T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL BELİRTİSİZ SÜZGEÇ YAPILARI ÜZERİNE

Elif TUFAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL BELİRTİSİZ SÜZGEÇ YAPILARI ÜZERİNE

Elif TUFAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL BELİRTİSİZ SÜZGEÇ YAPILARI ÜZERİNE

Elif TUFAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile kabul/red edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mutlu GÜLOĞLU

Yrd. Doç. Dr. Sevda BARUT

Yrd. Doç. Dr. Zafer ŞANLI

ÖZET

SEZGİSEL BELİRTİSİZ SÜZGEÇ YAPILARI ÜZERİNE

Elif TUFAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Yrd. Doç. Dr. Mutlu GÜLOĞLU
Temmuz 2016, 39 sayfa

Bu tezde ilk olarak açıklık derecelendirmesi kavramı tanıtılmıştır. Ayrıca sezgisel belirtisiz topoloji ve sezgisel açıklık derecelendirmesi kavramları hakkında bilgiler verilmiştir. Sezgisel belirtisiz kümeler üzerine yazılmış çeşitli makaleler sunulmuştur. Özellikle sezgisel belirtisiz süzgeçler detaylı bir şekilde incelenmiştir. Elde edilen bilgiler ışığında sezgisel belirtisiz komşuluk yapısı ve sezgisel belirtisiz süzgeç yapısı tanımlanmıştır. Son olarak bu yeni tanımlarla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Belirtisiz topoloji, Pürüzsüz topoloji, belirtisiz süzgeç, sezgisel belirtisiz topoloji, sezgisel belirtisiz süzgeç yapısı, sezgisel belirtisiz komşuluk yapısı.

JÜRİ: Yrd. Doç. Dr. Mutlu GÜLOĞLU (Danışman)
Yrd. Doç. Dr. Sevda BARUT
Yrd. Doç. Dr. Zafer ŞANLI

ABSTRACT

ON INTUITIONISTIC FUZZY FILTER STRUCTURES

Elif TUFAN

MSc Thesis, in Mathematics
Supervisor : Asst. Prof. Dr. Mutlu GÜLOĞLU
July 2016, 39 pages

In this thesis, firstly the concept of gradation of openness is introduced. Also some informations about the notion of intuitionistic fuzzy topology and intuitionistic gradation of openness are given. Several articles written on intuitionistic fuzzy sets are presented. In light of the learnings, intuitionistic fuzzy neighbourhood structure and intuitionistic fuzzy filter structure are defined. Finally, some results about these new definitions are given.

KEYWORDS: Fuzzy topology, smooth topology, fuzzy filter, intuitionistic fuzzy topology, intuitionistic fuzzy filter structure, intuitionistic fuzzy neigbourhood structure.

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Mutlu GÜLOĞLU (Supervisor)
Asst. Prof. Dr. Sevda BARUT
Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması iki ana bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerin içeriklerini kabaca şu şekilde özetleyebiliriz:

İlk olarak belirtisiz topolojik uzaylar bölümünde Chang'ın belirtisiz topolojik uzay tanımı verilmiş ve ardından açıklık derecelendirmesi kavramı tanıtılmıştır. Belirtisiz süzgeç ve supra belirtisiz süzgeç yapısı tanımları irdelenmiştir. Belirtisiz süzgeçlerin bir derecelendirme dönüşümü gibi tanımlandığı I-süzgeç kavramı ve bu kavramla ilgili bazı önerme ve sonuçlar aktarılmıştır.

İkinci bölümde ilk olarak sezgisel belirtisiz küme ve sezgisel belirtisiz topolojik uzay kavramları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca sezgisel belirtisiz topolojinin de derecelendirme yaklaşımıyla geneleştirilmesi olan sezgisel açıklık derecelendirmesi kavramına değinilmiştir. Sonrasında sezgisel belirtisiz süzgeçler incelenmiş ve genelleştirilmiş sezgisel belirtisiz süzgeçler üzerinde durulmuştur. Ayrıca sezgisel belirtisiz supra topolojik uzay tanımı sunulmuştur.

Son olarak yapılan araştırmaların sonucunda sezgisel belirtisiz süzgeç yapısı ve sezgisel belirtisiz komşuluk yapısı tanımları yapılmış ve bu yeni tanımlara bağlı elde edilen bazı sonuçlar eklenmiştir.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Yard. Doç. Dr. Mutlu Güloğlu'na, hocalarıma, aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

I	$[0,1]$ kapalı aralığı
I_0	$(0,1]$ aralığı
I_1	$[0,1)$ aralığı
$\underline{0}$	0 değerini alan X üzerindeki sabit belirtisiz küme
$\underline{1}$	1 değerini alan X üzerindeki sabit belirtisiz küme
A^c	A (belirtisiz)(sezgisel belirtisiz) kümesinin tümleyeni
$\subseteq$	Alt küme, belirtisiz alt küme
$a \vee b$	a ve b değerlerinin en büyüğü
$a \wedge b$	a ve b değerlerinin en küçüğü
$\bigvee\limits_{i\in J} a_i$	$\{a_i : i \in J\}$ kümesinin en küçük üst sınırı
$\bigwedge\limits_{i\in J} a_i$	$\{a_i : i \in J\}$ kümesinin en büyük alt sınırı
I^X	X kümesi üzerindeki tüm belirtisiz kümeler
Δ	Damga kümesi
$\tilde{\in}$	Has kapsanma
$\preccurlyeq$	Yönlendirme bağıntısı
c_α	c de α değerini alan belirtisiz nokta
$\mathcal{Q}_p$	p nin Q-komşulukları ailesi
$FP(X)$	X üzerindeki tüm belirtisiz noktalar
$\langle x, \mu_A, \gamma_A \rangle$	A sezgisel belirtisiz kümesi
0_X	$\langle x, 0, 1 \rangle$ sezgisel belirtisiz kümesi
1_X	$\langle x, 1, 0 \rangle$ sezgisel belirtisiz kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
χ_A	A kümesinin aitlik fonksiyonu
$IFP(X)$	X üzerindeki tüm sezgisel belirtisiz noktaların ailesi
$IFS(X)$	X üzerindeki tüm sezgisel belirtisiz kümelerin ailesi
c_α	c de α değerini alan belirtisiz küme
$pq\mu$	p ile μ çakışığımsıdır
$p\not{q}\mu$	p ile μ çakışığımsı değildir
$c_{(\alpha,\beta)}$	$\langle x, c_\alpha, 1 - c_{1-\beta} \rangle$ sezgisel belirtisiz kümesi
$x_{(\alpha,\beta)}$	Genelleştirilmiş sezgisel belirtisiz nokta
$GIFS(X)$	X üzerindeki genelleştirilmiş sezgisel belirtisiz kümeler ailesi
$GIFP(X)$	X üzerindeki genelleştirilmiş sezgisel belirtisiz noktalar ailesi
$(\mathcal{F},\mathcal{F}^*)$	Sezgisel belirtisiz süzgeç yapısı
$FP(X)$	X kümesindeki tüm belirtisiz noktaların kümesi
$IFP(X)$	X kümesindeki tüm sezgisel belirtisiz noktaların kümesi
$\mathcal{N}_p$	p belirtisiz noktasının komşuluk sistemi
$IFS(X)$	X üzerindeki tüm sezgisel belirtisiz kümelerin ailesi
1-1	Bire bir
$(\mathcal{N}_p, \mathcal{N}_p^*)$	p belirtisiz noktasının sezgisel belirtisiz komşuluk sistemi

<u>Kısaltmalar</u>

SBN	Sezgisel belirtisiz nokta
SBK	Sezgisel belirtisiz küme
SBT	Sezgisel belirtisiz topoloji
SBTU	Sezgisel belirtisiz topolojik uzayı
SBAK	Sezgisel belirtisiz açık kümesi
SBKK	Sezgisel belirtisiz kapalı kümesi
SuBT	Supra belirtisiz topoloji
SuBTU	Supra belirtisiz topolojik uzay
GIF	Genelleştirilmiş sezgisel belirtisiz

1. GİRİŞ

Zadeh'in 1965'te belirtisiz kümeleri tanımlamasının ardından 1968'de Chang, açık kümeleri X'teki belirtisiz kümelerden oluşan belirtisiz topolojiyi tanımlamı ştır. Ancak bu tanımda açıklığın derecelendirilmesi söz konusu değildir. Bu fikir ilk olarak 1980'de Höhle'nin yaptığıçalışmalarda yeralmıştır. Daha sonra birbirinden bağımsız ve paralel şekilde Kubiak(1985) ve Šostak(1985) bu çalışmalarıgeliştirmiştir. Sostak'ın "Belirtisiz Topolojik Uzay" tanımı(1985), Chattopadhyay ve arkadaşlarının (1992) "Açıklık Derecelendirmesi(Gradation of openness)" tanımı ve Ramadan'ın(1992) "Pürüzsüz(Smooth) Topoloji" tanımları, topoloji kavramını her belirtisiz kümeye karşı [0,1] aralığında bir reel sayı karşılık getiren dönüşüm şeklinde düşünülmesine olanak sağlamıştır.

Belirtisiz kümelerin bir genellemesi olarak sezgisel belirtisiz küme kavramınıise Atanassov 1983'te tanıtmıştır. Üye olma derecesinin yanı sıra üye olmama derecesinin de mevcut olduğu bu yeni tanımın üzerine birçok alanda bir çok çalışma yapılmıştır. Genelleştirilmiş sezgisel belirtisiz küme kavramı da bunlardan biridir(Mondal ve Samanta 2002). Sezgisel belirtisiz kümeler üzerine kurulan topoloji kavramınıise ilk olarak Çoker 1997'de tanımlamıştır. Sezgisel açıklık derecelendirmesi tanımı ise 2002'de Mondal ve Samanta tarafından verilmiştir. Sezgisel belirtisiz supra topoloji tanımını da Abbas 2004'te sunmuştur.

Bu tezde süzgeçler üzerine farklı yaklaşımlar sunulmaya çalışılmıştır. İlk olarak belirtisiz önsüzgeç tanımı verilmiştir. Ramadan ve El-latif tarafından 2008'de sunulan supra belirtisiz süzgeç yapısından bahsedilmiştir. Ayrıca, Çoker ve Güloğlu'nun 2005'te tanımladığı I-süzgeç yapısı kavramında belirtisiz süzgeçler, I^X kümesinden $[0, 1]$ aralığına giden bir derecelendirme dönüşümü halini almıştır. Bu çalışma ise 'Sezgisel belirtisiz süzgeçler için de bu şekilde bir dönüşüm tanımlanabilir mi?' sorusunu akla getirmektedir. Bu tezin temel dayanağı bu soru olmuştur. Sezgisel belirtisiz süzgeçleri incelemek için ise Lupiañez'in sezgisel belirtisiz topolojik uzaylarda ağ ve süzgeç tanımları irdelenmiştir. Ayrıca Park ve Park, 2004'te süzgeçler için bahsedilemeyen Haussdorfluk durumunun genelleştirilmiş sezgisel belirtisiz süzgeçler için olan tanımını sunmuştur.

Son olarak komşuluk süzgeci sezgisel belirtisiz anlamda derecelendirme dönüşümü olarak tanımlanmaya çalışılmıştır. Böylece belirtisiz süzgeç yapısını sezgisel bir derecelendirme dönüşümü olarak düşünmek mümkün olmuştur. Bununla beraber bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2. BELİRTİSİZ TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜZGEÇLER

2.1. Belirtisiz Topolojik Uzaylar

Bu çalışma boyunca $I_0 = (0,1]$; $I_1 = [0,1)$ şeklindeki gösterimler kullanılacaktır. $t \in I_0$ olmak üzere $y \in X$ için x_t belirtisiz noktası I^X in elemanı olup aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x_t(y) = \begin{cases} t \ , & y = x \\ 0 \ , & y \neq x \end{cases}$$

Öte yandan X kümesindeki tüm belirtisiz noktalar $FP(X)$ ile gösterilecektir. $x_t \in \lambda$ olması için ise gerekli ve yeterli koşul $t \leq \lambda(x)$ olmasıdır (Pu ve Liu 1980). $\underline{0}$, $\underline{1} \in I^X$ kümeleri sırasıyla tüm elemanların üyelik değerlerinin 0 ve 1 olduğu belirtisiz kümelerdir.

Tanım 2.1 *(Chang 1968) Belirtisiz kümelerden oluşan bir τ ailesi aşağıda verilen* ***(a),(b)*** *ve* ***(c)*** *koşullarını sağlıyorsa τ ya X üzerinde bir belirtisiz topolojidir denir.*
(a) *$\underline{0}$, $\underline{1} \in \tau$*
(b) *$A, B \in \tau$ ise $A \cap B \in \tau$ dir.*
(c) *Her $i \in I$ için $A_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dir.*
(X, τ) uzayına ise belirtisiz topolojik uzay (BTU) denir. τ nun her bir elemanı τ-açık küme olur ve tümleyeni τ-açık olan her küme de τ-kapalı olur.

Tanım 2.2 *(Pao-Ming ve Ying-Ming 1980) (X, τ) belirtisiz topolojik uzayında bir A belirtisiz kümesini ve x_λ belirtisiz noktasını alalım. Eğer $x_\lambda \in B \subset A$ olacak biçimde bir $B \in \tau$ varsa, A belirtisiz kümesi x_λ belirtisiz noktasının komşuluğudur denir. A açık ise açık komşuluğudur denir. x_λ nın tüm komşuluklarının ailesine ise x_λ nın komşuluklar sistemi denir. $x_\lambda = p$ olmak üzere p belirtisiz noktasının komşuluk sistemi $\mathcal{N}_p$ ile gösterilir.*

Tanım 2.3 *(Pao-Ming ve Ying-Ming 1980) X kümesinde bir μ belirtisiz kümesi ve $p = x_\lambda$ belirtisiz noktasını alalım. $\forall x \in X$ için $\lambda + \mu(x) > 1$ ise p ile μ çakışığımsıdır denir ve bu durum $pq\mu$ ile gösterilir.*

Tanım 2.4 *(Pao-Ming ve Ying-Ming 1980) (X, τ) belirtisiz topolojik uzayında bir A belirtisiz kümesi ile bir p belirtisiz noktası verilsin. pqB ve $B \subseteq A$ olacak şekilde bir $B \in \tau$ varsa A'ya p noktasının bir Q-komşuluğudur denir. p noktasının tüm Q-komşuluklarının oluşturduğu aileye ise p nin Q-komşuluk sistemi denir ve $\mathcal{Q}_p$ ile gösterilir.*

Chang'ın belirtisiz topoloji tanımında açık kümeler belirtisiz kümelerdir. Ancak burada topolojinin belirtisizliği konusunda bir eksiklik vardı. Bu problem ise Sostak'ın(1985) "Belirtisiz Topolojik Uzay" tanımı, Chattopadhyay ve arkadaşlarının(1992) "Gradation of openness" tanımı ve Ramadan'ın(1992) "Pürüzsüz(Smooth) Topoloji" tanımları sayesinde çözüme kavuşmuştur. Topolojinin her bir belirtisiz kümeye [0,1] aralığında bir gerçel sayı karşılık getiren bir dönüşüm olarak düşünülmesine olanak sağlanmıştır.

Tanım 2.5 *(Sostak 1985) $\tau : I^X \to I$ dönüşümü aşağıda verilen **(i)**, **(ii)** ve **(iii)** koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir açıklık derecelendirmesidir denir.*
(i) $\tau(\underline{0}) = \tau(\underline{1}) = 1$,
(ii) $\lambda_1, \lambda_2 \in I^X$ *olmak üzere* $\tau(\lambda_1 \cap \lambda_2) \geq \tau(\lambda_1) \wedge \tau(\lambda_2)$,
(iii) $\lambda_i \in I^X$ *ve* $i \in \Delta$ *olmak üzere* $\tau(\bigcup\limits_{i\in\Delta} \lambda_i) \geq \bigwedge\limits_{i\in\Delta} \tau(\lambda_i)$.
(X, τ) uzayına ise belirtisiz topolojik uzay denir.

Bundan sonraki kısımlarda belirtisiz topoloji ile Tanım 2.5 de verilen açıklık derecelendirmesi kastedilecektir.

2.2. Belirtisiz Süzgeçler

Tanım 2.6 *(Vicente ve Aranguren 1988) $\mathcal{F}$, I^X in alt kümelerinden oluşan boştan farklı bir aile olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlarsa X üzerinde bir önsüzgeçtir denir.*
(a) $0 \notin \mathcal{F}$ *dir.*
(b) $F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}$ *ise* $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ *dir.*
(c) $F \in \mathcal{F}$ *ve* $F \leq G$ *ise* $G \in \mathcal{F}$ *dir.*

Örnek 2.7 *Bir p belirtisiz noktasının Tanım 2.2 de verilen $\mathcal{N}_p$ komşuluklar sistemi ve Tanım 2.4 de verilen $\mathcal{Q}_p$ Q-komşuluklar sisteminin birer önsüzgeç olduğu açıktır.*

Tanım 2.8 *(Vicente ve Aranguren 1988) Boştan farklı ve I^X in alt kümelerinden oluşan $\mathcal{B}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir önsüzgeç tabanıdır denir.*
(a) $0 \notin \mathcal{B}$
(b) $B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}$ *ise* $B_3 \leq B_1 \wedge B_2$ *olacak şekilde* $B_3 \in \mathcal{B}$ *vardır.*

$$\mathcal{F} = \left\{ F \in I^X : \exists B \in \mathcal{B},\ F \geq B \right\}$$

ailesi bir önsüzgeç olur ve $\mathcal{B}$ tarafından üretilen önsüzgeçtir denir. Kısaca $\langle \mathcal{B} \rangle$ ile gösterilir.
X üzerinde $\mathcal{F}_1$ ve $\mathcal{F}_2$ önsüzgeçlerini alalım. $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$ ise $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ den daha incedir(veya $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1$ den daha kabadır) denir.

Önerme 2.9 *(Vicente ve Aranguren 1988)$\mathcal{F}$ ailesinin alt kümelerinden oluşan herhangi bir $\mathcal{B}$ ailesinin, $\mathcal{F}$ nin tabanı olması için gerek ve yeter koşul her $F \in \mathcal{F}$ için $B \leq F$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ bulunabilmesidir.*

Tanım 2.10 *(Vicente ve Aranguren 1988) X te bir $\mathcal{F}$ belirtisiz önsüzgecini alalım. $\mathcal{N}_p \subset \mathcal{F}$ ise, yani $\mathcal{F}$, p nin komşuluklar süzgecinden daha ince dokulu ise $\mathcal{F}$ belirtisiz önsüzgeci p belirtisiz noktasına yakınsıyor denir ve $\mathcal{F} \to p$ şeklinde gösterilir.*

2.3. Supra Belirtisiz Süzgeç Yapısı

Tanım 2.11 *(Ramadan ve El-latif 2008) $\tau : I^X \to I$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir supra belirtisiz topoloji(SuBT) denir.*
(S1) $\tau(\underline{0}) = \tau(\underline{1}) = 1$.
(S2) *Herhangi* $\{\mu_i : i \in J\} \subseteq I^X$ *için* $\tau(\bigcup_{i\in J} \mu_i) \geq \bigwedge_{i\in J} \tau(\mu_i)$ *dir.*
(X, τ) ikilisine ise supra belirtisiz topolojik uzay denir(SuBTU).
τ^* bir SuBT olsun. Eğer $\tau \leq \tau^*$ ise τ^* ailesine τ belirtisiz topolojisiyle bağlantılı SuBT denir.

Tanım 2.12 *(Ramadan ve El-latif 2008) (X, τ_1), (Y, τ_2) belirtisiz topolojik uzaylar olsun ve τ_1^*, τ_2^* sırasıyla τ_1 ve τ_2 ile bağlantılı iki SuBT olsun. Buna göre her $\mu \in I^X$ için*
$\tau_1(f^{-1}(\mu)) \geq \tau_2(\mu)$ $(\tau_1^*(f^{-1}(\mu)) \geq \tau_2^*(\mu)$ ise) $f : X \to Y$ dönüşümüne belirtisiz sürekli(supra belirtisiz sürekli) denir.

Tanım 2.13 *(Ramadan ve El-latif 2008) $\mathcal{F} : I^X \to I$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X üzerinde bir belirtisiz süzgeçtir denir:*
(F1) $\mathcal{F}(\underline{0}) = 0$.
(F2) *Her bir* $\lambda, \mu \in I^X$ *için* $\mathcal{F}(\lambda \cap \mu) \geq \mathcal{F}(\lambda) \wedge \mathcal{F}(\mu)$.
(F3) $\lambda \leq \mu$ *ise* $\mathcal{F}(\lambda) \leq \mathcal{F}(\mu)$.
Eğer bir belirtisiz süzgeç $\mathcal{F}(\underline{1}) = 1$ koşulunu sağlıyorsa "has belirtisiz süzgeçtir" denir.
$\mathcal{F}_1$ ve $\mathcal{F}_2$, X üzerinde birer belirtisiz süzgeç olsun. Her $\lambda \in I^X$ için $\mathcal{F}_1(\lambda) \leq \mathcal{F}_2(\lambda)$ ise $\mathcal{F}_2 \leq \mathcal{F}_1$, yani $\mathcal{F}_2$ $\mathcal{F}_1$den daha kabadır(veya $\mathcal{F}_1$ $\mathcal{F}_2$ den daha incedir) denir.

Teorem 2.14 *(Ramadan ve El-latif 2008) X üzerinde, aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ has belirtisiz süzgeçleri ele alınsın.*
$\mathcal{F}(\lambda_1) > 0$ ve $\mathcal{G}(\lambda_1) > 0$ olacak şekilde λ_1, $\lambda_2 \in I^X$ seçilirse $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \neq \underline{0}$ olur.
$\mathcal{F} \vee \mathcal{G} : I^X \to I$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(\mathcal{F} \vee \mathcal{G})(\lambda) = \bigvee \{\mathcal{F}(\lambda_1) \wedge \mathcal{G}(\lambda_2) : \lambda = \lambda_1 \wedge \lambda_2\}.$$

Buna göre $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ den ince olan en kaba has belirtisiz süzgeçtir.

Teorem 2.15 *(Ramadan ve El-latif 2008) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir belirtisiz süzgeç ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $f(\mathcal{F}) : I^Y \to I$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın:*

$$f(\mathcal{F})(\mu) = \mathcal{F}(f^{-1}(\mu))$$

Buna göre $f(\mathcal{F})$, Y üzerinde bir belirtisiz süzgeçtir.

Teorem 2.16 *(Ramadan ve El-latif 2008) (X, τ) bir SuBTU ve $x_t \in FP(X)$ olsun. $S_{x_t} : I^X \to I$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın:*

$$S_{x_t}(\lambda) = \begin{cases} \bigvee \left\{ \tau(v_i) : \bigwedge\limits_{i=1}^{n} v_i \leq \lambda,\ v_i \in I^X \right\}, & x_t \in v_i \in I^X \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

Bu tanıma göre S_{x_t} bir belirtisiz süzgeç olur ve S_{x_t} ye x_t nin supra belirtisiz komşuluk süzgeci denir.

İspat. (F1) Açıktır.
(F2) $\lambda_1,\ \lambda_2 \in I^X$ ve $S_{x_t}(\lambda_1 \cap \lambda_2) < S_{x_t}(\lambda_1) \wedge S_{x_t}(\lambda_2)$ olduğunu varsayalım. Buna göre

$$S_{x_t}(\lambda_1 \cap \lambda_2) < r \leq S_{x_t}(\lambda_1) \wedge S_{x_t}(\lambda_2)$$

olacak şekilde $r \in I_0$ vardır. Buradan $S_{x_t}(\lambda_1) \geq r$, $S_{x_t}(\lambda_2) \geq r$ olduğundan ve S_{x_t} tanımından öyle $v_i, \mu_j \in I^X$ $(i = 1, 2, .., n,\ j = 1, 2, .., m)$ vardır ki $\forall i = 1, 2, .., n$, $j = 1, 2, .., m$ için

$$\bigwedge_{i=1}^{n} v_i \leq \lambda_1,\ x_t \in v_i,\ \tau(v_i) \geq r$$

ve

$$\bigwedge_{j=1}^{m} \mu_j \leq \lambda_2,\ x_t \in \mu_j,\ \tau(\mu_j) \geq r$$

olur. Buradan da

$$(\bigwedge_{i=1}^{n} v_i) \wedge (\bigwedge_{j=1}^{n} \mu_j) \leq \lambda_1 \wedge \lambda_2$$

ve

$$\forall i = 1, 2, .., n;\ j = 1, 2, .., m \text{ için } \tau(v_i) \geq r,\ \tau(\mu_j) \geq r$$

olduğundan $S_{x_t}(\lambda_1 \cap \lambda_2) \geq r$ elde edilir. Bu ise kabulle çelişir. Dolayısıyla $\forall \lambda_1$, $\lambda_2 \in I^X$ için $S_{x_t}(\lambda_1 \cap \lambda_2) \geq S_{x_t}(\lambda_1) \wedge S_{x_t}(\lambda_2)$ dir.
(F3) $\lambda_1 \leq \lambda_2$ olacak şekildeki $\lambda_1,\ \lambda_2 \in I^X$ için $S_{x_t}(\lambda_1) > S_{x_t}(\lambda_2)$ olsun. $S_{x_t}(\lambda_1) \geq$

$r > S_{x_t}(\lambda_2)$ olacak şekilde $r \in I_0$ vardır. $S_{x_t}(\lambda_1) \geq r$ olduğundan ve S_{x_t} tanımından öyle $v_i(i = 1, 2, .., n)$ vardır ki $\forall i = 1, 2, .., n$ için;

$$\bigwedge_{i=1}^{n} v_i \leq \lambda_1 \leq \lambda_2, x_t \in v_i,\ \tau(v_i) \geq r$$

olur. Buradan $S_{x_t}(\lambda_2) \geq r$ olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla $\lambda_1 \leq \lambda_2$ olacak şekildeki $\lambda_1,\ \lambda_2 \in I^X$ için

$$S_{x_t}(\lambda_1) \leq S_{x_t}(\lambda_2)$$

olur. ■

Tanım 2.17 *(Ramadan ve El-latif 2008) (X, τ) bir SuBTU, $\mathcal{F}$ X üzerinde bir belirtisiz süzgeç ve S_{x_t} x_t nin Teorem 2.16 teki gibi tanımlanan supra belirtisiz komşuluk süzgeci olsun. Eğer $\mathcal{F}$, S_{x_t} den daha ince ise $\mathcal{F}$, x_t ye supra belirtisiz yakınsar denir.*

2.4. I-Süzgeç Yapısı

Açıklık derecelendirmesi kavramı topoloji dışında başka yapılar için de düşünülebilir. Bu konuda süzgeçlerin bir derecelendirme dönüşümü gibi ele alındığı "I-Süzgeç"(Güloğlu ve Çoker 2005) yapıları mevcuttur.

Bu bölümde belirtisiz süzgeçler bir derecelendirme dönüşümü olarak incelenecektir. İlk olarak Sostak'ın Q-komşuluk yapıları ve Lee'nin yakınsama yapılarının L-filter yaklaşımını kullanılarak birleştirilmesi irdelenecektir. Bu konuda bazı tanımlar gerekli olacaktır. $\mathcal{C} : I^X \to I$ olacak şekilde $\langle \mathcal{C} \rangle : I^X \to I$ dönüşümü

$$\langle \mathcal{C} \rangle(\mu) = \sup \left\{ \mathcal{C}(\lambda)\ |\lambda \in I^X,\ \lambda \leq \mu \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi $\alpha \in I_1 = [0, 1)$ için $\mathcal{C}^\alpha$ belirtisiz kümeler ailesi

$$\mathcal{C}^\alpha = \left\{ \mu \in I^X \mid \mathcal{C}(\mu) > \alpha \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $FP(X)$ ile X kümesindeki tüm belirtisiz noktalar, $FP[X]$ ile de $FP(X)$in tüm alt kümeleri gösterilecektir.

Tanım 2.18 *(Sostak 1990) X bir belirtisiz topolojik uzay ve $p \in FP(X)$ olsun. $\forall \alpha \in I_1$ için*

$$\mathcal{Q}_p^\alpha = \left\{ \mu \in I^X | (\exists \lambda \in \tau^\alpha)(pq\lambda \wedge \lambda \leq \mu) \right\}$$

eşitliği sağlanıyorsa, $\mathcal{Q}_p : I^X \to I$ dönüşümüne p nin τ belirtisiz topolojisine göre Q-komşuluklar sistemi denir.

Önerme 2.19 *(Sostak 1990) (X,τ) bir belirtisiz topolojik uzay ve $p \in FP(X)$ olsun. $\mathcal{Q}_p : I^X \to I$ dönüşümünün τ topolojisine göre p noktasının Q-komşuluklar sistemi olması için gerekli ve yeterli koşul,*

$$\mathcal{Q}_p(\mu) = \sup\left\{\tau(\lambda) | \lambda \in I^X,\ pq\lambda \textit{ ve } \lambda \leq \mu\right\}$$

olmasıdır.

Önerme 2.20 *(Sostak 1990) (X,τ) bir belirtisiz topolojik uzay ve $p \in FP(X)$ olsun. Eğer $\mathcal{Q}_p : I^X \to I$ dönüşümü, τ topolojisine göre p noktasının Q-komşuluklar sistemi ise bu dönüşüm aşağıda verilen **(Q1)-(Q5)** koşullarını sağlar:*
(Q1) $\forall \mu \in I^X$, $\mathcal{Q}_p(\mu) > 0$ *ise* $pq\mu$ *dür.*
(Q2) $\sup\left\{\mathcal{Q}_p(\mu) : \mu \in I^X\right\} = 1$.
(Q3) $\forall \mu_1, \mu_2 \in I^X$, $\mathcal{Q}_p(\mu_1 \wedge \mu_2) \geq \mathcal{Q}_p(\mu_1) \wedge \mathcal{Q}_p(\mu_2)$.
(Q4) $\forall \mu_1, \mu_2 \in I^X$, $\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow \mathcal{Q}_p(\mu_1) \leq \mathcal{Q}_p(\mu_2)$.
(Q5) $\forall \mu \in I^X$, $\mathcal{Q}_p(\mu) = \sup\left\{\mathcal{Q}_p(\lambda) \wedge \bigwedge_{eq\lambda} \mathcal{Q}_e(\lambda) : \lambda \in I^X,\ \lambda \leq \mu\right\}$

Önerme 2.21 *(Sostak 1990) Her bir $\mathcal{Q}_p : I^X \to I$ ve $p \in FP(X)$ için Önerme 2.20 de verilen **(Q1)-(Q5)** koşulları sağlansın. Bu durumda*

$$\tau(\mu) = \inf\left\{\mathcal{Q}_p(\mu) : pq\mu\right\}$$

şeklinde tanımlanan $\tau : I^X \to I$ dönüşümü X üzerinde bir belirtisiz topoloji olur. Dahası, $p \in FP(X)$ için her bir $\mathcal{Q}_p$ dönüşümü p nin τ belirtisiz topolojisine göre belirtisiz Q-komşuluklar sisteminden başka bir şey değildir.

Eklund ve Gähler(1988) tarafından en genel formunda tanımlanan "L-süzgeç(tabanı)" yapılarının özel bir durumu olan 'I-süzgeç(tabanı)' kavramından bahsedilecektir. Bu kavram, Lee ve arkadaşlarının tanımladığı belirtisiz önsüzgeç(tabanı) kavramının bir genellemesidir.

Tanım 2.22 *(Eklund ve Gähler 1988, Güloğlu ve Çoker 2005) $\mathcal{F} : I^X \to I$ dönüşümü eğer aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir I-süzgeç denir.*
(a) $\mathcal{F}(0_X) = 0$, $\mathcal{F}(1_X) = 1$,
(b) $\forall \mu_1, \mu_2 \in I^X$ *için* $\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow \mathcal{F}(\mu_1) \leq \mathcal{F}(\mu_2)$,
(c) $\forall \mu_1, \mu_2 \in I^X$ *için* $\mathcal{F}(\mu_1 \wedge \mu_2) \geq \mathcal{F}(\mu_1) \wedge \mathcal{F}(\mu_2)$.
Bundan sonra X üzerindeki tüm I-süzgeçler ailesi $IF(X)$ ile gösterilecektir.

Önerme 2.23 *(Güloğlu ve Çoker 2005) (X, τ) bir belirtisiz topolojik uzay olsun. Her bir $p \in FP(X)$ için $\mathcal{Q}_p : I^X \to I$ belirtisiz Q-komşuluklar sistemi, X üzerinde bir I-süzgeçtir. Ayrıca*

$$\mathcal{B}_p(\mu) = \mathcal{Q}_p(\mu) \wedge \bigwedge_{eq\mu} \mathcal{Q}_e(\mu)$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{B}_p : I^X \to I$ dönüşümü de X üzerinde bir I-süzgeç tabanıdır.

İspat. Öncelikle $\mathcal{Q}_p$ dönüşümünün X üzerinde bir I-süzgeç olduğu gösterilmelidir.
(a) Önerme 2.19 den ve **(Q2)** özelliğinden istenen elde edilir.
(b) ve **(c)** ise **(Q4)** ve **(Q5)** özelliğinden ortaya çıkar.
Şimdi $\mathcal{B}_p : I^X \to I$ dönüşümünün X üzerinde bir I-süzgeç olduğunu ispatlayalım.
$\mathcal{B}_p(0_X) = 0$ olduğu açıktır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\mathcal{B}_p(\mu) : \mu \in I^X\right\} &= \sup\left\{\mathcal{Q}_p(\mu) \wedge \bigwedge_{eq\mu} \mathcal{Q}_p(\mu) : \mu \in I^X\right\} \\
&= \sup\left\{\mathcal{Q}_p(\mu) \wedge \bigwedge_{eq\mu} \mathcal{Q}_p(\mu) : \mu \in I^X, \mu \leq 1_X\right\} \\
&= \mathcal{Q}_p(1_X) = 1.
\end{aligned}$$

$\mu_1, \mu_2 \in I^X$ ise;

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{B}_p \rangle(\mu_1 \wedge \mu_2) &= \mathcal{Q}_p(\mu_1 \wedge \mu_2) \\
&\geq \mathcal{Q}_p(\mu_1) \wedge \mathcal{Q}_p(\mu_2) \\
&\geq (\mathcal{Q}_p(\mu_1) \wedge (\bigwedge_{eq\mu_1} \mathcal{Q}_e(\mu_1))) \wedge (\mathcal{Q}_p(\mu_2) \wedge (\bigwedge_{eq\mu_2} \mathcal{Q}_e(\mu_2))) \\
&= \mathcal{B}_p(\mu_1) \wedge \mathcal{B}_p(\mu_2).
\end{aligned}$$

■

Örnek 2.24 *(Güloğlu ve Çoker 2005) $p \in FP(X)$ için*

$$\dot{p}(\mu) = \begin{cases} 1 \,, & pq\mu, \\ 0 \,, & d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\dot{p} : I^X \to I$ dönüşümü X üzerinde bir I-süzgeçtir.

Tanım 2.25 *(Eklund ve Gähler 1988, Güloğlu ve Çoker 2005) Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $c : IF(X) \to FP[X]$ dönüşümüne X üzerinde bir I-belirtisiz yakınsaklık yapısı denir.*

(Y1) *$\forall p \in FP(X)$ için $p \in c(\dot{p})$,*
(Y2) *$\forall \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in IF(X)$ için $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \Rightarrow c(\mathcal{F}_1) \subseteq c(\mathcal{F}_2)$,*
(Y3) *$p \in c(\mathcal{F})$ ise $p \in c(\mathcal{F} \wedge \dot{p})$ dir.*
Bu durumda (X, c) ikilisine I-belirtisiz yakınsaklık uzayı denir. $p \in c(\mathcal{F})$ ise $\mathcal{F}$, p noktasına c-yakınsaktır denir ve $\mathcal{F} \overset{c}{\to} p$ ile gösterilir.

$$\mathcal{F}_c^p = \inf \left\{ \mathcal{F} \in IF(X) : \mathcal{F} \overset{c}{\to} p \right\}$$

I-süzgecine ise p deki belirtisiz c-komşuluk süzgeci denir. Her $p \in FP(X)$ için $\mathcal{F}_c^p \overset{c}{\to} p$ ise c ye X üzerinde I-belirtisiz öntopolojik yapı denir ve (X, c) ye bir I-belirtisiz öntopoloji yakınsaklık uzayı denir. c, I-belirtisiz öntopolojik yapısı her $p \in FP(X)$ için $\mathcal{F}_c^p$ I-süzgeci, $rq\mu$ olan her $\mu \in I^X$ için $\mathcal{B}_c^p(\mu) \leq \mathcal{B}_c^r(\mu)$ olacak şekilde bir $\mathcal{B}_c^p$ I-süzgeç tabanına sahip ise X üzerinde bir I-belirtisiz topolojik yapıdır denir.

Şimdi beklenildiği gibi her bir belirtisiz topolojik uzayının bir I-belirtisiz topolojik yapısını doğurduğunu görelim:

Önerme 2.26 *(Güloğlu ve Çoker 2005) (X, τ) bir belirtisiz topolojik uzay olsun. Aşağıdaki gibi bir $c_\tau : IF(X) \to FP[X]$ dönüşümü tanımlansın:*

$$c_\tau(\mathcal{F}) = \{p \in FP(X) : \mathcal{Q}_p \leq \mathcal{F}\}.$$

Bu durumda c_τ, X üzerinde bir I-belirtisiz topolojik yapısı olur.(X üzerinde τ tarafından üretilen I-belirtisiz topolojik yapısı)

İspat. İlk olarak c_τ dönüşümünün X üzerinde bir I-belirtisiz yakınsaklık yapısı olduğunu gösterelim.
(Y1) $p \in FP(X)$ ve $\mu \in I^X$ alalım. $\mathcal{Q}_p(\mu) \leq \dot{p}$, $p \in c_\tau(\dot{p})$ olur.
(Y2) $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ olsun. $\mathcal{Q}_p \leq \mathcal{F}_1$ ise $\mathcal{Q}_p \leq \mathcal{F}_2$ dir. Buradan da $c_\tau(\mathcal{F}_1) \subseteq c_\tau(\mathcal{F}_2)$ elde ederiz.
(Y3) $p \in c_\tau(\mathcal{F})$ alalım, öyle ki $\mathcal{Q}_p \leq \mathcal{F}$ olsun. $\mathcal{Q}_p \leq \dot{p}$ ve $\mathcal{Q}_p \leq \mathcal{F} \wedge \dot{p}$ olduğundan $p \in c_\tau(\mathcal{F} \wedge \dot{p})$ elde ederiz.
Şimdi c_τ dönüşümünün X üzerinde bir I-belirtisiz öntopolojik yapısı olduğunu göstermek istiyoruz. Tanımdan, $\mathcal{Q}_p$ I-süzgeci $p \in c_\tau(\mathcal{Q}_p)$ ve $\mathcal{F}_c^p \leq \mathcal{Q}_p$. Şimdi X üzerinde $\mathcal{F} \overset{c_\tau}{\to} p$ olacak şekilde herhangi bir $\mathfrak{F}$ I-süzgeci alalım. $\mathcal{Q}_p \leq \mathcal{F}$ ve

$$\mathcal{Q}_p \leq \bigwedge \left\{ \mathcal{F} \in IF(X) : \mathcal{F} \overset{c}{\to} p \right\} = \mathcal{F}_c^p$$

olur. Böylece $\mathcal{Q}_p = \mathcal{F}_c^p$ olur ve c_τ dönüşümü X üzerinde bir I-belirtisiz öntopolojik yapısıdır. Şimdi verilen $\mathcal{B}_c^p : I^X \to I$ I-süzgeç tabanını düşünelim. $rq\mu$ olan her

$\mu \in I^X$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_c^p &= \mathcal{Q}_p(\mu) \wedge (\bigwedge_{bq\mu} \mathcal{Q}_b(\mu)) \\ &\leq \mathcal{Q}_r(\mu) \wedge (\bigwedge_{eq\mu} \mathcal{Q}_e(\mu)) \\ &= \mathcal{B}_c^r(\mu)\end{aligned}$$

olur öyle ki X üzerinde bir I-belirtisiz topolojik yapısıdır. ■

3. SEZGİSEL BELİRTİSİZ TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜZGEÇLER

Tanım 3.1 *(Atanassov 1983) X boştan farklı bir küme olsun.* $\mu_A : X \to I$ *ve* $\gamma_A : X \to I$ *gösterimleri her bir* $x \in X$ *için sırasıyla x in A kümesine üye olma(ait olma) ve üye olmama(ait olmama) derecelerini göstermek ve*

$$0 \leq \mu_A(x) + \gamma_A(x) \leq 1$$

olmak üzere, sezgisel belirtisiz küme (SBK)

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle \mid x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 3.2 *(Çoker 1997) X içindeki* $A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle \mid x \in X\}$ *SBKsi,* $\langle \mu_A, \gamma_A\rangle$ *şeklinde* $I^X \times I^X$ *içindeki ya da* $(I \times I)^X$ *içindeki bir sıralı ikiliye eşlenebilir.*

Uyarı 3.3 *(Çoker 1997) Kısalık olsun diye,* $A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle \mid x \in X\}$ *SBKsi* $A = \langle x, \mu_A, \gamma_A\rangle$ *şeklinde gösterilecektir.*

Tanım 3.4 *(Çoker 1996) X boştan farklı bir küme ve* $c \in X$ *olsun.*
(a) $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,1)$ *gerçel sayıları* $\alpha + \beta \leq 1$ *koşulunu sağlayacak şekilde verilsin. X te bir sezgisel belirtisiz nokta (SBN),*

$$c(\alpha, \beta) = \{\langle x, c_\alpha, 1 - c_{1-\beta}\rangle \mid x \in X\}$$

SBKsi şeklinde tanımlanır. (Burada c_α *X üzerinde c de* α *değerini alan belirtisiz noktadır.)*
(b) $\beta \in (0,1]$ *verilsin. X te bir sıfırlayan sezgisel belirtisiz nokta (SSBN)*

$$c(\beta) = \{\langle x, 0, 1 - c_{1-\beta}\rangle \mid x \in X\}$$

SBKsi şeklinde tanımlanır.

Herhangi bir X kümesi üzerindeki bütün sezgisel belirtisiz noktaların kümesi $IFP(X)$ ile; sezgisel belirtisiz kümelerin ailesi ise $IFS(X)$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.5 *(Çoker 1996) X boştan farklı bir küme olsun ve X üzerinde bir*

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle \mid x \in X\}$$

SBKsi verilsin.
(a) $\alpha, \beta \in (0,1)$ *olmak üzere bir* $c(\alpha, \beta)$ *SBNsı için* $\alpha < \mu_A(c)$ *ve* $\beta > \gamma_A(c)$ *ise* $c(\alpha, \beta)$ *A tarafından has kapsanır denir ve kısaca* $c(\alpha, \beta) \,\tilde{\in}\, A$ *ile gösterilir.*
(b) $\beta \in (0,1)$ *olmak üzere bir* $c(\beta)$ *SSBNsı için* $\mu_A(c) = 0$ *ve* $\beta > \gamma_A(c)$ *ise* $c(\beta)$ *A tarafından has kapsanır denir ve kısaca* $c(\beta) \,\tilde{\in}\, A$ *ile gösterilir.*

Tanım 3.6 *(Çoker 1997)X üzerinde A ve B sezgisel belirtisiz kümeleri*

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle \mid x \in X\} \ \ ve$$
$$B = \{\langle x, \mu_B(x), \gamma_B(x)\rangle \mid x \in X\}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:
(a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X$ *için* $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ *ve* $\gamma_A(x) \geq \gamma_B(x)$
(b) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ *ve* $B \subseteq A$
(c) $A^c = \{\langle x, \gamma_A(x), \mu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$
(d) $A \cap B = \{\langle x, \mu_A \wedge \mu_B, \gamma_A \vee \gamma_B\rangle \mid x \in X\}$
(e) $A \cup B = \{\langle x, \mu_A \vee \mu_B, \gamma_A \wedge \gamma_B\rangle \mid x \in X\}$.

Tanım 3.7 *(Çoker 1997) Bir X kümesi üzerindeki sezgisel belirtisiz kümelerin herhangi bir $\{A_j \mid j \in J\}$ ailesi verilsin. Bu ailenin sırasıyla arakesiti ve birleşimi aşağıdaki gibi tanımlanır:*
(a) $\bigcap A_j = \{\langle x, \bigwedge \mu_{A_j}, \bigvee \gamma_{A_j}\rangle \mid x \in X\}$
(b) $\bigcup A_j = \{\langle x, \bigvee \mu_{A_j}, \bigwedge \gamma_{A_j}\rangle \mid x \in X\}$.

Tanım 3.8 *(Çoker 1997) X boştan farklı bir küme olmak üzere 0_X ve 1_X*

$$0_X = \{\langle x, 0, 1\rangle \mid x \in X\},$$
$$1_X = \{\langle x, 1, 0\rangle \mid x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.9 *(Çoker 1997) A, B, C, X üzerinde sezgisel belirtisiz kümeler olsun. Bu durumda:*
(a) $A \subseteq B$ *ve* $C \subseteq D \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$ *ve* $A \cap C \subseteq B \cap D$
(b) $A \subseteq B$ *ve* $A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$
(c) $A \subseteq C$ *ve* $B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$
(d) $A \subseteq B$ *ve* $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
(e) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
(f) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
(g) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
(h) $(A^c)^c = A$
(i) $(1_X)^c = 0_X$, $(0_X)^c = 1_X$ *şeklinde tanımlanır.*

Tanım 3.10 *(Çoker 1997)X ve Y boştan farklı iki küme ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun.*
(a) *Y de bir $B = \{\langle y, \mu_B, \gamma_B\rangle \mid y \in Y\}$ SBK nin f altındaki ön görüntüsü de X te bir SBK olup $f^{-1}(B)$ ile gösterilir ve*

$$f^{-1}(B) = \left\{\langle x, f^{-1}(\mu_B), f^{-1}(\gamma_B)\rangle \mid x \in X\right\}$$

şeklinde tanımlanır.
(b) *X te bir* $A = \{\langle x, \lambda_A, \theta_A \rangle \mid x \in X\}$ *SBK nin f altındaki görüntüsü Y de bir SBK olup* $f(A)$ *ile gösterilir ve*

$$f(A) = \{\langle y, f(\lambda_A), 1 - f(1 - \theta_A)\rangle \mid y \in Y\}$$

şeklinde tanımlanır. $1-f(1-\theta_A)$ *için kısaca* $f_-(\theta_A)$ *gösterimi kullanılabilir. Burada;*

$$f(\lambda_A)(y) \;= \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \{\lambda_A(x)\} & ; \quad f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & ; \quad f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

$$f_-(\theta_A) = (1 - f(1-\theta_A))(y) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in f^{-1}(y)} \{\theta_A(x)\} & ; \quad f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 1 & ; \quad f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

şeklindedir.

Sonuç 3.11 *(Çoker 1997) A,* $A_i (i \in J)$*ler X üzerinde SBKler, B,* $B_j (j \in K)$*ler Y içinde SBKler ve* $f : X \to Y$ *bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*
(a) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
(b) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
(c) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ *[f 1-1 ise* $A = f^{-1}(f(A))$*]*
(d) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ *[f örtense* $f(f^{-1}(B)) = B$*]*
(e) $f^{-1}(\bigcup B_j) = \bigcup f^{-1}(B_j)$
(f) $f^{-1}(\bigcap B_j) = \bigcap f^{-1}(B_j)$
(g) $f(\bigcup A_i) = \bigcup f(A_i)$
(h) $f(\bigcap A_i) \subseteq \bigcap f(A_i)$ *[f 1-1 ise* $f(\bigcap A_i) = \bigcap f(A_i)$*]*
(i) $f^{-1}(1_X) = 1_X,\ f^{-1}(0_X) = 0_X$
(j) *f örten ise* $f(1_X) = 1_X$ *olur.*
(k) $f(0_X) = 0_X$
(l) *f örten ise* $f(A)^c \subseteq f(A^c)$
(m) $[f^{-1}(B)]^c = f^{-1}(B^c)$.

Tanım 3.12 *(Çoker 1997) Sezgisel belirtisiz kümelerden oluşan ve aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir* τ *ailesi X üzerinde bir sezgisel belirtisiz topolojidir(SBT):*
(T1) $0_X,\ 1_X \in \tau$
(T2) *Her* $G_1, G_2 \in \tau$ *için* $G_1 \cap G_2 \in \tau$
(T3) *Her* $\{G_j \mid j \in J\}$ *ailesi için* $\bigcup\limits_{j \in J} G_j \in \tau$.
Bu topolojiye ait her sezgisel belirtisiz küme de sezgisel belirtisiz açık küme(SBAK), dolayısıyla tümleyeni bu topolojiye ait olan sezgisel belirtisiz kümeye ise sezgisel belirtisiz kapalı küme(SBKK) denir.

Tanım 3.13 *(Çoker 1997)* (X, τ) *ve* $(Y, \mathbf{\Phi})$ *iki SBTU ve* $f : X \to Y$ *bir dönüşüm olsun.* $\mathbf{\Phi}$ *ye ait her SBAKnin f altındaki ön görüntüsü* τ *da bir SBAK ise f fonksiyonuna belirtisiz süreklidir denir.*

Tanım 3.14 *(Çoker 1996) (X, τ) SBTU olsun.*
(a) *X te bir $c(\alpha, \beta)$ SBN için $c(\alpha, \beta)\tilde{\in}G \subseteq N$ olacak şekilde bir G SBAK bulunabiliyorsa N sezgisel belirtisiz kümesine $c(\alpha, \beta)$ nın ε-komşuluğu denir.*
(b) *X te bir $c(\beta)$ SSBN için $\mu_N(c) = 0$ ve $c(\beta)\tilde{\tilde{\in}}G \subseteq N$ olacak şekilde bir G SBAK bulunabiliyorsa N SBKne $c(\beta)$ nın ε-komşuluğu denir.*

Tanım 3.15 *(Çoker 1996) (X, τ) ve $(Y, \mathbf{\Phi})$ iki SBTU, $f : X \to Y$ bir dönüşüm ve X üzerinde bir p SBN (veya SSBN) verilsin. Her $M \in \mathcal{N}(f(p))$ için $f(N) \subseteq M$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{N}(p)$ varsa f, p de süreklidir denir.*

Tanım 3.12 de SBT tanımında açık kümeler sezgisel belirtisizdir ancak açıklığın sezgisel belirtisizliği ise aşağıda verilecek olan "Sezgisel Açıklık Derecelendirmesi" tanımıyla mümkün olacaktır. Ayrıca τ_1 ve τ_2, X üzerinde Chang anlamında belirtisiz topolojiler olmak üzere (X, τ_1, τ_2) üçlüsüne belirtisiz ikitopolojik uzay denir. (τ_1, τ_2) sıralı ikilisine ise X üzerinde belirtisiz ikitopoloji denir.

Tanım 3.16 *(Mondal ve Samanta 2002) X boştan farklı bir küme olsun. X kümesinin belirtisiz alt kümelerinin bir sezgisel açıklık derecelendirmesi (buradan sadece belirtisiz alt kümeleri düşüneceğimiz anlaşılıyor), I^X kümesinden I kümesine giden fonksiyonlardan oluşan ve aşağıdaki 4 özelliği sağlayan (τ, τ^*) ikilisidir:*
(SAD1) *$\forall \lambda \in I^X$ için $\tau(\lambda) + \tau^*(\lambda) \leq 1$ dir,*
(SAD2) *0_X ve 1_X için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

$$\tau(0_X) = \tau(1_X) = 1, \ \tau^*(0_X) = \tau^*(1_X) = 0.$$

(SAD3) *λ_1, $\lambda_2 \in I^X$ olmak üzere*

$$\tau(\lambda_1 \cap \lambda_2) \geq \tau(\lambda_1) \wedge \tau(\lambda_2), \ \tau^*(\lambda_1 \cap \lambda_2) \leq \tau^*(\lambda_1) \vee \tau^*(\lambda_2)$$

dir.
(SAD4) *$i \in \Delta$ ve $\lambda_i \in I^X$ olmak üzere*

$$\tau(\bigcup_{i\in\Delta} \lambda_i) \geq \bigwedge_{i\in\Delta} \tau(\lambda_i), \ \tau^*(\bigcup_{i\in\Delta} \lambda_i) \leq \bigvee_{i\in\Delta} \tau^*(\lambda_i)$$

dir.

Bu kısımdan sonra sezgisel belirtisiz topolojik uzay(SBTU) ile Tanım 3.16 da verilen (X, τ, τ^*) üçlüsü kastedilecektir. τ ve τ^*, sırasıyla açıklık derecelendirmesi ve açık olmama derecelendirmesi şeklinde ifade edilebilir. Kolayca görülebileceği gibi her $\tau : I^X \to I$ belirtisiz topolojik uzayına karşılık $\lambda \in I^X$ için $\tau^*(\lambda) = 1 - \tau(\lambda)$ alınırsa (τ, τ^*) bir SBT olur.

Tanım 3.17 *(Mondal ve Samanta 2002) X boştan farklı bir küme olsun. $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^*$: $I^X \to I$ aşağıdaki özellikleri sağlayan dönüşümler olsun.*
(SKD1) $\forall \lambda \in I^X$ *için* $\mathcal{K}(\lambda) + \mathcal{K}^*(\lambda) \leq 1$,
(SKD2) 0_X *ve* 1_X *için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

$$\mathcal{K}(0_X) = \mathcal{K}(1_X) = 1,\ \mathcal{K}^*(0_X) = \mathcal{K}^*(1_X) = 0.$$

(SKD3) $\lambda_1,\ \lambda_2 \in I^X$ *olmak üzere*

$$\mathcal{K}(\lambda_1 \cup \lambda_2) \geq \mathcal{K}(\lambda_1) \wedge \mathcal{K}(\lambda_2),\ \mathcal{K}^*(\lambda_1 \cup \lambda_2) \leq \mathcal{K}^*(\lambda_1) \vee \mathcal{K}^*(\lambda_2)$$

dir,
(SKD4) $i \in \Delta$ *ve* $\lambda_i \in I^X$ *olmak üzere*

$$\mathcal{K}(\bigcap_{i\in\Delta} \lambda_i) \geq \bigwedge_{i\in\Delta} \mathcal{K}(\lambda_i),\ \mathcal{K}^*(\bigcap_{i\in\Delta} \lambda_i) \leq \bigvee_{i\in\Delta} \mathcal{K}^*(\lambda_i)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu durumda $(\mathcal{K}, \mathcal{K}^*)$ ikilisine X kümesi üzerinde bir sezgisel kapalılık derecelendirmesi denir.

Örnek 3.18 *(Mondal ve Samanta 2002) $X = \mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi alınsın.* $\mathbf{T}$, $\mathcal{B} = \{(a, b]; a, b \in R, a < b\}$ *alttabanı tarafından üretilen üst limit topolojisi ve* $\mathbf{T}_0$ *kümesi ise $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojiye göre tüm açık kümelerin ailesi olsun. $\tau, \tau^* : I^X \to I$ dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın.*

$$\tau(\lambda) = \begin{cases} 1\ , & A \in \mathbf{T}_0 \\ 0,5, & A \in \mathbf{T}\backslash\mathbf{T}_0 \\ 0\ , & d.d. \end{cases},\ \tau^*(\chi_A) = \begin{cases} 0\ , & A \in \mathbf{T}_0 \\ 0,3, & A \in \mathbf{T}\backslash\mathbf{T}_0 \\ 1\ , & d.d. \end{cases}.$$

Bu durumda (τ, τ^*) X kümesi üzerinde bir SBT dir.

Tanım 3.19 *(Mondal ve Samanta 2002) (τ, τ^*) ve $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$ X kümesi üzerinde birer SBTU olsun.*

$$(\tau, \tau^*) \leq (\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$$

olması $\tau \leq \mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}^* \leq \tau^*$ olması ile tanımlanır.

Tanım 3.20 *(Mondal ve Samanta 2002) (τ, τ^*) X üzerinde bir SBT olsun. $r \in I_0$ için τ_r ve τ_r^*,*

$$\tau_r = \tau^{-1}[r, 1],$$
$$\tau_r^* = (\tau^*)^{-1}[0, 1 - r]$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.21 *(Mondal ve Samanta 2002) (X, τ, τ^*) bir SBTU olsun. Tanım 3.20 de verilen $\{\tau_r\}_{r\in I_0}$ ve $\{\tau_r^*\}_{r\in I_0}$ aileleri X üzerinde belirtisiz topolojilerin aşağıdaki özellikleri sağlayan iki ailesidir:*
(a) $\tau_r \subset \tau_r^*$,
(b) $\tau_r = \bigcap\limits_{s<r} \tau_s$, $\tau_r^* = \bigcap\limits_{s<r} \tau_s^*$.

İspat. Kanıt açıktır. ■

Belirtisiz topolojik uzaylarda Pu ve Liu'nun(1980) tanımladığı çakışığımsılık(quasi-coincidence) kavramının sezgisel belirtisiz topolojik uzaylara genelleştirilmesi aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 3.22 *(Lupiañez 2005) $A = \langle x, \mu_A, \gamma_A\rangle$ ve $B = \langle x, \mu_B, \gamma_B\rangle$ iki SBK için $\mu_A q \mu_B$ ve $(\gamma_A)' q (\gamma_B)'$ oluyorsa A ile B çakışığımsıdır denir ve bu durum AqB ile gösterilir. Eğer A ile Bçakışığımsı değil ise bu durum $A\ /qB$ ile gösterilir. Dolayısıyla her bir sezgisel belirtisiz nokta aynı zamanda bir sezgisel belirtisiz küme olduğundan, bir p sezgisel belirtisiz noktası ile herhangi $\mu \in I^X$ için de $pq\mu$ olması durumu benzer şekilde tanımlanır.*

Uyarı 3.23 *(Lupiañez 2005) AqB ise $A \cap B \neq 0_X$ tir. Çünkü,*

$$\begin{aligned} \mu_A q \mu_B &\Rightarrow \mu_A(x) + \mu_B(x) > 1 \\ &\Rightarrow \mu_A \wedge \mu_B \neq 0 \\ &\Rightarrow A \cap B \neq 0_X \end{aligned}$$

olur.

Uyarı 3.24 *(Lupiañez 2005) A ve B SBKleri $\gamma_A = (\mu_A)'$ ve $\gamma_B = (\mu_B)'$ eşitliklerini sağlıyorsa;*

$$AqB \Leftrightarrow \mu_A q \mu_B \text{ dir.}$$

Önerme 3.25 *(Lupiañez 2006) $A = \langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle$ X te bir SBK olsun.*
$A \neq 0_X \Leftrightarrow A$ tarafından has kapsanan herhangi bir SBN veya SSBN vardır.

İspat. $(\Rightarrow)$ Eğer $A \neq 0_X$ ve $\mu_A = 0$ ise o zaman $\gamma_A \neq 1$ olur. Bu durumda $\gamma_A(c) \neq 1$ olacak şekilde bir $c \in X$ vardır.
$\gamma_A(c) = r$ ve $r < \beta < 1$ olsun. Bu durumda $\beta \in (0, 1)$ olur. $\langle x, 0, 1 - c_{1-\beta}\rangle \in \langle x, \mu_A, \gamma_A\rangle$ olduğu açıktır. Eğer $A \neq 0_X$ ve $\mu_A \neq 0$ ise öyle bir $c \in X$ vardır ki $\mu_A(c) \neq 0$ dır. $\mu_A(c) = r$ $(r > 0)$ ve $0 < \alpha < r$, $\beta = 1 - \alpha$ olsun.

$$c(\alpha, \beta) = \langle x, c_\alpha, 1 - c_{1-\beta}\rangle \tilde{\in} \langle x, \mu_A, \gamma_A\rangle$$

olur. Çünkü $\alpha < \mu_A(c) = r$ olduğundan

$$\beta = 1 - \alpha > 1 - \mu_A(c) \geq \gamma_A(c)$$

dir.
$(\Leftarrow)$ $p \tilde{\in} \langle x, \mu_A, \gamma_A \rangle$ olsun. $p = c(\alpha, \beta)$ ise $\alpha < \mu_A(c)$, $\beta > \gamma_A(c)$ ve aynı zamanda $\mu_A(c) \neq 0$, $\gamma_A(c) \neq 1$ dir. O halde, $\langle x, \mu_A, \gamma_A \rangle \neq 0_X$ olur. Benzer şekilde eğer $p = c(\beta)$ olursa $\beta > \gamma_A(c)$ ve $\gamma_A(c) \neq 1$ olur, bu da $\langle x, \mu_A, \gamma_A \rangle \neq 0_X$ anlamına gelir. ■

Şimdi sezgisel belirtisiz ağ kavramını tanımlamak için ihtiyacımız olacak "yönlenmiş küme" tanımını verelim:

Tanım 3.26 *(Karaçay 2009) Bir Δ kümesi üzerinde $\preccurlyeq$ simgesiyle gösterilecek olan bağıntı aşağıdaki özelliklere sahipse $\preccurlyeq$ bağıntısına Δ kümesini* yönlendiriyor *denir ve Δ kümesine de $\preccurlyeq$ bağıntısı ile* yönlenmiş bir kümedir *denir;*
(i) *$\forall \lambda \in \Delta$ için $\lambda \preccurlyeq \lambda$,*
(ii) *$\forall \lambda, \mu, \nu \in \Delta$ için $\lambda \preccurlyeq \mu$ ve $\mu \preccurlyeq \nu$ olması $\lambda \preccurlyeq \nu$ olmasını gerektirir,*
(iii) *$\forall \lambda, \mu$ çiftine karşılık öyle bir $\nu \in \Delta$ öğesi vardır ki $\lambda \preccurlyeq \nu$ ve $\mu \preccurlyeq \nu$ olur.*
Bu özelliklerden ilk ikisi sırasıyla bağıntının dönüşlü ve geçişli olduğunu ifade eder. Üçüncü özellik ise yönlendirme eylemine özgü bir özelliktir.

Tanım 3.27 *(Lupiañez 2006) X boştan farklı bir küme, $\mathcal{P}$ kümesi X teki tüm SBN ve SSBN ların kümesi ve $\mathcal{D}$ ise bir yönlenmiş küme olsun. $\mathbf{s} : \mathcal{D} \to \mathcal{P}$ şeklindeki her bir dönüşüme bir* sezgisel belirtisiz ağ *denir ve $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_d)_{d \in \mathcal{D}}$ ile gösterilir.($d \in \mathcal{D}$ için $\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(d)$ dir.)*

Tanım 3.28 *(Lupiañez 2006) (X, τ) bir SBTU ve $\mathbf{s}$, X te bir sezgisel belirtisiz ağ olsun. Herhangi bir $N \in \mathcal{N}(p)$ alındığında $\forall d \geq d_0$ için $\mathbf{s}_d \tilde{\in} N$ olacak şekilde bir $d_0 \in \mathcal{D}$ varsa, $\mathbf{s}$ ağı p SBN(veya SSBN)na (X, τ) uzayında yakınsıyor denir. Bu yakınsama $\mathbf{s} \tilde{\to} p$ ile gösterilir.*

Uyarı 3.29 *(Wang ve He 2000) Her sezgisel belirtisiz ağ aynı zamanda bir belirtisiz ağdır. Dikkat edilecek olursa Tanım 3.28 de sezgisel belirtisiz ağların yakınsaklığı ε-komşulukları kullanılarak tanımlanır, ancak belirtisiz topolojik uzayların Moore-Smith yakınsaklığı kavramı ise klasik kapsama kullanılarak tanımlanır. Bu yüzden bu yeni kavram gereksiz değildir.*

Şimdi sezgisel belirtisiz ağların yakınsaklığını kullanarak bir SBN veya SSBN da belirtisiz sürekliliği karakterize edelim.

Önerme 3.30 *(Lupiañez 2006) (X,τ) ve (Y,Φ) iki SBTU, $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun ve X te bir p SBN veya SSBN verilsin.*
f, p de belirtisiz süreklidir $\Leftrightarrow$ (X,τ) uzayında p ye yakınsayan her $\mathbf{s}$ ağı için; $f\circ\mathbf{s}$, (Y,Φ) uzayında $f(p)$ ye yakınsar.

İspat. **($\Rightarrow$)** f nin p de sürekliliğinden $\forall M \in \mathcal{N}(f(p))$ için $f(N) \subseteq M$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{N}(p)$ olduğu açıktır. $\mathbf{s}$ nin p ye yakınsamasından öyle $d_0 \in \mathcal{D}$ vardır ki $\forall d \geq d_0$ için $\mathbf{s}_d \tilde{\in} N$ olur. Buna göre $f(\mathbf{s}_d)\tilde{\in} f(N)$ ve $f(\mathbf{s}_d)\tilde{\in} M$ olur. Böylece bir SBNnın (veya SSBN nın) bir SBK içinde has kapsanması tanımından bu sonuca varılmıştır.

($\Leftarrow$) $(\mathcal{N}(p),\subseteq)$ nin bir yönlenmiş küme olduğu kolayca görülebilir.

$$\mathcal{D} = \{(q,N) \mid q \in \mathcal{P},\ q \in N \text{ bir SBN ve } N \in \mathcal{N}(p)\}$$

olsun. Buna göre
$(q,N) \leq (q^{'},N^{'}) \Leftrightarrow N^{'} \subseteq N$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanan $\mathbf{s}$ dönüşümü X te p ye yakınsayan bir sezgisel belirtisiz ağ olsun:

$$\mathbf{s} : \mathcal{D} \to \mathcal{P},\ \mathbf{s}(q,N) \longmapsto \mathbf{s}(q,N) = q$$

Hipotezden $f\circ\mathbf{s}$, $f(p)$ ye yakınsar. Buradan, her $M \in \mathcal{N}(f(p))$ için $\exists(q_0,N_0)$,

$$(q,N) \geq (q_0,N_0) \Rightarrow (f\circ\mathbf{s})(q,N) = f(q)\tilde{\in} M$$

dir. Şimdi her $q \in N_0$ için $f(q)\tilde{\in} M$ olduğunu yani $f(N_0) \subseteq M$ olduğunu gösterelim:

$$q = c(\alpha,\beta)\tilde{\in} N_0 \in \mathcal{N}(p) \Rightarrow f(q) = f(c(\alpha,\beta))\tilde{\in} M \in \mathcal{N}(f(p)).$$

$\alpha+\beta \leq 1$ olacak şekildeki her $\alpha,\beta \in (0,1)$ için $\alpha < \mu_{N_0}(c)$ ve $\beta > \gamma_{N_0}(c)$ olur ve $\alpha < \mu_M(f(c))$, $\beta > \gamma_M(f(c))$ eşitsizliklerini elde ederiz. ($q = c(\beta)\tilde{\in} N_0$ ise $f(q) = f(c(\beta))\tilde{\in} M$ olur. Buradan $\mu_{N_0}(c) = 0$ ve $\beta > \gamma_{N_0}(c)$ olacak şekildeki her $\beta \in (0,1)$ için $\mu_M(f(c)) = 0$ ve $\beta > \gamma_M(f(c))$ olur.) Böylece her $c \in X$ için

$$\mu_{N_0}(c) \leq f^{-1}(\mu_M)(c),\ \gamma_{N_0}(c) \geq f^{-1}(\gamma_M)(c)$$

olur. (Her $c \in X$ için $\gamma_{N_0}(c) \geq \gamma_M(f(c))$ dir. Çünkü, eğer $\mu_{N_0}(c) > \mu_M(f(c))$ olsaydı, öyle bir $\alpha_0 \in (0,1)$ bulunurdu ki $\mu_{N_0}(c) > \alpha_0 > \mu_M(f(c))$ olurdu. Bu ise çelişkidir. $\gamma_{N_0}(c) < \gamma_M(f(c))$ olsaydı da benzer şekilde çelişki elde ederdik.) Buradan yola çıkılarak, her $c \in X$ için

$$\mu_{N_0}(c) \leq f^{-1}(\mu_M)(c),\ \gamma_{N_0}(c) \geq f^{-1}(\gamma_M)(c)$$

eşitsizliklerine varılır ki böylece $N_0 \subseteq f^{-1}(M)$ ve $f(N_0) \subseteq f(f^{-1}(M)$ ve $f(N_0) \subseteq M$ olur. Bu ise f nin p de sürekli olması demektir. ■

Tanım 3.31 *(Lupiañez 2006) X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{F}$, 0_X ten farklı SBK lerin herhangi bir ailesi olsun. $\mathcal{F}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X üzerinde bir sezgisel belirtisiz süzgeçtir denir.*
(a) *Her $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ için $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,*
(b) *Her $F \in \mathcal{F}$ ve $F \subseteq S$ olacak şekildeki her S SBK için $S \in \mathcal{F}$ dir.*

Örnek 3.32 *$\mathcal{N}(c(\alpha,\beta))$, $c(\alpha,\beta)$ SBNsının tüm ε-komşulukları ailesini göstermek üzere $\mathcal{N}(c(\alpha,\beta))$nın bir sezgisel belirtisiz süzgeç olduğu kolaylıkla görülebilir.*

Tanım 3.33 *(Lupiañez 2006) (X,τ) bir SBTU olsun ve X te bir $\mathcal{F}$ sezgisel belirtisiz süzgecini alalım. $\mathcal{N}(p) \subset \mathcal{F}$ ise, yani $\mathcal{F}$, p nin komşuluklar süzgecinden daha ince dokulu ise $\mathcal{F}$ süzgeci p SBNsına yakınsıyor denir.*

Uyarı 3.34 *Dikkat edilecek olursa sezgisel belirtisiz süzgeçlerde yakınsaklık kavramı ε-komşulukları kullanılarak tanımlanmıştır. Ancak klasik belirtisiz topolojik uzaylardaki yakınsaklık kavramı ise (Lowen 1977) klasik kapsama kullanılarak tanımlanır.*

Uyarı 3.35 *(Lupiañez 2006) X, Y boştan farklı kümeler ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. X te bir $\mathcal{F}$ sezgisel belirtisiz süzgecini alalım.*

$$f(\mathcal{F}) = \{G \in IFS(Y) \mid \exists F \in \mathcal{F},\ f(F) \subseteq G\}$$

şeklinde özel bir şekilde tanımlanan görüntü kümesi Y üzerinde bir sezgisel belirtisiz süzgeçtir. Bunu kolayca gösterebiliriz:
$\mathcal{F}$ boştan farklı kümelerden oluşan bir aile olduğundan $f(\mathcal{F})$ nin de boştan farklı olduğu açıktır.
(i) *$G_1, G_2 \in f(\mathcal{F})$ alalım. $f(F_1) \subseteq G_1$ ve $f(F_2) \subseteq G_2$ olacak şekilde $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ vardır.*
$f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2) = G_1 \cap G_2 \in f(\mathcal{F})$ dir(Çoker, 1997).
(ii) *$G \in \mathcal{F}$ ve $G \subseteq S$ olsun. O halde öyle $F \in \mathcal{F}$ vardır ki*

$$\begin{aligned} f(F) \subseteq G &\Rightarrow f(F) \subseteq G \subseteq S \\ &\Rightarrow f(F) \subseteq S \\ &\Rightarrow S \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

olur.

Önerme 3.36 *(Lupiañez 2006) (X,τ) ve $(Y,\mathbf{\Phi})$ iki SBTU, $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun ve X te bir p SBN alalım. f nin p de belirtisiz sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, (X,τ) uzayında p ye yakınsayan her $\mathcal{F}$ süzgeci için $(Y,\mathbf{\Phi})$ uzayında $f(\mathcal{F})$ süzgecinin $f(p)$ ye yakınsamasıdır.*

İspat. ($\Rightarrow$) (X, τ) uzayında p ye yakınsayan bir $\mathcal{F}$ süzgeci alalım. $\mathcal{N}(p) \subseteq \mathcal{F}$ olacağı açıktır. Şimdi herhangi $M \in \mathcal{N}(f(p))$ alalım. Öyle $N \in \mathcal{N}(p)$ vardır ki $f(N) \subseteq M$ dir. Böylece $M \in f(\mathcal{F})$ olur.
($\Leftarrow$) Sağ taraftaki koşul (X, τ) uzayında p ye yakınsayan her süzgeç için sağlansın. O halde özel olarak $\mathcal{N}(p)$ için de sağlanır. Buradan $f(\mathcal{N}(p))$ de $f(p)$ ye yakınsar. Yani her $M \in \mathcal{N}(f(p))$ için öyle $N \in \mathcal{N}(p)$ vardır ki $f(N) \subseteq M$ dir, bu ise f nin p de sürekli olması demektir. ∎

Tanım 3.37 *(Lupiañez 2006) X boştan farklı bir küme ve* $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_d)_{d \in \mathcal{D}}$ *X te bir sezgisel belirtisiz ağ olsun.*

$$\mathcal{F}_{\mathbf{s}} = \{F,\ X \ te\ SBK \mid \exists d_0 \in \mathcal{D},\ \forall d \geq d_0 \Rightarrow \mathbf{s}_d \tilde{\in} \mathcal{F}\}$$

kümeler ailesi X üzerinde bir sezgisel belirtisiz süzgeçtir. $\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$ *ye X üzerinde* $\mathbf{s}$ *ağının ürettiği sezgisel belirtisiz süzgeç denir.*

Tanım 3.38 *(Lupiañez, 2006) X boştan farklı bir küme ve* $\mathcal{F}$ *X üzerinde bir sezgisel belirtisiz süzgeç olsun.*

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}} = \{(p, F) \mid p \in IFP(X),\ p \in F,\ F \in \mathcal{F}\}$$

damga kümesini aşağıdaki bağıntıyla birlikte düşünelim.

$$(p, F) \leq (p', F') \Leftrightarrow F' \subseteq F$$

Bu durumda $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ *kümesi,* $\leq$ *bağıntısı ile yönlenmiş bir kümedir ve* $\mathbf{s}_{\mathcal{F}} : \mathcal{D}_{\mathcal{F}} \to IFP(X)$, $\mathbf{s}_{\mathcal{F}}(p, F) = p$ *dönüşümüne* $\mathcal{F}$ *süzgecinin ürettiği sezgisel belirtisiz ağ denir.*

$\mathcal{F}_{\mathbf{s}}$ sezgisel belirtisiz süzgecinin ve $\mathbf{s}_{\mathcal{F}}$ sezgisel belirtisiz ağının yakınsaklık ilişkileri aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.39 *(Lupiañez 2006)* (X, τ) *bir SBTU olsun ve X te bir p SBNsını alalım. Aşağıdakiler sağlanır:*
(1) $\mathcal{F}$ *ailesi X te bir sezgisel belirtisiz süzgeç olsun.*

$$\mathcal{F},\ p\ ye\ yakınsar \Leftrightarrow \mathbf{s}_{\mathcal{F}}\ ,\ p\ ye\ yakınsar.$$

(2) $\mathbf{s}$ *dönüşümü X te bir sezgisel belirtisiz ağ olsun.*

$$\mathbf{s},\ p\ ye\ yakınsar \Leftrightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{s}}\ ,\ p\ ye\ yakınsar.$$

İspat. **(1)**($\Rightarrow$) $\mathcal{F}$, p ye yakınsak olduğundan, her $U \in \mathcal{N}(p)$ için $U \in \mathcal{F}$ dir.
$q \in U$ olan her $q \in IFP(X)$ için $(q, U) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ dir. Eğer $(q^{'}, F) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ ve $(q^{'}, F) \geq (q, U)$ ise $q^{'} \in F$ ve $F \subseteq U$olur. Buradan $\mathbf{s}_{\mathcal{F}}(q^{'}, F) = q^{'} \tilde{\in} U$ olur ve $\mathbf{s}_{\mathcal{F}}$ nin p ye yakınsak olduğu sonucuna varırız.
($\Leftarrow$) $\mathbf{s}_{\mathcal{F}}$, p ye yakınsadı■ından her $U \in \mathcal{N}(p)$ için öyle $(q_0, F_0) \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ vardır ki her $(q, F) \geq (q_0, F_0)$ için

$$\mathbf{s}_{\mathcal{F}}(q, F) = q \tilde{\in} U$$

dur. Bu ise $F_0 \subseteq U$ olmasını gerektirir, çünkü $q \tilde{\in} F_0$ olacak şekildeki her $q \in IFP(X)$ için

$$(q, F_0) \geq (q_0, F_0)$$

olur. Böylece $q \in U$ dur(Çoker 1995). Sonuç olarak $U \in \mathcal{F}$ olur ve böylece $\mathcal{F}$, p ye yakınsar.
(2) s sezgisel belirtisiz ağı p ye yakınsaktır
$\Leftrightarrow$Her $N \in \mathcal{N}(p)$ için öyle bir $d_0 \in \mathcal{D}$ vardır ki $\forall d \geq d_0$ için $\mathbf{s}_d \tilde{\in} N$ dir.
$\Leftrightarrow$ $N \in \mathcal{N}(p)$ için $N \in \mathcal{F}_{\mathbf{s}}$ olur, yani $\mathcal{F}$, $\mathbf{s}$ ye yakınsar. ■

3.1. Genelleştirilmiş Sezgisel Belirtisiz Süzgeçler

Tanım 3.40 *(Mondal ve Samanta 2002) X boştan farklı bir küme olsun.* $\mu_A : X \to I$ *ve* $\gamma_A : X \to I$ *fonksiyonları sırasıyla A kümesine üye olma ve üye olmama derecelerini belirtsin. Her* $x \in X$ *için* $\mu_A(x) \wedge \gamma_A(x) \leq \frac{1}{2}$ *olmak üzere X üzerinde bir A genelleştirilmiş sezgisel belirtisiz kümesi*

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x) \rangle \mid x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır. Kısaca 'GIF küme' şeklinde ifade edilir.

Burada $\mu_A(x) \wedge \gamma_A(x) \leq \frac{1}{2}$ koşulu konmasının sebebini kısaca açıklayalım. Sezgisel belirtisiz küme tanımında $0 \leq \mu_A(x) + \gamma_A(x) \leq 1$ idi. Yani bir noktanın üyelik derecesi ile üye olmama derecesi toplamı sıfırdan küçük veya 1 den büyük olamaz. Ancak bu koşul bazı durumlara uymayabilir. Örnek vermek gerekirse "dikkatlilik" ve "donukluk"; "kiloluluk" ve "güzellik"; "iç" ve "sınır" gibi nitelikleri düşünürsek dereceleri toplamı 1 i aşabilir. Bu gözlemlerden yola çıkarak Samanta ve Mondal Genelleştirilmiş Sezgisel Belirtisiz Küme kavramını ortaya atmıştır.

Herhangi bir X kümesi üzerindeki bütün genelleştirilmiş sezgisel belirtisiz noktaların kümesini $GIFP(X)$ ile, bütün genelleştirilmiş sezgisel belirtisiz kümelerin ailesini ise $GIFS(X)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.41 *(Mondal ve Samanta 2002)* $A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x) \rangle \mid x \in X\}$, $B = \{\langle x, \mu_B(x), \gamma_B(x) \rangle \mid x \in X\} \in GIFS(X)$ *olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:*
(a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X$ *için* $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ *ve* $\gamma_A(x) \geq \gamma_B(x)$

(b) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ *ve* $B \subseteq A$
(c) $A^c = \{\langle x, \gamma_A(x), \mu_A(x)\rangle \mid x \in X\}$
(d) $A \cap B = \{\langle x, \mu_A \wedge \mu_B, \gamma_A \vee \gamma_B\rangle \mid x \in X\}$
(e) $A \cup B = \{\langle x, \mu_A \vee \mu_B, \gamma_A \wedge \gamma_B\rangle \mid x \in X\}$
(f) $\{A_i \mid i \in J\}$ *X üzerindeki GIF kümelerin bir ailesi olmak üzere*

$$\bigcap A_i = \langle x, \bigwedge \mu_{A_i}(x), \bigvee \gamma_{A_i}(x)\rangle \mid x \in X\},$$
$$\bigcup A_i = \left\{\langle x, \bigvee \mu_{A_i}(x), \bigwedge \gamma_{A_i}(x)\rangle \mid x \in X\right\}$$

olur.
(g) $0_X = \{\langle x, 0, 1\rangle \mid x \in X\}$ *ve* $1_X = \{\langle x, 1, 0\rangle \mid x \in X\}$ *dir.*

Uyarı 3.42 *(Park ve Park 2004)*
(a) *Her* $x \in X$ *için* $A \in GIFS(X)$ *ve* $A = A^c \Leftrightarrow \mu_A(x) = \gamma_A(x)$ *tir.*
(b) $0_X = (1_X)^c$ *ve* $1_X = (0_X)^c$ *dir.*

Tanım 3.43 *(Mondal ve Samanta 2002) X ve Y boştan farklı iki küme ve* $f : X \to Y$ *bir dönüşüm olsun.* $A = \{\langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle \mid x \in X\}$ *X üzerinde ve* $B = \{\langle x, \mu_B(x), \gamma_B(x)\rangle \mid x \in X\}$ *ise Y üzerinde birer GIF küme olsunlar.*
(a) $f^{-1}(B)$*, X üzerinde*

$$f^{-1}(B) = \left\{\langle x, \mu_{f^{-1}(B)}(x), \gamma_{f^{-1}(B)}(x)\rangle \mid x \in X\right\}$$

şeklinde tanımlanan bir GIF kümedir.
Burada $\forall x \in X$ *için*

$$\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B(f(x)),\ \gamma_{f^{-1}(B)}(x) = \gamma_B(f(x))$$

şeklindedir.
(b) $f(A)$*, Y üzerinde* $f(A) = \left\{\langle y, \mu_{f(A)}(y), \gamma_{f(A)}(y)\rangle \mid y \in Y\right\}$ *şeklinde tanımlanan bir GIF kümedir.*
Burada;

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \ ; & f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 \ ; & f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$
$$\gamma_{f(A)}(y) = \begin{cases} \bigwedge_{x \in f^{-1}(y)} \gamma_A(x) \ ; & f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 1 \ ; & f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

dir.

Teorem 3.44 *(Mondal ve Samanta 2002) A, A_i $(i \in J)$ kümeleri X üzerinde GIF kümeler; B, B_i $(i \in J)$ Y üzerinde GIF kümeler ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdakiler sağlanır:*
(a) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$;
(b) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;
(c) $A \subset f^{-1}(f(A))$ *[f 1-1 ise* $A = f^{-1}(f(A))$*];*
(d) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ *[f örtense* $f(f^{-1}(B)) = B$*];*
(e) $f^{-1}(\bigcup B_i) = \bigcup f^{-1}(B_i)$, $f^{-1}(\bigcap B_i) = \bigcap f^{-1}(B_i)$;
(f) $f(\bigcup A_i) = \bigcup f(A_i)$, $f(\bigcap A_i) \subset \bigcap f(A_i)$ *[f 1-1 ise* $f(\bigcap A_i) = \bigcap f(A_i)$*];*
(g) $f^{-1}(1_X) = 1_X$, $f^{-1}(0_X) = 0_X$;
(h) $f(0_X) = 0_X$, *f örten ise* $f(1_X) = 1_X$;
(i) $[f^{-1}(B)]^c = f^{-1}(B^c)$, *$f$ örten ise* $f(A)^c \subset f(A^c)$ *olur.*

Tanım 3.45 *(Mondal ve Samanta 2002) α, $\beta \in [0,1]$ ve $\alpha \wedge \beta \leq \frac{1}{2}$ olsun. $x \in X$ için genelleştirilmiş sezgisel belirtisiz $x_{(\alpha,\beta)}$ noktası(GIF nokta) X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan bir GIF kümedir.*

$$x_{(\alpha,\beta)} = \begin{cases} (\alpha,\beta) & ; \quad y = x \\ (0,1) & ; \quad y \neq x \end{cases}$$

Bu durumda eğer $\alpha \leq \mu_A(x)$ ve $\beta \geq \gamma_A(x)$ ise $x_{(\alpha,\beta)}$ GIF noktası X kümesindeki $A = \langle x, \mu_A(x), \gamma_A(x)\rangle$ GIF kümesine aittir denir ve $x_{(\alpha,\beta)} \in A$ ile gösterilir. Bu ise $x_{(\alpha,\beta)} \leq A$ olmasıyla eşdeğerdir.

Teorem 3.46 *(Park ve Park 2004) $A, B \in GIFS(X)$ ve $x_{(\alpha,\beta)} \in GIFP(X)$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*
(a) $A = \bigcup \left\{x_{(\alpha,\beta)} : x_{(\alpha,\beta)} \in A\right\}$
(b) $A \subset B \Leftrightarrow [x_{(\alpha,\beta)} \in A \Rightarrow x_{(\alpha,\beta)} \in B]$ *dir.*

Tanım 3.47 *(Park ve Park 2004) Boştan farklı ve GIF kümelerden oluşan $\mathcal{F}$ ailesi eğer aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{F}$ ye bir GIF süzgeçtir denir:*
(a) $0_X \notin \mathcal{F}$
(b) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
(c) $[(A \in \mathcal{F}) \wedge (A \subset B)] \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.

Tanım 3.48 *(Park ve Park 2004) Aşağıdaki özellikleri sağlayan boştan farklı $\mathcal{B}$ GIF kümeler ailesine bir GIF süzgeç tabanıdır denir.*
(B1) $0_X \notin \mathcal{B}$
(B2) *Her $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ olacak biçimde $B_3 \in \mathcal{B}$ vardır.*
Ek olarak boştan farklı bir $\mathcal{S}$ ailesinin sonlu arakesitleri 0_X den farklı ise $\mathcal{S}$ ye bir GIF süzgeç alttabanıdır denir.

Uyarı 3.49 *(Park ve Park 2004) Eğer $\mathcal{S}$ ailesi bir GIF süzgeç alttabanı ise $\mathcal{S}$ nin elemanlarının tüm sonlu arakesitlerinden oluşan $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ ailesi de bir GIF süzgeç tabanı olur. Ek olarak, $\mathcal{B}$ bir GIF süzgeç tabanı olsun.*

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \{A \in GIFS(X) : \exists B \in \mathcal{B},\ B \subset A\}$$

ailesi bir GIF süzgeç olur. Dahası; $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ tarafından, $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ ise $\mathcal{B}$ tarafından tek türlü belirlidir.

Tanım 3.50 *(Park ve Park 2004) $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ ve $\mathcal{F}(\mathcal{B}(\mathcal{S}))$(veya $\mathcal{F}(\mathcal{S})$) GIF süzgeçlerine sırasıyla $\mathcal{B}$ tarafından üretilen GIF süzgeç ve $\mathcal{S}$ tarafından üretilen GIF süzgeç denir. Eğer $\mathcal{B}$ ailesi bir GIF süzgeç tabanı ve $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{B})$ ise $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$ GIF süzgecinin tabanıdır denir. Benzer şekilde, $\mathcal{S}$ bir GIF süzgeç alttabanı ve $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{S})$ ise $\mathcal{S}$, $\mathcal{F}$ GIF süzgecinin alttabanıdır denir.*

Uyarı 3.51 *(Park ve Park 2004) $\boldsymbol{\Phi}$, X üzerindeki GIF süzgeçlerin herhangi bir ailesi olsun.*
(i) *$\bigcap_{\mathcal{F}\in\boldsymbol{\Phi}} \mathcal{F}$ bir GIF süzgeçtir.*
(ii) *$\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ iki GIF süzgeç tabanı olsun. $\mathcal{F}(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{F}(\mathcal{B}_2)$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $B \in \mathcal{B}_1$ için $A \subset B$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{B}_2$ olmasıdır.*

Teorem 3.52 *(Park ve Park 2004)$\mathcal{F}$, X üzerinde bir GIF süzgeç ve $Y \subset X$ olsun. Eğer her $A \in \mathcal{F}$ için $A|_Y \neq 0_X$ ise $\mathcal{F}\ |_Y = \{F \cap Y : F \in \mathcal{F}\}$ şeklinde tanımlı aile Y üzerinde bir GIF süzgeç olur.*

İspat. (i) $A|_Y \neq 0_X$ olduğundan her $A \in \mathcal{F}$ için $0_X \notin \mathcal{F}\ |_Y$ dir.
(ii) $A|_Y$, $B|_Y \in \mathcal{F}\ |_Y$olsun.
$A|_Y \cap B|_Y = (A \cap B)|_Y$ olur ve $\mathcal{F}$ bir GIF süzgeç olduğundan $A \cap B \in \mathcal{F}$ dir. Böylece $A|_Y \cap B|_Y \in \mathcal{F}\ |_Y$.
(iii) $A|_Y \in \mathcal{F}\ |_Y$ ve B, Y de $A|_Y$ olacak şekilde bir GIF küme olsun. Y de her $z \notin Y$ için $\mu_C(z) \geq \mu_A(z)$ ve $\gamma_C(z) \leq \gamma_A(z)$ ve her $z \in Y$ için $\mu_C(z) = \mu_B(z)$ ve $\gamma_C(z)P = \gamma_B(z)$ olacak şekilde bir C GIF kümesi seçelim. $C \supseteq A$ ve $C|_Y = B$ olduğu açıktır. Buradan, $A \in \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}$ bir GIF süzgeç olduğundan $C \in \mathcal{F}$ olur ve böylece $C|_Y = B \in \mathcal{F}\ |_Y$ dir.
Sonuç olarak $\mathcal{F}\ |_Y$, Y üzerinde bir GIF süzgeçtir. ■

Teorem 3.53 *(Park ve Park 2004) $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{F}$, X üzerinde bir GIF süzgeç olsun.*

$$f(\mathcal{F}) = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$$

ailesi Y üzerinde bir GIF süzgeç tabanıdır.

İspat. **(i)** $f(F) \in f(\mathcal{F})$ olsun. $\mu_{f(F)}(y) \neq 0$ veya $\gamma_{f(F)}(y) \neq 1$ olacak şekilde bir $y \in Y$ olduğu açıktır. Her $y \in Y$ için $\mu_{f(F)}(y) = 0$ veya $\gamma_{f(F)}(y) = 1$ olduğunu düşünürsek, her $y \in Y$ için $x \in f^{-1}(y)$ olduğunda $\mu_F(x) = 0$ ve $\gamma_F(x) = 1$ olur. Böylece her $x \in X$ için $\mu_F(x) = 0$ ve $\gamma_F(x) = 1$ olur ve $0_X \in \mathcal{F}$ olur ki bu ise $\mathcal{F}$ nin GIF süzgeç olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $f(\mathcal{F}) \neq 0_X$ ve buradan da $0_X \notin f(\mathcal{F})$ olur.
(ii) $f(F_1)$, $f(F_2) \in f(\mathcal{F})$ alalım. F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$ olduğundan $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ dir. Teorem 3.44 (f) den

$$f(F_1 \cap F_2) \subset f(F_1) \cap f(F_2)$$

olur. Böylece $f(F)$, Y üzerinde bir GIF süzgeç tabanıdır. ■

Teorem 3.54 *(Park ve Park 2004) $f : X \to Y$ bir örten fonksiyon ve $\mathcal{G}$, Y üzerinde bir GIF süzgeç olsun.*

$$f^{-1}(\mathcal{G}) = \{f^{-1}(G) : G \in \mathcal{G}\}$$

ailesi X üzerinde bir GIF süzgeçtir.

İspat. **(i)** $f^{-1}(G) \in f^{-1}(\mathcal{G})$ olsun. $\mu_{f^{-1}(G)}(x) \neq 0$ veya $\gamma_{f^{-1}(G)}(x) \neq 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ olduğu açıktır. Her $x \in X$ için $\mu_{f^{-1}(G)}(x) = 0$ veya $\gamma_{f^{-1}(G)}(x) = 1$ olduğunu düşünürsek, f nin örtenliğinden her $y \in Y$ için $\mu_G(y) = 0$ veya $\gamma_G(y) = 1$ olur. Buradan $G = 0_X \in \mathcal{G}$ olur ki bu ise $\mathcal{G}$ nin GIF süzgeç olmasıyla çelişir. Yani $0_X \notin f^{-1}(\mathcal{G})$ dir.
(ii) $f^{-1}(G_1)$, $f^{-1}(G_2) \in f^{-1}(\mathcal{G})$ olsun. $\mathcal{G}$ bir GIF süzgeç olduğundan, $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$ olur. Teorem 3.44 (e) den

$$f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2) = f^{-1}(G_1 \cap G_2) \in f^{-1}(\mathcal{G})$$

olur.
Sonuç olarak $f^{-1}(\mathcal{G})$, X üzerinde bir GIF süzgeç tabanıdır. ■

Tanım 3.55 *(Park ve Park 2004) $(X, \mathcal{F})$ ve $(Y, \mathcal{G})$ GIF süzgeçler olsun. Eğer her $G \in \mathcal{G}$ için $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$ oluyorsa $f : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ fonksiyonuna $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ye göre GIF süzgeçsel süreklidir denir.*

Örnek 3.56 *(Park ve Park 2004) $X = \{a, b, c\}$ ve $Y = \{d, e, f\}$ olsun. A ve B sırasıyla X ve Y üzerinde $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$, $\beta_1 \wedge \beta_2 \leq \frac{1}{2}$ ve $\delta_1 \wedge \delta_2 \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanmış GIF kümeler olsun:*

$$A = \langle x, (\frac{a}{\alpha_1}, \frac{b}{\alpha_1}, \frac{c}{\beta_1}), (\frac{a}{\alpha_2}, \frac{b}{\alpha_2}, \frac{c}{\beta_2}) \rangle,$$
$$B = \langle y, (\frac{d}{\alpha_1}, \frac{e}{\beta_1}, \frac{f}{\delta_1}), (\frac{d}{\alpha_2}, \frac{e}{\beta_2}, \frac{f}{\delta_2}) \rangle$$

Bu durumda $\mathcal{B}_1 = \{A\}$ *ve* $\mathcal{B}_2 = \{B\}$ *nin sırasıyla* X *ve* Y *üzerinde GIF süzgeç tabanları olduğu açıktır.* $\mathcal{F}_1$ *ve* $\mathcal{F}_2$ *sırasıyla* $\mathcal{B}_1$ *ve* $\mathcal{B}_2$ *tarafından üretilen GIF süzgeçler olsun.* $f : X \to Y$ *fonksiyonunu* $f(a) = f(b) = d$ *ve* $f(c) = e$ *olacak şekilde tanımlayalım. Tanımdan* $f^{-1}(\mathcal{B}_2) = \mathcal{B}_1$ *olur ve* f *GIF süzgeçsel sürekli olur.*

Aşağıdaki örnekte görüleceği üzere $f : (X, \mathcal{F}_1) \to (Y, \mathcal{F}_2)$ sabit fonksiyonu GIF süzgeçsel sürekli olmak zorunda değlidir.

Örnek 3.57 *(Park ve Park 2004)* $X = \{a, b, c\}$ *ve* $Y = \{d, e, f\}$ *olsun.* A *ve* B *sırasıyla* X *ve* Y *üzerinde* $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \leq \frac{1}{2}$, $\beta_1 \wedge \beta_2 \leq \frac{1}{2}$ *ve* $\delta_1 \wedge \delta_2 \leq \frac{1}{2}$, $\beta_1 < \alpha_1$ *ve* $\beta_2 > \alpha_2$ *olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanmışGIF kümeler olsun:*

$$A = \langle x, (\frac{a}{\alpha_1}, \frac{b}{\alpha_1}, \frac{c}{\alpha_1}), (\frac{a}{\alpha_2}, \frac{b}{\alpha_2}, \frac{c}{\alpha_2}) \rangle,$$
$$B = \langle x, (\frac{d}{\alpha_1}, \frac{e}{\beta_1}, \frac{f}{\delta_1}), (\frac{d}{\alpha_2}, \frac{e}{\beta_2}, \frac{f}{\delta_2}) \rangle$$

Bu durumda $\mathcal{B}_1 = \{A\}$ *ve* $\mathcal{B}_2 = \{B\}$ *nin sırasıyla* X *ve* Y *üzerinde GIF süzgeç tabanları olduğu açıktır.* $\mathcal{F}_1$ *ve* $\mathcal{F}_2$ *sırasıyla* $\mathcal{B}_1$ *ve* $\mathcal{B}_2$ *tarafından üretilen GIF süzgeçler olsun.* $f : X \to Y$ *sabit fonksiyonu her* $x \in X$ *için* $f(x) = e$ *olacak şekilde tanımlansın.* $\beta_1 < \sigma_1 < \alpha_1$ *ve* $\beta_2 > \sigma_2 > \alpha_2$ *olacak şekilde* σ_i $(i = 1, 2)$ *seçelim.* $C \supset B$ *olduğundan*

$$C = \langle x, (\frac{d}{\alpha_1}, \frac{e}{\sigma_1}, \frac{f}{\delta_1}), (\frac{d}{\alpha_2}, \frac{e}{\sigma_2}, \frac{f}{\delta_2}) \rangle \in \mathcal{F}_2$$

olur.
Ancak

$$f^{-1}(\mathcal{C}) = \langle x, (\frac{d}{\sigma_1}, \frac{e}{\sigma_1}, \frac{f}{\sigma_1}), (\frac{d}{\sigma_2}, \frac{e}{\sigma_2}, \frac{f}{\sigma_2}) \rangle \notin \mathcal{F}_1$$

dir. Bu yüzden f *fonksiyonu* $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ *ye göre GIF süzgeçsel sürekli değildir.*

Teorem 3.58 $f : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ *fonksiyonu GIF süzgeçsel süreklidir.*$\Leftrightarrow \forall x_{(\alpha,\beta)} \in GIFP(X)$ *ve* $f(x_{(\alpha,\beta)}) \in G$ *olacak şekildeki her* $G \in \mathcal{G}$ *için öyle bir* $F \in \mathcal{F}$ *vardır ki* $x_{(\alpha,\beta)} \in F$ *ve* $f(F) \subset G$ *dir.*

İspat. $x_{(\alpha,\beta)}$, X te bir GIF nokta ve $f(x_{(\alpha,\beta)}) \in G$ olacak şekilde $G \in \mathcal{G}$ alalım. $f(x_{(\alpha,\beta)}) = f(x)_{(\alpha,\beta)}$ dir. GIF süzgeçsel süreklilikten ve Teorem 3.44 (d) den $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$ ve $f(f^{-1}(G)) \subset \mathcal{G}$ olur. $f^{-1}(\mu_G)(x) \geq \alpha$ ve $f^{-1}(\gamma_G)(x) \leq \beta$ olduğundan $x_{(\alpha,\beta)} \in f^{-1}(G)$ dir. $F = f^{-1}(G)$ olursa gereklilik sağlanır.

Tersine, $G \in \mathcal{G}$ ve $x_{(\alpha,\beta)} \in f^{-1}(G)$ olsun. $f(x)_{(\alpha,\beta)} \in f(f^{-1}(G)) \subset G$ olduğu açıktır ve buradan $x_{(\alpha,\beta)} \in F_{x_{(\alpha,\beta)}}$ ve $f(F_{x_{(\alpha,\beta)}}) \subset G$ olacak şekilde $F_{x_{(\alpha,\beta)}} \in \mathcal{F}$ vardır. Teorem 3.44 (c) den $F_{x_{(\alpha,\beta)}} \subset f^{-1}(f(F_{x_{(\alpha,\beta)}})) \subset f^{-1}(G)$ olur ve $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$ elde ederiz. Sonuç olarak f GIF süzgeçsel süreklidir. ∎

Uyarı 3.59 *(Park ve Park 2004) (i)* $f : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ *ve* $g : (Y, \mathcal{G}) \to (Z, \mathcal{H})$ *GIF süzgeçsel sürekli fonksiyonlar ise* $g \circ f : (X, \mathcal{F}) \to (Z, \mathcal{H})$ *bileşke fonksiyonu da GIF süzgeçsel süreklidir.*
(ii) $f : (X, \mathcal{F}) \to (X, \mathcal{F})$ *birim fonksiyonu GIF süzgeçsel süreklidir.*
(iii) $f : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ *GIF süzgeçsel sürekli fonksiyon olsun. Her* $F \in \mathcal{F}$ *için* $F|_Z \neq 0_X$ *olacak şekilde* $Z \subset X$ *alınırsa* $f|_Z : (Z, \mathcal{F}\,|_Z) \to (Y, \mathcal{G})$ *fonksiyonu GIF süzgeçsel sürekli olur.*

Klasik teoride, herhangi A ve B kümeleri için $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B^c$ olduğu bilinir. Ancak bu durum belirtisiz kümeler için artık geçerli değildir. Ramakrishnan ve Nayagam (2002) klasikteki bu durumun yerine belirtisiz kümeler için ayrık olma durumunu şu şekilde tanımlamıştır: En az bir $x \in X$ için $\mu_A(x)+\mu_B(x) > 1$ ise A ve B belirtisiz kümeleri kesişiyor denir. Eğer kesişmiyorlarsa A ve B belirtisiz kümeleri ayrıktır denir. Klasik teoride bir süzgecin kesişmeyen iki elemanından bahsetmek mümkün olmadığından süzgeçlerde Hausdorffluktan söz edilememektedir. Ama belirtisiz kümeler için bu durumdan söz edebiliriz. Dolayısıyla belirtisiz süzgeçler için Hausdorffluk ve iki belirtisiz küme için ayrıklık kavramları aşağıda vereceğimiz gibi GIF süzgeçler üzerine genişletilebilir (Park ve Park 2004).

Tanım 3.60 *(Park ve Park 2004)*

$$\mu_A(x) + (1 - \gamma_B(x)) > 1,$$
$$\mu_B(x) + (1 - \gamma_A(x)) > 1$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa A ve B GIF kümeleri $x \in X$ *noktasında kesişiyor denir. Aksi halde A ve B* x *noktasında kesişmez denir. Eğer bu kümeler hiçbir noktada kesişmiyorsa A ve B ayrıktır denir.*

Tanım 3.61 *(Park ve Park 2004)* $x \neq y$ *olacak şekildeki her* $x, y \in X$ *için* $\gamma_{F_1}(x) < \frac{1}{2}$, $\gamma_{F_2}(x) < \frac{1}{2}$ *ve her* $z \in X$ *için*

$$\mu_{F_1}(z) + (1 - \gamma_{F_2}(z)) \leq 1,$$
$$\mu_{F_2}(z) + (1 - \gamma_{F_1}(z)) \leq 1$$

olacak şekilde $F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}$ *varsa* $(X, \mathcal{F})$ *GIF süzgecine Hausdorfftur denir.*

Örnek 3.62 *(Park ve Park 2004)* $X = \{a, b, c\}$ *ve* $\alpha, \beta, \delta \in (0, \frac{1}{4})$ *olmak üzere*

$B_i(i = 1, 2, 3, 4)$ X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan GIF kümeler olsun:

$$B_1 = \langle x, (\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\delta}), (\frac{a}{1-\frac{\alpha}{2}}, \frac{b}{\frac{1}{4}}, \frac{c}{1-\frac{\delta}{2}})\rangle$$
$$B_2 = \langle x, (\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\delta}), (\frac{a}{1-\frac{\alpha}{2}}, \frac{b}{1-\frac{\beta}{2}}, \frac{c}{\frac{1}{4}})\rangle$$
$$B_3 = \langle x, (\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\delta}), (\frac{a}{\frac{1}{4}}, \frac{b}{1-\frac{\beta}{2}}, \frac{c}{1-\frac{\delta}{2}})\rangle$$
$$B_4 = \langle x, (\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\delta}), (\frac{a}{1-\frac{\alpha}{2}}, \frac{b}{1-\frac{\beta}{2}}, \frac{c}{1-\frac{\delta}{2}})\rangle$$

$\mathcal{F}$, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ tarafından üretilen GIF süzgeç olsun. Açıkça görülebilir ki $(X, \mathcal{F})$ bir Hausdorff GIF süzgeçtir.

3.2. Sezgisel Belirtisiz Supra Topolojik Uzay

Tanım 3.63 *(Abbas 2004) $\mathcal{T} : I^X \to I$, $\mathcal{T}^* : I^X \to I$: birer fonksiyon olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan ve $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ şeklinde gösterilen ikiliye X kümesi üzerindeki bir sezgisel belirtisiz supra topoloji denir.*
(IS1) *$\forall\lambda \in I^X$ için $\mathcal{T}(\lambda) + \mathcal{T}^*(\lambda) \leq 1$ dir,*
(IS2) *$\mathcal{T}(0_X) = \mathcal{T}(1_X) = 1$, $\mathcal{T}^*(0_X) = \mathcal{T}^*(1_X) = 0$,*
(IS3) *$i \in \Delta$ ve $\lambda_i \in I^X$ olmak üzere*

$$\mathcal{T}(\bigcup_{i\in\Delta} \lambda_i) \geq \bigwedge_{i\in\Delta} \mathcal{T}(\lambda_i),\ \mathcal{T}^*(\bigcup_{i\in\Delta} \lambda_i) \leq \bigvee_{i\in\Delta} \mathcal{T}^*(\lambda_i) \text{ dir.}$$

$(X, \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ üçlüsüne ise sezgisel belirtisiz supra topolojik uzay denir.
$(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ sezgisel belirtisiz supra topolojisi eğer aşağıdaki koşulu sağlarsa X üzerinde bir sezgisel belirtisiz topolojidir:
(IT) *λ_1, $\lambda_2 \in I^X$ olmak üzere*

$$\mathcal{T}(\lambda_1 \cap \lambda_2) \geq \mathcal{T}(\lambda_1) \wedge \mathcal{T}(\lambda_2),\ \mathcal{T}^*(\lambda_1 \cap \lambda_2) \leq \mathcal{T}^*(\lambda_1) \vee \mathcal{T}^*(\lambda_2) \text{ dir.}$$

$(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ve $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$, X üzerinde birer sezgisel belirtisiz topoloji ise $(X, (\mathcal{T}, \mathcal{T}^*), (\mathcal{U}, \mathcal{U}^*))$ yapısına sezgisel belirtisiz bitopolojik uzay denir.
$(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ve $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$, X üzerinde sezgisel belirtisiz supra topolojiler olsun. $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$ ın $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$ dan daha ince(yani $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*) \subseteq (\mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$) olması her $\lambda \in I^X$ için $\mathcal{U}(\lambda) \leq \mathcal{T}(\lambda)$ ve $\mathcal{U}^*(\lambda) \geq \mathcal{T}^*(\lambda)$ olması ile tanımlanır.

3.3. Sezgisel Belirtisiz Süzgeç Yapısı

Tanım 3.64 *(Ramadan ve El-latif 2008) $\mathcal{F} : I^X \to I$ ve $\mathcal{F}^* : I^X \to I$ dönüşümleri için eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, $(\mathcal{F},\mathcal{F}^*)$ ikilisine X uzayı üzerinde bir sezgisel belirtisiz süzgeç yapısı diyeceğiz.*
(S1) $\mathcal{F}(0_X)= 0$, $\mathcal{F}^*(0_X)= 1$,
(S2) $\forall\mu \in I^X$ *için* $\mathcal{F}(\mu)+\mathcal{F}^*(\mu)\leq 1$ *dir.*
(S3) $\forall\mu_1,\ \mu_2 \in I^X$ *için* $\mu_1 \leq \mu_2$ *ise*

$$\mathcal{F}(\mu_1) \leq \mathcal{F}(\mu_2),\ \mathcal{F}^*(\mu_1) \geq \mathcal{F}^*(\mu_2)\ \textit{dir.}$$

(S4) $\forall\mu_1,\ \mu_2 \in I^X$ *için*

$$\mathcal{F}(\mu_1 \cap \mu_2) \geq \mathcal{F}(\mu_1) \wedge \mathcal{F}(\mu_2),\ \mathcal{F}^*(\mu_1 \cap \mu_2) \leq \mathcal{F}^*(\mu_1) \vee \mathcal{F}^*(\mu_2)\ \textit{dir.}$$

Yukarıdaki koşulların yanı sıra $\mathcal{F}(1_X)= 1$ ve $\mathcal{F}^*(1_X)= 0$ oluyorsa $(\mathcal{F},\mathcal{F}^*)$ ikilisine X uzayı üzerinde bir "has" sezgisel belirtisiz süzgeç denir.

Tanım 3.65 *$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1^*)$ ve $(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2^*)$ sezgisel belirtisiz süzgeçleri verilsin. $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1^*) \leq (\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2^*)$ olması her $\mu \in I^X$ için*

$$\mathcal{F}_1(\mu) \leq \mathcal{F}_2(\mu)\ \textit{ve}\ \mathcal{F}_2^*(\mu) \leq \mathcal{F}_1^*(\mu)$$

eşitsizliklerinin sağlanması demektir.

Tanım 3.66 *$(\mathcal{F},\ \mathcal{F}^*)$ bir sezgisel belirtisiz süzgeç yapısı ve $r \in I_0$ olsun. $\mathcal{F}_r$ ve $\mathcal{F}_r^*$ küme ailelerini aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$\mathcal{F}_r = \left\{\lambda \in I^X : \mathcal{F}(\lambda) \geq r\right\} = \mathcal{F}^{-1}([r, 1])$$
$$\mathcal{F}_r^* = \left\{\lambda \in I^X : \mathcal{F}^*(\lambda) \leq 1 - r\right\} = (\mathcal{F}^*)^{-1}([0, 1 - r])$$

Önerme 3.67 *Tanım 3.66 da verilen $\mathcal{F}_r$ ve $\mathcal{F}_r^*$ küme ailelerini alalım. Buna göre $\mathcal{F}_r$ ve $\mathcal{F}_r^*$ Tanım 2.6 deki gibi bir önsüzgeç olur.*

İspat. (F1) $\underline{0}\in \mathcal{F}_r$ olsun. $\mathcal{F}(\underline{0}) = 0 \geq r$ olur ancak $r > 0$ olduğundan bu bir çelişki doğurur. Dolayısıyla $\underline{0}\notin \mathcal{F}_r$ dir.
Şimdi $\mathcal{F}_r^*$ için kanıtlayalım. $\underline{0}\in \mathcal{F}_r^*$ olsun. Buna göre $\mathcal{F}^*(\underline{0}) = 1 \leq 1 - r$, buradan da $r \leq 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\underline{0}\notin \mathcal{F}_r^*$ dir.
(F2) $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathcal{F}_r$ olsun. $\mathcal{F}(\lambda_1) \geq r$ ve $\mathcal{F}(\lambda_2) \geq r$ olur.

$$\mathcal{F}(\lambda_1 \cap \lambda_2) \geq \mathcal{F}(\lambda_1) \wedge \mathcal{F}(\lambda_2) \geq r$$

olur(Tanım 3.64 (S4) ten). Buradan $\mathcal{F}(\lambda_1 \cap \lambda_2) \geq r$ olduğu görülür ve böylece $\lambda_1 \cap \lambda_2 \in \mathcal{F}_r$ dir.
Diğer taraftan $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathcal{F}_r^*$ olsun. $\mathcal{F}^*(\lambda_1) \leq 1 - r$, $\mathcal{F}^*(\lambda_2) \leq 1 - r$ olur.

$$\mathcal{F}^*(\lambda_1 \cap \lambda_2) \leq \mathcal{F}^*(\lambda_1) \vee \mathcal{F}^*(\lambda_2) \leq 1 - r$$

olur(Tanım 3.64 (S4) ten). Buradan $\mathcal{F}^*(\lambda_1 \cap \lambda_2) \leq 1 - r$ olduğu görülür ve böylece $\lambda_1 \cap \lambda_2 \in \mathcal{F}_r^*$ dir.
(F3) $\lambda \in \mathcal{F}_r$ ve $\lambda \subseteq \mu$ olsun. $\mathcal{F}(\lambda) \geq r$ dir. Diğer yandan;
$\lambda \subseteq \mu \Rightarrow \mathcal{F}(\lambda) \leq \mathcal{F}(\mu)$ dir. Buradan $\mathcal{F}(\mu) \geq r$ olur. Yani $\mu \in \mathcal{F}_r$ dir.
$\mathcal{F}_r^*$ için kanıtlayalım. $\lambda \in \mathcal{F}_r^*$ ve $\lambda \subseteq \mu$ olsun. $\mathcal{F}^*(\lambda) \leq 1 - r$ dir. Diğer yandan $\lambda \subseteq \mu$ olduğundan $\mathcal{F}^*(\lambda) \geq \mathcal{F}^*(\mu)$ dir(Tanım 3.64 (S3) ten). Bunu kullanırsak; $\mathcal{F}^*(\mu) \leq \mathcal{F}^*(\lambda) \leq 1 - r$ sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla $\mathcal{F}^*(\mu) \leq 1 - r$ olur ve $\mu \in \mathcal{F}_r^*$ olduğunu elde ederiz. ∎

3.4. Sezgisel Belirtisiz Komşuluk Yapısı

Tanım 3.68 (X, τ, τ^*) *bir SBTU,* $p \in FP(X)$ *sabit bir belirtisiz nokta olsun. Her* $\alpha \in [0, 1)$ *için*

$$\mathcal{N}_p^\alpha = \{A \in I^X | \mathcal{N}_p(A) > \alpha\} = \{A \in I^X | (\exists T \in \tau^\alpha)(p \in T \subseteq A)\} \tag{3.1}$$
$$(\mathcal{N}_p^*)^\alpha = \{A \in I^X | \mathcal{N}_p^*(A) < 1 - \alpha\} = \{A \in I^X | [\exists T^* \in (\tau^*)^\alpha][p \in T^* \subseteq A]\}$$

ile birlikte tanımlanan $\mathcal{N}_p$, $\mathcal{N}_p^* : I^X \to I$ *dönüşümleri verilsin. Bu durumda* ($\mathcal{N}_p$, $\mathcal{N}_p^*$) *ikilisine* p *belirtisiz noktasının sezgisel belirtisiz komşuluk yapısı denir. Burada* $\mathcal{N}_p(A)$, A *kümesinin* p *belirtisiz noktasına komşuluk derecesini,* $\mathcal{N}_p^*(A)$ *ise komşu olmama derecesini belirtir.*

Önerme 3.69 (X, τ, τ^*) *bir SBTU,* $p \in FP(X)$ *sabit bir belirtisiz nokta olsun.* $A \in I^X$ *olmak üzere* $\mathcal{N}_p$, $\mathcal{N}_p^* : I^X \to I$ *dönüşümlerini ele alalım.* ($\mathcal{N}_p$, $\mathcal{N}_p^*$) *ikilisinin* p *belirtisiz noktasının sezgisel belirtisiz komşuluk yapısı olması için gerekli ve yeterli koşul her* $A \in I^X$ *için*

$$\mathcal{N}_p(A) = \begin{cases} \sup\left\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\right\} & , \quad p \in A \\ 0 & , \quad p \notin A \end{cases}$$
$$\mathcal{N}_p^*(A) = \begin{cases} \inf\left\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\right\} & , \quad p \in A \\ 1 & , \quad p \notin A \end{cases}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: ($\mathcal{N}_p$, $\mathcal{N}_p^*$) ikilisinin p belirtisiz noktasının sezgisel belirtisiz komşuluk yapısı olsun ve $A \in I^X$ alalım. $p \in A$ veya $p \notin A$ dır.
(i) $p \notin A$ olsun. $\mathcal{N}_p(A) > 0$ olduğunu varsayalım. Hipotezden ve Tanım 3.68 den $A \in \mathcal{N}_p^0$ olur. Buradan öyle $T \in \tau^0$ bulunur ki $p \in T \subseteq A$ dır. Buradan $p \in A$ olur ki bu varsayımımızla çelişir. Böylece $\mathcal{N}_p(A) = 0$ olur.
Diğer yandan $\mathcal{N}_p^*(A) < 1$ olsun. Tanım 3.68 den $\mathcal{N}_p^*(A) < 1 - 0$ olduğundan $\alpha = 0$ alınırsa $A \in (\mathcal{N}_p^*)^0$ elde edilir. Yani öyle $T^* \in (\tau^*)^0$ vardır ki $p \in T^* \subseteq A$ dır. Buradan $p \in A$ olur ki bu varsayımla çelişir. Böylelikle $\mathcal{N}_p^*(A) = 1$ dir.

(ii) $p \in A$ durumunda inceleyelim. Bu durumda $\mathcal{N}_p(A) = 0$ veya $\mathcal{N}_p(A) > 0$ dır.
$\mathcal{N}_p(A) = 0$ ise $\mathcal{N}_p(A) = 0 \leq \sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\}$ dır. $\sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\} = \beta > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $p \in \nu \subseteq A$ olacak şekilde $\nu \in \tau^0$ vardır. Yani $\tau(\nu) > 0$ ve $p \in \nu \subseteq A$ dır. Hipotez ve Tanım 3.68 den $A \in \mathcal{N}_p^0$ olur. Yani $\mathcal{N}_p(A) > 0$ elde ederiz ki bu ise kabulümüzle çelişir. Böylece $\mathcal{N}_p(A) = 0$ olması durumunda

$$\mathcal{N}_p(A) = \sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\} = 0$$

olduğu sonucuna varılır.
$\mathcal{N}_p(A) \neq 0$ olsun. $\mathcal{N}_p(A) = \lambda > 0$ diyelim. Keyfi $0 < \varepsilon \leq \lambda$ için $\mathcal{N}_p(A) > \lambda - \varepsilon$ dur, yani $A \in \mathcal{N}_p^{\lambda-\varepsilon}$ dur.Tanım 3.68 den $p \in T \subseteq A$ olacak şekilde $T \in \tau^{\lambda-\varepsilon}$ vardır. Yani,
$\sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\} > \lambda - \varepsilon$ olur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan; $\sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\} \geq \lambda$ olur. Buradan;

$$\sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\} \geq \mathcal{N}_p(A) \tag{3.2}$$

elde edilir. Diğer yandan $\sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\} = \gamma$ olsun. γ nın pozitif olduğu açıktır. Her $0 < \varepsilon \leq \gamma$ için $\gamma - \varepsilon < \tau(\nu)$ ve $p \in \nu \subseteq A$ olacak şekilde $\nu \in I^X$ vardır. Hipotezi kullanırsak; $A \in \mathcal{N}_p^{\gamma-\varepsilon}$, yani $\mathcal{N}_p(A) > \gamma - \varepsilon$ olduğu sonucuna varırız. Buradan $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan; $\mathcal{N}_p(A) \geq \gamma$ olur. Yani;

$$\mathcal{N}_p(A) \geq \sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\} \tag{3.3}$$

olur. (3.2) ve (3.3) den;
$\mathcal{N}_p(A) > 0$ durumunda $\mathcal{N}_p(A) = \sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\}$ olduğu sonucunu elde ederiz.
Şimdi $p \in A$ durumunda $\mathcal{N}_p^*$ için kanıtlayalım. $\mathcal{N}_p^*(A) = 1$ veya $\mathcal{N}_p^*(A) < 1$ dir.
$\mathcal{N}_p^*(A) = 1$ olsun. $\mathcal{N}_p^*(A) = 1 \geq \inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ p \in \nu \subseteq A\}$ olduğu açıktır.
$\inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ p \in \nu \subseteq A\} = \beta > 1$ olsun. Buna göre öyle $\nu \in I^X$ bulunur ki $\tau^*(\nu) < 1$ ve $p \in \nu \subseteq A$ dır. Hipotez ve Tanım 3.68 den $\tau^*(\nu) < 1 - 0 = 1 - \alpha$ seçersek $A \in (\mathcal{N}_p^*)^0$ olur. Yani $\mathcal{N}_p^* < 1 - 0 = 1$ ve böylece $\mathcal{N}_p^* < 1$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden
$\mathcal{N}_p^*(A) = 1$ durumunda $\mathcal{N}_p^* = \inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ p \in \nu \subseteq A\}$ olur.
$\mathcal{N}_p^*(A) \neq 1$ olsun. Bu durumda $\mathcal{N}_p^*(A) < 1$ dir.
$\inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ p \in \nu \subseteq A\} = \gamma$ olsun. İnfimum tanımından, $\forall \varepsilon > 0$ için öyle $\nu \in I^X$ vardır ki $p \in \nu \subseteq A$ ve $\tau^*(\nu) < \gamma + \varepsilon$ dur. Buradan, $\tau^*(\nu) < \gamma + \varepsilon = 1 - [1 - (\gamma + \varepsilon)]$ dur.

$$\begin{aligned} A \in (\mathcal{N}_p^*)^{1-(\gamma+\varepsilon)} &\Rightarrow \mathcal{N}_p^*(A) < 1 - [1 - (\gamma + \varepsilon)] \\ &\Rightarrow \mathcal{N}_p^*(A) < \gamma + \varepsilon. \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\mathcal{N}_p^*(A) \leq \gamma$ olur, yani;

$$\mathcal{N}_p^*(A) \leq \inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\} \text{ dir.} \tag{3.4}$$

Şimdi, $\mathcal{N}_p^*(A) = \lambda < 1$ olsun. $0 < \varepsilon \leq 1 - \lambda$ olacak biçimde keyfi $\varepsilon > 0$ için $\mathcal{N}_p^*(A) < \lambda + \varepsilon$ dur.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p^*(A) < 1 - [1 - (\lambda + \varepsilon)] &\Rightarrow A \in (\mathcal{N}_p^*)^{1-(\lambda+\varepsilon)} \\ &\Rightarrow \exists S \in (\tau^*)^{1-(\lambda+\varepsilon)},\ p \in S \subseteq A \\ &\Rightarrow \exists S,\ \tau^*(S) < 1 - [1 - (\lambda + \varepsilon)] \\ &\Rightarrow \exists S,\ \tau^*(S) < \lambda + \varepsilon \\ &\Rightarrow \inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\} < \lambda + \varepsilon \end{aligned}$$

Buradan, $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan;

$$\inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\} \leq \lambda = \mathcal{N}_p^*(A)$$

olur. Yani;

$$\inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\} \leq \mathcal{N}_p^*(A) \text{ dır.} \tag{3.5}$$

(3.4) ve (3.5) den; $\mathcal{N}_p^*(A) \neq 1$ durumunda $\inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ p \in \nu \subseteq A\} = \mathcal{N}_p^*(A)$ elde edilir.

($\Leftarrow$): $A \in I^X$ olmak üzere

$$\mathcal{N}_p(A) = \begin{cases} \sup\left\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq A\right\} & , \quad p \in A \\ 0 & , \quad p \notin A \end{cases}$$

şeklindeki $\mathcal{N}_p : I^X \to I$ dönüşümünü alalım. $\alpha \in [0, 1)$ için $U \in \mathcal{N}_p^\alpha$ seçelim. Yani $\mathcal{N}_p(U) > \alpha$ olsun. Hipotezden;

$$\alpha < \mathcal{N}_p(U) = \sup\left\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq U\right\}$$

yazabiliriz. Yani, $\tau(\nu) > \alpha$ ve $p \in \nu \subseteq U$ olacak biçimde bir $\nu \in I^X$ vardır. Buradan $\nu \in \tau^\alpha$ ve $p \in \nu \subseteq U$ dur. Buradan da

$$\mathcal{N}_p^\alpha \subseteq \{U \in I^X | (\exists T \in \tau^\alpha)(p \in T \subseteq A)\} \text{ dır.} \tag{3.6}$$

Diğer yandan $\alpha \in [0, 1)$ ve $p \in T \subseteq U$ olacak biçimde $T \in \tau^\alpha$ alalım. $\tau(T) > \alpha$ ve $p \in T \subseteq U$ dur. Buradan;

$$\mathcal{N}_p(U) = \sup\left\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, p \in \nu \subseteq U\right\} > \alpha \Rightarrow U \in \mathcal{N}_p^\alpha$$

olur. Yani;

$$\{U \in I^X | (\exists T \in \tau^\alpha)(p \in T \subseteq A)\} \subseteq \mathcal{N}_p^\alpha. \tag{3.7}$$

Sonuç olarak (3.6) ve (3.7) den $\mathcal{N}_p^\alpha = \{U \in I^X | (\exists T \in \tau^\alpha)(p \in T \subseteq A)\}$ elde edilir. Şimdi $\mathcal{N}_p^*$ dönüşümü için kanıtlayalım.

$$\mathcal{N}_p^*(A) = \begin{cases} \inf\left\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ p \in \nu \subseteq A\right\} & , \quad p \in A \\ 1 & , \quad p \notin A \end{cases}$$

şeklindeki $\mathcal{N}_p^* : I^X \to I$ dönüşümünü alalım. $\alpha \in [0,1)$ için $U \in (\mathcal{N}_p^*)^\alpha$ seçelim. Yani $\mathcal{N}_p^*(U) < 1-\alpha$ olsun. Hipotezden;

$$\mathcal{N}_p^*(U) = \inf\left\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ p \in \nu \subseteq U\right\} < 1-\alpha$$

yazabiliriz. Buradan; $\tau^*(\nu) < 1-\alpha$, $p \in \nu \subseteq U$ olacak biçimde $\nu \in I^X$ bulunur. $\nu \in (\tau^*)^\alpha$, $p \in \nu \subseteq U$ olur ve böylece

$$(\mathcal{N}_p^*)^\alpha \subseteq \{U \in I^X | (\exists S \in (\tau^*)^\alpha)(p \in S \subseteq A)\} \text{ dır.} \tag{3.8}$$

Diğer yönü göstermek için $\alpha \in [0,1)$ ve $p \in S \subseteq U$ olacak biçimde $S \in (\tau^*)^\alpha$ alalım.

$$\mathcal{N}_p^*(U) = \inf\left\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ p \in \nu \subseteq U\right\} < 1-\alpha$$

olur. Buradan; $U \in (\mathcal{N}_p^*)^\alpha$ olur. Yani;

$$\{U \in I^X | (\exists S \in (\tau^*)^\alpha)(p \in S \subseteq A)\} \subseteq (\mathcal{N}_p^*)^\alpha. \tag{3.9}$$

Böylece (3.8) ve (3.9) dan $(\mathcal{N}_p^*)^\alpha = \{U \in I^X | (\exists S \in (\tau^*)^\alpha)(p \in S \subseteq A)\}$ eşitliği çıkar. ■

Tanım 3.70 *(X,τ,τ^*) bir SBTU, $p \in FP(X)$ sabit bir belirtisiz nokta olsun. Her $\alpha \in [0,1)$ için*

$$\mathcal{Q}_p^\alpha = \{A \in I^X | \mathcal{Q}_p(A) > \alpha\} = \{A \in I^X | (\exists T \in \tau^\alpha)(pqT \subseteq A)\} \tag{3.10}$$
$$(\mathcal{Q}_p^*)^\alpha = \{A \in I^X | \mathcal{Q}_p^*(A) < 1-\alpha\} = \{A \in I^X | [\exists T^* \in (\tau^*)^\alpha][pqT^* \subseteq A]\}$$

ile birlikte tanımlanan $\mathcal{Q}_p$, $\mathcal{Q}_p^* : I^X \to I$ dönüşümleri verilsin. Bu durumda ($\mathcal{Q}_p$, $\mathcal{Q}_p^*$) ikilisine p belirtisiz noktasının sezgisel belirtisiz Q-komşuluk yapısı denir.

Önerme 3.71 *(X,τ,τ^*) bir SBTU, $p \in FP(X)$ sabit bir belirtisiz nokta olsun. $A \in I^X$ olmak üzere $\mathcal{Q}_p$, $\mathcal{Q}_p^* : I^X \to I$ dönüşümlerini ele alalım. ($\mathcal{Q}_p$, $\mathcal{Q}_p^*$) ikilisinin p belirtisiz noktasının sezgisel belirtisiz Q-komşuluk yapısı olması için gerekli ve yeterli koşul her $A \in I^X$ için*

$$\mathcal{Q}_p(A) = \begin{cases} \sup\left\{\tau(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\right\} & , \quad pqA \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$$
$$\mathcal{Q}_p^*(A) = \begin{cases} \inf\left\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\right\} & , \quad pqA \\ 1 & , \quad d.d. \end{cases}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. Önerme 3.69 un kanıtına benzer şekilde ispatlayalım.
($\Rightarrow$): ($\mathcal{Q}_p$, $\mathcal{Q}_p^*$) ikilisinin p belirtisiz noktasının sezgisel belirtisiz Q-komşuluk yapısı olsun ve $A \in I^X$ alalım. 3.10 deki eşitlikler sağlanır. pqA veya $p \notin A$ dır.
(i) $p \notin A$ olsun ve $\mathcal{Q}_p(A) > 0$ olduğunu varsayalım. Hipotezden ve Tanım 3.70 den $A \in \mathcal{Q}_p^0$ olur. Buradan öyle $T \in \tau^0$ bulunur ki $pqT \subseteq A$ dır. $p = x_\lambda$ noktası için;

$$\begin{aligned} pqT \subseteq A &\Rightarrow \forall x[(\lambda + T(x) > 1) \wedge T(x) \leq A(x)] \\ &\Rightarrow \lambda > 1 - T(x) \geq 1 - A(x) \\ &\Rightarrow \lambda > 1 - A(x) \\ &\Rightarrow \lambda + A(X) > 1 \\ &\Rightarrow pqA \end{aligned} \tag{3.11}$$

olur ancak bu pqA olması varsayımla çelişir. Böylece $\mathcal{Q}_p(A) = 0$ olur.
Diğer yandan $\mathcal{Q}_p^*(A) < 1$ olsun. Tanım 3.70 den $\mathcal{Q}_p^*(A) < 1 - 0$ olduğundan $\alpha = 0$ alınırsa $A \in (\mathcal{Q}_p^*)^0$ elde edilir. Yani öyle $T^* \in (\tau^*)^0$ vardır ki $pqT^* \subseteq A$ dır. Buradan 3.11 e benzer şekilde pqA elde edilir ki, bu ise varsayımla çelişir. Böylelikle $\mathcal{Q}_p^*(A) = 1$ dir.
(ii) pqA durumunda inceleyelim. Bu durumda $\mathcal{Q}_p(A) = 0$ veya $\mathcal{Q}_p(A) > 0$ dır.
$\mathcal{Q}_p(A) = 0$ ise

$$\mathcal{Q}_p(A) = 0 \leq \sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\} \text{ dır.}$$

$\sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, pq\nu \subseteq A\} = \beta > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $pq\nu \subseteq A$ olacak şekilde $\nu \in \tau^0$ vardır. Yani $\tau(\nu) > 0$ ve $pq\nu \subseteq A$ dır. Hipotez ve Tanım 3.70 den $A \in \mathcal{Q}_p^0$ olur. Yani $\mathcal{Q}_p(A) > 0$ elde ederiz ki, bu ise kabulümüzle çelişir. Böylece $\mathcal{Q}_p(A) = 0$ olması durumunda

$$\mathcal{Q}_p(A) = \sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\} = 0$$

olduğu sonucuna varılır.
$\mathcal{Q}_p(A) \neq 0$ olsun. $\mathcal{Q}_p(A) = \lambda > 0$ diyelim. Her $0 < \varepsilon \leq \lambda$ için $\mathcal{Q}_p(A) > \lambda - \varepsilon$ dur, yani $A \in \mathcal{Q}_p^{\lambda-\varepsilon}$ dur. Tanım 3.70 den $pqT \subseteq A$ olacak şekilde $T \in \tau^{\lambda-\varepsilon}$ vardır. Yani,

$$\sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\} > \lambda - \varepsilon$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan; $\sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, pq\nu \subseteq A\} \geq \lambda$ olur. Buradan;

$$\sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\} \geq \mathcal{Q}_p(A) \tag{3.12}$$

elde edilir. Diğer yandan $\sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X, pq\nu \subseteq A\} = \gamma$ olsun. γ nın pozitif olduğu açıktır. Her $0 < \varepsilon \leq \gamma$ için $\gamma - \varepsilon < \tau(\nu)$ ve $pq\nu \subseteq A$ olacak şekilde $\nu \in I^X$ vardır. Hipotezi kullanırsak; $A \in \mathcal{Q}_p^{\gamma-\varepsilon}$, yani $\mathcal{Q}_p(A) > \gamma - \varepsilon$ olduğu sonucuna varırız. Buradan $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan; $\mathcal{Q}_p(A) \geq \gamma$ olur. Yani;

$$\mathcal{Q}_p(A) \geq \sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\} \tag{3.13}$$

olur. (3.12) ve (3.13) ten; $\mathcal{Q}_p(A) > 0$ durumunda

$$\mathcal{Q}_p(A) = \sup\{\tau(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\}$$

olduğu sonucunu elde ederiz.
Şimdi pqA durumunda $\mathcal{Q}_p^*$ için kanıtlayalım. $\mathcal{Q}_p^*(A) = 1$ veya $\mathcal{Q}_p^*(A) < 1$ dir.
$\mathcal{Q}_p^*(A) = 1$ olsun.

$$\mathcal{Q}_p^*(A) = 1 \geq \inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\}$$

olduğu açıktır.
$\inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\} = \beta > 1$ olsun. Buna göre öyle $\nu \in I^X$ bulunur ki $\tau^*(\nu) < 1$ ve $pq\nu \subseteq A$ dır. Hipotez ve Tanım 3.70 den $\tau^*(\nu) < 1-0 = 1-\alpha$ seçersek $A \in (\mathcal{Q}_p^*)^0$ olur. Yani $\mathcal{Q}_p^* < 1-0 = 1$ ve böylece $\mathcal{Q}_p^* < 1$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden $\mathcal{Q}_p^*(A) = 1$ durumunda

$$\mathcal{Q}_p^* = \inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\}$$

olur.
$\mathcal{Q}_p^*(A) \neq 1$ olsun. Bu durumda $\mathcal{Q}_p^*(A) < 1$ dir.
$\inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\} = \gamma$ olsun. İnfimum tanımından, her $\varepsilon > 0$ için öyle $\nu \in I^X$ vardır ki $pq\nu \subseteq A$ ve $\tau^*(\nu) < \gamma + \varepsilon$ dur. Buradan $\tau^*(\nu) < \gamma + \varepsilon = 1 - [1 - (\gamma + \varepsilon)]$ dur.

$$\begin{aligned} A \in (\mathcal{Q}_p^*)^{1-(\gamma+\varepsilon)} &\Rightarrow \mathcal{Q}_p^*(A) < 1 - [1 - (\gamma + \varepsilon)] \\ &\Rightarrow \mathcal{Q}_p^*(A) < \gamma + \varepsilon \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan; $\mathcal{Q}_p^*(A) \leq \gamma$ olur yani;

$$\mathcal{Q}_p^*(A) \leq \inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\}. \tag{3.14}$$

Şimdi, $\mathcal{Q}_p^*(A) = \lambda < 1$ olsun. $0 < \varepsilon \leq 1 - \lambda$ olacak biçimde keyfi $\varepsilon > 0$ için $\mathcal{Q}_p^*(A) < \lambda + \varepsilon$ dur.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_p^*(A) < 1 - [1 - (\lambda + \varepsilon)] &\Rightarrow A \in (\mathcal{Q}_p^*)^{1-(\lambda+\varepsilon)} \\ &\Rightarrow \exists S \in (\tau^*)^{1-(\lambda+\varepsilon)},\ pqS \subseteq A \\ &\Rightarrow \exists S,\ \tau^*(S) < 1 - [1 - (\lambda + \varepsilon)] \\ &\Rightarrow \exists S,\ \tau^*(S) < \lambda + \varepsilon \\ &\Rightarrow \inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X, pq\nu \subseteq A\} < \lambda + \varepsilon \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan;

$$\inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\} \leq \lambda = \mathcal{Q}_p^*(A)$$

olur. Yani;

$$\inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\} \leq \mathcal{Q}_p^*(A). \tag{3.15}$$

(3.14) ve (3.15) den; $\mathcal{Q}_p^*(A) \neq 1$ durumunda $\inf\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X, pq\nu \subseteq A\} = \mathcal{Q}_p^*(A)$ elde edilir.

($\Leftarrow$): $A \in I^X$ olmak üzere $\mathcal{Q}_p(A) = \begin{cases} \sup\left\{\tau(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\right\} & , \quad pqA \\ 0 & , \quad p \not{q} A \end{cases}$

şeklindeki $\mathcal{Q}_p : I^X \to I$ dönüşümünü alalım. $\alpha \in [0,1)$ için $U \in \mathcal{Q}_p^\alpha$ seçelim. Yani $\mathcal{Q}_p(U) > \alpha$ olsun. Hipotezden;

$$\alpha < \mathcal{Q}_p(U) = \sup\left\{\tau(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq U\right\}$$

yazılabilir. Yani, $\tau(\nu) > \alpha$ ve $pq\nu \subseteq U$ olacak biçimde $\nu \in I^X$ vardır. Buradan $\nu \in \tau^\alpha$ ve $pq\nu \subseteq U$ dur. Buradan da;

$$\mathcal{Q}_p^\alpha \subseteq \{U \in I^X | (\exists T \in \tau^\alpha)(pqT \subseteq A)\}. \tag{3.16}$$

Diğer yandan $\alpha \in [0,1)$ ve $pqT \subseteq U$ olacak biçimde $T \in \tau^\alpha$ alalım. $\tau(T) > \alpha$ ve $pqT \subseteq U$ dur. Buradan;

$$\mathcal{Q}_p(U) = \sup\left\{\tau(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq U\right\} > \alpha \Rightarrow U \in \mathcal{Q}_p^\alpha$$

olur. Yani;

$$\{U \in I^X | (\exists T \in \tau^\alpha)(pqT \subseteq A)\} \subseteq \mathcal{Q}_p^\alpha \text{ dir.} \tag{3.17}$$

Sonuç olarak (3.16) ve (3.17) den $\mathcal{Q}_p^\alpha = \{U \in I^X | (\exists T \in \tau^\alpha)(pqT \subseteq A)\}$ elde edilir. Şimdi $\mathcal{Q}_p^*$ dönüşümü için kanıtlayalım.

$$\mathcal{Q}_p^*(A) = \begin{cases} \inf\left\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq A\right\} & , \quad pqA \\ 1 & , \quad p \not{q} \mu \end{cases}$$

şeklindeki $\mathcal{Q}_p^* : I^X \to I$ dönüşümünü alalım. $\alpha \in [0,1)$ için $U \in (\mathcal{Q}_p^*)^\alpha$ seçelim. Yani $\mathcal{Q}_p^*(U) < 1 - \alpha$ olsun. Hipotezden;

$$\mathcal{Q}_p^*(U) = \inf\left\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq U\right\} < 1 - \alpha$$

yazabiliriz. Buradan; $\tau^*(\nu) < 1 - \alpha$, $pq\nu \subseteq U$ olacak biçimde $\nu \in I^X$ bulunur. $\nu \in (\tau^*)^\alpha$, $pq\nu \subseteq U$ olur ve böylece

$$(\mathcal{Q}_p^*)^\alpha \subseteq \{U \in I^X | (\exists S \in (\tau^*)^\alpha)(pqS \subseteq A)\} \text{ dır.} \tag{3.18}$$

Diğer yönü göstermek için $\alpha \in [0,1)$ ve $pqS \subseteq U$ olacak biçimde $S \in (\tau^*)^\alpha$ alalım.

$$\mathcal{Q}_p^*(U) = \inf\left\{\tau^*(\nu) : \nu \in I^X,\ pq\nu \subseteq U\right\} < 1 - \alpha$$

olur. Buradan; $U \in (\mathcal{Q}_p^*)^\alpha$ olur. Yani;

$$\{U \in I^X | (\exists S \in (\tau^*)^\alpha)(pqS \subseteq A)\} \subseteq (\mathcal{Q}_p^*)^\alpha \text{ dir.} \tag{3.19}$$

Böylece (3.18) ve (3.19) dan

$$(\mathcal{Q}_p^*)^\alpha = \{U \in I^X | (\exists S \in (\tau^*)^\alpha)(pqS \subseteq A)\}$$

eşitliği elde edilir. ∎

4. SONUÇ

Sezgisel belirtisiz topolojinin sezgisel açıklık derecelendirmesi şeklindeki genellemesi ve belirtisiz süzgeçlerin bir derecelendirme dönüşümü olarak düşünüldüğü I-süzgeç kavramı detaylı bir şekilde incelenmiş ve bu kavramlardan yararlanılarak sezgisel belirtisiz komşuluk yapısı ve sezgisel belirtisiz Q-komşuluk yapısı kavramları tanımlanmıştır.

5. KAYNAKLAR

ABBAS, S.E. 2004. Intuitionistic Supra Fuzzy Topological Spaces. *Chaos Solitons and Fractals,* 21: 1205-1214.

ATANASSOV, K.T. 1983. Intuitionistic Fuzzy Sets. in: VII ITJKR's Session, Sofia.

ATANASSOV, K.T. 1988. Review and new results on intuitionistic fuzzy sets. preprint IM-MFAIS: 1-88, Sofia.

CHANG, C.L. 1968. Fuzzy Topological Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 24: 182-190.

CHATTOPADHYAY, K.C., HAZRA, R.N. and SAMANTA, S.K., 1992. Gradation of openness: fuzzy topology. *Fuzzy Sets and Systems*, 49 (27): 237-242.

COKER, D. 1996. An introduction to fuzzy subspaces in intuitionistic fuzzy topological spaces. *Journal Fuzzy Math*, 4: 749-764.

COKER, D. and DEMIRCI, M. 1995. On intuitionistic fuzzy points. *Notes on IFS,* 1 (2): 79-84.

COKER, D. and GULOGLU, M. 2005. Convergence in I-fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 151: 615-623.

COKER, D. 1997. An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets Syst.,* 88: 81-89.

DE PRADA, M.A. and ARANGUREN, M.S. 1988. Fuzzy Filters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 129: 560-568.

EKLUND, P. and GAHLER, W. 1988a. Basic notions for fuzzy topology I. *Fuzzy Sets and Systems*, 26: 333-356.

EKLUND, P. and GAHLER, W. 1988b. Basic notions for fuzzy topology II. *Fuzzy Sets and Systems,* 27: 171-195.

GHANIM, M.H.,TANTAWY, O.A. and SELIM, F.M. 2000. Gradation of supra-openness. *Fuzzy Sets and Systems,* 109 (2): 245-250.

HAZRA, R.N., SAMANTA, S.K. and CHATTOPADYAY, K.C. 1992. Fuzzy topology redefined. *Fuzzy Sets and Systems,* 45: 79-82.

HOHLE, U. and SŎSTAK, A.P. 1999. Axiomatic foundations of fixed-basis topology. in: U. Hohle, S.E. Rodabaugh (Eds.), *The Handbooks of Fuzzy Sets Series*, Vol. 3, Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology, and Measure Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

KUBIAK,T. 1985. On fuzzy topologies. *Ph.D. Thesis*, A. Mickiewicz, Poznan.

LEE, B.Y., PARK, J.H. and PARK, B.H. 1993. Fuzzy convergence structures. *Fuzzy Sets and Systems,* 56: 309-315.

LOWEN, R. 1976. Convergence in fuzzy topological spaces. in: Gen. Topology rel. mod. Anal. Alg. IV (Proc. 4th Prague Topology Symp.) part B, *Soc. Czech. Math. Phys.*, Praha, 1977: 254-259.

LUPIAŇEZ, F.G. 2005. Quasicoincidence For Intuitionistic Fuzzy Points. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005 (10): 1539-1542.

LUPIAŇEZ, F.G. 2006. Nets and filters in intuitionistic fuzzy topological spaces. *Journal Information Sciences*, 176 (16): 2396-2404.

MONDAL, T.K. and SAMANTA, S.K. 2002. Generalized intuitionistic fuzzy sets. *J. Fuzzy Math.*, 10: 839-861.

MONDAL, T.K. and SAMANTA, S.K. 2002. On intuitionistic gradation of openness. *Fuzzy Sets and Systems*, 131 (3): 323-336.

PAO-MING, P. and YING-MING, L. 1980. Fuzzy topology. I. Neighborhood structures at a fuzzy point and Moore-Smith convergence. *J. Math. Anal. Appl.*, 76: 571-599.

PARK, J.H. and PARK, J.K. 2004. Hausdorffness on generalized intuitionistic fuzzy filters. *Information Science,* 168b: 95-110.

RAMADAN, A.A. 1992. Smooth topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 48 (3): 371-375.

RAMADAN, A.A. and ABD EL-LATIF, A.A. 2008. Supra Fuzzy Convergence of Fuzzy Filters. *Bull. Korean Math. Soc.*, 45 (2): 207-220.

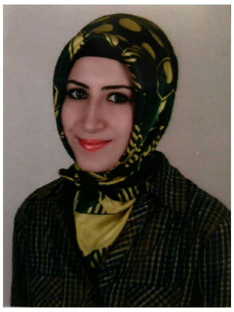
RAMAKRISHNAN, P.V. and NAYAGAM, V.L.G. 2002. Hausdorff interval valued fuzzy filters. *J. Korean Math.*, Soc. 39: 137-148.

SŎSTAK, A.P. 1985. On a fuzzy topological structure. *Rend. Circ. Mat. Palermo*: Suppl. Ser. II: 89-103.

SŎSTAK, A.P. 1989. On the neighborhood structure of fuzzy topological spaces. *Zb. Rad.*, 4: 7-14.

WANG, G.J. and HE, Y.Y. 2000. Intuitionistic fuzzy sets and L-fuzzy sets. *Fuzzy Sets Syst.*, 110: 271-274.

ÖZGEÇMİŞ



Elif Tufan 1990 yılında Ankara'nın Çankaya ilçesinde doğdu. İlköğretim ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2008 yılında Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans öğreniminden 2012 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. 2014 yılında ise Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında lisansüstü öğrenimine başladı.