T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAYIF SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLESİNİN SİNGÜLERLİK DERECESİNE BAĞLI DAVRANIŞI ÜZERİNE

Medine DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAYIF SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLESİNİN SİNGÜLERLİK DERECESİNE BAĞLI DAVRANIŞI ÜZERİNE

Medine DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 31/08/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Doç. Dr. Melih ERYIĞIT

Yrd. Doç. Dr. Zafer ŞANLI

ÖZET

ZAYIF SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLESİNİN SİNGÜLERLİK DERECESİNE BAĞLI DAVRANIŞI ÜZERİNE

Medine DEMİR

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. İlham ALİYEV
Ağustos 2016, 29 sayfa

Bu Tez çalışmasında, klasik Gauss-Weierstrass ve Abel-Poisson yarıgruplarının her ikisini de genelleştiren bir yarıgrup (beta-yarıgrup) yardımıyla, iki parametreye bağlı integral operatörler ailesi tanımlanıyor. Klasik Bessel ve Flett potansiyellerini genelleştiren bu integral operatörler ailesinin, parametrelerden biri sıfıra giderken yaklaşım özellikleri inceleniyor. Fonksiyonların Lipschitz noktalarında, yaklaşım hızının Lipschitz derecesine bağlı olmadığı görülür.

ANAHTAR KELİMELER: Bessel potansiyelleri, Flett potansiyelleri, Poisson yarıgrubu, Gauss-Weierstrass yarıgrubu, beta-yarıgrup, yaklaşım, Lipschitz noktası.

JÜRİ: Prof. Dr. İlham ALİYEV (Danışman)
Doç. Dr. Melih ERYIĞIT
Yrd. Doç. Dr. Zafer ŞANLI

ABSTRACT

ON BEHAVIOUR OF THE FAMILY OF WEAK SINGULAR INTEGRAL OPERATORS WITH RESPECT TO DEGREE OF SINGULARITY

Medine DEMİR

MSc Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. İlham ALİYEV
August 2016, 29 pages

In the present thesis, the family of integral operators (so-called beta-semigroup) generalizing classical Gauss-Weierstrass and Abel-Poisson semigroups are introduced. By making use of this beta-semigroup, a two-parameter family of integral operators is defined. These integral operators generalize the classical Bessel and Flett potentials. We investigate the approximation properties of this family of integral operators when one of the parameters tends to zero. We show that the order of approximation at the Lipschitz points of the function does not depend on the Lipschitz degree.

KEYWORDS: Bessel potentials, Flett potentials, Poisson semigroup, Gauss-Weierstrass semigroup, beta-semigroup, approximation, Lipschitz point.

COMMITTEE: Prof. Dr. İlham ALİYEV (Supervisor)
Assoc. Prof. Dr. Melih ERYIĞIT
Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Harmonik Analizin temel teknik araçlarından biri potansiyel tipli integral operatörlerdir. Bunlar içinde en ünlüleri klasik Riesz, Bessel, Flett potansiyelleri ve onların parabolik versiyonlarıdır (Johnson 1973, Rubin 1986, 1987, 1998, Samko vd 1993, Samko 2001, Stein 1970). Fourier dönüşümü dilinde, Riesz, Bessel ve Flett potansiyelleri, sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$$F(I^{\alpha}\varphi)(x) = |x|^{-\alpha} .F(f)(x), (x \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < n)$$
$$F(J^{\alpha}\varphi)(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-\alpha/2} \cdot F(f)(x), (0 < \alpha < \infty)$$
$$F(\mathcal{F}^{\alpha}\varphi)(x) = (1 + |x|)^{-\alpha} \cdot F(f)(x), (0 < \alpha < \infty)$$

Riesz potansiyeli, Laplace operatörü diye adlandırılan $(-\Delta) = -\sum_{k=1}^{n} \partial^2/\partial x_k^2$ operatörünün negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanıyor. Benzer şekilde, Bessel potansiyelleri de, I birim operatör olmak üzere, $(I - \Delta)$ operatörünün negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanmaktadır. Riesz ve Bessel potansiyelleri ve onların çeşitli benzerleri ile ilgili araştırma konularından biri de, α parametresi sıfıra sağdan yaklaştığında, $I^{\alpha}f$ ve $J^{\alpha}f$ potansiyellerinin yaklaşım özelliklerini incelemektir. Bu konu ile ilgili Aliev vd (2006), Gadjiev vd (2007), Gal (2011), Kurokawa (1981), Sezer (2009), Uyhan vd (2006) ve başka matematikçilerin çalışmaları bulunmaktadır.

Bu çalışmada, Bessel ve Flett potansiyellerinin ikisini de genelleştiren ve iki parametreye bağlı integral operatörler ailesi ele alınarak, parametrelerden biri sıfıra giderken, bu operatörler ailesinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, Aliev vd (2006) ve Sezer'in (2009) makalelerindeki sonuçları genelleştiriyor. Ayrıca, Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar için, söz konusu integral operatörler ailesinin fonksiyona yaklaşım hızı üstten tahmin edilmiştir.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1 , \ldots , x_n) \ ; \ x_k \in \mathbb{R}\}$ (n boyutlu Öklid uzayı)
$\lvert x \rvert$	$\lvert x \rvert = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ (x vektörünün normu)
$L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$	Lebesque uzayları
$C_0 \equiv C_0(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$'de sürekli olup, $\lvert x \rvert \to \infty$ için limiti sıfır olan fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{F}\,(f) \equiv f^\wedge$	f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$\mathcal{F}^{-1}\,(f) \equiv f^\vee$	f fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü
$-\Delta$	$-\Delta = -\sum\limits_{k=1}^{n} \partial^2/\partial x_k^2$ (Laplace operatörü)
$M\varphi$	$\varphi \in L_p$ fonksiyonuna uygun Hardy-Littlewood maksimal fonksiyon
$\Gamma(\alpha)$	Eulerin Gamma fonksiyonu
$I^\alpha f$	f'in, α mertebeden Riesz potansiyeli
$J^\alpha f$	f'in, α mertebeden Bessel potansiyeli
$J^\alpha_\beta f$	f'in, iki parametreye bağlı potansiyeli

Kısaltmalar:

$h.h.x$	hemen hemen her x

1. GİRİŞ

Bu Tez çalışmasında Zayıf Singüler İntegral Operatör dendiğinde, klasik Bessel potansiyelleri, Riesz potansiyelleri, Flett potansiyelleri ve onların çeşitli genelleşmeleri düşünülmektedir. Bu integral operatörler girişim(konvolusyon) tipli operatörler olup, çekirdekleri koordinat başlangıcında zayıf singülariteye sahiptir. Yani, $\omega(x)$, $(x \in \mathbb{R}^n)$ söz konusu çekirdek ise, $|x| \to 0$ için $|\omega(x)|$ fonksiyonu $c.\frac{1}{|x|^\lambda}$, $(0 < \lambda < n)$ gibi davranıyor (dolayısıyla, sıfır noktasının komşuluğunda integrallenen oluyor).

Potansiyel tipli integral operatörler analizde ve uygulamalarında özel öneme sahipler. Bundan dolayı, bu tipli operatörler, çeşitli yönleriyle incelenmişler ve ilginç özellikleri elde edilmiştir. Örneğin, potansiyel tipli operatörlerin $L_p(\mathbb{R}^n)$ ve ağırlıklı L_p uzaylarındaki davranışları incelenerek, ünlü Sobolev uzaylarına uygulamalar bulunmuştur. Matematik literatürde, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Bessel potansiyelleri $J^\alpha f$, $(0 < \alpha < \infty)$ ve Riesz potansiyelleri de $I^\alpha f$, $(0 < \alpha < \frac{n}{p})$ ile gösterilir. Bu potansiyellerin, α parametresine göre davranışı da matematikçilerin ilgisini çekmektedir. Örneğin, tek değişkenli fonksiyonlar için tanımlanmış ve Riemann-Liouville Kesirsel integrali denilen

$$(I_0^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \; (0 < \alpha < 1; \; 0 < x < \infty)$$

integrallerinin α parametresine göre davranışı ile ilgili aşağıdaki sonuçlar bilinmektedir (Samko vd 1993).

1. $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} ||I_0^\alpha \varphi - I_0^{\alpha_0} \varphi||_p = 0, \varphi \in L_p(0,\infty); 1 < p < \infty)$;
2. $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} ||I_0^\alpha \varphi - \varphi||_p = 0$;
3. $\varphi \in L_1(0,\infty)$ ise, φ'nın her Lebesque noktası x için $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} (I_0^\alpha \varphi)(x) = \varphi(x)$

sağlanır.

Çok değişkenli durumda, bizim bildiğimize göre, bu konuda ilk çalışmalar Takahide Kurokawa'ya (1981) aittir. Kurokawa, Riesz ve Bessel potansiyellerinin çekirdeklerinin sıfır noktasındaki davranışını kullanarak, bu potansiyellerin, $\alpha \to 0^+$ için yaklaşım özelliklerini incelemiştir.Gadjiev vd (2007) makalesinde, aynı problem, başka bir metod kullanılarak araştırılmış ve fonksiyonun süreklilik modülü dilinde yaklaşım hızı incelenmiştir. Söz konusu makalede elde edilmiş sonuçların bazıları şöyledir:

Teorem 1.1 *$f \in L_p$, $(1 \le p < \infty)$ olsun.*

1. *Eğer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ise, $\lim\limits_{\alpha \to 0}(I^\alpha f)(x_0) = l$ olur;*
2. *Eğer f reel değerli fonksiyon ve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ ise, o halde, $\lim\limits_{\alpha \to 0}(I^\alpha f)(x_0) = \pm\infty$ olur;*
3. *$C(\mathbb{R}^n)$ sürekli fonksiyonlar uzayı ve $f \in L_p \cap C(\mathbb{R}^n)$ olsun. O halde, her $K \subset \mathbb{R}^n$*

kompaktı için $\lim_{\alpha\to 0} ||I^{\alpha}f - f||_{C(K)} = 0$ *olur.*

Teorem 1.2 $f \in L_p$*,* $1 \le p < \infty$ *olsun. O halde ,* $h.h.x \in \mathbb{R}^n$ *için* $\lim_{\alpha\to 0}(I^{\alpha}f)(x) = f(x)$*.*

Teorem 1.3 $K \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt ve* $\omega_f(\delta) = \sup_{|y|<\delta} ||f(x+y) - f(x)||_{C(K)}$ *fonksiyonu* f*'in süreklilik modülü olsun. Eğer* $f \in L_p \cap C(K)$ *ise, o halde, öyle* $c > 0$ *vardır ki,* $\alpha \to 0^+$ *için* $||I^{\alpha}f - f||_{C(K)} \le c.\omega_f(\alpha)$ *sağlanır.*

Aliev vd (2006) makalesinde bir özel yarıgrubun doğurduğu integral operatörler ailesinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir ve buradan, özel halde, hem klasik Riesz ve Bessel potansiyellerinin ve hem de genelleşmiş kayma operatörünün doğurduğu Riesz ve Bessel potansiyellerinin , $\alpha \to 0^+$ için yaklaşım özellikleri elde edilmiştir.

Sezer (2009) makalesinde Flett potansiyellerinin yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Çeşitli makalelerde, parabolik Riesz ve parabolik Bessel potansiyellerinin yaklaşım özelliklerine bakılmıştır (Bayrakci ve Sezer 2011, Uyhan vd 2006).

Gal (2011) makalesinde Picard singüler integrallerinin, Poisson-Cauchy tipli singüler integrallerinin ve Gauss-Weierstrass singüler integralinin doğurduğu zayıf singülariteye sahip operatörler ailesinin, α parametresi sıfıra giderken yaklaşım özelliklerini ele almıştır.

Biz bu çalışmamızda, hem Poisson ve hem de Gauss-Weierstrass yarıgruplarının her ikisini de genelleştiren bir yarıgrup (beta-yarıgrup) yardımıyla tanımlanan iki parametreye bağlı integraller ailesinin, parametrelerden biri sıfıra giderken yaklaşım özelliğini inceledik. Bu integraller ailesi, hem ünlü Bessel potansiyellerini ve hem de Flett potansiyellerini genelleştiriyor. Çalışmamızdaki önemli sonuçlardan biri de, fonksiyonun Lipschitz noktasında, potansiyeller ailesinin yaklaşım hızının tahmini ile ilgilidir.

Tez çalışması, yedi bölümden ve Kaynaklar kısmından ibarettir. 2.-6. Bölümlerde yardımcı tanım, kavram ve bilgiler toplanmış ve esas sonuçlar Bölüm 7'de verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER VE GÖSTERİMLER

Bu Bölümde, Tez boyuca kullanılan temel gösterim ve kavramlar tanıtılacaktır.

$\mathbb{R}^n$, $n-$ boyutlu Öklid uzayı olmak üzere, $L_p = L_p\mathbb{R}^n)$ ile ölçülebilir ve$||f||_p = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} < \infty$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayını göstereceğiz. Burada , $1 \leq p < \infty$, $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $dx = dx_1, dx_2, ..., dx_n$ 'dir.

$C(\mathbb{R}^n)$ ile sürekli fonksiyonlar uzayını ve $||f||_C$ ile de $f \in C(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun normunu gösteriyoruz:

$$||f||_C = \sup_{\mathbb{R}^n} |f(x)|$$

$C(K)$ ile, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktında sürekli fonksiyonlar uzayını göstereceğiz.

$C_0 \equiv C_0(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$'de sürekli olup, $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan fonksiyonlar uzayını gösteriyoruz.

Eğer bir $\varphi(x)$, $(x \in \mathbb{R}^n)$ fonksiyonu, $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ normuna bağlı ise, φ'ye bir radial fonksiyon diyeceğiz. Örneğin, $\varphi(x) = e^{-|x|^\beta}$ bir radial fonksiyondur.

Γ ile Eulerin gamma fonksiyonunu göstereceğiz:

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \ (0 < \alpha < \infty)$$

Aşağıda, her yerde, $h.h.x$ ifadesi , "$hemen\ hemen\ her\ x$" demektir.Bir özellik, $h.h.x \in \mathbb{R}^n$ için sağlanırsa, bu o demek oluyor ki, bu özelliğin sağlanmadığı noktalar kümesinin ölçümü sıfırdır.

$C(\alpha) = O(1)$, $(\alpha \to 0^+)$ ifadesi, $C(\alpha)$ fonksiyonunun, sıfırın bir sağ komşuluğunda sınırlı bir fonksiyon olduğu anlamına gelmektedir.

İleri bölümlerde kullanacağımız eşitsizliklerden biri, ünlü Hölder eşitsizliğidir:

$f \in L_p$, $g \in L_q$, $1 \leq p, q \leq \infty$ ise, $f.g \in L_1$ olup aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx \right| \leq ||f||_p \cdot ||g||_q \ , \ (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$

Tezde kullanılacak olan diğer kavram, tanım ve bilgiler uygun bölümlerde sırası geldiğinde verilecektir.

3. POİSSON İNTEGRALİ VE ÖZELLİKLERİ

Biz, bu bölümde, Riesz ve Bessel potansiyellerinin incelenmesinde yardımcı araç olan ve Harmonik Analizin çeşitli problemlerinde geniş uygulama alanı bulan Poisson çekirdeğini ve integralini (yarıgrubunu) tanıtacağız. İleriki bölümlerde, Poisson integralini genelleyen başka bir yarıgrup tanımlayacak ve potansiyellerin yaklaşım özelliklerini incelemek için bu yarıgrupları kullanacağız.

$\mathbb{R}^n$ $n-$ boyutlu öklid uzayı olmak üzere, $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0\}$ olsun. Bu durumda $(t; y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ olmak üzere, $e^{-2\pi|t|y}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü Poisson çekirdeği olarak adlandırılır, yani;

$$P_y(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t\cdot x} e^{-2\pi|t|y} dt. \tag{3.1}$$

Burada,

$$t = (t_1, ..., t_n)\,;\ |t| = \sqrt{t_1^2 + ... + t_n^2}\,;\ \ dt = dt_1...dt_n\,;\ \ t\cdot x = t_1x_1 + ... + t_nx_n.$$

Lemma 3.1 *Stein ve Weiss (1971)Yukarıda tanımlanmış* $P_y(x)$ *fonksiyonunun açık ifadesi aşağıdaki gibidir:*

$$P_y(x) = c_n \cdot \frac{y}{\left(|x|^2 + |y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}\ ;\ \ c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\ ; \tag{3.2}$$

Burada, $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ *ve* Γ*, Eulerin gamma fonksiyonudur.*

İspat. Her $\gamma > 0$ için

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} \cdot e^{i\gamma y} dy = e^{-\gamma}$$

olduğu biliniyor. Ayrıca

$$\frac{1}{1+y^2} = \int_0^{\infty} e^{-\left(1+y^2\right)u} du$$

eşitliğini yukarıdaki formülde dikkate alırsak,

$$e^{-\gamma} \ = \ \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma y} \cdot \left[\int_0^{\infty} e^{-\left(1+y^2\right)u} du\right] dy = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma y} \cdot e^{-y^2 u} dy\right) du \tag{3.3}$$

olur.Ayrıca iyi bilinen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} \cdot e^{-2\pi i y\gamma} dy = e^{-\pi\gamma^2} \tag{3.4}$$

eşitliğinde, y yerine $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}} \cdot Y$ koyarsak

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-uY^2} \cdot e^{-2\pi i Y \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}}\gamma} dY = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u}} \cdot e^{-\pi\gamma^2}$$

olur. $\gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{-2\pi} s$ koyarsak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-uY^2} \cdot e^{iYs} dY = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-\pi \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot s^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot e^{\frac{-s^2}{4u}}.$$

Başka ifadeyle,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma Y} \cdot e^{-uY^2} dY = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot e^{\frac{-\gamma^2}{4u}}.$$

Bunu (3.3)'te koyarsak ,

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{u}} \cdot e^{-\frac{\gamma^2}{4u}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \cdot e^{-\frac{\gamma^2}{4u}} du. \tag{3.5}$$

(3.5)'i kullanırsak,

$$P_y(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t \cdot x} \cdot e^{-2\pi |t| Y} dt = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t \cdot x} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \cdot e^{-\frac{4\pi^2 |t|^2 \cdot Y^2}{4u}} du \right) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t \cdot x} \cdot e^{-\frac{\pi^2 |t|^2 \cdot Y^2}{u}} dt \right) du. \tag{3.6}$$

Yukarıda yazdığımız (3.4) formülünün n boyutlu versiyonu şöyledir:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot t} \cdot e^{-\pi \cdot |t|^2} dt = e^{-\pi \cdot |x|^2} \quad , \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

Bu eşitlikte, t yerine $\sqrt{\frac{\pi}{u}}yt$; dt yerine $\left(\sqrt{\frac{\pi}{u}}y\right)^n dt$ ve x yerine de $\sqrt{\frac{u}{\pi}}\cdot\frac{1}{y}\cdot x$ koyarsak ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi it\cdot x}\cdot e^{-\frac{\pi^2|t|^2\cdot Y^2}{u}}dt=\left(\sqrt{\frac{u}{\pi}}\right)^n\frac{1}{y^n}e^{-\pi\cdot\frac{u}{\pi}\cdot\frac{1}{y^2}|x|^2}=\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\cdot u^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{y^n}\cdot e^{-\frac{u}{y^2}|x|^2}$$

olur.

O halde, (3.6)'dan

$$P_y(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{y^n}\cdot\int_0^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\cdot u^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-u\left(\frac{1}{y^2}|x|^2\right)}du$$

$$=\frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{1}{y^n}\int_0^\infty e^{-u\cdot\left(1+\frac{|x|^2}{y^2}\right)}\cdot u^{\frac{n-1}{2}}du. \tag{3.7}$$

Şimdi $\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-u}\cdot u^{s-1}du,\ (s>0)$ olduğunu kullanacağız. Bunun için (3.7)'de u yerine, $\frac{1}{1+\frac{|x|^2}{y^2}}\cdot u$ ve du yerine de $\frac{1}{1+\frac{|x|^2}{y^2}}du$ koyarsak ,

$$P_y(x)=\frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{1}{y^n}\left(\frac{1}{1+\frac{|x|^2}{y^2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\int_0^\infty e^{-u}\cdot u^{\frac{n+1}{2}-1}du$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\left(\frac{y^2}{y^2+\frac{|x|^2}{y^2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{1}{y^n}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{y}{\left(y^2+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

elde edilir. □

Şimdi, $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1\leq p<\infty)$ olmak üzere, f ile P_y çekirdeğinin girişimine (konvolusyon) bakalım:

$$u(x;y)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\cdot P_y(t)\,dt;\quad (y>0,\ x\in\mathbb{R}^n). \tag{3.8}$$

Buradaki $u(x;y)$ fonksiyonuna f 'in Poisson integrali denir.

Poisson çekirdeğinin ve integralinin aşağıdaki özellikleri vardır (Stein 1970, Rubin

1996):

1. Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve her $y > 0$ için $P_y(x) > 0$;
2. Her $y > 0$ için $\int\limits_{\mathbb{R}^n} P_y(x)\,dx = 1$ dir.

   Sonuncuyu kanıtlamanın en kolay yolu aşağıdaki gibidir:

   $$P_y(x) = \left(e^{-2\pi|t|y}\right)^{\wedge}(x)$$

   olduğundan, Ters Fourier dönüşümü kullanılırsa, her $t \in \mathbb{R}^n$ için

   $$e^{-2\pi|t|y} = \left(P_y(x)\right)^{\vee}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P_y(x)\,e^{2\pi itx}dx$$

   olur.

   Burada, t yerine sıfır vektör koyarsak, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} P_y(x)\,dx = 1$ elde edilir.
3. $P_y(x)$, $(-n)$ dereceden homojendir, yani *her* $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için $P_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \cdot P_1\left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot x\right)$ eşitliği sağlanır. Gerçekten,

   $$P_\varepsilon(x) = c_n \cdot \frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon^2 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} = c_n \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon^{n+1}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \varepsilon^{-n} \cdot P_1\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right).$$

   $P_y(x)$'in açık ifadesinden anlaşılacağı üzere, $P_y(x)$ fonksiyonu $|x|$'in azalan fonksiyonudur ve $1 \leq p < \infty$ olan her p için $P_\varepsilon(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ sağlanır.
   ($p = \infty$ için $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayı, ölçülebilir ve essup $|f(x)| < \infty$ olan f'ler uzayıdır. Biz uygulamalarda $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ yerine $C_0(\mathbb{R}^n)$ uzayını kullanacağız. Burada, $C_0(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$'de sürekli olup, $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ sağlayan f'ler uzayını gösteriyoruz).
4. $P_y(x)$ aşağıdaki yarıgrup özelliğine sahiptir:
   Her $y_1, y_2 > 0$ için

   $$\left(P_{y_1} * P_{y_2}\right)(x) = P_{y_1+y_2}(x).$$

   Gerçekten, her iki tarafın ters Fourier dönüşümü alınırsa, sağ tarafın ters Fourier dönüşümü $e^{-2\pi|t|(y_1+y_2)}$ ve sol tarafın ters Fourier dönüşümü de, girişimden dolayı,

   $$\left(P_{y_1}(x)\right)^{\vee}(t) \cdot \left(P_{y_2}(x)\right)^{\vee}(t) = e^{-2\pi|t|y_1} \cdot e^{-2\pi|t|y_2}$$

   olup, birbirine eşittir.

Şimdi bir f fonksiyonunun Gauss-Weierstrass İntegrali'ni tanımlayalım: $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ olmak üzere, $w(x;t)$ fonksiyonu $e^{-t|\xi|^2}$, $(\xi \in \mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü olsun. Yani,

$$w(x;t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} e^{-t|\xi|^2} d\xi \ , \ (\xi.x = \xi_1 x_1 + ... + \xi_n x_n).$$

O halde, $(W_t f)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} W(x;t) f(y-x) dx$ girişimine $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Gauss-Weierstrass integrali denir. Harmonik Analizde Poisson integrali gibi, Gauss-Weierstrass integrali de önemli uygulamalara sahiptir.

Çalışmamızın 5. Bölümünde, hem Poisson integrallerini ve hem de Gauss-Weierstrass integrallerini genelleştiren integraller ailesinin tanımını vererek , 6. ve 7. bölümlerde kullanacağız.

4. ÇOK BOYUTLU UZAYDA RİESZ VE BESSEL POTANSİYELLERİ VE BU POTANSİYELLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Riesz potansiyeli, aşağıdaki şekilde tanımlanıyor:

$$(I^\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}} dy\ ,\ \ 0 < \alpha < \frac{n}{p}\ ;\ (1 \le p \le \infty)\,. \tag{4.1}$$

Burada, $x, y \in \mathbb{R}^n$ olup,

$$\gamma_n(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} \cdot 2^\alpha \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}\ ;\ \ |y| = \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}\ ;\ \ d_y = dy_1 dy_2 ... dy_n.$$

Bilindiği gibi, f sonsuz türevlenen ve sonsuzlukta kendisi ve türevleri hızla sıfıra giden fonksiyon yani , Schwarz test fonksiyonu ise, Fourier dönüşümü dilinde Riesz potansiyeli şöyle tanımlanıyor:

$$(I^\alpha f)^\wedge(x) = |x|^{-\alpha} \cdot \hat{f}(x)\ ;(x \in \mathbb{R}^n\ ;\ 0 < \alpha < n)\,. \tag{4.2}$$

Burada, $x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ olmak üzere, $\hat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y)\, dy$ olarak tanımlanır.

NOT: Bazı kaynaklar (örneğin, Stein 1970) Fourier dönüşümünü şöyle tanımlıyorlar:

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi x\cdot y} f(y)\, dy. \tag{4.3}$$

Bu tanım kullanılırsa, (4.2) eşitliği şöyle yazılır:

$$(I^\alpha f)^\wedge(x) = (2\pi\,|x|)^{-\alpha} \cdot \hat{f}(x) \tag{4.4}$$

Riesz potansiyelleri, Laplace diferansiyel operatörü olarak bilinen $(-\Delta) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ operatörünün negatif kesirsel kuvvetleri diye yorumlanmaktadır (Stein 1970).

Schwarz uzayından olan fonksiyonlar için Riesz potansiyellerinin aşağıdaki yarıgrup özelliği vardır (Stein 1970).

$$I^\alpha(I^\beta f) = I^{\alpha+\beta} f,\ (\alpha,\ \beta > 0\ ve\ \alpha + \beta < n).$$

Bundan başka ,

$$-\Delta(I^\alpha f) = I^\alpha(-\Delta f) = I^{\alpha-2} f;\ (n > 3;\ 2 \le \alpha \le n).$$

Riesz potansiyellerinin $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarındaki davranışı, aşağıdaki ünlü Hardy-Littlewood-Sobolev teoremi ile ifade ediliyor.

Teorem 4.1 *(Stein 1970).* $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ *olsun.*

1. *$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ise, o halde Riesz potansiyelini tanımlayan (4.1) integrali, $h.h.x \in \mathbb{R}^n$ için mutlak yakınsaktır ;*
2. *İlave olarak, $p > 1$ ise , $||I^\alpha f||_q \leq A_{p,q}.\,||f||_p$ sağlanacak biçimde $A_{p,q} > 0$ sabiti vardır (yani, I^α operatörü L_p'den L_q'ya sınırlıdır);*
3. *Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}$ olmak üzere, $I^\alpha : L_1 \to L_q$ zayıf tipli operatördür, yani, her $\lambda > 0$ için $meas\{x : |(I^\alpha f)(x)| > \lambda\} \leq \left(\frac{A.||f||_1}{\lambda}\right)^q$, $(A > 0\ bir\ sabittir)$*
   burada, $meas\{E\}$ ile, $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesque ölçümü gösterilmektedir.

Riesz potansiyeli kadar ünlü ve harmonik analizin çeşitli problemlerinde kullanılan bir başka potansiyel de Bessel potansiyelidir. Fourier dönüşümü dilinde Bessel potansiyeli şöyle tanımlanıyor:

$$(J^\alpha f)^\wedge (x) = (1 + |x|^2)^{-\alpha/2} \cdot f^\wedge (x) \, , (x \in \mathbb{R}^n \ ; \ 0 < \alpha < \infty) \, . \tag{4.5}$$

Biz bu çalışmada, Fourier dönüşümünün, $\hat{g}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(t)e^{-ixt}dt$ tanımını kullandık.

Fourier dönüşümünün (3.3) tanımı kullanılırsa, Bessel potansiyeli şöyle tanımlanır:

$$(J^\alpha f)^\wedge (x) = (1 + 4\pi^2 |x|^2)^{-\alpha/2} \cdot f^\wedge (x) \, . \tag{4.6}$$

Bessel potansiyelinin "açık" ifadesi bilinmektedir ve bir integral dönüşümüdür:

$$(J^\alpha f) (x) = \frac{1}{\beta_n (\alpha)} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\alpha (y) \cdot f (x - y) \, dy \ , \ (0 < \alpha < \infty) \, . \tag{4.7}$$

Burada, $\beta_n (\alpha) = 2^n \cdot \pi^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ve

$$G_\alpha (y) = \int\limits_0^\infty e^{\frac{-|y|^2}{4\xi}} \cdot e^{-\xi} \cdot \xi^{\frac{\alpha - n}{2} - 1} d\xi. \tag{4.8}$$

$G_\alpha (y)$ 'ye Bessel çekirdeği denir.$|x| \to 0$ için Bessel çekirdeğinin davranışı ile ilgili aşağıdaki asimptotik eşitlik bilinmektedir (Stein 1970).

$$G_\alpha (x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \, |x|^{-n+\alpha} + \ o\left(|x|^{-n+\alpha}\right) , \ (|x| \to 0) \, . \tag{4.9}$$

Burada, $\gamma_n(\alpha)$ Riesz potansiyelindeki katsayıdır.

(Hatırlatma: $|x| \to 0$ olmak üzere $a(x) = o(b(x))$ gösteriminin anlamı: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a(x)}{b(x)} = 0$ dir).

$G_\alpha(x)$ fonksiyonunun, $|x| \to \infty$ için davranışı aşağıdaki gibidir:

Öyle $A > 0, C > 0$ sabitleri vardır ki,

$$G_\alpha(x) \leq Ae^{-C|x|}, (|x| \to \infty). \tag{4.10}$$

Görüldüğü gibi, $|x| \to \infty$ için $G_\alpha(x)$ hızla sıfıra gidiyor.

(4.9)'den anlaşılacağı üzere, $G_\alpha(x)$ çekirdeği, 0 'ın komşuluğunda, Riesz potansiyelinin çekirdeği gibi davranıyor.

Lokal davranışları Riesz potansiyelleri ile Bessel potansillerinin her ikisine benzeyen bir başka potansiyel Flett potansiyelidir (Aliev vd 2006, Flett 1971, Sezer 2009).

Flett potansiyelinin, Fourier dönüşümü yardımıyla tanımı şöyledir:

$$(\mathcal{F}^\alpha f)^\wedge(x) = (1+|x|)^{-\alpha} f^\wedge(x), \ (x \in \mathbb{R}^n, \ 0 < \alpha < n). \tag{4.11}$$

Bu potansiyelin integral gösterimi de bilinmektedir:

$$(\mathcal{F}^\alpha f)(x) = (\phi_\alpha * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi_\alpha(y) \cdot f(x-y)dy. \tag{4.12}$$

Burada,

$$\phi_\alpha(y) = \frac{1}{\lambda_n(\alpha)} \cdot |y|^{\alpha-n} \cdot \int\limits_0^\infty \frac{s^\alpha \cdot e^{-s|y|}}{(1+s^2)^{\frac{n+1}{2}}} ds; \ \lambda_n(\alpha) = \pi^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}. \tag{4.13}$$

Yukarıda bahsi geçen Riesz, Bessel ve Flett potansiyellerinin Poisson integrali (yarıgrubu) ve Metaharmonik integral (yarıgrup) vasıtasıyla ifade edilen gösterimleri de bilinmektedir:

1. $I^\alpha f$ Riesz potansiyeli ve $P_t(f)(x)$ de f'in Poisson integrali olmak üzere,

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \cdot (P_t f)(x) dt \qquad \text{(Stein vd 1960).} \tag{4.14}$$

2. $\mathcal{F}^{\alpha} f$ Flett potansiyeli ve $P_t f$, $(t > 0)$ f 'in Poisson integrali olmak üzere,

$$(\mathcal{F}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} P_t(f)(x) dt \qquad \text{(Flett 1971).} \tag{4.15}$$

3. $J^{\alpha} f$ Bessel potansiyeli ve $(M_t f)(x)$, $(t > 0)$ f 'in Metaharmonik integrali (yarıgrubu) olmak üzere,

$$(J^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (M_t f)(x) dt \qquad \text{(Lizorkin 1964).} \tag{4.16}$$

Burada, Metaharmonik integral (yarıgrup) denilen $(M_t f)(x)$, $(t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$ integrali, Poisson integralinin (yarıgrubunun) bir modifikasyonu olup, aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$(M_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} M(y;t) f(x-y) dy, \; (t > 0; \; x \in \mathbb{R}^n); \tag{4.17}$$

ve

$$M(y;t) = (e^{-t\sqrt{1+|\xi|^2}})^{\vee}(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t\sqrt{1+|\xi|^2}} \cdot e^{iy\cdot\xi} d\xi. \tag{4.18}$$

Metaharmonik yarı grubun çekirdeği olan $M(y;t)$'nin integral gösterimi şöyledir (Aliev ve Rubin 2005, Lizorkin 1964).

$$M(y;t) = \frac{2t}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{K_{\frac{n+1}{2}}\left(\sqrt{|x|^2 + t^2}\right)}{\left(\sqrt{|x|^2 + t^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}; \tag{4.19}$$

Burada , $K_{\frac{n+1}{2}}(\cdot)$ Mc Donald fonksiyonudur. Mc Donald fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik eşitsizlik sağlanır (Aliev vd 2006, Rubin 1996, Samko vd 1993).

$$\frac{K_{\gamma}(r)}{\Gamma^{\gamma}} \leq \left\{ \begin{array}{c} c_0 \cdot \frac{e^{-r}}{r^{\gamma+\frac{1}{2}}}, \; r \geq 1 \; ise \\ c_0 \cdot r^{-2\gamma}, \; 0 < r < 1 \; ise \end{array} \right\} \leq c_1 \cdot r^{-2\gamma}, \; (0 < r < \infty \; ve \; \gamma \geq \frac{1}{2}).$$

Bu asimptotik eşitsizlik ve Poisson integralinin çekirdeğinin ifadesi kullanılırsa, Metaharmonik ve Poisson çekirdekleri arasında aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$M(x;t) \leq c \cdot P(x;t). \tag{4.20}$$

Bu sonuncu eşitsizlik, çoğu uygulamada, metaharmonik yarıgrupla ilgili problem-leri, Poisson yarıgrubu ile ilgili daha basit probleme indirgemeyi sağlar.

4. $J^\alpha f$ Bessel potansiyelinin, Gauss-Weierstrass integrali(yarıgrubu) ile ifadesi şöyledir (Aliev ve Eryiğit 2002, Flett 1971).

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} . \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} . (W_t f)(x) dt \tag{4.21}$$

5. POİSSON VE GAUSS-WEİERSTRASS İNTEGRALLERİNİN (YARIGRUPLARININ) BİR GENELLEŞMESİ: BETA YARIGRUP VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Poisson ve Gauss-Weierstrass integrallerinin bir genelleşmesi olan ve beta-yarıgrup diye adlandırılan bir integraller ailesini tanıtacağız.

$\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \le p \le \infty)$ ve $\beta > 0$ olsun. $y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $G^{(\beta)}(y)$ ile, $\exp(-|\xi|^\beta)$, $(\xi \in \mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümünü gösterelim:

$$G^{(\beta)}(y) = (2\pi)^{-n} . \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy.\xi - |\xi|^\beta} d\xi. \tag{5.1}$$

(5.1) yardımıyla, beta-yarıgrubun çekirdeği diye adlandıracağımız aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$\omega^{(\beta)}(y;t) = t^{-n/\beta} G^{(\beta)}(t^{-1/\beta} y), \ (t > 0, \ y \in \mathbb{R}^n) \tag{5.2}$$

(Görüldüğü gibi, $\omega^{(\beta)}(y;1) = G^{(\beta)}(y)$ olur).

Doğrudan hesaplama ile, $\omega^{(\beta)}(y;t)$'nin Fourier dönüşümünün $x \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki değerinin $\exp(-t. |x|^\beta)$ olduğu gösterilebilir.

$\omega^{(\beta)}(y;t)$ çekirdeği, $\beta = 1$ için klasik Poisson çekirdeği olur:

$$\omega^{(1)}(y;t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} . \frac{t}{\left(|y|^2 + t^2\right)^{(n+1)/2}}.$$

Yine, $\beta = 2$ için $\omega^{(\beta)}(y;t)$ çekirdeği, Gauss-Weierstrass çekirdeğine dönüşür:

$$\omega^{(2)}(y;t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-|y|^2 / 4t).$$

$\omega^{(\beta)}(y;t)$ çekirdeği ile, $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından olan bir φ fonksiyonunun girişimini $W_t^{(\beta)}\varphi(x)$ ile gösterelim:

$$W_t^{(\beta)}\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\omega^{(\beta)}(y;t)\, dy, \ (x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0). \tag{5.3}$$

Bu integraller ailesine φ fonksiyonuna ait beta-yarıgrup diyeceğiz.

$\omega^{(\beta)}(y;t)$ çekirdeği ve $W_t^{(\beta)}\varphi$, $(t > 0)$ yarıgrubu analizin, integral geometrinin ve olasılık teorisinin çeşitli problemlerinde kullanılmaktadır (Aliev 2009, Koldobsky 2005, Rubin 2008, Sezer vd 2010).

Aşağıdaki lemmada, $\omega^{(\beta)}(y;t)$ ve $W_t^{(\beta)}\varphi$'nin sağladığı çeşitli özellikler verilmiştir.

Görüleceği üzere, bu özellikler, Bölüm 3'te Poisson çekirdeği ve integrali için verilen özelliklere benzer olup, onların genelleşmesidir. Bu lemmada verilen özellikler, Bölüm 6 ve 7'de kullanılacaktır.

Lemma 5.1 *(Aliev vd 2008, Aliev 2009). $t > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$ ve $0 < \beta < \infty$ olsun. O halde,*

1. *$\omega^{(\beta)}(y;t)$ fonksiyonu, $y \in \mathbb{R}^n$ değişkenine göre radial bir fonksiyon olup,*

$$\omega^{(\beta)}\left(\lambda^{1/\beta}y;\lambda t\right) = \lambda^{-n/\beta}\omega^{(\beta)}(y;t)\,,\ \forall\lambda > 0. \tag{5.4}$$

sağlanır.

2. *$\omega^{(\beta)}(y;t)$ fonksiyonu, $0 < \beta \leq 2$ için pozitiftir.*
3. *Eğer $\beta > 0$ bir çift tam sayı ise, o zaman $\omega^{(\beta)}(y;t)$ sonsuz dereceden pürüzsüz olup $|y| \to \infty$ iken hızla sıfıra gider. Ayrıca, her $\beta > 0$ ve $t > 0$ için $|y| \to \infty$ iken $\omega^{(\beta)}(y;t) = O(|y|^{-n-\beta})$. Bu nedenle, $\omega^{(\beta)}(y;t)$ azalan ve integrallenen radial majoranta sahiptir.*
4.

$$\int_{\mathbb{R}^n}\omega^{(\beta)}(y;t)\,dy = 1,\ \forall t > 0,\ \forall\beta > 0. \tag{5.5}$$

5. *Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise, o halde*

$$\left|\left|W_t^{(\beta)}\varphi\right|\right|_p \leq c(\beta)\,||\varphi||_p\,,\ \forall t > 0; \tag{5.6}$$

burada $c(\beta) = \int_{\mathbb{R}^n}\left|\omega^{(\beta)}(y;1)\right|dy < \infty$. Eğer $0 < \beta \leq 2$ ise, o zaman $c(\beta) = 1$.

6. $\sup_{t>0}\left|\left(W_t^{(\beta)}\varphi\right)(x)\right| \leq c(M\varphi)(x),\ \varphi \in L_p,\ 1 \leq p \leq \infty$. *Burada, $M\varphi$ iyi bilinen Hardy-Littlewood maximal fonksiyonudur:*

$$(M\varphi)(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|\varphi(y)|\,dy,$$

$B(x,r)$, r yarıçaplı, $x \in \mathbb{R}^n$ merkezli yuvardır.

7.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\left(W_t^{(\beta)}\varphi\right)(x)\right| \leq ct^{-n/\beta p}\,||\varphi||_p\,,\ 1 \leq p < \infty; \tag{5.7}$$

8. *(yarıgrup özelliği)*

$$W_t^{(\beta)}\left(W_\tau^{(\beta)}\varphi\right)=W_{t+\tau}^{(\beta)}\varphi,\quad \forall t,\tau>0. \tag{5.8}$$

9. $\varphi\in L_p, 1\le p\le\infty, (L_\infty\equiv C_0)$ *olsun. O halde,*

$$\lim_{t\to 0}\left(W_t^{(\beta)}\varphi\right)(x)=\varphi(x)\,. \tag{5.9}$$

Burada, limit, L_p *uzayının normunda veya noktasal (*$h.h.x\in\mathbb{R}^n$ *için) olarak düşünülmektedir. Eğer* $\varphi\in C_0$ *ise, yakınsama tüm* $\mathbb{R}^n$*'de düzgündür.*

Bu lemmanın ispatı, Aliev (2009) kaynağında bulunabilir. (3) şıkkındaki asimptotik davranışın ispatı, Aliev vd (2008) kaynağında daha ayrıntılı verilmiştir.

6. ZAYIF SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİN BİR AİLESİ: İKİ PARAMETREYE BAĞLI POTANSİYELLER

Bu bölümde biz, Aliev'in (2009) makalesine dayanarak, beta-yarıgrubun doğurduğu iki parametreli potansiyeller ailesini tanıtacağız. Bu potansiyeller ailesi, beta (β) parametresinin özel seçimleri ile, klasik Bessel potansiyellerine ve klasik Flett potansiyellerine dönüşüyor (bu potansiyellerle ilgili kısa bilgi, Bölüm 4'te verilmiştir).

Tanım 6.1 *(Aliev 2009). $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olsun. $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun iki parametreli potansiyeli aşağıdaki integral operatöre denir:*

$$\left(J_\beta^\alpha \varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} . \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} W_t^{(\beta)} \varphi(x) dt. \tag{6.1}$$

Burada, $W_t^{(\beta)}\varphi$, φ fonksiyonuna ait beta-yarıgruptur.

Bundan sonra, $t = 0$ için, $W_0^{(\beta)} = E$ $(birim\ operatör)$ kabul ediyoruz. Bu kabulün dayanağı, Lemma (5.1) (9)'dur.

$J_\beta^\alpha \varphi$ potansiyelleri ailesinin sağladığı kimi özellikler aşağıdaki Lemmada verilmiştir (Aliev 2009).

Lemma 6.2 *$1 \leq p \leq \infty$ ve $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. O halde,*

1. *$J_\beta^\alpha \varphi$ potansiyeli, her $\alpha > 0$, $\beta > 0$ için iyi tanımlanmıştır(yani, (6.1) integrali mutlak yakınsaktır) ve*

$$\left|\left|J_\beta^\alpha \varphi\right|\right|_p \leq c(\beta) . ||\varphi||_p \tag{6.2}$$

sağlanır. $0 < \beta \leq 2$ için $c(\beta) = 1$' dir.

2. *J_β^α operatörü, $m(\xi) = (1 + |\xi|^\beta)^{-\alpha/\beta}$ Fourier çarpanının (Fourier multiplier) doğurduğu bir girişim (convolution) operatörüdür:*

$$\left(J_\beta^\alpha \varphi\right)^\wedge(\xi) = m(\xi) . \varphi^\wedge(\xi), \quad (\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)) \tag{6.3}$$

(burada, $S(\mathbb{R}^n)$ ile klasik Schwarz uzayı gösterilmiştir).

3. *Her sabit tutulmuş $\beta > 0$ parametresi için $\left\{J_\beta^\alpha\right\}_{\alpha \geq 0}$ operatörler ailesi yarıgrup özelliğine sahiptir:*

$$J_\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\varphi = J_\beta^{\alpha_1} \circ J_\beta^{\alpha_2}\varphi; \ (J_\beta^0 = E).$$

Burada, $J_\beta^{\alpha_1} \circ J_\beta^{\alpha_2}\varphi$ olarak, $J_\beta^{\alpha_1}\left(J_\beta^{\alpha_2}\varphi\right)$ kompozisyonu anlaşılmaktadır.

Bu Lemmanın ispatı, Aliev (2009) makalesinde verilmiştir.

NOT 1: $J_{\beta}^{\alpha}\varphi$ potansiyellerine “iki parametreye bağlı potansiyeller” denmesinin nedeni, iki α ve β parametrelerine bağlı olmasıdır. Klasik Bessel ve Flett potansiyelleri yalnız bir parametreye (α’ya) bağlılar. Bu potansiyeller, Aliev’in (2009) makalesinde Bessel potansiyelleri uzayının incelenmesinde kullanılmıştır.

NOT 2: Bessel, Flett ve genel olarak, iki parametreye bağlı potansiyeller ailesine zayıf singüler integral operatörler denilmesinin nedeni, bu integral operatörlerin çekirdeklerinin sıfırdaki davranışıdır (Stein 1970). Bessel potansiyelinin çekirdeğinin, $|x| \to 0$ için, $\gamma(\alpha).\,|x|^{-n+\alpha}$ gibi davrandığı gösterilmiştir. Yani, Bessel çekirdeği, koordinat başlangıcında integrallenebilir singülariteye sahiptir.

7. İKİ PARAMETREYE BAĞLI POTANSİYELLERİN, DERECELERİNİN DAVRANIŞINA BAĞLI YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Bu Bölümde, Tez çalışmasının esas (orjinal) sonuçları verilmiştir. $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, $(J_\beta^\alpha f)(x)$ ailesinin, $\alpha \to 0^+$ için limiti ile ilgileniyoruz. Bu limitin, $h.h.x \in \mathbb{R}^n$ için var ve $f(x)$'e eşit olduğunu gösteriyoruz. $f \in L_p \cap C_0$ ise, tüm $\mathbb{R}^n$'de yakınsamanın düzgün olduğunu kanıtlıyoruz. Bundan başka, benzer problemi, çeşitli Lipschitz sınıflarında inceliyoruz. Esas sonuçlar, iki teorem şeklinde ifade edilmiştir.

Teorem 7.1 *$f \in L_p(\mathbb{R}^n), (1 \le p < \infty)$ olsun ve $\alpha > 0, \beta > 0$ olmak üzere, $J_\beta^\alpha f$ operatörü aşağıdaki gibi tanımlansın:*

$$(J_\beta^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}.\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}.(W_t^{(\beta)}f(x))dt.$$

O halde,

1. *$\lim\limits_{\alpha\to 0^+}(J_\beta^\alpha f)(x)$ limiti hemen-hemen her $(h.h)$ $x \in \mathbb{R}^n$ için var olup,*

$$\lim_{\alpha\to 0^+}(J_\beta^\alpha f)(x) = f(x)$$

   eşitliği de $h.h.x \in \mathbb{R}^n$ için sağlanır;
2. *$f \in L_p \cap C_0$ için limit her noktada vardır ve daha ötesi, yakınsama tüm $\mathbb{R}^n$'de düzgündür. Bunun yanı sıra, $f \in L_p \cap C$ için yakınsama, $\mathbb{R}^n$'nin her kompakt alt kümesinde düzgündür.*

İspat.

1. $x \in \mathbb{R}^n$ noktası, $\lim\limits_{t\to 0^+} W_t^{(\beta)}f(x) = f(x)$ eşitliğinin sağlandığı bir nokta olsun. (Lemma 5.1 (9)'a göre, $h.h.x \in \mathbb{R}^n$ noktası bu özelliğe sahiptir). Limit tanımından, her $\epsilon > 0$ için öyle $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ vardır ki, $0 < t < \delta$ olan her t için $\left|W_t^{(\beta)}f(x) - f(x)\right| < \epsilon$ sağlanır.
   O halde,

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}dt = \Gamma(\frac{\alpha}{\beta})$$

   olduğu dikkate alınırsa, aşağıdakiler yazılabilir:

$$\left|(J_\beta^\alpha f)(x) - f(x)\right| = \left|\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}.\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}.(W_t^{(\beta)}f(x))dt - \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}.\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}f(x)dt\right| \le$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}.\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}.\left|W_t^{(\beta)}f(x)-f(x)\right|dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}.\int\limits_0^\delta t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}.\left|W_t^{(\beta)}f(x)-f(x)\right|dt +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}.\int\limits_\delta^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}.\left|W_t^{(\beta)}f(x)-f(x)\right|dt \equiv \dot{I}_1(\alpha)+\dot{I}_2(\alpha). \tag{7.1}$$

(Burada, $\dot{I}_1(\alpha)+\dot{I}_2(\alpha)$ ifadeleri, aslında, α,β,δ parametrelerine ve $x\in\mathbb{R}^n$ noktasına bağlıdır; değişken parametre α olduğundan, $\dot{I}_1(\alpha)$ ve $\dot{I}_2(\alpha)$ notasyonlarını kullandık).
Şimdi, $0<t<\delta$ için $\left|W_t^{(\beta)}f(x)-f(x)\right|<\epsilon$ sağlandığını kullanarak ve $\delta<1$ varsayarak,

$$\dot{I}_1(\alpha)\leq \epsilon.\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}.\int\limits_0^\delta t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}dt < \epsilon.\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}.\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}dt = \epsilon \tag{7.2}$$

elde edilir.
Diğer taraftan,
$\dot{I}_2(\alpha) \leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}.\int\limits_\delta^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}.\left|W_t^{(\beta)}f(x)\right|dt + |f(x)|.\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}.\int\limits_\delta^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}dt \equiv \dot{I}_3(\alpha) + \dot{I}_4(\alpha)$
yazabiliriz.
Önce, $\dot{I}_4(\alpha)$'yı üstten tahmin edelim. $\alpha>0$ parametresinin yeteri kadar küçük değerleri için $\frac{\alpha}{\beta}-1<0$ olacağından,

$$\dot{I}_4(\alpha)\leq |f(x)|.\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}.\delta^{\frac{\alpha}{\beta}-1}.\int\limits_\delta^\infty e^{-t}dt = |f(x)|.e^{-\delta}.\delta^{\frac{\alpha}{\beta}-1}.\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})} =$$

$$= |f(x)|.e^{-\delta}.\delta^{\frac{\alpha}{\beta}-1}.\frac{1}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{\beta})}.\frac{\alpha}{\beta} < \frac{2}{\delta}.|f(x)|.\frac{\alpha}{\beta} = O(1).\alpha\ ,\ (\alpha\to 0^+) \tag{7.3}$$

Şimdi de $\dot{I}_3(\alpha)$'yı üstten tahmin edelim.
Lemma.(5.1) (7)'ye.göre, $\left|W_t^{(\beta)}f(x)\right| \leq c.t^{-n/\beta p}\,||f||_p$. Bunu dikkate alırsak,

$$\dot{I}_3(\alpha)\leq c.\,||f||_p.\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}.\int\limits_\delta^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{n}{\beta p}-1}e^{-t}dt \leq$$

$$\leq c.\left\| f \right\|_p . \frac{\beta p}{n-\alpha p} . \delta^{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{n}{\beta p}} . \frac{1}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{\beta})} . \alpha = O(1).\alpha,\ (\alpha \to 0^+) \tag{7.4}$$

Şimdi (7.2), (7.3) ve (7.4)'ü (7.1)'de dikkate alırsak,

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \sup \left| J_\beta^\alpha f(x) - f(x) \right| \leq \epsilon.$$

olur. Buradaki $\epsilon > 0$ parametresi keyfi olduğundan,

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \left| J_\beta^\alpha f(x) - f(x) \right| = 0$$

eşitliği elde edilir. Yani, teoremin ilk kısmı kanıtlanmış oldu.

2. Şimdi de $f \in L_p \cap C_0$ olduğunu varsayalım. Lemma (5.1) (9)'a göre, her $\epsilon > 0$ için öyle $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ vardır ki, $\left\| W_t^{(\beta)} f - f \right\| < \epsilon$ eşitsizliği her $t \in (0, \delta)$ için sağlanır. (burada, $\|g\| = \|g\|_\infty = ess \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |g(x)|$).
O halde, yukarıdaki (7.1) eşitsizliğini elde ettiğimiz yolla gidersek ve Minkowski eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}\left\| J_\beta^\alpha f - f \right\|_\infty \ \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})} . \int_0^\delta t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} \left\| W_t^{(\beta)} f - f \right\| dt + \\ & + \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})} \int_\delta^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} \left\| W_t^{(\beta)} f \right\| dt \ + \|f\| \ . \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})} \int_\delta^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} dt\end{aligned}$$

olur.Lemma (5.1) (7) eşitsizliğine göre,

$$\left\| W_t^{(\beta)} f \right\| < c.t^{-n/\beta p} \left\| f \right\|_p,\ (1 \leq p < \infty)$$

sağlanır. Bunu kullanırsak,

$$\left\| J_\beta^{(\alpha)} f - f \right\|_\infty \leq \frac{1}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{\beta})} \epsilon + c.\left\| f \right\|_p \frac{p}{n-\alpha p} . \delta^{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{n}{\beta p}} \frac{\alpha}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{\beta})} +$$

$$+ \frac{2\alpha}{\delta\beta} . \|f\| = \frac{1}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{\beta})} \epsilon + O(1)\alpha,\ (\alpha \to 0^+) \tag{7.5}$$

elde edilir ki, $\epsilon > 0$ keyfi olduğuna göre, buradan $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \left\| J_\beta^{(\alpha)} f - f \right\|_\infty = 0$ bulunur.
$f \in L_p \cap C$ için yakınsamanın, her kompakt $K \subset \mathbb{R}^n$ kümesinde düzgün olduğu benzer şekilde yapılır.

□

Aşağıdaki teoremlerde, bazı "pürüzsüzlük" özelliklerine sahip olan $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları için $J_\beta^{(\alpha)} f$'in, α parametresi sıfıra giderken f'e yaklaşım hızı incelenmiştir.

Öncelikle, Aliev vd (2006)makalesindekine benzer olarak, aşağıdaki iki Lipschitz sınıfını tanımlayalım:

$$1)\Lambda_\lambda = \left\{ f : f \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \ ve \ \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_\infty \leq c.\,|y|^\lambda \right\} \tag{7.6}$$

$Burada,\ 0 < \lambda < 1\ ve\ c = c_f > 0.$

2) Lokal Lipschitz sınıfı : verilmiş $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$\Lambda_\lambda(x_0) = \left\{ f : f \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \ ve\ her\ |y| \leq 1\ için\ |f(x_0 - y) - f(x_0)| \leq c.\,|y|^\lambda \right\} \tag{7.7}$$

$Burada,\ yine\ 0 < \lambda < 1\ ve\ c = c_f > 0.$

Aşağıdaki teoremden görüleceği üzere, α sıfıra giderken, $J_\beta^\alpha f$'in f'e yakınsama hızı, Lipschitz derecesi olan λ'dan bağımsız olup, $O(1).\alpha$ gibi davranır.

Teorem 7.2 *1. Bir $\lambda \in (0,1)$ için $f \in L_p \cap \Lambda_\lambda$, $(1 \leq p < \infty)$ olsun. Ayrıca, β parametresi için $\beta > \lambda$ sağlansın.*
O halde, $\alpha \to 0^+$ için

$$\left\| J_\beta^{(\alpha)} f - f \right\|_\infty = O(1)\alpha; \tag{7.8}$$

2. Bir $\lambda \in (0,1)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $p \in (1,\infty)$ için $f \in L_p \cap \Lambda_\lambda(x_0)$ olsun.
O halde, $\alpha \to 0^+$ için

$$\left| J_\beta^{(\alpha)} f(x_0) - f(x_0) \right| = O(1)\alpha. \tag{7.9}$$

NOT: *(7.8) ve (7.9)'dan anlaşılacağı üzere, hem L_∞-normundaki yakınsamada ve hem de lokal Lipschitz noktası x_0'daki yakınsamada, α parametresi sıfıra giderken, yakınsama hızı $O(1)\alpha$ olup, Lipschitz derecesi olan λ'ya bağımlı değildir.*

İspat.

1. Beta-yarıgrup (veya kısaca, β-yarıgrup) diye adlandırdığımız $W_t^{(\beta)} f$ integral operatörün çekirdeği olan $\omega^{(\beta)}(y;t)$, $(y \in \mathbb{R}^n, t > 0)$ fonksiyonunun, $\beta = 1$ ve $\beta = 2$ dışında açık ifadesi yoktur. Fakat, $|y| \to \infty$ için onun asimptotik davranışı bilinmektedir (Aliev vd 2008, Aliev 2009, Rubin 2008).

$$\omega^{(\beta)}(y;1) = c_\beta\,|y|^{-n-\beta}\,(1 + o(1));\ c_\beta = \frac{2^\beta \pi^{-n/2} \Gamma\left(\frac{n+\beta}{2}\right)}{\Gamma(-\beta/2)}. \tag{7.10}$$

Burada, $\beta \neq 2,4,6,...$ olduğu varsayılır; β parametresi çift tamsayı olduğu zaman $\omega^{(\beta)}(y;1)$ fonksiyonunun $|y| \to \infty$ için hızla sıfıra gittiği, yani, her $n \in \mathbb{N}$ için $|y|^n .\omega^{(\beta)}(y;1) \to 0$ olduğu bilinmektedir. O halde, β çift tamsayı olduğunda, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\omega^{(\beta)}(y;1)\right| . |y|^\lambda \, dy$ integralinin yakınsak olacağı açıktır. $\beta \neq 2,4,6,...$ ise (7.10)'daki asimptotik eşitlik sağlandığından, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\omega^{(\beta)}(y;1)\right| . |y|^\lambda \, dy$ integralinin $0 < \lambda < 1$ için yakınsak olacağı yine barizdir; çünkü, $|y| \to \infty$ için integral altındaki ifade, $c_\beta \, |y|^{-n-(\beta-\lambda)}$ gibi davranıyor ve $\beta > \lambda$ varsayımından $(\beta - \lambda)$ sayısı pozitiftir.
Bunu ve Lemma (5.1)-(1)'i kullanırsak ve $S = \frac{1}{t}$ koyarsak,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\omega^{(\beta)}(y;t)\right| . |y|^\lambda \, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} S^{\frac{n}{\beta}} \left|\omega^{(\beta)}(S^{\frac{1}{\beta}} y; St)\right| |y|^\lambda \, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{n}{\beta}} \left|\omega^{(\beta)}(t^{-\frac{1}{\beta}} y, 1)\right| . |y|^\lambda \, dy =$$

$$(y = t^{\frac{1}{\beta}} x; \ (t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n) \ koyalım)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{n}{\beta}} \left|\omega^{(\beta)}(x;1)\right| .t^{\frac{\lambda}{\beta}} \, |x|^\lambda \, t^{\frac{n}{\beta}} dx =$$

$$= t^{\frac{\lambda}{\beta}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\omega^{(\beta)}(x;1)\right| . |x|^\lambda \, dx = c_1 .t^{\frac{\lambda}{\beta}}, \ (c_1 = c_1(\lambda;\beta;n)). \tag{7.11}$$

Şimdi, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega^{(\beta)}(y;t) dy = 1$ olduğuna göre,

$$W_t^{(\beta)} f(x) - f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega^{(\beta)}(y;t)(f(x-y) - f(x)) dy, \tag{7.12}$$

ve Minkowski eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \left|\left|W_t^{(\beta)} f - f\right|\right|_\infty &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\omega^{(\beta)}(y;t)\right| . ||f(\cdot - y) - f(\cdot)||_\infty \, dy \\ &\leq c. \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\omega^{(\beta)}(y;t)\right| . |y|^\lambda \, dy = c_2 t^{\frac{\lambda}{\beta}} \end{aligned} \tag{7.13}$$

elde edilir.

O halde, yukarıdaki (7.1) ifadesine göre,

$$\left|\left(J_\beta^\alpha f\right)(x)-f(x)\right| \leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}.\left|W_t^{(\beta)}f(x)-f(x)\right|dt \tag{7.14}$$

ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\left|\left|J_\beta^\alpha f-f\right|\right|_\infty &\leq \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}.\left|\left|W_t^{(\beta)}f-f\right|\right|_\infty dt\\ &\leq c_2\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha+\lambda}{\beta}-1}e^{-t}dt = c_2.\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\lambda}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = c_2.\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\lambda}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)}.\frac{\alpha}{\beta}\end{aligned}$$

olur ki, bu da $\alpha \to 0^+$ için $\left|\left|J_\beta^\alpha f-f\right|\right|_\infty = O(1)\alpha$ sağlandığını gösteriyor. Teoremin 1. kısmı kanıtlandı.

2. Teoremin ikinci kısmı (7.7) koşulu kullanılarak kanıtlanır. Aşağıdaki eşitsizliklerde $0 < t \leq 1$ varsayacağız.

$$\left|W_t^{(\beta)}f(x_0)-f(x_0)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n}\left|\omega^{(\beta)}(y;t)\right|.\left|f(x_0-y)-f(x_0)\right|dy \leq$$

$$\leq \int_{|y|\leq 1}\left|\omega^{(\beta)}(y;t)\right|.\left|f(x_0-y)-f(x_0)\right|dy+\left|f(x_0)\right|.\int_{|y|>1}\left|\omega^{(\beta)}(y;t)\right|dy+$$

$$+\int_{|y|>1}\left|\omega^{(\beta)}(y;t)\right|.\left|f(x_0-y)\right|dy \equiv \dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3. \tag{7.15}$$

Şimdi, $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ ve $\dot{I}_3$integrallerini üstten tahmin edelim:

$$\dot{I}_1 \leq c_1.\int_{|y|\leq 1}\left|\omega^{(\beta)}(y;t)\right|.|y|^\lambda dy < c_1.\int_{\mathbb{R}^n}\left|\omega^{(\beta)}(y;t)\right|.|y|^\lambda dy = c_2.t^{\frac{\lambda}{\beta}} \tag{7.16}$$

$\dot{I}_2$ ifadesini üstten tahmin edelim. (7.11)'deki adımlar izlenirse,

$$\dot{I}_2 = |f(x_0)|.\int_{|y|>1}\left|\omega^{(\beta)}(y;t)\right|dy = |f(x_0)|.\int_{|y|>1}t^{-\frac{n}{\beta}}\left|\omega^{(\beta)}(t^{-\frac{1}{\beta}}y;1)\right|dy =$$

$$(y = t^{\frac{1}{\beta}}x \; koyuyoruz; \; |y|>1 \Leftrightarrow |x|>t^{-1/\beta})$$

$$= |f(x_0)| . \int\limits_{|x|>t^{-1/\beta}} \left|\omega^{(\beta)}(x;1)\right| dx \leq c_2. \int\limits_{|x|>t^{-1/\beta}} |x|^{-n-\beta} dx =$$

$$= c_3. \int\limits_{t^{-1/\beta}}^{\infty} r^{-n-\beta} r^{n-1} dr = c_3. \int\limits_{t^{-1/\beta}}^{\infty} r^{-1-\beta} dr = c_3 t. \tag{7.17}$$

Hölder eşitsizliği kullanılırsa, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\dot{I}_3 = \int\limits_{|y|>1} \left|\omega^{(\beta)}(y;t)\right| . |f(x_0 - y)| \, dy$$

$$\leq ||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \cdot \left(\int\limits_{|y|>1} \left|\omega^{(\beta)}(y;t)\right|^q dy \right)^{1/q}$$

$$= c_4.t^{-\frac{n}{\beta}}. \left(\int\limits_{|y|>1} \left|\omega^{(\beta)}(t^{-1/\beta} y;1)\right|^q dy \right)^{1/q}$$

($y = t^{1/\beta} x$ koyalım.)

$$= c_4.t^{-n/\beta}.t^{n/\beta q}. \left(\int\limits_{|x|>t^{-1/\beta}} \left|\omega^{(\beta)}(x;1)\right|^q dx \right)^{1/q}$$

$$\leq c_5.t^{-n/\beta p} \left(\int\limits_{|x|>t^{-1/\beta}} |x|^{-q(n+\beta)} dx \right)^{1/q}$$

$$= c_6.t^{-n/\beta p} \left(\int\limits_{t^{-\frac{1}{\beta}}}^{\infty} r^{-q(n+\beta)}.r^{n-1} dr \right)^{1/q}$$

$$= c_7.t^{-n/\beta p}.t^{1+\frac{n}{\beta p}} = c_7.t \tag{7.18}$$

(7.16), (7.17) ve (7.18) ifadelerini (7.15)'te kullanırsak, $0 < t \leq 1$ için

$$\left|W_t^{(\beta)} f(x_0) - f(x_0)\right| \leq c_8 (t^{\lambda/\beta} + t) \tag{7.19}$$

sağlanır. O halde, (7.1) ifadesindeki yol izlenirse,

$$\left|\left(J_\beta^\alpha f\right)(x_0) - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}. \int\limits_0^1 t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t}. \left|W_t^{(\beta)} f(x_0) - f(x_0)\right| dt +$$

$$+\left|f(x_0)\right|.\frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}.\int_1^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}.\int_1^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}.\left|W_t^{(\beta)}f(x_0)\right|dt$$

$$\equiv J_1+J_2+J_3.$$

$$J_1\leq c_9.\frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}.\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}.e^{-t}.(t^{\lambda/\beta}+t)dt\leq$$

(min $\left\{\frac{\lambda}{\beta},1\right\}=\gamma$ diyelim)

$$\leq c_{10}.\frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}.\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{\beta}+\gamma-1}dt=c_{10}.\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}+\gamma}.\frac{1}{\Gamma(1+\frac{\alpha}{\beta})}.\frac{\alpha}{\beta}=O(1).\alpha,\ (\alpha\to 0)\,. \tag{7.20}$$

Yukarıdaki (7.3) ve (7.4) eşitsizlikleri $\delta=1$ için yazılırsa, $J_2=O(1).\alpha$ ve $J_3=O(1).\alpha,\,(\alpha\to 0^+)$ elde edilir.
Sonuç olarak, $\alpha\to 0^+$ için $\left|\left(J^\alpha_\beta f\right)(x_0)-f(x_0)\right|=O(1).\alpha$ olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

□

8. SONUÇ

Zayıf tipli singüler integral operatörler olarak bilinen Riesz potansiyelleri, Bessel potansiyelleri, Flett potansiyelleri ve onların çeşitli versiyonları Harmonik Analizde ve onun uygulamalarında önemli rol oynuyorlar. Buna göre de bu potansiyel tipli operatörlerle ilgili çalışmalar her zaman güncelliğini korumaktadır. Bu potansiyellerle ilgili araştırma alanlarından biri de, singülerlik derecesi sıfıra yaklaştığında söz konusu potansiyelin davranışını incelemektir. Bu çalışmamızda, klasik Bessel ve Flett potansiyellerini genelleştiren ve bir yarıgrup vasıtasıyla ifade edilen potansiyel tipli integral operatörlerin bir ailesi tanımlanarak, bu integral operatörlerin singülerlik derecesi sıfıra yaklaştığında, verilen fonksiyona yaklaşım özelliği incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, Bessel ve Flett potansiyelleri için bilinen uygun sonuçları genelleştiriyor.

9. KAYNAKLAR

ALIEV, I.A., GADJIEV, A. D. and ARAL, A. 2006. On approximation properties of a family of linear operators at critical value of parameter. *Journal of Approximation Theory*, 138(2):242-253.

ALIEV, I.A., RUBIN, B., UYHAN, S., SEZER, S. 2008. Composite Wavelet Transforms: Applications and Perspectives, Radon Transforms, Geometry and Wavelets; Book Series: *Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI,* 464:1-25.

ALİEV, I.A. and ERYİĞİT, M. 2002. Inversion of Bessel potentials with the aid of weighted wavelet transforms, *Math. Nachr.* 242:27-37.

ALIEV, I.A. and RUBIN, B. 2005. Wavelet-like transforms for admissible semi-groups; inversion formulas for potentials and Radon transforms. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 11(3):333-352.

ALİYEV, I.A. 2009. Bi-parametric potentials, relevant function spaces and wavelet-like transform, *Integral Equations and Operator Theory*, 65:151-167,

BAYRAKCI, S. and SEZER, S. 2011. On approximation properties of bi-parametric parabolic type potentials. *Publicationes Mathematicae Debrecen,* 78(1):127-139.

FLETT, T.M. 1971. Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society,* 3(3):385-451.

GADJIEV, A.D., ARAL, A. and ALIEV, I.A. 2007. On behaviour of the Riesz and generalized Riesz potentials as order tends to zero. *Mathematical Inequalities And Applications*, 10(4):875-888.

GAL, S.G. 2011. Approximation by complex potentials generated by the Gamma function. *Turkish Journal of Mathematics,* 35(3):443-456.

JOHNSON, R. 1973. Temperatures, Riesz potentials, and the Lipschitz spaces of Herz. *Proceedings of the London Mathematical Society,* 3(2):290-316.

KOLDOBSKY, A. 2005. Fourier analysis in convex geometry. *Providence, RI: American mathematical society.*

KUROKAWA, T. 1981. On the Riesz and Bessel kernels as approximations of the identity. *Sci. Rep. Kagoshima Univ,* 30:31-45.

LIZORKIN P.I. 1964. The functions of Hirshman type and relations between the spaces B_p^r (En) and L_p^r (Rn), *Mat. Sb.* 63(4):505-535 (Russian)

RUBIN, B.S. 1986. A method of characterization and inversion of Bessel and Riesz potentials. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika,* (5):59-68.

RUBIN, B.S. 1987. Inversion of potentials in $\mathbb{R}_n$ with the aid of Gauss-Weierstrass integrals. *Mathematical Notes* , 41(1):22-27.

RUBIN, B. 1996. Fractional integrals and potentials, *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics,* 82.

RUBIN, B. 1998. Fractional calculus and wavelet transforms in integral geometry. *Fract. Calc. Appl. Anal,* 1(2):193-219.

RUBIN, B. 2008. Intersection bodies and generalized cosine transforms. *Advances in Mathematics,* 218(3):696-727.

SAMKO, S.G., KILBAS, A. A. and MARICHEV, O. I. 1993. Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications, *Gordon and Breach, New York.*

SAMKO, S. 2001. Hypersingular integrals and their applications. *CRC Press*.

SEZER, S. and ALIEV, I.A. 2010. A new characterization of the Riesz potential spaces with the aid of a composite wavelet transform. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 372(2):549-558.

SEZER, S. 2009. On approximation properties of the families of Flett and generalized Flett potentials, *Int. J. Math. Analysis,* 3(39):1905-1915.

STEIN, E. M. and WEISS, G. 1960. On the theory of harmonic functions of several variables. *Acta Mathematica,* 103(1):25-62.

STEIN, E.M. and Weiss, G. 1971. Fourier analysis on Euclidean spaces. *Princeton University Press, England.*

STEIN, E.M. 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions, *Princeton, 1970. Mathematical Reviews (MathSciNet):* MR44, 7280.

UYHAN, S.B., GADJIEV, A.D. and ALIEV, I.A. 2006. On approximation properties of the parabolic potentials. *Bulletin of the Australian Mathematical Society,* 74(03):449-460.

ÖZGEÇMİŞ

Medine Demir, 1989 yılında Muğla'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Muğla'da tamamladı.2013 yılında Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümünden mezun oldu.2014-Eylül döneminde Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalında lisansüstü öğrenimine başladı.