T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEDEKİND TOPLAMININ BENZERLERİ

Muhammet Cihat DAĞLI

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEDEKİND TOPLAMININ BENZERLERİ

Muhammet Cihat DAĞLI

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 27/10/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Salih AYTAR

Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE

Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN

ÖZET

DEDEKİND TOPLAMININ BENZERLERİ

Muhammet Cihat DAĞLI

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN
Ekim 2016, 63 sayfa

Bu çalışmada, genelleştirilmiş Eisenstein serilerinin çok geniş bir sınıfı için dönüşüm formülleri elde edilmiştir. Bu dönüşüm formüllerinin özel durumları incelendiğinde, periyodik Bernoulli fonksiyonlarını içeren Dedekind toplamlarının genelleştirmelerinin ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Ortaya çıkan bu toplamların sağladıkları resiprosite bağıntıları ispatlanmıştır. Ayrıca, bu toplamların özel durumları incelenmiştir. Elde edilen dönüşüm formüllerinin uygulamaları olarak, bazı sonsuz seriler arasındaki bağıntılar ve periyodik zeta fonksiyonu için Ramanujan formülünün benzerleri elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Eisenstein Serileri, Dedekind Toplamları, Bernoulli Sayıları ve Polinomları, Zeta Fonksiyonu.

JÜRİ: Prof. Dr. Veli KURT
Prof. Dr. Salih AYTAR
Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL
Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE
Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN (Danışman)

ABSTRACT

ANALOGUES OF DEDEKIND SUM

Muhammet Cihat DAĞLI

PhD Thesis in Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mümün CAN
October 2016, 63 pages

In this work, transformation formulas under modular substitutions are obtained for a large class of generalized Eisenstein series. Appearing in the transformation formulae are generalizations of Dedekind sums involving the periodic Bernoulli function. Reciprocity theorems are proved for these Dedekind sums. Furthermore, these sums for some special cases are considered. As applications of the transformation formulae, relations between various infinite series and analogues of Ramanujan's formula for periodic zeta functions are derived.

KEYWORDS: Eisenstein Series, Dedekind Sums, Bernoulli Numbers and Polynomials, Zeta Functions.

COMMITTEE: Prof. Dr. Veli KURT
Prof. Dr. Salih AYTAR
Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL
Assoc. Prof. Dr. Gültekin TINAZTEPE
Asst. Prof. Dr. Mümün CAN (Supervisor)

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taramaları ve Bulgular–Tartışma olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Bulgular–Tartışma bölümünde kullanılacak olan Bernoulli polinomları ve fonksiyonları, Dedekind toplamları ve bazı genelleştirmeleri, Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taramaları bölümünde tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

Bulgular–Tartışma bölümünde ise, genelleştirilmiş Eisenstein serilerinin çok geniş bir sınıfı için dönüşüm formülleri elde edilmiştir. Bu dönüşüm formüllerinin özel halleri incelendiğinde, periyodik Bernoulli fonksiyonlarını içeren Dedekind toplamlarının genelleştirmelerinin ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Ortaya çıkan bu toplamların sağladıkları resiprosite bağıntıları ispatlanmıştır. Ayrıca, bu toplamların özel durumları incelenmiştir. Elde edilen dönüşüm formüllerinin uygulamaları olarak, bazı sonsuz seriler arasındaki bağıntılar ve periyodik zeta fonksiyonu için Ramanujan formülünün benzerleri elde edilmiştir.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN' a, yardımlarını gördüğüm hocam Prof. Dr. Veli Kurt' a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ v
1. GİRİŞ 1
2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMALARI 3
2.1. Periyodik Bernoulli Sayıları ve Polinomları 3
2.2. Dedekind Toplamları 4
3. BULGULAR–TARTIŞMA 7
3.1. $G(z, s; A_\alpha, B_\beta; r_1, r_2)$ Fonksiyonunun Analitik Devamı 7
3.2. Dönüşüm Formülleri 10
3.3. Periyodik Dedekind Toplamları 14
3.3.1. $s = r_1 = r_2 = 0$ durumu 14
3.3.2. $s = 0, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ durumu 22
3.3.3. $s = -N = 1 - r$ durumu 29
3.4. Bazı Özel Durumlar 35
3.5. Bazı Seri Hesaplamaları 40
3.6. Periyodik Zeta Fonksiyonu için Ramanujan Formülleri 49
4. SONUÇ 61
5. KAYNAKLAR 62
ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

$[x]$	Bir x reel sayısının tam değeri
$\{x\}$	Bir x reel sayısının kesir kısmı
$\eta(z)$	Dedekind eta-fonksiyonu
$L(s,\chi)$	Dirichlet L-fonksiyonu
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\Gamma(s)$	Euler gamma fonksiyonu
$\phi(k)$	Euler *phi* fonksiyonu
$G(z,\chi)$	Gauss toplamı
$\zeta(s,\theta)$	Hurwitz zeta fonksiyonu
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\varphi(x,a,s;A)$	Periyodik Lerch fonksiyonu
λ_x	Tam sayıların karakteristik fonksiyonu
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$c_k(n)$	Ramanujan toplamı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\zeta(s)$	Riemann zeta fonksiyonu
$\mathbb{H}$	Üst yarı düzlem
$\mathbb{K}$	$\left\{x+iy : x > -\frac{d}{c} \text{ ve } y > 0\right\}$
$e(z)$	$e^{2\pi iz}$

1. GİRİŞ

$c, d \in \mathbb{Z}$, $c > 1$ ve $(c, d) = 1$ olmak üzere Dedekind eta-fonksiyonu teorisinde ortaya çıkan $s(d, c)$ Dedekind toplamları 1892 yılında R. Dedekind tarafından

$$s(d,c) = \sum_{j \pmod c} \left(\left(\frac{j}{c} \right) \right) \left(\left(\frac{dj}{c} \right) \right)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada, $[x]$ herhangi bir x reel sayısının tam değeri olmak üzere $((x))$ fonksiyonu

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2}, & x \notin \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

şeklindedir. Dedekind toplamlarının en önemli özelliği c ve d aralarında asal sayılar olmak üzere

$$s(d,c) + s(c,d) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{d}{c} + \frac{c}{d} + \frac{1}{dc} \right) \tag{1.1}$$

resiprosite bağıntısıdır. Bu toplamlar, birçok matematikçi tarafından genelleştirilmiş ve bunlara karşılık gelen resiprosite bağıntıları farklı yollardan ispatlanmıştır (Apostol 1950, Berndt 1973a, 1973b, 1975a, 1975d, 1977a, Carlitz 1964, Cenkci vd 2007, Dağlı ve Can 2015, 2016a, 2016b, Hamahata 2014, Lim 2009, Meyer 2000, Rademacher ve Grosswald 1972, Sekine 2003, Takacs 1979).

$\eta(z)$ Dedekind eta-fonksiyonu olmak üzere, Dedekind toplamları ilk olarak $\log \eta(z)$ nin dönüşüm formüllerinde ortaya çıkmıştır. $\log \eta(z)$ benzeri dönüşüm formülüne sahip Eisenstein serileri gibi başka fonksiyonlar da vardır. Lewittes (1972) tarafından $Re(s) > 2$ ve r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$G(z, s, r_1, r_2) = \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq(-r_1,-r_2)}}^{\infty} \frac{1}{((m + r_1)z + n + r_2)^s}$$

şeklindeki genelleştirilmiş Eisenstein serilerinin dönüşüm formüllerini elde etmek için bir metot bulunmuştur.

Berndt (1973a), Lewittes' in ispatının son kısmına farklı yaklaşımlarda bulunup, Dedekind toplamları ve çeşitli genelleştirmelerinin elde edildiği dönüşüm formülleri elde etmiştir. Bu çalışma, Berndt (1975a) tarafından genelleştirilmiştir. Berndt (1978) tarafından Berndt (1975a) çalışmasındaki genel teorem kullanılarak çok sayıda dönüşüm formülü elde edilmiştir. Bu dönüşüm formüllerinde, resiprosite bağıntısını sağlayan çeşitli Dedekind toplamı benzeri toplamlar ortaya çıkmıştır.

Berndt (1973b,1975d), daha geniş Eisenstein serilerini inceleyip $\log \eta(z)$ nin karakter genelleştirmelerinin olduğu fonksiyonlar için dönüşüm formülleri elde etmiştir. Bu dönüşüm formüllerinde Dedekind toplamlarının başka genelleştirmeleri ortaya çıkmıştır. Bu toplamlar, karakterleri ve genelleştirilmiş Bernoulli fonksiyonlarını içerir. Ayrıca, dönüşüm formülleri yardımıyla ispatlanan resiprosite formüllerine sahiptir.

Berndt (1977b,1978), bazı sonsuz serilerin hesabı ve sonsuz seriler arasında bağıntılar elde etmek için dönüşüm formüllerini kullanmıştır. Berndt (1973a) daki dönüşüm formülünün ilginç sonuçlarından biri, $n \geq 1$ olmak üzere $\zeta(2n+1)$ için Ramanujan formülüdür. Dirichlet L-fonksiyonu için Ramanujan formülünün karakter benzerleri Katayama (1974) tarafından verilmiş, Berndt (1975d) tarafından dönüşüm formülleri yardımıyla ispatlanmıştır. Bradley (2002) ise, hiperbolik kotanjantın kısmi kesir açılımını kullanarak Ramanujan formülünün periyodik benzerlerini elde etmiştir. Katayama ve Berndt' in formülleri Bradley' in formüllerinin sonuçlarıdır.

Bu çalışmada, $\mathrm{Re}(s) > 2$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ olmak üzere, Eisenstein serilerinin

$$G(z, s; A_\alpha, B_\beta; r_1, r_2) = \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq(-r_1,-r_2)}}^{\infty} \frac{f(\alpha m) f^*(\beta n)}{((m+r_1)z + n + r_2)^s} \tag{1.2}$$

şeklindeki çok geniş sınıfı için dönüşüm formülleri elde edilmiştir. Burada, $\{f(n)\}$ ve $\{f^*(n)\}$, $-\infty < n < \infty$ olmak üzere, kompleks sayıların k periyotlu bir dizisidir ve $A_\alpha = \{f(\alpha n)\}$ ve $B_\beta = \{f^*(\beta n)\}$ şeklindedir. Bu dönüşüm formüllerinde periyodik Bernoulli fonksiyonunu içeren Dedekind toplamlarının genelleştirmeleri ortaya çıkmıştır. Bu toplamların sağladığı resiprosite bağıntısı ispatlanmıştır. Ayrıca, A_α ve B_β nın özel değerleri için bu Dedekind toplamları incelenecektir. Dönüşüm formüllerinin özel durumlarından ilginç sonuçlar elde edilebilmektedir. Bu sonuçlar,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n\left(e^{n\gamma/2} + e^{-n\gamma/2}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n\left(e^{n\theta/2} + e^{-n\theta/2}\right)} = \frac{\pi}{8}, \quad (\gamma\theta = \pi^2 \text{ için})$$

gibi bazı sonsuz serilerin değerlerinin hesabını, sonsuz seriler arasındaki bağıntıları içermektedir. Bir diğer sonucu da periyodik zeta fonksiyonu için Ramanujan formülünün benzerleridir. Bradley' in formülleri bizim elde edeceğimiz teoremlerden birinin sonuçlarıdır ve benzer formüllerin özel durumlarıdır.

2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMALARI

Bu bölümde, Bernoulli polinomları ve fonksiyonları, Dedekind toplamları, genelleştirilmiş Dedekind toplamları, periyodik Bernoulli polinomları, sayıları ve fonksiyonları, karakter fonksiyonu tanıtılacak ve bunların bazı özellikleri verilecektir.

2.1. Periyodik Bernoulli Sayıları ve Polinomları

Tanım 2.1 $A = A_1 = \{f(n)\}$ *olmak üzere,* $B_j(A)$ *ve* $B_j(x, A)$ *periyodik Bernoulli sayıları ve polinomları sırasıyla*

$$\sum_{n=0}^{k-1} \frac{tf(n)e^{nt}}{e^{kt}-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(A)\frac{t^j}{j!}, \ (|t| < 2\pi/k) \tag{2.1}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{k-1} \frac{tf(-n)e^{(n+x)t}}{e^{kt}-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(x, A)\frac{t^j}{j!}, \ (|t| < 2\pi/k) \tag{2.2}$$

üreteç fonksiyonları ile tanımlanır (Berndt 1975c).

Bu tanımda $A = I = \{1\}$ alınırsa (2.1) ve (2.2) sırasıyla

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j\frac{t^j}{j!}, \ (|t| < 2\pi),$$
$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(x)\frac{t^j}{j!}, \ (|t| < 2\pi) \tag{2.3}$$

üreteç fonksiyonları ile verilen klasik Bernoulli sayıları ve polinomlarına dönüşür (Apostol 1976).

$\overline{B}_n(x)$ ile gösterilen Bernoulli fonksiyonu

$\overline{B}_1(x) = ((x))$ ve $n > 1$ için $\overline{B}_n(x) = B_n(\{x\})$

olarak tanımlanır. Burada $\{x\}$, x in kesir kısmıdır ve $\overline{B}_n(x)$, 1 ile periyodik bir fonksiyondur.

Bu çalışma boyunca, n-inci Bernoulli fonksiyonu $P_n(x)$ ile gösterilecek ve

$n!P_n(x) = B_n(x - [x])$

ile tanımlanacaktır. Özel olarak, $P_1(x) = x - [x] - 1/2$ dir.

Ayrıca, $P_n(x)$ periyodik Bernoulli fonksiyonu herhangi bir x için,

$$\sum_{j=0}^{m-1} P_n\left(x+\frac{j}{m}\right) = m^{1-n} P_n(mx) \tag{2.4}$$

Raabe bağıntısını sağlar.

Periyodu k olan $P_n(x,A)$ periyodik Bernoulli fonksiyonları her $x \in \mathbb{R}$ için

$$P_0(x,A) = B_0(A) = \frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1} f(m) \tag{2.5}$$

ve

$$P_n(x,A) = k^{n-1}\sum_{m=0}^{k-1} f(-m) P_n\left(\frac{m+x}{k}\right), \; n \geq 1 \tag{2.6}$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Berndt 1975c).

Tanım 2.2 *$k \in \mathbb{N}$ için*

1) $\chi(a+k) = \chi(a),\ a \in \mathbb{Z},$

2) $\chi(a) = 0 \iff (a,k) \neq 1$

koşullarını sağlayan $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{C}$ ye tanımlı χ çarpımsal fonksiyonuna bir k modül Dirichlet karakteri denir. χ fonksiyonunun tersi, χ nin değerlerinin karmaşık eşleniği olan $\chi^{-1} = \overline{\chi}$ dönüşümüdür.

2.2. Dedekind Toplamları

Tanım 2.3 *$c, d \in \mathbb{Z}$, $c > 1$ olmak üzere $s(d,c)$ ile gösterilen Dedekind toplamı,*

$$s(d,c) = \sum_{j=1}^{c-1} \left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)$$

eşitliği ile tanımlanır (Rademacher ve Grosswald 1972).

Teorem 2.4 *Dedekind toplamları, $(c,d) = 1$ olmak üzere*

$$s(d,c) + s(c,d) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{d}{c} + \frac{c}{d} + \frac{1}{cd}\right)$$

resiprosite bağıntısını sağlar.

İspat. Farklı kanıtları için Rademacher ve Grosswald (1972) ye bakınız. ∎

n, d, c pozitif tamsayılar olmak üzere, Apostol (1950) $s(d,c)$ toplamını

$$s_n(d,c) = \sum_{j=1}^{c-1} \frac{j}{c} \overline{B}_n \left(\frac{dj}{c} \right)$$

eşitliği ile genelleştirerek, $(d,c) = 1$ ve tek n ler için

$$dc^n s_n(d,c) + cd^n s_n(c,d) = \frac{1}{(n+1)} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^j B_j d^j B_{n+1-j} c^{n+1-j} + \frac{nB_{n+1}}{(n+1)}$$

resiprosite bağıntısını ispatlamıştır. $n = 1$ olması durumunda $\overline{B}_1(x) = ((x))$ olduğundan $s_1(d,c) = s(d,c)$ olur.

Carlitz (1964) veya Takàcs (1979), Dedekind toplamlarının bir diğer genelleştirmesini

$$s_n(d,c|x,y) = \sum_{j=0}^{c-1} P_n \left(\frac{d(j+y)}{c} + x \right) P_1 \left(\frac{j+y}{c} \right) \tag{2.7}$$

eşitliği ile tanımlamıştır. Burada $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere $P_n(x)$ fonksiyonu, $0 \leq x < 1$ için $P_n(x) = B_n(x)$ olarak tanımlanır. Carlitz (1964) resiprosite bağıntısını ise, $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere d ve c pozitif tamsayılar ve x ve y reel sayıları için

$$\begin{aligned} &(n+1)\left\{dc^n s_n(d,c|x,y) + cd^n s_n(c,d|y,x)\right\} \\ &\quad = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} c^j d^{n+1-j} P_j(x) P_{n+1-j}(y) + nP_{n+1}(dy+cx) \end{aligned} \tag{2.8}$$

olarak ispatlamıştır. $(d,c) > 1$ durumunda ise benzer bağıntı Takàcs (1979) tarafından verilmiştir.

Berndt (1973b), $s(d,c)$ nin χ ile genelleştirmesi olan $s(d,c:\chi)$ karakter Dedekind toplamını $d,c > 0$ ve $(d,c) = 1$ olmak üzere,

$$s(d,c:\chi) = \sum_{j=0}^{ck-1} \chi(j) \overline{B}_{1,\chi} \left(\frac{dj}{c} \right) \overline{B}_1 \left(\frac{j}{ck} \right)$$

eşitliği ile tanımlayarak c ya da $d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ k)$ koşulu altında

$$s(c,d:\chi) + s(d,c:\overline{\chi}) = B_{1,\chi} B_{1,\overline{\chi}}$$

bağıntısını vermiştir. Ayrıca, karakter Dedekind toplamını

$$s(d,c:\chi:x,y)=\sum_{j \pmod{ck}}\chi(j)\overline{B}_{1,\chi}\left(\frac{d(j+y)}{c}+x\right)\overline{B}_1\left(\frac{j+y}{ck}\right)$$

şeklinde genelleştirmiştir. Burada $\overline{B}_{n,\chi}(x)$ ifadesi

$$\overline{B}_{n,\chi}(x)=k^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}\overline{\chi}(j)\,\overline{B}_n\left(\frac{j+x}{k}\right)$$

ile tanımlanan χ ile genelleştirilmiş Bernoulli fonksiyonudur (Berndt 1975b).

$s(d,c:\chi)$ toplamının Apostol anlamındaki genellemesi Cenkci vd (2006) tarafından

$$s_n(d,c:\chi)=\sum_{j=0}^{ck-1}\chi(j)\overline{B}_{n,\chi}\left(\frac{dj}{c}\right)\overline{B}_1\left(\frac{j}{ck}\right)$$

ifadesiyle verilerek $d,c>0$ ve $(d,c)=1$ olmak üzere, $(dc,k)=1$ ise k asal ya da $(dc,k)>1$ ise k herhangi bir tamsayısı için karşılık gelen resiprosite bağıntısı aritmetik yoldan ispatlanmıştır.

3. BULGULAR–TARTIŞMA

Bu bölümde ilk olarak, $G(z,s;A_\alpha,B_\beta;r_1,r_2)$ fonksiyonunun $s = 1$ hariç tüm $s-$düzlemine analitik devam ettirilebildiği gösterilecektir. $G(z,s;A,B;r_1,r_2)$ fonksiyonu için dönüşüm formülleri elde edilecek, bu dönüşüm formüllerinin bazı özel durumlarında periyodik Bernoulli fonksiyonlarını içeren Dedekind toplamlarının genelleştirmelerinin ortaya çıktığı gözlemlenecektir. Bu toplamların sağladıkları resiprosite bağıntıları ispatlanacaktır. Ayrıca, A_α ve B_β için özel değerler alınıp, ortaya çıkan Dedekind toplamları incelenecektir. Son olarak, bu dönüşüm formüllerinin bazı özel durumları incelenerek, çeşitli sonsuz seriler arasındaki bağıntılar ve periyodik zeta fonksiyonu için Ramanujan formülünün benzerleri elde edilecektir.

Bu çalışmanın bundan sonraki kısmında, $\{z = x+iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ üst yarı-düzlemi $\mathbb{H}$ ile ve $\left\{x+iy : x > -\frac{d}{c} \text{ ve } y > 0\right\}$ kümesi $\mathbb{K}$ ile gösterilecektir. a,b,c,d birer tamsayı ve $c > 0$ olmak üzere, $V(z) = Vz = (az+b)\,/\,(cz+d)$ ile $ad - bc = 1$ koşulunu sağlayan modüler dönüşümler ele alınacaktır. Tam sayıların karakteristik fonksiyonu λ_x, üstel fonksiyon $e(z) = e^{2\pi iz}$ şeklinde gösterilip aksi belirtilmedikçe esas dal $-\pi \leq \arg z < \pi$ alınacaktır.

3.1. $G(z,s;A_\alpha,B_\beta;r_1,r_2)$ Fonksiyonunun Analitik Devamı

Bu bölümde (1.2) ile verilen $G(z,s;A_\alpha,B_\beta;r_1,r_2)$ fonksiyonunun $s = 1$ hariç tüm $s-$düzlemine analitik devam ettirilebildiği gösterilecektir.

$-\infty < n < \infty$ olmak üzere A_α, $\{f\,(\alpha n)\}$ dizisi ile tanımlansın. Yani $\{f\,(\alpha n)\} = A_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ olsun. Benzer şekilde $\{f^*\,(\alpha n)\} = B_\alpha$ olsun.

$G(z,s;A_\alpha,B_\beta;r_1,r_2)$ fonksiyonunun tanımından,

$$
\begin{aligned}
G(z,s;A_\alpha,B_\beta;r_1,r_2) &= \lambda_{r_1} f(-\alpha r_1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f^*(\beta n)(n+r_2)^{-s} \\
&+ \left(\sum_{m<-r_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} + \sum_{m>-r_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \right) \frac{f(\alpha m) f^*(\beta n)}{((m+r_1)z+n+r_2)^s} \\
&= S_1 + S_2 + S_3 \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir. İlk olarak S_1,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \lambda_{r_1} f(-\alpha r_1) \left(\sum_{n>-r_2} f^*(\beta n)(n+r_2)^{-s} + \sum_{n>r_2} f^*(-\beta n)(-n+r_2)^{-s} \right) \\
&= \lambda_{r_1} f(-\alpha r_1) \left(L(s,B_\beta;r_2) + e(s/2) L(s,B_{-\beta};-r_2) \right) \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Burada $L(s;A_\beta;\theta)$ fonksiyonu, $\mathrm{Re}(s)>1$ ve $\theta\in\mathbb{R}$ için

$$L(s;A_\beta;\theta)=\sum_{n>-\theta} f(n\beta)(n+\theta)^{-s} \tag{3.3}$$

şeklindedir. $L(s;A_\beta;\theta)$ fonksiyonu $\zeta(s,\theta)$ Hurwitz zeta fonksiyonu cinsinden yazılabilir. Şöyle ki: $n=mk+j+[-\theta]+1$, $0\le j\le k-1$, $0\le m<\infty$ yazılarak ve $[\theta]+[-\theta]=\lambda_\theta-1$ kullanılarak, $\mathrm{Re}(s)>1$ için

$$\begin{aligned}L(s;A_\beta;\theta)&=\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(\beta(j+[-\theta]+1))}{(km+j+[-\theta]+1+\theta)^s}\\&=\frac{1}{k^s}\sum_{j=1}^{k} f(\beta(j-[\theta]+\lambda_\theta))\zeta\left(s,\frac{j+\{\theta\}+\lambda_\theta}{k}\right)\end{aligned} \tag{3.4}$$

olur. Buradan, $L(s;A_\beta;\theta)$ fonksiyonunun $s=1$ hariç tüm s–düzlemine analitik devam ettirilebildiği anlaşılmaktadır.

İkinci olarak, S_2 de m yerine $-m$, n yerine $-n$ yazılırsa

$$\begin{aligned}S_2&=\sum_{m<-r_1} f(\alpha m)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{f^*(\beta n)}{((m+r_1)z+n+r_2)^s}\\&=e(s/2)\sum_{m>r_1} f(-\alpha m)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{f^*(-\beta n)}{((m-r_1)z+n-r_2)^s}\end{aligned}$$

elde edilir. $\mathrm{Re}(s)>1$, $z\in\mathbb{H}$ ve $0\le\tau<1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-\tau)^{s-1}e^{2\pi iz(n-\tau)}=\frac{\Gamma(s)}{(-2\pi i)^s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z+n)^{-s}e^{2\pi in\tau}$$

Lipschitz toplama formülü kullanılarak, $w\in\mathbb{H}$ ve $\beta\beta^{-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,k)$ için

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{f^*(-\beta n)}{(w+n)^s}&=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^*(-\beta j)}{k^s}\Gamma(s)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{j+w}{k})^s}\\&=(-2\pi i/k)^s\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}e\left(\frac{nw}{k}\right)\sum_{j=0}^{k-1}f^*(-\beta j)e\left(\frac{n\beta^{-1}\beta j}{k}\right)\\&=(-2\pi i/k)^s\sum_{n=1}^{\infty}n^{s-1}e\left(\frac{nw}{k}\right)\sum_{j=0}^{k-1}f^*(j)e\left(-n\beta^{-1}\frac{j}{k}\right)\\&=k\,(-2\pi i/k)^s\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f^*}(\beta^{-1}n)n^{s-1}e\left(\frac{nw}{k}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\widehat{A} = \left\{ \widehat{f}(n) \right\}$ ifadesi $-n < \infty < n$ olmak üzere

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} f\left(j\right) e\left(-nj/k\right) \tag{3.5}$$

şeklinde $\{f(n)\}$ nin sonlu Fourier seri katsayılarıdır. (3.5)'in sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$f(n) = \sum_{j=0}^{k-1} \widehat{f}\left(j\right) e\left(nj/k\right), \quad -n < \infty < n \tag{3.6}$$

olmasıdır. Dolayısıyla,

$$S_2 = \frac{\left(-2\pi i/k\right)^s}{\Gamma(s)} k e(s/2) A\left(z, s; A_{-\alpha}, \widehat{B}_{\beta^{-1}}; -r_1, -r_2\right) \tag{3.7}$$

olur. Burada

$$A(z, s; A_\alpha, A_\beta; r_1, r_2) = \sum_{m > -r_1} f(\alpha m) \sum_{n=1}^{\infty} f(\beta n) e\left(n \frac{(m + r_1)z + r_2}{k}\right) n^{s-1} \tag{3.8}$$

şeklinde bir fonksiyondur.

Benzer şekilde,

$$S_3 = \frac{\left(-2\pi i/k\right)^s}{\Gamma(s)} k A\left(z, s; A_\alpha, \widehat{B}_{-\beta^{-1}}; r_1, r_2\right) \tag{3.9}$$

olarak elde edilebilir.

Böylece, (3.1), (3.2), (3.7) ve (3.9) birleştirilerek,

$$\begin{aligned} & G(z, s; A_\alpha, B_\beta; r_1, r_2) \\ &= \frac{\left(-2\pi i/k\right)^s k}{\Gamma(s)} \left(A\left(z, s; A_\alpha, \widehat{B}_{-\beta^{-1}}; r_1, r_2\right) + e(s/2) A\left(z, s; A_{-\alpha}, \widehat{B}_{\beta^{-1}}; -r_1, -r_2\right) \right) \\ &\quad + \lambda_{r_1} f(-\alpha r_1) \left(L(s; B_\beta; r_2) + e(s/2) L(s; B_{-\beta}; -r_2) \right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

yazılabilir. $L(s; B_\beta; r_2)$ fonksiyonu $s = 1$ hariç tüm s–düzlemine analitik devam ettirilebildiğinden ve $A\left(z, s; A_\alpha, \widehat{B}_{-\beta^{-1}}; r_1, r_2\right)$ fonksiyonu s nin tam fonksiyonu olduğundan, $G(z, s; A_\alpha, B_\beta; r_1, r_2)$ fonksiyonu $s = 1$ hariç tüm s–düzlemine analitik devam ettirilebilir.

Kolaylık olması için, $G(z, s; A_\alpha, B_\beta; 0, 0)$ fonksiyonu $G(z, s; A_\alpha, B_\beta)$ şeklinde ve $G\left(z, s; A_1, B_1; r_1, r_2\right) = G\left(z, s; A, B; r_1, r_2\right)$ yazılacaktır.

3.2. Dönüşüm Formülleri

Bu bölümde, $G(z,s;A_\alpha,B_\beta;r_1,r_2)$ fonksiyonu için dönüşüm formülleri elde edilecektir. Bunun için aşağıdaki Lemma' ya ihtiyaç duyulacaktır.

Lemma 3.1 *(Lewittes 1972) E ve F sıfırdan farklı ve $C>0$ olmak üzere, E, F, C ve D reel sayılar olsun. Bu takdirde, $z\in\mathbb{H}$ için*

$$arg\left((Ez+F)/(Cz+D)\right)=arg\left(Ez+F\right)-arg\left(Cz+D\right)+2\pi l,$$

dir. Burada l, z den bağımsızdır ve $l=\begin{cases}1, & E\leq 0 \text{ ve } DE-CF>0\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$ *şeklindedir.*

Teorem 3.2 *r_1, r_2 keyfi reel sayılar olmak üzere $R_1=ar_1+cr_2$ ve $R_2=br_1+dr_2$ ile tanımlansın. $\rho=\rho(R_1,R_2,c,d)=\{R_2\}c-\{R_1\}d$ olsun. $a\equiv d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)$ ise $z\in\mathbb{K}$ ve tüm s ler için,*

$$\begin{aligned}&(cz+d)^{-s}\Gamma(s)G(Vz,s;A,B;r_1,r_2) &(3.11)\\&=\Gamma(s)G(z,s;B_{-b},A_{-c};R_1,R_2)-2i\Gamma(s)\sin(\pi s)L(s;A_c;-R_2)f^*(bR_1)\lambda_{R_1}\\&\quad+e(-s/2)\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1}f(c([R_2+d(j-\{R_1\})/c]-v))\\&\qquad\times f^*(b(\mu c+j+[R_1]))I(z,s,c,d,r_1,r_2)\end{aligned}$$

dir. Burada $L(s;A_c;R_2)$ ifadesi (3.3) ile verilmiştir ve

$$\begin{aligned}&I(z,s,c,d,r_1,r_2) &(3.12)\\&=\int_C u^{s-1}\frac{\exp(-\left((c\mu+j-\{R_1\})/ck\right)(cz+d)ku)}{\exp(-ku(cz+d))-1}\frac{\exp(\left(\left(v+\{(dj+\rho)/c\}\right)/k\right)ku)}{\exp(ku)-1}du\end{aligned}$$

dur. Burada C, üst yarı-düzlemde $+\infty$ dan başlayan, orjini pozitif yönde çevreleyip alt yarı-düzlemden tekrar $+\infty$ a giden kapalı yoldur. Ayrıca, u^s nin dalı $0<\arg u<2\pi$ olarak seçilmiştir.

Eğer $b\equiv c\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)$ ise $z\in\mathbb{K}$ ve tüm s ler için,

$$\begin{aligned}&(cz+d)^{-s}\Gamma(s)G(Vz,s;A,B;r_1,r_2) &(3.13)\\&=\Gamma(s)G(z,s;A_d,B_a;R_1,R_2)-2i\Gamma(s)\sin(\pi s)L(s;B_{-a};-R_2)f(-dR_1)\lambda_{R_1}\\&\quad+e(-s/2)\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1}f^*(-a([R_2+d(j-\{R_1\})/c]-v+d\mu))\\&\qquad\times f(-d(j+[R_1]))I(z,s,c,d,r_1,r_2)\end{aligned}$$

dir.

İspat. $z \in \mathbb{H}$ ve $\mathrm{Re}\,(s) > 2$ için

$$G(Vz, s; A, B; r_1, r_2) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} f(m) f^*(n) \left\{ \frac{((M+R_1)z + N + R_2)}{cz+d} \right\}^{-s}$$

yazılabilir. Burada, $M = ma + nc$, $N = mb + nd$ dir. $ad - bc = 1$ olduğundan, m ve n sıralı ikilisi $-r_1, -r_2$ sıralı ikilisi hariç tüm tamsayı ikililerini tararken, M ve N de $-R_1, -R_2$ sıralı ikilisi hariç tüm tamsayı ikililerini tarar. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} & G(Vz, s; A, B; r_1, r_2) \\ &= \sum_{M,N=-\infty}^{\infty} f(Md - Nc) f^*(Na - Mb) \left\{ \frac{((M+R_1)z + N + R_2)}{cz+d} \right\}^{-s} \\ &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} f(-nc) f^*(-mb) \left\{ \frac{((m+R_1)z + n + R_2)}{cz+d} \right\}^{-s}, \ a \equiv d \equiv 0 (\mathrm{mod}\, k), \\ &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} f(dm) f^*(an) \left\{ \frac{((m+R_1)z + n + R_2)}{cz+d} \right\}^{-s}, \ b \equiv c \equiv 0 (\mathrm{mod}\, k) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} & (cz+d)^{-s} G(Vz, s; A, B; r_1, r_2) \\ &= \left(e(-s) \sum_{\substack{m+R_1 \le 0 \\ d(m+R_1) > c(n+R_2)}} + \sum_{\substack{m,n \\ \text{diğer}}} \right) \frac{f^*(-mb) f(-nc)}{((m+R_1)z + n + R_2)^s} \\ &= G(z, s; B_{-b}, A_{-c}; R_1, R_2) + (e(-s) - 1)\, g\,(z, s; B_{-b}, A_{-c}; R_1, R_2) \end{aligned} \tag{3.14}$$

yazılabilir. Burada

$$g\,(z, s; B_{-b}, A_{-c}; R_1, R_2) = \sum_{\substack{m+R_1 \le 0 \\ d(m+R_1) > c(n+R_2)}} \frac{f^*(-mb) f(-nc)}{((m+R_1)z + n + R_2)^s} \tag{3.15}$$

dir. (3.15) ifadesinde m yerine $-m$ ve n yerine $-n$ yazılıp $m = R_1$ durumu ayrılırsa

$$\begin{aligned} & g\,(z, s; B_{-b}, A_{-c}; R_1, R_2) \\ &= e(s/2) \left\{ \lambda_{R_1} f^*(bR_1) L(s, A_c; -R_2) + h(z, s; B_b, A_c; -R_1, -R_2) \right\} \end{aligned} \tag{3.16}$$

olur. Burada

$$h(z, s; B_b, A_c; -R_1, -R_2) = \sum_{m > R_1} \sum_{n > R_2 + d(m-R_1)/c} \frac{f^*(mb) f(nc)}{((m-R_1)z + n - R_2)^s}$$

dir. $x > -d/c$ için $\mathrm{Re}((m - R_1)z + n - R_2) > 0$ olduğundan, $\Gamma(s)$ Euler integral gösterimi kullanılırsa, $z \in \mathbb{K}$ ve $\mathrm{Re}\,(s) > 2$ için

$$\begin{aligned}&\Gamma(s)h(z,s;B_b,A_c;-R_1,-R_2)\\&=\sum_{m>R_1}\sum_{n>R_2+d(m-R_1)/c} f(nc)f^*(mb)\int_0^\infty u^{s-1}\exp(-(m-R_1)zu-(n-R_2)u)du\end{aligned}$$

bulunur. Burada $m = m'c + j + [R_1] + 1$, $0 \le m' < \infty$, $0 \le j \le c - 1$ ve $n = n' + [R_2 + d(m - R_1)/c] + 1$ yazılırsa ikili toplam

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{m'=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty} f^*(b(m'c+j+[R_1]+1))f(c(n'+[R_2+d(m'c+j-\{R_1\}+1)/c]+1))\\&\quad\times\int_0^\infty u^{s-1}\exp(-(m'c+j-\{R_1\}+1)zu)\\&\quad\times\exp(-(n'+[R_2+d(m'c+j-\{R_1\}+1)/c]+1-R_2)u)du\end{aligned}$$

olur. $j+1$ yerine j yazılıp $d \equiv 0 (\mathrm{mod}\ k)$ olduğu kullanılıp, $m' = mk+\mu$, $0 \le m < \infty$, $0 \le \mu \le k - 1$, ve $n' = nk + v$, $0 \le n < \infty$, $0 \le v \le k - 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}&\Gamma(s)h(z,s;B_b,A_c;-R_1,-R_2)\\&=\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f^*(b(\mu c+j+[R_1]))f(c(v+[R_2+d(j-\{R_1\})/c]+1))\\&\quad\times\int_0^\infty u^{s-1}\exp(-(c\mu+j-\{R_1\})zu-(v+[R_2+d(j-\{R_1\})/c]+1-R_2)u)\\&\quad\times\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-mku\,(cz+d)-nku)du\\&=\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f^*(b(\mu c+j+[R_1]))f(c(v+[R_2+d(j-\{R_1\})/c]+1))\\&\quad\times\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\exp\left(-(c\mu+j-\{R_1\})zu\right)}{1-\exp(-ku(cz+d))}\\&\quad\times\frac{\exp\left(-\left(v+1-R_2+d\mu+[R_2+d(j-\{R_1\})/c]\right)u\right)}{1-\exp(-ku)}du\\&=-\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f^*(b(\mu c+j+[R_1]))f(c([R_2+d(j-\{R_1\})/c]-v))\\&\quad\times\int_0^\infty u^{s-1}\frac{\exp(-(c\mu+j-\{R_1\})(cz+d)ku/ck)}{\exp(-ku(cz+d))-1}\end{aligned}$$

$$\times \frac{\exp(((v+\{(dj+\rho)/c\})/k)ku)}{\exp(ku)-1}du$$
$$= \sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f^*(b(\mu c+j+[R_1]))f(c([R_2+d(j-\{R_1\})/c]-v))$$
$$\times \frac{I(z,s,c,d,r_1,r_2)}{1-e(s)} \tag{3.17}$$

elde edilir. Burada

$$I(z,s,c,d,r_1,r_2)$$
$$= \int_C u^{s-1}\frac{\exp(-((c\mu+j-\{R_1\})/ck)(cz+d)ku)}{\exp(-ku(cz+d))-1}\frac{\exp(((v+\{(dj+\rho)/c\})/k)ku)}{\exp(ku)-1}du$$

dur. Son adımda, pay ve payda $\exp(ku)$ ile çarpılıp $k-1-v$ yerine v yazılıp, $(0,\infty)$ üzerinden olan integrali çevre integraline dönüştüren Riemann' ın klasik metodu kullanılmıştır (Titchmarsh 1951). (3.14), (3.16) ve (3.17) birleştirilirse, (3.11) elde edilir. Analitik devam ile bu ifade tüm s ler için geçerlidir.

(3.13)'ün ispatı benzer şekilde yapılabilir. ∎

Açıklama 3.3 *Teorem 3.2, Berndt (1973a,1973b,1975d) tarafından elde edilen dönüşüm formüllerinin bir genelleştirmesidir.*

Ayrıca, ispatı (3.11)'e benzer olan aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır.

Teorem 3.4 *Teorem 3.2 nin şartları altında,* $a \equiv d \equiv 0 \pmod k$ *için*

$$(cz+d)^{-s}\Gamma(s)G(Vz,s;B_{-\beta},A_{-\alpha};r_1,r_2) \tag{3.18}$$
$$= \Gamma(s)G(z,s;A_{\alpha b},B_{\beta c};R_1,R_2) - 2i\Gamma(s)\sin(\pi s)f(-\alpha bR_1)L(s,B_{-\beta c};-R_2)$$
$$+ e(-s/2)\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f(-\alpha b(\mu c+j+[R_1]))$$
$$\times f^*(-\beta c([R_2+d(j-\{R_1\})/c]-v))I(z,s,c,d,r_1,r_2)$$

dir. Burada $I(z,s,c,d,r_1,r_2)$ *ifadesi (3.12) ile verilmiştir.*

Özel olarak, $a=d=0$ ve $c=-b=1$ alınırsa,

$$z^{-s}\Gamma(s)G(-1/z,s;B_{-\beta},A_{-\alpha};r_1,r_2) \tag{3.19}$$
$$= \Gamma(s)G(z,s;A_{-\alpha},B_{\beta};R_1,R_2) - 2i\Gamma(s)\sin(\pi s)f(\alpha R_1)L(s,B_{-\beta};-R_2)$$
$$+ e(-s/2)\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f(\alpha(\mu+1+[R_1]))f^*(-\beta([R_2]-v))I(z,s,1,0,r_1,r_2)$$

elde edilir.

3.3. Periyodik Dedekind Toplamları

Yukarıda elde edilen dönüşüm formülleri $s \in \mathbb{Z}$ olduğunda çok sade bir hal alır. Bu durumda, $I(z, s, c, d, r_1, r_2)$ integrali, Bernoulli polinomlarının tanımı kullanılarak Rezidü teoremi yardımıyla hesaplanabilir. Dolayısıyla, N negatif olmayan tamsayı olmak üzere $s = -N$ ise,

$$\begin{aligned}&I(z, -N, c, d, r_1, r_2) \\ &= 2\pi i k^N \sum_{m+n=N+2} B_m\left(\frac{c\mu + j - \{R_1\}}{ck}\right) B_n\left(\frac{v + \{(dj+\rho)/c\}}{k}\right) \frac{(-(cz+d))^{m-1}}{m!n!}\end{aligned} \tag{3.20}$$

olur. Buradan, $s = -N$ için analitik devam yardımıyla Teorem 3.2 nin $z \in \mathbb{H}$ için geçerli olduğu görülür.

3.3.1. $s = r_1 = r_2 = 0$ durumu

$s = r_1 = r_2 = 0$ için (3.20) ifadesi

$$\begin{aligned} I(z, 0, c, d, 0, 0) &= -\frac{\pi i}{cz+d} B_2\left(\frac{v + \{dj/c\}}{k}\right) - \pi i(cz+d) B_2\left(\frac{c\mu + j}{ck}\right) \\ &\quad + 2\pi i B_1\left(\frac{c\mu + j}{ck}\right) B_1\left(\frac{v + \{dj/c\}}{k}\right)\end{aligned}$$

eşitliğine dönüşür. $a \equiv d \equiv 0 \pmod k$ durumu göz önüne alınsın. Bu durumda (3.11) ifadesi

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to 0} \Gamma(s)\left(\frac{1}{(cz+d)^s} G(Vz, s; A, B) - G(z, s; B_{-b}, A_{-c})\right) \\ &= -2if^*(0) \lim_{s\to 0} \Gamma(s)\sin(\pi s) L(s, A_c; 0) \\ &+ \sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f^*(b(\mu c + j)) f(c([dj/c] - v)) I(z, 0, c, d, 0, 0)\end{aligned} \tag{3.21}$$

şeklinde olur. Şimdi (3.21)'deki üçlü toplamı hesaplayalım.

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f^*\left(b(\mu c + j)\right) f\left(c([d(j)/c] - v)\right)\left(-\frac{\pi i}{cz+d} B_2\left(\frac{v + \{dj/c\}}{k}\right)\right. \\ &\quad \left. -\pi i(cz+d) B_2\left(\frac{c\mu + j}{ck}\right) + 2\pi i B_1\left(\frac{c\mu + j}{ck}\right) B_1\left(\frac{v + \{dj/c\}}{k}\right)\right) \\ &= T_1 + T_2 + T_3\end{aligned}$$

olsun. İlk olarak,

$$
\begin{aligned}
T_1 &= -\pi i \frac{1}{cz+d} \sum_{j=1}^{c} \sum_{\mu=0}^{k-1} f^*(b(\mu c+j)) \sum_{v=0}^{k-1} f(c([dj/c]-v)) B_2\left(\frac{v+\{dj/c\}}{k}\right) \\
&= -\pi i \frac{2}{cz+d} k B_0(B) \sum_{j=1}^{c} \sum_{v=0}^{k-1} f(c([dj/c]-v)) P_2\left(\frac{v+\{dj/c\}}{k}\right) \\
&= -\pi i \frac{2}{cz+d} k B_0(B) \sum_{j=1}^{c} \sum_{v=0}^{k-1} f(-cv) P_2\left(\frac{v+dj/c}{k}\right)
\end{aligned}
$$

yazılır. $P_r(x,A)$ nın notasyonuna uygunluk açısından v üzerinden olan toplam $P_r(x,A_c)$ ile gösterilsin. Yani,

$$
k^{r-1} \sum_{v=0}^{k-1} f(-cv) P_r\left(\frac{v+x}{k}\right) = P_r(x, A_c) \tag{3.22}
$$

olsun. $P_r(x,A_1) = P_r(x,A)$ olduğu açıktır. Böylece, $(d,c)=1$ ve $d \equiv 0 \pmod{k}$ için

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{c} P_r\left(dj/c, A_c\right) &= k^{r-1} \sum_{v=0}^{k-1} f(-cv) \sum_{j=1}^{c} P_r\left(\frac{v+dj/c}{k}\right) \\
&= k^{r-1} \sum_{v=0}^{k-1} f(-cv) \sum_{j=1}^{c} P_r\left(\frac{v}{k}+\frac{mj}{c}\right) \\
&= k^{r-1} c^{1-r} \sum_{v=0}^{k-1} f(-cv) P_r\left(\frac{cv}{k}\right) \\
&= c^{1-r} P_r(0, A)
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla, $r \geq 2$ veya $r=0$ için $P_r(0,A) = (-1)^r B_r(A)/r!$ (Berndt 1975c) ifadesi kullanılırsa

$$
T_1 = -\frac{\pi i}{c\,(cz+d)} B_0(B) B_2(A)
$$

elde edilir. İkinci olarak, (2.5) ve (2.4) bağıntıları kullanılarak

$$
\begin{aligned}
T_2 &= -\pi i (cz+d) \sum_{j=1}^{c} \sum_{\mu=0}^{k-1} f^*(b(\mu c+j)) B_2\left(\frac{c\mu+j}{ck}\right) \sum_{v=0}^{k-1} f(c([dj/c]-v)) \\
&= -2\pi i (cz+d) k B_0(A) \sum_{n=0}^{ck-1} f^*(-bn) P_2\left(\frac{n}{ck}\right) \\
&= -2\pi i (cz+d) k B_0(A) \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{c-1} f^*(-bm) P_2\left(\frac{vk+m}{ck}\right)
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{2\pi i}{c}(cz+d)B_0(A)P_2(0,B_b)$$

elde edilir. Son olarak,

$$\begin{aligned}
&(2\pi i)^{-1}T_3\\
&= \sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f^*(b(\mu c+j))f(c([dj/c]-v))B_1\left(\frac{c\mu+j}{ck}\right)B_1\left(\frac{v+\{dj/c\}}{k}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{c-1}\sum_{\mu=0}^{k-1} f^*(b(\mu c+j))P_1\left(\frac{c\mu+j}{ck}\right)\sum_{v=0}^{k-1} f(c([dj/c]-v))P_1\left(\frac{v-[dj/c]+dj/c}{k}\right)\\
&\quad+\sum_{\mu=0}^{k-1} f^*(bc(\mu+1))B_1\left(\frac{\mu+1}{k}\right)\sum_{v=0}^{k-1} f(-cv)P_1\left(\frac{v}{k}\right)\\
&= \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{c} f^*(b(\mu c+j))P_1\left(\frac{c\mu+j}{ck}\right)\sum_{v=0}^{k-1} f(-cv)P_1\left(\frac{v+dj/c}{k}\right)\\
&\quad+P_1\left(0,A_c\right)\sum_{\mu=1}^{k} f^*(bc\mu)\left\{B_1\left(\frac{\mu}{k}\right)-P_1\left(\frac{\mu}{k}\right)\right\}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$T_3 = 2\pi i\sum_{n=1}^{ck} f^*(bn)P_1\left(\frac{n}{ck}\right)P_1\left(\frac{dn}{c},A_c\right)+2\pi i f^*(0)P_1\left(0,A_c\right)$$

yazılabilir. Birleştirilirse,

$$\begin{aligned}
&T_1+T_2+T_3\\
&= -\frac{\pi i}{c(cz+d)}B_0(B)B_2(A)-\frac{2\pi i}{c}(cz+d)B_0(A)P_2(0,B_b)\\
&\quad+2\pi i\sum_{n=1}^{ck} f^*(bn)P_1\left(\frac{n}{ck}\right)P_1\left(\frac{dn}{c},A_c\right)+2\pi i f^*(0)P_1\left(0,A_c\right)
\end{aligned}\tag{3.23}$$

elde edilir. Böylece, aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.5 *$d\equiv 0\,(\operatorname{mod} k)$ ve $c>0$ olmak üzere c ve d aralarında asal iki tamsayı olsun. $bc\equiv -1\ (\operatorname{mod} d)$ için $s\left(d,c;B_b,A_c\right)$ periyodik Dedekind toplamı*

$$s\left(d,c;B_b,A_c\right)=\sum_{n=1}^{ck} f^*(bn)P_1\left(\frac{n}{ck}\right)P_1\left(\frac{dn}{c},A_c\right)$$

ile tanımlanır.

$s\left(d,c;B,A\right)$ toplamı Berndt (1977a) tarafından $ad-bc=1$ ve $a\equiv d\equiv 0\,(\operatorname{mod} k)$ kısıtlamaları olmadan tanımlanmıştır.

Diğer taraftan, $L(0;A_\beta;\theta)$ nın hesabı için (3.4), $\zeta\left(0,\theta\right)=1/2-\theta=-B_1\left(\theta\right)$, $0<\theta\leq 1$, ve $B_1\left(1-\theta\right)=-B_1\left(\theta\right)$ bağıntıları kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
L(0;A_\beta;\theta) &= -\sum_{j=0}^{k-1} f(\beta\left(j-[\theta]+\lambda_\theta\right))B_1\left(\frac{j+\{\theta\}+\lambda_\theta}{k}\right)\\
&= -\sum_{j=0}^{k-2} f(\beta\left(j-[\theta]+\lambda_\theta\right))P_1\left(\frac{j+\{\theta\}+\lambda_\theta}{k}\right)\\
&- f(\beta\left(-1-[\theta]+\lambda_\theta\right))B_1\left(1-\frac{1-\{\theta\}-\lambda_\theta}{k}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{k-1} f(-\beta\left(j+1+[\theta]-\lambda_\theta\right))P_1\left(\frac{j+1-\{\theta\}-\lambda_\theta}{k}\right)\\
&+ f(-\beta\left(1+[\theta]-\lambda_\theta\right))P_1\left(\frac{1-\{\theta\}-\lambda_\theta}{k}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{k-1} f(-\beta j)P_1\left(\frac{j-\theta}{k}\right)=P_1\left(-\theta,A_\beta\right) \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{s\to 0} s\Gamma(s)\frac{\sin(\pi s)}{s\pi}\pi L(s;A_c;0)=\pi P_1\left(0,A_c\right) \qquad (3.25)$$

olur. (3.23) ve (3.25) ifadeleri (3.21)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\left((cz+d)^{-s}G(Vz,s;A,B)-G(z,s;B_{-b},A_{-c})\right) \qquad (3.26)\\
&= 2\pi i s\left(d,c;B_b,A_c\right)-\frac{\pi i}{c(cz+d)}B_0(B)B_2(A)-\frac{2\pi i}{c}(cz+d)B_0(A)P_2\left(0,B_b\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi ise, $b\equiv c\equiv 0\,(\operatorname{mod} k)$ durumu göz önüne alınsın. Buradan, (3.13)

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\left((cz+d)^{-s}G(Vz,s;A,B)-G(z,s;A_d,B_a)\right)\\
&= -2if^*(0)\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\sin(\pi s)L(s;B_{-a};0)\\
&+\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f^*(-a([dj/c]+v+d\mu))f(-d(\mu c+j))I(z,0,c,d,0,0) \quad (3.27)
\end{aligned}$$

ifadesine dönüşür. (3.27)'deki üçlü toplam

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f(-dj))f^{*}(-a([dj/c]-v+d\mu))\left(-\pi i(cz+d)B_2\left(\frac{c\mu+j}{ck}\right)\right.\\
&\quad\left.-\frac{\pi i}{cz+d}B_2\left(\frac{v+\{dj/c\}}{k}\right)+2\pi i B_1\left(\frac{c\mu+j}{ck}\right)B_1\left(\frac{v+\{dj/c\}}{k}\right)\right)\\
&=T_4+T_5+T_6
\end{aligned}$$

olsun. T_1, T_2 ve T_3 e benzer şekilde

$$\begin{aligned}
T_4 &= -\frac{2\pi i}{c}(cz+d)B_0(B)P_2(0,A_d),\\
T_5 &= -\frac{2\pi i}{c\,(cz+d)}B_0(B)P_2\,(0,A)\,,\\
T_6 &= 2\pi i\sum_{n=1}^{ck} f(-dn)P_1\left(\frac{n}{ck}\right)P_1\left(\frac{dn}{c},B_{-a}\right)+2\pi i f(0)P_1\,(0,B_{-a})
\end{aligned}$$

elde edilebilir. Böylece, aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.6 *$c\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)$ ve $c>0$ olmak üzere c ve d aralarında asal iki tamsayı olsun. $ad\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,c)$ için, periyodik Dedekind toplamı*

$$s\,(d,c;A_d,B_a)=\sum_{n=1}^{ck} f(dn)P_1\left(\frac{n}{ck}\right)P_1\left(\frac{dn}{c},B_a\right)$$

ile tanımlanır.

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
T_4+T_5+T_6 &= 2\pi i s\,(d,c;A_{-d},B_{-a})-\frac{2\pi i}{c}(cz+d)B_0(B)P_2(0,A_d)\\
&\quad-\frac{\pi i}{c(cz+d)}B_0(B)B_2\,(A)+2\pi i f(0)P_1\,(0,B_{-a})
\end{aligned}$$

yazılır. (3.25) yardımıyla

$$\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\sin(\pi s)L(s;B_{-a};0)=\pi P_1\,(0,B_{-a}) \tag{3.28}$$

eşitliği sağlanır. Bulunanlar (3.27)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\left((cz+d)^{-s}G(Vz,s;A,B)-G(z,s;A_d,B_a)\right) \qquad (3.29)\\
&=2\pi i s\,(d,c;A_{-d},B_{-a})-2\pi i\frac{cz+d}{c}B_0(B)P_2(0,A_d)-\frac{\pi i}{c(cz+d)}B_0(B)B_2(A)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan sonuçlar aşağıdaki teoremde özetlenebilir:

Teorem 3.7 *$z \in \mathbb{H}$ olsun. Eğer $a \equiv d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k)$ ise,*

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} \Gamma(s) \left((cz+d)^{-s} G(Vz,s;A,B) - G(z,s;B_{-b},A_{-c})\right) \qquad (3.30)\\ &= 2\pi i s\left(d,c;B_b,A_c\right) - \frac{\pi i}{c(cz+d)} B_0(B)B_2(A) - 2\pi i \frac{cz+d}{c} B_0(A) P_2\left(0,B_b\right), \end{aligned}$$

eğer $b \equiv c \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k)$ ise

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} \Gamma(s) \left((cz+d)^{-s} G(Vz,s;A,B) - G(z,s;A_d,B_a)\right) \qquad (3.31)\\ &= 2\pi i s\left(d,c;A_{-d},B_{-a}\right) - \frac{\pi i}{c(cz+d)} B_0(B)B_2(A) - 2\pi i \frac{cz+d}{c} B_0(B) P_2(0,A_d) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

Şimdi, $s\left(d,c;B_b,A_c\right)$ periyodik Dedekind toplamının sağladığı resiprosite bağıntısı verilebilir.

Teorem 3.8 *$d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k)$ olmak üzere, c ve d aralarında asal iki tamsayı olsun. $bc \equiv -1 \;(\mathrm{mod}\, d)$ ise*

$$\begin{aligned} &s\left(-c,d;A_c,B_{-b}\right) - s\left(d,c;B_b,A_c\right)\\ &= P_1\left(0,B_{-b}\right) P_1\left(0,A_{-c}\right) - \frac{d}{c} B_0(A) P_2\left(0,B_b\right) - \left(\frac{c}{d} P_2\left(0,A_c\right) + \frac{1}{2dc} B_2(A)\right) B_0(B) \end{aligned}$$

resiprosite bağıntısı sağlanır.

İspat. $Tz = V\left(-1/z\right) = (bz-a)/(dz-c)$ olsun. (3.30)'da z yerine $-1/z$ yazılırsa

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} z^s \Gamma(s) \left(\frac{1}{(dz-c)^s} G\left(V\left(-1/z\right),s;A,B\right) - z^{-s} G\left(-1/z,s;B_{-b},A_{-c}\right)\right)\\ &= 2\pi i s\left(d,c;B_b,A_c\right) - \pi i z \frac{B_0(B)B_2(A)}{c\left(dz-c\right)} - 2\pi i \frac{dz-c}{cz} B_0(A) P_2\left(0,B_b\right) \qquad (3.32) \end{aligned}$$

olur, (3.31)'de Vz yerine Tz yazılırsa

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} \Gamma(s) \left(\frac{1}{(dz-c)^s} G(Tz,s;A,B) - G(z,s;A_{-c},B_b)\right) \qquad (3.33)\\ &= 2\pi i s\left(-c,d;A_c,B_{-b}\right) - \pi i \frac{B_0(B)B_2(A)}{d\left(dz-c\right)} - \frac{2\pi i}{d}(dz-c) B_0(B) P_2\left(0,A_{-c}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, aşağıdaki limiti hesaplayalım.

$$\lim_{s\to 0} \Gamma(s) \left(z^{-s} G\left(-1/z,s;B_{-b},A_{-c}\right) - G(z,s;A_{-c},B_b)\right).$$

$s = r_1 = r_2 = 0$, $\beta = b$ ve $\alpha = c$ için, (3.19) ve (3.20) ifadeleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0} \Gamma(s)\left(\frac{1}{z^s}G(-1/z,s;B_{-b},A_{-c}) - G(z,s;A_{-c},B_b)\right) \\
&= -2if(0)\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\sin(\pi s)L(s;B_{-b};0) \\
&\quad + \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f(c(\mu+1))f^*(bv))I(z,0,1,0,0,0)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

ve

$$I(z,0,1,0,0,0) = -\frac{\pi i}{z}B_2\left(\frac{v}{k}\right) - \pi i z B_2\left(\frac{\mu+1}{k}\right) + 2\pi i B_1\left(\frac{\mu+1}{k}\right)B_1\left(\frac{v}{k}\right)$$

olur. Ayrıca,

$$\sum_{\mu=0}^{k-1} f(c(\mu+1))\sum_{v=0}^{k-1} f^*(bv)B_2\left(\frac{v}{k}\right) = 2B_0(A)P_2\left(0,B_b\right),$$

$$\sum_{v=0}^{k-1} f^*(bv)\sum_{\mu=0}^{k-1} f(c(\mu+1))B_2\left(\frac{\mu+1}{k}\right) = 2B_0\left(B\right)P_2\left(0,A_c\right)$$

ve

$$\begin{aligned}
&\sum_{v=0}^{k-1} f^*(bv)B_1\left(\frac{v}{k}\right)\sum_{\mu=0}^{k-1} f(c(\mu+1))B_1\left(\frac{\mu+1}{k}\right) \\
&\quad = P_1\left(0,B_{-b}\right)P_1\left(0,A_{-c}\right) + f\left(0\right)P_1\left(0,B_{-b}\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri kolaylıkla elde edilebilir. Dolayısıyla, (3.28) yardımıyla (3.34) ifadesi

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\left(\frac{1}{z^s}G(-1/z,s;B_{-b},A_{-c},0,0) - G(z,s;A_{-c},B_b)\right) \\
&= 2\pi i P_1\left(0,B_{-b}\right)P_1\left(0,A_{-c}\right) - \frac{2\pi i}{z}B_0(A)P_2\left(0,B_b\right) - 2\pi i z B_0\left(B\right)P_2\left(0,A_c\right)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

eşitliğine dönüşür.

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0} z^s\Gamma(s)\left(\frac{1}{(dz-c)^s}G\left(Tz,s;A,B\right) - G(z,s;A_{-c},B_b)\right) \\
&= \lim_{s\to 0} z^s\Gamma(s)\left(\frac{1}{(dz-c)^s}G(V\left(-1/z\right),s;A,B) - \frac{1}{z^s}G\left(-1/z,s;B_{-b},A_{-c}\right)\right) \\
&\quad + \lim_{s\to 0} z^s\Gamma(s)\left(\frac{1}{z^s}G\left(-1/z,s;B_{-b},A_{-c}\right) - G(z,s;A_{-c},B_b)\right)
\end{aligned}$$

kullanılarak, (3.32), (3.33) ve (3.35) yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&s\left(-c,d;A_c,B_{-b}\right)-s\left(d,c;B_b,A_c\right)\\
&=P_1\left(0,B_{-b}\right)P_1\left(0,A_{-c}\right)-\frac{1}{2dc}B_0(B)B_2(A)+\frac{1}{d}(dz-c)B_0(B)P_2\left(0,A_{-c}\right)\\
&\quad -zB_0\left(B\right)P_2\left(0,A_c\right)-\frac{1}{cz}\left(dz-c\right)B_0(A)P_2\left(0,B_b\right)-\frac{1}{z}B_0(A)P_2\left(0,B_b\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan, $z=c/d$ için resiprosite bağıntısı elde edilmiş olur. ∎

Açıklama 3.9 $x\notin\mathbb{Z}$ *için*

$$
P_1\left(-x,B_{-b}\right)=\sum_{v=0}^{k-1}f^*(-bv)P_1\left(-\frac{v+x}{k}\right)=-P_1\left(x,B_b\right),
$$

$x\in\mathbb{Z}$ *için*

$$
\begin{aligned}
P_1\left(-x,B_{-b}\right)&=\sum_{\substack{v=0\\ v\not\equiv x(\mathrm{mod}\,k)}}^{k-1}f^*(bv)P_1\left(\frac{v-x}{k}\right)+f^*(xb)P_1\left(0\right)\\
&=-\sum_{\substack{v=0\\ v\not\equiv -x(\mathrm{mod}\,k)}}^{k-1}f^*(-bv)P_1\left(\frac{v+x}{k}\right)+f^*(xb)P_1\left(0\right)\\
&=-\sum_{v=0}^{k-1}f^*(-bv)P_1\left(\frac{v+x}{k}\right)+2f^*(xb)P_1\left(0\right)\\
&=-P_1\left(x,B_b\right)-f^*(xb)
\end{aligned}
$$

bağıntıları kullanılırsa,

$$
s\left(-c,d;A_c,B_{-b}\right)=-s\left(c,d;A_c,B_b\right)-f(0)P_1\left(0,B\right) \tag{3.36}
$$

yazılabilir ve dolayısıyla resiprosite formülü

$$
\begin{aligned}
&s\left(c,d;A_c,B_b\right)+s\left(d,c;B_b,A_c\right)\\
&=-P_1\left(0,B_{-b}\right)P_1\left(0,A_{-c}\right)+\frac{1}{2dc}B_0(B)B_2(A)+\frac{d}{c}B_0(A)P_2\left(0,B_b\right)\\
&+\frac{c}{d}B_0\left(B\right)P_2\left(0,A_c\right)-f(0)P_1\left(0,B\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Açıklama 3.10 *Berndt (1977a), Riemann–Stieltjes integralini kullanarak* $s\left(c,d;A,B\right)$ *periyodik Dedekind toplamı için* $d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)$ *kısıtlaması olmadan resiprosite formülünü ispatlamıştır.*

3.3.2. $s = 0, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ **durumu**

$s = 0$ ve r_1, r_2 keyfi reel sayılar olsun. (3.20) yardımıyla

$$\begin{aligned} &I(z, 0, c, d, R_1, R_2) \\ &= -\frac{\pi i}{cz+d} B_2\left(\frac{v + \{(dj+\rho)/c\}}{k}\right) - \pi i(cz+d) B_2\left(\frac{c\mu + j - \{R_1\}}{ck}\right) \\ &\quad + 2\pi i B_1\left(\frac{c\mu + j - \{R_1\}}{ck}\right) B_1\left(\frac{v + \{(dj+\rho)/c\}}{k}\right) \end{aligned} \tag{3.37}$$

yazılabilir. $a \equiv d \equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$ durumu göz önüne alınsın. Bu takdirde (3.11) eşitliği,

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} \Gamma(s) \left(\frac{1}{(cz+d)^s} G(Vz, s; A, B; r_1, r_2) - G(z, s; B_{-b}, A_{-c}; R_1, R_2)\right) \\ &= -2i f^*(bR_1) \lambda_{R_1} \lim_{s\to 0} \Gamma(s) \sin(\pi s) L(s; A_c; -R_2) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{c} \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{k-1} f^*(b(\mu c + j + [R_1])) \\ &\times f(c([R_2 + d(j - \{R_1\})/c] - v)) I(z, 0, c, d, R_1, R_2) \end{aligned} \tag{3.38}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi, (3.38)'deki üçlü toplamı hesaplayalım.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{c} \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{k-1} f^*(b(\mu c + j + [R_1])) f(c([R_2 + d(j - \{R_1\})/c] - v)) \\ &\quad \times \left(-\frac{\pi i}{cz+d} B_2\left(\frac{v + \{(dj+\rho)/c\}}{k}\right) - \pi i(cz+d) B_2\left(\frac{c\mu + j - \{R_1\}}{ck}\right)\right. \\ &\qquad \left. + 2\pi i B_1\left(\frac{c\mu + j - \{R_1\}}{ck}\right) B_1\left(\frac{v + \{(dj+\rho)/c\}}{k}\right)\right) \\ &\quad = T_7 + T_8 + T_9 \end{aligned}$$

olsun. $(dj + \rho)/c = d(j - \{R_1\})/c + R_2 - [R_2]$ kullanılarak,

$$\begin{aligned} T_7 &= -\frac{\pi i}{cz+d} \sum_{j=1}^{c} \sum_{v=0}^{k-1} f(c([R_2 + d(j - \{R_1\})/c] - v)) \\ &\quad \times B_2\left(\frac{v + \{(dj+\rho)/c\}}{k}\right) \sum_{\mu=0}^{k-1} f^*(b(\mu c + j + [R_1])) \\ &= -\frac{2\pi i}{cz+d} k B_0(B) \sum_{j=1}^{c} \sum_{v=0}^{k-1} f(-cv) P_2\left(\frac{v + R_2}{k} + \frac{d(j - \{R_1\})}{ck}\right) \end{aligned}$$

yazılır. $(d,c)=1$ ve $d=mk$ için, (2.4) kullanılarak

$$\begin{aligned} T_7 &= -\frac{2\pi i}{c\,(cz+d)} kB_0(B) \sum_{v=0}^{k-1} f(-cv) P_2\left(\frac{cv+cR_2-mkR_1}{k}+m\left[R_1\right]\right) \\ &= -\frac{2\pi i}{c\,(cz+d)} B_0(B) P_2\left(cR_2-dR_1, A\right) \end{aligned}$$

yazılır. Tekrar (2.4)'e başvurularak

$$\begin{aligned} T_8 &= -\pi i(cz+d) \sum_{j=1}^{c} \sum_{\mu=0}^{k-1} f^*(b(\mu c+j+[R_1])) B_2\left(\frac{c\mu+j-\{R_1\}}{ck}\right) \\ &\quad \times \sum_{v=0}^{k-1} f((c\left[R_2+d\left(j-\{R_1\}\right)/c\right]-v)) \\ &= -2\pi i(cz+d) kB_0(A) \sum_{n=1}^{ck} f^*(bn) P_2\left(\frac{n-R_1}{ck}\right) \\ &= -2\pi i(cz+d) kB_0(A) \sum_{v=0}^{c-1} \sum_{r=1}^{k} f^*(br) P_2\left(\frac{v}{c}+\frac{r-R_1}{ck}\right) \\ &= -\frac{2\pi i}{c}(cz+d) B_0(A) P_2(R_1, B_b) \end{aligned}$$

olur. Şimdi de

$$\begin{aligned} (2\pi i)^{-1} T_9 = &\sum_{j=1}^{c} \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{k-1} f^*(b(\mu c+j+[R_1])) f(c\left[R_2+d\left(j-\{R_1\}\right)/c\right]-v)) \\ &\times B_1\left(\frac{c\mu+j-\{R_1\}}{ck}\right) B_1\left(\frac{v+\{(dj+\rho)/c\}}{k}\right) \end{aligned}$$

ifadesi göz önüne alınsın. $R_1 \in \mathbb{Z}$, $\mu=k-1$ ve $j=c$ haricinde $B_1\left(\frac{c\mu+j-\{R_1\}}{ck}\right)$ yerine $P_1\left(\frac{c\mu+j-\{R_1\}}{ck}\right)$ yazılabilir. $R_1 \in \mathbb{Z}$ ise, önce $j=c$ terimi ayrılıp $B_1\left(\frac{c\mu+j-\{R_1\}}{ck}\right)$ yerine $P_1\left(\frac{c\mu+j-\{R_1\}}{ck}\right)$ yazılıp, $j=c$ terimi eklenip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} T_9 = 2\pi i &\sum_{j=1}^{c} \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{k-1} f^*(b(\mu c+j+[R_1])) f(c\left(\left[R_2+dj/c\right]-v\right)) \\ &\times P_1\left(\frac{c\mu+j-\{R_1\}}{ck}\right) P_1\left(\frac{v+\{(dj+\rho)/c\}}{k}\right) \\ &+ 2\pi i P_1(R_2, A_c) f^*(bR_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, R_1 keyfi reel sayısı için

$$\begin{aligned}
T_9 &= 2\pi i \sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1} f^*(b(\mu c + j + [R_1]))P_1\left(\frac{c\mu + j - \{R_1\}}{ck}\right) \\
&\quad\times \sum_{v=0}^{k-1} f(c([R_2 + d(j - \{R_1\})/c] - v))P_1\left(\frac{v + \{(dj+\rho)/c\}}{k}\right) \\
&\quad + 2\pi i P_1(R_2, A_c) f^*(bR_1)\lambda_{R_1} \\
&= 2\pi i \sum_{n=1}^{ck} f^*(bn)P_1\left(\frac{n - R_1}{ck}\right) P_1\left(\frac{d(n-R_1)}{c} + R_2, A_c\right) \\
&\quad + 2\pi i P_1(R_2, A_c) f^*(bR_1)\lambda_{R_1}
\end{aligned}$$

olur. Böylece, aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.11 *$d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k)$ ve $c > 0$ olmak üzere c ve d aralarında asal iki tamsayı olsun. $bc \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\, d)$ için, $s(d, c; A_b, A_c; x, y)$ genelleştirilmiş periyodik Dedekind toplamı,*

$$s(d, c; A_b, A_c; x, y) = \sum_{n=1}^{ck} f(bn)P_1\left(\frac{n+y}{ck}\right) P_1\left(\frac{d(n+y)}{c} + x, A_c\right)$$

ile tanımlanır.

$s(d, c; A_b, A_c; 0, 0) = s(d, c; A_b, A_c)$ olduğu açıktır. Ayrıca $s(d, c; A_b, A_c; x, y)$ toplamı, Rademacher ve Grosswald (1972) tarafından verilen $s(d, c; x, y)$ genelleştirilmiş Dedekind toplamının ve Berndt (1973a,1973b) tarafından verilen genelleştirilmiş Dedekind karakter toplamının doğal bir genellemesidir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
&T_7 + T_8 + T_9 \\
&= 2\pi i s(d, c; B_b, A_c, R_2, -R_1) - \frac{2\pi i}{c(cz+d)} B_0(B) P_2(cR_2 - dR_1, A) \\
&\quad - \frac{2\pi i}{c}(cz+d) B_0(A) P_2(R_1, B_b) + 2\pi i P_1(R_2, A_c) f^*(bR_1)\lambda_{R_1}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

elde edilmiş olur. Diğer taraftan, (3.24)'den yararlanılarak

$$\lim_{s\to 0} \Gamma(s)\sin(\pi s) L(s; A_c; -R_2) = \pi P_1(R_2, A_c) \tag{3.40}$$

yazılır. (3.38), (3.39) ve (3.40) birleştirilirse

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0} \Gamma(s)\left(\frac{1}{(cz+d)^s} G(Vz, s; A, B; r_1, r_2) - G(z, s; B_{-b}, A_{-c}; R_1, R_2)\right) \\
&= 2\pi i s(d, c; B_b, A_c, R_2, -R_1) - \frac{2\pi i}{c(cz+d)} B_0(B) P_2(cR_2 - dR_1, A)
\end{aligned}$$

$$- \frac{2\pi i}{c}(cz+d)B_0(A)P_2(R_1, B_b) \tag{3.41}$$

elde edilir. Şimdi de $b \equiv c \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k)$ durumu göz önüne alınsın. (3.37)'den (3.13),

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\left(\frac{1}{(cz+d)^s}G(Vz,s;A,B;r_1,r_2) - G(z,s;A_d,B_a;R_1,R_2)\right) \\
&= -2if(-dR_1)\lambda_{R_1}\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\sin(\pi s)L(s;B_{-a};-R_2) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f^*(-a([R_2+d(j-\{R_1\})/c]-v+d\mu)) \\
&\times f(-d(j+[R_1]))I(z,0,c,d,R_1,R_2)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

şeklinde yazılabilir. (3.40)'dan,

$$\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\sin(\pi s)L(s;B_{-a};-R_2) = \pi P_1(R_2, B_{-a}) \tag{3.43}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f^*(-a([R_2+d(j-\{R_1\})/c]-v+d\mu))f(-d(j+[R_1])) \\
&\quad\times\left(-\frac{\pi i}{cz+d}B_2\left(\frac{v+\{(dj+\rho)/c\}}{k}\right) - \pi i(cz+d)B_2\left(\frac{c\mu+j-\{R_1\}}{ck}\right)\right. \\
&\qquad\left. +2\pi i B_1\left(\frac{c\mu+j-\{R_1\}}{ck}\right)B_1\left(\frac{v+\{(dj+\rho)/c\}}{k}\right)\right) \\
&= T_{10}+T_{11}+T_{12}
\end{aligned}$$

olsun. Sırasıyla μ ve v üzerinden toplam hesaplanarak, sonra $B_2(\{x\}) = 2P_2(x)$ ve $\rho = c\{R_2\} - d\{R_1\}$ kullanılarak,

$$\begin{aligned}
T_{10} &= -\frac{\pi i}{cz+d}\sum_{j=1}^{c}\sum_{v=0}^{k-1} f(-d(j+[R_1]))B_2\left(\frac{v+\{(dj+\rho)/c\}}{k}\right) \\
&\quad\times\sum_{\mu=0}^{k-1} f^*(-a([R_2+d(j-\{R_1\})/c]-v+d\mu)) \\
&= -\frac{2\pi i}{cz+d}B_0(B)\sum_{j=1}^{c} f(-dj)P_2\left(\frac{d(j-R_1)}{c}+\{R_2\}\right)
\end{aligned}$$

olur. $c = qk$ yazılıp $j \to \mu k + r$, $0 \le \mu \le q-1$, $1 \le r \le k$ dönüşümleri yapılırsa,

$$T_{10} = -\frac{2\pi i}{cz+d}B_0(B)\sum_{\mu=0}^{q-1}\sum_{r=1}^{k} f(-dr)P_2\left(\frac{d\mu}{q}+\frac{d(r-R_1)}{qk}+R_2\right)$$

$$= -\frac{2\pi i}{cz+d}\frac{B_0(B)}{q}\sum_{r=1}^{k} f(-dr)P_2\left(\frac{dr-dR_1+cR_2}{k}\right)$$
$$= -\frac{2\pi i}{c(cz+d)}B_0(B)\,P_2(cR_2-dR_1,A)$$

olur. İkinci olarak, sırasıyla v ve μ üzerinden toplam alınırsa,

$$\begin{aligned}T_{11} &= -\pi i(cz+d)\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1} f(-d(j+[R_1]))B_2\left(\frac{c\mu+j-\{R_1\}}{ck}\right)\\ &\times\sum_{v=0}^{k-1} f^*(-a([R_2+d(j-\{R_1\})/c]-v+d\mu))\\ &= -\frac{2\pi i}{c}(cz+d)B_0(B)\,P_2(-R_1,A_d)\end{aligned}$$

bulunur. T_9 un hesabına benzer olarak, $R_1 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}T_{12} &= 2\pi i\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f^*(-a([R_2+d(j-\{R_1\})/c]-v+d\mu))f(-d(j+[R_1]))\\ &\times P_1\left(\frac{c\mu+j-\{R_1\}}{ck}\right)P_1\left(\frac{v+\{(dj+\rho)/c\}}{k}\right)\\ &+2\pi i P_1(R_2,B_{-a})f(-dR_1)\lambda_{R_1}\\ &= 2\pi i\sum_{n=1}^{ck} f(-d(n+[R_1]))P_1\left(\frac{n-\{R_1\}}{ck}\right)\sum_{v=0}^{k-1} f^*(av)P_1\left(\frac{v+d\frac{n-\{R_1\}}{c}+R_2}{k}\right)\\ &+2\pi i P_1(R_2,B_{-a})f(-dR_1)\lambda_{R_1}\\ &= 2\pi i\sum_{n=1}^{ck} f(-dn)P_1\left(\frac{n-R_1}{ck}\right)P_1\left(\frac{d(n-R_1)}{c}+R_2,B_{-a}\right)\\ &+2\pi i P_1(R_2,B_{-a})f(-dR_1)\lambda_{R_1}\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.12 *$c \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k)$ ve $c > 0$ olmak üzere c ve d aralarında asal iki tamsayı olsun. $ad \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, c)$ için, $s(d,c;A_d,B_a;x,y)$ genelleştirilmiş periyodik Dedekind toplamı*

$$s(d,c;A_d,B_a;x,y) = \sum_{n=1}^{ck} f(dn)P_1\left(\frac{n+y}{ck}\right)P_1\left(\frac{d(n+y)}{c}+x,B_a\right)$$

ile tanımlanır.

Böylece,

$$
\begin{aligned}
&T_{10}+T_{11}+T_{12}\\
&=2\pi i s\left(d,c;A_{-d},B_{-a};R_2,-R_1\right)-\frac{2\pi i}{c\left(cz+d\right)}B_0\left(B\right)P_2\left(cR_2-dR_1,A\right)\\
&\quad-\frac{2\pi i}{c}(cz+d)B_0\left(B\right)P_2(-R_1,A_d)+2\pi i P_1(R_2,B_{-a})f(-dR_1)\lambda_{R_1}
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

elde edilmiş olur.

(3.42), (3.43) ve (3.44) birleştirilirse

$$
\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\left(\frac{1}{(cz+d)^s}G(Vz,s;A,B;r_1,r_2)-G(z,s;A_d,B_a;R_1,R_2)\right)\\
&=2\pi i s\left(d,c;A_{-d},B_{-a};R_2,-R_1\right)-\frac{2\pi i}{c\left(cz+d\right)}B_0\left(B\right)P_2\left(cR_2-dR_1,A\right)\\
&\quad-\frac{2\pi i}{c}(cz+d)B_0\left(B\right)P_2(-R_1,A_d)
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

yazılır.

Şimdi, $s\left(d,c;B_b,A_c;R_2,R_1\right)$ toplamı için resiprosite formülü verilebilir.

Teorem 3.13 *$d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)$ ve $c>0$ olmak üzere c ve d aralarında asal iki tamsayı olsun. $bc\equiv -1$ (mod) için,*

$$
\begin{aligned}
&s\left(-c,d;A_c,B_{-b};-R_1,-R_2\right)-s\left(d,c;B_b,A_c;R_2,-R_1\right)\\
&=P_1\left(R_2,B_{-b}\right)P_1\left(-R_1,A_{-c}\right)-\frac{1}{cd}B_0(B)P_2(cR_2-dR_1,A)\\
&-\frac{d}{c}B_0(A)P_2\left(R_2,B_{-b}\right)-\frac{c}{d}B_0\left(B\right)P_2\left(R_1,A_c\right)
\end{aligned}
$$

resiprosite bağıntısı sağlanır.

İspat. (3.41)'de z yerine $-1/z$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}z^s\Gamma(s)\left(\frac{1}{(dz-c)^s}G\left(Tz,s;A,B;r_1,r_2\right)-z^{-s}G\left(-1/z,s;B_{-b},A_{-c};R_1,R_2\right)\right)\\
&=2\pi i s\left(d,c;B_b,A_c;R_2,-R_1\right)-\frac{2\pi i}{c}\frac{z}{(dz-c)}B_0(B)P_2(cR_2-dR_1,A)\\
&-\frac{2\pi i}{cz}(dz-c)B_0(A)P_2(R_1,B_b),
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

(3.45)'de Vz yerine Tz yazılırsa

$$\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\left(\frac{1}{(dz-c)^s}G(Tz,s;A,B;r_1,r_2)-G(z,s;A_{-c},B_b;R_2,-R_1)\right)$$
$$=2\pi is\left(-c,d;A_c,B_{-b};-R_1,-R_2\right)-\frac{2\pi i}{d}\frac{1}{dz-c}B_0(B)P_2(cR_2-dR_1,A)$$
$$-\frac{2\pi i}{d}(dz-c)B_0(B)P_2(-R_2,A_{-c}) \tag{3.47}$$

olur. $\beta=b$, $\alpha=c$ için (3.19) hesaplanıp ve $s=0$ limiti alınırsa,

$$\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\left(\frac{1}{z^s}G(-1/z,s;B_{-b},A_{-c},R_1,R_2)-G(z,s;A_{-c},B_b;R_2,-R_1)\right)$$
$$=-2if(cR_1)\lambda_{R_1}\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\sin(\pi s)L(s;B_{-b};-R_2)$$
$$+\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1}f(c(\mu+1+[R_1]))f^*(-b\left([R_2]-v\right))I(z,0,1,0,R_1,R_2) \tag{3.48}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}I(z,0,1,0,R_1,R_2) &= -\frac{\pi i}{z}B_2\left(\frac{v+\{R_2\}}{k}\right)-\pi izB_2\left(\frac{\mu+1-\{R_1\}}{k}\right)\\ &\quad +2\pi iB_1\left(\frac{\mu+1-\{R_1\}}{k}\right)B_1\left(\frac{v+\{R_2\}}{k}\right)\end{aligned}$$

dir. Daha öncekilere benzer olarak,

$$\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{k-1}f(c(\mu+1+[R_1]))f^*(-b\left([R_2]-v\right))B_2\left(\frac{v+\{R_2\}}{k}\right)=2B_0(A)P_2\left(R_2,B_{-b}\right),$$
$$\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1}f^*(-b\left([R_2]-v\right))f(c(\mu+1+[R_1]))B_2\left(\frac{\mu+1-\{R_1\}}{k}\right)=2B_0\left(B\right)P_2\left(R_1,A_c\right)$$

ve

$$\sum_{v=0}^{k-1}f^*(-b\left([R_2]-v\right))B_1\left(\frac{v+\{R_2\}}{k}\right)\sum_{\mu=0}^{k-1}f(c(\mu+1+[R_1]))B_1\left(\frac{\mu+1-\{R_1\}}{k}\right)$$
$$=P_1\left(R_2,B_{-b}\right)P_1\left(-R_1,A_{-c}\right)+f(cR_1)\lambda_{R_1}$$

yazılabilir. (3.40)'dan

$$\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\sin(\pi s)L(s;B_{-b};-R_2)=\pi P_1\left(R_2,B_{-b}\right)$$

olur. Böylece, bulunanlar (3.48)'de birleştirilirse

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}\Gamma(s)\left(\frac{1}{z^s}G(-1/z,s;B_{-b},A_{-c},R_1,R_2)-G(z,s;A_{-c},B_b;R_2,-R_1)\right)\\
&=2\pi iP_1\left(R_2,B_{-b}\right)P_1\left(-R_1,A_{-c}\right)-\frac{2\pi i}{z}B_0(A)P_2\left(R_2,B_{-b}\right)\\
&-2\pi izB_0\left(B\right)P_2\left(R_1,A_c\right) \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}z^s\Gamma(s)\left(\frac{1}{(dz-c)^s}G\left(Tz,s;A,B;r_1,r_2\right)-G(z,s;A_{-c},B_b;R_2,-R_1)\right)\\
&=\lim_{s\to 0}z^s\Gamma(s)\left(\frac{1}{(dz-c)^s}G(V\left(-1/z\right),s;A,B;r_1,r_2)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{z^s}G\left(-1/z,s;B_{-b},A_{-c};R_1,R_2\right)\right)\\
&\quad+\lim_{s\to 0}z^s\Gamma(s)\left(\frac{1}{z^s}G\left(-1/z,s;B_{-b},A_{-c};R_1,R_2\right)-G(z,s;A_{-c},B_b;R_2,-R_1)\right)
\end{aligned}$$

olduğundan, (3.46), (3.47) ve (3.49), $z=c/d$ için resiprosite bağıntısını verir. ∎

3.3.3. $s=-N=1-r$ durumu

$r\geq 1$ olmak üzere $s=1-r$ bir tamsayı olsun. Bu durumda, (3.20) yardımıyla

$$\begin{aligned}
&I(z,1-r,c,d,0,0) \qquad (3.50)\\
&=\frac{2\pi ik^{r-1}}{(r+1)!}\sum_{m=0}^{r+1}\binom{r+1}{m}\left(-(cz+d)\right)^{m-1}B_m\left(\frac{c\mu+j}{ck}\right)B_{r+1-m}\left(\frac{v+\{dj/c\}}{k}\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $a\equiv d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)$ olsun. (3.50) ifadesi (3.11)'de yerine konursa

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 1-r}\left((cz+d)^{-s}\Gamma(s)G(Vz,s;A,B)-\Gamma(s)G(z,s;B_{-b},A_{-c})\right)\\
&=-2if^*(0)\lim_{s\to 1-r}\Gamma(s)\sin(\pi s)L(s,A_c;0)\\
&\quad+(-1)^{r-1}\frac{2\pi ik^{r-1}}{(r+1)!}\sum_{m=0}^{r+1}\binom{r+1}{m}\left(-(cz+d)\right)^{m-1}\\
&\quad\times\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1}f(c([dj/c]-v))f^*(b(\mu c+j))\\
&\quad\times B_m\left(\frac{c\mu+j}{ck}\right)B_{r+1-m}\left(\frac{v+\{dj/c\}}{k}\right) \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

olur. (3.51)'deki üçlü toplam hesaplanmalıdır. $1 \le j \le c-1$ için $B_m\left(\frac{c\mu+j}{ck}\right)$ yerine $m!P_m\left(\frac{c\mu+j}{ck}\right)$ ve $B_{r+1-m}\left(\frac{v+\{dj/c\}}{k}\right)$ yerine $(r+1-m)!P_{r+1-m}\left(\frac{v+\{dj/c\}}{k}\right)$ yazılırsa üçlü toplam değişmez. Ayrıca, $v-[dj/c]$ yerine v yazılırsa,

$$\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} f(c([dj/c]-v))f^*(b(\mu c+j))B_m\left(\frac{c\mu+j}{ck}\right)B_{r+1-m}\left(\frac{v+\{dj/c\}}{k}\right)$$
$$= m!\,(r+1-m)!\sum_{j=1}^{c-1}\sum_{\mu=0}^{k-1} f^*(b(\mu c+j))P_m\left(\frac{c\mu+j}{ck}\right)\sum_{v=0}^{k-1} f(-cv))P_{r+1-m}\left(\frac{v+dj/c}{k}\right)$$
$$+\,(r+1-m)!\sum_{\mu=0}^{k-1} f^*(bc(\mu+1))B_m\left(\frac{\mu+1}{k}\right)\sum_{v=0}^{k-1} f(-cv)P_{r+1-m}\left(\frac{v}{k}\right)$$

olur. Burada, $j=c$ terimi eklenip çıkarılıp ve $\mu c+j=n$ yazılırsa, sağ taraf

$$m!\,(r+1-m)!k^{m-r}\sum_{n=1}^{ck} f^*(bn)P_m\left(\frac{n}{ck}\right)P_{r+1-m}\left(\frac{dn}{c},A_c\right)$$
$$+\,(r+1-m)!k^{m-r}f^*(0)P_{r+1-m}\left(0,A_c\right)\left(B_m\left(1\right)-m!P_m\left(0\right)\right)$$
$$= m!\,(r+1-m)!k^{m-r}\sum_{n=1}^{ck} f^*(bn)P_m\left(\frac{n}{ck}\right)P_{r+1-m}\left(\frac{dn}{c},A_c\right)$$
$$+\,r!k^{1-r}f^*(0)P_r\left(0,A_c\right)$$

olur. Dolayısıyla, aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.14 *$ad-bc=1$ ve $a\equiv d\equiv 0 \pmod k$ olsun. $s_{r+1-m,m}\left(d,c;B_b;A_c\right)$ periyodik Dedekind toplamı*

$$s_{r+1-m,m}\left(d,c;B_b;A_c\right)=\sum_{n=1}^{ck} f^*(bn)P_m\left(\frac{n}{ck}\right)P_{r+1-m}(dn/c,A_c)$$

ile tanımlanır.

Diğer taraftan, Euler gamma fonksiyonu için $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/\sin(\pi s)$ bağıntısı ve Berndt (1975c) deki Sonuç 6.4 ün özel durumu kullanılarak

$$\lim_{s\to 1-r}\Gamma(s)\sin(\pi s)L(s,A_c;0)=\pi\left(-1\right)^{r-1}P_r(0,A_c) \tag{3.52}$$

elde edilir.

Böylece,

$$\lim_{s\to 1-r}\Gamma(s)\left((cz+d)^{-s}G(Vz,s;A,B)-\,G(z,s;B_{-b},A_{-c})\right)$$

$$= (-1)^{r-1}\, 2\pi i \sum_{m=0}^{r+1} k^{m-1} \left(-(cz+d)\right)^{m-1} s_{r+1-m,m}\left(d,c;B_b;A_c\right)$$

olur.

$b \equiv c \equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$ için de benzer işlemler yapılarak

$$\lim_{s\to 1-r} \Gamma(s)\left((cz+d)^{-s} G(Vz,s;A,B) - G(z,s;A_d,B_a)\right)$$
$$= (-1)^{r-1}\, 2\pi i \sum_{m=0}^{r+1} k^{m-1} \left(-(cz+d)\right)^{m-1} \sum_{n=1}^{ck} f(-dn) P_m\left(\frac{n}{ck}\right) P_{r+1-m}(dn/c, B_{-a})$$

elde edilir. Bu durumda da aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.15 *$ad - bc = 1$ ve $b \equiv c \equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$ olsun. $s_{r+1-m,m}\left(d,c;A_{-d};B_{-a}\right)$ periyodik Dedekind toplamı*

$$s_{r+1-m,m}\left(d,c;A_{-d};B_{-a}\right) = \sum_{n=1}^{ck} f(-dn) P_m\left(\frac{n}{ck}\right) P_{r+1-m}(dn/c, B_{-a})$$

ile tanımlanır.

Bu bölümde yapılanlar aşağıdaki teoremde özetlenebilir:

Teorem 3.16 *$r > 1$ tamsayı ve $z \in \mathbb{H}$ olsun. $a \equiv d \equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$ ise*

$$\lim_{s\to 1-r} \Gamma(s)\left((cz+d)^{-s} G(Vz,s;A,B) - G(z,s;B_{-b},A_{-c})\right)$$
$$= 2\pi i \,(-1)^{r-1} \sum_{m=0}^{r+1} k^{m-1} \left(-(cz+d)\right)^{m-1} s_{r+1-m,m}\left(d,c;B_b;A_c\right), \tag{3.53}$$

$b \equiv c \equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$ ise

$$\lim_{s\to 1-r} \Gamma(s)\left((cz+d)^{-s} G(Vz,s;A,B) - G(z,s;A_d,B_a)\right)$$
$$= 2\pi i \,(-1)^{r-1} \sum_{m=0}^{r+1} k^{m-1} \left(-(cz+d)\right)^{m-1} s_{r+1-m,m}\left(d,c;A_{-d};B_{-a}\right) \tag{3.54}$$

dır.

Şimdi de, iki resiprosite formülü ispatlanacaktır. Birincisi,

$$F\left(d,c,z;r;A_c;B_b\right) = \sum_{m=0}^{r+1} k^{m-1} \left(-(dz+c)\right)^{m-1} s_{r+1-m,m}\left(c,d;A_c;B_b\right) \tag{3.55}$$

ile verilen $F\left(d,c,z;r;A_c;B_b\right)$ fonsiyonu için, ikincisi ise

$$s_r\left(d,c;A_\alpha;B_\beta\right)=\sum_{n=1}^{ck}f(\alpha n)P_1\left(\frac{n}{ck}\right)P_r(dn/c,B_\beta) \tag{3.56}$$

ile tanımlanan periyodik Apostol–Dedekind toplamı için sağlanan resiprosite bağıntısıdır.

Teorem 3.17 *$d,c>0$ olmak üzere $ad-bc=1$ ve $r>1$ bir tamsayı olsun. $a\equiv d\equiv 0\,(\operatorname{mod}k)$ ve $z\in\mathbb{C}-\{0,c/d\}$ için*

$$\begin{aligned}&F\left(d,-c,z;r;A_c;B_{-b}\right)-z^{r-1}F\left(c,d,-\frac{1}{z};r;B_b;A_c\right)\\&=\sum_{m=0}^{r+1}\left(-z\right)^{m-1}P_m\left(0,A_{-c}\right)P_{r+1-m}\left(0,B_{-b}\right)\end{aligned}$$

dir. Burada $F\left(d,c,z;r;A_c;B_b\right)$ fonksiyonu (3.55) ile verilmiştir.

İspat. (3.53)'de z yerine $-1/z$ yazılarak

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to1-r}\Gamma(s)z^s\left(\frac{1}{(dz-c)^s}G(Tz,s;A,B)-z^{-s}G(-\frac{1}{z},s;B_{-b},A_{-c})\right)\\&=\left(-1\right)^{r-1}2\pi i\sum_{m=0}^{r+1}k^{m-1}\left(-\left(\frac{dz-c}{z}\right)\right)^{m-1}s_{r+1-m,m}\left(d,c;B_b;A_c\right)\end{aligned} \tag{3.57}$$

ve (3.54)'de Vz yerine $Tz=\left(bz-a\right)/\left(dz-c\right)=V\left(-1/z\right)$ yazılarak

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to1-r}\Gamma(s)\left(\frac{1}{(dz-c)^s}G(Tz,s;A,B)-G(z,s;A_{-c},B_b)\right)\\&=\left(-1\right)^{r-1}2\pi i\sum_{m=0}^{r+1}k^{m-1}\left(-(dz-c)\right)^{m-1}s_{r+1-m,m}\left(-c,d;A_c;B_{-b}\right)\end{aligned} \tag{3.58}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to1-r}z^s\Gamma(s)\left(\frac{1}{(dz-c)^s}G\left(Tz,s;A,B\right)-G(z,s;A_{-c},B_b)\right)\\&=\lim_{s\to1-r}z^s\Gamma(s)\left(\frac{1}{(dz-c)^s}G(V\left(-1/z\right),s;A,B)-\frac{1}{z^s}G\left(-1/z,s;B_{-b},A_{-c}\right)\right)\\&\quad+\lim_{s\to1-r}z^s\Gamma(s)\left(\frac{1}{z^s}G\left(-1/z,s;B_{-b},A_{-c}\right)-G(z,s;A_{-c},B_b)\right),\end{aligned}$$

olduğundan, ispatın tamamlanması için

$$\lim_{s\to 1-r} z^s\Gamma(s)\left(\frac{1}{z^s}G\left(-1/z,s;B_{-b},A_{-c}\right)-G(z,s;A_{-c},B_b)\right)$$

limitinin hesaplanması yeterli olacaktır. Bunun için, (3.18)'de $Vz=-1/z$ alınarak ve (3.50) bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 1-r}\Gamma(s)\left(z^{-s}G(-1/z,s;B_{-b},A_{-c})-G(z,s;A_{-c},B_b)\right)\\
&=-2\pi i f(0)\left(-1\right)^{r-1}P_r(0,B_{-b})\\
&\quad+\frac{2\pi i\left(-k\right)^{r-1}}{(r+1)!}\sum_{m=0}^{r+1}\binom{r+1}{m}(-z)^{m-1}\sum_{\mu=0}^{k-1}f(c(\mu+1))B_m\left(\frac{\mu+1}{k}\right)\\
&\quad\times\sum_{v=0}^{k-1}f^*(bv)B_{r+1-m}\left(\frac{v}{k}\right)
\end{aligned}\tag{3.59}$$

elde edilir. (3.22)'den

$$\begin{aligned}
&\sum_{v=0}^{k-1}f^*(bv)B_{r+1-m}\left(\frac{v}{k}\right)\left(\sum_{\mu=1}^{k-1}f\left(c\mu\right)B_m\left(\frac{\mu}{k}\right)+f\left(0\right)B_m\left(1\right)\right)\\
&=(r+1-m)!k^{m-r}P_{r+1-m}\left(0,B_{-b}\right)\left(m!k^{1-m}P_m\left(0,A_{-c}\right)+\begin{cases}f(0), & m=1\text{ ise}\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bulunanlar (3.59)'da yerine konup (3.52) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 1-r}\Gamma(s)\left(\frac{1}{z^s}G(-1/z,s;B_{-b},A_{-c})-G(z,s;A_{-c},B_b)\right)\\
&=2\pi i\left(-1\right)^{r-1}\sum_{m=0}^{r+1}\left(-z\right)^{m-1}P_m\left(0,A_{-c}\right)P_{r+1-m}\left(0,B_{-b}\right)
\end{aligned}\tag{3.60}$$

olur. Böylece (3.60), (3.57) ve (3.58) birleştirilerek $z\in\mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned}
&F\left(d,-c,z;r;A_c;B_{-b}\right)-z^{r-1}F\left(c,d,-\frac{1}{z};r;B_b;A_c\right)\\
&=\sum_{m=0}^{r+1}\left(-z\right)^{m-1}P_m\left(0,A_{-c}\right)P_{r+1-m}\left(0,B_{-b}\right)
\end{aligned}\tag{3.61}$$

elde edilir. Analitik devam yardımıyla (3.61) ifadesi $z\in\mathbb{C}-\{0,c/d\}$ için geçerlidir. ∎

(3.56) ile verilen periyodik Apostol–Dedekind toplamının sağladığı resiprosite formülünün ifade ve ispatına geçmeden önce, bu toplamda incelemeler yapılacaktır.

$\alpha \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k)$ olsun. $A_\alpha = \{f\,(0)\} = f\,(0)\,I$ olduğundan, periyodik Apostol–Dedekind toplamları

$$s_r\,(d,c;A_\alpha;B_\beta) = f\,(0) \sum_{n=1}^{ck} P_1\left(\frac{n}{ck}\right) P_r(dn/c,B_\beta),$$
$$s_r\,(d,c;B_\beta;A_\alpha) = f\,(0) \sum_{n=1}^{ck} f^*(\beta n) P_1\left(\frac{n}{ck}\right) P_r\left(\frac{dn}{c}\right)$$

haline dönüşür ki bunlar Berndt(1975d) de sırasıyla (6.2) ve (6.1) eşitlikleri ile tanımlanan $S_2\,(d,c;\chi)$ ve $S_1\,(d,c;\chi)$ karakter Dedekind toplamlarının periyodik genişlemeleridir.

$\alpha \equiv \beta \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k)$ olsun. Bu durumda $s_r\,(d,c;A_\alpha;B_\beta) = f\,(0)\,f^*(0) s_r\,(d,c)$ ifadesine dönüşür. Burada $s_r\,(d,c)$,

$$s_r\,(d,c) = \sum_{j=0}^{c-1} P_1\left(\frac{j}{c}\right) P_r\left(\frac{dj}{c}\right)$$

ile tanımlanan Apostol–Dedekind toplamıdır.

Genel olarak, $s_r\,(d,c;A_\alpha;B_\beta)$ nın tanımında $1 \le v \le k$, $0 \le j < c$ olmak üzere n yerine $v + jk$ yazılırsa ve (3.22) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&s_r\,(d,c;A_\alpha;B_\beta) \\
&= \sum_{n=1}^{ck} f(\alpha n) P_1\left(\frac{n}{ck}\right) P_r(dn/c,B_\beta) \\
&= k^{r-1} \sum_{v=1}^{k}\sum_{j=0}^{c-1} f(\alpha v) P_1\left(\frac{j+\frac{v}{k}}{c}\right) \sum_{\mu=1}^{k} f^*(-\beta\mu) P_r\left(\frac{d\left(j+\frac{v}{k}\right)}{c} + \frac{\mu}{k}\right) \\
&= k^{r-1} \sum_{v=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{k} f(\alpha v) f^*(-\beta\mu) \sum_{j=0}^{c-1} P_1\left(\frac{j+\frac{v}{k}}{c}\right) P_r\left(\frac{d\left(j+\frac{v}{k}\right)}{c} + \frac{\mu}{k}\right)
\end{aligned}$$

olur. Son satırdaki j üzerinden olan toplam, Takàcs (1979) veya Carlitz (1964) tarafından (2.7) ile tanımlanan genelleştirilmiş Dedekind toplamıdır. O halde,

$$s_r\,(d,c;A_\alpha;B_\beta) = \frac{k^{r-1}}{r!} \sum_{v=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{k} f(\alpha v) f^*(-\beta\mu) s_r\left(d,c|\frac{\mu}{k},\frac{v}{k}\right) \tag{3.62}$$

yazılır. Bu eşitlikten ve $s_r\,(d,c|x,y)$ toplamının (2.8) ile verilen resiprosite formülünden yararlanılarak $s_r\,(d,c;A_\alpha;B_\beta)$ toplamının aşağıdaki resiprosite formülünü sağladığı gösterilebilir.

Teorem 3.18 *c ve d aralarında asal pozitif tamsayılar olsun. $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ve $r = 0, 1, 2, ...$ için,*

$$\begin{aligned} & dc^r s_r\left(d, c; A_{-\alpha}; B_\beta\right) + cd^r s_r\left(c, d; B_{-\beta}; A_\alpha\right) \\ & = \sum_{j=0}^{r+1} c^j d^{r+1-j} P_{r+1-j}\left(0, A_\alpha\right) P_j\left(0, B_\beta\right) \\ & + rk^{r-1} \sum_{v=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{k} f(-\alpha v) f^*(-\beta\mu) P_{r+1}\left(\frac{dv + c\mu}{k}\right) \end{aligned}$$

resiprosite bağıntısı sağlanır.

İspat. (3.62)'den,

$$\begin{aligned} s_r\left(d, c; A_{-\alpha}; B_\beta\right) &= \frac{k^{r-1}}{r!} \sum_{v=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{k} f(-\alpha v) f^*(-\beta\mu) s_r\left(d, c | \frac{\mu}{k}, \frac{v}{k}\right), \\ s_r\left(c, d; B_{-\beta}; A_\alpha\right) &= \frac{k^{r-1}}{r!} \sum_{v=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{k} f(-\alpha v) f^*(-\beta\mu) s_r\left(c, d | \frac{v}{k}, \frac{\mu}{k}\right) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} & (r+1)\left[dc^r s_r\left(d, c; A_{-\alpha}; B_\beta\right) + cd^r s_r\left(c, d; B_{-\beta}; A_\alpha\right)\right] \\ & = \frac{k^{r-1}}{r!} \sum_{v=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{k} f(-\alpha v) f^*(-\beta\mu) (r+1) \left[dc^r s_r\left(d, c | \frac{\mu}{k}, \frac{v}{k}\right) + cd^r s_r\left(c, d | \frac{v}{k}, \frac{\mu}{k}\right)\right] \end{aligned}$$

yazılır. (2.8) ile verilen resiprosite formülü ve (3.22) yardımıyla ispat tamamlanır. ∎

3.4. Bazı Özel Durumlar

Bu bölümde, $A = \{f(n)\}$ ve $B = \{f^*(n)\}$ nin özel değerleri için Teorem 3.8 incelenecektir. χ_1 ve χ_2, k modülüne göre Dirichlet karakter ve χ_0, $k \geq 2$ modülüne göre

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1, & (n, k) = 1 \text{ ise} \\ 0, & (n, k) > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan temel karakter olsun.

1. $A = B = I$ olduğunda

$$s(d, c; I, I) = \sum_{n=1}^{c} P_1\left(\frac{n}{c}\right) P_1\left(\frac{dn}{c}\right) = \sum_{n=1}^{c-1} \left(\left(\frac{n}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dn}{c}\right)\right) + \frac{1}{4} = s(d, c) + \frac{1}{4}$$

yazılır ve (3.36) kullanılarak, $s(-c,d;I,I) = -s(c,d) + 1/4$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.8, (1.1) ile verilen klasik Dedekind toplamlarının sağladığı resiprosite formülüne dönüşür.

2. $A = \chi_1 = \{\chi_1(n)\}$ ve $B = \chi_2 = \{\chi_2(n)\}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} s(c,d;A_c,B_b) &= \chi_1(c)\,\chi_2(b)\,s(c,d;\chi_1,\chi_2), \\ P_m(0,A_c) &= \chi(c)\,P_m(0,\chi_1) = \chi(c)\,B_m(\chi_1)/m! \end{aligned}$$

ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &s(c,d;\chi_1,\chi_2) + s(d,c;\chi_2,\chi_1) \\ &= -B_1(\chi_1)B_1(\chi_2) + \left(\frac{\overline{\chi_1}(c)}{c} + c\right)\frac{\overline{\chi_2}(b)}{2d}B_0(\chi_2)\,B_2(\chi_1) + \frac{d}{2c}\overline{\chi_1}(c)\,B_0(\chi_1)B_2(\chi_2) \end{aligned} \tag{3.63}$$

elde edilir. Burada, $\chi_1(-1)\,\chi_2(-1) = 1$ varsayılmıştır. Aksi halde, $s(c,d;\chi_1,\chi_2) = 0$ dır. Bu ifade, (3.71) kullanılarak sadeleştirilebilir.

χ_1 ve χ_2 ilkel olduğunda, $s(d,c;\chi_1,\chi_2)$ toplamı, Berndt (1975d) tarafından dönüşüm formüllerinden elde edilmiş ve Dağlı ve Can (2015) tarafından genelleştirilmiştir. $s(d,c;\chi,\overline{\chi})$ toplamı ilk kez, χ nin ilkel ve temel olmayan Dirichlet karakterleri olma durumuna göre Berndt (1973b,1977a) tarafından tanımlanmıştır.

3. $z \in \mathbb{C}$ için,

$$G(z,\chi) = \sum_{v=0}^{k-1} \chi(v) e^{2\pi i z v/k}$$

ile tanımlanan Gauss toplamı (Apostol 1976) olmak üzere, $A = \chi_1 = \{\chi_1(n)\}$ ve $B = G_2 = \{G(n,\chi_2)\}$ olsun. $B_0(B) = B_0(G_2) = 0$, $P_m(x,B_b) = \overline{\chi_2}(b)\,P_m(x,G_2)$ ve $s(d,c;B_b,A_c) = \chi_1(c)\,\overline{\chi_2}(b)\,s(d,c;G_2,\chi_1)$ kullanılarak, Teorem 3.8, χ_1 ve χ_2 temel olmayan karakter iken

$$s(c,d;\chi_1,G_2) + s(d,c;G_2,\chi_1) = -\chi_1(-1)\,\chi_2(-1)\,P_1(0,\chi_1)\,P_1(0,G_2)$$

ve χ_0 temel karakteri için Gauss toplamı,

$$c_k(n) := \sum_{\substack{v=1 \\ (v,k)=1}}^{k} e^{2\pi i n v/k}$$

Ramanujan toplamına dönüşeceğinden, $\chi_1 = \chi_2 = \chi_0$ iken

$$s(c,d;\chi_0,c_k) + s(d,c;c_k,\chi_0) = \frac{d}{c}B_0(\chi_0)P_2(0,c_k)$$

olur.

$k = 2$ için $(d, c) = 1$ olmak üzere d çift olduğunda, $s(c, d; \chi_0, c_2)$ ve $s(d, c; c_2, \chi_0)$ toplamları, $P_1(x + 1/2) = P_1(2x) - P_1(x)$ bağıntısı kullanılarak, $s(c, d)$ klasik Dedekind toplamı ve Hardy-Berndt toplamlarından biri olan $s_2(d, c)$ cinsinden

$$\begin{aligned} & s(c, d; \chi_0, c_2) = 2s(c, 2d) - 3s(c, d) + s(2c, d), \\ & s(d, c; c_2, \chi_0) = s_2(2d, 2c) - s_2(d, 2c) \end{aligned} \tag{3.64}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $s_2(d, c)$, Berndt (1978) (veya Goldberg 1981) tarafından

$$s_2(d, c) = \sum_{n=1}^{c-1} (-1)^n P_1\left(\frac{n}{c}\right) P_1\left(\frac{dn}{c}\right)$$

ile tanımlanmıştır.

Açıklama 3.19 *$A = G_2 = \{G(n, \chi_2)\}$ ve $B = \chi_1 = \{\chi_1(n)\}$ alınsaydı, $B_0(G_2) = 0$, $P_m(x, A_c) = \overline{\chi_2}(c) P_m(x, G_2)$ ve $s(d, c; B_b, A_c) = \chi_1(b) \overline{\chi_2}(c) s(d, c; \chi_1, G_2)$ kullanılarak, Teorem 3.8, χ_1 ve χ_2 temel olmayan karakter iken*

$$s(c, d; G_2, \chi_1) + s(d, c; \chi_1, G_2) = -\chi_1(-1) \chi_2(-1) P_1(0, \chi_1) P_1(0, G_2)$$

ve $\chi_1 = \chi_2 = \chi_0$ iken

$$s(c, d; c_k, \chi_0) + s(d, c; \chi_0, c_k) = \left(\frac{1}{c} + c\right) \frac{1}{d} B_0(\chi_0) P_2(0, c_k)$$

şeklinde yazılabilirdi.

4. $A = \{G(n, \chi_1)\} = G_1$ ve $B = \{G(n, \chi_2)\} = G_2$ olsun. Bu durumda, $A_c = \{G(cn, \chi_1)\} = \{\overline{\chi_1}(c) G(n, \chi_1)\} = \overline{\chi_1}(c) G_1$ ve $(c, k) = 1$ için $B_c = \overline{\chi_2}(c) G_2$ olur. Böylece,

$$B_0(A) = B_0(B) = 0, \ P_1(0, A_{-c}) = \overline{\chi_1}(-c) P_1(0, G_1)$$

ve

$$s(d, c; B_b, A_c) = \overline{\chi_1}(c) \overline{\chi_2}(b) s(d, c; G_2, G_1)$$

yazılabilir. O halde, $\chi_1 = \chi_2 = \chi_0$ iken

$$s(c, d; c_k, c_k) + s(d, c; c_k, c_k) = \frac{1}{4} \phi(k) \phi(k),$$

ve $\chi_1 \neq \chi_0$, $\chi_2 \neq \chi_0$ iken

$$s\left(c,d;G_1,G_2\right)+s\left(d,c;G_2,G_1\right)=-P_1\left(0,G_1\right)P_1\left(0,G_2\right)$$

elde edilir.

Özel olarak $k=2$ için $(d,c)=1$ olmak üzere d çift ise,

$$s\left(d,c;c_2,c_2\right)=2s_2\left(d,2c\right)-s_2\left(2d,2c\right)+\frac{1}{4}$$

olur.

5. $A=\left\{(-1)^n\chi_1(n)\right\}$ ve $B=\left\{(-1)^n\chi_2(n)\right\}$ olsun. k çift ise A ve B, $h=k$ periyoda sahiptir. Eğer k tek ise A ve B, $h=2k$ periyotludur. İki durumda da $ad-bc=1$ ve $a\equiv d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,h)$ olduğundan, b ve c tek olmalıdır. Teorem 3.8 de (3.90) ve (3.91) kullanarak

$$\begin{aligned}
&s^*\left(c,d;\chi_1,\chi_2\right)+\chi_1\left(-1\right)\chi_2\left(-1\right)s^*\left(d,c;\chi_2,\chi_1\right)\\
&=-\chi_2\left(-1\right)P_1^*\left(0,\overline{\chi_2}\right)P_1^*\left(0,\overline{\chi_1}\right)+\frac{1}{2dc}\overline{\chi_1}\left(-c\right)\overline{\chi_2}\left(-b\right)B_0^*(\overline{\chi_2})B_2^*(\overline{\chi_1})\\
&\quad+\frac{d}{c}\overline{\chi_1}\left(c\right)B_0^*(\overline{\chi_1})P_2^*\left(0,\overline{\chi_2}\right)+\frac{c}{d}\chi_1\left(-1\right)\overline{\chi_2}\left(-b\right)B_0^*(\overline{\chi_2})P_2^*\left(0,\overline{\chi_1}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. χ_1 ve χ_2 temel olmayan karakter ise, bu ifade $B_0^*(\overline{\chi_1})=B_0^*(\overline{\chi_2})=0$ kullanılarak

$$\begin{aligned}
&s^*\left(c,d;\chi_1,\chi_2\right)+\chi_1\left(-1\right)\chi_2\left(-1\right)s^*\left(d,c;\chi_2,\chi_1\right)\\
=\;&-\chi_2\left(-1\right)P_1^*\left(0,\overline{\chi_2}\right)P_1^*\left(0,\overline{\chi_1}\right)
\end{aligned}\tag{3.65}$$

eşitliğine dönüşür. (3.65) ifadesi $h=k$ (k çift) modülüne göre $\overline{\chi_1}=\chi_2=\chi$ ilkel karakter için Meyer (2000) tarafından elde edilmiştir.

6. $A=\left\{e^{2\pi in/k}\right\}$ ve $B=\widehat{A}=\left\{\widehat{f}(n)\right\}$ olsun. (3.5)'den yararlanılarak,

$$\widehat{f}(n)=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}e^{2\pi i(1-n)j/k}=\begin{cases}1, & n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,k)\ \text{ ise}\\ 0, & n\not\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,k)\ \text{ ise}\end{cases}$$

yazılır. $B_0\left(A\right)=1,\ B_0\left(\widehat{A}\right)=0,\ P_1\left(0,\widehat{A}_{-b}\right)=-P_1\left(c/k\right),\ P_2\left(0,\widehat{A}_b\right)=P_2\left(c/k\right),$ $P_1\left(0,A_{-c}\right)=-1/2-(i/2)\cot\left(\pi c/k\right)$ ve

$$P_1\left(\frac{cn}{d},\widehat{A}_b\right)=\sum_{v=0}^{k-1}\widehat{f}(-bv)P_1\left(\frac{v+cn/d}{k}\right)=P_1\left(\frac{c+cn/d}{k}\right)$$

kullanılarak, resiprosite formülü

$$s\left(c,d;A_c,\widehat{A}_b\right)+s\left(d,c;\widehat{A}_b,A_c\right)=-P_1\left(c/k\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cot\frac{\pi c}{k}\right)+\frac{d}{c}P_2\left(\frac{c}{k}\right)$$

şeklinde olur. Bu durumda, periyodik Dedekind toplamları, $d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} s\left(c,d;A_c,\widehat{A}_b\right) &= \sum_{n=1}^{dk} e^{2\pi icn/k}P_1\left(\frac{n}{dk}\right)P_1\left(\frac{c\left(d+n\right)}{dk}\right), \\ s\left(d,c;\widehat{A}_b,A_c\right) &= \sum_{\mu=0}^{c-1} P_1\left(\frac{\mu}{c}-\frac{1}{k}\right)P_1\left(\frac{dk\mu}{c},A_c\right) \end{aligned}$$

formuna dönüşür.

$k=2$ alınırsa, c tek için

$$s\left(c,d;A_c;\widehat{A}_b\right)+s\left(d,c;\widehat{A}_b;A_c\right)=-\frac{d}{24c} \tag{3.66}$$

olur. Burada $P_1\left(c/2\right)=P_1\left(1/2\right)=0$ ve $2P_2\left(c/2\right)=2P_2\left(1/2\right)=B_2\left(1/2\right)=-1/12$ eşitlikleri kullanılmıştır.

Açıklama 3.20 *$P_1\left(x+\frac{1}{2}\right)=P_1\left(2x\right)-P_1\left(x\right)$ yardımıyla,*

$$s\left(c,d;A_c;\widehat{A}_b\right)=s_2\left(2c,2d\right)-s_2\left(c,2d\right)$$

olur ve Can vd (2006) dan yararlanılarak,

$$\begin{aligned} s\left(d,c;\widehat{A}_b;A_c\right) &= 2\sum_{\mu=1}^{c-1}P_1\left(\frac{\mu}{c}+\frac{1}{2}\right)P_1\left(\frac{d\mu}{c}\right)-\sum_{\mu=1}^{c-1}P_1\left(\frac{\mu}{c}+\frac{1}{2}\right)P_1\left(\frac{2d\mu}{c}\right) \\ &= 2s\left(d,c\right)+s_3\left(\frac{d}{2},c\right)-s\left(2d,c\right)-\frac{1}{2}s_3\left(d,c\right) \end{aligned}$$

yazılır. Burada, $s_3\left(d,c\right)$, Berndt (1978) (veya Goldberg 1981) tarafından

$$s_3\left(d,c\right)=\sum_{n=1}^{c-1}\left(-1\right)^nP_1\left(\frac{dn}{c}\right)$$

ile tanımlanan Hardy–Berndt toplamlarından biridir. Bu durumda, (3.66)

$$2s\left(d,c\right)-s\left(2d,c\right)+s_2\left(2c,2d\right)-s_2\left(c,2d\right)+s_3\left(d/2,c\right)-\frac{1}{2}s_3\left(d,c\right)=-\frac{d}{24c}$$

şeklinde olur.

3.5. Bazı Seri Hesaplamaları

Bu bölümde, (3.10) ve (3.11) veya (3.30) kullanılarak $A = \{f(n)\}$ ve $B = \{f^*(n)\}$ nin özel değerleri alınıp $A(z, s; A_\alpha, B_\beta) := A(z, s; A_\alpha, B_\beta; 0, 0)$ fonksiyonu için bazı dönüşümler elde edilip incelenecektir. Bu dönüşümlerin uygulamaları olarak, bazı sonsuz seriler arasında çeşitli bağıntılar sunulacaktır. Bundan sonraki kısımda, $ad - bc = 1$ olmak üzere $a \equiv d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k)$ kabul edilecektir.

Öncelikle $\Gamma(s)G(z, s; A, B)$ ve $\Gamma(s)G(z, s; B_{-b}, A_{-c})$ ifadeleri $A(z, s; A_\alpha, B_\beta)$ fonksiyonu cinsinden yazılsın. $L(s; A_\alpha) = L(s; A_\alpha; 0)$ dır. (3.10) yardımıyla, $\alpha = \beta = 1$ ve $r_1 = r_2 = 0$ için

$$\begin{aligned}\Gamma(s)G(z, s; A, B) = (-2\pi i/k)^s\, k \left(A\left(z, s; A, \widehat{B}_{-1}\right) + e(s/2)A\left(z, s; A_{-1}, \widehat{B}\right)\right)&\\ + \Gamma(s)f(0)\left(L(s; B) + e(-s/2)L(s; B_{-1})\right),& \qquad (3.67)\end{aligned}$$

ve $\alpha = -c$, $\beta = -b$ ve $r_1 = r_2 = 0$ için

$$\begin{aligned}&\Gamma(s)G(z, s; B_{-b}, A_{-c})\\ &= (-2\pi i/k)^s\, k \left(A\left(z, s; B_{-b}, \widehat{A}_{c^{-1}}\right) + e(s/2)A\left(z, s; B_b, \widehat{A}_{-c^{-1}}\right)\right)\\ &\quad + \Gamma(s)f^*(0)\left(L(s; A_{-c}) + e(-s/2)L(s; A_c)\right) \qquad (3.68)\end{aligned}$$

yazılabilir.

1. χ_1 ve χ_2, k modülüne göre Dirichlet karakterler olmak üzere $A = \chi_1 = \{\chi_1(n)\}$ ve $B = \chi_2 = \{\chi_2(n)\}$ olsun. (3.5)'den

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{k}\sum_{v=0}^{k-1} \chi(v) e^{-2\pi i n v/k} = \frac{1}{k} G(-n, \chi) \qquad (3.69)$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\widehat{A} &= \{\chi_1(-1)\, G(n, \chi_1)/k\} = \chi_1(-1)\, G_1/k,\\ \widehat{B} &= \{\chi_2(-1)\, G(n, \chi_2)/k\} = \chi_2(-1)\, G_2/k\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, sırasıyla (3.30), (3.67) ve (3.68) kullanılıp elde edilen ifade sadeleştirilirse

$$\begin{aligned}&\left(A(Vz, 0; \chi_1, G_2) - \chi_1(c)\,\chi_2(b)\, A(z, 0; \chi_2, G_1)\right)(1 + \chi_1(-1)\,\chi_2(-1))\\ &= 2\pi i \chi_1(c)\,\chi_2(b)\, s(d, c; \chi_2, \chi_1) - \frac{\pi i}{c(cz+d)} B_0(\chi_2)\, B_2(\chi_1)\\ &- 2\pi i \frac{\chi_2(b)}{c}(cz+d)\, B_0(\chi_1)\, P_2(0, \chi_2) \qquad (3.70)\end{aligned}$$

bulunur. Burada, $P_m(x, \chi)$ ve $B_m(\chi)$ sırasıyla Berndt (1975b) tarafından $B_m(x, \overline{\chi})$

ve $B_m(\overline{\chi})$ ile verilen genelleştirilmiş Bernoulli fonksiyonu ve sayısıdır. Bundan sonra,

$$\chi \text{ çift ise } B_{2m+1}(\chi) = 0,\ \chi \text{ tek ise } B_{2m}(\chi) = 0 \text{ ve } \chi \neq \chi_0 \text{ ise } B_0(\chi) = 0 \tag{3.71}$$

bağıntılarına ihtiyaç duyulacaktır.

Eğer $\chi_1(-1)\chi_2(-1) = 1$ olmak üzere χ_1 ve χ_2 temel olmayan iki Dirichlet karakter ise, (3.71) yardımıyla (3.70) ifadesi

$$A(Vz, 0; \chi_1, G_2) - \chi_1(c)\chi_2(b) A(z, 0; \chi_2, G_1) = \pi i \chi_1(c)\chi_2(b) s(d, c; \chi_2, \chi_1)$$

eşitliğine dönüşür.

$\chi_1 = \chi_2 = \chi_0$ alınırsa, (3.70) eşitliği

$$\begin{aligned} & A(Vz, 0; \chi_0, c_k) - A(z, 0; \chi_0, c_k) \\ = \ & \pi i s(d, c; \chi_0, \chi_0) - \frac{\pi i}{2ck}\left(\frac{1}{cz+d} + cz + d\right)\phi(k) B_2(\chi_0) \end{aligned}$$

formuna dönüşür. Burada, (2.5) yardımıyla $B_0(\chi_0) = \phi(k)/k$ olduğu kullanılmıştır. Ayrıca burada $\phi(k)$ Euler *phi* fonksiyonu yani k ile aralarında asal olan, k dan büyük olmayan pozitif tamsayıların sayısıdır.

Şimdi, $N \in \mathbb{N}$ olmak üzere $s = -2N$ için (3.20) yardımıyla (3.30) yerine (3.11) ifadesi kullanılsın. (3.11)'de $Vz = -1/z$ alınıp (3.67) ve (3.68) kullanılıp ve $\chi_1(-1)\chi_2(-1) = 1$ varsayılırsa,

$$\begin{aligned} & z^{2N} A(-1/z, -2N; \chi_1, G_2) - \chi_1(-1) A(z, -2N; \chi_2, G_1) \\ & = \frac{(2\pi i)^{2N+1}}{2} \sum_{m=0}^{2N+2}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1} \frac{\chi_1(-v)\chi_2(-\mu-1)}{m!\,(2N+2-m)!} B_{2N+2-m}\left(\frac{v}{k}\right) B_m\left(\frac{\mu+1}{k}\right)(-z)^{m-1} \\ & = -\frac{(2\pi i)^{2N+1}}{2k^{2N}} \sum_{m=0}^{2N+2} (-1)^m \frac{B_m(\chi_2)}{m!} \frac{B_{2N+2-m}(\chi_1)}{(2N+2-m)!} z^{m-1} \end{aligned} \tag{3.72}$$

bulunur ki bu da

$$\begin{aligned} & z^{2N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(n, \chi_2) G(-n/z, \chi_1)}{1 - e^{-2\pi i n/z}} n^{-2N-1} - \chi_1(-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(n, \chi_1) G(nz, \chi_2)}{1 - e^{2\pi i n z}} n^{-2N-1} \\ & \quad = -\frac{(2\pi i)^{2N+1}}{2k^{2N}} \sum_{m=0}^{2N+2} (-1)^m \frac{B_m(\chi_2)}{m!} \frac{B_{2N+2-m}(\chi_1)}{(2N+2-m)!} z^{m-1} \end{aligned} \tag{3.73}$$

şeklinde yazılabilir. Gerçekten,

$$A\left(z,-2N;\chi_1,G_2\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_1\left(m\right)G\left(n,\chi_2\right)e^{2\pi inmz/k}n^{-2N-1}$$

ikili toplamında $m=v+hk$, $0\leq v\leq k-1$, $0\leq h<\infty$ yazılarak

$$\begin{aligned}A\left(z,-2N;\chi_1,G_2\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}G\left(n,\chi_2\right)n^{-2N-1}\sum_{v=0}^{k-1}\chi_1\left(v\right)e^{2\pi ivnz/k}\sum_{h=0}^{\infty}e^{2\pi inzh}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G\left(n,\chi_2\right)G\left(nz,\chi_1\right)}{1-e^{2\pi inz}}n^{-2N-1}\end{aligned}\tag{3.74}$$

elde edilir. $\gamma>0$ olmak üzere (3.73)'de $z=\pi i/k\gamma$ yazılıp $\theta>0$, $\gamma\theta=\pi^2/k^2$ olarak belirlenirse,

$$\begin{aligned}&\gamma^{-N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G\left(n,\chi_2\right)G\left(ink\gamma/\pi,\chi_1\right)}{1-e^{-2nk\gamma}}n^{-2N-1}\\&\quad-\left(-\theta\right)^{-N}\chi_1\left(-1\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G\left(n,\chi_1\right)G\left(ink\theta/\pi,\chi_2\right)}{1-e^{-2nk\theta}}n^{-2N-1}\\&=-k2^{2N}\sum_{m=0}^{2N+2}\left(-i\right)^m\frac{B_m\left(\chi_2\right)}{m!}\frac{B_{2N+2-m}\left(\chi_1\right)}{\left(2N+2-m\right)!}\gamma^{N+1-m/2}\theta^{m/2}\end{aligned}\tag{3.75}$$

olduğu görülür. (3.75)'de $\chi_1=\chi_2=\chi$, $\gamma=\theta=\pi/k$ veya (3.73)'de $z=i$ alınırsa ve $\chi\left(-1\right)\left(-1\right)^N=-1$ olduğu varsayılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G\left(n,\chi\right)G\left(in,\chi\right)}{1-e^{-2\pi n}}n^{-2N-1}=-\frac{k\left(2\pi/k\right)^{2N+1}}{4}\sum_{m=0}^{2N+2}\left(-i\right)^m\frac{B_m\left(\chi\right)}{m!}\frac{B_{2N+2-m}\left(\chi\right)}{\left(2N+2-m\right)!}\tag{3.76}$$

olur. (3.76)'nın bir sonucu olarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G\left(n,\chi\right)G\left(in,\chi\right)}{1-e^{-2\pi n}}n^{-1}=\frac{\pi i}{2}B_1\left(\chi\right)B_1\left(\chi\right),\ \chi\text{ tek için,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G\left(n,\chi\right)G\left(in,\chi\right)}{1-e^{-2\pi n}}n=-\frac{k^2}{8\pi}B_0\left(\chi\right)B_0\left(\chi\right),\ \chi\text{ çift için,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G\left(n,\chi\right)G\left(in,\chi\right)}{1-e^{-2\pi n}}n^{2M-1}=0,\ \chi\left(-1\right)\left(-1\right)^M=-1,\ M\geq2\text{ için}$$

ifadeleri yazılabilir.

Şimdi, (3.72)'de her iki tarafın z ye göre türevi alınıp, $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ ve $z = i$ alınırsa, $\chi(-1)(-1)^N = 1$ koşulu altında

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(m)\,G(n,\chi)\,e^{-2\pi nm/k}n^{-2N-1}\left(N+\frac{2\pi mn}{k}\right)$$
$$= -\frac{k(2\pi/k)^{2N+1}}{4}\sum_{m=0}^{2N+2}(-i)^m(m-1)\frac{B_m(\chi_2)}{m!}\frac{B_{2N+2-m}(\chi_1)}{(2N+2-m)!} \tag{3.77}$$

elde edilir.

Aşağıdaki örneklerde (3.75) ifadesi $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ için incelenecektir.

Örnek 3.21 *(3.75)'de,*

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ çift} \\ 1, & n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4) \\ -1, & n \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4) \end{cases} \tag{3.78}$$

ile tanımlanan k modülüne göre $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ ilkel karakter alınsın.

$$B_m(1-x) = (-1)^m B_m(x)$$

ve

$$B_m\left(\frac{1}{4}\right) = 2^{-m}B_m\left(\frac{1}{2}\right) - m4^{-m}E_{m-1}, m \geq 1 \tag{3.79}$$

olduğundan ki burada E_m, m. Euler sayısıdır (Abramowitz ve Stegun 1965). m tek ise

$$B_m(\chi) = 4^{m-1}\sum_{v=0}^{3}\chi(-v)\,B_m\left(\frac{v}{4}\right) = \frac{m}{2}E_{m-1}$$

olur. $G(ix,\chi) = e^{-\pi x}\left(e^{\pi x/2} - e^{-\pi x/2}\right)$ *ve* $G(n,\chi) = \overline{\chi}(n)\,G(1,\chi) = 2i\chi(n)$ *kullanılıp, sadeleştirme yapılırsa,* $\gamma\theta = \pi^2/16$ *için,*

$$\gamma^{-N}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\frac{sech\,(2n\gamma)}{n^{2N+1}} + (-\theta)^{-N}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\frac{sech\,(2n\theta)}{n^{2N+1}}$$
$$= 2^{2N}\frac{\pi}{4}\sum_{m=0}^{N}(-1)^m\frac{E_{2m}}{(2m)!}\frac{E_{2N-2m}}{(2N-2m)!}\gamma^{N-m}\theta^m \tag{3.80}$$

elde edilir. Burada, χ ilkel karakter için $G(n,\chi) = \overline{\chi}(n)\,G(1,\chi)$ ifadesi kullanılmıştır (Apostol 1976).

χ ilkel olduğunda (3.72)–(3.77) ifadeleri Berndt (1975d,1977b) tarafından verilmiştir. Ayrıca, (3.80) formülü Berndt (1989) un Ramanujan's Notebooks kitabının 276. sayfasındaki Giriş 21 (ii)'de bulunur. Dahası, Berndt (1989) daki Giriş 14, 15 ve 25 (vii), (viii), (3.80)'in özel durumlarıdır. Ayrıca (3.73) formülü, Berndt (1977b) deki Teorem 4.2 nin ilkel karakterden Dirichlet karaktere bir genelleştirmesi olduğundan, Berndt (1977b) deki Teorem 4.2 nin sonuçları (3.73)'ün sonuçlarıdır.

Örnek 3.22 *(3.75)'de k modülüne göre $\chi_1 = \chi_2 = \chi_0$ alınsın. Bu durumda,*

$$G(ix, \chi_0) = e^{-\pi x}\left(e^{\pi x/2} + e^{-\pi x/2}\right), \quad G(n, \chi_0) = 2(-1)^n \cos(\pi n/2)$$

dir ve (3.79)'dan

$$B_{2m+1}(\chi_0) = 0 \text{ ve } B_{2m}(\chi_0) = 2^{2m-1} B_{2m}(1/2), \ m \geq 0$$

dır. γ ve θ yerine sırasıyla $\gamma/4$ ve $\theta/4$ alınıp sadeleştirme yapılırsa, $\gamma\theta = \pi^2$ için

$$\begin{aligned}
&\gamma^{-N} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{csch(n\gamma)}{n^{2N+1}} - (-\theta)^{-N} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{csch(n\theta)}{n^{2N+1}} \\
&= -2^{2N+1} \sum_{m=0}^{N+1} (-1)^m \frac{B_{2m}(1/2)}{(2m)!} \frac{B_{2N+2-2m}(1/2)}{(2N+2-2m)!} \gamma^{N+1-m} \theta^m
\end{aligned} \tag{3.81}$$

elde edilir. $N = 2M+1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{csch(n\pi)}{n^{4M+3}} = -(2\pi)^{4M+3} \sum_{m=0}^{2M+2} (-1)^m \frac{B_{2m}(1/2)}{(2m)!} \frac{B_{4M+4-2m}(1/2)}{(4M+4-2m)!}$$

olur ki bu Berndt (1978) de belirtildiği gibi ilk kez Cauchy tarafından ispatlanmıştır.

(3.81) bağıntısı Berndt (1978) tarafından da verilmiştir.

2. χ_1 ve χ_2, k modülüne göre Dirichlet karakterler olmak üzere, $A = \{f(n)\} = \{G(n, \chi_1)\} = G_1$ ve $B = \{f^*(n)\} = \{G(n, \chi_2)\} = G_2$ olsun. Bu durumda, $(\alpha, k) = 1$ için $A_\alpha = \overline{\chi_1}(\alpha) G_1$ ve $B_\alpha = \overline{\chi_2}(\alpha) G_2$ olur ve (3.5)'den $\widehat{A} = \{\chi_1(n)\}$ ve $\widehat{B} = \{\chi_2(n)\}$ olur. Böylece, (3.67), (3.68) ve (3.30) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&k\Big(A(Vz, 0; G_1, \chi_2) - \overline{\chi_1}(c)\,\overline{\chi_2}(b)\, A(z, 0; G_2, \chi_1)\Big)(\chi_1(-1) + \chi_2(-1)) \\
&+ \lim_{s\to 0}\Big(\Gamma(s)(cz+d)^{-s}(1 + e(-s/2)\chi_2(-1)) L(s, G_2) G(0, \chi_1) \\
&\qquad - \Gamma(s)(1 + e(-s/2)\chi_1(-1)) L(s, G_1) G(0, \chi_2)\overline{\chi_1}(-c)\Big) \\
&= 2\pi i \overline{\chi_1}(c)\,\overline{\chi_2}(b)\, s(d, c; G_2, G_1) - \frac{\pi i}{c(cz+d)} B_0(G_2) B_2(G_1)
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$- 2\pi i\overline{\chi_2}(b)\frac{cz+d}{c}B_0(G_1)P_2(0,G_2)$$

bulunur. $\chi_1(-1)\chi_2(-1)=1$ varsayılsın. O halde (3.82),

$$\begin{aligned} &A(Vz,0;G_1,\chi_2)-\overline{\chi_1}(c)\overline{\chi_2}(b)A(z,0;G_2,\chi_1)\\ &=\frac{\pi i}{k}\overline{\chi_1}(-c)\overline{\chi_2}(b)s(d,c;G_2,G_1)+\delta(z;c,d;\chi_1,\chi_2) \end{aligned} \tag{3.83}$$

olur. Burada,

$$\delta(z;c,d;\chi_1,\chi_2)=\begin{cases} \dfrac{c_k(0)}{k}P_1(0,c_k)\log(cz+d), & \chi_1=\chi_2=\chi_0 \text{ ise}\\ 0, & \chi_1\neq\chi_0 \text{ ve } \chi_2\neq\chi_0 \text{ ise}\end{cases} \tag{3.84}$$

dır ve (3.24) bağıntısı, $\chi\neq\chi_0$ için $G(0,\chi)=0$ olduğu ve $B_0(G)=0$ kullanılmıştır.

Belirtelim ki $P_1(0,G)$ sayısı

$$\begin{aligned} P_1(0,G)&=\sum_{v=0}^{k-1}G(-v,\chi)P_1\left(\frac{v}{k}\right)=\sum_{j=1}^{k-1}\chi(j)\frac{1}{e^{-2\pi ij/k}-1}\\ &=\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{k-1}\chi(j)\cot(\pi j/k)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}\chi(j) \end{aligned} \tag{3.85}$$

olarak hesaplanabilir. Aslında, $r\geq 1$ için $P_r(0,G)$ sayıları $L(r,\chi)$ Dirichlet L-fonksiyonu ile yakın ilişkilidir. $k\geq 2$ modülüne göre χ Dirichlet karakter olsun ve $\chi(-1)=(-1)^l$ alınsın. Alkan (2011), l ve $r\geq 1$ aynı işaretli ise

$$2k\frac{(-1)^{l+1}r!}{(2\pi i)^r}L(r,\chi)=\sum_{q=0}^{2\left[\frac{r}{2}\right]}\binom{r}{q}B_qS(r-q,\chi) \tag{3.86}$$

olduğunu göstermiştir. Burada, $S(m,\chi)=\sum_{j=1}^{k}(j/k)^mG(j,\chi)$ dir. Şimdi,

$$\sum_{q=0}^{r}\binom{r}{q}B_qx^{r-q}=B_r(x) \text{ ve } B_r(1-x)=(-1)^rB_r(x)$$

ifadeleri kullanılırsa, (3.86)'nın sağ tarafı

$$(-1)^r\sum_{j=0}^{k-1}G(-j,\chi)B_r\left(\frac{j}{k}\right)=(-1)^rr!k^{1-r}P_r(0,G)$$

olarak yazılabilir ki buradan da

$$P_r(0,G) = -2\left(\frac{k}{2\pi i}\right)^r L(r,\chi)\,,\ l \text{ ve } r \geq 1 \text{ aynı işaretli ise}$$

olur. Ayrıca, kotanjant tek fonksiyon olduğundan, χ çift Dirichlet karakteri ve $\chi \neq \chi_0$ için $P_1(0,G) = 0$, $\chi = \chi_0$ için $P_1(0,G) = P_1(0,c_k) = -\phi(k)/2$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $Vz = -1/z$ alınırsa, (3.83) ifadesi

$$\begin{aligned}
&A(-1/z,0;G_1,\chi_2) + A(z,0;G_2,\chi_1) = -\frac{k}{\pi i}L(1,\chi_1)\,L(1,\chi_2)\,,\ \chi_1 \text{ ve } \chi_2 \text{ tek için,}\\
&A(-1/z,0;G_1,\chi_2) - A(z,0;G_2,\chi_1) = 0,\ \chi_1 \neq \chi_0 \text{ ve } \chi_2 \neq \chi_0 \text{ çift için,}\\
&A(-1/z,0;c_k,\chi_0) - A(z,0;c_k,\chi_0) = \frac{\phi(k)^2}{2k}\left(\frac{\pi i}{2} - \log z\right),\ \chi_1 = \chi_2 = \chi_0 \text{ için}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $A(z,0;G_1,\chi_2)$ için (3.74)'ün benzeri

$$A(z,0;G_1,\chi_2) = \sum_{v=1}^{k-1}\chi_1(v)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_2(n)}{1-e^{2\pi i(v+nz)/k}}n^{-1}$$

olur. Benzer şekilde, $\gamma > 0$ olmak üzere $z = \pi i/k\gamma$ yazılıp $\theta > 0$, $\gamma\theta = \pi^2/k^2$ olarak belirlenirse, $Vz = -1/z$ için (3.83),

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{k-1}\frac{\chi_1(v)\,\chi_2(n)}{1-e^{2\pi iv/k-2n\gamma}}n^{-1} - \chi_2(-1)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{k-1}\frac{\chi_2(v)\,\chi_1(n)}{1-e^{2\pi iv/k-2n\theta}}n^{-1}\\
&= \frac{\pi i}{k}\chi_1(-1)\,P_1(0,G_1)\,P_1(0,G_2) + \delta(z;1,0;\chi_1,\chi_2)
\end{aligned} \tag{3.87}$$

şeklini alır. Burada, $\delta(z;1,0;\chi_1,\chi_2)$ ifadesi (3.84) ile verilmiştir.

Örnek 3.23 *(3.87)'de $k = 6$ ya göre*

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod 6\,,\\ -1, & n \equiv 5 \pmod 6\,,\\ 0, & (n,6) > 1 \end{cases} \tag{3.88}$$

ile tanımlanan $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ Dirichlet karakteri alınsın. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\,n^{-1}}{2\cosh(2n\gamma)-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\,n^{-1}}{2\cosh(2n\theta)-1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}},\ \gamma\theta = \pi^2/36 \text{ için}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\,n^{-1}}{2\cosh(n\pi/3)-1} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}},\ \gamma = \theta = \pi/6 \text{ için}$$

elde edilir.

Örnek 3.24 *(3.87)'de $k = 3$ e göre*

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \,(\operatorname{mod} 3), \\ 1, & n \equiv 1 \,(\operatorname{mod} 3), \\ -1, & n \equiv 2 \,(\operatorname{mod} 3) \end{cases}$$

ile tanımlanan $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ ilkel karakter alınsın. Bu durumda $\gamma\theta = \pi^2/9$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\, n^{-1}}{2\cosh 2n\gamma + 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\, n^{-1}}{2\cosh 2n\theta + 1} = \frac{\pi}{9\sqrt{3}}$$

elde edilir.

Örnek 3.25 *(3.87)'de $k = 4$ e göre $\chi_1 = \chi_2 = \chi_0$ alınsın. O halde $\gamma\theta = \pi^2$ için*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{1 + e^{-(2n+1)\gamma}} - \frac{1}{1 + e^{-(2n+1)\theta}} \right) = \frac{1}{8} (\log\gamma - \log\theta) \tag{3.89}$$

olur ki bu Berndt (1978) deki Sonuç 4.3 ile aynıdır. (3.89)'un her iki tarafının γ ya göre türevi alınırsa,

$$\gamma \sum_{n=0}^{\infty} sech^2\left((2n+1)\frac{\gamma}{2}\right) + \theta \sum_{n=0}^{\infty} sech^2\left((2n+1)\frac{\theta}{2}\right) = 1,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} sech^2\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}$$

yani, sırasıyla Berndt (1978) deki Sonuç 4.4 ve 4.5 elde edilir.

3. k modülüne göre χ_1 ve χ_2 Dirichlet karakterleri için, $A = \{(-1)^n \chi_1(n)\}$ ve $B = \{(-1)^n \chi_2(n)\}$ olsun. k çift ve $\chi_1(-1)\chi_2(-1) = 1$ olduğu varsayılırsa, (3.69) kullanılarak,

$$\widehat{A} = \frac{\chi_1(-1)}{k} \{G(n + k/2, \chi_1)\} = \frac{\chi_1(-1)}{k} G_1^*,$$
$$\widehat{B} = \frac{\chi_2(-1)}{k} \{G(n + k/2, \chi_2)\} = \frac{\chi_2(-1)}{k} G_2^*$$

elde edilir. $ad - bc = 1$ ve $a \equiv d \equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$ olduğundan, b ve c tek olmalıdır. $(k, \alpha) = 1$ için $G(\alpha n + k/2, \chi) = \overline{\chi}(\alpha)\, G(n + k/2, \chi)$ olduğu görülür ki buradan

$\widehat{A}_\alpha = \overline{\chi_1}\,(-\alpha)\,G_1^*/k$ ve $\widehat{B}_\alpha = \overline{\chi_2}\,(-\alpha)\,G_2^*/k$ olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} P_m\,(x, A_c) &= \chi_1\,(-c)\,k^{m-1}\sum_{v=0}^{k-1}(-1)^v\,\chi_1\,(v)\,P_m\left(\frac{v+x}{k}\right) \\ &= \chi_1\,(-c)\,P_m^*\,(x,\overline{\chi_1}) \end{aligned} \tag{3.90}$$

ve

$$\begin{aligned} s\,(d,c;B_b,A_c) &= \chi_1\,(-c)\,\chi_2\,(b)\sum_{n=1}^{ck}(-1)^n\,\chi_2\,(n)\,P_1\left(\frac{n}{ck}\right)P_1^*\left(\frac{dn}{c},\overline{\chi_1}\right) \\ &= \chi_1\,(-c)\,\chi_2\,(b)\,s^*\,(d,c;\chi_2,\chi_1) \end{aligned} \tag{3.91}$$

dir. Burada $P_m^*\,(x,\overline{\chi_1})$ ve $s^*\,(d,c;\chi_2,\chi_1)$, Meyer (2000) tarafından tanımlanan alterne Bernoulli fonksiyonu ve Dedekind karakter toplamıdır. Son olarak

$$A_1\,(z,s;\chi,G^*) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^m\,\chi\,(m)\,G\left(n+\frac{k}{2},\chi\right)e^{2\pi inmz/k}n^{s-1}$$

alınsın. Yukarıdaki notasyonlar ile (3.67) ve (3.68) kullanılırsa, (3.30)'dan

$$\begin{aligned} &A_1\,(Vz,0;\chi_1,G_2^*) - \chi_1\,(c)\,\chi_2\,(b)\,A_1\,(z,0;\chi_2,G_1^*) \\ &= \pi i\chi_1\,(-c)\,\chi_2\,(b)\,s^*\,(d,c;\chi_2,\chi_1) - \frac{\pi i}{c(cz+d)}B_0^*(\overline{\chi_2})B_2^*(\overline{\chi_1}) \\ &\quad - \frac{2\pi i}{c}\,(cz+d)\,\chi_2\,(-b)\,B_0^*(\overline{\chi_1})P_2^*\,(0,\overline{\chi_2}) \end{aligned} \tag{3.92}$$

yazılır. $\chi_1 = \chi = \overline{\chi_2}$ ilkel iken (3.92), Meyer (2000) tarafından verilmiştir. (3.74)'e benzer olarak,

$$A_1\,(z,s;\chi_1,G_2^*) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{G\left(n+\frac{k}{2},\chi_2\right)G\left(nz+\frac{k}{2},\chi_1\right)}{1-e^{2\pi inz}}n^{s-1}$$

alınsın. $\gamma > 0$ olmak üzere $z = \pi i/k\gamma$ yazılıp $\theta > 0$, $\gamma\theta = \pi^2/k^2$ olarak belirlenirse $Vz = -1/z$ için, (3.92) ifadesi

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G\left(n+\frac{k}{2},\chi_2\right)G\left(\frac{in\gamma k}{\pi}+\frac{k}{2},\chi_1\right)}{n\left(1-e^{-2nk\gamma}\right)} - \chi_2\,(-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G\left(n+\frac{k}{2},\chi_1\right)G\left(\frac{in\theta k}{\pi}+\frac{k}{2},\chi_2\right)}{n\left(1-e^{-2nk\theta}\right)} \\ &= \pi iP_1^*(0,\overline{\chi_2})P_1^*(0,\overline{\chi_1}) - k\gamma B_0^*(\overline{\chi_2})B_2^*(\overline{\chi_1}) + \theta k\chi_2\,(-1)\,B_0^*(\overline{\chi_1})B_2^*\,(\overline{\chi_2}) \end{aligned} \tag{3.93}$$

olur.

Örnek 3.26 *(3.93)'de $k = 4$ e göre (3.78) ile tanımlanan $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ ilkel karakter* *alınsın. Meyer (2000) den, k çift ve* $\chi \neq \chi_0$ *için*

$$\sum_{v=0}^{k-1} (-1)^v \chi_1(v) = 0$$

olduğundan, $B_0^*(\overline{\chi}) = 0$ *dır.*

$$\begin{aligned} G\left(nz + k/2, \chi\right) &= e^{\pi inz}\left(e^{\pi inz/2} - e^{-\pi inz/2}\right), \\ G\left(n + k/2, \chi\right) &= -2i\chi\left(n\right) \end{aligned}$$

ifadeleri kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, $\gamma\theta = \pi^2$ *için*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi\left(n\right)}{n\left(e^{n\gamma/2} + e^{-n\gamma/2}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi\left(n\right)}{n\left(e^{n\theta/2} + e^{-n\theta/2}\right)} = \frac{\pi}{8}$$

elde edilir ki bu (3.80)'in özel halidir.

Örnek 3.27 *(3.93)'de* $k = 8$ *e göre* $\chi_1 = \chi_2 = \chi_0$ *alınsın. Bu durumda,* $P_1^*(0, \chi_0) = 0$, $B_0^*(\chi_0) = -4$, $B_2^*(\chi_0) = -2\left(B_2(1/8) + B_2(3/8)\right)$ *ve*

$$G\left(nz + k/2, \chi\right) = -e^{2\pi inz}\left(e^{\pi inz/4} + e^{-\pi inz/4}\right)\left(1 + e^{\pi inz}\right)$$

olur. Böylece, gerekli sadeleştirmeler yapılarak $\gamma\theta = \pi^2/4$ *için*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-12n\gamma}}{n \sinh\left(2n\gamma\right)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-12n\theta}}{n \sinh\left(2n\theta\right)} = 32\left(\theta - \gamma\right)\left(\frac{11}{192} - \frac{13}{192}\right) = \frac{1}{3}\left(\gamma - \theta\right)$$

elde edilir.

Örnek 3.28 *(3.93)'de* $k = 6$ *ya göre (3.88) ile tanımlanan* $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ *Dirichlet karakter alınsın.* $B_0^*(\overline{\chi}) = 0$ *ve* $G\left(nz + k/2, \chi\right) = e^{\pi inz}\left(e^{2\pi inz/3} - e^{-2\pi inz/3}\right)$ *kullanılarak ve gerekli işlemler yapılarak* $\gamma\theta = \pi^2/9$ *için*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(2\pi n/3\right)\cosh\left(n\gamma\right)}{n\left(2\cosh\left(2n\gamma\right) + 1\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(2\pi n/3\right)\cosh\left(n\theta\right)}{n\left(2\cosh\left(2n\theta\right) + 1\right)} = \frac{\pi}{9}$$

elde edilir.

3.6. Periyodik Zeta Fonksiyonu için Ramanujan Formülleri

Bu bölümde, periyodik zeta fonksiyonu için Ramanujan formülünün benzerleri elde edilecektir. Bunun için Teorem 3.2 ve (3.10)'dan yararlanılacaktır.

Öncelikle, $z \in \mathbb{H}$ ve s karmaşık sayısı için, (3.8)'in özel hallerinin

$$A(z,s;A_\alpha,I;r_1,r_2)=\sum_{m>-r_1} f(\alpha m)\sum_{n=1}^{\infty} e\left(n\frac{(m+r_1)z+r_2}{k}\right)n^{s-1},$$
$$A(z,s;I,A_\beta;r_1,r_2)=\sum_{m>-r_1}\sum_{n=1}^{\infty} f(\beta n)e\left(n\frac{(m+r_1)z+r_2}{k}\right)n^{s-1}$$

olduğu görülebilir.

$$\begin{aligned}&H\left(z,s;A_\alpha,B_\beta;r_1,r_2\right)\\ =\;&A\left(z,s;A_\alpha,B_{-\beta};r_1,r_2\right)+e(s/2)A\left(z,s;A_{-\alpha},B_\beta;-r_1,-r_2\right)\end{aligned} \tag{3.94}$$

ve

$$L_{\pm}\left(s;A_\beta;\theta\right)=L(s;A_\beta;\theta)+e(\pm s/2)L(s;A_{-\beta};-\theta) \tag{3.95}$$

olsun. Burada $L(s;A_\beta;\theta)$, (3.3) ile verilmiştir. Özel olarak,

$$Z\left(s,\theta\right)=L(s;I;\theta)=\sum_{n>-\theta}\left(n+\theta\right)^{-s}, \tag{3.96}$$

$H\left(z,s;A,B;r_1,r_2\right)=H\left(z,s;A_1,B_1;r_1,r_2\right)$ ve $A\left(z,s;A_\alpha,B_{-\beta}\right)=A\left(z,s;A_\alpha,B_{-\beta};0,0\right)$ olsun.

j ve μ negatif olmayan tamsayılar ve $z \in \mathbb{K}$ için

$$\begin{aligned}&I^*(z,s,c,d,r_1,r_2)\\ =&\int_C u^{s-1}\frac{\exp(-\left((c\mu+j-\{R_1\})/ck\right)(cz+d)ku)}{\exp(-ku(cz+d))-1}\frac{\exp(\{(dj+\rho)/c\}\,u)}{\exp(u)-1}du\end{aligned} \tag{3.97}$$

olsun. (3.20)'ye benzer şekilde, N negatif olmayan tamsayı olmak üzere $s=-N$ ise, Rezidü teoreminden, (3.97)

$$\begin{aligned}&I^*(z,-N,c,d,r_1,r_2)\\ &=2\pi i k^N\sum_{m+n=N+2}B_m\left(\frac{c\mu+j-\{R_1\}}{ck}\right)B_n\left(\{(dj+\rho)/c\}\right)k^{m-1}\frac{\left(-(cz+d)\right)^{m-1}}{m!n!}\end{aligned} \tag{3.98}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Şimdi, $H\left(z,s;A,I;r_1,r_2\right)$ ve $H\left(z,s;I,A;r_1,r_2\right)$ ifadelerini içeren dönüşüm formülleri verilebilir.

Teorem 3.29 *$z \in \mathbb{K}$ ve s keyfi karmaşık sayı olsun. $a \equiv 0 \pmod k$ ise*

$$\begin{aligned}(cz+d)^{-s}(-2\pi i/k)^s kH\left(Vz,s;I,\widehat{B};r_1,r_2\right)+\lambda_{r_1}(cz+d)^{-s}\Gamma(s)L_+(s;B;r_2)\\ =(-2\pi i/k)^s H(z,s;B_{-b},I;R_1,R_2)+\lambda_{R_1}f^*(bR_1)\Gamma(s)Z_-(s,R_2)\\ +e(-s/2)\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}f^*(b(c\mu+j+[R_1]))I^*(z,s,c,d,r_1,r_2),\end{aligned}\tag{3.99}$$

$b \equiv 0 \pmod k$ ise

$$\begin{aligned}(cz+d)^{-s}(-2\pi i/k)^s kH\left(Vz,s;I,\widehat{B};r_1,r_2\right)+\lambda_{r_1}(cz+d)^{-s}\Gamma(s)L_+(s,B,r_2)\\ =(-2\pi i/k)^s kH\left(z,s;I,\widehat{B}_a;R_1,R_2\right)+\lambda_{R_1}\Gamma(s)L_-(s;B_a;R_2)\\ +e(-s/2)\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1}f^*(-a([R_2+d(j-\{R_1\})/c]-v+d\mu))I(z,s,c,d,r_1,r_2),\end{aligned}\tag{3.100}$$

$c \equiv 0 \pmod k$ ise

$$\begin{aligned}(cz+d)^{-s}(-2\pi i/k)^s H(Vz,s;A,I;r_1,r_2)+\lambda_{r_1}f(-r_1)(cz+d)^{-s}\Gamma(s)Z_+(s,r_2)\\ =(-2\pi i/k)^s H(z,s;A_d,I;R_1,R_2)+\lambda_{R_1}f(-dR_1)\Gamma(s)Z_-(s,R_2)\\ +e(-s/2)\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}f(-d(c\mu+j+[R_1]))I^*(z,s,c,d,r_1,r_2),\end{aligned}\tag{3.101}$$

$d \equiv 0 \pmod k$ ise

$$\begin{aligned}(cz+d)^{-s}(-2\pi i/k)^s H(Vz,s;A,I;r_1,r_2)+\lambda_{r_1}f(-r_1)(cz+d)^{-s}\Gamma(s)Z_+(s,r_2)\\ =(-2\pi i/k)^s kH\left(z,s;I,\widehat{A}_{-c};R_1,R_2\right)+\lambda_{R_1}\Gamma(s)L_-(s;A_{-c};R_2)\\ +e(-s/2)\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1}f(c([R_2+d(j-\{R_1\})/c]-v))I(z,s,c,d,r_1,r_2)\end{aligned}\tag{3.102}$$

dir. Ayrıca, $s=-N$ negatif olmayan tamsayı olmak üzere, $I(z,s,c,d,r_1,r_2)$ ve $I^*(z,s,c,d,r_1,r_2)$ sırasıyla (3.20) ve (3.98) şeklinde hesaplandığından, analitik devamdan, (3.99)–(3.102) ifadeleri $z \in \mathbb{H}$ için geçerlidir.

İspat. $z \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Re}(s) > 2$, $M = ma + nc$ ve $N = mb + nd$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}&G(Vz,s;I,B;r_1,r_2)\\ &=\sum_{M,N=-\infty}^{\infty}f^*(Na-Mb)\left\{\frac{((M+R_1)z+N+R_2)}{cz+d}\right\}^{-s}\end{aligned}$$

$$= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} f^*(-mb)\left\{\frac{((m+R_1)z+n+R_2)}{cz+d}\right\}^{-s},\ a\equiv 0(\operatorname{mod} k),$$
$$= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} f^*(an)\left\{\frac{((m+R_1)z+n+R_2)}{cz+d}\right\}^{-s},\ b\equiv 0(\operatorname{mod} k)$$

yazılabilir. (3.99) ve (3.100)'ün ispatında, Teorem 3.2 deki metod, (3.10) ve (3.94)–(3.96) ifadeleri kullanılır. (3.101) ve (3.102) ispatında ise, yukarıda bahsedilen metod kullanılır ama $G(Vz,s;I,B;r_1,r_2)$ yerine $G(Vz,s;A,I;r_1,r_2)$ hesaplanarak başlanır. ∎

Bu teoremin karakter benzerleri Berndt tarafından, $f=\chi_1$ ve $f^*=\chi_2$ ilkel için Berndt (1977b) de Teorem 4.1 ile, $\chi_1=\chi=\overline{\chi}_2$ için Berndt (1975d) de Teorem 3 ile verilmiştir.

Berndt (1975d) deki Teorem 3 de $s=-N$ negatif olmayan tamsayılar alarak, dönüşüm formülleri yardımıyla, $\zeta(2N+1)$ için Ramanujan formülünün karakter benzerleri olan Dirichlet L–fonksiyonu için bazı ilginç formüller veya aritmetik sonuçlar elde etmiştir. Bu formüllerin periyodik benzerleri Bradley (2002) tarafından verilmiştir ve bunlar Teorem 3.29 un özel durumlarıdır.

Teorem 3.30 *(Bradley 2002) N pozitif tamsayı ve γ keyfi pozitif sayı olsun.*

f çift fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}&\zeta\left(2N+1,\widehat{A}\right)-f(0)\left(i\gamma k^2\right)^{-2N}\zeta(2N+1)\\&=2(i\gamma k)^{-2N}A(ik\gamma,-2N;A,I)-2kA\left(\frac{i}{k\gamma},-2N;I,\widehat{A}\right)\\&\quad+\frac{(2\pi i)^{2N+1}}{k^{2N}}\sum_{m=0}^{N+1}P_{2m}(0)\,P_{2N+2-2m}(0,A)\,(i/k\gamma)^{2m-1}\end{aligned}\tag{3.103}$$

dir. Burada, $\zeta(s,A)=L(s;A;0)$ ifadesi Berndt (1975c) Bölüm 6 da verilen periyodik zeta fonksiyonudur. $f(0)=0$ ise, (3.103) ifadesi $N=0$ için de geçerlidir.

f tek fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}\zeta\left(2N,\widehat{A}\right)&=-2(ik\gamma)^{1-2N}A(ik\gamma,1-2N;A,I)+2kA\left(\frac{i}{k\gamma},1-2N;I,\widehat{A}\right)\\&\quad+\frac{(2\pi i)^{2N}}{k^{2N-1}}\sum_{m=0}^{N}P_{2m}(0)\,P_{2N+1-2m}(0,A)\,(i/k\gamma)^{2m-1}\end{aligned}\tag{3.104}$$

dir.

İspat. $\zeta(s, A)$ için Berndt (1975c) de Sonuç 6.5 ile verilen fonksiyonel eşitlik yardımıyla,

$$\lim_{s\to -N}\Gamma(s)L_-\left(s; A_c; 0\right) = e^{-\pi iN/2}\left(k/2\pi\right)^N\zeta\left(N+1, \widehat{A}_c\right) \tag{3.105}$$

yazılabilir. f çift olsun. (3.20) ve (3.94) kullanılarak, (3.102) ifadesi

$$\begin{aligned}
&(cz+d)^N\left(-2\pi i/k\right)^{-N}\left(1+e\left(-N/2\right)\right)A\left(Vz, -N; A, I\right)\\
&+f(0)\lim_{s\to -N}(cz+d)^{-s}\Gamma(s)Z_+\left(s, 0\right)\\
&=\left(-2\pi i/k\right)^{-N}k\left(1+e\left(-N/2\right)\right)A\left(z, -N; I, \widehat{A}_{-c}\right)+\lim_{s\to -N}\Gamma(s)L_-\left(s; A_{-c}; 0\right)\\
&+2\pi i\frac{(-k)^N}{(N+2)!}\sum_{j=1}^{c}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{N+2}\binom{N+2}{m}f(c([dj/c]-v))\\
&\times B_m\left(\frac{c\mu+j}{ck}\right)B_{N+2-m}\left(\frac{v+\{dj/c\}}{k}\right)\left(-(cz+d)\right)^{m-1}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. N yerine $2N$ yazılıp, $Vz = -1/z$ alınıp ve $z = i/k\gamma$, $\gamma > 0$ konursa, (2.6), (3.22) ve (3.105) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
&2\left(2\pi\gamma\right)^{-2N}A\left(ik\gamma, -2N; A, I\right)+f(0)\left(2\pi k\gamma\right)^{-2N}\zeta\left(2N+1\right)\\
&=2\left(2\pi i/k\right)^{-2N}kA\left(\frac{i}{k\gamma}, -2N; I, \widehat{A}\right)+\left(k/2\pi\right)^{2N}\left(-1\right)^N\zeta\left(2N+1, \widehat{A}_{-1}\right)\\
&+2\pi i\sum_{m=0}^{2N+2}\left(-1\right)^m P_m(0)\,P_{2N+2-m}\left(0, A\right)\left(-i/k\gamma\right)^{m-1}
\end{aligned} \tag{3.106}$$

elde edilir. Burada,

$$\sum_{\mu=0}^{k-1}B_m\left(\frac{\mu+1}{k}\right) = k^{1-m}\left(-1\right)^m B_m(0)$$

bağıntısı kullanılmıştır. m tek ve$f$ çift için $P_{2N+2-m}\left(0, A\right)P_m(0) = 0$ olduğundan, (3.106)'nın sağ tarafında m yerine $2m$ yazılırsa (3.103)'ün ispatı tamamlanır.

Benzer şekilde, f tek olsun. N yerine $2N-1$ alınıp (3.103)'ün ispatındaki yol izlenirse

$$\begin{aligned}
&2\left(ik\gamma\right)^{1-2N}A\left(ik\gamma, 1-2N; A, I\right)-2kA\left(\frac{i}{k\gamma}, 1-2N; I, \widehat{A}\right)\\
&=\zeta\left(2N, \widehat{A}_{-1}\right)+\frac{(2\pi i)^{2N}}{k^{2N-1}}\sum_{m=0}^{2N+1}P_{2N+1-m}\left(0, A\right)P_m(0)\left(i/k\gamma\right)^{m-1}
\end{aligned} \tag{3.107}$$

elde edilir. (3.107)'nin sağ tarafında m yerine $2m$ alınırsa ispat tamamlanır. ∎

Teorem 3.30, $s = -N$ ve $r_1 = r_2 = 0$ iken Teorem 3.29 dan elde edilebilen böyle formüllerin sonsuz sınıfının sadece bir tanesidir. $\zeta(2N+1, B)$ ve $\zeta(2N, B)$ için benzer formüller (3.99)'dan elde edilebilir. Ayrıca, r ve f aynı özellikte iken

$$B_{2r} = \frac{2(-1)^{r-1}(2r)!}{(2\pi)^{2r}}\zeta(2r)$$

ve Berndt (1975c) de (6.23) ve (6.25)'de

$$\zeta\left(r, \widehat{A}\right) = -\frac{1}{2}\frac{(2\pi i/k)^r}{r!}B_r(0, A), \quad r \geq 1 \tag{3.108}$$

ile verilen bağıntı kullanılarak, (3.103) ve (3.104) eşitlikleri zeta fonksiyonları cinsinden yazılabilir.

Dahası, Teorem 3.29 dan, N ve f zıt özellikte iken, $\zeta(N+1, A)$ nın değerleri bulunabilir. (3.94)'de $r_1 = r_2 = 0$ ve $s = -N$ alınırsa,

$$\begin{aligned} H(Vz, -N; A, I; 0, 0) &= A(Vz, -N; A, I) + e(-N/2)A(Vz, -N; A_{-1}, I) = 0, \\ H\left(z, s; I, \widehat{A}_{-c}; 0, 0\right) &= A\left(z, -N; I, \widehat{A}_c\right) + e(-N/2)A\left(z, -N; I, \widehat{A}_{-c}\right) = 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, (3.20), (3.22) ve (3.105) kullanılırsa, (3.102) eşitliği

$$\zeta\left(N+1, \widehat{A}_{-1}\right) - f(0)\, z^N \zeta(N+1) = \frac{(2\pi i)^{N+1}}{(-k)^N}\sum_{m=0}^{N+2} P_{N+2-m}(0, A)\, P_m(0)\, z^{m-1}$$

ifadesine dönüşür.

Teorem 3.29 da r_1 ve r_2 nin bazı özel durumlarına göre aşağıdaki formüller elde edilebilir.

Teorem 3.31 *N negatif olmayan tamsayı ve $0 < R < 1$ olsun. Bu takdirde,*

$$\begin{aligned} &(-i\gamma k)^{-N} H(ik\gamma, -N; A, I; -R, 0) - kH\left(\frac{i}{k\gamma}, -N; I, \widehat{A}_{-1}; 0, R\right) \\ &= \varphi\left(R, 0, 1+N; \widehat{A}_{-1}\right) - \frac{(2\pi i)^{N+1}}{k^N}\sum_{m=0}^{N+2} P_m(0)\, P_{N+2-m}(R, A)\,(i/k\gamma)^{m-1} \end{aligned} \tag{3.109}$$

ve

$$\begin{aligned} &kH\left(ik\gamma, -N; I, \widehat{B}; 0, R\right) + (-1)^N k\varphi\left(-R, 0, N+1; \widehat{B}\right) \\ &= (-ik\gamma)^N H\left(\frac{i}{k\gamma}, -N; B, I; R, 0\right) - (2\pi i)^{N+1}\sum_{m=0}^{N+2} P_m(R, B_{-1})\, P_{N+2-m}(0)\,(i/k\gamma)^{m-N-1} \end{aligned} \tag{3.110}$$

dir. Buradaki $\varphi(x,a,s;A)$, *Berndt (1975c) tarafından*

$$\varphi(x,a,s;A)=\sum_{n=0}^{\infty}{}'f(n)\,e^{2\pi inx/k}(n+a)^{-s},\ \ \mathrm{Re}(s)>1\ \textit{ve}\ x,a\in\mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan periyodik Lerch fonksiyonudur. Fonksiyonun tanımındaki $'$ *sembolü, a pozitif olmayan tamsayı ise* $n=-a$ *durumuna karşılık gelen terimi ihmal etmek anlamına gelmektedir.*

İspat. $Vz=-1/z$ ve $z=i/k\gamma$, $\gamma>0$ olsun. Bu durumda, $R_1=r_2$ ve $R_2=-r_1$ olur. (3.109)'un ispatı için, $r_2=0$ ve $R:=R_2$ alınsın ve (3.102)'de $0<R<1$ kabul edilsin. (3.20) kullanılarak,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{i}{k\gamma}\right)^{N}(-2\pi i/k)^{-N}H(ik\gamma,-N;A,I;-R,0)\\&=(-2\pi i/k)^{-N}kH\left(\frac{i}{k\gamma},-N;I,\widehat{A}_{-1};0,R\right)+\lim_{s\to-N}\Gamma(s)L_{-}(s;A_{-1};R)\\&+e(N/2)2\pi ik^{N}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{N+2}f(-v))B_m\left(\frac{\mu+1}{k}\right)B_{N+2-m}\left(\frac{v+R}{k}\right)\frac{(-i/k\gamma)^{m-1}}{m!\,(N+2-m)!}\end{aligned}$$

yazılır. (2.4) ve (2.6) yardımıyla,

$$\begin{aligned}&(-2\pi\gamma)^{-N}H(ik\gamma,-N;A,I;-R,0)\\&=(-2\pi i/k)^{-N}kH\left(\frac{i}{k\gamma},-N;I,\widehat{A}_{-1};0,R\right)+\lim_{s\to-N}\Gamma(s)L_{-}(s;A_{-1};R)\\&+e(N/2)2\pi i\sum_{m=0}^{N+2}(-1)^m P_m(0)\,P_{2N+2-m}(R,A)\,(-i/k\gamma)^{m-1}\end{aligned}\tag{3.111}$$

olur. Şimdi yukarıdaki limit hesaplanmalıdır. $0<R<1$ için,

$$\begin{aligned}&L_{-}(s;A_{-1};R)\\&=L(s;A_{-1};R)+e^{-\pi is}L(s;A;-R)\\&=e^{-\pi is/2}\left\{e^{\pi is/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(-n)}{(n+R)^s}+e^{-\pi is/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{(n-R)^s}\right\}\\&=e^{-\pi is/2}\left\{e^{\pi is/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(-n)}{(n+R)^s}+e^{-\pi is/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n+1)}{(n+1-R)^s}\right\}\end{aligned}\tag{3.112}$$

olur. Berndt (1975c) tarafından Teorem 6.1 ile

$$\begin{aligned}&\varphi\left(x,a,1-s;\widehat{C}\right)\\&=(k/2\pi)^s\,\Gamma(s)\left(e^{\pi is/2-2\pi iax/k}\varphi(-a,x,s;C)\right.\end{aligned}$$

$$+e^{-\pi is/2+2\pi ia(1-x)/k}\varphi\left(a,1-x,s;C^{*}\right)\Big) \tag{3.113}$$

şeklinde verilen periyodik Lerch fonksiyonunun fonksiyonel eşitliği kullanılsın. Burada, $C=\{g(n)\}$ için $C^{*}=\{g(-n-1)\}$'dir. Böylece, (3.113)'de $a=0$, $x=R$, $C=A_{-1}=\{f(-n)\}$ ve $C^{*}=\{f(n+1)\}$ alınırsa, (3.112) ifadesi

$$\begin{aligned}&\Gamma(s)L_{-}(s;A_{-1};R)\\ =\;& e^{-\pi is/2}\Gamma(s)\left\{e^{\pi is/2}\varphi(0,R,s;A_{-1})+e^{-\pi is/2}\varphi(0,1-R,s;C^{*})\right\}\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\lim_{s\to -N}\Gamma(s)L_{-}(s;A_{-1};R)=(2\pi/k)^{-N}e^{\pi iN/2}\varphi\left(R,0,1+N;\widehat{A}_{-1}\right)$$

olur. Bu değer (3.111)'de yerine yazılırsa istenen elde edilir.

(3.110)'da $R_2=r_1=0$ alınsın ve (3.99)'da $0<R:=R_1=r_2<1$ kabul edilsin. İlk olarak $\lim_{s\to -N}\Gamma(s)L_{+}(s;B;R)$ değeri hesaplansın.

(3.95) kullanılıp $n\to nk+v$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\Gamma(s)L_{+}(s;B;R)\\ &=\Gamma(s)\left\{L(s;B;R)+e^{\pi is}L(s;B_{-1};-R)\right\}\\ &=\frac{1}{k^{s}}\sum_{v=0}^{k-1}f^{*}(v)\Gamma(s)\left\{\zeta\left(s,\frac{v+R}{k}\right)+e^{\pi is}\zeta\left(s,1-\frac{v+R}{k}\right)\right\}\end{aligned}$$

olur. $\operatorname{Re}s<0$ olmak üzere $\zeta(s,x)$ için Hurwitz' in formülünden (Whittaker ve Watson (1962) veya detay için Berndt (1977b) eşitlik 3.5), sağ taraf

$$\begin{aligned}&\frac{(2\pi i)^{s}}{k^{s}}\sum_{v=0}^{k-1}f^{*}(v)\varphi\left(-\frac{v+R}{k},1-s\right)\\ &=\frac{(2\pi i)^{s}}{k^{s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi inR/k}}{n^{1-s}}\sum_{v=0}^{k-1}f^{*}(v)e^{-2\pi inv/k}\\ &=\frac{(2\pi i)^{s}}{k^{s-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f^{*}}(n)\frac{e^{-2\pi inR/k}}{n^{1-s}}=\frac{(2\pi i)^{s}}{k^{s-1}}\varphi\left(-R,0,1-s;\widehat{B}\right)\end{aligned}$$

olur. Yani

$$\lim_{s\to -N}\Gamma(s)L_{+}(s;B;R)=\frac{(2\pi i)^{-N}}{k^{-N-1}}\varphi\left(-R,0,N+1;\widehat{B}\right) \tag{3.114}$$

olur. (3.20) yardımıyla,

$$\sum_{\mu=0}^{k-1} f^*(b(\mu+1+[R_1]))I^*(z,s,1,0,0,R)$$
$$= 2\pi i k^N \sum_{m=0}^{N+2} B_{N+2-m}(0)\, k^{m-1} \frac{(-z)^{m-1}}{m!\,(N+2-m)!} \sum_{\mu=0}^{k-1} f^*(-(\mu+1))B_m\left(\frac{\mu+1-R}{k}\right)$$
$$= 2\pi i k^N \sum_{m=0}^{N+2} (-1)^m P_m(R, B_{-1})\, P_{N+2-m}(0)\,(-z)^{m-1} \tag{3.115}$$

yazılabilir. Burada $B_m(1-x) = (-1)^m B_m(x)$ ve (3.22) kullanılmıştır. (3.114) ve (3.115) ifadeleri (3.99)'da yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (3.110)'a ulaşılır. ∎

$A = I$ alınırsa, Teorem 3.31 deki (3.110) ile verilen ifade Berndt (1977b) deki Teorem 3.1 e dönüşür. Ayrıca,

$$H(z,-N;I,I;-R,0)$$
$$= A(z,-N;I,I;-R,0) + e(-N/2)A(z,-N;I,I;R,0)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-N-1}}{e^{-2\pi inz}-1}\left(e^{-2\pi inzR} + (-1)^N e^{2\pi inzR}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi inzR}}{n^{N+1}}$$

ve

$$H(z,-N;I,I;0,R) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-N-1}}{e^{-2\pi inz}-1}\left(e^{2\pi inR} + (-1)^N e^{-2\pi inR}\right)$$

göz önünde bulundurularak, Berndt (1977b) deki Teorem 3.3, (3.109) bağıntısından elde edilebilir.

Şimdi, f tek veya çift (dolayısıyla $\widehat{f}$ tek veya çift) olsun. Kolaylık için, $f(-m) = \delta f(m)$ yazalım. Burada, f çift ise $\delta = 1, f$ tek ise $\delta = -1$ dir. (3.94) ve (3.2)'den

$$H(z,-N;A,I;-R,0)$$
$$= A(z,-N;A,I;-R,0) + (-1)^N A(z,-N;A_{-1},I;R,0)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-N-1} \sum_{m=1}^{\infty} f(m)\, e^{2\pi inmz/k}\left(e^{-2\pi inRz/k} + (-1)^N \delta e^{2\pi inRz/k}\right)$$
$$+ f(0)(-1)^N \sum_{n=1}^{\infty} n^{-N-1} e^{2\pi inRz/k}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{k-1} \frac{\widehat{f}(v)\, n^{-N-1}}{e^{-2\pi i(v+nz)/k}-1}\left(e^{-2\pi inRz/k} + (-1)^N \delta e^{2\pi inRz/k}\right)$$

$$+ f(0)(-1)^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi inRz/k}}{n^{N+1}}$$

ve

$$\begin{aligned}
&H\left(z,-N;I,\widehat{A}_{-1};0,R\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)\, n^{-N-1} \sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi inmz/k} \left(e^{2\pi inR/k} + (-1)^N \delta e^{-2\pi inR/k}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{n^{-N-1}}{e^{-2\pi inz/k}-1} \left(e^{2\pi inR/k} + (-1)^N \delta e^{-2\pi inR/k}\right)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, bunlar (3.109)'da yerine yazılırsa, $(-1)^N \delta = 1$ iken

$$\begin{aligned}
&2(-i\gamma k)^{-N} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{k-1} \widehat{f}(v) \frac{\cosh(2\pi nR\gamma)}{e^{-2\pi i(v+nik\gamma)/k}-1} n^{-N-1} + f(0)(i\gamma k)^{-N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi nR\gamma}}{n^{N+1}} \\
&= \delta \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{e^{2\pi inR/k}}{n^{N+1}} - 2k \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{\cos(2\pi nR/k)}{e^{2\pi n/k^2\gamma}-1} n^{-N-1} \\
&\quad - \frac{(2\pi i)^{N+1}}{k^N} \sum_{m=0}^{N+2} P_m(0)\, P_{N+2-m}(R,A)\,(i/k\gamma)^{m-1}, \qquad (3.116)
\end{aligned}$$

$(-1)^N \delta = -1$ iken

$$\begin{aligned}
&2(-i\gamma k)^{-N} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{k-1} \widehat{f}(v) \frac{\sinh(2\pi nR\gamma)}{e^{-2\pi i(v+nz)/k}-1} n^{-N-1} + f(0)(i\gamma k)^{-N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi nR\gamma}}{n^{N+1}} \\
&= \delta \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{e^{2\pi inR/k}}{n^{N+1}} - 2ik \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) \frac{\sin(2\pi nR/k)}{e^{2\pi n/k^2\gamma}-1} n^{-N-1} \\
&\quad - \frac{(2\pi i)^{N+1}}{k^N} \sum_{m=0}^{N+2} P_m(0)\, P_{N+2-m}(R,A)\,(i/k\gamma)^{m-1} \qquad (3.117)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.116) ve (3.117) formülleri Teorem 3.30 daki gibi özelleştirilebilir ve bunlar Berndt (1977b) de verilen Teorem 3.3 ün periyodik benzerleridir. (3.116) ve (3.117)'de $R \to 0$ alınırsa, sırasıyla (3.103) ve (3.104) ile verilen Bradley' in formülleri elde edilir.

Çalışmayı periyodik zeta fonksiyonu ile Dedekind toplamı arasındaki ilişkiden bahseden aşağıdaki not ile bitirelim.

Açıklama 3.32 *$P_r(0,A_d)$ ve Dedekind toplamının tanımları kıyaslanarak, $A =$*

$\{f(n)\} = \{P_q(n/k)\}$ *için bunların birbirleri ile bağlantılı oldukları anlaşılır. Daha açık olarak,*

$$P_r(0, A_d) = k^{r-1} \sum_{m=0}^{k-1} P_q\left(-\frac{dm}{k}\right) P_r\left(\frac{m}{k}\right) = k^{r-1} s_{q,r}(-d, k)$$

dır. Burada $s_{q,r}(d, k)$ *yüksek mertebeden Dedekind toplamıdır.*

Son ifade ve (3.108) birleştirilirse, $r \geq 1$, $q \geq 2$ *ve* r *ve* q *aynı özellikte olmak üzere*

$$\zeta\left(r, \widehat{A}_d\right) = (-1)^{q+1} \frac{(2\pi i)^r}{2k} s_{q,r}(d, k) \tag{3.118}$$

elde edilir.

Bu ilişkiden dolayı, $A = \{f(n)\} = \{P_q(n/k)\}$ *iken* $\widehat{A} = \left\{\widehat{f}(n)\right\}$ *hesaplansın. (3.5)'den,*

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{k} \sum_{v=0}^{k-1} P_q\left(\frac{v}{k}\right) e^{-2\pi i n v/k} = \frac{1}{k^q} k^{q-1} \sum_{v=0}^{k-1} e^{-2\pi i n v/k} P_q\left(\frac{v}{k}\right) \\ &= \frac{1}{k^q} P_q(0, C_n) \end{aligned}$$

yazılır. Burada $C = \{g(j)\} = \left\{e^{2\pi i j/k}\right\}$ *ve* $C_n = \{g(nj)\}$ *dir. Berndt (1975c) deki Sonuç 6.4 yardımıyla,*

$$\zeta(1-q, C_n) = (-1)^{q-1} (q-1)! P_q(0, C_n), \ \ q \geq 2$$

olur. $\varphi(x, s) = \varphi(x, 0, s; I)$ *Lerch fonksiyonu ve* $\beta_q(\alpha)$ *Apostol-Bernoulli sayısı olmak üzere*

$$\begin{aligned} \zeta(s, C_n) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m \frac{n}{k}}}{m^s} = \varphi\left(\frac{n}{k}, s\right), \\ \varphi(x, 1-q) &= -\frac{\beta_q\left(e^{2\pi i x}\right)}{q}, \ \ q \geq 1 \ \ \textit{(Apostol 1951)} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{k^q} P_q(0, C_n) \\ &= \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)! k^q} \zeta(1-q, C_n), \ \ q \geq 2 \\ &= \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)! k^q} \phi\left(\frac{n}{k}, 1-q\right), \ \ q \geq 2 \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^q}{q!k^q}\beta_q\left(e^{2\pi i\frac{n}{k}}\right), \ q \geq 2$$

elde edilir. Böylece, d ve k aralarında asal sayıları için, son ifade ve (3.118), $r \geq 1$ ve $q \geq 2$ aynı özellikte olmak üzere

$$\zeta\left(r, \widehat{A}_d\right) = \frac{(-1)^q}{q!k^q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta_q\left(e^{2\pi i\frac{m}{k}d}\right)}{m^r} = (-1)^{q+1}\frac{(2\pi i)^r}{2k}s_{q,r}(d,k)$$

bağıntısını verir.

4. SONUÇ

Bu çalışma kapsamında, genelleştirilmiş Eisenstein serilerinin geniş bir sınıfı için dönüşüm formülleri elde edilmiştir. Bu dönüşüm formüllerinin bazı özel hallerinde, periyodik Bernoulli fonksiyonlarını içeren Dedekind toplamlarının genelleştirmelerinin ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Ortaya çıkan bu toplamların sağladıkları resiprosite bağıntıları ispatlanmıştır. Ayrıca, bu toplamların özel durumları incelenmiştir. Elde edilen dönüşüm formüllerinin uygulamaları olarak, çeşitli sonsuz seriler arasındaki bağıntılar ve periyodik zeta fonksiyonu için Ramanujan formülünün benzerleri elde edilmiştir.

5. KAYNAKLAR

ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.A. 1965. Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards.

ALKAN, E. 2011. Values of Dirichlet L-functions, Gauss sums and trigonometric sums. *Ramanujan J.*, 26: 375–398.

APOSTOL, T.M. 1950. Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series. *Duke Math. J.,* 17: 147–157.

APOSTOL, T.M. 1951. On the Lerch zeta function. *Pacific J. Math.*, 1: 161–167.

APOSTOL, T.M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York.

BERNDT, B.C. 1973a. Generalized Dedekind Eta-function and generalized Dedekind sums. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 178: 495–508.

BERNDT, B.C. 1973b. Character transformation formulae similar to those for the Dedekind eta-function. Proc. Sym. Pure Math. No. 24, *Amer. Math. Soc., Providence,* 9–30.

BERNDT, B.C. 1975a. Generalized Eisenstein series and modified Dedekind sums. *J. Reine Angew. Math.*, 272: 182–193.

BERNDT, B.C. 1975b. Character analogues of Poisson and Euler–Maclaurin summation formulas with applications. *J. Number Theory,* 7: 413–445.

BERNDT, B.C. 1975c. Periodic analogues of the Euler–Maclaurin and Poisson summation formulas with applications to number theory. *Acta Arith.,* XXVIII: 23–68.

BERNDT, B.C. 1975d. On Eisenstein series with characters and the values of Dirichlet L-functions. *Acta Arith.,* XXVIII: 299–320.

BERNDT, B.C. 1977a. Reciprocity theorems for Dedekind sums and generalizations. *Adv. Math.,* 23: 285–316.

BERNDT, B.C. 1977b. Modular transformations and generalizations of several formulae of Ramanujan. *Rocky Mountain J. Math.*, 7: 147–190.

BERNDT, B.C. 1978. Analytic Eisenstein series, theta functions and series relations in the spirit of Ramanujan. *J. Reine Angew. Math.*, 303/304: 332–365.

BERNDT, B.C. 1989. Ramanujan's Notebooks, Part II, Springer-Verlag, New York.

BRADLEY, D.M. 2002. Series acceleration formulas for Dirichlet series with periodic coefficients. *Ramanujan J.,* 6: 331–346.

CAN, M., CENKCİ, M. and KURT, V. 2006. Generalized Hardy–Berndt sums. *Proc. Jangjeon Math. Soc.*, 9: 19–38.

CARLITZ, L. 1964. Generalized Dedekind Sums. *Math. Z.*, 85: 83–90.

CENKCİ, M., CAN, M. and KURT, V. 2007. Degenerate and character Dedekind sums. *J. Number Theory,* 124: 346–363.

DAĞLI, M.C. and CAN, M. 2015. On reciprocity formula of character Dedekind sums and the integral of products of Bernoulli polynomials. *J. Number Theory,* 156: 105–124.

DAĞLI, M.C. and CAN, M. 2016a. Periodic analogues of Dedekind sums and transformation formulas of Eisenstein series. *Ramanujan J.,* DOI: 10.1007/s11139-016-9808.

DAĞLI, M.C. and CAN, M. 2016b. On generalized Eisenstein series and Ramanujan's formula for periodic zeta-functions. http://arxiv.org/abs/1602.06813.

GOLDBERG, L.A. 1981. Transformations of theta-functions and analogues of Dedekind sums. Ph.D. thesis, University of Illinois, Urbana.

HAMAHATA, Y. 2014. Dedekind sums with a parameter in finite fields. *Finite Fields Appl.,* 28: 57–66.

KATAYAMA, K. 1974. Ramanujan's formulas for $L-$functions. *J. Math. Soc. Japan,* 26: 234–240.

LEWITTES, J. 1972. Analytic continuation of the Eisenstein series. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 171: 469–490.

LIM, S.G. 2009. Generalized Eisenstein series and several modular transformation formulae. *Ramanujan J.,* 19: 121–136.

MEYER, J.L. 2000. Character analogues of Dedekind sums and transformations of analytic Eisenstein series. *Pacific J. Math.,* 194: 137–164.

RADEMACHER, H. and GROSSWALD, E. 1972. Dedekind Sums, Math. Assoc. of America (USA: Washington, D.C.).

SEKINE, C. 2003. Dedekind Sums with roots of unity and their reciprocity laws. *Tokyo J. Math.*, 26: 485–494.

TAKACS, L. 1979. On generalized Dedekind sums. *J. Number Theory,* 11: 264–272.

TITCHMARSH, E.C. 1951. The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford University Press, Oxford.

WHITTAKER, E.T. and WATSON, G.N. 1962. A course of modern analysis, 4th ed., University Press, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

M. Cihat DAĞLI, 1986 yılında Antalya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2004 yılında girdiği Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 2008'de Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Ocak 2010 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Aralık 2010'da Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansını tamamladı. Ocak 2011'de Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı.