı yada yarı-bağlı durum söz konusu değildir. Çünkü bu enerji değeri, $HB = 22.5MeV$ bariyer yüksekliğinden büyüktür. Ancak tek çözümler için $E_n^{yb} = 15.431 - i0.532349MeV$ bulundu. Bu değer ise ilk rezonansın meydana geldiği $E = 15.4913MeV$ 'lik enerji değerine yakındır. Bu da parçacığın, bariyerin sol tarafından gelip küçük bir miktar enerji kaybına rağmen tamamıyla geçtiği anlamına gelir.

$V_0 = 100MeV$, $W = 250MeV$, $L = 6fm$, $a = 1fm^{-1}$ parametre değerlerine göre bulunan enerji özdeğerleri ve dahil oldukları durumlar, Tablo 5.1'de derlendi.

Enerji Özdeğeri	Durum
$E_0 = - 93.138 \text{ MeV}$	Sıkı-Bağlı Durum
$E_1 = - 81.403 \text{ MeV}$	Sıkı-Bağlı Durum
$E_2 = - 67.307 \text{ MeV}$	Sıkı-Bağlı Durum
$E_3 = - 51.567 \text{ MeV}$	Sıkı-Bağlı Durum
$E_4 = - 34.725 \text{ MeV}$	Sıkı-Bağlı Durum
$E_5 = - 17.330 \text{ MeV}$	Sıkı-Bağlı Durum
$E_6 = - 0.125 \text{ MeV}$	Sıkı-Bağlı Durum
$E_7 = 15.431 \text{ MeV}$	Yarı-bağlı Durum

Çizelge 5.1 Enerji spektrumu

Bu tezde yer alan çalışmalar uluslararası hakemli dergi Journal of Mathematical Physics'de, benzer şekilde analitik çözümler yapılarak aynı dalga fonksiyonlarının ve enerji özdeğerinin bulunduğu bir makale çalışması olarak da yer aldı(Lütfüoğlu vd 2016).

7. KAYNAKLAR

- ABROMOWITZ, M., and STEGUN, I.A. 1992. M.Abramowitz and I.A.Stegun, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, New York.
- AYDOĞDU, O., ARDA, A. and SEVER, R. 2012. Effective-mass Dirac equation for Woods-Saxon potential:Scattering, bound states and resonances.J. Math. Phys. 53:042106.
- ALPDOĞAN, S. 2012. Genelleştirilmiş Woods-Saxon Potansiyelinden Vektör Bozonlarının Saçılması, Yüksek Lisans tezi, Mersin Üniversitesi, 118 sayfa.
- ALPDOĞAN, S., AYDOĞDU, O. and HAVARE, A. 2012. Realistivistic spinless particles in the generalized asymmetric Woods-Saxon potential. J. Phys. A:Math. Theor. 46:015301.
- AYDIN, A., 1997. $^{40}\text{Ar}(p,p)^{40}\text{Ar}$ esnek saçılmasının 22.6, 27.5, 30.0 ve 36.7 MeV proton enerjilerinden optiksel model analizi. Doktora Tezi Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, Türkiye, 26-35.
- ALPDOĞAN, S. and HAVARE, A. 2014. Dirac particle for the position dependent mass in the generalized asymmetric Woods-Saxon potential. Adv. High Energy Phys. V. art. ID 973847, 10.
- ARDA, A. and SEVER, R. 2008. Bound states of the Klein-Gordon equation for Woods-Saxon potential with position dependent mass. Int. J. Mod. Phys. C. 95(5):763-773.
- ARDA, A., AYDOĞDU, O. and SEVER, R. 2010. Scattering of Woods-Saxon potential in the Schrödinger equation. J. Phys. A:Math. Theor. 43:425204(10pp).
- ARDA, A., AYDOĞDU, O. and SEVER, R. 2011. Scattering and bound states solutions of asymmetric Hulthen potential. Phys. Scr. 84:02004(6pp).

- AYTEKİN, H., KÜRKÇÜOĞLU, M.E. and BOZTOSUN, İ., 2007. $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$. Anadolu Üni. Bil. ve Tek. Dergisi. 8(1):229-239.
- BAYRAK, O. and AÇIKSÖZ, E. 2015. Corrected analytical solution of the generalized Woods-Saxon potential for arbitrary states. Phys. Scr. 95:015302.
- BENAMIRA, GUECHI, F. L., MAMERI, S. and SADOON, M. A. 2007. Unified path integral treatment for generalized Hulthen and Woods-Saxon potentials. Ann. of Phys. 322(9):2179-2194.
- BERKDEMİR, C., BERKDEMİR, A. and SEVER, R. 2005. Polynomial solutions of the Schrödinger equation for the generalized Woods-Saxon potential. Phys. Rev. C 72:027001.
- BERKDEMİR, C., BERKDEMİR, A. and SEVER, R. 2006. PT and non-PT-Symmetric solutions of the Schrödinger equation for the generalized Woods-Saxon potential. arXiv:quant-ph/0410152v7.
- BIANCHI, M. S. 1994. Levinson's theorem, zero energy resonances and time delay in one delay in one dimensional scattering systems. J. Math. Phys. 35:2719-2733.
- BOHR, A. and MOTTELSON, B. 1998. Nuclear structure, world scientific.
- BOHM, D. 1951. "Quantum mechanics", 2nded. Prentice-Hall. 245p. New York.
- BOZTOSUN, İ., 2002. New results in analysis of $^{16}\text{O} + ^{28}\text{Si}$ elastic scattering by modifying the optical potential. Phys. Rev. C66, 024610.
- BOZTOSUN, İ., BAYRAK, O. and DAĞDEMİR, Y., 2005. A comparative study of the $^{12}\text{C} + ^{24}\text{Mg}$ system with deep and shallow potentials. Int. J. Mod. Phys. E14, 663-673.
- BRANDAN, M . E. and SATCHLER, G. R. 1997. The interacion between light heavy-ions and what it tells us. Phys. Rep. 285:143.

- DAPO, H., BOZTOSUN, İ., KARAKOÇ, M. and BALANTEKİN, A.B. 2012. Influence of long-range effects on low-energy cross sections of He and HeX: the lithium problem. *Phys. Rev. C* 85:044602.
- FAKHRI, H. and SADEGHI, J. 2004. Supersymmetry approaches to the bound states of the generalized Woods-Saxon potential. *Mod. Phys. Lett. A* 19(8):615-625.
- FESHBACH, H. 1954. Model for nuclear reactions with neutrons. *Phys. Rev.* 96:448-464(2pp).
- FLUNGGE, S. 1917. *Practical quantum mechanics*, reprint of the 1994 edition. Springer, Verlag. 25-252.
- GOMEZ, J. M. G., KAR, K., KOTA, V. K. B., MOLINA, R. A. and RETAMOSA, J. 2003. Localization in 2p1f nuclear shell-model wavefunctions. *Phys. Lett. B* 567:251.
- GÖNÜL, B. and KÖKSAL, K. 2007. Solution for a generalized Woods-Saxon potential. *Phys. Scr.* 76:565.
- HAMZAVI, M. and RAJAVI, A. 2013. Generalized nuclear Woods-Saxon potential under relativistic spin symmetry limit. *ISRN High Energy Phys.* 2013:987632.
- HASSANABADI, H., ZARRINKAMAR, S. and MAGHSOODI, E. 2012. Scattering states of Woods-Saxon interaction in minimal length quantum mechanics. *Phys. Lett. B.* 718:678.
- HASSANABADI, H., ZARRINKAMAR, S. and MAGHSOODI, E. 2012. Scattering of relativistic spinless by the Woods-Saxon potential. *Few-Body Syst.* 54:2009-2016.
- IKDAIR, M. S. and SEVER, R. 2007. Polynomial solution of PT / non-PT-symmetric and non-Hermitian generalized Woods-Saxon potential via Nikiforov-Uvarov method. *Int. J. Theor. phys.* 46:1643.
- IKHDAIR, M. S. and SEVER, R. 2007. Exact solution of the Klein-Gordon equation for the PT-symmetric generalized Woods-Saxon potential by the Nikiforov-Uvarov method. *Ann. Phys.* 16(3):218-232.

- IKHDAIR, M. S. and SEVER, R. 2007. Exact polynomial solution of PT-/non-PT-symmetric and non-hermitian modified Woods-Saxon potential by the Nikiforov-Uvarov method. *Int. J. Theo. Phys.* 46(3):1643-1665.
- IKDAIR, M. S. and SEVER, R. 2008. Solution of Dirac equation for symmetric generalized Woods-Saxon potential by the hypergeometric method. arXiv:0808.1002v1 [quant-ph].
- IKHDAIR, S. M. 2009. An improved approximation scheme for the centrifugal term and the Hulthen potential. *Eur. Phys. J. A* 39:307.
- IKHDAIR, S. M. and SEVER, R. 2010. Approximate analytical solution of the generalized Woods-Saxon potential including the spin-orbit coupling term and spin symmetry. *Cent. Eur. J. Phys.* 8(4):652-666.
- IKOT,N.A. and AKPAN, I.O. 2012. Bound state solutions of the Schrödinger equation for a more general Woods-Saxon potential with arbitrary l-state. *Chin. Phys. Lett.* 29:090302.
- JANG, Y., DONG, S. H., ANTILL, A. and LOZADA-CASSOU, M. 2006. Low momentum scattering of the Dirac particle with an asymmetric cusp potential. *Eur. Phys. J. C* 45:525-528.
- KHOA, D. T., SATCHLER, G. R. and VON OERTZEN, W 1997. Nuclear incompressibility density dependent NN interaction in the folding model for nucleus-nucleus. *Phys. Rev. C* 56:2.
- KOÇAK, G., KARAKOÇ, M., BOZTOSUN, İ. and BALANTEKİN, A.B. 2010. Effects of α -cluster potentials for the $O^{16} + O^{16}$ fusion reaction and S factor. *Phys. Rev. C* 81:024615.
- KRANE, K.S., 1988. *Introductory Nuclear Physics*. John Wiley and Sons, New York, 396-416.
- KÜRKÇÜOĞLU, M. E., COF, G., AYTEKİN, H. and BOZTOSUN, İ. 2013. Introducing a global optical model approach for analysing $16O + 16O$ elastic scattering at 5-10 Mev/nucleon region. *SDU J. of Science(E-Journal)* 8(1):71.

- LIVERTZ, E. Z., DRUKAREV, E. G. and MANDELZWEIG, V. B. 2007. Acurate analytic presentation of solution of the Schrödinger equation with arbitrary physical potential. ANN. of Phys. 2958:322.
- LÜTFÜOĞLU, B.C., AKDENİZ, F. and BAYRAK, O. 2016. Scattering, bound and quasi-bound states of the generalized symmetric Woods-Saxon potential. J. of Math. Phys. 57:032103-032103.
- LÜTFÜOĞLU, B.C. and ERDOĞAN, M. 2016. Thermodynamic properties of a nucleon under the generelized symmetric Woods-Saxon potential in flourine 17 isotope. Anadolu Üni. Bil. ve Tek. Dergisi. A. 17(4):708-716.
- MACKINTOSH, R.S. and KOBOS, A.M., 1982. Evaluation of model-independent optical potentials for the $O^{16} + Ca^{40}$ system. Phys. Rev. C 26:1766.
- MASSEN, S. E. and PANOS, C. P. 1998. Universal property of the information entropy in atoms, nuclei and atomic cluster. Phys. Lett. A 256:530.
- MEYUR, S., MAJÍ, S. and DEBNATH, S. 2014. Analytical solution of the Schrödinger equation with spatially varying effective mass for generalised Hylleraas potential. Adv. High Energy Phys. V. art. ID 952597, 7.
- MORSE, P. M. and FESHBACK, H. 1953. Methods of theoretical physics part II 2nd ed. 640p. New York, McGraw-Hill.
- NEWTON, R. G. 1982. Scattering theory of waves and particles 2nd ed. Springer. New York.
- PANELLA, O., BIONDINI, S. and ARDA, A. 2010. New exact solution of the one-dimensional Dirac equation for the Woods-Saxon potential within the effective mass case. J. Phys. A: Math. Theor. 43:325302(19pp).
- RAHIMOV, H., NIKOOFARD, H., ZARRINKAMAR, S. and HASSANABADI, H. 2013. Any l-state solutions of the Schrödinger equation for the Modified Woods-Saxon potential in arbitrary dimensions. Appl. Math. Comput. 219:4710-4717.

- ROJAS, C. and VILLALBA, V. M. 2005. Scattering of a Klein-Gordon particle by a Woods-Saxon potential. *Phys. Rev. A* 71:052101.
- SENN, P. 1988. Threshold anomalies in one-dimensional scattering . *Am. J. Phys.* 56:916-921.
- SATCHLER, G. R. 1980. *Introduction to Nuclear Reactions*. Mc Millan Press Ltd, London, 153-210
- SATCHLER, G. R. 1983. *Direct Nuclear Reactions*. Oxford University Press, New York, 392-680.
- SATCHLER, G. R. 1991. Heavy-ion scattering and reactions near the Coulomb barrier and "threshold anomalies". *Phys. Rep.* 199:147.
- SÖĞÜT, K. and HAVARE, A. 2010. Scattering of vector bosons by an asymmetric Hulthén potential. *J. Phys. A: Math Theor.* 43:225204(14pp).
- VILLALBA, V. M. 2003. Transmission resonances and supercritical states in a one-dimensional cusp potential. *Phys. Rev. A.* 67:052707.
- VILLALBA, V. M. and ROJAS, C. 2007. Scattering of a relativistic scalar particle by a cusp potential. *Phys. Lett. A* 362:21.
- WOODS, R.D., and SAXON, D.S. 1954. Diffuse surface optical model for nucleon-nuclei scattering. *Phys. Rev.* 95:577.
- YASUK, F. and BAHAR, M. K. 2012. Approximate solution of the Dirac equation with position-dependent mass for the Hulthén potential by the asymptotic iteration method. *Phys. Scr.* 85:045004(9pp).
- YAZARLOO, B.H. and MEHRABAN, H. 2016. The relativistic transmission and reflection coefficients for Woods-Saxon potential. *Acta Phys. Pol. A.* 129:1089-1092.

ZAICHENKO, A. K. and OL'KHOVSKII, V. S. 1976. Analytic solutions of scattering by potentials of the Eckart class. *Theor. and Math. Phys.* 27:475.

ÖZGEÇMİŞ



Ferhan AKDENİZ, 1982 yılında Antalya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2000 yılında girdiği Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü'nden 2005 yılında Fizikçi olarak mezun oldu. 2013-2016 yılları arasında, Akdeniz Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.