

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU BOYUTLU MINKOWSKI UZAYLARINDA FOKAL
EĞRİLER VE FOKAL YÜZEYLER

Hakan ŞİMŞEK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU BOYUTLU MINKOWSKI UZAYLARINDA FOKAL
EĞRİLER VE FOKAL YÜZEYLER

Hakan ŞİMŞEK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 18/03/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

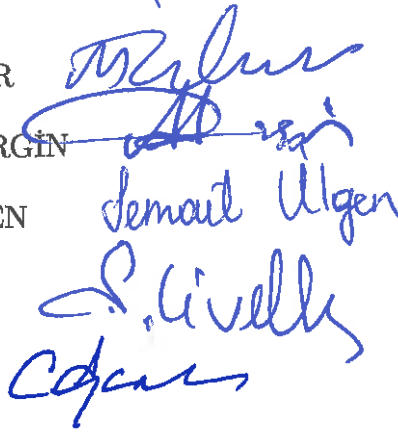
Doç.Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

Yrd. Doç Dr. Semail ÜLGEN

Doç. Dr. Şevket CİVELEK

Doç. Dr. Cansel YORMAZ



ÖZET

SONLU BOYUTLU MINKOWSKI UZAYLARINDA FOKAL EĞRİLER VE FOKAL YÜZEYLER

Hakan ŞİMŞEK

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Mart 2016, 108 sayfa

Bu tezde, sonlu boyutlu Lorentz-Minkowski uzaylarında fokal eğriler ve fokal yüzeyler ele alınmıştır. Null olmayan bir regüler eğrinin fokal eğrisi ve fokal eğriliklerinin geometrik özellikleri incelenmiş ve spacelike ve timelike yüzey üzerindeki null olmayan bir eğrinin Darboux çatısı vasıtasıyla yarı-küresel evolütleri araştırılmıştır. Daha sonra bir parçası spacelike bir parçası timelike olan karışık yüzeylerin fokal yüzeyleri, tekillik teorisi vasıtasıyla uzaklık kare fonksiyon ailesinin çatılaşma kümesi olarak tanımlanarak geometrisi incelenmiştir. Bununla birlikte hiperbolik m-uzayda hiperyüzeylerin evolütleri sunulmuş ve bu evolütler vasıtasıyla hiperyüzeyler ile hiperküreler ya da eşuzaklık hiperdüzlemlerin değmesi çalışılmıştır. Daha önce yapılmamış olan normal doğru kongruansları ile üretilen fokal yüzeyler Minkowski 3-uzayında belirlenerek geometrisi incelenmiştir. Dahası spacelike ve timelike yüzeyler üzerinde bir takım önemli eğriler aynı uzayda tanıtılıp elde edilen fokal yüzeyler yardımıyla bazı yeni özellikleri sunulmuştur. Son olarak Minkowski 3-uzayında yapılan Backlund ve Tamamlanabilme teoremleri $2n-1$ boyutlu Minkowski uzaya genişletilerek bazı yeni ilginç sonuçlar elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Fokal eğri, Backlund Teoremi, Fokal Yüzey, Evolüt, Hiperbolik uzay, Minkowski uzayı, Spacelike yüzey, Çatılaşma kümesi, Kaustik, Doğru kongruansları.

JÜRİ: Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Danışman)

Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

Yrd. Doç. Dr. Semail ÜLGEN

Doç. Dr. Şevket CİVELEK

Doç. Dr. Cansel YORMAZ

ABSTRACT

FOCAL CURVES AND FOCAL SURFACES IN FINITE DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACES

Hakan ŞİMŞEK

PhD Thesis in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

March 2016, 108 pages

In this thesis, focal curves and focal surfaces in the finite dimensional Minkowski spaces are handled. The geometric properties of focal curves and focal curvatures of a non-null regular curve are examined and by means of the Darboux frame of a non-null curve on the spacelike and timelike surface, its pseudo-spherical evolutes are investigated. Then, in terms of the singularity theory, the focal surfaces of mixed surfaces whose one part is spacelike and the other part is timelike are analyzed by defining as the bifurcation set of the family of distance squared function. Besides, the evolutes of hypersurfaces in hiperbolic m-space are presented and the contact of hypersurfaces with hyperspheres or equidistant hyperplanes are studied via these evolutes. The focal surfaces generated by normal line congruences, which has not been done before, are described in the Minkowski 3-space and their geometry is studied. Moreover, by defining some important curves on spacelike and timelike surface in the same space, their some new properties are presented by the aid of the focal surfaces obtained. Lastly, by generalizing the Backlund and integrability theorems done in the Minkowski 3-space, new interesting results are gotten.

KEYWORDS: Focal Curve, Backlund Theorem, Focal Surface, Evolute, Hyperbolic space, Caustic, Line Congruences, Bifurcation Set, Minkowski space, Spacelike surface.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Supervisor)

Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

Asst. Prof. Dr. Semail ÜLGEN

Assoc. Prof. Dr. Şevket CİVELEK

Assoc. Prof. Dr. Cansel YORMAZ

ÖNSÖZ

Fokal eğrilerin ve fokal yüzeylerin Minkowski uzaylarında geniş kapsamda anlatıldığı bu tez çalışması bu konuda daha önce yapılmış olan çalışmaların bir derlemesi ve yapılmamış olan normal doğru kongruansları vasıtasıyla elde edilen fokal yüzeylerin geometrisi ve Backlund ve tamamlanabilme teoremlerinin yüksek boyutlu Minkowski uzaylara genelleştirilmesi üzerine olmuştur. Bu konu üzerine bir çok araştırmacının ilgilendiği ve araştırmaya açık bir konu olduğu için bu konuda çalışmak isteyen kişilere yararlı bir kaynak olacağı ve başka çalışmalara da ışık tutacağı kanısındayım.

Bana bu konuda çalışma olanağı veren, en sıkıntılı zamanlarımda yardımlarını esirgemeyen ve beni sürekli motive eden ayrıca kendimi geliştirmemde önemli katkılar yapan danışmanım Sayın Doç. Dr. Mustafa Özdemir'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca birlikte Tübitak projesinde çalıştığım Sayın Yrd. Doç. Dr. Semail Ülgen'e maddi ve manevi katkılarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Bu çalışmamı benim her türlü sıkıntıma katlanan ve büyük fedakarlıklar eden aileme ithaf ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	6
2.1. Lagrangian Singülerliği ve Fonksiyonların Açılımı.....	8
3. FOKAL EĞRİLER.....	10
3.1. $m+1$ Boyutlu Lorentz Uzayında Null Olmayan Eğrilerin Fokal Eğrileri.....	10
3.2. Hiperbolik Düzlem Eğrilerinin Fokal Eğrileri.....	14
3.2.1. Hiperbolik 2-uzayında eğrilerin hiperbolik yükseklik fonksiyonları.....	15
3.2.2. Eğrilerin hiperbolik değişmezleri.....	17
3.2.3. Bir değişkenli fonksiyonların açılımları.....	19
3.3. Lorentz 3-Uzayında Spacelike Yüzey Üzerindeki Eğrilerin Evolütleri..	21
3.3.1. Spacelike yüzey üzerinde yükseklik fonksiyonları.....	21
3.3.2. Spacelike yüzey üzerindeki eğri için fonksiyon açılımları.....	26
3.4. Lorentz 3-Uzayında Timelike Yüzey Üzerindeki Eğrilerin Evolütleri..	28
3.4.1. Timelike yüzey üzerinde yükseklik fonksiyonları.....	28
3.4.2. Timelike yüzey üzerindeki eğri için fonksiyon açılımları.....	33
4. TEKİLLİK TEORİSİNDE FOKAL YÜZEYLER.....	36
4.1. Lorentz 3-Uzayında Kostik ve Fokal Yüzeyler.....	36

4.2. Hiperbolik m-Uzayda Fokal Yüzeyler	47
4.2.1. Hiperyüzey üzerinde yükseklik fonksiyonları	50
4.2.2. Hiperbolik uzayda kostik olarak fokal yüzeyler	53
4.2.3. Hiperbolik 3-uzayda yüzeyler	57
5. DOĞRU KONGRUANSLARININ FOKAL YÜZEYLERİ	59
5.1. Lorentz 3-Uzayında Spacelike Yüzeyin Teğet Vektörleriyle Tanımlanan Fokal Yüzeyler	59
5.2. Lorentz 3-Uzayında Timelike Normal Kongruansın Fokal Yüzeyleri ...	65
5.2.1. Spacelike yüzey üzerinde özel noktalar	69
5.3. Lorentz 3-Uzayında Spacelike Normal Kongruansın Fokal Yüzeyleri ..	72
6. SABİT KESİTSEL EĞRİLİKLİ FOKAL YÜZEYLER	77
6.1. Lorentz 3-Uzayında Sabit Gauss Eğrilikli Yüzeyler	80
6.1.1. Sabit Gauss eğrilikli yüzeyler için Chebyshev koordinatları....	80
6.1.2. Backlund ve tamamlanabilme teoremleri	83
6.2. $2n-1$ Boyutlu Lorentz Uzayında Sabit Kesitsel Eğrilikli Yüzeyler	88
6.2.1. Bäcklund teoremi	88
6.2.2. Tamamlanabilme teoremi	97
7. SONUÇ	105
8. KAYNAKLAR	106
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

- BDE : İkili kuadratik diferensiyel denklem
- $Bif(F)$: F fonksiyonunun çatallanma kümesi
- $C(\mathbb{M})$: \mathbb{M} yüzeyinin kostiği
- $Ca(F)$: F fonksiyonunun katasrof kümesi
- d^2 : Uzaklık kare fonksiyonlar ailesi
- E, F, G : Yüzeyin birinci temel formları
- \mathbb{E}^{m+1} : Öklid $(m+1)$ -uzayı
- \mathbb{E}_1^{m+1} : Minkowski (Lorentz) $(m+1)$ -uzayı
- $H_{(\pm)}^m(-1)$: Hiperbolik m -uzayı
- H^T : (Hiperbolik) timelike yükseklik fonksiyonu
- H^S : (Hiperbolik) spacelike yükseklik fonksiyonu
- $Hess(f)$: f fonksiyonunun Hessian matrisi
- K, K^* : Bir yüzeyin Gauss eğriliği
- K_{ij} : Lorentz manifoldun kesitsel eğriliği
- LD : Yüzey üzerinde lightlike noktaların geometrik yeri
- LDC : Kostığın dejenere noktaların geometrik yeri
- LPL : Lightlike asal geometrik yer
- l, m, n : Yüzeyin ikinci temel formları
- \mathbb{M}, \mathbb{M}^* : Minkowski uzayında bir yüzey
- \mathbb{R} : Reel sayılar kümesi
- S_1^m : de Sitter m -uzayı
- w_i, w_{ij} : Diferensiyel formlar
- γ : Minkowski uzayında bir eğri

- φ : Bir yüzeyin parametrizasyonu
- κ_g, q, q^* : Yüzey üzerindeki bir eğrinin geodezik eğriliği
- κ_n, k, k^* : Yüzey üzerindeki bir eğrinin normal eğriliği
- τ_g, p : Yüzey üzerindeki bir eğrinin geodezik burulması
- Ω_{ij} : Lorentz manifoldun eğrilik tensörü
- \langle , \rangle : Lorentz iç çarpımı
- \times : Lorentz vektörel çarpımı
- \wedge : Diferensiyel formların dış çarpımı
- $\|\cdot\|$: Norm

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Yüzey ve fokal yüzeyleri	2
Şekil 4.1. Genel anlamda fokal yüzeyin diffeomorfik olduğu yüzeyler	39
Şekil 4.2. LPL eğrisinin genel noktalarında (soldaki) ve eğrilik çizgilerinin folded tekil noktalarında (sağdaki) kostik üzerindeki metrik yapı..	42



1. GİRİŞ

Sonlu boyutlu bir Öklid uzayında regüler bir eğrinin *fokal eğrisi* ya da *evolütü* oskülör hiperkürelerinin, ki bu hiperküreler eğriyle teğettir, merkezlerinin veya diğer bir deyişle eğrinin eğrilik merkezlerinin oluşturduğu geometrik yer olarak tanımlanır. Örneğin bir çemberin fokal eğrisi tek bir nokta olan kendi merkezidir. Buna denk olarak regüler eğrinin normallerinin zarfı olarak da verilebilir. Fokal eğri ya da evolüt fikrinin Huygens tarafından 1673 yılında ışık üzerine yaptığı çalışmaları vasıtasıyla ortaya çıktığı düşünülmüştür (Yales 1952). Ancak bu kavram Apollonius (yaklaşık M.Ö. 200) tarafından koniklerinin 5. kitabında da tanımlandığı bilinmektedir. Fokal eğriler akışkanlar mekaniği içindeki bazı geometrik sonuçları ifade eden belli optik olayların (örneğin gökkuşağı) çalışılmasında kullanışlıdır (Adam 2002). Ayrıca orjinal eğrinin bir takım özelliklerinin ortaya çıkarılmasında önemli bir yere sahiptir. Örneğin bir eğrinin bir noktasının köşe (vertex) noktası olup olmadığı fokal eğrisi yardımıyla kolayca anlaşılabilir veya singüler noktaların sınıflandırılmasında fokal eğriler önemli yer tutar.

Öklid 3-uzayında bir düzgün \mathbb{M} yüzeyi üzerindeki bir noktada dik kesit eğrilerinin eğrilik merkezleri, normal vektörün belli bir parçasına karşılık gelir. Bu parçaların maksimum ve minimum değerleri iki eğrilik çizgisinin eğrilik merkezleridir. Bu iki noktaya bu noktadaki normalin *fokal noktaları* denir. Bu noktalara yüzeyin (*asal*) *eğrilik merkezleri* olarak da isimlendirilir. *Fokal yüzey* ya da \mathbb{M} yüzeyinin *evolütü* fokal noktaların veya asal eğrilik merkezlerinin geometrik yeri olarak tanımlanır. Bu yüzeye *merkezlerin yüzeyi* ya da \mathbb{M} yüzeyinin *merkezcil-yüzeyi* de denir. Genellikle iki parçadan (maks. ve min. noktalara bağlı olarak) oluşur. \mathbf{Y} , \mathbb{M} yüzeyinin lokal bir parametrizasyonu, k ve k^* yüzeyin asal eğrilikleri ve \mathbf{n} yüzeyin birim normali olmak üzere yüzeyinin umbilik noktaları dışında fokal yüzeylerin parametrik denklemleri

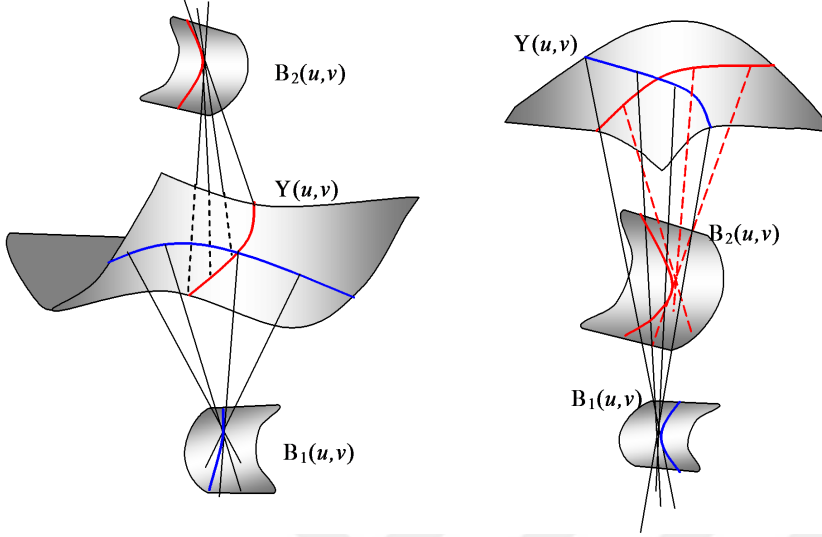
$$\mathbf{B}_1(u, v) = \mathbf{Y}(u, v) + \frac{1}{k} \mathbf{n}(u, v)$$

$$\mathbf{B}_2(u, v) = \mathbf{Y}(u, v) + \frac{1}{k^*} \mathbf{n}(u, v)$$

şeklinindedir. Umbilik noktalarda bu asal eğrilik merkezleri çakışır; umbilik olmayan eliptik noktalarda asal eğrilik merkezleri yüzeyin teğet düzleminin aynı tarafına uzanır (Şekil 1.1 sağda); hiperbolik noktalarda yüzeyin teğet düzleminin farklı taraflarına doğru uzanır (Şekil 1.1 solda); düzlemsel olmayan parabolik noktalarda sadece bir tanesi tanımlıdır diğeri sonsuza gider ve düzlemsel noktalarda tanımlı değildir (Goetz 1968). Örneğin küre, fokal yüzeyleri tek bir noktaya yani merkezine dejenere olan tek yüzeydir; Dupin yüzeylerinin (Dupin cyclide) fokal yüzeyleri ise eğrilere dejenere olur (Hagen vd 1995).

Fokal yüzeyler herhangi bir yüzeyin vasfı, mahiyeti, niteliği ile ilgili bilgi elde etmek için bir sorgu aracı olarak kullanılır. Örneğin, bir yüzey üzerindeki *alt-parabolik çizgiler* (*sub-parabolic lines*) ve *sırt çizgileri* (*ridge lines*), ki bu eğriler medikal alanda ve jeolojide çeşitli uygulamalara sahip olan önemli eğrilerdir, fokal yüzeyler üzerinde sırasıyla parabolik eğri ve *sivri uçlu kenar çizgilerine* (*cuspidal*

edge) karşılık gelir. Yani alt-parabolik ve sırt çizgileri fokal yüzeyler üzerinde bu eğrilerin ters görüntüsü olarak da ifade edilebilir. Ayrıca bu eğriler bir yüzeyin iskeletinin oluşturulmasında kullanılabilir ki Gordon (1991) ve Thirion ve Gourdon (1993) bu şekildeki iskeletleri, yüzlerin kıyaslanmasında kullanmışlardır.



Şekil 1.1. Yüzey ve fokal yüzeyleri

Fokal yüzeylerin bir başka tanımlama aracı da doğru veya rektilineer kongruansları vasıtasıyladır. Bir *doğru kongruansı* 3 boyutlu uzayda (afin, projektif, Öklid ya da Lorentz) iki parametreye bağlı doğruların bir kümesidir. Doğru kongruansları ışığın yansıma ve kırılmasıyla ilgili çalışmalarda ortaya çıkmıştır. Örneğin, bir yüzeyin tüm normal doğruları özel bir doğru kongruansı oluşturur ki buna yüzeyin *normal kongruansı* denir. $\xi(u, v)$ yüzeyin her noktasında bir birim vektör ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, rektilineer kongruans ya da doğru kongruansı

$$R(u, v, \lambda) = \varphi(u, v) + \lambda \xi(u, v) \quad (1.1)$$

olarak parametrize edilir. (u, v) noktası sabitlenip λ katsayısı değiştirildiği zaman, R düz bir doğru oluşturacaktır. $\varphi(u, v)$ ile parametrelendirilmiş M yüzeyine referans yüzey denir. $u = u(t)$ ve $v = v(t)$ ile yüzey üzerinde bir eğri alınırsa (1.1)'den λ ve t 'ye bağlı bir regle yüzey elde edilir. Yani

$$\mathbf{X}(t, \lambda) = \varphi(u(t), v(t)) + \lambda \xi(u(t), v(t))$$

regle yüzeyinin parametrik denklemidir. Bu yüzeyin açılabilir olması için

$$\det(\xi(t), \xi'(t), \varphi'(t)) = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu $u'(t)$ ve $v'(t)$ için λ 'ya bağlı ikinci dereceden bir denklemdir. Bu denklemin farklı iki reel kökü varsa, bu çözümler (1.1) denkleminde yerine konularak açılabilir yüzeyin iki farklı ailesini belirler. Bu nedenle kongruanstaki her doğru bu iki yüzeye teğet olacaktır. Bu değme noktalarına fokal noktalar denir (Şekil 1.1). Tüm fokal noktaların kümesine de *fokal yüzey* denir. Gerçekten

bir regüler yüzeyin normal kongruansları, yani $\xi(u, v) = \mathbf{n}(u, v)$, için bu ifade edilen yol takip edildiği zaman λ 'ya bağlı çözümler asal eğriliklerin çarpmaya göre tersleridir. Bu çözümler (1.1) denkleminde yazılırsa \mathbf{B}_1 ve \mathbf{B}_2 fokal yüzeylerinin yukarıda tanımlanan parametrizasyonları elde edilir (Eisenhart 1969).

Fokal yüzeyler, tekillik teorisi (singularity theory) alanında da farklı bir şekilde tanımlanmıştır. Tekillik teorisinde bir Lagrangian dönüşümün kritik değerlerinin kümesine *Kostik (Caustic)* denir. Öklid 3-uzayında bir regüler yüzeyin normal dönüşümünün kostiği eğrilik merkezlerinin kümesi yani fokal noktalarının kümesidir (Arnold vd 1986). Bu Kostik aynı zamanda yüzeyin normallerinin zarfı olarak da elde edilebilir. Yani, bir regüler yüzeyin fokal yüzeyi, normal doğrularıyla üretilen kostikle çakışır ve aynı zamanda yüzey üzerindeki uzaklık kare fonksiyonlarının çatallanma (bifurcation) kümesine eşittir. Bir düzgün yüzeyin kostiği Lagrangian tekilliklere sahiptir ve genelde umbilik noktalar dışında sivri uçlu kenar yüzeye ($\varphi_C(u, v) = (u^2, u^3, v)$) veya swallowtail yüzeye ($\varphi_S(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$) diffeomorftir. Kostüğün genel modelleri daha ayrıntılı bir şekilde Arnold vd (1986) tarafından Öklid uzayında verilmiştir.

A. V. Bäcکلund tarafından 1883'de ifade edilen Öklid 3-uzayındaki klasik Bäcکلund Teoremi, yarı-küresel (pseudo-spherical) doğru kongruanslarının fokal yüzeylerinin sabit negatif Gauss eğriliğe sahip olduğunu ve birbirine eşit olduğunu söyler. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında Gauss eğriliği -1 olan yüzeyler ile

$$\phi_{uu} - \phi_{vv} = \sin \phi$$

şeklinde verilen Sine-Gordon denkleminin ϕ çözümleri arasında bir ilişki vardır. Bu nedenle Bäcکلund Teoremi, verilen bir yüzeyden Sine-Gordon denkleminin yeni çözümlerini üretmek için alternatif bir yol sunar. Ayrıca, Backlund dönüşümü soliton teorisinde önemli uygulamalara sahiptir (Rogers ve Schief 2002). Tamamlanabilir Teoremi (Integrability Theorem) ise sabit negatif Gauss eğrilikli bir yüzeyden aynı negatif Gauss eğriliğine sahip bir başka yüzey inşa edilebileceğini ve bu iki yüzeye teğet olan bir yarı-küresel doğru kongruansının varlığını ifade eder. Bu teorem bir bakıma Backlund teoreminin tersidir denilebilir.

Bruce ve Giblin (1992) eğrilerin evölütlerini tekillik teorisi vasıtasıyla ele almıştır. Vargas 2005, \mathbb{E}^{m+1} Öklid uzayında fokal eğrilerin genel parametrizasyonlarını tanımlayarak bir eğrinin fokal eğrilikleriyle Öklid eğrilikleri arasında bir bağıntı sunmuştur. Ayrıca bir eğrinin köşe (vertex) noktası olması için gerekli ve yeterli koşulun fokal eğriye karşılık gelen noktanın tekil nokta olduğunu keşfetmiş ve eğrinin Öklid eğrilikleri ve Frenet-Serret çatısıyla fokal eğrisinin Öklid eğrilikleri ve Frenet-Serret çatısı arasındaki bağıntıları göstermiştir. Özdemir (2004) ise Vargas'ın (2005) yaptığı çalışmalarını \mathbb{E}_1^{m+1} Minkowski uzayına taşıyarak fokal eğriyle ilgili elde edilen özellikleri bu uzayda incelemiştir. Izumiya vd (2004a) $H_+^2(-1)$ hiperbolik uzaydaki bir eğrinin evölütünü yani fokal eğrisini hiperbolik yükseklik fonksiyonlarından faydalanarak tanımlamış ve bu fonksiyonlar sayesinde evölütün tekil noktalarını incelemiş ve orjinal eğrinin $H_+^2(-1)$ uzayındaki değişmezleri ile bu tekillikler arasında bağıntı kurmuştur. Sato (2012), Izumiya vd'nin (2004a) yaptıklarını Minkowski 3-uzayındaki bir regüler spacelike yüzeyi üzerine genişletmiş ve yarı-küresel evölüt

olarak isimlendirerek geometrik özelliklerini ve tekil noktalarını incelemiştir. Izumiya vd (2015) ise Sato'nun (2012) spacelike yüzey üzerinde yaptıklarını timelike yüzey üzerinde çalışmış ve evölüt yerine yarı-küresel normal Darboux görüntüsü ismini kullanmıştır.

Porteous (1971) uzaklık kare fonksiyonlarının tekillikleri vasıtasıyla normal fokal kümeleri ele almış ve sırt eğrilerini ilk kez sunmuştur. Bruce ve Wilkinson (1991) düzgün ve regüler bir yüzeyin alt-parabolik çizgilerini tanıtmış ve uzaklık kare fonksiyonlarının çatallanma kümesi ve folding dönüşümlerin çatallanma kümesi arasındaki dualite sonucunu kullanarak yüzey üzerindeki alt-parabolik çizginin fokal yüzey üzerinde parabolik çizgiye karşılık geldiğini göstermiştir. Bruce ve Tari (1996), sırt ve alt-parabolik çizgileri yüzeyin folding dönüşümlerini ele alarak çalışmışlardır. Morris (1996) fokal yüzeylerin Gauss eğriliklerini genel olarak bulmuş ve alt-parabolik çizgilerin bir eğrilik çizgisi boyunca diğer eğrilik çizgisinin asal eğriliklerinin ekstremum noktalarının geometrik yeri olduğunu keşfetmiştir. Ayrıca bu eğriler vasıtasıyla fokal yüzey üzerinde tekil noktalarla ilgili bir takım sonuçlar elde etmiştir. Bruce vd (1999) fokal yüzeyleri ve sırt ve alt-parabolik eğrileri tekillik teorisi içinde ele almışlardır. Abdel-Baky (1999, 2003) regüler bir yüzey üzerindeki eğrilik çizgilerinin teğetleri tarafından üretilen kongruansların fokal yüzeylerini bulmuş ve bazı özelliklerini incelemiştir. Zhong ve Li (2008) Minkowski 3-uzayında spacelike yüzey üzerinde geodeziklerin teğetleriyle üretilen fokal yüzeyleri incelemiş ve Abdel-Baky'e (1999) benzer sonuçlar elde etmiştir. Izumiya vd (2004b) hiperbolik m-uzayda hiperbolik yüzeylerin evölütlerini tekillik teorisinin bir uygulaması olarak değme bakış açısıyla incelemiştir. Tari (2012); Minkowski 3-uzayında fokal yüzeyleri uzaklık kare fonksiyonlarının çatallanma kümesi olarak ele almış ve geometrisini incelemiştir. Ek olarak fokal yüzeyleri metriğin dejenere olduğu noktaların kümesine genişletilmesini sağlamıştır. Şimşek ve Özdemir (2015) ise Minkowski 3-uzayında doğru kongruansları vasıtasıyla fokal yüzeyleri tanımlamış ve geometrisini incelemiştir. Ayrıca spacelike ve timelike yüzey üzerinde alt-parabolik ve sırt eğrilerini tanımlayarak fokal yüzey üzerine karşılık gelen eğrilerle ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

Chern ve Terng (1980) 3-boyutlu afin uzayda Bäcklund teoremini kanıtlamıştır. Bäcklund ve Tamamlanabilme teoremlerinin \mathbb{R}^{2n-1} uzayının n-boyutlu altmanifolduna genelleştirilmesi Tenenblat ve Terng (1980) tarafından verilmiştir. Onlar yarı-küresel doğru kongruansları ile üretilen n-boyutlu \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* altmanifoldlarının kesitsel eğriliklerinin sabit $-\sin^2 \theta / r^2$ olduğunu göstermişlerdir. Gu vd (2005) bu teoremleri Minkowski 3-uzayına genişletmiş ve farklı her durum için ispatlamıştır. Şimşek ve Özdemir (2016), Gu'nun vd (2005) ve Tenenblat ve Terng'in (1980) elde ettiği sonuçları \mathbb{E}_1^{2n-1} Minkowski uzayının n boyutlu altmanifolduna genelleştirerek Bäcklund ve tamamlanabilme teoremlerini oluşabilecek dört farklı durum için de kanıtlamışlardır.

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde fokal eğriler tanımlanmış ve fokal yüzeylerin çeşitli yollarla nasıl belirlendiği ayrıntılı bir şekilde okuyucuya sunulmuştur. Ayrıca fokal eğri ve yüzeylerle ilgili yapılan bir kısım çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde Minkowski uzayı ve tekillik teorisi ile ilgili temel tanım ve özellikler verilmiştir.

Üçüncü kısımda null olmayan eğrilerin fokal eğrileri $m+1$ boyutlu Minkowski uzayında tanımlanmış ve eğrinin köşe noktasında fokal eğrinin singüler noktaya sahip olduğu ve fokal eğrilikleriyle Öklid eğrilikleri arasındaki bağıntılar gösterilmiştir. Ayrıca fokal eğrilikler kullanılarak null olmayan bir eğri üzerindeki bir noktanın köşe noktası olması için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir. $H_+^2(-1)$ hiperbolik uzayında hiperbolik düzlem eğrilerinin hiperbolik fokal eğrisi hiperbolik yükseklik fonksiyonları vasıtasıyla tanıtılmıştır ve hiperbolik fokal eğrinin tekil noktalarıyla orjinal eğrinin geodezik eğriliği arasında bağıntılar gösterilmiştir. Daha sonra, Minkowski 3-uzayındaki bir spacelike yüzey üzerindeki eğrilerin yarı-küresel evolütlerinin parametrisasyonları verilip, geometrik özellikleri ve tekil noktaları tekillik teorisi vasıtasıyla çalışılmıştır. Son olarak timelike yüzey üzerinde de spacelike yüzey üzerinde olana benzer şekilde yarı-küresel evolütler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Minkowski 3-uzayında fokal yüzeyler regüler bir yüzeyin kostiği olarak ele alınmış ve kostik de uzaklık kare fonksiyonunun çatallanma kümesi olarak verilmiştir. Bu tanımlama lightlike noktalara da genişletilerek; lightlike noktaların bir eğri olduğu ve bu eğrinin spacelike ve timelike olarak ikiye ayırdığı karışık yüzeyler üzerinde fokal yüzeylerin geometrisi incelenmiştir. Daha sonra $H_+^m(-1)$ hiperbolik uzayında hiperyüzeylerin diferensiyel geometrisi çalışılmış ve tekil noktaları hiperkürelerle (eşuzaklık hiperdüzlemleriyle) hiperyüzeylerin değmesini belirleyen hiperyüzeylerin hiperbolik (de Sitter) evolüt kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca hiperbolik (de Sitter) evolütün, üreteç ailesi hiperbolik timelike (ya da spacelike) yükseklik fonksiyonu olan hiperbolik m -uzayının kotanjant demetindeki belli bir Lagrangian altmanifoldun kostiği olduğu gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, Minkowski 3-uzayında fokal yüzeylerinden biri kendisi olan bir spacelike yüzey üzerindeki geodezik eğrilerin teğetleriyle üretilen rektilineer kongruansların ikinci fokal yüzeylerinin geometrisi incelenmiştir. Daha sonra bir regüler yüzeyin normal kongruansları tarafından üretilen fokal yüzeylerin parametrisasyonları tanıtılmış ve Gauss eğrilikleri bulunmuştur. Ayrıca sırt ve alt-parabolik çizgiler asal eğriliklerin ekstremum değerleri vasıtasıyla tanımlanmış ve özellikleri fokal yüzeyler yardımıyla çalışılmıştır.

Altıncı bölümde, ilk önce sabit Gauss eğrilikli spacelike ve timelike yüzeyler için Chebyshev koordinatları verilmiştir. Daha sonra yarı-küresel doğru kongruansları ile üretilen fokal yüzeylerin sabit Gauss eğriliklerine sahip olduğu, dört farklı durumda ispatlanmış ve bu teoremlerin tersleri olan tamamlanabilme teoremleri Chebyshev koordinatları vasıtasıyla kanıtlanmıştır. Son olarak Minkowski 3-uzayında ispatlanmış bu teoremlerin \mathbb{E}_1^{2n-1} Minkowski uzayına genelleştirilmesi yapılmış ve her bir durum için ayrı ayrı incelenmiştir. Bu genelleştirmeye bazı durumlar için Minkowski 3-uzayında elde edilen sonuçların üçten daha fazla boyutlu Minkowski uzayında aynı olmadığı yani farklı sonuçlar doğurduğu tespit edilmiştir. Yedinci bölümde ise tezden elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir. Son bölümde de çalışmada yararlanılan kaynaklar gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Lorentz-Minkowski uzayı ve tekillik (singularity) teorisi ile ilgili bazı temel tanım ve kavramlar verilecektir. Daha ayrıntılı bilgiler Minkowski uzayı için O'Neill'in (1983) kitabına ve tekillik teorisi için de Arnold (1986), Bruce ve Giblin (1992) ve Porteous'un (2001) kitaplarına bakılabilir.

Tanım 2.1 (O'Neill 1983) $\mathbb{E}^{m+1} = \{(x_0, x_1, \dots, x_m) : x_i \in \mathbb{R} \ (i = 0, 1, \dots, m)\}$, $m+1$ boyutlu bir Öklid vektör uzayı olsun. Bu vektör uzayında, herhangi $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ ve $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ vektörleri için *Lorentz iç çarpım*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

olarak tanımlanır. $(\mathbb{E}^{m+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayına $(m+1)$ boyutlu *Lorentz* ya da *Minkowski uzayı* denir ve \mathbb{E}_1^{m+1} ile gösterilir.

Tanım 2.2 (O'Neill 1983) Herhangi bir $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektörü için $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$, $= 0$ ya da < 0 ise; bu vektöre sırasıyla *spacelike*, *lightlike* (*null* ya da *isotropik*) ya da *timelike* vektör denir. $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^{m+1}$ vektörünün normu $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3 (O'Neill 1983, Izumiya vd 2004b) Herhangi $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^{m+1}$ vektörü ve c reel sayısı için

$$HP(\mathbf{v}, c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^{m+1} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = c\}$$

ile \mathbf{v} normalli bir hiperdüzlem tanımlanır. \mathbf{v} *timelike*, *spacelike* ya da *lightlike* vektör ise $HP(\mathbf{v}, c)$ 'ye sırasıyla bir *spacelike hiperdüzlem*, *timelike hiperdüzlem* ya da *lightlike hiperdüzlem* denir.

$$H_+^m(-1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^{m+1} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1, x_0 > 0\}$$

ve

$$H_-^m(-1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^{m+1} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1, x_0 < 0\},$$

olmak üzere, *hiperbolik m-uzay*

$$H^m(-1) = H_+^m(-1) \cup H_-^m(-1),$$

ve *de Sitter m-uzay*

$$S_1^m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^{m+1} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.4 (O’neill 1983) $\mathbf{v}_i = (v_0^i, v_1^i, \dots, v_m^i)$ olmak üzere, herhangi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{E}_1^{m+1}$ için $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \dots \times \mathbf{v}_m$ vektörel çarpımı

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \dots \times \mathbf{v}_m = \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_{m+1} \\ v_0^1 & v_1^1 & \dots & v_m^1 \\ v_0^2 & v_1^2 & \dots & v_m^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_0^m & v_1^m & \dots & v_m^m \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{m+1}$ vektörleri \mathbb{E}_1^{m+1} uzayının standart taban vektörleridir. Bu tanımdan kolayca

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \dots \times \mathbf{v}_m \rangle = \det(\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$$

eşitliği bulunabileceğinden herhangi \mathbf{v}_i vektörü $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \dots \times \mathbf{v}_m$ vektörüne diktir.

Tanım 2.5 (O’neill 1983, Hacısalihoğlu 1983) I, \mathbb{R} ’nin bir açık aralığı olmak üzere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^{m+1}$ biçiminde tanımlanan C^r sınıftan fonksiyona bir (*düzgün*) eğri ya da C^r sınıftan *parametrelendirilmiş eğri* denir. Bir $s \in I$ noktasında γ ’nın *hız vektörü* veya *teğet vektörü* $\gamma'(s) = d\gamma/ds$ ile tanımlanır. Eğer her noktada eğrinin teğet vektörü sıfır vektörüne eşit değilse bu eğriye *regüler bir eğri* denir. Her $s \in I$ için $\|\gamma'(s)\| = 1$ ise eğri *yay-uzunluğu* ile parametrelendirilmiştir denir. Her $s \in I$ için $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle > 0, = 0$ ya da < 0 ise eğriye sırasıyla *spacelike, lightlike (null)* ya da *timelike eğri* denir. Eğer her $s \in I$ için $\gamma'(s), \gamma''(s), \dots, \gamma^{(m)}(s)$ vektörleri lineer bağımsız ise Gram-Schmidt metodu kullanılarak $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_1(s), \dots, \mathbf{n}_{m-1}(s)$ ortonormal sistemi elde edilir. $\mathbf{n}_m(s)$ bir null olmayan vektör olsun öyle ki $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_1(s), \dots, \mathbf{n}_m(s)$ çatısı, ortonormal ve pozitif yönlüdür. Bu çatıya γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasında *Frenet-Serret çatısı* denir. \mathbb{E}_1^{m+1} uzayında null olmayan birim hızlı Frenet γ eğrisinin *Frenet-Serret denklemleri*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \varepsilon_{\mathbf{n}_1} \kappa_1(s) \mathbf{n}_1(s) \\ \mathbf{n}_1'(s) &= -\varepsilon_{\mathbf{t}} \kappa_1(s) \mathbf{t}(s) + \varepsilon_{\mathbf{n}_2} \kappa_2(s) \mathbf{n}_2(s) \\ \mathbf{n}_i'(s) &= -\varepsilon_{\mathbf{n}_{i-1}} \kappa_i(s) \mathbf{n}_{i-1}(s) + \varepsilon_{\mathbf{n}_{i+1}} \kappa_{i+1}(s) \mathbf{n}_{i+1}(s), \quad 2 \leq i \leq m-1 \\ \mathbf{n}_m'(s) &= -\varepsilon_{\mathbf{n}_{m-1}} \kappa_m(s) \mathbf{n}_{m-1}(s) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ile verilir, burada

$$\varepsilon_{\mathbf{x}} = \begin{cases} -1; & \mathbf{x} \text{ timelike vektör ise} \\ 1; & \mathbf{x} \text{ spacelike vektör ise} \end{cases}$$

olarak verilir. $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ fonksiyonlarına γ eğrisinin *Öklid eğrilikleri* denir. $\kappa_1, \dots, \kappa_{m-1}$ eğrilikleri pozitifdir ancak son eğrilik κ_m herhangi reel değer alabilir.

Tanım 2.6 (O’neill 1983) $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme olmak üzere $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, gömme (embedding) fonksiyonu ele alınsın ve $\varphi(U) = \mathbb{M}$ ile gösterilsin. Burada, herhangi $p = \varphi(u, v)$ noktasında $T_p\mathbb{M}$ teğet uzayı bir spacelike düzlemden

oluşuyorsa φ 'ye bir *spacelike gömme* ya da bir timelike düzlemden oluşuyorsa *timelike gömme* ve \mathbb{M} yüzeyine sırasıyla bir spacelike yüzey ya da timelike yüzey denir. \mathbb{M} yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

ve $\mathbf{N} = (\varphi_u \times \varphi_v) / \|\varphi_u \times \varphi_v\|$ yüzeyin birim normal vektörü olmak üzere ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} l &= -\langle \mathbf{N}_u, \varphi_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \varphi_{uu} \rangle, \quad m = -\langle \mathbf{N}_u, \varphi_v \rangle = \langle \mathbf{N}, \varphi_{uv} \rangle, \\ n &= -\langle \mathbf{N}_v, \varphi_v \rangle = \langle \mathbf{N}, \varphi_{vv} \rangle \end{aligned}$$

şeklinde sunulabilir.

2.1. Lagrangian Singülerliği ve Fonksiyonların Açılımı

Bu bölümde Arnold vd (1986) ve Bruce ve Giblin (1992) tarafından verilen tekillik teorisinden bahsedilecektir.

Tanım 2.7 (Arnold vd 1986) \mathbb{R}^r üzerinde $\pi : T^*\mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ bir kotanjant demet ve $(u, p) = (u_1, \dots, u_r, p_1, \dots, p_r)$, $T^*\mathbb{R}^r$ üzerinde kanonik koordinat olsun. $T^*\mathbb{R}^r$ üzerinde kanonik simplektik yapı $\omega = \sum_{i=1}^r dp_i \wedge du_i$ kanonik 2-formu vasıtasıyla verilir. $i : L \rightarrow T^*\mathbb{R}^r$ bir immersiyon olsun. $\dim L = r$ ve $i^*\omega = 0$ ise i 'ye bir *Lagrangian immersiyon* denir. Bu durumda $\pi \circ i$ 'nin kritik değer kümesine i 'nin *kostiği* (*caustic*) denir ve $C(L)$ ile gösterilir. Lagrangian tekillik teorisinde temel hedef fonksiyon germ ailesini kullanarak; Lagrangian immersiyon germleri belirlemektir. $F : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, (x, u)) \rightarrow \mathbb{R}$, özel bir (x, u) noktası etrafında tanımlanmış bir düzgün (smooth) fonksiyon olsun. Böyle bir fonksiyona (x, u) noktasında bir *fonksiyon germ* denir. $f(x) = F_u(x, u)$ ise F fonksiyonuna f 'nin bir *r-parametrelî açılımı* (*unfolding*) denir. $F : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, (\mathbf{0}, \mathbf{0})) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ fonksiyon germlerin r-parametrelî açılımı olmak üzere

$$Ca(F) = \left\{ (x, u) \in (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, (\mathbf{0}, \mathbf{0})) : \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, u) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_m}(x, u) = 0 \right\}$$

kümesine F fonksiyonunun *katasrof kümesi* ve

$$Bif(F) = \left\{ u \in (\mathbb{R}^r, 0) : (x, u) \in Ca(F) \text{ vardır öyle ki } \text{rank} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x, u) \right) < m \right\}$$

kümesine F fonksiyonunun *çatallanma* (*bifurcation*) kümesi denir.

Tanım 2.8 (Arnold vd 1986) $\pi_r : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ kanonik izdüşüm olsun. O halde F fonksiyonunun çatallanma kümesi $\pi_r|_{C(F)}$ 'nin kritik değer kümesidir. $(x, u) = (x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r) \in (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0)$ olmak üzere, eğer

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_r} \right) : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$$

dönüşüm germi singüler değilse F fonksiyonuna bir *Morse ailesi* denir.

Tanım 2.8 durumunda $Ca(F) \subset (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0)$ düzgün altmanifold germ ve

$$L(F)(x, u) = \left(u, \frac{\partial F}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_r} \right)$$

ile tanımlanan $L(F) : (Ca(F), 0) \rightarrow T^*\mathbb{R}^r$ dönüşüm germi vardır. $L(F)$ 'nin bir Lagrangian immersiyon olduğu gösterilebilir. O halde aşağıdaki temel teorem söylenebilir.

Önerme 2.9 (Arnold vd 1986) $T^*\mathbb{R}^r$ 'de tüm Lagrangian altmanifold germeler yukarıdaki metodla inşa edilir.

Tanım 2.10 (Arnold vd 1986) Yukarıdaki notasyonla, F 'ye $L(F)$ 'nin *üreteç ailesi* (*generating family*) denir. $i : (L, x) \rightarrow (T^*\mathbb{R}^r, p)$ ve $i' : (L', x') \rightarrow (T^*\mathbb{R}^r, p')$ Lagrangian immersiyon germeleri olsun. Eğer $\sigma : (L, x) \rightarrow (L', x')$ diffeomorfizm germ, $\tau : (T^*\mathbb{R}^r, p) \rightarrow (T^*\mathbb{R}^r, p')$ simplektik diffeomorfizm germ ve $\bar{\tau} : (\mathbb{R}^r, \pi(p)) \rightarrow (\mathbb{R}^r, \pi(p'))$ diffeomorfizm germ vardır öyle ki $\pi : (T^*\mathbb{R}^r, p) \rightarrow (\mathbb{R}^r, \pi(p))$ bir kanonik izdüşüm ve simplektik diffeomorfizm germ $T^*\mathbb{R}^r$ üzerindeki simplektik yapıyı koruyan bir diffeomorfizm germ olmak üzere $\tau \circ i = i' \circ \sigma$ ve $\pi \circ \tau = \bar{\tau} \circ \pi$ ise i ve i' immersiyon germelerine *Lagrangian denktir* denir. Bu durumda $C(L)$ kostiği $\bar{\tau}$ diffeomorfizm germ vasıtasıyla $C(L')$ kostiğine diffeomorftur.

Tanım 2.11 (Bruce ve Giblin 1992) $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (s_0, u_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon germi ve $f(s) = F_{u_0}(s, u_0)$ 'nin r -parametrelili açılımı olsun. Eğer tüm $1 \leq p \leq k$ için $f^{(p)}(s_0) = 0$ ve $f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$ ise s_0 değerinde f fonksiyonu bir A_k -tekilliğe sahiptir denir. Sadece tüm $1 \leq p \leq k$ için $f^{(p)}(s_0) = 0$ koşulu sağlanırsa f , bir $A_{\geq k}$ -tekilliğe sahiptir denir. F, f 'nin bir açılımı ve $f(s), s_0$ değerinde bir A_k -tekilliğe sahip olmak üzere, $(k-1)$. mertebeye göre s_0 noktasında $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ kısmi türevinin Taylor serileri

$$j^{(k-1)} \left(\frac{\partial F}{\partial u_i}(s, u_0) \right) (s_0) = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ji} (s - s_0)^j, \quad i = 1, \dots, r$$

ile gösterilsin. Eğer (α_{ji}) ($j = 1, \dots, k-1$) katsayılarının $(k-1) \times r$ matrisi $k-1$ ($k-1 \leq r$) ranka sahipse F 'ye (p) versal açılımı ((p) versal unfolding) denir. $\alpha_{0i} = \frac{\partial F}{\partial u_i}(s_0, u_0)$ olmak üzere, eğer (α_{ji}) ($j = 0, \dots, k-1$) katsayılarının $k \times r$ matrisi k ($k \leq r$) ranka sahipse F 'ye $(p)^+$ versal açılımı denir.

Tanım 2.10'daki F fonksiyonunun çatallanma kümesi

$$Bif(F) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^r : (s, \mathbf{u}) \text{ 'de } \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0 \text{ ile } s \text{ vardır} \right\}$$

ile ifade edilebilir.

Teorem 2.12 (Bruce ve Giblin 1992) $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (s_0, u_0)) \rightarrow \mathbb{R}$, s_0 noktasında A_k -tekilliğe sahip olan $f(s)$ 'nin r -parametrelili açılımı olsun. Eğer F bir (p) versal açılımı ve $k = 3$ ise \mathbb{R}^r uzayındaki koordinatların düzgün değişimine göre $Bif(F)$, lokal anlamda $C \times \mathbb{R}^{r-2}$ 'dir, burada $C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 = x_2^3\}$ sıradan zirvedir (*ordinary cusp*).

3. FOKAL EĞRİLER

3.1. $m+1$ Boyutlu Lorentz Uzayında Null Olmayan Eğrilerin Fokal Eğri-leri

Tanım 3.1 (Bruce ve Giblin 1992, Vargas 2005)

$$\gamma : t \rightarrow \gamma(s) \in E_1^{m+1}$$

regüler parametrize edilmiş null olmayan düzgün bir eğri olsun. $s = s_0$ noktasında $g \circ \gamma$ fonksiyonu;

$$(g \circ \gamma)(s_0) = (g \circ \gamma)'(\gamma(s_0)) = \dots = (g \circ \gamma)^{(k-1)}(\gamma(s_0)) = 0, \\ g^{(k)}(\gamma(s_0)) \neq 0$$

ifadelerini sağlarsa γ eğrisi, $g^{-1}(0)$ fonksiyonu ile k . mertebeden değme noktasına sahiptir denir. Eğer sadece

$$(g \circ \gamma)(s_0) = (g \circ \gamma)'(\gamma(s_0)) = \dots = (g \circ \gamma)^{(k-1)}(\gamma(s_0)) = 0$$

koşulu sağlanırsa; γ eğrisi, $g^{-1}(0)$ fonksiyonu ile *en az k . mertebeden değme noktasına* sahiptir denir.

Tanım 3.2 (Vargas 2005) $k = 1, \dots, m$ olmak üzere null olmayan bir eğrinin bir noktasındaki *k -oskulator küre*, bu noktada eğriyle en az $(k+2)$. mertebeden değme noktasına sahip olan k boyutlu bir küredir. $k = m$ için bu küreye *oskulator hiperküre* denilecektir.

Tanım 3.3 (Özdemir 2004, Vargas 2005) E_1^{m+1} 'de null olmayan bir eğrinin *köşe* (*vertex*) noktası eğrinin oskulator hiperküresiyle en az $(m+3)$. mertebeden değmeye sahip olduğu noktadır. Ayrıca, E_1^{m+1} Lorentz uzayında null olmayan bir eğrinin *düzleşme* (*flattening*) noktası eğrinin $(m+1)$. dereceden türevinin oskulator düzlemde olduğu noktadır.

Eğrinin düzleşme noktasında, son eğrilik κ_m sıfır değerini alır ve eğri oskulator hiperdüzlemiyle en az $(m+2)$. dereceden değme noktasına sahiptir. Genel bir eğrinin düzleşme noktasında oskulator hiperküre tektir ve oskulator hiperdüzlemle çakışır. Bu durumda oskulator hiperkürenin merkezi tanımlı olmaz.

Tanım 3.4 (Özdemir 2004, Vargas 2005) Null olmayan bir düzgün (düzleşme noktasız) γ eğrisinin oskulator hiperküresinin merkezlerinin geometrik yerinden oluşan $C_\gamma : I \rightarrow E_1^{m+1}$ eğrisine γ eğrisinin *fokal eğrisi* denir.

Bir noktada γ eğrisinin teğetine dik hiperdüzlem γ eğrisine teğet tüm hiperkürelerin merkezlerinin kümesinden oluşur. Bu nedenle oskulator hiperkürenin merkezi böyle normal bir hiperdüzlemde uzanır. Sonuç olarak fokal eğri, f_1, \dots, f_m düzgün fonksiyonlar olmak üzere

$$C_\gamma(t) = (\gamma + f_1 \mathbf{n}_1 + \dots + f_m \mathbf{n}_m)(s) \quad (3.1)$$

şeklinde verilebilir.

Tanım 3.5 (Özdemir 2004, Vargas 2005) $f_i, i = 1, \dots, m$, katsayısına γ eğrisinin i . fokal eğriliği denir.

Lemma 3.6 (Özdemir 2004) $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^{m+1}$ null olmayan bir Frenet eğrisi olsun. γ eğrisinin fokal eğrisinin teğet vektörü γ' 'nin \mathbf{n}_m normal vektörüyle orantılıdır.

İspat: $d^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{E}_1^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $d_{C_\gamma}^2(s) = \frac{1}{2} \|C_\gamma - \gamma(s)\|^2$, uzaklık kare fonksiyonlar ailesidir. Buradan

$$-d_{C_\gamma}^2 = \langle \gamma, C_\gamma \rangle - \frac{\langle \gamma, \gamma \rangle}{2} - \frac{C_\gamma^2}{2}$$

eşitliği vardır. $\xi = \langle \gamma, \gamma \rangle / 2$ denilirse, fokal eğrinin tanımından

$$\begin{aligned} \langle \gamma', C_\gamma(s) \rangle - \xi' &= 0, \\ \langle \gamma'', C_\gamma(s) \rangle - \xi'' &= 0, \\ &\vdots \\ \langle \gamma^{(m+1)}, C_\gamma(s) \rangle - \xi^{(m+1)} &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu denklemlerin s 'ye göre tekrar türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} \langle \gamma', C'_\gamma(s) \rangle + \langle \gamma'', C_\gamma(s) \rangle - \xi'' &= 0, \\ \langle \gamma'', C'_\gamma(s) \rangle + \langle \gamma''', C_\gamma(s) \rangle - \xi''' &= 0, \\ &\vdots \\ \langle \gamma^{(m+1)}, C'_\gamma(s) \rangle + \langle \gamma^{(m+2)}, C_\gamma(s) \rangle - \xi^{(m+2)} &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

denklem sistemi bulunur. (3.2) ve (3.3) denklem sistemlerinin birleşimiyle

$$\begin{aligned} \langle \gamma', C'_\gamma(s) \rangle &= 0, \\ \langle \gamma'', C'_\gamma(s) \rangle &= 0, \\ &\vdots \\ \langle \gamma^{(m)}, C'_\gamma(s) \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

olur. Bu son denklem sistemi fokal eğrinin $C'_\gamma(s)$ teğet vektörünün γ eğrisinin oskülör hiperdüzlemine dik olduğu yani \mathbf{n}_m normal vektörüyle orantılıdır. \square

Önerme 3.7 (Özdemir 2004) \mathbb{E}_1^{m+1} uzayında null olmayan bir Frenet eğrisinin düzleşme olmayan noktasının bir köşe noktası olması için gerek ve yeterli koşul fokal eğrinin hız vektörünün bu noktada sıfır olmasıdır.

İspat: Eğer $\gamma(t)$ bir köşe noktası ise, (3.2) denklem sistemine ek olarak;

$$\langle \gamma^{(m+2)}, C_\gamma(s) \rangle - \xi^{(m+2)} = 0$$

denklemini sağlar. Bu denklemle (3.3) sisteminin son denkleminde

$$\langle \gamma^{(m+1)}, C'_\gamma(s) \rangle = 0$$

bulunur ki bu denklem ve (3.4) sistemi, fokal eğrinin C'_γ hız vektörünün sıfır olduğunu kanıtlar.

Tersine; bir $\gamma(s_0)$ noktası köşe noktası değilse fokal eğriye karşılık gelen nokta

$$\langle \gamma^{(m+2)}(s_0), C_\gamma(s_0) \rangle - \xi^{(m+2)}(s_0) \neq 0$$

ifadesini sağlar ki; (3.3) sisteminin son denkleminde birlikte $C'_\gamma(s) \neq 0$ olduğunu ima eder ki bu bir çelişkidir. \square

Aşağıdaki teorem null olmayan bir eğrinin fokal eğrilikleriyle Öklid eğrilikleri arasındaki bağıntıyı gösterir.

Teorem 3.8 (Özdemir 2004) Null olmayan s yay uzunluğu ile parametrize edilmiş $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^{m+1}$ eğrisinin fokal eğrilikleri $f_m \neq 0$ için aşağıdaki "skalar Frenet denklemlerini" sağlar:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathbf{t}} \\ \varepsilon_{\mathbf{n}_1} f'_1 \\ \varepsilon_{\mathbf{n}_2} f'_2 \\ \varepsilon_{\mathbf{n}_3} f'_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{\mathbf{n}_{m-2}} f'_{m-2} \\ \varepsilon_{\mathbf{n}_{m-1}} f'_{m-1} \\ \varepsilon_{\mathbf{n}_m} f'_m \mp \frac{(r_m^2)'}{2f_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\kappa_{m-1} & 0 & \kappa_m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\kappa_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{m-2} \\ f_{m-1} \\ f_m \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

İspat: Yay uzunluğu parametresine göre; (3.1) ile tanımlı fokal eğrinin türevi alınır ve (2.1) Frenet denklemleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} C'_\gamma &= (1 - \varepsilon_{\mathbf{t}} \kappa_1 f_1) \mathbf{t} + (f'_1 - \varepsilon_{\mathbf{n}_1} \kappa_2 f_2) \mathbf{n}_1 + (f'_2 + \varepsilon_{\mathbf{n}_2} f_1 \kappa_2 - \varepsilon_{\mathbf{n}_2} f_3 \kappa_3) \mathbf{n}_2 \\ &+ \cdots + (f'_i + \varepsilon_{\mathbf{n}_i} f_{i-1} \kappa_i - \varepsilon_{\mathbf{n}_i} f_{i+1} \kappa_{i+1}) \mathbf{n}_i + \cdots + (f'_m + \varepsilon_{\mathbf{n}_m} f_{m-1} \kappa_m) \mathbf{n}_m \end{aligned}$$

elde edilir. C'_γ , \mathbf{n}_m vektörüyle orantılı olduğundan

$$1 = \varepsilon_{\mathbf{t}} \kappa_1 f_1,$$

$$f'_1 = \varepsilon_{\mathbf{n}_1} \kappa_2 f_2,$$

$$f'_2 = -\varepsilon_{\mathbf{n}_2} f_1 \kappa_2 + \varepsilon_{\mathbf{n}_2} f_3 \kappa_3,$$

\vdots

$$f'_{m-1} = -\varepsilon_{\mathbf{n}_{m-1}} f_{m-2} \kappa_{m-1} + \varepsilon_{\mathbf{n}_{m-1}} f_m \kappa_m$$

eşitlikleri bulunur. Buradan $C'_\gamma = (f'_m + \varepsilon_{\mathbf{n}_m} f_{m-1} \kappa_m) \mathbf{n}_m$ olur. Oskülatör Lorentz kürelerin denklemleri $\pm r_m^2 = \langle C_\gamma - \gamma, C_\gamma - \gamma \rangle$ olduğundan $f_m \neq 0$ için

$$\pm (r_m^2)' = 2 \langle (f'_m + \varepsilon_{\mathbf{n}_m} f_{m-1} \kappa_m) \mathbf{n}_m, f_1 \mathbf{n}_1 + \cdots + f_m \mathbf{n}_m \rangle,$$

$$f_{m-1} \kappa_m = -\varepsilon_{\mathbf{n}_m} f'_m \pm \frac{(r_m^2)'}{2f_m} \quad \text{bulunur.} \quad \square$$

Not 3.9 Pseudo-küresel bir eğrinin oskülör Lorentz küresinin yarıçapı sabit olmasından (3.5)'in son eşitliği, $f_{m-1}\kappa_m + \varepsilon_{\mathbf{n}_m}f'_m = 0$ eşitliğiyle ifade edilebilir.

Sonuç 3.10 (Özdemir 2004) $i) \mathbb{E}_1^{m+1}$ uzayında null olmayan bir eğrinin düzleşmeyen bir noktasının köşe noktası olması için gerekli ve yeterli koşul bu noktada $f'_m + \varepsilon_{\mathbf{n}_m}f_{m-1}\kappa_m = 0$ olmasıdır.

$ii) \mathbb{E}_1^{m+1}$ uzayında null olmayan bir eğri bir Lorentz küresi üzerinde uzanır ancak ve ancak $f'_m + \varepsilon_{\mathbf{n}_m}f_{m-1}\kappa_m = 0$ eşitliği sağlanır.

İspat: $i) C'_\gamma = (f'_m + \varepsilon_{\mathbf{n}_m}f_{m-1}\kappa_m) \mathbf{n}_m$ olduğundan Önerme 3.7'den istenen açıktır.

$ii) f_{m-1}\kappa_m = -\varepsilon_{\mathbf{n}_m}f'_m \pm \frac{(r_m^2)'}{2f_m}$ olduğundan $f'_m + \varepsilon_{\mathbf{n}_m}f_{m-1}\kappa_m = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul r_m 'nin sabit olmasıdır ki bu null olmayan bir eğrinin Lorentz küresi üzerinde uzandığını gösterir. \square

Teorem 3.11 (Özdemir 2004) \mathbb{E}_1^{m+1} uzayında null olmayan bir γ eğrisinin $\kappa_i, i = 1, \dots, m$, Öklid eğrilikleri

$$\kappa_1 = \frac{\varepsilon_t}{f_1}, \quad \kappa_i = \frac{\varepsilon_{\mathbf{n}_1}f_1f'_1 + \varepsilon_{\mathbf{n}_2}f_2f'_2 + \dots + \varepsilon_{\mathbf{n}_{i-1}}f_{i-1}f'_{i-1}}{f_{i-1}f_i}, \quad i \geq 2 \quad (3.6)$$

formülü ile fokal eğrilikleri vasıtasıyla ifade edilebilir.

İspat: Teorem 3.8'in skalar Frenet denklemleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\varepsilon_t}{f_1}, \quad \kappa_2 = \frac{\varepsilon_{\mathbf{n}_1}f_1f'_1}{f_1f_2} \text{ ve} \\ \kappa_3 &= \frac{\varepsilon_{\mathbf{n}_2}f'_2 + \kappa_2f_1}{f_3} = \frac{\varepsilon_{\mathbf{n}_1}f_1f'_1 + \varepsilon_{\mathbf{n}_2}f_2f'_2}{f_2f_3} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\kappa_i = \frac{\varepsilon_{\mathbf{n}_1}f_1f'_1 + \varepsilon_{\mathbf{n}_2}f_2f'_2 + \dots + \varepsilon_{\mathbf{n}_{i-1}}f_{i-1}f'_{i-1}}{f_{i-1}f_i}$$

olsun. Bu denklemle $\varepsilon_{\mathbf{n}_i}f'_i = -f_{i-1}\kappa_i + f_{i+1}\kappa_{i+1}$ denklemi birleştirilerek

$$\begin{aligned} \kappa_{i+1} &= \frac{\varepsilon_{\mathbf{n}_i}f'_i + f_{i-1}\frac{\varepsilon_{\mathbf{n}_1}f_1f'_1 + \varepsilon_{\mathbf{n}_2}f_2f'_2 + \dots + \varepsilon_{\mathbf{n}_{i-1}}f_{i-1}f'_{i-1}}{f_{i-1}f_i}}{f_{i+1}} \\ &= \frac{\varepsilon_{\mathbf{n}_1}f_1f'_1 + \varepsilon_{\mathbf{n}_2}f_2f'_2 + \dots + \varepsilon_{\mathbf{n}_i}f_i f'_i}{f_i f_{i+1}} \end{aligned}$$

bulunur ki bu da tümevarım hipotezinden (3.6) eşitlikleri elde edilir. \square

Tanım 3.12 (Vargas 2005) \mathbb{E}_1^{m+1} uzayında null olmayan bir Frenet eğrisinin bir noktasında oskülör Lorentz küresinin merkezi oskülör hiperdüzleminde uzanırsa (yani $f_m = 0$ ise) bu noktaya eğrinin *pseudo-köşe* noktası denir.

Aşağıdaki teorem herhangi k -oskulator Lorentz küresinin yarıçapının kritik olması için gerekli ve yeterli koşulu sunar.

Teorem 3.13 (Özdemir 2004) \mathbb{E}_1^{m+1} uzayında yay uzunluğu parametresiyle verilmiş null olmayan bir Frenet eğrisinin k -oskulator Lorentz küresinin r_k yarıçapının kritik olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} f_2 &= 0, & k &= 1 \text{ için} \\ f_k &= 0 \text{ ya da } f_{k+1} = 0, & 1 < k < m \text{ için} \\ f_m &= 0 \text{ ya da } f'_m + \varepsilon_{\mathbf{n}_m} f_{m-1} \kappa_m = 0, & k &= m \text{ için} \end{aligned}$$

olmasıdır.

İspat: $\pm r_k^2 = \varepsilon_{\mathbf{n}_1} f_1^2 + \varepsilon_{\mathbf{n}_2} f_2^2 + \cdots + \varepsilon_{\mathbf{n}_k} f_k^2$ k -oskulator kürenin yarıçapını veren denklemdir. Buradan parametreye göre türev alınırsa;

$$\pm r_k r'_k = \varepsilon_{\mathbf{n}_1} f_1 f'_1 + \varepsilon_{\mathbf{n}_2} f_2 f'_2 + \cdots + \varepsilon_{\mathbf{n}_k} f_k f'_k$$

ve buradan (3.6) formülünü kullanılırsa $1 \leq k < m$ için

$$\pm r_k r'_k = \kappa_{k+1} f_k f_{k+1}$$

bulunur. $r'_k = 0$ olması için $f_k = 0$ ya da $f_{k+1} = 0$ eşitliğinin sağlanması gerek ve yeterdir. $k = 1$ için $f_1 = \varepsilon_{\mathbf{t}}/\kappa_1$ sıfır olamayacağından $f_2 = 0$ bulunur. $k = m$ için $\pm (r_m^2)' = 2\varepsilon_{\mathbf{n}_m} f_m (f'_m + \varepsilon_{\mathbf{n}_m} f_{m-1} \kappa_m)$ olduğundan $(r_m^2)' = 0$ olması için $f_m = 0$ ya da $f'_m + \varepsilon_{\mathbf{n}_m} f_{m-1} \kappa_m = 0$ sağlanması gerek ve yeterdir. \square

Sonuç 3.14 \mathbb{E}_1^{m+1} uzayında null olmayan bir Frenet eğrisinin bir noktasında oskulator Lorentz küresinin yarıçapı kritiktir ancak ve ancak bu nokta ya köşe noktasıdır ya da pseudo köşe noktasıdır.

3.2. Hiperbolik Düzlem Eğrilerinin Fokal Eğrileri

Bu bölümde; hiperbolik yükseklik fonksiyonlarının tekillik teorisi vasıtasıyla hiperbolik düzlem eğrilerinin fokal eğrilerinin tekil noktaları çalışılacak ve bu tekil noktalar ile hiperbolik düzlem eğrilerinin hiperbolik değişmezleri arasında bağıntı kurulacaktır.

$I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve s yay uzunluğu parametresi olmak üzere

$$\gamma : I \rightarrow H_+^2(-1) \subset \mathbb{E}_1^3$$

düzgün regüler eğrisinin birim spacelike teğet vektörü $\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$ vektörüdür. $\mathbf{e}(s) = \gamma(s) \times \mathbf{t}(s)$ denirse

$$\langle \mathbf{e}(s), \mathbf{e}(s) \rangle = -\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1$$

bulunur. Ayrıca

$$\mathbf{t}(s) \times \mathbf{e}(s) = -\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \gamma(s) + \langle \mathbf{t}(s), \gamma(s) \rangle \mathbf{t}(s) = -\gamma(s)$$

ve $\gamma(s) \times \mathbf{e}(s) = -\mathbf{t}(s)$ olduğundan γ boyunca $\{\gamma(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{e}(s)\}$ ortonormal çatısı elde edilir. Aşağıdaki teorem düzlem eğrilerinin *hiperbolik Frenet-Serret tipi formülü* gösterir (Izumiya vd 2004a).

Teorem 3.15 (Izumiya vd 2004a) Yukarıdaki notasyonlar altında γ eğrisinin hiperbolik Frenet-Serret tipi formül

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \mathbf{t}(s), \\ \mathbf{t}'(s) &= \gamma(s) + \kappa_g(s) \mathbf{e}(s), \\ \mathbf{e}'(s) &= -\kappa_g(s) \mathbf{t}(s)\end{aligned}$$

şekindedir. $\kappa_g(s)$ fonksiyonu $\kappa_g(s) = \det(\gamma(s) \ \mathbf{t}(s) \ \mathbf{t}'(s))$ ile verilen γ eğrisinin geodezik eğriliğidir.

İspat: $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1$ ve buradan $\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0$ olduğundan

$$\mathbf{t}'(s) = \lambda \gamma(s) + \mu \mathbf{e}(s)$$

olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır. Diğer yandan $\langle \mathbf{t}(s), \gamma(s) \rangle = 0$ ve buradan

$$\langle \mathbf{t}'(s), \gamma(s) \rangle = -1$$

olduğundan $\lambda = 1$ bulunur. Ayrıca

$$\mu = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{e}(s) \rangle = \langle \mathbf{t}'(s), \gamma(s) \times \mathbf{t}(s) \rangle = \det(\gamma(s) \ \mathbf{t}(s) \ \mathbf{t}'(s)) = \kappa_g(s)$$

ve

$$\mathbf{e}'(s) = \gamma(s) \times \mathbf{t}'(s) = \gamma(s) \times (\kappa_g(s) \mathbf{e}(s)) = -\kappa_g(s) \mathbf{t}(s)$$

bulunur. \square

Şimdi, $\kappa_g(s) \neq \pm 1$ varsayımı altında; \mathbb{E}_1^3 uzayında

$$HE_\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{|\kappa_g^2(s) - 1|}} (\kappa_g(s) \gamma(s) + \mathbf{e}(s))$$

eğrisi tanımlansın. $HE_\gamma(s)$ eğrisi $H_+^2(-1) \cup H_-^2(-1)$ üzerinde olması için gerek ve yeter koşul $\kappa_g^2(s) > 1$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır; aksi durumda S_1^2 üzerinde uzanır. Eğer $HE_\gamma(s)$, $H_-^2(-1)$ üzerinde ise $HE_\gamma(s)$ yerine $-HE_\gamma(s)$ düşünülebilir. Bu nedenle sadece $HE_\gamma(s)$ 'nin $H_+^2(-1)$ üzerinde olduğu durum düşünülecektir. HE_γ eğrisine γ 'nın *hiperbolik fokal eğrisi (hiperbolik evolütü)* denir. Hiperbolik fokal eğrisinin geometrik özelliklerini incelemek için ilk önce hiperbolik yükseklik fonksiyonları tanımlanacaktır.

3.2.1. Hiperbolik 2-uzayında eğrilerin hiperbolik yükseklik fonksiyonları

Bu bölümde; $\gamma : I \rightarrow H_+^2(-1)$ regüler eğrisi üzerinde iki farklı fonksiyonlar ailesi tanımlanacaktır. Bu fonksiyonlardan

$$H^T : I \times H_+^2(-1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad H^T(s, \mathbf{u}) = \langle \gamma(s), \mathbf{u} \rangle$$

ile tanımlı H^T fonksiyonuna γ eğrisi üzerinde *hiperbolik timelike yükseklik fonksiyonu*

$$H^S : I \times S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H^S(s, \mathbf{u}) = \langle \gamma(s), \mathbf{u} \rangle$$

ile tanımlı H^S fonksiyonuna γ eğrisi üzerinde *hiperbolik spacelike yükseklik fonksiyonu* denir. $H^T(s, \mathbf{u})$ fonksiyonu $h_{\mathbf{u}}^T(s)$ ile ve $H^S(s, \mathbf{u})$ fonksiyonu $h_{\mathbf{u}}^S(s)$ ile gösterilecektir.

Önerme 3.16 (Izumiya vd 2004a) $\gamma : I \rightarrow H_+^2$ birim hızlı bir eğri olsun.

(A) Herhangi $(s, \mathbf{u}) \in I \times H_+^2(-1)$ için;

(a) $(h_{\mathbf{u}}^T)'(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{u} \in \text{span}\{\gamma(s), \mathbf{e}(s)\}$ olmasıdır.

(b) $(h_{\mathbf{u}}^T)'(s) = (h_{\mathbf{u}}^T)''(s) = 0$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - 1}} (\kappa_g(s) \gamma(s) + \mathbf{e}(s)), \quad \text{ve } \kappa_g^2(s) > 1$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

(c) $(h_{\mathbf{u}}^T)'(s) = (h_{\mathbf{u}}^T)''(s) = (h_{\mathbf{u}}^T)^{(3)}(s) = 0$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - 1}} (\kappa_g(s) \gamma(s) + \mathbf{e}(s)), \quad \kappa_g^2(s) > 1 \text{ ve } \kappa_g'(s) = 0$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

(d) $(h_{\mathbf{u}}^T)'(s) = (h_{\mathbf{u}}^T)''(s) = (h_{\mathbf{u}}^T)^{(3)}(s) = (h_{\mathbf{u}}^T)^{(4)}(s) = 0$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - 1}} (\kappa_g(s) \gamma(s) + \mathbf{e}(s)), \quad \kappa_g^2(s) > 1 \text{ ve } \kappa_g'(s) = \kappa_g''(s) = 0$$

olmasıdır.

(B) Herhangi $(s, \mathbf{u}) \in I \times S_1^2$ için;

(a) $(h_{\mathbf{u}}^S)'(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{u} \in \text{span}\{\gamma(s), \mathbf{e}(s)\}$ olmasıdır.

(b) $(h_{\mathbf{u}}^S)'(s) = (h_{\mathbf{u}}^S)''(s) = 0$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa_g^2(s)}} (\kappa_g(s) \gamma(s) + \mathbf{e}(s)) \quad \text{ve } \kappa_g^2(s) < 1$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

$$(c) (h_{\mathbf{u}}^S)'(s) = (h_{\mathbf{u}}^S)''(s) = (h_{\mathbf{u}}^S)^{(3)}(s) = 0$$

ancak ve ancak

$$\mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa_g^2(s)}} (\kappa_g(s) \gamma(s) + \mathbf{e}(s)), \quad \kappa_g^2(s) < 1 \text{ ve } \kappa_g'(s) = 0$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

$$(d) (h_{\mathbf{u}}^S)'(s) = (h_{\mathbf{u}}^S)''(s) = (h_{\mathbf{u}}^S)^{(3)}(s) = (h_{\mathbf{u}}^S)^{(4)}(s) = 0$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa_g^2(s)}} (\kappa_g(s) \gamma(s) + \mathbf{e}(s)), \quad \kappa_g^2(s) < 1 \text{ ve } \kappa_g'(s) = \kappa_g''(s) = 0$$

olmasıdır.

İspat: Hiperbolik Serret-Frenet tipi formül kullanılarak

$$(1) (h_{\mathbf{u}}^T)'(s) = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{u} \rangle,$$

$$(2) (h_{\mathbf{u}}^T)''(s) = \langle \gamma(s) + \kappa_g(s) \mathbf{e}(s), \mathbf{u} \rangle,$$

$$(3) (h_{\mathbf{u}}^T)^{(3)}(s) = \langle (1 - \kappa_g^2(s)) \mathbf{t}(s) + \kappa_g'(s) \mathbf{e}(s), \mathbf{u} \rangle,$$

$$(4) ((h_{\mathbf{u}}^T)^{(4)}(s) = \langle (1 - \kappa_g^2(s)) \gamma(s) - 3\kappa_g(s) \kappa_g'(s) \mathbf{t}(s) \\ + (\kappa_g(s) - \kappa_g^3(s) + \kappa_g''(s)) \mathbf{e}(s), \mathbf{u} \rangle$$

eşitlikleri hesaplanır. (a) hipotezi (1) formülünden takip edilir. (a)'dan

$$\mathbf{u} = \lambda \gamma(s) + \mu \mathbf{e}(s)$$

olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır. O halde (2) formülünden

$$0 = -\lambda + \mu \kappa_g(s)$$

bulunur. Buradan $\mathbf{u} = \mu(\kappa_g(s) \gamma(s) + \mathbf{e}(s))$ yazılabilir; ayrıca $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = -1$ olduğundan $\mu = \pm 1/\sqrt{\kappa_g^2(s) - 1}$ olur.

Diğer tüm hipotezler benzer hesaplamalar yapılarak kolayca ispatlanabilir. \square

3.2.2. Eğrilerin hiperbolik değişmezleri

Bu bölümde; $H_+^2(-1)$ hiperbolik uzaydaki bir eğrinin hiperbolik fokal eğrisinin geometrik özellikleri ele alınacaktır. Herhangi $r \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{u}_0 \in H_+^2(-1)$ ya da $\mathbf{u}_0 \in S_1^2$ için

$$PS^1(\mathbf{u}_0, r) = \{ \mathbf{u} \in H_+^2(-1) : \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_0 \rangle = r \}$$

ile tanımlanan $PS^1(\mathbf{u}_0, r)$ kümesine $H_+^2(-1)$ uzayında \mathbf{u}_0 merkezli bir *pseudo-çember* olarak ifade edilir.

Önerme 3.17 (Izumiya vd 2004a) $\gamma : I \rightarrow H_+^2(-1)$, $\kappa_g^2(s) \neq 1$ olacak şekilde birim hızlı bir eğri olsun. $\kappa_g'(s) \equiv 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{u}_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - 1}} (\kappa_g(s) \gamma(s) + \mathbf{e}(s))$$

vektörünün sabit olmasıdır. Bu koşul altında γ , $H_+^2(-1)$ uzayında \mathbf{u}_0 merkezli bir pseudo-çemberin parçasıdır.

İspat: $P_{\pm}(s) = \pm \mathbf{u}_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s)-1}} (\kappa_g(s) \gamma(s) + \mathbf{e}(s))$ olsun. O halde;

$$P'_{\pm}(s) = \frac{\mp \kappa_g'(s)}{(|\kappa_g^2(s) - 1|)^{3/2}} \gamma(s) \mp \frac{\kappa_g(s) \kappa_g'(s)}{(|\kappa_g^2(s) - 1|)^{3/2}} \mathbf{e}(s)$$

olur. Buradan $P'_{\pm}(s) \equiv 0$ ancak ve ancak $\kappa_g'(s) \equiv 0$ sağlanır.

Bu koşul altında

$$r = \mp \frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{|\kappa_g^2(s) - 1|}} \text{ ve } \mathbf{u}_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{|\kappa_g^2(s) - 1|}} (\kappa_g(s) \gamma(s) + \mathbf{e}(s))$$

denilirse tanımdan $\gamma(s)$ eğrisi $PS^1(\mathbf{u}_0, r)$ pseudo-çemberinin bir parçası olduğu görülür. \square

Önerme 3.18 (Izumiya vd 2004a) $\gamma : I \rightarrow H_+^2(-1)$, $\kappa_g^2(s) \neq 1$ olacak şekilde birim hızlı bir eğri ve herhangi $s_0 \in I$ için, $PS^1(\mathbf{u}_0, r_0)$, $\mathbf{u}_0 = HE_{\gamma}(s_0)$ ve $r_0 = -\frac{\kappa_g(s_0)}{\sqrt{|\kappa_g^2(s_0)-1|}}$ olacak şekilde bir pseudo-çember olsun. γ ve $PS^1(\mathbf{u}_0, r_0)$, $\gamma(s_0)$ noktasında en az 3. mertebeden değme noktasına sahiptir.

İspat: $PS^1(\mathbf{u}_0, r_0) \subset H_+^2(-1)$ olsun. Bu durumda H^T hiperbolik timelike yükseklik fonksiyonu ele alınsın. Tanımdan $PS^1(\mathbf{u}_0, r_0) = (h_{\mathbf{u}_0}^T)^{-1}(r_0)$ eşitliği vardır. Önerme 3.16 (A)-(b) ifadesi γ ve $PS^1(\mathbf{u}_0, r_0)$ 'ın $\gamma(s_0)$ noktasında en az 3. mertebeden değmeye sahip olduğu anlamına gelir. $PS^1(\mathbf{u}_0, r_0) \subset S_1^2$ olması durumunda da H^S hiperbolik spacelike yükseklik fonksiyonu kullanılarak aynı yolla ispatlanabilir. \square

Önerme 3.18'deki $PS^1(\mathbf{u}_0, r_0)$ kümesine *oskulator pseudo-çember* (ya da *geodezik eğriliğin pseudo-çemberi*) ve \mathbf{u}_0 'a *geodezik eğriliğin merkezi* denir. Sonuç olarak, hiperbolik fokal eğri geodezik eğrilik merkezinin geometrik yeri olarak ifade edilebilir. Üstelik, Önerme 3.16 ve 3.18'in aşağıdaki sonucu söylenebilir.

Sonuç 3.19 Oskulator pseudo-çember ve γ , $\gamma(s_0)$ noktasında 4. mertebeden değme noktasına sahip olması için gerek ve yeter koşul $\kappa_g'(s) = 0$ ve $\kappa_g''(s) \neq 0$ ifadelerinin sağlanmasıdır.

3.2.3. Bir değişkenli fonksiyonların açılımları

$H^T(s, \mathbf{u})$ (sırasıyla $H^S(s, \mathbf{u})$ $h_{\mathbf{u}_0}^T(s)$ 'nin bir açılımı (sırasıyla $h_{\mathbf{u}_0}^S(s)$) olarak düşünülürse aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.20 $\gamma : I \rightarrow H_+^2(-1)$, $\kappa_g(s) \neq 0$ ve $\kappa_g^2(s_0) \neq 1$ olacak şekilde birim hızlı bir eğri olsun.

(1) $h_{\mathbf{u}_0}^T(s)$, s_0 noktasında A_3 -tekilliğe sahip ise H^T , $h_{\mathbf{u}_0}^T$ 'nin (p)versal açılımıdır.

(2) $h_{\mathbf{u}_0}^S(s)$, s_0 noktasında A_3 -tekilliğe sahip ise H^S , $h_{\mathbf{u}_0}^S$ 'nin (p)versal açılımıdır.

İspat: $\gamma(s) = (X(s), Y(s), Z(s))$ ve $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \sqrt{-1 + x_1^2 - x_2^2}) \in H_+^2(-1)$ olsun. Bu nedenle

$$H^T(s, \mathbf{u}) = -x_1 X(s) + x_2 Y(s) + \sqrt{-1 + x_1^2 - x_2^2} Z(s)$$

ve

$$\begin{aligned} j^2 \left(\frac{\partial H^T}{\partial x_1}(s, u_0) \right) (s_0) &= \left(-X'(s_0) + \frac{x_1}{\sqrt{-1 + x_1^2 - x_2^2}} Z'(s_0) \right) s \\ &+ \frac{1}{2} \left(-X''(s_0) + \frac{x_1}{\sqrt{-1 + x_1^2 - x_2^2}} Z''(s_0) \right) s^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j^2 \left(\frac{\partial H^T}{\partial x_2}(s, u_0) \right) (s_0) &= \left(Y'(s_0) - \frac{x_2}{\sqrt{-1 + x_1^2 - x_2^2}} Z'(s_0) \right) s \\ &+ \frac{1}{2} \left(Y''(s_0) - \frac{x_2}{\sqrt{-1 + x_1^2 - x_2^2}} Z''(s_0) \right) s^2, \end{aligned}$$

Önerme 3.16'dan $h_{\mathbf{u}_0}^T(s)$, s_0 noktasında A_3 -tekilliğe sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{u}_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s_0) - 1}} (\kappa_g(s_0) \gamma(s_0) + \mathbf{e}(s_0)),$$

$\kappa_g^2(s) > 1$, $\kappa_g'(s) = 0$ ve $\kappa_g''(s) \neq 0$ olmasıdır. Bu amaç için

$$B = \begin{bmatrix} -X' + \frac{x_1}{\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2}} Z' & Y' - \frac{x_2}{\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2}} Z' \\ -X'' + \frac{x_1}{\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2}} Z'' & Y'' - \frac{x_2}{\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2}} Z'' \end{bmatrix}$$

matrisinin singüler olmaması gerekir. s_0 noktasında bu matrisin determinanti

$$\begin{aligned}
 \det B &= (- (Y'Z'' - Z'Y''), Z'X'' - X'Z'', X'Y'' - Y'X'') \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2}} \\ -\frac{x_2}{\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2}} \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= \{X', Y', Z'\} \times \{X'', Y'', Z''\} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2}} \\ -\frac{x_2}{\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2}} \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2}} (\mathbf{t} \times (\gamma + \kappa_g \mathbf{e})) \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ \sqrt{-1+x_1^2-x_2^2} \end{pmatrix} \\
 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2}} \right) \langle -\kappa_g \gamma - \mathbf{e}, \mathbf{u}_0 \rangle \\
 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2}} \right) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2 - 1}} \langle -\kappa_g \gamma - \mathbf{e}, \kappa_g \gamma + \mathbf{e} \rangle \right) \\
 &= \mp \frac{\sqrt{\kappa_g^2 - 1}}{\sqrt{-1+x_1^2-x_2^2}} \neq 0
 \end{aligned}$$

olduğundan B matrisi singüler değildir.

(2) H^S için de benzer yolla ispatlanır. \square

Teorem 3.21 $\gamma : I \rightarrow H_+^2(-1)$ regüler bir eğri olsun.

(1) $\kappa'_g(s_0) \neq 0$ ise $HE_\gamma(s_0)$ noktasında hiperbolik fokal eğri regülerdir.

(2) $\kappa'_g(s_0) = 0$ ve $\kappa''_g(s_0) \neq 0$ ise $HE_\gamma(s_0)$ noktasında hiperbolik fokal eğri $H_+^2(-1)$ ya da S_1^2 uzayındaki koordinatların düzgün değişimine göre lokal olarak sıradan zirvedir.

İspat:

$$HE'_\gamma(s) = -\kappa'_g(s) (\kappa_g^2 - 1)^{-3/2} (\gamma(s) + \kappa_g(s) \mathbf{e}(s))$$

olduğundan (1) hipotezi doğrudur. (2) için H^T 'nin çatallanma kümesi

$$Bif(H^T) = \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - 1}} (\kappa_g(s) \gamma(s) + \mathbf{e}(s)) : \kappa_g^2(s) > 1 \right\}$$

olarak bulunur. $H_+^2(-1)$ hiperbolik uzayında γ 'nın hiperbolik fokal eğrisi bu kümenin bir parçasıdır. Teorem 2.12 ve Önerme 3.20'den, $\kappa'_g(s_0) = 0$ ve $\kappa''_g(s_0) \neq 0$ ise $u_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s_0) - 1}} (\kappa_g(s_0) \gamma(s_0) + \mathbf{e}(s_0))$ noktasında $Bif(H^T)$, $H_+^2(-1)$ 'de koordinatların düzgün değişimine göre lokal olarak zirvedir. \square

Sonuç 3.19 ve Teorem 3.21, hiperbolik fokal eğrinin zirve noktasının γ ve oskülör pseudo-çemberin 4. mertebeden değme noktasına sahip olduğu $\gamma(s_0)$ noktasına karşılık geldiğini söyler. Bu nedenle böyle bir noktaya γ eğrisinin *sıradan köşe* (*ordinary vertex*) noktası denir. $\kappa'_g(s_0) = 0$ ve $\kappa''_g(s_0) = 0$ olan $\gamma(s_0)$ noktasına γ eğrisinin *yüksekçe köşe* (*heigher vertex*) noktası denir.

3.3. Lorentz 3-Uzayında Spacelike Yüzey Üzerindeki Eğrilerin Evolütleri

Bir önceki bölümde hiperbolik $H^2_+(-1)$ uzayında hiperbolik düzlem eğrilerinin fokal eğrileri tanıtılmış ve geometrik özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde \mathbb{E}^3_1 Lorentz uzayındaki herhangi spacelike \mathbb{M} yüzeyi üzerindeki eğrilerle elde edilen fokal eğriler yani evolütler incelenerek bu kavram genişletilecektir.

$\tilde{\gamma} : I \rightarrow U$ bir regüler eğri ise $\gamma(s) = \varphi(\tilde{\gamma}(s))$ ile tanımlı $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M} \subset \mathbb{E}^3_1$ eğrisi vardır. s yay uzunluğu parametresi olmak üzere $\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$ ve \mathbb{M} spacelike yüzeyi boyunca $p = \varphi(u, v)$ için birim timelike normal vektör alanı

$$\mathbf{n}(p) = \frac{(\varphi_u \times \varphi_v)(u, v)}{\|(\varphi_u \times \varphi_v)(u, v)\|}$$

olarak ifade edilsin. Eğer $\langle \mathbf{n}, (1, 0, 0) \rangle < 0$ ise \mathbf{n} vektörüne *gelecek yönlü* (*future directed*) denir. \mathbb{M} spacelike yüzeyinin oryantasyonu \mathbf{n} gelecek yönlü olacak şekilde seçilsin. $\mathbf{n}_\gamma(s) = \mathbf{n} \circ \gamma(s)$ ile tanımlı γ boyunca bir birim timelike normal vektör alanı vardır. Bu nedenle $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}_\gamma(s)$ birim spacelike binormal vektör alanı tanımlanabilir. O halde γ boyunca *Lorentz Darboux çatısı* denen $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{b}(s)\}$ pseudo-ortonormal çatısı elde edilir.

$$\begin{aligned} \kappa_n(s) &= -\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle, \kappa_g(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle \\ \tau_g(s) &= -\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle \end{aligned}$$

olmak üzere, bir önceki bölüme benzer argümanlarla

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa_n(s) \mathbf{n}_\gamma(s) + \kappa_g(s) \mathbf{b}(s), \\ \mathbf{n}'_\gamma(s) &= \kappa_n(s) \mathbf{t}(s) + \tau_g(s) \mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) &= -\kappa_g(s) \mathbf{t}(s) + \tau_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s), \end{aligned}$$

eşitlikleriyle ifade edilen Frenet-Serret tipi formül vardır. Spacelike γ eğrisi

$$\gamma \text{ eğrisi } \begin{cases} \text{bir geodezik eğridir eğer } \kappa_g \equiv 0 \text{ ise,} \\ \text{bir asimptotik eğridir eğer } \kappa_n \equiv 0 \text{ ise,} \\ \text{bir asal eğridir eğer } \tau_g \equiv 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde karakterize edilebilir:

3.3.1. Spacelike yüzey üzerinde yükseklik fonksiyonları

Bir önceki bölümde $H^2_+(-1)$ uzayındaki bir eğri üzerinde tanımlanan H^T ve H^S yükseklik fonksiyonları spacelike \mathbb{M} yüzeyi üzerindeki bir $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M} \subset \mathbb{E}^3_1$ regüler

eğrisi üzerine genişletilebilir. H^T ve H^S fonksiyonları sırasıyla γ eğrisinin *time-like yükseklik fonksiyonu* ve *spacelike yükseklik fonksiyonu* olarak isimlendirilebilir. $H^T(s, \mathbf{v})$ fonksiyonu $h_{\mathbf{v}}^T(s)$ ile ve $H^S(s, \mathbf{v})$ fonksiyonu $h_{\mathbf{v}}^S(s)$ ile gösterilecektir.

Aşağıdaki Önerme, Bölüm 3.2.1'deki Önerme 3.16'nın spacelike \mathbb{M} yüzeyi üzerine genelleştirilmesidir.

Önerme 3.22 (Sato 2012) $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ birim hızlı bir spacelike eğri olsun.

(A) Herhangi $(s, \mathbf{v}) \in I \times H_+^2(-1)$ için;

(1) $(h_{\mathbf{v}}^T)'(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{n}_{\gamma}(s) + \mu \mathbf{b}(s)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır.

(2) $(h_{\mathbf{v}}^T)'(s) = (h_{\mathbf{v}}^T)''(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \kappa_n^2(s)}} (\kappa_g(s) \mathbf{n}_{\gamma}(s) + \kappa_n(s) \mathbf{b}(s))$$

$$\text{ve } \kappa_g^2(s) > \kappa_n^2(s)$$

olmasıdır.

(3) $(h_{\mathbf{v}}^T)'(s) = (h_{\mathbf{v}}^T)''(s) = (h_{\mathbf{v}}^T)^{(3)}(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \kappa_n^2(s)}} (\kappa_g(s) \mathbf{n}_{\gamma}(s) + \kappa_n(s) \mathbf{b}(s)),$$

$$\kappa_g^2(s) > \kappa_n^2(s) \text{ ve } \sigma_H(s) = \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g} \right)' + \tau_g \left(1 - \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g} \right)^2 \right) = 0$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

(4) $(h_{\mathbf{v}}^T)'(s) = (h_{\mathbf{v}}^T)''(s) = (h_{\mathbf{v}}^T)^{(3)}(s) = (h_{\mathbf{v}}^T)^{(4)}(s) = 0$

olması için

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \kappa_n^2(s)}} (\kappa_g(s) \mathbf{n}_{\gamma}(s) + \kappa_n(s) \mathbf{b}(s))$$

$$\kappa_g^2(s) > \kappa_n^2(s), \sigma_H(s) = 0 \text{ ve } \sigma_H'(s) = 0$$

ifadelerinin sağlanması gerek ve yeterdir.

(B) Herhangi $(s, \mathbf{v}) \in I \times S_1^2$ için;

(1) $(h_{\mathbf{v}}^S)'(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{n}_{\gamma}(s) + \mu \mathbf{b}(s)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır.

$$(2) (h_{\mathbf{v}}^S)'(s) = (h_{\mathbf{v}}^S)''(s) = 0$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_n^2(s) - \kappa_g^2(s)}} (\kappa_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s) - \kappa_n(s) \mathbf{b}(s))$$

$$\text{ve } \kappa_n^2(s) > \kappa_g^2(s)$$

olmasıdır.

$$(3) (h_{\mathbf{v}}^S)'(s) = (h_{\mathbf{v}}^S)''(s) = (h_{\mathbf{v}}^S)^{(3)}(s) = 0$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_n^2(s) - \kappa_g^2(s)}} (\kappa_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s) - \kappa_n(s) \mathbf{b}(s)),$$

$$\kappa_n^2(s) > \kappa_g^2(s) \text{ ve } \sigma_D(s) = \left(\frac{\kappa_g}{\kappa_n}\right)' + \tau_g \left(1 - \left(\frac{\kappa_g}{\kappa_n}\right)^2\right) = 0$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

$$(4) (h_{\mathbf{v}}^S)'(s) = (h_{\mathbf{v}}^S)''(s) = (h_{\mathbf{v}}^S)^{(3)}(s) = (h_{\mathbf{v}}^S)^{(4)}(s) = 0$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_n^2(s) - \kappa_g^2(s)}} (\kappa_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s) - \kappa_n(s) \mathbf{b}(s)),$$

$$\kappa_n^2(s) > \kappa_g^2(s), \sigma_D(s) = 0 \text{ ve } \sigma_D'(s) = 0$$

olmasıdır.

İspat: $\frac{\partial H^T}{\partial s} = \langle \mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ise $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{n}_\gamma(s) + \mu \mathbf{b}(s)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $\mathbf{v} \in H_+^2(-1)$ olduğundan $-\lambda^2 + \mu^2 = -1$ sağlanır. Frenet-Serret tipi formül kullanılırsa

$$\frac{\partial^2 H^T}{\partial s^2} = \langle \mathbf{t}', \mathbf{v} \rangle = -\lambda \kappa_n + \mu \kappa_g$$

olur. Buradan $\frac{\partial H^T}{\partial s} = \frac{\partial^2 H^T}{\partial s^2} = 0$ eşitlikleri sağlanır ancak ve ancak

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{n}_\gamma(s) + \mu \mathbf{b}(s) \text{ ve } \lambda \kappa_n = \mu \kappa_g$$

eşitlikleri vardır. Bu ifade

$$\lambda^2 (\kappa_g^2 - \kappa_n^2) = \kappa_g^2$$

koşuluna denktir. $\kappa_g^2(s) > \kappa_n^2(s)$ koşulu altında

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \kappa_n^2(s)}} (\kappa_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s) + \kappa_n(s) \mathbf{b}(s))$$

bulunur. Ayrıca $\frac{\partial H^T}{\partial s} = \frac{\partial^2 H^T}{\partial s^2} = \frac{\partial^3 H^T}{\partial s^3} = 0$ eşitlikleri için

$$\kappa_g \kappa_n' + \kappa_g^2 \tau_g - \kappa_n^2 \tau_g - \kappa_n \kappa_g' = 0$$

olması gerek ve yeterdir. $\kappa_g^2(s) > \kappa_n^2(s)$ koşulu altında son eşitlik κ_g^2 ile bölünürse

$$\sigma_H = \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g} \right)' + \tau_g \left(1 - \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_g} \right)^2 \right) = 0$$

eşitliği bulunur. H^T fonksiyonun 4. dereceden türevi alınırsa yukarıdaki koşullara ek olarak;

$$-\kappa_g \kappa_n'' - 2\kappa_g \kappa_g' \tau_g - \kappa_g^2 \tau_g' + 2\kappa_n \kappa_n' \tau_g + \kappa_n^2 \tau_g^2 + \kappa_n \kappa_g'' = 0$$

vardır ki bu koşul $\sigma_H(s) = 0$ ve $\sigma_H'(s) = 0$ koşullarına denktir. (B) için de benzer hesaplamalar yapılabilir. \square

Şimdi, $\mathbf{h}_\gamma : I \rightarrow H_+^2(-1)$ ve $\mathbf{d}_\gamma : I \rightarrow S_1^2$

$$\mathbf{h}_\gamma(s) = \frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \kappa_n^2(s)}} \mathbf{n}_\gamma(s) + \frac{\kappa_n(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \kappa_n^2(s)}} \mathbf{b}(s)$$

$$\mathbf{d}_\gamma(s) = \frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{\kappa_n^2(s) - \kappa_g^2(s)}} \mathbf{n}_\gamma(s) - \frac{\kappa_n(s)}{\sqrt{\kappa_n^2(s) - \kappa_g^2(s)}} \mathbf{b}(s)$$

eğrileri tanımlansın. \mathbf{h}_γ eğrisine \mathbb{M} spacelike yüzeyine göre γ eğrisinin *hiperbolik fokal eğrisi* ve \mathbf{d}_γ eğrisine \mathbb{M} spacelike yüzeyine göre γ eğrisinin *de Sitter fokal eğrisi* denir. Ayrıca, \mathbf{h}_γ ve \mathbf{d}_γ eğrilerinden birine \mathbb{M} spacelike yüzeyine göre γ eğrisinin *pseudo-küresel fokal eğrisi* denir. Direk hesaplamayla;

$$\mathbf{h}'_\gamma(s) = 0 \text{ ancak ve ancak } \sigma_H(s) = 0,$$

$$\mathbf{d}'_\gamma(s) = 0 \text{ ancak ve ancak } \sigma_D(s) = 0,$$

ifadeleri bulunur. Bu nedenle $\mathbf{h}_\gamma(s) = \mathbf{v}_0$ sabittir ancak ve ancak $\sigma_H(s) \equiv 0$ denkliği vardır. Bu durumda, $P(\mathbf{v}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = r, r \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere, Önerme 3.22'den $h_{\mathbf{v}_0}^T(s)$ sabittir; yani $h_{\mathbf{v}_0}^T(s) = \langle \gamma(s), \mathbf{v}_0 \rangle = r$ olacak şekilde $r \in \mathbb{R}$ vardır ki bu $\text{Im } \gamma = P(\mathbf{v}_0, r) \cap \mathbb{M}$ eşitliğini gerçekler. Bu formdaki eğrilere \mathbb{M} 'nin *hiperbolik-dilimi* (*H-dilim* (*H-slice*)) denir. Aynı yolla $\mathbf{v} \in S_1^2$ için $\text{Im } \gamma = P(\mathbf{v}, r) \cap \mathbb{M}$ ile *de Sitter dilim* (*D-dilim*) tanımlanır. Eğer $\kappa_n = 0$ ise, $\mathbf{h}_\gamma(s) = \mathbf{n}_\gamma(s)$ olur. Bu ise $p = \varphi(u, v)$ noktasında $\mathbf{v} \in H_+^2(-1)$ için $P(\mathbf{v}, r)$ kümesinin bir teğet düzlem olduğu ve $P(\mathbf{v}, r) \cap \mathbb{M}$ 'nin singüler noktaya sahip olduğu anlamına gelir. Bu nedenle $\kappa_n \neq 0$ olması durumu için H-dilim eğrisi ele alınabilir (Sato 2012).

Şimdi σ_H ve σ_D fonksiyonlarının geometrik anlamları araştırılacaktır.

$$\mathcal{H}^T : \mathbb{E}_1^3 \times H_+^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$$

fonksiyon ailesi tanımlansın. Herhangi $\mathbf{v}_0 \in H_+^2(-1)$ için $\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^T(\mathbf{x}) = \mathcal{H}^T(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0)$ ile gösterilirse

$$h_{\mathbf{v}_0}^T(s) = \langle \gamma(s), \mathbf{v}_0 \rangle = \mathcal{H}^T(\gamma(s), \mathbf{v}_0) = \mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^T(\gamma(s))$$

bulunur. Dahası, herhangi $s_0 \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{v}_0 = \mathbf{h}_\gamma(s_0)$ için $(\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^T|_{\mathbb{M}})^{-1}(r)$ \mathbb{M} 'nin bir H-dilimidir. Önerme 3.22'den $r_0 = h_{\mathbf{v}_0}^T(s_0)$ olmak üzere $(\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^T)^{-1}(r_0) = P(\mathbf{v}_0, r_0)$, $\gamma(s_0)$ noktasında γ eğrisine teğettir ki böylece $(\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^T|_{\mathbb{M}})^{-1}(r_0)$, γ eğrisine teğet olan \mathbb{M} yüzeyinin bir H-dilimidir. $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^S = P(\mathbf{v}_0, r_0)$ düzlemine $\mathbf{v}_0 = \mathbf{h}_\gamma(s_0)$ vektörüne göre $\gamma(s_0)$ noktasında γ eğrisinin *spacelike teğet düzlemi* denir. Dahası, $\kappa_n(s_0) \neq 0$ ise $(\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^T|_{\mathbb{M}})^{-1}(r_0)$ H-dilimi $\gamma(s_0)$ noktasında singüler değildir. Buna $\gamma(s_0)$ noktasında \mathbb{M} spacelike yüzeyine ilişkin γ eğrisinin *teğet H-dilimi* denir. $T_{\mathbb{M}, \gamma(s_0)}^H$ ile gösterilir. O halde yukarıdaki işlemlerden ve Önerme 3.22'den, γ ve $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^S$, $\gamma(s_0)$ noktasında 4. mertebeden değmeye sahip olması için $\sigma_H(s_0) = 0$ ve $\sigma'_H(s_0) \neq 0$ ifadelerinin sağlanması gerek ve yeterdir. $\kappa_n(s_0) \neq 0$ olmak üzere bu koşullar γ ve $T_{\mathbb{M}, \gamma(s_0)}^H$ $\gamma(s_0)$ noktasında 4. mertebeden değmeye sahiptir koşuluna denktir. O halde aşağıdaki önerme söylenebilir.

Önerme 3.23 (Sato 2012) $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$, regüler bir eğri olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

(1) γ ve $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^S$ spacelike teğet düzlemi 4. mertebeden değmeye sahiptir,

(2) $\sigma_H(s_0) = 0$ ve $\sigma'_H(s_0) \neq 0$. Eğer $\kappa_n(s_0) \neq 0$ ise $T_{\mathbb{M}, \gamma(s_0)}^H$ teğet H-dilimi $\gamma(s_0)$ noktasında singüler değildir ve bu iki koşul aşağıdaki koşula denktir:

(3) γ ve $T_{\mathbb{M}, \gamma(s_0)}^H$, $\gamma(s_0)$ noktasında 4. mertebeden değmeye sahiptir. Dahası, $\kappa_n(s_0) = 0$ ise $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^S$ spacelike teğet düzlemi \mathbb{M} yüzeyinin $T_{\gamma(s_0)}\mathbb{M}$ teğet düzlemidir ve $\mathbf{t}(s_0)$, $\gamma(s_0)$ noktasında \mathbb{M} 'nin asimptotik vektörüdür.

Diğer yandan $\mathbf{v} \in S_1^2$ için $P(\mathbf{v}, r)$ bir timelike düzlemdir. Bu nedenle D-dilim her zaman regüler bir egridir. Ayrıca

$$\mathcal{H}^S : \mathbb{E}_1^3 \times S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$$

tanımlansın. Yukarıda \mathcal{H}^T için takip edilen benzer yolla, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{d}_\gamma(s_0)$ 'a göre $\gamma(s_0)$ noktasında γ eğrisinin *timelike teğet düzlemi* ve \mathbb{M} yüzeyinde γ eğrisinin *teğet D-dilimi* tanımlamaları yapılabilir. Sırasıyla bu kavramlar $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^T$ ve $T_{\mathbb{M}, \gamma(s_0)}^D$ ile gösterilir. Ayrıca Önerme 3.22'den, γ ve $T_{\mathbb{M}, \gamma(s_0)}^D$, $\gamma(s_0)$ noktasında 4. mertebeden değmeye sahip olması için gerek ve yeter koşul $\sigma_D(s_0) = 0$ ve $\sigma'_D(s_0) \neq 0$ olmasıdır.

Önerme 3.24 (Sato 2012) $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$, regüler bir eğri olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

- (1) γ ve timelike teğet düzlem $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^T$ 4. mertebeden değmeye sahiptir.
- (2) $\sigma_D(s_0) = 0$ ve $\sigma'_D(s_0) \neq 0$ ifadeleri vardır.
- (3) γ ve teğet D-dilim $T_{\mathbb{M}, \gamma(s_0)}^D$ üçüncü mertebeden değmeye sahiptir.

Sonuç olarak, pseudo-küresel fokal eğriler sabitse, yani $\mathbf{h}'_\gamma \equiv 0$ ya da $\mathbf{d}'_\gamma \equiv 0$, \mathbb{M} yüzeyi üzerinde model eğriler vardır.

3.3.2. Spacelike yüzey üzerindeki eğri için fonksiyon açılımları

Bu bölümde; pseudo-küresel fokal eğrilerin tekil noktaları çalışılacaktır. Tekillik teorisinde temel kavramlar göz önüne alınarak aşağıdaki önerme söylenebilir.

Önerme 3.25 (Sato 2012) $\gamma : I \rightarrow H_+^2(-1)$, $\kappa_g(s) \neq 0$ ve $\kappa_n(s_0) \neq 0$ olacak şekilde birim hızlı bir eğri olsun.

- (1) $\mathbf{h}_{\mathbf{v}_0}^T(s)$, s_0 noktasında A_3 -tekilliğe sahip ise H^T , $\mathbf{h}_{\mathbf{v}_0}^T(s)$ 'nin (p)versal açılımıdır.
- (2) $\mathbf{h}_{\mathbf{v}_0}^S(s)$, s_0 noktasında A_3 -tekilliğe sahip ise H^S , $\mathbf{h}_{\mathbf{v}_0}^S(s)$ 'nin (p)versal açılımıdır.

İspat: $\gamma(s) = (x_0, x_1, x_2)$ ve $\mathbf{v} = (\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}, v_1, v_2) \in H_+^2(-1)$ olmak üzere

$$H^T(s, \mathbf{v}) = -x_0(s) \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1} + x_1(s) v_1 + x_2(s) v_2$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^T}{\partial v_1} &= \frac{-v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} x_0(s) + x_1(s), & \frac{\partial H^T}{\partial v_2} &= \frac{-v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} x_0(s) + x_2(s) \\ \frac{\partial^2 H^T}{\partial s \partial v_1} &= \frac{-v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} x'_0(s) + x'_1(s), & \frac{\partial^2 H^T}{\partial s \partial v_2} &= \frac{-v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} x'_0(s) + x'_2(s) \\ \frac{\partial^3 H^T}{\partial s^2 \partial v_1} &= \frac{-v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} x''_0(s) + x''_1(s), & \frac{\partial^3 H^T}{\partial s^2 \partial v_2} &= \frac{-v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} x''_0(s) + x''_2(s) \end{aligned}$$

olur. Önerme 3.22'den $\mathbf{h}_{\mathbf{u}_0}^T(s)$, s_0 noktasında A_3 -tekilliğe sahiptir ancak ve ancak

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \kappa_n^2(s)}} (\kappa_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s) + \kappa_n(s) \mathbf{b}(s)), \quad \kappa_g^2(s) > \kappa_n^2(s),$$

$$\sigma_H(s) = 0 \text{ ve } \sigma'_H(s) \neq 0$$

koşulları vardır. Şimdi

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} x'_0(s) + x'_1(s) & \frac{-v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} x'_0(s) + x'_2(s) \\ \frac{-v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} x''_0(s) + x''_1(s) & \frac{-v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} x''_0(s) + x''_2(s) \end{bmatrix}$$

matrisinin tekil olmaması gerekir. O halde bu matrisin determinanı

$$\begin{aligned}
 \det A &= (- (x'_1 x''_2 - x'_2 x''_1), x'_2 x''_0 - x'_0 x''_2, x'_0 x''_1 - x'_1 x''_0) \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} \\ \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} \end{pmatrix} \\
 &= \{x'_0, x'_1, x'_2\} \times \{x''_0, x''_1, x''_2\} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} \\ \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} (\mathbf{t} \times (\kappa_n \mathbf{n}_\gamma + \kappa_g \mathbf{b})) \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} \\ \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\pm 1}{\sqrt{(\kappa_g^2(s) - \kappa_n^2(s)) (v_1^2 + v_2^2 + 1)}} ((\kappa_n \mathbf{b} + \kappa_g \mathbf{n}_\gamma)) \cdot (\kappa_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s) + \kappa_n(s) \mathbf{b}(s)) \\
 &= \frac{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \kappa_n^2(s)}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 1}} \neq 0
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Spacelike yükseklik fonksiyonu H^S için de aynı düşünceler uygulanırsa (2) hipotezi elde edilir. \square

Teorem 3.26 (Sato 2012) $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ regüler bir eğri olsun.

(A1) $\sigma_H(s_0) \neq 0$ ise $\mathbf{h}_\gamma(s_0)$ 'da hiperbolik fokal eğri regülerdir.

(A2) Aşağıdaki koşullar denktir:

(i) $\mathbf{h}_\gamma(s_0)$ noktasında hiperbolik fokal eğrinin germi sıradan zirveye diffeomorftir.

(ii) $\sigma_H(s_0) = 0$ ve $\sigma'_H(s_0) \neq 0$ ifadeleri sağlanır.

(iii) $\mathbf{v}_0 = \mathbf{h}_\gamma(s_0)$ olmak üzere, γ ve spacelike teğet düzlem $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^S$ dördüncü mertebeden değmeye sahiptir.

(iv) $\kappa_n(s_0) \neq 0$ ise $\gamma(s_0)$ noktasında teğet H-dilim $T_{\mathbb{M}, \gamma(s_0)}^H$ singüler değildir ve γ eğrisi ile dördüncü mertebeden değmeye sahiptir.

(B1) $\sigma_D(s_0) \neq 0$ ise $\mathbf{d}_\gamma(s_0)$ noktasında de Sitter fokal eğri regülerdir.

(B2) Aşağıdaki koşullar denktir:

(i) $\mathbf{d}_\gamma(s_0)$ noktasında de Sitter fokal eğrinin germi sıradan zirveye diffeomorftir.

(ii) $\sigma_D(s_0) = 0$ ve $\sigma'_D(s_0) \neq 0$ ifadeleri sağlanır.

(iii) γ ve timelike teğet düzlem $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^T$ dördüncü mertebeden değmeye sahiptir.

(iv) γ eğrisi ile teğet D-dilim $T_{\mathbb{M}, \gamma(s_0)}^D$ dördüncü mertebeden değmeye sahiptir.

İspat: Önerme 3.22'den $\sigma_H(s) = 0$ ise $\mathbf{h}'_\gamma(s) = 0$ olduğundan (A1) kolaylıkla görülür. Aynı önermeden H^T 'nin çatallanma kümesi

$$Bif(H^T) = \left\{ \mathbf{h}_\gamma(s) = \frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \kappa_n^2(s)}} \mathbf{n}_\gamma(s) + \frac{\kappa_n(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \kappa_n^2(s)}} \mathbf{b}(s) : \kappa_g^2 > \kappa_n^2 \right\}$$

olduğundan $\sigma_H = 0$ ve $\sigma'_H \neq 0$ ise Teorem 2.12 ve Önerme 3.25'den $Bif(H^T)$ kümesinin germi sıradan zirveye diffeomorftir. Diğer denklikler Önerme 3.23'den takip edilir. Bu (A1) ve (A2)'nin kanıtını tamamlar. Benzer şekilde H^S fonksiyonu düşünülerek de kalan iddialar kanıtlanabilir. \square

3.4. Lorentz 3-Uzayında Timelike Yüzey Üzerindeki Eğrilerin Evolütleri

Bir önceki bölümde; \mathbb{E}_1^3 Lorentz uzayındaki herhangi spacelike yüzey üzerindeki eğrilerin Darboux çatısı vasıtasıyla evolütleri incelenmiştir. Bu bölümde ise timelike yüzey üzerindeki eğrilerin evolütleri Bölüm 3.3'deki notasyonlar kullanılarak Darboux çatısı yardımıyla ele alınacaktır.

$U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme olmak üzere $\varphi : U \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ bir timelike gömme (embedding) fonksiyonu ve $\varphi(U) = \mathbb{M}$ olsun. $\tilde{\gamma} : I \rightarrow U$ bir regüler eğri ise $\gamma(s) = \varphi(\tilde{\gamma}(s))$ ile tanımlı bir $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M} \subset \mathbb{E}_1^3$ eğrisi vardır. Bu eğri spacelike veya timelike eğri olabilir ya da eğri lightlike noktalara sahip olabilir. Eğri spacelike ya da timelike olması durumunda s yay uzunluğu ile parametrize edilebilir. O halde $\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$ birim teğet vektörü olmak üzere $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{b}(s)\}$ eğrinin Lorentz darboux çatısı olsun. Spacelike yüzey üzerindeki eğrilere benzer notasyonlarla

$$\kappa_n(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle, \quad \kappa_g(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle \quad \text{ve} \quad \tau_g(s) = \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}_\gamma(s) \rangle$$

olmak üzere timelike yüzey üzerindeki null olmayan bir eğri için Izumiya vd (2015)

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa_n(s) \mathbf{n}_\gamma(s) - \varepsilon_t \kappa_g(s) \mathbf{b}(s), \\ \mathbf{n}'_\gamma(s) &= -\varepsilon_t \kappa_n(s) \mathbf{t}(s) + \varepsilon_t \tau_g(s) \mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) &= -\varepsilon_t \kappa_g(s) \mathbf{t}(s) + \tau_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s), \end{aligned}$$

Frenet-Serret tipi formülü kullanmıştır.

3.4.1. Timelike yüzey üzerinde yükseklik fonksiyonları

Bu bölümde; Bölüm 3.3.1'de tanımlanan timelike ve spacelike yükseklik fonksiyonları timelike yüzey üzerindeki eğriler için de incelenecek ve fokal eğrileri bu fonksiyonlar vasıtasıyla verilecektir.

Önerme 3.27 (Izumiya vd 2015) **(A)** $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ birim hızlı spacelike regüler bir eğri ve $\kappa_n^2(s) > \kappa_g^2(s)$ olsun. Herhangi $(s, \mathbf{v}) \in I \times H^2(-1)$ için;

(1) $(h_{\mathbf{v}}^T)'(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{n}_\gamma(s) + \mu \mathbf{b}(s)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $-\mu^2 + \lambda^2 = -1$ eşitliği sağlanır.

(2) $(h_{\mathbf{v}}^T)'(s) = (h_{\mathbf{v}}^T)''(s) = 0$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_n^2(s) - \kappa_g^2(s)}} (\kappa_n(s) \mathbf{b}(s) - \kappa_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s))$$

olmasıdır.

(3) $(h_{\mathbf{v}}^T)'(s) = (h_{\mathbf{v}}^T)''(s) = (h_{\mathbf{v}}^T)^{(3)}(s) = 0$

eşitliklerinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_n^2(s) - \kappa_g^2(s)}} (\kappa_n(s) \mathbf{b}(s) - \kappa_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s))$$

$$\text{ve } \sigma_H(s) = (\kappa_g \kappa_n' + \kappa_n^2 \tau_g - \kappa_g' \kappa_n - \kappa_g^2 \tau_g)(s) = 0$$

olmasıdır.

(4) $(h_{\mathbf{v}}^T)'(s) = (h_{\mathbf{v}}^T)''(s) = (h_{\mathbf{v}}^T)^{(3)}(s) = (h_{\mathbf{v}}^T)^{(4)}(s) = 0$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_n^2(s) - \kappa_g^2(s)}} (\kappa_n(s) \mathbf{b}(s) - \kappa_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s))$$

$$\sigma_H(s) = 0 \text{ ve } \sigma_H'(s) = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

(B) $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ birim hızlı spacelike ya da timelike regüler bir eğri ve $\varepsilon_t \kappa_n^2(s) < \kappa_g^2(s)$ olsun. Herhangi $(s, \mathbf{v}) \in I \times S_1^2$ için;

(1) $(h_{\mathbf{v}}^S)'(s) = 0$ eşitliği sağlanır ancak ve ancak $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{n}_\gamma(s) + \mu \mathbf{b}(s)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $-\varepsilon_t \mu^2 + \lambda^2 = 1$ olur.

(2) $(h_{\mathbf{v}}^S)'(s) = (h_{\mathbf{v}}^S)''(s) = 0$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \varepsilon_t \kappa_n^2(s)}} (\kappa_n(s) \mathbf{b}(s) - \kappa_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s))$$

olmasıdır.

$$(3) (h_{\mathbf{v}}^S)'(s) = (h_{\mathbf{v}}^S)''(s) = (h_{\mathbf{v}}^S)^{(3)}(s) = 0$$

eşitliklerinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \varepsilon_t \kappa_n^2(s)}} (\kappa_n(s) \mathbf{b}(s) - \kappa_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s))$$

$$\text{ve } \sigma_D(s) = (\kappa'_g \kappa_n + \varepsilon_t \kappa_g^2 \tau_g - \kappa_g \kappa'_n - \kappa_n^2 \tau_g)(s) = 0$$

olmasıdır.

$$(4) (h_{\mathbf{v}}^S)'(s) = (h_{\mathbf{v}}^S)''(s) = (h_{\mathbf{v}}^S)^{(3)}(s) = (h_{\mathbf{v}}^S)^{(4)}(s) = 0$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \varepsilon_t \kappa_n^2(s)}} (\kappa_n(s) \mathbf{b}(s) - \kappa_g(s) \mathbf{n}_\gamma(s)),$$

$$\sigma_D(s) = 0 \text{ ve } \sigma'_D(s) = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: Önerme 3.22'deki yöntemle benzer şekilde ve timelike yüzey üzerindeki Frenet-Serret tipi formül kullanılarak ispatı yapılabilir. \square

H^T ve H^S fonksiyonlar ailesi \mathbb{E}_1^3 üzerinde sırasıyla timelike ve spacelike düzlemler arasındaki değme derecesini ölçer.

Not 3.28 (Izumiya vd 2015) (a) γ eğrisinin timelike eğri olması durumunda bir $s \in I$ için $(h_{\mathbf{v}}^T)'(s) = 0$ olacak şekilde $\mathbf{v} \in H^2(-1)$ yoktur. Bu nedenle timelike eğri için H^T 'nin çatallanma kümesi boştur (Önerme 3.34 (1)). O halde H^T için timelike \mathbb{M} yüzeyi üzerinde sadece spacelike eğri düşünülür.

(b) Yukarıdaki Önerme 3.27 (A)-2'den $\kappa_n^2(s) \leq \kappa_g^2(s)$ eşitliğinin sağladığı eğrinin noktaları için $h_{\mathbf{v}}^T$ yükseklik fonksiyonu s değerinde $A_{\geq 2}$ tekilliğe sahip değildir. Diğer bir deyişle, eğer herhangi $s \in I$ için $\kappa_n^2(s) \leq \kappa_g^2(s)$ eşitliğini sağlayan bir spacelike eğri ise H^T 'nin çatallanma kümesi tanımlı değildir (Önerme 3.34 (2)).

(c) Yukarıdaki Önerme 3.27 (B)-2'den $\varepsilon_t \kappa_n^2(s) > \kappa_g^2(s)$ eşitliğinin sağladığı eğrinin noktaları için $h_{\mathbf{v}}^S$ yükseklik fonksiyonu s değerinde $A_{\geq 2}$ tekilliğe sahip değildir. Diğer bir deyişle, eğer herhangi $s \in I$ için $\varepsilon_t \kappa_n^2(s) > \kappa_g^2(s)$ eşitliğini sağlayan null olmayan bir eğri ise H^S 'nin çatallanma kümesi tanımlı değildir (Önerme 3.34 (1)).

$\kappa_n^2(s) > \kappa_g^2(s)$ ve $\kappa_g^2(s) > \varepsilon_t \kappa_n^2(s)$ olmak üzere, yukarıdaki hesaplamalar göz

önüne alınarak; $\mathbf{h}_\gamma : I \rightarrow H^2(-1)$ ve $\mathbf{d}_\gamma : I \rightarrow S_1^2$ olmak üzere

$$\mathbf{h}_\gamma(s) = -\frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{\kappa_n^2(s) - \kappa_g^2(s)}} \mathbf{n}_\gamma(s) + \frac{\kappa_n(s)}{\sqrt{\kappa_n^2(s) - \kappa_g^2(s)}} \mathbf{b}(s)$$

$$\mathbf{d}_\gamma(s) = \frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \varepsilon_t \kappa_n^2(s)}} \mathbf{n}_\gamma(s) - \frac{\kappa_n(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \varepsilon_t \kappa_n^2(s)}} \mathbf{b}(s)$$

şeklinde tanımlı \mathbf{h}_γ eğrisine timelike bir \mathbb{M} yüzeyi üzerindeki γ eğrisinin *hiperbolik fokal eğrisi* ve \mathbf{d}_γ eğrisine γ eğrisinin *de Sitter fokal eğrisi* denir. Ayrıca, \mathbf{h}_γ ve \mathbf{d}_γ eğrilerine timelike \mathbb{M} yüzeyine göre γ eğrisinin *pseudo-küresel fokal eğrileri* olarak da isimlendirilir. Izumiya vd (2015) evolüt veya fokal eğri yerine Darboux görüntüsü olarak isimlendirmiştir.

\mathbf{h}_γ hiperbolik fokal eğrisi $H_+^2(-1)$ veya $H_-^2(-1)$ parçalarında bulunabilir. \mathbf{h}_γ , $H_-^2(-1)$ içinde yer alıyorsa \mathbf{h}_γ yerine $-\mathbf{h}_\gamma$ düşünülebilir. Bu nedenle \mathbf{h}_γ , $H_+^2(-1)$ uzayında düşünülecektir.

Lemma 3.29 (Izumiya vd 2015) (1) Önerme 3.27'deki varsayımlar altında $\mathbf{h}'_\gamma(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\sigma_H(s) = 0$ olmasıdır. Yani $\mathbf{h}_\gamma(s) = \mathbf{v}_0$ sabittir ancak ve ancak $\sigma_H(s) = 0$ eşitliği vardır.

(2) Önerme 3.27'deki varsayımlar altında $\mathbf{d}'_\gamma(s) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\sigma_D(s) = 0$ olmasıdır. Yani $\mathbf{d}_\gamma(s) = \mathbf{v}_0$ sabittir ancak ve ancak $\sigma_D(s) = 0$ eşitliği vardır.

İspat: Pseudo-küresel fokal eğrilerin parametrizasyonlarının türevleri alınarak kolayca görülür. \square

Lemma 3.29 ve Önerme 3.27 (B)-2'den $h_{\mathbf{v}_0}^S$ sabittir yani

$$h_{\mathbf{v}_0}^S(s) = \langle \gamma(s), \mathbf{v}_0 \rangle = r$$

olacak şekilde $r \in \mathbb{R}$ vardır ki bu $P(\mathbf{v}_0, r)$ bir timelike düzlem olmak üzere, $\text{Im } \gamma \subset P(\mathbf{v}_0, r) \cap \mathbb{M}$ eşitliğini söyler. $P(\mathbf{v}, r) \cap \mathbb{M}$ formundaki eğrilere \mathbb{M} yüzeyinin *de Sitter dilimi* (*D-dilim* (*D-slice*)) denir. $P(\mathbf{v}, r) \cap \mathbb{M}$ formundaki eğrilerin regüler olması için $\kappa_n \neq 0$ durumunda D-dilim düşünülebilir. Gerçekten, $\kappa_n = 0$ ise $\mathbf{v} = \mathbf{n}_\gamma(s_0)$ ya da $\mathbf{v} = -\mathbf{n}_\gamma(s_0)$ olmak üzere $\mathbf{d}_\gamma(s_0) = \mathbf{v}$ olur. Bu nedenle $r_0 = h_{\mathbf{v}}^S(s_0)$ olmak üzere $P(\mathbf{v}, r_0)$, \mathbb{M} yüzeyinin $T_{\gamma(s_0)}\mathbb{M}$ teğet düzlemidir ve $P(\mathbf{v}, r_0) \cap \mathbb{M}$ singüler noktaya sahiptir çünkü iki çaprazlanmayan yüzeyin kesişimidir. Aynı yolla $\mathbf{v} \in H_+^2(-1)$ için $P(\mathbf{v}, r) \cap \mathbb{M}$ ile *hiperbolik-dilim* (*H-dilim* (*H-slice*)) tanımlanır. $P(\mathbf{v}, r)$ bir spacelike düzlem ve \mathbb{M} bir timelike düzlem olduğu için H-dilim her zaman regüler bir eğridir. Bu nedenle aşağıdaki önerme söylenebilir.

Önerme 3.30 (Izumiya vd 2015) (1) $\kappa_g^2(s) > \varepsilon_t \kappa_n^2(s)$ ve $\mathbf{t}'(s) \neq 0$ olmak üzere yay uzunluğu ile parametrize edilmiş $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ spacelike ya da timelike eğrinin de Sitter fokal kümesi $\mathbf{v}_0 \in S_1^2$ sabiti olması için gerek ve yeter koşul herhangi $s \in I$ için $\sigma_D(s) = 0$ olmasıdır ya da γ , $P(\mathbf{v}_0, r) \cap \mathbb{M}$ ile verilen \mathbb{M} timelike yüzeyinin D-dilim eğrisinin bir parçası olmasıdır.

(2) $\kappa_n^2(s) > \kappa_g^2(s)$ ve $\mathbf{t}'(s) \neq 0$ olmak üzere yay uzunluğu ile parametrize edilmiş $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ spacelike eğrinin hiperbolik fokal kümesi $\mathbf{v}_0 \in H_+^2(-1)$ sabiti olması için gerek ve yeter koşul herhangi $s \in I$ için $\sigma_H(s) = 0$ olmasıdır ya da $\gamma, P(\mathbf{v}_0, r) \cap \mathbb{M}$ ile verilen \mathbb{M} yüzeyinin H-dilim eğrisinin bir parçası olmasıdır.

Şimdi σ_H ve σ_D fonksiyonlarının geometrik anlamları araştırılacaktır. Bu amaç için Bölüm 3.3.1'de tanımlanan $\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^T$ ve $\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^S$ fonksiyonları düşünülecektir. Herhangi sabitlenmiş $\mathbf{v} \in S_1^2$ için $\mathfrak{h}_{\mathbf{v}}^S(\gamma(s)) = h_{\mathbf{v}}^S(s)$ ve herhangi $s_0 \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{v}_0 = \mathbf{d}_{\gamma}(s_0)$ için $(\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^S |_{\mathbb{M}})^{-1}(r_0)$ kümesi, \mathbb{M} yüzeyinin bir D-dilimidir. Önerme 3.27'den, $r_0 = h_{\mathbf{v}_0}^T(s_0)$ olmak üzere $(\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^S)^{-1}(r_0) = P(\mathbf{v}_0, r_0)$ düzlemi, $\gamma(s_0)$ noktasında γ eğrisine teğettir. $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^T = P(\mathbf{v}_0, r_0)$ düzlemine $\mathbf{v}_0 = \mathbf{h}_{\gamma}(s_0)$ vektörüne göre $\gamma(s_0)$ noktasında γ eğrisinin *timelike teğet düzlemi* denir. Benzer düşüncelerle $\mathbf{v}_0 = \mathbf{h}_{\gamma}(s_0)$ 'a göre $\gamma(s_0)$ noktasında $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^S$ ile gösterilen spacelike teğet düzlemi tanımlanır.

Önerme 3.31 (Izumiya vd 2015) (1) $\kappa_n^2(s) > \varepsilon_t \kappa_n^2(s)$, $\mathbf{t}'(s) \neq 0$, $r_0 = h_{\mathbf{v}_0}^S(s_0)$ ve $\mathbf{v}_0 = \mathbf{d}_{\gamma}(s_0)$ olmak üzere yay uzunluğu ile parametrize edilmiş $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ spacelike ya da timelike eğri olsun. $\kappa_n(s_0) \neq 0$ ise, yani $(\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^S |_{\mathbb{M}})^{-1}(r_0)$ D-dilimi $\gamma(s_0)$ noktasında singüler değilse ve $\sigma_D \neq 0$ ise D-dilim \mathbb{M} yüzeyinin $\gamma(s_0)$ noktasında γ eğrisine teğet bir eğrisidir.

(2) $\kappa_n^2(s) > \kappa_g^2(s)$, $\mathbf{t}'(s) \neq 0$, $r_0 = h_{\mathbf{v}_0}^T(s_0)$ ve $\mathbf{v}_0 = \mathbf{h}_{\gamma}(s_0)$ olmak üzere yay uzunluğu ile parametrize edilmiş $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ spacelike ya da timelike eğri olsun. $\sigma_H \neq 0$ ise H-dilim $(\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^T |_{\mathbb{M}})^{-1}(r_0)$ \mathbb{M} yüzeyinin $\gamma(s_0)$ noktasında γ eğrisine teğet bir eğrisidir.

İspat: (1) $\gamma(s_0)$ noktasında D-dilim ve γ eğrisinin çapraz bir şekilde kesiştiği farzedilsin. $P(\mathbf{v}_0, r_0)$ $\gamma(s_0)$ noktasında γ 'ya teğet ve D-dilim $P(\mathbf{v}_0, r_0)$ içinde olduğundan $\gamma'(s_0)$ ve $\gamma(s_0)$ noktasında D-dilimin teğet vektörü bu noktada \mathbb{M} yüzeyine teğet düzlem üretir. Bu nedenle $P(\mathbf{v}_0, r_0)$ tam olarak bu düzlem olduğu sonucuna varılır, yani D-dilim singülerdir ki bu çelişkiyi verir.

(2) Kanıt (1)'e benzer şekilde verilir. \square

$(\mathfrak{h}_{\mathbf{v}_0}^T |_{\mathbb{M}})^{-1}(r_0)$ D-dilimine $\gamma(s_0)$ noktasında γ eğrisinin *teğet D-dilimi* denir ve $T_{\mathbb{M}, \gamma(s_0)}^D$ ile gösterilir. Önerme 3.27'den γ ve $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^T$, $\gamma(s_0)$ noktasında 4. mertebeden değmeye sahip olması için gerek ve yeter koşul $\sigma_D(s_0) = 0$ ve $\sigma_D'(s_0) \neq 0$ olmasıdır. $\kappa_n(s_0) \neq 0$ koşulu altında bu koşullar γ ve $T_{\mathbb{M}, \gamma(s_0)}^D$, $\gamma(s_0)$ noktasında 4. mertebeden değmeye sahiptir koşuluna denktir. O halde aşağıdaki önerme söylenebilir.

Önerme 3.32 (Izumiya vd 2015) $\kappa_n^2(s) > \varepsilon_t \kappa_n^2(s)$ ve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir spacelike ya da timelike regüler eğri olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

(1) $\mathbf{v}_0 = \mathbf{d}_{\gamma}(s_0)$ olmak üzere γ ve $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^T$ timelike teğet düzlemi 4. mertebeden değmeye sahiptir.

(2) $\sigma_D(s_0) = 0$ ve $\sigma'_D(s_0) \neq 0$ ifadeleri sağlanır.

(3) Eğer $\kappa_n(s_0) \neq 0$ ise $T_{\mathbb{M},\gamma(s_0)}^D$ teğet D-dilimi $\gamma(s_0)$ noktasında singüler değildir, γ ve $T_{\mathbb{M},\gamma(s_0)}^D$, $\gamma(s_0)$ noktasında 4. mertebeden değmeye sahiptir.

Benzer düşüncelerle $\mathbf{v}_0 = \mathbf{h}_\gamma(s_0)$ noktasına göre $T_{\mathbb{M},\gamma(s_0)}^H$ ile gösterilen γ eğrisinin *teğet H-dilimi* kavramı söylenebilir. Bu durumda teğet H-dilim $\gamma(s_0)$ noktasında her zaman singüler değildir. Önerme 3.32'ye benzer şekilde aşağıdaki önerme söylenebilir.

Önerme 3.33 (Izumiya vd 2015) $\kappa_n^2(s) > \kappa_g^2(s)$ ve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir spacelike regüler eğri olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

(1) $\mathbf{v}_0 = \mathbf{h}_\gamma(s_0)$ olmak üzere, γ ve spacelike teğet düzlem $TP_{\mathbf{v}_0,\gamma(s_0)}^S$ 4. mertebeden değmeye sahiptir.

(2) $\sigma_H(s_0) = 0$ ve $\sigma'_H(s_0) \neq 0$ ifadeleri sağlanır.

(3) γ ve $T_{\mathbb{M},\gamma(s_0)}^H$ teğet H-dilimi 4. mertebeden değmeye sahiptir.

3.4.2. Timelike yüzey üzerindeki eğri için fonksiyon açılımları

Bu bölümde; Bölüm 3.3.2'ye benzer olarak timelike yüzey üzerindeki bir eğrinin fokal kümelerinin tekil noktaları incelenecektir. Önerme 3.27'den aşağıdaki sonuç vardır.

Önerme 3.34 (Izumiya vd 2015) $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş regüler bir eğri olsun.

(1) Timelike γ eğrisi için $Bif(H^S) = \{\mathbf{d}_\gamma(s) : s \in I\}$ ve $Bif(H^T)$ boş kümedir.

(2) Spacelike eğri için; (a) $\kappa_n^2(s) - \kappa_g^2(s) < 0$ ise $Bif(H^S) = \{\mathbf{d}_\gamma(s) : s \in I\}$ ve $Bif(H^T)$ boş kümedir.

(b) $\kappa_n^2(s) - \kappa_g^2(s) > 0$ ise $Bif(H^S)$ boş küme ve $Bif(H^T) = \{\mathbf{h}_\gamma(s) : s \in I\}$ olur.

Önerme 3.35 (Izumiya vd 2015) $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$, yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir regüler eğri olsun.

(1) Spacelike ya da timelike bir γ eğrisi için; $\mathbf{h}_\mathbf{v}^S(s)$, s_0 noktasında A_3 -tekilliğe sahip ise H^S , $\mathbf{h}_\mathbf{v}^S(s)$ 'nin (p)versal açılımıdır.

(2) Spacelike bir γ eğrisi için; $\mathbf{h}_\mathbf{v}^T(s)$, s_0 noktasında A_3 -tekilliğe sahip ise H^T , $\mathbf{h}_\mathbf{v}^T(s)$ 'nin (p)versal açılımıdır.

İspat: Önerme 3.25'e benzer şekilde yapılır. \square

Önceki sonuçların bir sonucu olarak aşağıdaki teoremler ifade edilebilir.

Teorem 3.36 (Izumiya vd 2015) Önerme 3.33'deki koşullar altında $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ spacelike ya da timelike regüler bir eğri olsun.

(A1) $\sigma_D(s_0) \neq 0$ ise s_0 değerinde de Sitter fokal eğri regülerdir.

(A2) Aşağıdaki koşullar denktir:

(i) s_0 civarında de Sitter fokal eğrinin germi sıradan zirveye diffeomorftir,

(ii) $\sigma_D(s_0) = 0$ ve $\sigma'_D(s_0) \neq 0$,

(iii) γ ve timelike teğet düzlem $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^T$ dördüncü mertebeden değmeye sahiptir,

(iv) $\kappa_n(s_0) \neq 0$ ise $\gamma(s_0)$ noktasında γ eğrisinin teğet D-dilimi $T_{\mathbb{M}, \gamma(s_0)}^D$ singüler değildir ve γ eğrisi ile dördüncü mertebeden değmeye sahiptir.

İspat: Teorem 3.26'ya benzer şekilde ispatlanır. \square

Teorem 3.37 (A1) $\sigma_H(s_0) \neq 0$ ise s_0 değerinde hiperbolik fokal eğri regülerdir.

(A2) Aşağıdaki koşullar denktir:

(i) s_0 civarında hiperbolik fokal eğrinin germi sıradan zirveye diffeomorftir;

(ii) $\sigma_H(s_0) = 0$ ve $\sigma'_H(s_0) \neq 0$;

(iii) γ ve spacelike teğet düzlem $TP_{\mathbf{v}_0, \gamma(s_0)}^S$ dördüncü mertebeden değmeye sahiptir;

(iv) γ eğrisi ile teğet H-dilim $T_{\mathbb{M}, \gamma(s_0)}^H$ dördüncü mertebeden değmeye sahiptir.

İspat: Teorem 3.26'ya benzer şekilde ispatlanır. \square

Örnek 3.38 $\mathbb{M} = S_1^2$ ve $\gamma : I \rightarrow S_1^2$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir regüler eğri olsun. Bu durumda $\mathbf{n}_\gamma(s) = \gamma(s)$, $\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$ ve $\mathbf{b}(s) = \mathbf{n}_\gamma(s) \times \mathbf{t}(s)$ ve buradan $\tau_g(s) = 0$ ve $\kappa_n(s) = -\varepsilon_{\mathbf{t}}$ bulunur. Frenet-Serret tipi formül

$$\mathbf{t}'(s) = -\varepsilon_{\mathbf{t}} \gamma(s) - \varepsilon_{\mathbf{t}} \kappa_g(s) \mathbf{b}(s)$$

$$\gamma'(s) = \mathbf{t}(s)$$

$$\mathbf{b}'(s) = -\varepsilon_{\mathbf{t}} \kappa_g(s) \mathbf{t}(s)$$

şeklindedir. İnvaryantlar $\sigma_D(s) = -\varepsilon_{\mathbf{t}} \kappa'_g(s)$ ve $\sigma_H(s) = \kappa'_g(s)$ olarak hesaplanır. Eğer $\kappa_g^2(s) > \varepsilon_{\mathbf{t}}$ ise γ eğrisinin de Sitter fokal eğrisi

$$\mathbf{d}_\gamma(s) = \frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \varepsilon_{\mathbf{t}}}} \mathbf{n}_\gamma(s) + \frac{\varepsilon_{\mathbf{t}}}{\sqrt{\kappa_g^2(s) - \varepsilon_{\mathbf{t}}}} \mathbf{b}(s)$$

ile verilir. Eğer γ spacelike ve $\kappa_g^2(s) < 1$ ise hiperbolik fokal eğri

$$\mathbf{h}_\gamma(s) = -\frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{1 - \kappa_g^2(s)}} \mathbf{n}_\gamma(s) - \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa_g^2(s)}} \mathbf{b}(s)$$

ile verilir. Teorem 3.36 ve Teorem 3.37'ye göre $\kappa_g'(s_0) \neq 0$ ise s_0 'da pseudo-küresel fokal eğriler regülerdir. Bu nedenle bu fokal eğrilerin sıradan zirveleri $\kappa_g'(s_0) = 0$ ve $\kappa_g''(s_0) \neq 0$ olan noktalara karşılık gelir.



4. TEKİLLİK TEORİSİNDE FOKAL YÜZEYLER

4.1. Lorentz 3-Uzayında Kostik ve Fokal Yüzeyler

\mathbb{M} , \mathbb{E}_1^3 Lorentz uzayında düzgün ve yönlendirilmiş bir yüzey olsun. \mathbb{M} üzerindeki herhangi bir p noktasına indirgenmiş metrik (induced metric) bu yüzey üzerindeki bazı noktalarda dejenere olabilir (aslında bu \mathbb{E}_1^3 uzayında herhangi kapalı yüzey üzerindeki bir durumdur). Böyle noktaların geometrik yerine *dejenere noktaların geometrik yeri* (*Locus of Degeneracy*) olarak sınıflandırılır ve LD ile gösterilir. Bir $p \in LD$ noktasında, $T_p\mathbb{M}$ teğet düzlemi lightlike düzlemdir ve bu nedenle p noktasında \mathbb{M} yüzeyinin normali $T_p\mathbb{M}$ düzleminde tek lightlike vektördür. LD dışında yüzeyin birim normal vektörü tanımlanabilir ki bu vektör eğer p Lorentz nokta ise spacelike vektör p Riemann nokta ise timelike vektördür.

\mathbb{M} üzerindeki lightlike vektörlerin integral eğrileri

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = 0 \quad (4.1)$$

ikili kuadratik diferensiyel denkleminin (BDE) çözüm eğrileridir. LD kümesi φ 'nin ters görüntüsü olarak U açık kümesinde ele alınırsa $F^2 - EG = 0$ denklemiyle verilebilir ki bu BDE (4.1) denkleminin *diskriminant* eğrisidir, burada BDE'nin diskriminant eğrisi teğet vektörlerin çakıştığı noktaların kümesidir. Bu bölümde LD kümesi ya boş küme ya da yüzeyi lokal olarak spacelike ve timelike kısımlara ayıran düzgün bir eğri olarak düşünülecektir. Aşağıdaki teoremden belirtilen lokal parametrizasyon hesaplamaları daha basitleştirir ve geometrik olarak daha iyi yorum yapılabilecek cebirsel koşullar sağlar.

Teorem 4.1 (Tari 2012) (1) \mathbb{M} yüzeyinin Lorentz parçasındaki bir p noktasında, p noktasının bir V komşuluğunun $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{M}$ lokal parametrizasyonu vardır öyle ki herhangi $\tilde{p} \in V$ için \tilde{p} 'den geçen koordinat eğrileri lightlike vektörlere teğettir. Yani, U üzerinde $E \equiv 0$ ve $G \equiv 0$ olacak şekilde bir lokal parametrizasyon vardır.

(2) $p \in LD \subset \mathbb{M}$ olmak üzere p noktasının bir V komşuluğunun $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{M}$ lokal parametrizasyonu vardır öyle ki herhangi $\tilde{p} = \varphi(\tilde{q}) \in V \cap LD$ için $T_{\tilde{p}}\mathbb{M}$ 'deki lightlike vektörler $\varphi_u(\tilde{q})$ vektörüne paraleldir, yani LD üzerinde $E = F = 0$ 'dır.

Pei (1999) M üzerinde $\mathbb{R}P^2$ -değerli Gauss dönüşümünü tanımladı. Bu dönüşüm basitce bir $p = \varphi(u)$ noktasını $\varphi_u \times \varphi_v$ vektörünün izdüşümselleştirilmesine (projectivisation) götüren $PN : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}P^2$ dönüşümüdür. LD dışında, $\mathbb{R}P^2$ -değerli Gauss dönüşümü yüzeyin timelike parçasında $\varphi(U) \rightarrow S_1^2$ de Sitter Gauss dönüşümü ve yüzeyin spacelike parçasında $\varphi(U) \rightarrow H_+^2(-1)$ hiperbolik Gauss dönüşümü ile tanımlanabilir. Her iki dönüşüm $\mathbf{N} = \varphi_u \times \varphi_v / \|\varphi_u \times \varphi_v\|$ ile verilir. Ayrıca $A_p(\mathbf{v}) = -d\mathbf{N}_p(\mathbf{v})$ dönüşümü $\varphi(U) \setminus LD$ üzerinde self-adjointtir.

$$\begin{aligned} l &= \langle -\mathbf{N}_u, \varphi_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \varphi_{uu} \rangle \\ m &= -\langle \mathbf{N}_u, \varphi_v \rangle = \langle \mathbf{N}, \varphi_{uv} \rangle \\ n &= -\langle \mathbf{N}_v, \varphi_v \rangle = \langle \mathbf{N}, \varphi_{vv} \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonları $\varphi(U) \setminus LD$ üzerinde ikinci temel formun katsayılarıdır. A_p reel karakteristik değerlere sahipse bunlara $p \in \mathbb{M}$ noktasında *asal (eğrilik) eğrilikler (principle curvatures)* ve bunlara karşılık gelen karakteristik vektörlere de *asal (eğrilik) vektörleri (principle vectors)* denir. \mathbb{M} yüzeyinin spacelike parçasında her zaman iki asal eğrilik mevcuttur ancak Lorentz kısmında bu geçerli değildir. Eğrilik vektörlerinin integral eğrisi olan eğrilik çizgileri

$$(Gm - Fn) dv^2 + (Gl - En) dudv + (Fl - Em) du^2 = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde verilen BDE'nin çözümleridir. Bu denklemin diskriminantı

$$\delta(u, v) = ((Gl - En)^2 - 4(Gm - Fn)(Fl - Em))(u, v) \quad (4.3)$$

fonksiyonudur. $\delta(u, v) = 0$ eşitliğini sağlayan noktaların geometrik yerine *lightlike asal yer (lightlike principal locus)* denir ve *LPL* ile gösterilir (Izumiya vd 2010).

Genel bir yüzeyin spacelike kısmında *LPL spacelike umbilik (umbilic) noktalar* olarak sınıflandırılan izole noktalardan oluşur, burada umbilik noktalarda A_p özdeşlik dönüşümünün bir katıdır. Spacelike umbilik noktalar dışında her zaman iki dik asal eğrilik vardır. Diğer yandan yüzeyin timelike kısmında *LPL* ya boş kümedir ya da düğüm (node) tipindeki Morse tekil noktaları dışında düzgün bir eğridir. Böyle noktalar *timelike umbilik noktalar* diye sınıflandırılır. *LPL* eğrilik vektörlerinin çakıştığı ve lightlike olduğu noktalardan oluşur. *LPL* kümesinin bir tarafında iki eğrilik vektörü varken diğer tarafında yoktur. İki tane olduğunda onlar diktir ve biri spacelike diğeri timelike vektördür. *LPL* noktalarında eğrilik çizgilerinin davranışları ile ilgili daha fazla bilgi Izumiya ve Tari'nin (2010) çalışmasında bulunabilir.

Asal eğrilik çizgileri *LD* kümesine şu şekilde genişletilebilir. (4.2) denklemini l, m, n için homojen olduğundan bu katsayılar $\|\varphi_u \times \varphi_v\|$ ile çarpılırsa ve bunlar yerine

$$\begin{aligned} \bar{l} &= \langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{uu} \rangle \\ \bar{m} &= \langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{uv} \rangle \\ \bar{n} &= \langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{vv} \rangle \end{aligned}$$

ifadeleri yazılırsa, genişletilmiş eğrilik çizgileri

$$(G\bar{m} - F\bar{n}) dv^2 + (G\bar{l} - E\bar{n}) dudv + (F\bar{l} - E\bar{m}) du^2 = 0 \quad (4.4)$$

ile verilen BDE'nin çözüm eğrileri olur. Bu yerine koyma $\varphi(U) \setminus LD$ durumunu değiştirmez. *LD* üzerindeki asal vektörlerden biri tek lightlike vektör diğeri ise spacelike vektördür. *LD* ve *LPL* izole noktalarda teğet olabilir (Izumiya ve Tari 2010).

Şimdi Lorentz 3-uzayında uzaklık kare fonksiyonlar ailesinin çatallanma kümesi belirlenecektir. \mathbb{M} üzerindeki

$$d^2 : \mathbb{M} \times \mathbb{E}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

uzaklık kare fonksiyonlar ailesi

$$d^2(p, \mathbf{v}) = \langle p - \mathbf{v}, p - \mathbf{v} \rangle$$

ile tanımlanır. \mathbb{M} üzerinde fonksiyon $d_{\mathbf{v}}^2(p) = d^2(p, \mathbf{v})$ ile gösterilsin. $p = \varphi(q)$ noktasında \mathbb{M} yüzeyinin $\varphi : U \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ lokal parametrizasyonu ve $\varphi(U) = \mathbb{M}$ olsun.

$$Ca(d^2) = \{\xi = ((u, v), \mathbf{v}) \in U \times \mathbb{E}_1^3 : d_u^2(\xi) = d_v^2(\xi) = 0\}$$

olmak üzere

$$Bif(d^2) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3 : \exists((u, v), \mathbf{v}) \in Ca(d^2) \text{ öyle ki } (u, v) \text{ 'de } rank(Hess(d_{\mathbf{v}}^2)) < 2\}$$

kümesi d^2 fonksiyon ailesinin çatallanma (bifurcation) kümesidir, yani $(u, v) \in U$ vardır öyle ki $d_{\mathbf{v}}^2$ bu noktada dejenere lokal tekilliğe sahiptir koşulunu sağlayan $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$ noktalarının kümesidir. $\Delta d^2 = (d_u^2, d_v^2)$ dönüşümü $U \times \mathbb{E}_1^3$ kümesindeki bir noktada dejenere değildir. Gerçekten, bu dönüşümün

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_{uu}, \varphi - \mathbf{v} \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_{uv}, \varphi - \mathbf{v} \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle & \varphi_u^0 & -\varphi_u^1 & \varphi_u^2 \\ \langle \varphi_{uv}, \varphi - \mathbf{v} \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle & \langle \varphi_{vv}, \varphi - \mathbf{v} \rangle + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle & \varphi_v^0 & -\varphi_v^1 & \varphi_v^2 \end{pmatrix}$$

şeklindeki Jacobian matrisi herhangi $U \times \mathbb{E}_1^3$ 'deki bir noktada rankı 2'dir çünkü $\varphi_u = (\varphi_u^0, \varphi_u^1, \varphi_u^2)$ ve $\varphi_v = (\varphi_v^0, \varphi_v^1, \varphi_v^2)$ vektörleri lineer bağımsızdır. Bu nedenle, d^2 fonksiyonu bir Morse ailesidir. Dolayısıyla bu fonksiyon bir üreteç ailesidir ve $Ca(d^2)$, $U \times \mathbb{E}_1^3$ kümesinin 3 boyutlu düzgün bir alt manifoldudur (Öklid uzayı için Arnold vd (1986)). $\mathbf{v} = (v_0, v_1, v_2)$ olsun ve kanonik simplektik yapıyla (canonical symplectic structure) donatılmış \mathbb{E}_1^3 Lorentz uzayının kotanjant demeti (cotangent bundle) $T^*\mathbb{E}_1^3$ ile gösterilsin. O halde $L(d^2) : Ca(d^2) \rightarrow T^*\mathbb{E}_1^3$,

$$L(d^2)((u, v), \mathbf{v}) = \left(\mathbf{v}, \left(\frac{\partial d^2}{\partial v_0}((u, v), \mathbf{v}), \frac{\partial d^2}{\partial v_1}((u, v), \mathbf{v}), \frac{\partial d^2}{\partial v_2}((u, v), \mathbf{v}) \right) \right)$$

dönüşümü bir Lagrangian immersiyondur ki bu nedenle $((u, v), \mathbf{v}) \rightarrow \mathbf{v}$ ile verilen $\pi \circ L(d^2) : Ca(d^2) \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ dönüşümü bir Lagrangian dönüşümdür. $\pi \circ L(d^2)$ dönüşümünün kritik değerler kümesi olarak tanımlanan \mathbb{M} yüzeyinin Kostik kümesi ya da fokal yüzeyi $Bif(d^2)$ kümesine eşittir (Arnold vd 1986).

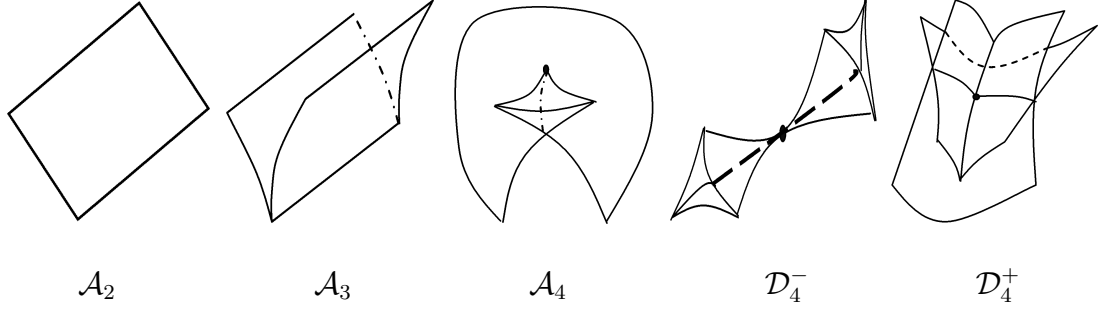
Genel bir \mathbb{M} yüzeyi için, $d_{\mathbf{v}}^2$

$$(\mathcal{A}_1^{\pm}) : u^2 \pm v^2, (\mathcal{A}_2) : u^2 + v^3, (\mathcal{A}_3^{\pm}) : u^2 \pm v^4, (\mathcal{A}_4) : u^2 + v^5, (\mathcal{D}_4^{\pm}) : u^2 v \pm v^3$$

fonksiyonlarıyla modellenen $\mathcal{A}_1^{\pm}, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3^{\pm}, \mathcal{A}_4, \mathcal{D}_4^{\pm}$ tipindeki tekilliklere sahiptir. $d_{\mathbf{v}}^2$ fonksiyonunun \mathcal{A}_1^{\pm} -tekilliğinde Kostik boş kümedir. Diğer genel tekil noktalarda ise Kostik genellikle Şekil 4.1'de gösterilen yüzeylere diffeomorftur; yani, fokal yüzey \mathcal{A}_2 -tekilliğinde düzleme, \mathcal{A}_3 -tekilliğinde sivri uçlu kenar (cuspidal edge) yüzeye, \mathcal{A}_4 -tekilliğinde swallowtail yüzeye, \mathcal{D}_4^- -tekilliğinde piramid yüzeye ve \mathcal{D}_4^+ -tekilliğinde cüzdan (purse) yüzeye diffeomorftur (Arnold vd 1986, Tari 2012).

\mathbb{M} üzerindeki bir *sirt* (ridge) eğrisi $d_{\mathbf{v}}^2$ fonksiyon ailesinin \mathcal{A}_3 -tekilliğe sahip olduğu \mathbb{M} üzerindeki noktaların kümesinin kapanışı olarak tanımlanır. Bu küme

Kostik üzerindeki tekil noktalara karşılık gelen noktaların geometrik yeridir. Kostik üzerinde sırt eğrisinin görüntüsü Porteous (2001)'de *rib eğri* olarak sınıflandırılır.



Şekil 4.1. Genel anlamda fokal yüzeylerin diffeomorfik olduğu yüzeyler

Şimdi Kostik kümesi açık şekilde belirlenecektir.

$$d_{\mathbf{v}}^2(u, v) = \langle \varphi(u, v) - \mathbf{v}, \varphi(u, v) - \mathbf{v} \rangle$$

olduğundan $d_{\mathbf{v}}^2$ singüler olması için gerek ve yeter koşul q noktasında

$$\langle \varphi - \mathbf{v}, \varphi_u \rangle = \langle \varphi - \mathbf{v}, \varphi_v \rangle = 0$$

olmasıdır veya $\varphi - \mathbf{v}$ vektörü q noktasında $\varphi_u \times \varphi_v$ vektörüne paralel olmasıdır; yani bir μ skaleri için $\varphi - \mathbf{v} = \mu \varphi_u \times \varphi_v$. Bu koşulun $\varphi_u \times \varphi_v$ vektörünün tek lightlike vektöre paralel olduğu LD üzerindeki bir p noktasında da geçerli olduğu gözlemlenebilir.

q noktasında $d_{\mathbf{v}}^2$ tekilliği dejenerer olması için bir μ skaleri için

$$\varphi(q) - \mathbf{v} = \mu \varphi_u \times \varphi_v(q) \text{ ve } \left((d_{\mathbf{v}}^2)_{uv}^2 - (d_{\mathbf{v}}^2)_{uu} (d_{\mathbf{v}}^2)_{vv} \right)(q) = 0$$

eşitliklerinin sağlanması gerek ve yeterlidir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (d_{\mathbf{v}}^2)_{uu} &= E + \langle \varphi - \mathbf{v}, \varphi_{uu} \rangle = E + \mu \bar{l}, \\ \frac{1}{2} (d_{\mathbf{v}}^2)_{uv} &= F + \langle \varphi - \mathbf{v}, \varphi_{uv} \rangle = F + \mu \bar{m}, \\ \frac{1}{2} (d_{\mathbf{v}}^2)_{vv} &= G + \langle \varphi - \mathbf{v}, \varphi_{vv} \rangle = G + \mu \bar{n} \end{aligned}$$

olduğundan $d_{\mathbf{v}}^2$ tekilliği dejeneredir ancak ve ancak $\varphi(q) - \mathbf{v} = \mu \varphi_u \times \varphi_v(q)$ ve

$$(F^2 - EG) - \mu (\bar{n}E - 2\bar{m}F + \bar{l}G) + \mu^2 (\bar{m}^2 - \bar{l}\bar{n}) = 0 \quad (4.5)$$

eşitlikleri sağlanır. O halde Kostik

$$C(\mathbb{M}) = \{ \varphi(u, v) - \mu \varphi_u \times \varphi_v(u, v) : (u, v) \in U \text{ ve } \mu \text{ (4.5) denkleminin çözümüdür} \}$$

şeklinde ifade edilir. $\lambda = \mu \|\varphi_u \times \varphi_v\|$ ve $\mathbf{N} = \varphi_u \times \varphi_v / \|\varphi_u \times \varphi_v\|$ birim normal vektör olmak üzere LD noktaları dışında $\varphi - \mathbf{v} = \lambda \mathbf{N}$ olur. O halde $d_{\mathbf{v}}^2$ tekilliği dejeneredir ancak ve ancak $\varphi - \mathbf{v} = \lambda \mathbf{N}$

$$(F^2 - EG) - \lambda (nE - 2mF + lG) + \lambda^2 (m^2 - ln) = 0 \quad (4.6)$$

eşitlikleri sağlanır. λ 'ya göre (4.6) denkleminin çözümleri eğrilik yarıçaplarının eksilmesine eşittir. Bu nedenle Kostik $C(\mathbb{M}/LD)$ Öklid anlamda \mathbb{M}/LD 'nin fokal kümesine eşit olur (Tari 2012).

$\varphi(U) = \mathbb{M}$ bir timelike yüzey parçası olarak düşünölsün ki \mathbf{N} normal vektörü her bir U noktası için spacelike vektör olması demektir. $p = \varphi(q)$ noktası LPL üzerinde olmasın. O halde p noktası $C(\mathbb{M})$ üzerinde ya iki farklı noktaya karşılık gelir ya da karşılık gelen bir nokta yoktur ve bu p noktasında iki asal vektör olup olmamasıyla alakalıdır. İki asal vektör olduğu zaman biri spacelike ve diğeri timelike olacaktır; ki bu nedenle $C(\mathbb{M})$ kümesinin bir parçası timelike diğeri parçası spacelike olacaktır. $\phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi(u, v, \lambda) = (F^2 - EG)(u, v) - \lambda(nE - 2mF + lG)(u, v) + \lambda^2(m^2 - ln)(u, v)$$

dönüşümü tanımlansın. Bu bölümde bundan sonraki kısımda p noktasının parabolik nokta olmadığı, yani $(m^2 - ln)(q) \neq 0$ olduğu düşünölecektir.

Önerme 4.2 (Tari 2012) Bir düzgün \mathbf{v} noktasında $C(\mathbb{M})$ kostiğinin normalı bu noktanın belirlediğı asal eğrilığe karşılık gelen asal vektöre paraleldir.

İspat: Genelliğı kaybetmeksizin $\phi_v \neq 0$ olsun ve $(u, v(u, \lambda), \lambda)$ ile $S = \phi^{-1}(0)$ yüzeyi parametrize edilsin. O halde Kostik

$$\psi(u, \lambda) = \varphi(u, v(u, \lambda)) - \lambda \mathbf{N}(u, v(u, \lambda))$$

ile parametrize edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \psi_u &= \varphi_u + v_u \varphi_v - \lambda(\mathbf{N}_u + v_u \mathbf{N}_v) \\ \psi_\lambda &= v_\lambda \varphi_v - \mathbf{N} - \lambda v_\lambda \mathbf{N}_v \end{aligned}$$

ve \mathbf{N}_u ve \mathbf{N}_v $T_p \mathbb{M}$ üzerinde olduğundan Kostik singülerdir ancak ve ancak $\psi_u = 0$ eşitliğı sağlanır. $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ tabanına göre $-d\mathbf{N}_p$ şekil operatörü matrisi

$$-\frac{1}{F^2 - EG} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_u &= -\frac{Fm - Gl}{F^2 - EG} \varphi_u - \frac{Fl - Em}{F^2 - EG} \varphi_v \\ \mathbf{N}_v &= -\frac{Fn - Gm}{F^2 - EG} \varphi_u - \frac{Fm - En}{F^2 - EG} \varphi_v \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle

$$\psi_u = \left(1 + \lambda \frac{Fm - Gl}{F^2 - EG} + \lambda v_u \frac{Fn - Gm}{F^2 - EG}\right) \varphi_u + \left(\lambda \frac{Fl - Em}{F^2 - EG} + v_u \left(1 + \lambda \frac{Fm - En}{F^2 - EG}\right)\right) \varphi_v$$

ve

$$\psi_\lambda = \lambda v_\lambda \frac{Fn - Gm}{F^2 - EG} \varphi_u + v_\lambda \left(1 + \lambda \frac{Fm - En}{F^2 - EG}\right) \varphi_v - \mathbf{N}$$

bulunur. $\psi_u = a\varphi_u + b\varphi_v$ ve $\psi_\lambda = c\varphi_u + d\varphi_v$ olarak yazılırsa

$$\psi_u \times \psi_\lambda = (ad - bc) \varphi_u \times \varphi_v - a\varphi_u \times \mathbf{N} - b\varphi_v \times \mathbf{N}$$

burada

$$ad - bc = \frac{v_\lambda}{F^2 - EG} ((F^2 - EG) - \lambda(nE - 2mF + lG) + \lambda^2(m^2 - ln))$$

şekindedir ki λ , (4.6) denkleminin çözümü olduğundan bu son eşitlik sıfırdır. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \varphi_u \times \mathbf{N} &= \frac{1}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \varphi_u \times (\varphi_u \times \varphi_v) \\ &= \frac{1}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} (\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \varphi_v - \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle \varphi_u) \\ &= \frac{1}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} (E\varphi_v - F\varphi_u) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\varphi_v \times \mathbf{N} = \frac{1}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} (F\varphi_v - G\varphi_u)$$

bulunur. Buradan

$$\psi_u \times \psi_\lambda = \frac{1}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} ((aF + bG) \varphi_u - (aE + bF) \varphi_v)$$

olur ve $du = aF + bG$ ve $dv = -aE + bF$ fonksiyonları (4.2) denklemini sağlar. \square

Teorem 4.3 (Tari 2012) \mathbb{M} , \mathbb{E}_1^3 uzayında bir timelike yüzey ve $p \in LPL$ olmak üzere timelike umbilik nokta olmasın.

(1) p noktası asal eğrilik çizgilerinin folded tekil noktası olmasın. p noktasına karşılık gelen noktada düzgün bir yüzey olan $C(\mathbb{M})$ kostiğinin lokal olarak bir parçası vardır. $C(\mathbb{M})$ üzerindeki indirgenmiş metrik \mathbb{M} üzerindeki LPL kümesine karşılık gelen noktalarda dejeneredir ki ve bu noktaların kümesi LDC ile gösterilecektir (kostiğin dejenere noktaların geometrik yeridir). LDC , $C(\mathbb{M})$ kümesini timelike ve spacelike olarak ikiye ayıran düzgün bir eğridir (Şekil 4.2 solda).

(2) p noktası asal eğrilik çizgilerinin folded tekil noktası olsun. LPL ve sırt eğri p noktasında teğettir. Kostik bir sivri uçlu-kenar yüzeydir ve düzgün parçalarının her biri LDC kümesinin bir parçasını içerir (Şekil 4.2 sağda).

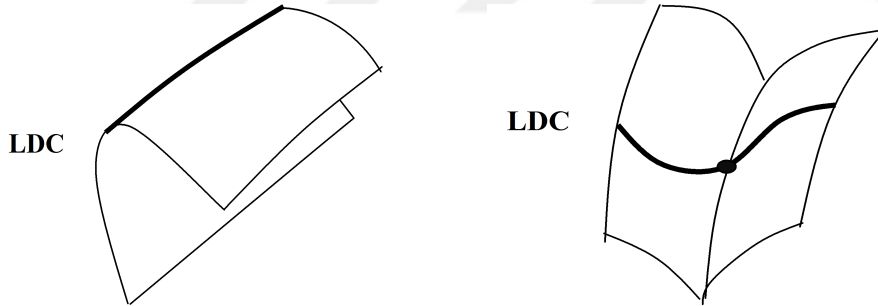
İspat: (1) ifadesi Önerme 4.2'den görülebilir. $S = \phi^{-1}(0)$ yüzeyi, iki asal eğrilik vektörlerinin olduğu \mathbb{M} üzerindeki noktaların kümesinin çift yüzlüsüdür. $C(\mathbb{M})$ kostiğinin normalisi asal eğrilığe paralel olduğundan S yüzeyinin spacelike asal vektöre karşılık gelen yüzü $C(\mathbb{M})$ kümesinin timelike parçasına; timelike asal vektöre gelen yüzü spacelike parçasına dönüşür. LPL üzerinde asal vektör lightlike olduğundan $C(\mathbb{M})$ üzerinde indirgenmiş metrik LDC kümesinin noktalarında dejeneredir.

(2) Genelliği kaybetmeksizin $\phi_v \neq 0$ olsun ve $(u, v(u, \lambda), \lambda)$ ile $S = \phi^{-1}(0)$ yüzeyi parametrize edilsin. Önerme 4.2'deki notasyon kullanılarak, kostiğin singüler olması için gerek ve yeter koşul $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ tabanına göre ψ_u vektörünün koordinatlarının sıfır olmasıdır. λ , (4.6) denklemini sağladığından her iki koordinat sıfırdır ancak ve ancak bu iki koordinattan biri sıfırdır. Bu nedenle sırt eğrisi;

$$\begin{aligned} (F^2 - EG) - \lambda(nE - 2mF + lG) + \lambda^2(m^2 - ln) &= 0, \\ F^2 - EG + \lambda(Fm - Gl) + \lambda v_u(Fn - Gm) &= 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

denklem sisteminden λ yok edilerek verilir. \mathbb{M} için Teorem 4.1 (2)'deki parametrizasyon (yani $E = G = 0$) alınsın. Şimdi, S yüzeyi üzerinde sırt ve LPL eğrilerinin liftleri analiz edilecektir. S yüzeyi $(u, v(u, \lambda), \lambda)$ ile parametrize edilir ve bir w düzgün fonksiyon germe için, ki eğrilik çizgilerinin folded tekilliğinde (yani LPL ve ridge üzerindeki bir noktada) $w'(u) = 0$ denklemini sağlar, LPL eğrisinin lifti $(u, w(u), \frac{-F(u, w(u))}{m(u, w(u))})$ tarafından parametrize edilir. O halde, böyle noktalarda LPL liftine teğet vektör $(1, 0, -(F_u m - F m_u)/m^2)$ vektörüne paraleldir.

Sistem (4.7)'deki ikinci denklemin sol tarafı B olsun. İlk denklemin sol tarafı ϕ olmak üzere sırt eğrisine teğet vektör $\nabla\phi$ ve ∇B gradient vektörlerine diktir. LPL üzerindeki ilgili noktada, $\phi = \phi_\lambda = \phi_u = 0$ olur. Bu nedenle, sırt eğrisinin liftine teğet vektör, $(\phi_v B_\lambda, 0, -\phi_v B_u)$ vektörüne paraleldir. Sonuç, $(1, 0, -(F_u m - F m_u)/m^2)$ ve $(\phi_v B_\lambda, 0, -\phi_v B_u)$ vektörlerinin genel yüzey için çapraz olmaları (transverse) ve bu vektörlerin (u, v) -parametreliliğe uzaya izdüşümlerinin paralel vektörler olmalarından takip edilir. \square



Şekil 4.2. LPL eğrisinin genel noktalarında (soldaki) ve eğrilik çizgilerinin folded tekil noktalarında (sağdaki) kostik üzerindeki metrik yapı

Lemma 4.4 (Tari 2012) p , \mathbb{M} timelike yüzeyinin bir timelike umbilik noktası olsun. Kostik üzerinde LPL kümesinin görüntüsü timelike umbilik noktaya karşılık gelen noktada birbirine teğet olan iki düzgün eğrinin birleşimidir.

İspat: Teorem 4.1 (2)'deki parametrizasyon (yani $E = G = 0$) alınsın. Buna göre LPL kümesi $ln = 0$ denklemiyle ifade edilir ve bu küme üzerindeki (4.6) denkleminin çift katlı kökü $\lambda = -F/m$ olur. $l = 0$ (sırasıyla $n = 0$) eğrisinin lokal parametrizasyonunu $\alpha_1(t) = (u_1(t), v_1(t))$ (sırasıyla $\alpha_2(t) = (u_2(t), v_2(t))$) ile verilsin. LPL kümesinin Kostik üzerindeki görüntüsü

$$\beta_i(t) = \left(\varphi + \frac{F}{m} \mathbf{N} \right) (\alpha_i(t)), \quad i = 1, 2$$

ile parametrize edilir.

$$\beta'_i = -\frac{v'_i n}{m} \varphi_u - \frac{u'_i l}{m} \varphi_v + \left(\frac{F}{m}\right)' \mathbf{N}$$

olduğundan $\beta'_1 = \beta'_2 = \left(\frac{F}{m}\right)' \mathbf{N}$ vektörü timelike umbilik noktada genellikle sıfır olmayan bir vektördür. \square

Şimdi LD üzerindeki bir noktada Kostik üzerindeki metrik yapısıyla ilgili bir teorem verilecektir.

Teorem 4.5 (Tari 2012) p noktasında \mathbb{M} üzerindeki indirgenmiş metriğin dejenere noktalarının kümesinde bir nokta olsun ancak lightlike eğrilerin folded singüler noktası olmasın. O halde Kostik lokal olarak $C_1(\mathbb{M})$ ve $C_2(\mathbb{M})$ gibi iki parçaya sahiptir.

(1) $C_1(\mathbb{M})$ parçası LD eğrisi boyunca \mathbb{M} yüzeyine teğet düzgün bir yüzeydir. \mathbb{M} üzerindeki LD eğrisi ayrıca $C_1(\mathbb{M})$ üzerindeki indirgenmiş metriğin dejenere noktalarının geometrik yeridir ve bu eğri $C_1(\mathbb{M})$ parçasını timelike ve spacelike olarak iki parçaya böler.

(2) $C_2(\mathbb{M})$ parçası ya düzgün bir yüzeydir ya da sivri uçlu yüzeydir; ve regüler noktalarında timelike yüzeydir. $C_2(\mathbb{M})$ üzerindeki LD kümesinin görüntüsü bir lightlike eğridir.

İspat: (1) φ , $p = \varphi(0, 0) \in LD$ ile \mathbb{M} yüzeyinin bir parametrizasyonu olsun. Orijin d_v^2 fonksiyonunun dejenere tekilliği olması için gerek ve yeter koşul (4.5) denklemi sağlanır. p noktasında $F^2 - EG = 0$ olduğundan (4.5) denkleminin

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \frac{\bar{n}E - 2\bar{m}F + \bar{l}G}{\bar{m}^2 - \bar{l}\bar{n}}$$

şeklinde iki çözümü vardır. $C_1(\mathbb{M})$, $\mu_1 = 0$ değerine karşılık gelen Kostik olarak gösterilsin. (4.5) denkleminin iki farklı kökü olduğundan diskriminant fonksiyonu pozitifdir. Bu nedenle, p komşuluğunda, LD üzerinde $\mu(u, v) = 0$ olacak şekilde bu denklemi çözen bir $\mu(u, v)$ düzgün fonksiyonu vardır.

$C_1(\mathbb{M})$ parçasının bir parametrizasyonu

$$\mathbf{v}(u, v) = \varphi(u, v) - \mu(u, v) (\varphi_u \times \varphi_v)(u, v) \quad (4.8)$$

ile verilir. Buradan LD kümesinin de $C_1(\mathbb{M})$ üzerinde bir eğri olduğu takip edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_u &= \varphi_u - \mu_u \varphi_u \times \varphi_v - \mu (\varphi_u \times \varphi_v)_u \\ \mathbf{v}_v &= \varphi_v - \mu_v \varphi_u \times \varphi_v - \mu (\varphi_u \times \varphi_v)_v \end{aligned}$$

yazılabilir. $p = \varphi(u, v) \in LD$ noktasında $\varphi_u \times \varphi_v \in T_p \mathbb{M}$ olur ki bu \mathbf{v}_u ve \mathbf{v}_v vektörlerinin de $T_p \mathbb{M}$ teğet düzleminde olduğu anlamına gelir. Bu, $C_1(\mathbb{M})$ ve \mathbb{M} yüzeyinin LD boyunca teğet olduğu ve LD eğrisinin de $C_1(\mathbb{M})$ üzerinde dejenere noktaların geometrik yeri olduğu anlamına gelir.

LD boyunca $E = F = 0$ olan \mathbb{M} yüzeyinin lokal parametrizasyonu göz önüne alınsın. LD eğrisinin düzgün bir eğri olması için genel varsayım LD üzerinde $E_u \neq 0$ ya da $E_v \neq 0$ olması anlamına gelir. Genelliği kaybetmeksizin $E_u \neq 0$ varsayılabilir.

$C_1(\mathbb{M})$ parçasının $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ birinci temel form katsayıları LD üzerinde \mathbb{M} yüzeyinin birinci temel form katsayılarına eşittir. $\tilde{\delta} = \tilde{F}^2 - \tilde{E}\tilde{G}$ olsun. $C_1(\mathbb{M})$ üzerindeki LD eğrisinin spacelike ve timelike olarak bu yüzeyi iki parçaya böldüğünü ispatlamak için $\tilde{\delta}$ fonksiyonunun LD üzerinde işaret değiştirdiği gösterilecektir. Bunun için, $\tilde{\delta}_u \neq 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. LD üzerinde $\tilde{\delta}_u = -\tilde{E}_u G$ olduğundan $\tilde{E}_u \neq 0$ olması gerekir.

$p \in LD$ üzerinde φ_u vektörü $T_p\mathbb{M}$ teğet düzleminde tek lightlike vektördür. Bu nedenle $\alpha(t)$ düzgün fonksiyonu vardır öyle ki

$$\varphi_u \times \varphi_v = \alpha \varphi_u$$

eşitliği sağlar. Buradan,

$$\bar{l} = \langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{uu} \rangle = \frac{1}{2} \alpha E_u$$

olduğundan

$$\alpha = \frac{2\bar{l}}{E_u}$$

olur. LD üzerinde (4.5) denkleminin diferensiyeli

$$\mu_u = -\frac{E_u}{\bar{l}}$$

denklemini verir. $\langle \varphi_u, \varphi_u \times \varphi_v \rangle \equiv 0$ denkleğinden;

$$\langle \varphi_u, (\varphi_u \times \varphi_v)_u \rangle = -\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \times \varphi_v \rangle = -\alpha \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle$$

olur. Şimdi LD üzerindeki noktalar için

$$\mathbf{v}_u = (1 - \mu_u \alpha) \varphi_u = 3\varphi_u$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{uu} &= \varphi_{uu} - 2\mu_u (\varphi_u \times \varphi_v)_u - \mu_{uu} \varphi_u \times \varphi_v \\ &= \varphi_{uu} - 2\mu_u (\varphi_u \times \varphi_v)_u - \mu_{uu} \alpha \varphi_u \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu nedenle LD üzerinde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{E}_u &= \langle \mathbf{v}_{uu}, \mathbf{v}_u \rangle \\ &= 3 (\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle - 2\mu_u \langle (\varphi_u \times \varphi_v)_u, \varphi_u \rangle) \\ &= 3 (1 + 2\mu_u \alpha) \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle \\ &= -\frac{9}{2} E_u \neq 0 \end{aligned}$$

bulunur.

(2) kostiğin $C_2(\mathbb{M})$ parçası (4.5) denkleminin sıfır olmayan çözüme karşılık gelen parçadır. $C_2(\mathbb{M})$ kostiğinin düzgün noktalarında bu yüzeyin normali

$$-\bar{m}\varphi_u + \bar{l}\varphi_v$$

asal vektörüne paralel olduğu gösterilebilir ki bu nedenle $C_2(\mathbb{M})$ timelike yüzeydir. Hesaplamaları basitleştirmek için Teorem 4.1 (2)'deki parametrizasyon göz önüne alınsın. $\bar{l} \neq 0$ olsun ki böylece

$$\mu_2 = \frac{\bar{l}G}{\bar{m}^2 - \bar{l}\bar{n}}$$

çözümü p noktasında sıfır değildir. Kostik $C_2(\mathbb{M})$ de LD üzerinde $\mu = \mu_2$ olacak şekilde bir μ fonksiyonu için (4.8) parametrizasyonu ile verilebilir. $(u(t), v(t))$, LD eğrisinin U kümesinde lokal parametrizasyonu olmak üzere bu eğrinin $C_2(\mathbb{M})$ üzerindeki görüntüsü

$$\gamma(t) = (\varphi - \mu\varphi_u \times \varphi_v)(u(t), v(t))$$

ile parametrize edilebilir. (u', v') sıfır olmayan LD eğrisine teğet vektör olduğundan $(u', v') = (-E_v, E_u)$ farzedilebilir. $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 0$ olduğunu kanıtlamak için bazı ön sonuçlar bulunacaktır, burada diferensiyel t parametresine göre LD boyunca uygulanacaktır.

LD üzerinde $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 0$ olduğundan bu eğri üzerinde

$$\langle \varphi_u, -E_v\varphi_{uu} + E_u\varphi_{uv} \rangle = 0 \quad (4.9)$$

yazılır. Teorem 4.5 (1)'in kanıtından $\alpha(t)$ düzgün fonksiyonu vardır öyle ki LD üzerinde $\varphi_u \times \varphi_v = \alpha\varphi_u$ olur. Bu nedenle,

$$\bar{l} = \alpha \langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle, \quad \bar{m} = \alpha \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle, \quad \bar{n} = \alpha \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle.$$

$\varphi_u \times \varphi_v = \alpha\varphi_u$ denkleminin her iki tarafı diferensiyellenirse

$$(-E_v\varphi_{uu} + E_u\varphi_{uv}) \times \varphi_v + \varphi_u \times (-E_v\varphi_{uv} + E_u\varphi_{vv}) = \alpha' \varphi_u + \alpha(-E_v\varphi_{uu} + E_u\varphi_{uv})$$

bulunur. Bu denklemi φ_u ile Lorentz iç çarpımı alınırsa ve (4.9) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle (-E_v\varphi_{uu} + E_u\varphi_{uv}) \times \varphi_v, \varphi_u \rangle &= \alpha \langle -E_v\varphi_{uu} + E_u\varphi_{uv}, \varphi_u \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Buradan LD kümesi üzerinde

$$-E_v \langle \varphi_{uu} \times \varphi_v, \varphi_u \rangle + E_u \langle \varphi_{uv} \times \varphi_v, \varphi_u \rangle = 0$$

olur, yani

$$-E_v\bar{l} + E_u\bar{m} = 0 \quad (4.10)$$

yazılabilir. Benzer şekilde $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$ olduğundan bu eğri boyunca diferensiyellenirse

$$\langle -E_v \varphi_{uu} + E_u \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle = -\langle \varphi_u, -E_v \varphi_{uv} + E_u \varphi_{vv} \rangle = -\frac{1}{\alpha} (-E_v \bar{m} + E_u \bar{n}) \quad (4.11)$$

bulunur.

(4.9)'dan ve $\varphi_u, T_p \mathbb{M}$ teğet düzlemine normal lightlike vektör olduğundan $-E_v \varphi_{uu} + E_u \varphi_{uv} \in T_p \mathbb{M}$ olur. Buna göre a, b herhangi skaleri için

$$-E_v \varphi_{uu} + E_u \varphi_{uv} = a \varphi_u + b \varphi_v$$

yazılabilir. (4.11)'den

$$\langle -E_v \varphi_{uu} + E_u \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle = -\frac{1}{\alpha} (-E_v \bar{m} + E_u \bar{n}) = bG$$

eşitliği bulunur ve bu denklemi kullanarak

$$b = -\frac{(-E_v \bar{m} + E_u \bar{n})}{\alpha G}$$

ve

$$\langle -E_v \varphi_{uu} + E_u \varphi_{uv}, -E_v \varphi_{uu} + E_u \varphi_{uv} \rangle = b^2 G = \frac{(-E_v \bar{m} + E_u \bar{n})^2}{\alpha^2 G} \quad (4.12)$$

bulunur.

Şimdi $\gamma = \varphi - (\mu\alpha) \varphi_u$ eşitliği diferensiyellenirse,

$$\gamma' = -(E_v + (\mu\alpha)') \varphi_u + E_u \varphi_v - (\mu\alpha) (E_v \varphi_{uu} + E_u \varphi_{uv}).$$

Bu nedenle (4.9), (4.10), (4.11) ve (4.12)'den

$$\begin{aligned} \langle \gamma', \gamma' \rangle &= E_u^2 G + 2\mu E_u (-E_v \bar{m} + E_u \bar{n}) + \frac{\mu^2}{G} (-E_v \bar{m} + E_u \bar{n})^2 \\ &= E_u^2 G - 2\mu E_u (E_v \bar{m} - E_u \bar{n}) + \frac{\mu^2}{G} (E_v \bar{m} - E_u \bar{n})^2 \\ &= \frac{1}{G} (E_u G - \mu (E_v \bar{m} - E_u \bar{n}))^2 \\ &= \frac{E_u^2}{G} \left(G - \mu \left(\frac{E_v}{E_u} \bar{m} - \bar{n} \right) \right)^2 \\ &= \frac{E_u^2}{G} \left(G - \mu \left(\frac{\bar{m}^2}{\bar{l}} - \bar{n} \right) \right)^2 \\ &= \frac{(\bar{m}^2 - \bar{l}\bar{n})^2 E_u^2}{\bar{l}G} \left(\frac{\bar{l}G}{\bar{m}^2 - \bar{l}\bar{n}} - \mu \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

olur. \square

Not 4.6 LD üzerindeki bir noktaya yakınsayan $\mathbb{M} \setminus LD$ üzerindeki noktaların bir dizisi boyunca κ_i , ($i = 1, 2$) asal eğriliği sonsuza ve $\|\varphi_u \times \varphi_v\|$ sifıra gitme eğilimindedir. Teorem 4.5, $1/\kappa_i \|\varphi_u \times \varphi_v\|$ fonksiyonunun μ_i sonlu limiti olduğunu ve $\mathbb{M} \setminus LD$ yüzeyinin fokal kümesinin \mathbb{M} yüzeyine genişletilebileceğini ifade eder.

4.2. Hiperbolik m-Uzayda Fokal Yüzeyler

Bu bölümde \mathbb{E}_1^{m+1} Minkowski uzayında $H_+^m(-1)$ hiperbolik uzayı içine gömülmüş hiperyüzeylerin geometrisi incelenecek ve bu hiperyüzeylerin evolütleri (fokal yüzeyleri) tanımlanarak tekillik teorisi vasıtasıyla özellikleri çalışılacaktır.

Tanım 4.7 $LC_{\mathbf{c}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}_1^{m+1} : \langle \mathbf{x} - \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{c} \rangle = 0\}$ kümesine \mathbf{c} köşeli bir *kapalı lightkoni* denir.

$$LC_+^* = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in LC_0 : x_0 > 0\}$$

kümesine ise orijindeki *gelecek (future) lightkoni* denir. Eğer $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ bir sıfır olmayan lightlike vektör ise $x_0 \neq 0$ olur. Bu nedenle

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_m}{x_0}\right) \in S_+^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_m) : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0, x_0 = 1\}$$

yazılabilir. S_+^{m-1} kümesine *lightcone (m-1)-küre* denir.

$U \subset \mathbb{R}^{m-1}$ bir açık alt küme olmak üzere $\varphi : U \rightarrow H_+^m(-1)$ bir gömme (embedding) ve $\mathbb{M} = \varphi(U)$ olsun. Herhangi $p = \varphi(u) \in \mathbb{M} \subset H_+^m(-1)$ için $u = (u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$ ve $\varphi_{u_i}(u) = \partial\varphi/\partial u_i(u) = (\varphi_{0u_i}(u), \varphi_{1u_i}(u), \dots, \varphi_{mu_i}(u))$ olmak üzere $\langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle = -1$ olduğundan

$$\langle \varphi_{u_i}(u), \varphi(u) \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m-1)$$

eşitliği vardır. Bu nedenle, \mathbb{M} yüzeyinin teğet uzayı

$$T_p\mathbb{M} = \text{span} \{\varphi_{u_1}(u), \dots, \varphi_{u_{m-1}}(u)\}$$

şeklinde verilir. $N_p\mathbb{M}$, $p = \varphi(u)$ noktasında \mathbb{M} yüzeyinin normal uzayı olsun ki bu uzay bir timelike düzlemdir.

$$\mathbf{e}(u) = \frac{(\varphi \times \varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{m-1}})(u)}{\|(\varphi \times \varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{m-1}})(u)\|} \in S^1(N_p\mathbb{M} \cap T_p H_+^m(-1))$$

spacelike vektörü tanımlansın. O halde $N_p\mathbb{M} = \text{span} \{\varphi(u), \mathbf{e}(u)\}$ ifadesi doğrudur.

Tanım 4.8 $\mathcal{G}(u) = \mathbf{e}(u)$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{G} : U \rightarrow S_1^m$ dönüşümüne \mathbb{M} yüzeyinin *de Sitter Gauss göstergesi (de Sitter Gauss indicatrix)* denir. Öklid uzayında \mathbf{e} vektörünü hiperyüzeyin birim normalı olarak kullanarak φ üzerinde bir dışsal diferensiyel geometri inşa edilebilir. Bu durumda, bir hiperyüzeyin de Sitter Gauss göstergesi Öklid uzayındaki bir hiperyüzey için Gauss dönüşümüne benzer bir rol oynar. $D_{\mathbf{v}}$, \mathbf{v} vektörüne göre kovaryant türevi göstermek üzere herhangi $p = \varphi(u_0) \in \mathbb{M}$ ve $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{M}$ için $D_{\mathbf{v}}\mathbf{e} \in T_p\mathbb{M}$ olduğu açıktır (Izumiya vd 2004b).

Tanım 4.9 $A_p = -d\mathcal{G} : T_p\mathbb{M} \rightarrow T_p\mathbb{M}$ lineer dönüşümüne $p = \varphi(u_0)$ noktasında \mathbb{M} yüzeyinin (*de Sitter*) *şekil operatorü* (*shape operator*) denir. A_p dönüşümünün κ_p karakteristik değerine (*de Sitter*) *asal eğrilik* denir. A_p dönüşümünün karakteristik vektörüne (*de Sitter*) *asal vektör* denir. Tanımdan κ_p bir (*de Sitter*) asal eğriliktir ancak ve ancak $\det(A_p - \kappa_p I) = 0$ eşitliği sağlanır. $p = \varphi(u_0)$ noktasında \mathbb{M} hiperyüzeyinin (*de Sitter*) *Gauss-Kronecker eğriliği* $K_d(u_0) = \det A_p$ olarak tanımlanır (Izumiya vd 2004b).

Tanım 4.10 Eğer $A_p = \kappa_p \text{id}_{T_p\mathbb{M}}$ ise $p = \varphi(u_0)$ noktasına *umbilik* nokta denir. \mathbb{M} yüzeyinin tüm noktaları umbilik ise \mathbb{M} hiperyüzeyine *total umbilik* denir. $H_+^m(-1)$ ve bir spacelike, timelike ya da lightlike hiperdüzlemin kesişimiyle verilen hiperyüzeye sırasıyla *hiperküre*, *eşuzaklık* (*equidistant*) *hiperdüzlemi* ya da *hiperhoroküre* (*hyperhorosphere*) denir. Hiperyüzey $H_+^m(-1)$ ve \mathbb{E}_1^{m+1} uzayının orijininin geçen bir timelike hiperdüzlemin kesişimiyle veriliyorsa, eşuzaklık hiperdüzlemine basitçe hiperdüzlem denecektir.

Önerme 4.11 (Izumiya vd 2004b) $\mathbb{M} = \varphi(U)$ bir total umbilik olsun, o halde $\kappa(p) = \kappa$ sabittir. Bu koşul altında aşağıdaki sınıflandırma vardır.

(1) $\kappa^2 \neq 1$ olsun.

(a) $\kappa \neq 0$ ve $\kappa^2 < 1$ ise \mathbb{M} eşuzaklık hiperdüzleminin bir parçasıdır.

(b) $\kappa \neq 0$ ve $\kappa^2 > 1$ ise \mathbb{M} hiperkürenin bir parçasıdır.

(c) $\kappa = 0$ ise \mathbb{M} hiperdüzlemin bir parçasıdır.

(2) $\kappa^2 = 1$ ise \mathbb{M} hiperhorokürenin bir parçasıdır.

Tanım 4.12 φ_{u_i} ($i = 1, \dots, n-1$) vektörleri spacelike olduğundan $\mathbb{M} = \varphi(U)$ üzerinde $ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} g_{ij} du_i du_j$ Riemann metriği (birinci temel form) tanımlanabilir, burada

$$g_{ij}(u) = \langle \varphi_{u_i}(u), \varphi_{u_j}(u) \rangle, u \in U$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$h_{ij} = \langle -\mathcal{G}_{u_i}(u), \varphi_{u_j}(u) \rangle$$

fonksiyonları *ikinci temel form* katsayılarını tanımlar. Öklid uzayındaki hiperyüzeyler üzerindeki diferensiyel geometriye benzer argümanlarla *de Sitter Gauss-Kronecker eğriliği*

$$K_d = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ab})}$$

ile verilir. Bir $\varphi : U \rightarrow H_+^m(-1)$ hiperyüzeyi için her i, j için $h_{ij}(u_0) = 0$ ise $u_0 \in U$ veya $p = \varphi(u_0)$ noktasına (*de Sitter*) *düzlemsel nokta* (*flat nokta*) denir. Bu nedenle $p = \varphi(u_0)$ bir (*de Sitter*) düzlemsel nokta olması için gerek ve yeter koşul

p noktasının sıfır (de Sitter) asal eğriliği ile bir umbilik nokta olmasıdır (Izumiya vd 2004b).

Tanım 4.13 $\varphi : U \rightarrow H_+^m(-1)$ olmak üzere, $\varphi(U) = \mathbb{M}$ hiperyüzeyi için de Sitter asal eğriliklerinden biri $\kappa^2(u_0) = 1$ koşulunu sağlarsa $p = \varphi(u_0) \in \mathbb{M}$ noktasına bir *horoparabolik nokta* denir. $\varphi(U) = \mathbb{M}$ hiperyüzeyinin *total evölütü*

$$TE_{\mathbb{M}}^{\pm} = \left\{ \pm \frac{\kappa(u)}{\sqrt{|\kappa^2(u)-1|}} \left(\varphi(u) + \frac{1}{\kappa(u)} \mathbf{e}(u) \right) : \kappa(u), p = \varphi(u) \text{ 'da bir} \right. \\ \left. \text{de Sitter asal eğriliktir, } u \in U \right\}$$

olarak tanımlanır.

$$HE_{\mathbb{M}}^{\pm} = \left\{ \pm \frac{\kappa(u)}{\sqrt{|\kappa^2(u)-1|}} \left(\varphi(u) + \frac{1}{\kappa(u)} \mathbf{e}(u) \right) : \kappa(u), p = \varphi(u) \text{ 'da } \kappa^2(u) > 1 \right. \\ \left. \text{ile bir de Sitter asal eğriliktir, } u \in U \right\}$$

ve

$$SE_{\mathbb{M}}^{\pm} = \left\{ \pm \frac{\kappa(u)}{\sqrt{|\kappa^2(u)-1|}} \left(\varphi(u) + \frac{1}{\kappa(u)} \mathbf{e}(u) \right) : \kappa(u), p = \varphi(u) \text{ 'da } \kappa^2(u) < 1 \right. \\ \left. \text{ile bir de Sitter asal eğriliktir, } u \in U \right\}$$

olmak üzere, yukarıdaki hiperyüzey için total evölütün

$$TE_{\mathbb{M}}^{\pm}(u) = HE_{\mathbb{M}}^{\pm}(u) \cup SE_{\mathbb{M}}^{\pm}(u)$$

şeklinde ayrışımı vardır. $HE_{\mathbb{M}}^{\pm} \subset H_+^m(-1) \cup H_-^m(-1)$ ve $SE_{\mathbb{M}}^{\pm} \subset S_1^m$ olduğu gösterilebilir. $\mathbf{v} \in H_-^m(-1)$ ise $-\mathbf{v} \in H_+^m(-1)$. Buradan $HE_{\mathbb{M}}^{\pm} \subset H_+^m(-1)$ ya da $HE_{\mathbb{M}}^{\pm} \subset H_-^m(-1)$ yazılabilir. $HE_{\mathbb{M}}^{\pm}$ 'nin $H_+^m(-1)$ hiperbolik uzayında olduğu farzedilsin. O halde $HE_{\mathbb{M}}^{\pm}$ (ya da $SE_{\mathbb{M}}^{\pm}$) kümesine \mathbb{M} hiperyüzeyinin *hiperbolik evölütü* (ya da *de Sitter evölütü*) denir.

U üzerinde $\kappa^2 > 1$ ifadesini sağlayan κ de Sitter asal eğriliği sabit olacak şekilde $HE_{\kappa}^{\pm} : U \rightarrow H_+^m(-1)$ düzgün dönüşümü

$$HE_{\kappa}^{\pm}(u) = \pm \frac{\kappa}{\sqrt{|\kappa^2 - 1|}} \left(\varphi(u) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{e}(u) \right)$$

şeklinde tanımlansın. Benzer şekilde $SE_{\kappa}^{\pm} : U \rightarrow S_1^m$ dönüşümü $\kappa^2 < 1$ olacak şekilde tanımlanabilir.

Önerme 4.14 (Izumiya vd 2004b) $\varphi(U) = \mathbb{M}$, $H_+^m(-1)$ uzayında horoparabolik ya da de Sitter düzlemsel noktası olmayan bir hiperyüzey olsun.

(A) Aşağıdakiler denktir:

- (1) \mathbb{M} $\kappa^2 > 1$ olacak şekilde bir total umbiliktir.
- (2) $HE_{\mathbb{M}}^{\pm}$, $H_+^m(-1)$ uzayında bir noktadır.
- (3) \mathbb{M} hiperkürenin bir parçasıdır.

(B) Aşağıdakiler denktir:

- (1) \mathbb{M} , $0 < \kappa^2 < 1$ olacak şekilde bir total umbiliktir.
- (2) $SE_{\mathbb{M}}^{\pm}$, S_1^m uzayında bir noktadır.
- (3) \mathbb{M} eşuzaklık hiperdüzleminin bir parçasıdır.

İspat: (A) (1) koşulununun sağlandığı düşünölsün. O halde de Sitter asal eğrilik $\kappa(u) = \kappa$ sabittir ve $\kappa^2 > 1$ eşitsizliği vardır. Bu nedenle herhangi $u \in U$ için

$$\frac{\partial HE_{\kappa}^{\pm}}{\partial u_i}(u) = \pm \frac{\kappa}{\sqrt{|\kappa^2 - 1|}} \left(\varphi_{u_i}(u) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{e}_{u_i}(u) \right)$$

yazılabilir. De Sitter asal eğriliğın tanımından ve $i = 1, \dots, m-1$ için $-\mathbf{e}_{u_i} = \kappa \varphi_{u_i}$ olduğundan $\partial HE_{\kappa}^{\pm} / \partial u_i = 0$ bulunur. Buradan $HE_{\kappa}^{\pm}(u)$ bir nokta olur.

Tersine, herhangi $u \in U$ ve de Sitter asal eğrilik $\kappa(u)$ için

$$HE_{\kappa}^{\pm}(u) = \pm \frac{\kappa(u)}{\sqrt{|\kappa(u)^2 - 1|}} \left(\varphi(u) + \frac{1}{\kappa(u)} \mathbf{e}(u) \right)$$

dönüşümünün bir nokta olduğu farzedilirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial HE_{\kappa}^{\pm}}{\partial u_i}(u) &= \frac{\mp \kappa_{u_i}(u)}{(\kappa^2(u) - 1)^{3/2}} \left(\varphi(u) + \frac{1}{\kappa(u)} \mathbf{e}(u) \right) \\ &\pm \frac{\kappa(u)}{\sqrt{|\kappa^2(u) - 1|}} \left(\varphi_{u_i}(u) - \frac{\kappa_{u_i}(u)}{\kappa^2(u)} \mathbf{e}(u) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{e}_{u_i}(u) \right) \end{aligned}$$

bulunmuş olur. $\mathbf{e}_{u_i} \in T_p \mathbb{M}$ ve $\{\varphi, \varphi_{u_1}, \dots, \varphi_{u_{m-1}}, \mathbf{e}\}$ lineer bağımsız olduğundan $\partial HE_{\kappa}^{\pm} / \partial u_i = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $i = 1, \dots, m-1$ için $\kappa_{u_i} = 0$ olmasıdır. Bu nedenle $\kappa(u) = \kappa$ sabit ve $\kappa^2 > 1$ söylenebilir. Dahası, başka bir $\bar{\kappa}$ de Sitter asal eğrilik olduğu düşünölsün. $HE_{\kappa}^{\pm}(u) = HE_{\bar{\kappa}}^{\pm}(u)$ bir nokta olduğu için $\kappa = \bar{\kappa}$ olur ki bu \mathbb{M} yüzeyinin total umbilik olduğu anlamına gelir.

Bir hiperküre total umbilik olduğu için (1) ve (3) koşulları Önerme 4.11'den birbirine denktir. Bu (A)'nın kanıtını tamamlar. (B)'nin kanıtı da (A)'nın kanıtına benzer argümanlarla verilebilir. \square

4.2.1. Hiperyüzey üzerinde yükseklik fonksiyonları

Bu bölümde bir hiperyüzeyin hiperbolik ve de Sitter fokal yüzeyini belirlemek için hiperbolik uzayda bir hiperyüzeyde iki tür yükseklik fonksiyon ailesi düşünölecektir. $\varphi(U) = \mathbb{M}$ hiperyüzeyi üzerinde $\mathbf{H}^T(u, \mathbf{v}) = \langle \varphi(u), \mathbf{v} \rangle$ ile

$$\mathbf{H}^T : U \times (H_+^m(-1) \setminus \mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

hiperbolik timelike yükseklik fonksiyonu ve $\mathbf{H}^S(u, \mathbf{v}) = \langle \varphi(u), \mathbf{v} \rangle$ ile

$$\mathbf{H}^S : U \times S_1^m \rightarrow \mathbb{R}$$

hiperbolik spacelike yükseklik fonksiyonu tanımlansın. Ayrıca $\mathbf{h}_{\mathbf{v}}^T(u) = H^T(u, \mathbf{v})$ ve $\mathbf{h}_{\mathbf{v}}^S(u) = H^S(u, \mathbf{v})$ olsun. Aşağıdaki önerme standart bir sonuçtur.

Önerme 4.15 (Izumiya vd 2004b) $\varphi : U \rightarrow H_+^m(-1)$ bir hiperyüzey olsun.

(1) $(\partial \mathbf{h}_{\mathbf{v}}^T / \partial u_i)(u) = 0$ ($i = 1, \dots, m-1$) olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{v} = \lambda \varphi(u) + \mu \mathbf{e}(u)$$

ve $\lambda^2 - \mu^2 = 1$ olacak şekilde λ, μ reel sayıları vardır.

(2) $(\partial \mathbf{h}_{\mathbf{v}}^S / \partial u_i)(u) = 0$ ($i = 1, \dots, m-1$) olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{v} = \lambda \varphi(u) + \mu \mathbf{e}(u)$$

ve $\lambda^2 - \mu^2 = -1$ olacak şekilde λ, μ reel sayıları vardır.

(1) durumunda $\mathbf{v} \notin M$ olduğundan $\mu \neq 0$ 'dır. Önerme 4.15'den \mathbf{H}^T ve \mathbf{H}^S fonksiyonlarının katastrof (catastrophe) kümeleri

$$Ca(\mathbf{H}^T) = \{(u, \mathbf{v}) \in U \times (H_+^m(-1) \setminus M) : \mathbf{v} = \lambda \varphi(u) + \mu \mathbf{e}(u)\}$$

$$Ca(\mathbf{H}^S) = \{(u, \mathbf{v}) \in U \times S_1^m : \mathbf{v} = \lambda \varphi(u) + \mu \mathbf{e}(u)\}$$

şeklinde belirlenir. Ayrıca, $Ca(\mathbf{H}^T)$ üzerinde

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}^T}{\partial u_i \partial u_j}(u, \mathbf{v}) = \langle \varphi_{u_i u_j}(u), \mathbf{v} \rangle = -\lambda g_{ij} + \mu h_{ij}$$

ve $Ca(\mathbf{H}^S)$ üzerinde

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}^S}{\partial u_i \partial u_j}(u, \mathbf{v}) = \langle \varphi_{u_i u_j}(u), \mathbf{v} \rangle = -\lambda g_{ij} + \mu h_{ij}$$

olduğundan

$$\det(\text{Hess}(\mathbf{h}_{\mathbf{v}}^T)(u)) = \det\left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}^T}{\partial u_i \partial u_j}(u, \mathbf{v})\right) = 0$$

(ya da $\det(\text{Hess}(\mathbf{h}_{\mathbf{v}}^T)(u)) = 0$) eşitliğinin sağlanması için $\kappa^2(u) > 1$ olacak şekilde bir $\kappa(u) = \lambda/\mu$ de Sitter asal eğrilik olması gerek ve yeterdir. $\mathbf{v} \in H_+^m(-1)$ (ya da $\mathbf{v} \in S_1^m$) ve $\kappa^2(u) > 1$ (ya da $\kappa^2(u) < 1$) olacak şekilde $\kappa(u) = \lambda/\mu$ bir de Sitter asal eğrilik olduğundan

$$\text{Bif}(\mathbf{H}^T) = HE_{\mathbb{M}}^+ \cup HE_{\mathbb{M}}^- \text{ (ya da } \text{Bif}(\mathbf{H}^T) = SE_{\mathbb{M}}^+ \cup SE_{\mathbb{M}}^-)$$

bulunur (Izumiya vd 2004b).

Önerme 4.16 (Izumiya vd 2004b) $p = \varphi(u_0)$ noktası $\varphi(U) = \mathbb{M}$ yüzeyinin bir de Sitter düzlemsel noktası olmasın.

(1) $p, \kappa^2(p) > 1$ ile bir umbilik nokta olması için gerek ve yeter koşul u_0 noktasının $\mathbf{h}_{\mathbf{v}_0}^T$ fonksiyonunun bir singüler noktası ve $\text{rank}(Hess(\mathbf{h}_{\mathbf{v}_0}^T)(u_0)) = 0$ olacak şekilde bir $\mathbf{v}_0 \in H_+^m(-1) \setminus \mathbb{M}$ var olmasıdır.

(2) $p, 0 < \kappa^2(p) < 1$ ile bir umbilik nokta olması için gerek ve yeter koşul u_0 noktasının $\mathbf{h}_{\mathbf{v}_0}^S$ fonksiyonunun bir singüler noktası ve $\text{rank}(Hess(\mathbf{h}_{\mathbf{v}_0}^S)(u_0)) = 0$ olacak şekilde bir $\mathbf{v}_0 \in S_1^m$ var olmasıdır.

İspat: (1) p bir umbilik nokta ise $A_p = \kappa_p \text{id}_{T_p M}$ olur. $Q^t \left((h_i^j) \right) Q = \kappa_p I$ olacak şekilde ortogonal bir Q matrisi vardır. Bu nedenle $(h_i^j) = \kappa_p I$ durumu düşünülebilir ki böylece $(h_{ij}) = \kappa_p (g_{ij})$ eşitliği söylenebilir.

$$\lambda = \pm \frac{\kappa_p(u_0)}{\sqrt{|\kappa_p^2(u_0) - 1|}} \text{ ve } \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{|\kappa_p^2(u_0) - 1|}}$$

olacak şekilde $\mathbf{v}_0 = \lambda \boldsymbol{\varphi}(u_0) + \mu \mathbf{e}(u_0) \in H_+^m(-1) \setminus \mathbb{M}$ olsun. Bu durumda Hessian matrisi

$$Hess(\mathbf{h}_{\mathbf{v}_0}^T)(u_0) = (-\lambda g_{ij} + \mu h_{ij}) = (-\lambda + \mu \kappa_p(u_0)) (g_{ij}) = 0$$

olur.

Diğer yandan, her i, j için $-\lambda g_{ij} + \mu h_{ij} = 0$ ise $(h_{ij}) = \kappa_p (g_{ij})$ ($\kappa_p = \lambda/\mu$) bulunur ki bu $(h_i^j) = \kappa_p I$ koşuluna denktir. (2)'nin kanıtı (1)'e benzer şekilde verilebilir. \square

Tanım 4.17 $\mathbf{v} \in \text{Bif}(\mathbf{H}^T)$ (ya da $\mathbf{v} \in \text{Bif}(\mathbf{H}^S)$) olmak üzere $\mathbf{h}_{\mathbf{v}}^T$ (ya da $\mathbf{h}_{\mathbf{v}}^S$) u_0 noktasında $\mathcal{A}_{k \geq 3}$ -tip singüler noktaya sahipse u_0 noktasına bir *timelike sırt noktası* (ya da *spacelike sırt noktası*) denir. İki $f_i : (\mathbb{R}^{m-1}, \tilde{u}_i) \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) fonksiyon germleri için $f_2 \circ \phi(u) = f_2(u) + c$ olacak şekilde bir $\phi : (\mathbb{R}^{m-1}, \tilde{u}_1) \rightarrow (\mathbb{R}^{m-1}, \tilde{u}_2)$ diffeomorfizm germ ve bir c reel sayısı vardır koşulu sağlanırsa bu iki fonksiyon germine \mathcal{R}^+ -denktir denir. $f : (\mathbb{R}^{m-1}, \tilde{u}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon germi için eğer $f, u_1^{k+1} \pm u_2^2 \pm \dots \pm u_{m-1}^2$ germine \mathcal{R}^+ -denk ise f, \tilde{u}_0 noktasında \mathcal{A}_k -tip singüler noktaya sahiptir.

Tanım 4.18 $F : H_+^m(-1) \rightarrow \mathbb{R}$ bir submersiyon ve $\boldsymbol{\varphi} : U \rightarrow H_+^m(-1)$ bir hiperyüzey olsun. Eğer $g(u) = F \circ \boldsymbol{\varphi}(u)$ fonksiyonunun Hessian matrisi u_0 noktasında r koranka sahipse $\boldsymbol{\varphi}$ ve $F^{-1}(0), p_0 = \boldsymbol{\varphi}(u_0)$ noktasında *korank- r değmeye* sahiptir denir. Eğer $g(u) = F \circ \boldsymbol{\varphi}(u)$ fonksiyonu u_0 noktasında \mathcal{A}_k -tip singüler noktaya sahipse $\boldsymbol{\varphi}$ ve $F^{-1}(0), p_0 = \boldsymbol{\varphi}(u_0)$ noktasında *\mathcal{A}_k -tip değmeye* sahiptir denir. Tanımdan eğer $\boldsymbol{\varphi}$ ve $F^{-1}(0), p_0 = \boldsymbol{\varphi}(u_0)$ noktasında \mathcal{A}_k -tip değmeye sahiptir bunlar korank-1 değmeye sahiptir. Herhangi $r \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{a}_0 \in H_+^m(-1)$ (ya da $\mathbf{a}_0 \in S_1^m$) için $F(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_0 \rangle - r$ ile tanımlanan $F : H_+^m(-1) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ele alınsın. Ayrıca

$$PS^{m-1}(\mathbf{a}_0, r) = F^{-1}(0) = \{ \mathbf{u} \in H_+^m(-1) : \langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_0 \rangle = r \}$$

kümesi tanımlansın. Eğer $\mathbf{a}_0 \in H_+^m(-1)$ 'de (ya da S_1^m) ise $PS^{m-1}(\mathbf{a}_0, r)$ \mathbf{a}_0 merkezli bir hiperküredir (ya da eşuzaklık hiperdüzlemi).

Önerme 4.19 (Izumiya vd 2004b) u_0 noktasında U üzerindeki $\kappa(u)$ de Sitter eğriliği sabit olmak üzere $\mathbf{a}_0 = HE_{\kappa}^{\pm}(u_0)$ (ya da $\mathbf{a}_0 = SE_{\kappa}^{\pm}(u_0)$) ve

$$r_0 = \pm \frac{\kappa(u_0)}{\sqrt{|\kappa^2(u_0) - 1|}}$$

olsun. $1 \leq \ell \leq m - 1$ olacak şekilde bir ℓ tamsayısı vardır öyle ki $\varphi(U) = \mathbb{M}$ ve $PS^{m-1}(\mathbf{a}_0, r_0)$, u_0 noktasında korank- ℓ değmeye sahiptir.

Tanım 4.20 Yukarıdaki önermede, eğer $\mathbf{a}_0 \in H_+^m(-1)$ (ya da $\mathbf{a}_0 \in S_1^m$) ise

$$PS^{m-1}(\mathbf{a}_0, r_0)$$

kümesine \mathbb{M} hiperyüzeyinin bir *oskülatör hiperküresi* (ya da *oskülatör equidistant hiperdüzlemi*) denir. \mathbf{a}_0 noktasına $\kappa(u_0)$ de Sitter asal eğrilik merkezi denir. Önerme 4.16'dan bir umbilik noktada $\varphi(U) = \mathbb{M}$ ve oskülatör hiperküre (ya da oskülatör eşuzaklık hiperdüzlemi) korank- $(m-1)$ değmeye sahiptir. Bu nedenle, hiperbolik (ya da de Sitter) sırt noktası bir umbilik nokta değildir.

Fonksiyon germlerin genel açılım teorisinden $Bif(F)$ orijinde singüler olmaması için gerek ve yeter koşul $f = F|_{\mathbb{R}^m \times \{0\}}$ fonksiyonu \mathcal{A}_2 -tip singülerliğe sahip olmasıdır. Bu nedenle aşağıdaki önerme söylenebilir.

Önerme 4.21 (Izumiya vd 2004b) Bir önceki önermedeki notasyonla $TE_{\mathbb{M}}^{\pm}$ total evölüt $\mathbf{a}_0 = TE_{\kappa}^{\pm}(u_0)$ noktasında singüler değildir ancak ve ancak $\varphi(U) = \mathbb{M}$ ve $PS^{m-1}(\mathbf{a}_0, r_0)$, u_0 noktasında \mathcal{A}_2 -tip değmeye sahiptir. Burada $\mathbf{a}_0 \in H_+^m(-1)$ ise $TE_{\kappa}^{\pm}(u_0) = HE_{\kappa}^{\pm}(u_0)$ ve $\mathbf{a}_0 \in S_1^m$ ise $TE_{\kappa}^{\pm}(u_0) = SE_{\kappa}^{\pm}(u_0)$ olur.

4.2.2. Hiperbolik uzayda kostik olarak fokal yüzeyler

Bu bölümde hiperbolik uzayda bir hiperyüzeyin hiperbolik (de Sitter) fokal yüzeyleri (evolütlerini) simplektik (symplectic) geometride kostik olarak yorumlanacak ve tekil noktalarının geometrik anlamları irdelenecektir.

Önerme 4.22 (Izumiya vd 2004b) $\varphi(U) = \mathbb{M}$ üzerinde \mathbf{H}^T hiperbolik timelike ve \mathbf{H}^S hiperbolik spacelike yükseklik fonksiyonları Morse ailesidir.

İspat: İlk olarak hiperbolik timelike fonksiyonu düşünölsün. $H_+^m(-1)$ hiperbolik uzayında herhangi bir $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_m)$ vektörü için $v_0 = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_m^2} + 1$ olduğundan $\varphi(u) = (\varphi_0(u), \dots, \varphi_m(u))$ olmak üzere

$$\mathbf{H}^T(u, \mathbf{v}) = -\varphi_0(u) \sqrt{v_1^2 + \dots + v_m^2} + 1 + \varphi_1(u) v_1 + \dots + \varphi_m(u) v_m$$

yazılabilir. Herhangi noktada

$$\Delta \mathbf{H}^T = \left(\frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial u_{m-1}} \right)$$

dönüşümünün singüler olmadığı gösterilmelidir. $\varphi_{u_i u_j} = \partial^2 \varphi / \partial u_i \partial u_j (u)$ olmak üzere $\Delta \mathbf{H}^T$ fonksiyonunun Jacobian matrisi

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_{u_1 u_1}, \mathbf{v} \rangle & \cdots & \langle \varphi_{u_1 u_{m-1}}, \mathbf{v} \rangle & -\varphi_{0u_1} \frac{v_1}{v_0} + \varphi_{1u_1} & \cdots & -\varphi_{0u_1} \frac{v_m}{v_0} + \varphi_{mu_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \varphi_{u_{m-1} u_1}, \mathbf{v} \rangle & \cdots & \langle \varphi_{u_{m-1} u_{m-1}}, \mathbf{v} \rangle & -\varphi_{0u_{m-1}} \frac{v_1}{v_0} + \varphi_{1u_{m-1}} & \cdots & -\varphi_{0u_{m-1}} \frac{v_m}{v_0} + \varphi_{mu_{m-1}} \end{pmatrix}$$

olarak verilir. Morse ailesinin tanımı gereği

$$X = \begin{pmatrix} -\varphi_{0u_1} \frac{v_1}{v_0} + \varphi_{1u_1} & \cdots & -\varphi_{0u_1} \frac{v_m}{v_0} + \varphi_{mu_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varphi_{0u_{m-1}} \frac{v_1}{v_0} + \varphi_{1u_{m-1}} & \cdots & -\varphi_{0u_{m-1}} \frac{v_m}{v_0} + \varphi_{mu_{m-1}} \end{pmatrix}$$

matrisinin rankının $(u, \mathbf{v}) \in Ca(\mathbf{H}^T)$ 'de $m - 1$ olduğu gösterilecektir. Bunun için

$$A = \begin{pmatrix} -\varphi_{0u_1} \frac{v_1}{v_0} + \varphi_{1u_1} & \cdots & -\varphi_{0u_1} \frac{v_m}{v_0} + \varphi_{mu_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varphi_{0u_{m-1}} \frac{v_1}{v_0} + \varphi_{1u_{m-1}} & \cdots & -\varphi_{0u_{m-1}} \frac{v_m}{v_0} + \varphi_{mu_{m-1}} \end{pmatrix}$$

matrisinin rankının $(u, \mathbf{v}) \in Ca(\mathbf{H}^T)$ kümesinde m olduğunu göstermek yeterlidir. $i = 0, \dots, m$ için

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{iu_1} \\ \vdots \\ \varphi_{iu_{m-1}} \end{pmatrix}$$

tanımlansın. O halde

$$A = \left(-\mathbf{a}_0 \frac{v_1}{v_0} + \mathbf{a}_1, \dots, -\mathbf{a}_0 \frac{v_m}{v_0} + \mathbf{a}_m \right)$$

ve

$$\det A = \frac{v_0}{v_0} \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) - \frac{v_1}{v_0} \det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) - \dots - \frac{v_m}{v_0} \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{a}_0)$$

yazılabilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} & \varphi \times \varphi_{u_1} \times \cdots \times \varphi_{u_{m-1}} \\ & = (-\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m), -\det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m), \dots, (-1)^m \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m-1})) \end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle $(u, \mathbf{v}) \in Ca(\mathbf{H}^T)$ için

$$\begin{aligned} \det A & = \left\langle \left(\frac{v_0}{v_0}, \dots, \frac{v_n}{v_0} \right), \varphi \times \varphi_{u_1} \times \cdots \times \varphi_{u_{m-1}} \right\rangle \\ & = \frac{1}{v_0} \langle \lambda \varphi + \mu \mathbf{e}, \|\varphi \times \varphi_{u_1} \times \cdots \times \varphi_{u_{m-1}}\| \mathbf{e} \rangle \\ & = \frac{1}{v_0} \|\varphi \times \varphi_{u_1} \times \cdots \times \varphi_{u_{m-1}}\| \mu \neq 0 \end{aligned}$$

olur.

Şimdi, hiperbolik spacelike yükseklik fonksiyonu için düşünölsün. Bir önceki durumdaki aynı notasyonu kullanılacaktır. Herhangi $\mathbf{v} \in S_1^m$ için $-v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_m^2 = 1$ olur. Genelöği kaybetmeksizin $v_m \neq 0$ farzedilebilir.

$$v_m = \pm \sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2 - \dots - v_{m-1}^2}$$

olduğundan

$$\mathbf{H}^S(u, \mathbf{v}) = -\varphi_0(u)v_0 + \varphi_1(u)v_1 + \dots + \varphi_{m-1}(u)v_{m-1} \pm \varphi_m(u) \sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2 - \dots - v_{m-1}^2}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\Delta \mathbf{H}^S = \left(\frac{\partial \mathbf{H}^S}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{H}^S}{\partial u_{m-1}} \right)$$

fonksiyonun herhangi noktada singöler olmadığı gösterilebilir. $\Delta \mathbf{H}^S$ fonksiyonunun Jacobian matrisi

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_{u_1 u_1}, \mathbf{v} \rangle & \dots & \langle \varphi_{u_1 u_{m-1}}, \mathbf{v} \rangle & -\varphi_0 u_1 + \varphi_m u_1 \frac{v_0}{v_m} & \dots & \varphi_{m-1} u_1 - \varphi_m u_1 \frac{v_{m-1}}{v_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \varphi_{u_{m-1} u_1}, \mathbf{v} \rangle & \dots & \langle \varphi_{u_{m-1} u_{m-1}}, \mathbf{v} \rangle & -\varphi_0 u_{m-1} + \varphi_m u_{m-1} \frac{v_0}{v_m} & \dots & \varphi_{m-1} u_{m-1} - \varphi_m u_{m-1} \frac{v_{m-1}}{v_m} \end{pmatrix}$$

şeklinde dir. Ek olarak aşağıdaki

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} -\varphi_0 u_1 + \varphi_m u_1 \frac{v_0}{v_m} & \varphi_1 u_1 - \varphi_m u_1 \frac{v_1}{v_m} & \dots & \varphi_{m-1} u_1 - \varphi_m u_1 \frac{v_{m-1}}{v_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varphi_0 u_{m-1} + \varphi_m u_{m-1} \frac{v_0}{v_m} & \varphi_1 u_{m-1} - \varphi_m u_{m-1} \frac{v_1}{v_m} & \dots & \varphi_{m-1} u_{m-1} - \varphi_m u_{m-1} \frac{v_{m-1}}{v_m} \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrisin rankının $(u, \mathbf{v}) \in Ca(\mathbf{H}^S)$ 'de $m - 1$ olduğu gösterilecektir.

$$\tilde{A} = \left(-\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_m \frac{v_0}{v_m}, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_m \frac{v_1}{v_m}, \dots, \mathbf{a}_{m-1} - \mathbf{a}_m \frac{v_{m-1}}{v_m} \right)$$

matrisinin rankının $(u, \mathbf{v}) \in Ca(\mathbf{H}^S)$ 'de m olduğu gösterilebilir. Bu nedenle $(u, \mathbf{v}) \in Ca(\mathbf{H}^T)$ için

$$\begin{aligned} \det \tilde{A} &= (-1)^{m-1} \left\{ \frac{v_0}{v_m} \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) - \frac{v_1}{v_m} \det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) \right. \\ &\quad \left. + \dots + (-1)^m \frac{v_m}{v_m} \det(\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{m-1}) \right\} \\ &= (-1)^{m-1} \left\langle \left(\frac{v_0}{v_m}, \dots, \frac{v_m}{v_m} \right), \varphi \times \varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{m-1}} \right\rangle \\ &= \frac{(-1)^{m-1}}{v_m} \langle \lambda \varphi + \mu \mathbf{e}, \|\varphi \times \varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{m-1}}\| \mathbf{e} \rangle \\ &= \frac{(-1)^{m-1}}{v_m} \|\varphi \times \varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{m-1}}\| \mu \neq 0 \end{aligned}$$

bulunur. \square

Morse ailesinden Lagrangian immersiyon germ inşası metodu kullanılarak üreteç ailesi $\varphi(U) = \mathbb{M}$ hiperyüzeyinin hiperbolik timelike yükseklik fonksiyonu ya da hiperbolik spacelike yükseklik fonksiyonu olan bir Lagrangian immersiyon germi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$\varphi : U \rightarrow H_+^m(-1)$, $\varphi(u) = (\varphi_0(u), \dots, \varphi_m(u))$ ile parametrize edilen hiperyüzey için $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_m) \in H_+^m(-1)$ ve $v_0 = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_m^2 + 1}$ olmak üzere

$$L(\mathbf{H}^T)(u, \mathbf{v}) = \left(\mathbf{v}, -\varphi_0(u) \frac{v_1}{v_0} + \varphi_1(u), \dots, -\varphi_0(u) \frac{v_m}{v_0} + \varphi_m(u) \right)$$

şeklinde bir

$$L(\mathbf{H}^T) : Ca(\mathbf{H}^T) \rightarrow T^*H_+^m(-1)$$

düzgün dönüşümü tanımlansın. Burada $T^*H_+^m(-1)$ kotanjant demetin trivial özelliği kullanılmıştır. S_1^m de Sitter uzayı için

$$U_i = \{\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_m) \in S_1^m : v_i \neq 0\}$$

lokal koordinatı düşünölsün. $T^*S_1^m|U_i$ trivial demet olduğundan $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_m)$, S_1^m uzayının bir elemanı olmak üzere

$$\begin{aligned} & L_i(\mathbf{H}^S)(u, \mathbf{v}) \\ &= \left(\mathbf{v}, -\varphi_0(u) + \varphi_i(u) \frac{v_0}{v_i}, \varphi_1(u) - \varphi_i(u) \frac{v_1}{v_i}, \dots, \widehat{\varphi_i(u) - \varphi_i(u) \frac{v_i}{v_i}}, \right. \\ & \left. \dots, \varphi_m(u) - \varphi_i(u) \frac{v_m}{v_i} \right) \end{aligned}$$

şeklinde

$$L_i(\mathbf{H}^S) : Ca(\mathbf{H}^S) \rightarrow T^*S_1^m|U_i \quad (i = 0, 1, \dots, m)$$

dönüşümü tanımlanabilir. Ayrıca m boyutlu uzayda i . bileşen $\hat{\varphi}_i$ 'nin olmadığı $(\varphi_0, \dots, \hat{\varphi}_i, \dots, \varphi_m)$ noktası düşünölsün. Eğer $i \neq j$ için $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ise $L_i(\mathbf{H}^S)$ ve $L_j(\mathbf{H}^S)$ Lagrangian denktir öyle ki karşılık gelen Lagrangian denklik S_1^m de Sitter uzayının lokal koordinat değişimi ve onun Lagrangian lifti sayesinde verilir. Gerçekten, $i < j$ için S_1^m uzayının lokal koordinat değişimi $\psi_{ij} : U_i \rightarrow U_j$;

$$\begin{aligned} & \psi_{ij}(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_m) \\ &= \left(v_0, \dots, v_i = \sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2 - \dots - \hat{v}_i^2 - \dots - v_m^2}, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_m \right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\tilde{\psi}_{ij} : T^*S_1^m \rightarrow T^*S_1^m; \tilde{\psi}_{ij}(\xi) = (\psi_{ij}^{-1})^* \xi$$

olarak tanımlanan ψ_{ij} fonksiyonunun Lagrangian liftidir. O halde $\tilde{\psi}_{ij}$ simplektik diffeomorfizm germleridir (Arnol'd vd 1986). Dahası, $\hat{\sigma}_{ij}(u, \mathbf{v}) = (u, \psi_{ij}(\mathbf{v}))$ olarak $\hat{\sigma}_{ij} : U \times U_i \rightarrow U \times U_j$ diffeomorfizm germleri ve $\sigma_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} \Big|_{Ca(\mathbf{H}^S)}$ şeklinde tanımlanabilir. Buradan $\tilde{\psi}_{ij} \circ L_i(\mathbf{H}^S) = L_j(\mathbf{H}^S) \circ \sigma_{ij}$ ve $\psi_{ij} \circ \pi = \pi \circ \tilde{\psi}_{ij}$ yazılır. Bu nedenle, bir global Lagrangian immersiyon $L(\mathbf{H}^S) : Ca(\mathbf{H}^S) \rightarrow T^*S_1^m$ şeklinde ifade edilebilir. Yukarıdaki önermenin aşağıdaki sonucu vardır.

Sonuç 4.23 (Izumiya vd 2004b) Yukarıdaki notasyonla, $L(\mathbf{H}^T)$ (ya da $L(\mathbf{H}^S)$) Lagrangian immersiyondur öyle ki $\mathbf{H}^T : U \times H_+^m(-1) \rightarrow \mathbb{R}$ hiperbolik timelike yükseklik fonksiyonu (ya da $\mathbf{H}^S : U \times S_1^m \rightarrow \mathbb{R}$ hiperbolik spacelike yükseklik fonksiyonu) $L(\mathbf{H}^T)$ (ya da $L(\mathbf{H}^S)$) dönüşümünün üreteç ailesidir.

Bu nedenle kostiği φ parametrizasyonunun hiperbolik fokal yüzeyi (ya da de Sitter fokal yüzeyi) olan $L(\mathbf{H}^T)$ (ya da $L(\mathbf{H}^S)$) Lagrangian immersiyon elde edilmiş olur. $L(\mathbf{H}^T)$ dönüşümüne \mathbb{M} hiperyüzeyinin hiperbolik fokal yüzeyinin (ya da de Sitter fokal yüzeyi) *Lagrangian lifti* denir.

4.2.3. Hiperbolik 3-uzayda yüzeyler

Bu bölümde $n = 3$ durumu özel olarak incelenecektir. $\varphi : U \rightarrow H_+^3(-1)$ bir yüzey ve $\mathbf{H}^T : U \times H_+^3(-1) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\mathbf{H}^S : U \times S_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sırasıyla hiperbolik timelike ve hiperbolik spacelike yükseklik fonksiyonları olsun. $HE_{\mathbb{M}}^{\pm}$ ve $SE_{\mathbb{M}}^{\pm}$ hiperbolik ve de Sitter fokal kümeleri ve $\mathbf{a}_0 = HE_{\mathbb{M}}^{\pm}(u_0, v_0)$ (ya da $\mathbf{a}_0 = SE_{\mathbb{M}}^{\pm}(u_0, v_0)$) olmak üzere $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$ bir umbilik nokta değilse Önerme 4.16'dan $h_{a_0}^T$ (ya da $h_{a_0}^S$) p_0 noktasında $\mathcal{A}_{k \geq 2}$ -tip singülerliğe sahiptir. $HE_{\mathbb{M}}^{\pm}$ (ya da $SE_{\mathbb{M}}^{\pm}$), \mathbf{H}^T (ya da \mathbf{H}^S) fonksiyon ailesinin çatallanma kümesi olduğundan, $HE_{\mathbb{M}}^{\pm}$ (ya da $SE_{\mathbb{M}}^{\pm}$) singüler olmaması için gerek ve yeter koşul $h_{a_0}^T$ (ya da $h_{a_0}^S$) p_0 noktasında \mathcal{A}_2 -tip singülerliğe sahip olmasıdır. Bu nedenle aşağıdaki önerme ifade edilebilir.

Önerme 4.24 (Izumiya vd 2004b) (1) $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$ timelike sırt noktası olması için p_0 bir umbilik nokta olmaması ve karşılık gelen $\mathbf{a}_0 = HE_{\mathbb{M}}^{\pm}(u_0, v_0)$, $HE_{\mathbb{M}}^{\pm}(u, v)$ noktasının bir singüler nokta olması gerek ve yeterdir.

(2) $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$ spacelike sırt noktası olması için p_0 bir umbilik nokta olmaması ve karşılık gelen $\mathbf{a}_0 = SE_{\mathbb{M}}^{\pm}(u_0, v_0)$, $SE_{\mathbb{M}}^{\pm}(u, v)$ noktasının bir singüler nokta olması gerek ve yeterdir.

\mathbb{M} üzerinde *de Sitter asal eğrilik çizgisi* her yerde de Sitter asal vektörlere teğet olan bir eğridir. $\varphi(U) = \mathbb{M}$ üzerinde $\beta(t) = \varphi(u(t), v(t))$ bir eğri ve $\kappa(u, v)$ U üzerinde $\kappa^2(u, v) > 1$ (ya da $\kappa^2(u, v) < 1$) karşılık gelen de Sitter asal eğrilik ve $\kappa(t) = \kappa(u(t), v(t))$ olmak üzere $HE_{\mathbb{M}}^{\pm}$ (ya da $SE_{\mathbb{M}}^{\pm}$) üzerinde

$$\mathbf{a}(t) = \pm \frac{\kappa(t)}{\sqrt{\kappa^2(t) - 1}} \left(\beta(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{e}(u(t), v(t)) \right)$$

eğrisi düşünölsün. Sırt noktasının aşağıdaki karakterizasyonu vardır.

Sonuç 4.25 (Izumiya vd 2004b) $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$, \mathbb{M} yüzeyinin bir umbilik noktası olmasın.

(1) $\kappa^2(t) > 1$ olsun. $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$ bir timelike sırt nokta olması için gerek ve yeter koşul $p_0 = \varphi(u(t_0), v(t_0))$ ve $\kappa'(t_0) = 0$ olacak şekilde bir $\beta(t)$ de Sitter asal eğrilik çizgisi vardır.

(2) $\kappa^2(t) < 1$ olsun. $p_0 = \varphi(u_0, v_0)$ bir spacelike sırt nokta olması için gerek ve yeter koşul $p_0 = \varphi(u(t_0), v(t_0))$ ve $\kappa'(t_0) = 0$ olacak şekilde bir $\beta(t)$ de Sitter asal eğrilik çizgisi vardır.

İspat: $p_0 = \varphi(u(t_0), v(t_0))$ noktasının bir timelike sırt noktası olduğu düşünölsün. Önerme 4.24'den $\mathbf{a}'(t_0) = \mathbf{0}$ olacak şekilde bir $\beta(t) = \varphi(u(t), v(t))$ regöler eğrisi vardır. O halde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'(t) &= \pm \frac{-\kappa'(t)}{(\kappa^2(t) - 1)^{3/2}} \left(\beta(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{e}(u(t), v(t)) \right) \\ &\quad \pm \frac{\kappa(t)}{\sqrt{\kappa^2(t) - 1}} \left(\frac{d\varphi}{dt}(u(t), v(t)) + \frac{1}{\kappa(t)} \frac{d\mathbf{e}}{dt}(u(t), v(t)) - \frac{\kappa'(t)}{\kappa^2(t)} \mathbf{e}(u(t), v(t)) \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. $d\varphi/dt + (1/\kappa) d\mathbf{e}/dt$ bir teğet vektör ve φ ve \mathbf{e} lineer bağımsız normal vektörler olduğu için $\mathbf{a}'(t) = \mathbf{0}$ için $\kappa'(t) = 0$ ve $d\varphi/dt + (1/\kappa) d\mathbf{e}/dt = \mathbf{0}$ olması gerek ve yeterdir. Bu nedenle $\kappa'(t_0) = 0$ ve $d\varphi/dt(t_0) + (1/\kappa) d\mathbf{e}/dt(t_0) = \mathbf{0}$ olur. Bu, p_0 noktasında $d\varphi/dt(t_0)$ teğet vektörü de Sitter asal vektör olduğu anlamına gelir. $\varphi(u(t), v(t))$ eğrisini $p_0 = \varphi(u_0(t_0), v_0(t_0))$ ile bir de Sitter asal eğrilik çizgisi olarak seçilebilir. Ters iddia standart hesaplamalarla ispatlanır. Ayrıca (2)'nin ispatı (1)'in ispatına benzer şekilde verilebilir. \square

5. DOĞRU KONGRUANSLARININ FOKAL YÜZEYLERİ

$\varphi = \varphi(u, v)$ ile parametrelendirilmiş \mathbb{M} yüzeyi, bir T rektilineer kongruansının referans yüzeyi ve $\xi = \xi(u, v)$, bu kongruansın düz doğrularının yönünü veren bir birim vektör olmak üzere, giriş bölümünde de ifade edilen rektilineer kongruansın parametrizasyonu

$$T : R(u, v) = \varphi(u, v) + \lambda \xi(u, v), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

şeklindedir. Eğer $\xi = \xi(u, v)$, \mathbb{M} yüzeyinin birim normal vektörü ise, T kongruansına *normal rektilineer kongruans* denir. Eğer $\xi = \xi(u, v)$ spacelike (ya da timelike) ise (5.1) ile tanımlanan T rektilineer kongruansına *spacelike (timelike) kongruans* denir (Zhond ve Li 2008).

5.1. Lorentz 3-Uzayında Spacelike Yüzeyin Teğet Vektörleriyle Tanımlanan Fokal Yüzeyler

Abdel-Baky (1999, 2003) Öklid 3-uzayında bir yüzeyin eğrilik çizgilerinin teğet vektörleriyle üretilen fokal yüzeylerin parametrizasyonlarını bulup geometrisini incelemiştir. Buradan hareketle spacelike yüzey üzerindeki geodeziklerin teğet vektörleriyle üretilen fokal yüzeyler bu bölümde araştırma konusu olacaktır.

Tanım 5.1 (Eisenhart 1969) (5.1) ile tanımlanan T rektilineer kongruansı için birinci ve ikinci Kummer temel formları sırasıyla

$$\langle d\xi, d\xi \rangle = Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 \quad (5.2)$$

olmak üzere $A = \langle \xi_u, \xi_u \rangle$, $B = \langle \xi_u, \xi_v \rangle$, $C = \langle \xi_v, \xi_v \rangle$ şeklinde ve

$$\langle d\varphi, d\xi \rangle = adu^2 + (b + \bar{b})dudv + cdv^2, \quad (5.3)$$

olmak üzere $a = \langle \varphi_u, \xi_u \rangle$, $b = \langle \varphi_v, \xi_u \rangle$, $\bar{b} = \langle \varphi_u, \xi_v \rangle$, $c = \langle \varphi_v, \xi_v \rangle$ şeklindedir.

Lemma 5.2 (Zhond ve Li 2008) \mathbb{E}_1^3 uzayında spacelike ya da timelike rektilineer kongruansın normal kongruans olması için gerekli ve yeterli koşul $b = \bar{b}$ olmasıdır.

\mathbb{M} , \mathbb{E}_1^3 uzayında $\varphi = \varphi(u, v)$ lokal parametrizasyonu ile verilen bir regüler spacelike yüzey olsun. E, F, G ve l, m, n sırasıyla birinci ve ikinci temel formların katsayıları olmak üzere u -eğrileri ve v -eğrileri eğrilik çizgileri olarak farzedilsin ve u -eğrileri yay uzunluğu parametresi u olan geodezikler olsun. O halde

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \omega^2 \quad (\omega > 0)$$

olur. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(u, v)$ ve $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(u, v)$, sırasıyla u -eğrilerinin ve v -eğrilerinin birim teğet vektörleri ve $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3(u, v)$ birim vektörü, \mathbb{M} yüzeyinin herhangi regüler noktada normali olsun. O halde, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{e}_1 = \varphi_u, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1$$

şeklinde ifade edilen \mathbb{M} üzerinde hareket eden çatıdır.

$ds_1 = du$, $ds_2 = \omega dv$ olsun, yani s_1 ve s_2 , u -eğrilerinin ve v -eğrilerinin yay uzunluğu parametreleridir. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ çatısının s_1 değişkenine göre türevleri

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & p \\ k & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

ve s_2 değişkenine göre türev formülü

$$\frac{\partial}{\partial s_2} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q & p \\ -q & 0 & \tilde{k} \\ p & \tilde{k} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

ile verilir, burada

$$\begin{aligned} k &= -l, & p &= -\frac{m}{\omega} \\ \tilde{k} &= -\frac{n}{\omega^2}, & q &= \frac{\omega_u}{\omega} \end{aligned} \quad (5.4)$$

sırasıyla, u -eğrisinin normal eğriliği ve geodezik burulması ve v -eğrisinin normal ve geodezik eğrilikleridir.

Herhangi Γ fonksiyonun s_1 ve s_2 'ye göre türevleri sırasıyla $\frac{\partial \Gamma}{\partial s_1} = \Gamma_1$ ve $\frac{\partial \Gamma}{\partial s_2} = \Gamma_2$ ile gösterilecektir. K , \mathbb{M} yüzeyinin Gauss eğriliği olmak üzere \mathbb{M} yüzeyinin Gauss-Codazzi denklemleri

$$K = k\tilde{k} - p^2 = q_1 + q^2, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} -k_2 + p_1 + 2pq &= 0, \\ \tilde{k}_1 - p_2 + q(\tilde{k} - k) &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

olarak verilir.

\mathbb{M} yüzeyi üzerinde u -eğrilerinin birim teğet vektörleri fokal yüzeylerinden biri \mathbb{M} olan bir spacelike R rektilineer kongruans oluşturur ki R kongruansının parametrik denklemi

$$R : R(u, v, \lambda) = \varphi(u, v) + \lambda \mathbf{e}_1(u, v), \quad (u, v) \in U, \quad \lambda \in (-\infty, \infty) \quad (5.7)$$

ile ifade edilir. R kongruansının birinci ve ikinci Kummer temel form katsayıları

$$\begin{aligned} A &= -k^2, & B &= -k\omega p, & C &= \omega^2 (q^2 - p^2) \\ a &= 0, & b &= 0, & \bar{b} &= 0, & c &= \omega^2 q \end{aligned} \quad (5.8)$$

olarak bulunur.

$p \equiv 0$ olması parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olduğu, $k \equiv 0$ olması u -eğrilerinin tümünün düz doğrular olduğu ve $q \equiv 0$ ise \mathbb{M} yüzeyinin açılabilir ve ikinci Kummer temel formun sıfır olduğu anlamına gelir. Bu nedenle bu bölümde $p \neq 0$, $k \neq 0$ ve $q \neq 0$ varsayılacaktır.

Teorem 5.3 (Zhond ve Li 2008) R , \mathbb{E}_1^3 uzayında \mathbb{M} spacelike yüzeyi üzerinde geodeziklerin (düz doğru olmayan) bir parametrelili ailesinin teğetleriyle üretilen bir rektilineer kongruans olsun. Kongruansın aynı doğrusu üzerindeki fokal noktalar arasındaki uzaklık geodezikler ailesinin ortogonal eğrilerinin geodezik eğrilik yarıçapına eşittir. R kongruansının ikinci fokal yüzeyi \mathbb{M}^* , bir timelike yüzeydir ve bu yüzeyin normal vektörleri geodeziklerin ortogonal eğrilerinin teğet vektörlerine paraleldir.

İspat: Bir doğru kongruansı ile üretilen fokal yüzeylerin parametrik denklemi

$$Z = \varphi(u, v) + t(u, v) \mathbf{e}_1(u, v)$$

şeklindedir ve $t(u, v)$ fonksiyonu

$$Y_u = \varphi_u + t(\mathbf{e}_1)_u, \quad Y_v = \varphi_v + t(\mathbf{e}_1)_v, \quad Y_t = \mathbf{e}_1 \quad (5.9)$$

olmak üzere

$$(Y_u, Y_v, Y_t) = 0 \quad (5.10)$$

ikinci derece denkleminin köküdür. (5.9) ve (5.10)'dan

$$t_1(u, v) = 0 \quad t_2(u, v) = -\frac{1}{q}$$

bulunur. Buradan aynı doğru üzerindeki fokal noktalar arasındaki uzaklık

$$d = |t_2(u, v) - t_1(u, v)| = \frac{1}{q}$$

ile bulunur. \mathbb{M}^* ikinci fokal yüzeyinin parametrik denklemi

$$Z = \varphi(u, v) - \frac{1}{q} \mathbf{e}_1(u, v)$$

olduğundan

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{e}_1 + \frac{q_1}{q^2} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{q} (k\mathbf{e}_3) = \frac{q^2 + q_1}{q^2} \mathbf{e}_1 - \frac{k}{q} \mathbf{e}_3, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{Z}_2 = \mathbf{e}_2 + \frac{q_2}{q^2} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{q} (q\mathbf{e}_2 + p\mathbf{e}_3) = \frac{q_2}{q^2} \mathbf{e}_1 - \frac{p}{q} \mathbf{e}_3 \quad (5.12)$$

yazılabilir. \mathbb{M}^* yüzeyinin birim normal vektörü

$$\mathbf{n} = \varepsilon \frac{\mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2}{\|\mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2\|} = \varepsilon \mathbf{e}_2, \quad (\varepsilon = \pm 1) \quad (5.13)$$

olarak bulunur ki bu ikinci fokal yüzeyin timelike ve ortogonal eğrilerin teğet vektörüne paralel olduğunu gösterir. \square

Teorem 5.4 (Zhond ve Li 2008) R , Teorem 5.3'de verilen rektilineer kongruans olsun. İkinci fokal yüzey dejenere değilse, R 'nin iki torsal (açılabilir) yüzeylerinin ortogonal parametrik eğrilerinin bir ağı boyunca ikinci fokal yüzeye teğet olması için gerek ve yeter koşul referans yüzey \mathbb{M} yüzeyinin açılabilir yüzey olmasıdır. Bu durumda ikinci fokal yüzey açılabilir değildir.

İspat: E^* , F^* , G^* ve l^* , m^* , n^* sırasıyla \mathbb{M}^* fokal yüzeyinin birinci ve ikinci temel form katsayıları olsun. (5.11) – (5.13) eşitliklerinden

$$E^* = \frac{(q^2 + q_1)^2}{q^4} - \frac{k^2}{q^2}, \quad F^* = \omega \left(\left(\frac{q^2 + q_1}{q^4} \right) q_2 - \frac{kp}{q^2} \right), \quad G^* = \omega^2 \left(\frac{q_2^2}{q^4} - \frac{p^2}{q^2} \right) \quad (5.14)$$

ve

$$l^* = -\varepsilon \frac{kp}{q}, \quad m^* = -\varepsilon \omega \frac{p^2}{q}, \quad n^* = \varepsilon \omega^2 \left(\frac{q_2 - \tilde{k}p}{q} \right) \quad (5.15)$$

bulunur. $du : dv$ ve $\delta u : \delta v$, R kongruansının iki torsal yüzeyinin yön vektörlerini temsil etsin. Bu kongruansın torsal yüzeylerinin diferensiyel denklemi

$$\begin{vmatrix} Adu + Bdv & Bdu + Cdv \\ adu + bdv & \bar{b}du + cdv \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan bu denklemin çözümleri

$$du : dv = -p\omega : k, \quad \delta u : \delta v = 1 : 0 \quad (5.16)$$

şeklinde. R kongruansının torsal yüzeyleri ortogonal parametrik eğri ağı boyunca \mathbb{M}^* ikinci fokal yüzeye teğetse (5.16) vektörleri

$$E^* du \delta u + F^* (du \delta v + dv \delta u) + G^* dv \delta v = 0 \quad (5.17)$$

denklemini sağlamalıdır. (5.14), (5.16) ve (5.17)'den

$$(q_1 + q^2) ((q_1 + q^2) p - q_2 k) = 0$$

ve bu eşitlikten

$$q_1 + q^2 = 0 \quad (5.18)$$

ya da

$$(q_1 + q^2) p - q_2 k = 0 \quad (5.19)$$

yazılabilir. (5.11) ve (5.12)'den

$$\mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2 = \frac{(q_1 + q^2) p - k q_2}{p^3} \mathbf{e}_2$$

olduğundan (5.19) eşitliği \mathbb{M}^* fokal yüzeyinin dejenere olması demektir ki bu varsayım-
la çelişir. Bu yüzden (5.18) eşitliği geçerlidir.

(5.5) ve (5.18) eşitlikleri $K = 0$ olduğunu gösterir. Bu da \mathbb{M} referans yüzeyinin
açılabilir olması anlamına gelir. \mathbb{M}^* ikinci fokal yüzeyinin Gauss eğriliği (5.14) ve
(5.15) vasıtasıyla

$$K^* = \frac{q^4 (k\bar{k}p^2 - kpq_2 - p^4)}{((q_1 + q^2)p - q_2k)^2}$$

şeklindedir. (5.5)'den

$$K^* = \frac{pq^4}{kq_2 - Kp} \quad (5.20)$$

elde edilir. (5.18) ve (5.20) eşitliklerinden ve $p \neq 0$ ve $q \neq 0$ olduğundan

$$K^* = \frac{pq^4}{kq_2} \neq 0$$

olur ki bu \mathbb{M}^* fokal yüzeyinin açılabilir olmadığı anlamına gelir. \square

Kongruansın bir doğrusu üzerinde olan fokal noktalar vasıtasıyla \mathbb{M} ve \mathbb{M}^*
arasında birebir σ karşılığı kurulabilir. Bundan sonraki teorem bu karşılığın asimptotik eğrilerin ağını koruma koşulu için gerek ve yeter koşulu ifade eder.

Teorem 5.5 (Zhond ve Li 2008) R , Teorem 5.3'de verilen rektilineer kongruans
olsun. R kongruansının dejenere olmayan fokal yüzeyleri arasındaki σ dönüşümünün
asimptotik eğrilerin ağını koruması için gerek ve yeter koşul fokal yüzeylerin K ve
 K^* Gauss eğrilikleri

$$KK^* = -q^4$$

bağıntısını sağlar. Burada q , Teorem 5.3'de verilen geodezik ailesinin ortogonal
yörüngelerinin geodezik eğriliğidir.

İspat: Fokal yüzeyler arasındaki σ dönüşümünün asimptotik eğri ağını koruması
için

$$\frac{l}{l^*} = \frac{m}{m^*} = \frac{n}{n^*}$$

eşitliğinin sağlanması gerek ve yeterdir. (5.4) ve (5.15)'den bu son eşitlik $q_2 = 0$
eşitliğine denktir. Bu da (5.20)'den $KK^* = -q^4$ eşitliğini verir.

Tersine $KK^* = -q^4$ olsun. (5.20)'den

$$\frac{pq^4}{kq_2 - Kp} = -\frac{q^4}{K},$$

bulunur ki bu eşitlik

$$kq_2 = 0$$

ifadesine denktir. $k \neq 0$ olduğundan son eşitlik $q_2 = 0$ eşitliğini verir. \square

(5.18) ve $q_2 = 0$ eşitliklerinin her ikisi de sağlanırsa $\mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2 = 0$ elde edilir. Bu ise \mathbb{M}^* fokal yüzeyinin dejenere olması demektir. O halde aşağıdaki sonuç söylenebilir:

Sonuç 5.6 \mathbb{M} , \mathbb{E}_1^3 'de bir spacelike yüzey olsun. R , bir parametrelili geodezikler ailesinin teğetleriyle üretilen rektilineer kongruans olsun. Eğer, R 'nin torsal yüzeyleri eğrilik çizgileri boyunca \mathbb{M}^* fokal yüzeyine teğet ve \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* arasındaki σ birebir karşılığı asimptotik eğri ağını korursa, \mathbb{M}^* dejenere yüzeydir.

$b = \bar{b} = 0$ olduğundan R bir normal rektilineer kongruansdır. Şimdi R kongruansının doğrularına dik olan yüzeyler araştırılacaktır. Bu yüzeylerin parametrik denklemleri

$$\tilde{\mathbb{M}} : \tilde{Z}(u, v) = \varphi(u, v) + t(u, v) \mathbf{e}_1(u, v), \quad (5.21)$$

burada

$$t = -\int \langle \varphi_u, \mathbf{e}_1 \rangle du + \langle \varphi_v, \mathbf{e}_1 \rangle dv + c, \quad c \in (-\infty, \infty)$$

eşitliği ile verilir. Bu bölümde tanımlanan \mathbb{M} yüzeyine göre

$$\langle \varphi_u, \mathbf{e}_1 \rangle = 1, \quad \langle \varphi_v, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$$

olduğundan $t = c - u$ olur ve (5.21) eşitliği

$$\tilde{Z}(u, v) = \varphi(u, v) + (c - u) \mathbf{e}_1(u, v) \quad (5.22)$$

olur. Direkt hesaplamayla

$$\tilde{\mathbf{Z}}_u = (c - u) k \mathbf{e}_3, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_v = \omega(1 + (c - u)q) \mathbf{e}_2 + \omega(c - u) p \mathbf{e}_3 \quad (5.23)$$

türevleri bulunabilir. Buradan bu yüzeylerin timelike yüzeyler olduğu görülür (Zhond ve Li 2008).

$\tilde{\mathbb{M}}$ yüzeyi $u = c$ eğrisi boyunca regüler değildir. Bu yüzden $u \neq c$ farzedilir. \tilde{E} , \tilde{F} , \tilde{G} ve \tilde{l} , \tilde{m} , \tilde{n} sırasıyla bu yüzeyin birinci ve ikinci temel form katsayılarını gösterebilir. O halde $t = c - u$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= -t^2 k^2, & \tilde{F} &= -\omega t^2 k p, & \tilde{G} &= \omega^2(1 + tq)^2 - \omega^2 t^2 p^2, \\ \tilde{l} &= t k^2, & \tilde{m} &= \omega t k p, & \tilde{n} &= \omega^2 t p^2 - \omega^2 q(1 + tq) \end{aligned}$$

olur. $\tilde{\mathbb{M}}$ timelike yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= q \left(\frac{1}{u - c} + \frac{q}{1 + (c - u)q} \right) \text{ ve} \\ \tilde{H} &= \frac{q}{2} \left(\frac{1}{u - c} - \frac{q}{1 + (c - u)q} \right) \end{aligned}$$

şeklindedir. $q \neq 0$ olduğundan $\tilde{K} \neq 0$, yani $\tilde{\mathbb{M}}$ açılabilir değildir (Zhond ve Li 2008).

Teorem 5.7 (Zhond ve Li 2008) R rektilineer kongruansının ortogonal yüzeyleri maksimal ise R 'nin fokal yüzeyleri arasındaki karşılık asimptotik eğri ağı korur.

İspat: $\tilde{\mathbb{M}}$ yüzeyinin \mathbb{E}_1^3 Lorentz uzayında maksimal bir yüzey olsun ki bu $\tilde{H} = 0$ olması demektir. O halde,

$$q = \frac{1}{2(u-c)}$$

bulunur ve bu eşitlikten $q_2 = 0$ bulunur. \square

5.2. Lorentz 3-Uzayında Timelike Normal Kongruansın Fokal Yüzeyleri

Bir önceki bölüme benzer şekilde $\mathbb{M} : \varphi = \varphi(u, v)$, \mathbb{E}_1^3 Minkowski uzayında bir regüler spacelike yüzeyi olmak üzere u -eğrileri ve v -eğrileri eğrilik çizgileri olarak düşünölsün. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(u, v)$ ve $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(u, v)$, u -eğrilerinin ve v -eğrilerinin birim teğet vektörleri ve $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3(u, v)$ birim vektörü, \mathbb{M} yüzeyinin herhangi regüler noktada normali olsun. O halde,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \quad (5.24)$$

yazılabilir.

u -eğrilerinin ve v -eğrilerinin yay-uzunluğu parametreleri sırasıyla s_1 ve s_2 olmak üzere $ds_1 = \sqrt{E}du$, $ds_2 = \sqrt{G}dv$ eşitlikleri vardır. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ çatısının s_1 değişkenine göre türevleri

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q & k \\ -q & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

şeklindedir. Burada

$$k = -\frac{l}{E} \text{ ve } q = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}$$

sırasıyla, u -eğrisinin normal ve geodezik eğrilikleridir. Benzer şekilde, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ çatısının s_2 değişkenine göre türev formülü

$$\frac{\partial}{\partial s_2} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q^* & 0 \\ -q^* & 0 & k^* \\ 0 & k^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

ile verilir. Burada

$$k^* = -\frac{h_{22}}{G} \text{ ve } q^* = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}$$

sırasıyla, v -eğrisinin normal ve geodezik eğrilikleridir. Darboux çatısı ile ilgili daha fazla bilgi için Özdemir ve Ergin'e (2007) bakılabilir.

(4.3) denkleminde, \mathbb{M} üzerinde $\delta(s_1, s_2) = (k^* - k)^2 (s_1, s_2)$ bulunur. Bu nedenle, LPL kümesi spacelike umbilik noktalar olarak sınıflandırılan izole edilmiş noktalardan oluşur (Tari 2013).

\mathbb{M} spacelike yüzeyinin birim normalleriyle elde edilen normal rektilineer kongruansın parametrik denklemi

$$T : R(u, v, \lambda) = \varphi(u, v) + \lambda \mathbf{e}_3(u, v), \quad \lambda \in (-\infty, +\infty) \quad (5.27)$$

şekindedir. Aşağıdaki teorem ile timelike normal rektilineer kongruans ile oluşturulan fokal yüzeylerin parametrizasyonları elde edilir.

Teorem 5.8 (Şimşek ve Özdemir 2015) (5.27) ile belirli T timelike normal rektilineer kongruansı için, fokal yüzeylerinin parametrik denklemleri

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^1 : \mathbf{Z}^1(u, v) &= \varphi(u, v) - \frac{1}{k} \mathbf{e}_3(u, v), \\ \mathbf{Z}^2 : \mathbf{Z}^2(u, v) &= \varphi(u, v) - \frac{1}{k^*} \mathbf{e}_3(u, v) \end{aligned} \quad (5.28)$$

ile verilir. $\mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2$ fokal yüzeyleri timelike yüzeylerdir ve $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ sırasıyla $\mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2$ 'nin normalleridir.

İspat: Normal rektilineer kongruansla üretilen fokal yüzeyin parametrik denklemi

$$Z = \varphi(u, v) + t(u, v) \mathbf{e}_3(u, v) \quad (5.29)$$

ile verilir. $t(u, v)$ fonksiyonu

$$P_u = \varphi_u + t(\mathbf{e}_3)_u, \quad P_v = \varphi_v + t(\mathbf{e}_3)_v, \quad P_t = \mathbf{e}_3.$$

olmak üzere

$$(P_u, P_v, P_t) = 0 \quad (5.30)$$

ikinci derece denkleminin köküdür. (5.25) ve (5.26) denklemleri kullanılırsa

$$P_u = (\sqrt{g_{11}} + \sqrt{g_{11}tk}) \mathbf{e}_1, \quad P_v = (\sqrt{G} + \sqrt{G}tk^*) \mathbf{e}_2, \quad P_t = \mathbf{e}_3 \quad (5.31)$$

eşitlikleri bulunur.

(5.31)'den, (5.30) ikinci derece denklemin kökleri

$$t_1(u, v) = -\frac{1}{k} \quad t_2(u, v) = -\frac{1}{k^*}$$

olarak bulunur. (5.29)'da t_1 ve t_2 yerine yazılırsa ilk iddia kanıtlanır. (5.28) fokal yüzeylerinin s_1 ve s_2 parametrizasyonlarına göre türevleri

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1^1 &= \mathbf{e}_1 + \frac{k_1}{k^2} \mathbf{e}_3 - \frac{1}{k} (k \mathbf{e}_1) = \frac{k_1}{k^2} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{Z}_2^1 &= \mathbf{e}_2 + \frac{k_2}{k^2} \mathbf{e}_3 - \frac{1}{k} (k^* \mathbf{e}_2) = \frac{(k - k^*)}{k} \mathbf{e}_2 + \frac{k_2}{k^2} \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (5.32)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1^2 &= \mathbf{e}_1 + \frac{k_1^*}{(k^*)^2} \mathbf{e}_3 - \frac{1}{k^*} (k \mathbf{e}_1) = \frac{(k^* - k)}{k^*} \mathbf{e}_1 + \frac{k_1^*}{(k^*)^2} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{Z}_2^2 &= \mathbf{e}_2 + \frac{k_2^*}{(k^*)^2} \mathbf{e}_3 - \frac{1}{k^*} (k^* \mathbf{e}_2) = \frac{k_2^*}{(k^*)^2} \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (5.33)$$

şeklindedir. (5.32) ve (5.33)'den, \mathbf{e}_1 , \mathbf{Z}^1 fokal yüzeyinin normalidir ve \mathbf{e}_2 , \mathbf{Z}^2 fokal yüzeyinin normalidir. \mathbf{e}_1 ve \mathbf{e}_2 spacelike vektörler olduğu için \mathbf{Z}^1 , \mathbf{Z}^2 fokal yüzeyleri timelike yüzeyler olduğu sonucuna varılır. \square

Şimdi, (5.28) ile belirlenen fokal yüzeylerin Gauss eğrilikleri bulunacaktır. E^1 , F^1 , G^1 ve l^1 , m^1 , n^1 sırasıyla \mathbf{Z}^1 fokal yüzeyinin birinci ve ikinci temel formların katsayıları olmak üzere bu katsayılar

$$\begin{aligned} E^1 &= -g_{11} \frac{(k_1)^2}{(k)^4} \\ F^1 &= -\sqrt{g_{11}} \sqrt{G} \frac{k_1 k_2}{(k)^4} \\ G^1 &= G \left(-\frac{(k_2)^2}{(k)^4} + \frac{(k - k^*)^2}{(k)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

ve

$$\begin{aligned} l^1 &= g_{11} \frac{k_1}{k} \\ m^1 &= 0 \\ n^1 &= -G \frac{q^* (k - k^*)}{k} \end{aligned} \quad (5.35)$$

olarak hesaplanır. (5.34) ve (5.35)'deki sonuçlar

$$K_{\mathbf{Z}^1} = \frac{l^1 n^1 - (m^1)^2}{E^1 G^1 - (F^1)^2},$$

Gauss eğriliği formülüne yazılırsa \mathbf{Z}^1 fokal yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K_{\mathbf{Z}^1} = \frac{q^* (k)^4}{k_1 (k - k^*)} \quad (5.36)$$

olarak bulunur (Şimşek ve Özdemir 2015). Benzer sonuçlar \mathbf{Z}^2 fokal yüzeyi için de bulunabilir. Bu nedenle, \mathbf{Z}^2 fokal yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K_{\mathbf{Z}^2} = -\frac{q (k^*)^4}{k_2^* (k^* - k)} \quad (5.37)$$

şeklindedir.

Spacelike yüzey üzerinde sırt ve alt-parabolik çizgilerinin tanımları aşağıdaki tanımla verilebilir. Bu tanımlar Öklid uzayında Morris'in (1996) vermiş olduğu tanımlara benzerdir.

Tanım 5.9 (Şimşek ve Özdemir 2015) (1) \mathbb{M} spacelike yüzeyi üzerinde $k_1 = 0$ eşitliğini sağlayan noktaların geometrik yerine *1-sırt (ridge) çizgi* denir.

(2) \mathbb{M} spacelike yüzeyi üzerinde $k_1^* = 0$ eşitliğini sağlayan noktaların geometrik yerine *1-alt-parabolik (sub-parabolic) çizgi* denir.

(3) \mathbb{M} spacelike yüzeyi üzerinde $k_2^* = 0$ eşitliğini sağlayan noktaların geometrik yerine *2-sırt (ridge) çizgi* denir.

(4) \mathbb{M} spacelike yüzeyi üzerinde $k_2 = 0$ eşitliğini sağlayan noktaların geometrik yerine *2-alt-parabolik (sub-parabolic) çizgi* denir.

Yukarıdaki tanımla şu yorumlar yapılabilir. Sırt çizgisi, bir eğrilik çizgisi boyunca asal eğriliğin ekstremum değerlerinin oluşturduğu noktaların geometrik yeridir ve alt-parabolik çizgi, bir eğrilik çizgisi boyunca diğer eğrilik çizgisinin asal eğriliğinin ekstremum değerlerinin oluşturduğu noktaların geometrik yeridir. Fokal yüzeylerin sırt noktalarda singüler olduğu (5.32) ve (5.33)'den görülebilir. Genel bir yüzey için umbilik noktalar dışında fokal yüzey bir *sivri uçlu kenar (cuspidal edge)* yüzeye veya *swallowtail* yüzeye diffeomorftir. Swallowtail tekilliği sırt eğrisi üzerindeki izole edilmiş noktalara karşılık gelir. Alt-parabolik çizgiler için aşağıdaki sonuç vardır.

Teorem 5.10 (Şimşek ve Özdemir 2015) Sırt, parabolik ve umbilik noktalar dışında aşağıdaki ifadeler denktir.

- (I) $\mathbf{Z}^1(u_0, v_0)$ noktasında \mathbf{Z}^1 timelike fokal yüzeyinin bir parabolik çizgisi vardır.
- (II) $\varphi(u_0, v_0)$ noktası 1-alt-parabolik noktadır.
- (III) Spacelike v -eğrisinin geodezik eğriliği $\varphi(u_0, v_0)$ noktasında sıfırdır.

İspat: (I) ve (II)'nin (III)'e denk olduğu gösterilirse teorem kanıtlanmış olur.

$\mathbf{Z}^1(u_0, v_0)$ noktasında bir parabolik çizgi varsa

$$l^1 n^1 - (m^1)^2 = 0$$

ve l^1 ya da n^1 bu noktada sıfırdır. Bu nedenle (5.35)'den $q^* = 0$ elde edilir.

(II)'nin (III)'e denk olduğu şu şekilde gösterilebilir. \mathbf{e}_2 vektörü \mathbf{Z}^2 fokal yüzeyinin normali olduğu için (5.25) ve (5.33) kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_{\mathbf{Z}^2}(\mathbf{Z}_1^2, \mathbf{Z}_2^2) &= - \left\langle \mathbf{Z}_1^2, \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial s_2} \right\rangle = - \left\langle \mathbf{Z}_2^2, \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial s_1} \right\rangle \\ &= - \left\langle \frac{k_2^*}{(k^*)^2} \mathbf{e}_3, \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial s_1} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (5.33) ve (5.26) kullanılarak

$$\left\langle \mathbf{Z}^2, \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial s_2} \right\rangle = \frac{(k^* - k)}{k^*} \left\langle \mathbf{e}_1, \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial s_2} \right\rangle + \frac{k_1^*}{(k^*)^2} \left\langle \mathbf{e}_3, \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial s_2} \right\rangle = 0$$

eşitliği bulunur. Hipotezden $k^* - k \neq 0$ ve $\left\langle \mathbf{e}_3, \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial s_2} \right\rangle \neq 0$ olduğundan $\left\langle \mathbf{e}_1, \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial s_2} \right\rangle = 0$ eşitliği $k_1^* = 0$ olmasına denktir ki bu kanıtı bitirir. \square

Teorem 5.11 (Şimşek ve Özdemir 2015) Sırt, parabolik ve umbilik noktalar dışında aşağıdaki ifadeler denktir.

- (I) $\mathbf{Z}^2(u_0, v_0)$ noktasında \mathbf{Z}^2 timelike fokal yüzeyinin bir parabolik çizgisi vardır.
- (II) $\varphi(u_0, v_0)$ noktası 2-alt-parabolik noktadır.
- (III) Spacelike u -eğrisinin geodezik eğriliği $\varphi(u_0, v_0)$ noktasında sıfırdır.

İspat: Bir önceki teoremin kanıtına benzer şekilde yapılabilir. \square

Sonuç 5.12 \mathbf{Z}^1 ve \mathbf{Z}^2 fokal yüzeyleri üzerinde bir parabolik çizgi geçtiğinde Gauss eğrilikleri genellikle sıfır boyunca işaretini değiştirir.

5.2.1. Spacelike yüzey üzerinde özel noktalar

Bir yüzey üzerinde bulunan sırt ve alt-parabolik çizgiler üzerinde bazı özel noktalar aşağıda sınıflandırılmıştır:

- a) Alt-parabolik çizgi bir eğrilik çizgisine teğettir.
- b) Sırt çizgisi bir eğrilik çizgisine teğettir.
- c) Sırt ve alt-parabolik çizgileri kesişir.
- d) Sırt eğrilerinden biri diğerini keser.
- e) Alt-parabolik eğrilerinden biri diğerini keser.

1-alt-parabolik çizgisi v -eğrisine teğet olduğunda \mathbf{Z}^1 timelike fokal yüzeyi üzerinde bir Gauss zirve (a cusp of Gauss) noktası vardır. Bir *Gauss zirve noktası* parabolik çizgi üzerinde sıfır asal eğriliği ile birlikte asal vektörün parabolik çizgiye teğet olduğu noktadır. Bu aşağıdaki teorem ile görülür.

Teorem 5.13 (Şimşek ve Özdemir 2015) Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) 1-alt-parabolik çizgi spacelike v -eğrisine teğettir.
- (2) Spacelike v -eğrisi bir yüksekçe geodezik büküm noktasına (higher geodesic inflection) sahiptir.
- (3) \mathbf{Z}^1 timelike fokal yüzeyi Gauss zirve noktasına sahiptir.

İspat: (1)'in (2) ve (3)'e denk olduğu gösterilecektir. Teorem 5.10'dan 1-alt-parabolik çizginin denklemi $q^* = 0$ 'dır. 1-alt-parabolik çizgi spacelike v -eğrisine teğet olduğunda $q_2^* = 0$ elde edilir. Bu nedenle v -eğrisi bir yüksekçe geodezik büküm noktasına sahiptir.

1-alt-parabolik çizgisi spacelike v -eğrisine teğetse, \mathbf{Z}^1 timelike fokal yüzeyi üzerindeki parabolik çizgi \mathbf{Z}_2^1 vektörüne teğettir. \mathbf{Z}_2^1 vektörünün asal vektör olduğu gösterilirse kanıt tamamlanır. \mathbf{Z}^1 üzerinde $\{\mathbf{Z}_2^1, \mathbf{e}_1, \mathbf{Z}_2^1 \times \mathbf{e}_1\}$ v -eğrisine karşılık gelen eğrinin Darboux çatısıdır. \mathbf{Z}_2^1 vektörünün asal vektör olduğunu göstermek için bu eğrinin τ geodezik burulmasının sıfır olduğu gösterilmelidir. 1-alt-parabolik çizgi üzerinde $q^* = 0$ olduğundan

$$\tau = \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial s_2}, \mathbf{Z}_2^1 \times \mathbf{e}_1 \right\rangle = q^* \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{Z}_2^1 \times \mathbf{e}_1 \rangle = 0$$

elde edilir. \square

1-alt-parabolik çizgi u -eğrisine teğetse, \mathbf{Z}^1 timelike fokal yüzeyi üzerindeki parabolik çizgi \mathbf{Z}_1^1 vektörüne teğettir. (5.32)'den, \mathbf{Z}^1 üzerindeki bu parabolik çizgi \mathbf{e}_3 vektörüne teğettir ki parabolik çizginin timelike eğri olduğunu gösterir.

1-sırt eğrisi 2-alt-parabolik çizgiyi kestiği noktada $k_1 = 0$ ve $k_2 = 0$ bulunur. Bu nedenle (5.32)'den \mathbf{Z}^1 timelike fokal yüzey üzerindeki sivri uçlu kenar eğrisi \mathbf{e}_2 vektörüne teğet olacaktır. Bu durumda sivri uçlu kenar eğrisi bir spacelike eğridir.

Şimdi, Kokubu vd (2005) ve Saji vd (2009) tarafından bir noktanın swallowtail nokta olması için ifade edilen bir kriter açıklanacaktır. \mathbb{M}^2 ve \mathbb{N}^3 sırasıyla yönlendirilmiş 2-manifold ve yönlendirilmiş 3-manifold olmak üzere $q \in \mathbb{M}^2$ noktası $f : \mathbb{M}^2 \rightarrow \mathbb{N}^3$ frontunun non-dejenere singüler noktası olsun. Kapalı fonksiyon teoreminden singüler noktaların kümesi q noktasının bir komşuluğunda

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \in s \rightarrow \gamma(s) \in \mathbb{M}^2, \quad \gamma(0) = q$$

düzgün (smooth) eğrisi tarafından parametrize edilir. Bu eğriye q noktasından geçen *singüler eğri (singular curve)* ve $\gamma'(0)$ vektörüne q noktasında *singüler vektör (singular direction)* denir. Her $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için, tek bir $\eta(s) \in T_{\gamma(s)}\mathbb{M}^2$ vektörü vardır öyle ki $df(\eta(s)) = 0$. Bu vektöre *null vektör (null direction)* denir.

Swallowtail noktaları için kriter: $q = \gamma(s_0)$ noktasının bir swallowtail nokta olması için gerek ve yeter koşul

$$\det(\gamma'(s_0), \eta(s_0)) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dt}\Big|_{s=s_0} \det(\gamma'(s), \eta(s)) \neq 0$$

ifadelerinin sağlanmasıdır. Burada \det , 2×2 matrislerin determinantını gösterir.

$\frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t}$ birim vektör olacak şekilde spacelike 1-sırt eğrisinin parametrizasyonu $\alpha(t)$ olsun. $\left\{ \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t}, \mathbf{e}_1, \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t} \times \mathbf{e}_1 \right\}$ sivri uçlu kenar eğrisinin Darboux çatısıdır. $\gamma(s)$

singüler eğrisi $U \subset \mathbb{R}^2$ açık küme olmak üzere $\mathbf{Z}^1 : U \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ timelike fokal yüzeyi üzerindeki sivri uçlu kenar eğrilerinin ters görüntüsünden oluşur. Eğer 1-sırt çizgisi u -eğrisine $q \in U$ noktasında teğetse, $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \lambda \mathbf{e}_1$ bulunur. Buna göre D kovaryant türev operatörü ise

$$\frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t} = D_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \mathbf{Z}^1 = \lambda D_{\mathbf{e}_1} \mathbf{Z}^1 = \lambda \mathbf{Z}_1^1 = 0,$$

eşitliğinden singüler yön vektörü q noktasında null yön vektörüne paraleldir. Bu nedenle $q = \gamma(s_0)$ noktasında $\det(\gamma'(s_0), \eta(s_0)) = 0$ eşitliği bulunur. Diğer yandan, sivri uçlu kenar eğrisi üzerinde

$$d\mathbf{Z}^1 \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial u} = \sqrt{g_{11}} \mathbf{Z}_1^1 = 0$$

eşitliği hesaplanabilir. O halde null yön vektörü $\eta(s)$, $\frac{\partial}{\partial u}$ vektörüne paraleldir. $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ ve $\eta(s) = (\xi(s), 0)$ sırasıyla singüler eğri ve null yön vektörü olsun. O halde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{s=s_0} \det(\gamma'(s), \eta(s)) &= \left(-\xi'(s) \gamma_2'(s) - \xi(s) \gamma_2''(s) \right) \Big|_{s=s_0} \\ &= -\xi(s_0) \gamma_2''(s_0) \neq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak \mathbf{Z}^1 timelike fokal yüzeyi üzerinde bir swallowtail noktası elde edilir (Şimşek ve Özdemir 2015).

Sivri uçlu kenar eğrisi spacelike olsun. O halde, k_n , k_g , ve τ_g sırasıyla spacelike sivri uçlu kenar eğrisinin normal eğriliği, geodezik eğriliği ve geodezik burulması ise

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t} \\ \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t} \times \mathbf{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_n & k_g \\ -k_n & 0 & \tau_g \\ k_g & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t} \\ \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t} \times \mathbf{e}_1 \end{bmatrix}$$

eşitlikleri vardır.

Lemma 5.14 (Şimşek ve Özdemir 2015) Swallowtail ve umbilik noktalar dışında, spacelike sivri uçlu kenar eğrisinin k_n normal eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul q^* fonksiyonunun sıfır olmasıdır.

İspat: \mathbf{e}_1 ve \mathbf{e}_2 asal vektörler olmak üzere $\alpha'(t) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ eşitliği yazılabilir. Ayrıca

$$\frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t} = D_{\alpha'(t)} \mathbf{Z}^1 = a\mathbf{Z}_1^1 + b\mathbf{Z}_2^1$$

eşitliği vardır. O halde

$$\begin{aligned} k_n &= - \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t} \right\rangle = \mathbf{II}_{\mathbf{Z}^1} \left(\frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t} \right) = \\ &= a^2 \mathbf{II}_{\mathbf{Z}^1}(\mathbf{Z}_1^1, \mathbf{Z}_1^1) + 2ab \mathbf{II}_{\mathbf{Z}^1}(\mathbf{Z}_1^1, \mathbf{Z}_2^1) + b^2 \mathbf{II}_{\mathbf{Z}^1}(\mathbf{Z}_2^1, \mathbf{Z}_2^1) \\ &= -b^2 \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial s_2}, \mathbf{Z}_2^1 \right\rangle = -b^2 q^* \frac{(k - k^*)}{k} \end{aligned}$$

olur. $k = k^*$ umbilik nokta olduğu ve $b = 0$ swallowtail noktası olduğu anlamına geldiğinden q^* sıfırdır. \square

Eğer sivri uçlu kenar eğrisi timelike eğri ise,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t} \\ \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t} \times \mathbf{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_n & k_g \\ k_n & 0 & \tau_g \\ k_g & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t} \\ \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial t} \times \mathbf{e}_1 \end{bmatrix}$$

türev formülü yazılabilir. Buna göre Lemma 5.14 timelike sivri uçlu kenar eğrisi için de geçerlidir.

Eğer 1-sırt çizgisi 1-alt-parabolik çizgiden geçerse, timelike \mathbf{Z}^1 fokal yüzeyi üzerinde parabolik çizgi sivri uçlu kenar eğrisinden geçecektir ve Teorem 5.10 ve Lemma 5.14'den sivri uçlu kenar eğrisinin normal eğriliği sıfır olacaktır.

Benzer yorumlar 2-alt-parabolik çizgi ve 2-sırt çizgisi için de yapılabilir.

5.3. Lorentz 3-Uzayında Spacelike Normal Kongruansın Fokal Yüzeyleri

$\bar{\mathbb{M}} : \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(u, v)$, \mathbb{E}_1^3 regüler timelike yüzey olsun. $\bar{\mathbb{M}}$ üzerinde \bar{u} -eğrilerini ve \bar{v} -eğrilerini timelike ve spacelike eğriler olarak düşünelim. Buna göre $\bar{\mathbf{e}}_1$ timelike vektör ve $\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ spacelike vektörler olmak üzere

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{\bar{\varphi}_u}{\sqrt{|\bar{E}|}}, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = \frac{\bar{\varphi}_v}{\sqrt{\bar{G}}}, \quad \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_1 \times \bar{\mathbf{e}}_2 \quad (5.38)$$

ve

$$d\bar{s}_1 = \sqrt{|\bar{E}|} du, \quad d\bar{s}_2 = \sqrt{\bar{G}} dv$$

yazılabilir. \bar{s}_1, \bar{s}_2 'ye göre $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ Darboux çatısının türev formülleri

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}_1} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{q} & \bar{k} \\ \bar{q} & 0 & 0 \\ \bar{k} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

burada

$$\bar{k} = -\frac{\bar{b}_{11}}{\bar{E}}, \quad \bar{q} = -\frac{(\bar{E})_v}{2|\bar{E}|\sqrt{\bar{G}}}$$

sırasıyla \bar{u} -eğrisinin normal ve geodezik eğrilikleridir ve

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}_2} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{k}^* & 0 \\ \bar{k}^* & 0 & \bar{q}^* \\ 0 & -\bar{q}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

burada

$$\bar{q}^* = -\frac{\bar{b}_{22}}{\bar{G}}, \quad \bar{k}^* = \frac{(\bar{G})_u}{2\bar{G}\sqrt{|\bar{E}|}}$$

sırasıyla \bar{v} -eğrisinin geodezik ve normal eğrilikleridir (Özdemir ve Ergin 2007).

\bar{T} normal spacelike kongruansının parametrik denklemi (5.27) ile verilir. Aşağıdaki teorem ile bu kongruansın fokal yüzeylerinin parametrizasyonları ifade edilebilir.

Teorem 5.15 (Şimşek ve Özdemir 2015) \bar{T} kongruansının fokal yüzeylerinin parametrik denklemleri

$$\bar{Z}^1 : \bar{Z}^1(u, v) = \bar{\varphi}(u, v) - \frac{1}{\bar{k}}\bar{e}_3(u, v) \quad (5.41)$$

$$\bar{Z}^2 : \bar{Z}^2(u, v) = \bar{\varphi}(u, v) + \frac{1}{\bar{q}^*}\bar{e}_3(u, v)$$

ile verilir. \bar{Z}^1 ve \bar{Z}^2 fokal yüzeyleri sırasıyla spacelike yüzey ve timelike yüzeydir ve \bar{e}_1, \bar{e}_2 vektörleri sırasıyla \bar{Z}^1, \bar{Z}^2 fokal yüzeylerinin normalleridir.

İspat: Teorem 5.8'in kanıtına benzer şekilde yapılır. \square

(5.41)'deki denklemlerin \bar{s}_1 ve \bar{s}_2 değişkenlerine göre türevleri alınırsa

$$\bar{Z}_1^1 = \frac{\bar{k}_1}{(\bar{k})^2}\bar{e}_3, \quad (5.42)$$

$$\bar{Z}_2^1 = \frac{(\bar{k} + \bar{q}^*)}{\bar{k}}\bar{e}_2 + \frac{\bar{k}_2}{(\bar{k})^2}\bar{e}_3$$

ve

$$\bar{Z}_1^2 = \frac{(\bar{k} + \bar{q}^*)}{\bar{q}^*}\bar{e}_1 - \frac{\bar{q}_1^*}{(\bar{q}^*)^2}\bar{e}_3, \quad (5.43)$$

$$\bar{Z}_2^2 = -\frac{\bar{q}_2^*}{(\bar{q}^*)^2}\bar{e}_3.$$

elde edilir.

\bar{Z}^1 fokal yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları sırasıyla $\bar{E}^1, \bar{F}^1, \bar{G}^1$ ve $\bar{l}^1, \bar{m}^1, \bar{n}^1$ ile gösterilirse,

$$\bar{E}^1 = |\bar{E}| \frac{(\bar{k}_1)^2}{(\bar{k})^4},$$

$$\bar{F}^1 = \sqrt{|\bar{E}|} \sqrt{\bar{G}} \frac{\bar{k}_1 \cdot \bar{k}_2}{(\bar{k})^4},$$

$$\bar{G}^1 = \bar{G} \left(\frac{(\bar{k}_2)^2}{(\bar{k})^4} + \frac{(\bar{k} + \bar{q}^*)^2}{(\bar{k})^2} \right)$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{l}^1 &= -|\bar{E}| \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}}, \\ \bar{m}^1 &= 0, \\ \bar{n}^1 &= -\bar{G} \frac{\bar{k}^* \cdot (\bar{k} + \bar{q}^*)}{\bar{k}}\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\bar{\mathbf{Z}}^1$ spacelike fokal yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K_{\bar{\mathbf{Z}}^1} = \frac{\bar{k}^* \cdot (\bar{k})^4}{\bar{k}_1 \cdot (\bar{k} + \bar{q}^*)} \quad (5.44)$$

şekindedir (Şimşek ve Özdemir 2015). Benzer şekilde $\bar{\mathbf{Z}}^2$ fokal yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K_{\bar{\mathbf{Z}}^2} = \frac{\bar{q} \cdot (\bar{q}^*)^4}{\bar{q}_2^* \cdot (\bar{k} + \bar{q}^*)} \quad (5.45)$$

olarak bulunur.

$\bar{\mathbb{M}}$ timelike yüzeyi için, (4.3)'den LPL kümesi

$$\delta(s_1, s_2) = (1 \cdot \bar{k} - (-1) \bar{q}^*) (s_1, s_2) = (\bar{k} + \bar{q}^*) (s_1, s_2) = 0$$

denklemlerle verilen eğridir. Ayrıca spacelike $\bar{\mathbf{Z}}^1$ yüzeyi üzerinde $LPL_{\bar{\mathbf{Z}}^1}$

$$\left[(\bar{k}_1)^2 \bar{k}^* (\bar{k} + \bar{q}^*) - \bar{k}_1 (\bar{k}_2)^2 - (\bar{k})^2 \bar{k}_1 (\bar{k} + \bar{q}^*)^2 \right]^2 + 4 (\bar{k}_1)^3 (\bar{k}_2)^2 \bar{k}^* (\bar{k} + \bar{q}^*) = 0 \quad (5.46)$$

denklemlerle verilir (Şimşek ve Özdemir 2015).

Tanım 5.16 (Şimşek ve Özdemir 2015) (1) Timelike $\bar{\mathbb{M}}$ yüzeyi üzerinde $\bar{k}_1 = 0$ eşitliğini sağlayan noktaların geometrik yerine $\bar{1}$ -sirt çizgi denir.

(2) Timelike $\bar{\mathbb{M}}$ yüzeyi üzerinde $\bar{q}_1^* = 0$ eşitliğini sağlayan noktaların geometrik yerine $\bar{1}$ -alt parabolik çizgi denir.

(3) Timelike $\bar{\mathbb{M}}$ yüzeyi üzerinde $\bar{q}_2^* = 0$ eşitliğini sağlayan noktaların geometrik yerine $\bar{2}$ -sirt çizgi denir.

(4) Timelike $\bar{\mathbb{M}}$ yüzeyi üzerinde $\bar{k}_2 = 0$ eşitliğini sağlayan noktaların geometrik yerine $\bar{2}$ -alt-parabolik çizgi denir.

Timelike yüzey üzerinde $\bar{1}$ -sirt ve $\bar{2}$ -alt-parabolik çizgileri spacelike yüzey üzerindeki 1-sirt ve 1-alt-parabolik çizgileri gibi davranır. Diğer yandan $\bar{1}$ -alt-parabolik çizgisi bir eğrilik çizgisi boyunca diğer eğrilik çizgisinin geodezik eğriliğinin ekstremum değerlere sahip noktaların geometrik yeridir ve $\bar{2}$ -sirt çizgisi diğer eğrilik

çizgisi boyunca aynı eğrilik çizgisinin geodezik eğriliğin ekstremum noktalara sahip olduğu noktaların geometrik yeridir. (5.42) ve (5.43) eşitliklerinden fokal yüzey sırt noktalarında singülerdir. Genelde yüzeyin sırt noktalarında fokal yüzey üzerinde sivri uçlu kenar eğrisi oluşur. Alt-parabolik çizgiler için aşağıdaki sonuç spacelike yüzeydeki sonuca benzerdir.

Teorem 5.17 (Şimşek ve Özdemir 2015) Sırt, parabolik ve LPL noktaları dışında aşağıdaki ifadeler denktir.

- (I) $\bar{\mathbf{Z}}^1(u_0, v_0)$ noktasında $\bar{\mathbf{Z}}^1$ spacelike fokal yüzeyin parabolik çizgisi vardır.
- (II) $\bar{\varphi}(u_0, v_0)$ noktası $\bar{\mathbf{I}}$ -alt-parabolik çizgi üzerindedir.
- (III) Spacelike \bar{v} -eğrisinin normal eğriliği $\bar{\varphi}(u_0, v_0)$ noktasında sıfırdır.

İspat: Teorem 5.10'nun kanıtı takip edilerek yapılabilir. \square

Teorem 5.18 (Şimşek ve Özdemir 2015) Sırt, parabolik ve LPL noktaları dışında aşağıdaki ifadeler denktir:

- (I) $\bar{\mathbf{Z}}^2(u_0, v_0)$ noktasında $\bar{\mathbf{Z}}^2$ timelike fokal yüzeyi üzerinde bir parabolik çizgi vardır.
- (II) $\bar{\varphi}(u_0, v_0)$ noktası $\bar{\mathbf{2}}$ -alt-parabolik çizgi üzerindedir.
- (III) Timelike \bar{u} -eğrisinin geodezik eğriliği $\bar{\varphi}(u_0, v_0)$ noktasında sıfırdır.

Timelike yüzey üzerinde özel noktalar için spacelike yüzeye benzer yorumlar yapılacaktır. $\bar{\mathbf{I}}$ -alt-parabolik çizginin spacelike \bar{v} -eğrisine teğet olması durumunda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.19 (Şimşek ve Özdemir 2015) Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) $\bar{\mathbf{I}}$ -alt-parabolik çizgi spacelike \bar{v} -eğrisine teğettir.
- (2) \bar{v} -eğrisi yüksekçe normal büküm noktasına (higher normal inflection) sahiptir.
- (3) $\bar{\mathbf{Z}}^1$ spacelike fokal yüzeyi Gauss zirve noktasına (cusp of Gauss) sahiptir.

İspat: Teorem 5.13'ün kanıtına benzerdir. \square

Eğer $\bar{\mathbf{I}}$ -alt-parabolik çizgi timelike \bar{u} -eğrisine teğetse, $\bar{\mathbf{Z}}^1$ spacelike fokal yüzeyi üzerindeki parabolik çizgi $\bar{\mathbf{Z}}_1^1$ vektörüne teğettir. (5.42) denkleminde, $\bar{\mathbf{Z}}^1$ üzerindeki parabolik çizgi $\bar{\mathbf{e}}_3$ vektörüne teğettir. O halde bu parabolik çizgi spacelike eğridir.

$\bar{\mathbf{I}}$ -sırt eğrisi $\bar{\varphi}(u_0, v_0)$ izole edilmiş noktada LPL eğrisine teğetse, $\bar{k}_1 = 0$ ve $\bar{k} + \bar{q}^* = 0$ eşitlikleri vardır. Buradan $\bar{q}_1^* = 0$ olduğundan $\bar{\mathbf{I}}$ -alt-parabolik çizgi $\bar{\varphi}(u_0, v_0)$ noktasında $\bar{\mathbf{I}}$ -sırt eğrisine ve LPL eğrisine teğettir. Bu nedenle, sivri uçlu kenar eğrisi ve parabolik çizgi $\bar{\mathbf{Z}}^1(u_0, v_0)$ noktasında birbirine teğettir. Ayrıca (5.46) denkleminde $\bar{\mathbf{Z}}^1(u_0, v_0)$ noktası $LPL_{\bar{\mathbf{Z}}^1}$ eğrisinin bir elemanıdır. Sonuç olarak $\bar{\mathbf{I}}$ -sırt

ve $\bar{1}$ -alt-parabolik çizgileri LPL üzerinde aynı davranışı gösterirken sivri uçlu kenar eğrisi ve parabolik çizgi $LPL_{\bar{Z}^1}$ üzerinde aynı davranışı gösterir. Benzer şekilde $\bar{2}$ -sırt eğrisi ($\bar{2}$ -alt-parabolik çizgi) LPL eğrisine teğetse, $\bar{2}$ -alt-parabolik çizgi ($\bar{2}$ -sırt eğrisi) aynı noktada LPL eğrisine teğet olacaktır. Üstelik $\bar{2}$ -alt-parabolik çizginin LPL eğrisine teğet olduğu nokta (5.46) denkleminde $LPL_{\bar{Z}^1}$ üzerindeki bir noktaya karşılık gelir (Şimşek ve Özdemir 2015).

Eğer $\bar{1}$ -sırt eğrisi $\bar{2}$ -alt-parabolik çizgiden geçerse \bar{Z}^1 spacelike fokal yüzeyi üzerinde sivri uçlu kenar eğrisi \bar{e}_2 vektörüne teğet olacaktır. Bu nedenle sivri uçlu kenar eğrisi spacelike eğridir.

$\frac{\partial \bar{Z}^1}{\partial t}$ birim vektör olacak şekilde $\bar{1}$ -sırt eğrisinin parametrizasyonu $\bar{\alpha}(t)$ olsun.

Bir önceki bölümde verilen spacelike yüzey üzerindeki durum gibi $\left\{ \frac{\partial \bar{Z}^1}{\partial t}, \bar{e}_1, \frac{\partial \bar{Z}^1}{\partial t} \times \bar{e}_1 \right\}$ spacelike sivri uçlu kenar eğrisinin Darboux çatısıdır. $\bar{1}$ -sırt eğrisi timelike \bar{u} -eğrisine teğet olduğu zaman, \bar{Z}^1 spacelike fokal yüzeyi üzerindeki karşılık gelen nokta bir swallowtail noktasıdır.

Spacelike sivri uçlu kenar eğrisinin Darboux çatısının türev formülü

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{Z}^1}{\partial t} \\ \bar{e}_1 \\ \frac{\partial \bar{Z}^1}{\partial t} \times \bar{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_n & \bar{k}_g \\ \bar{k}_n & 0 & \bar{\tau}_g \\ -\bar{k}_g & \bar{\tau}_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{Z}^1}{\partial t} \\ \bar{e}_1 \\ \frac{\partial \bar{Z}^1}{\partial t} \times \bar{e}_1 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada \bar{k}_n , \bar{k}_g , $\bar{\tau}_g$ fonksiyonları sırasıyla normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulmadır.

Lemma 5.20 (Şimşek ve Özdemir 2015) Swallowtail ve LPL noktaları dışında, spacelike sivri uçlu kenar eğrisinin normal eğriliği $\bar{k}_n = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\bar{k}^* = 0$ olmasıdır.

İspat: Lemma 5.14'deki kanıtı benzerdir. \square

6. SABİT KESİTSEL EĞRİLİKLİ FOKAL YÜZEYLER

P_1 ve P_2 \mathbb{E}^{2n} 'de iki n -düzlem olsun. P_1 ve P_2 arasındaki esas açılar (*principal angles*) $\theta_1, \dots, \theta_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ olmak üzere

$$\cos \theta_i = \max_{\mathbf{u} \in P_1} \max_{\mathbf{v} \in P_2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.1)$$

ile tanımlanır; burada \mathbf{u} ve \mathbf{v} birim vektörler ve $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_j \rangle = 0$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ ($1 \leq j \leq i-1$) eşitlikleri vardır (Golub ve Van Loan 1996). \mathbb{E}_1^{2n} Minkowski uzayı durumunda, \mathbf{u}_i ya da \mathbf{v}_i timelike vektör ise θ_i açısı hiperbolik açı olacaktır.

\mathbb{E}^{2n} Öklid uzayında, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ve $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$ sırasıyla P_1 ve P_2 için taban olacak şekilde iki ortonormal $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n}$ ve $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_{2n}^*$ tabanları vardır ve (6.1) denkleminde $1 \leq i \leq n$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^* &= \cos \theta_i \mathbf{e}_i + \sin \theta_i \mathbf{e}_{n+i-1}, \\ \mathbf{e}_{n+i-1}^* &= -\sin \theta_i \mathbf{e}_i + \cos \theta_i \mathbf{e}_{n+i-1}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

yazılabilir. Özel durumda, tüm $\theta_1, \dots, \theta_n$ açıları bir θ açısına eşitse, herhangi $\mathbf{u} \in P_1$ ve $\mathbf{v} \in P_2$ arasındaki açı da θ olacaktır.

\mathbb{M} , \mathbb{E}_1^{2n-1} Minkowski uzayında n -boyutlu bir Lorentz altmanifold ve φ , \mathbb{M} altmanifoldunun lokal parametrizasyonu olsun. $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ vektörleri \mathbb{M} altmanifoldunun teğet düzleminin lokal ortonormal çatısı olduğu farzedilsin. w_1, \dots, w_n sırasıyla $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ vektörlerinin dual koçatısı (dual coframe) ise

$$\begin{aligned} d\varphi &= \sum_{A=1}^{2n-1} w_A \mathbf{e}_A, & w_A &= \varepsilon_{\mathbf{e}_A} \langle d\varphi, \mathbf{e}_A \rangle, \\ d\mathbf{e}_A &= \sum_{B=1}^{2n-1} w_{AB} \mathbf{e}_B, & w_{AB} &= \varepsilon_{\mathbf{e}_B} \langle d\mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B \rangle \end{aligned} \quad (6.3)$$

yazılabilir. Bu bölüm boyunca aşağıdaki

$$1 \leq i, j, k \leq n, \quad 1 \leq A, B, C \leq 2n-1, \quad n+1 \leq \alpha, \beta, r \leq 2n-1 \quad (6.4)$$

indis sistemi kullanılacaktır. δ_{AB} Kronecker delta olmak üzere $\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B = \delta_{AB} \varepsilon_{\mathbf{e}_B}$ denkleminde

$$\langle d\mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B \rangle + \langle \mathbf{e}_A, d\mathbf{e}_B \rangle = 0 \quad (6.5)$$

eşitliği söylenebilir. (6.3) ve (6.5) denklemlerinden

$$w_{AB} = -\varepsilon_{\mathbf{e}_A} \varepsilon_{\mathbf{e}_B} w_{BA}, \quad w_{AA} = 0 \quad (6.6)$$

yazılır. \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayının 1. ve 2. tür yapı (structure) denklemleri

$$\begin{aligned} dw_A &= \sum_B \varepsilon_{\mathbf{e}_A} \varepsilon_{\mathbf{e}_B} w_{AB} \wedge w_B, \\ dw_{AB} &= \sum_C w_{AC} \wedge w_{CB}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Bu formlar \mathbb{M} altmanifolduna kısıtlanırsa, $w_\alpha = 0$ olur ve buradan

$$dw_\alpha = \sum_i \varepsilon_{\mathbf{e}_\alpha} \varepsilon_{\mathbf{e}_i} w_{\alpha i} \wedge w_i = 0 \quad (6.8)$$

elde edilir. Cartan Lemması ve (6.6) denklemi kullanılırsa

$$w_{i\alpha} = \sum_j h_{ij}^\alpha w_j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \quad (6.9)$$

yazılabilir. (6.7)'nin ilk denkleminde

$$dw_i = \sum_j \varepsilon_{\mathbf{e}_i} \varepsilon_{\mathbf{e}_j} w_{ij} \wedge w_j \quad (6.10)$$

elde edilir; burada w_{ij} bu denklemlerle tek olarak belirlenen \mathbb{M} üzerinde Levi-Civita konneksiyon formudur.

$$\Omega_{ij} = \sum_\alpha w_{i\alpha} \wedge w_{\alpha j} \quad (6.11)$$

eğrilik tensörü olmak üzere Gauss denklemleri

$$dw_{ij} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} + \Omega_{ij}, \quad (6.12)$$

ile verilir.

\mathbb{M} altmanifoldunun kesitsel eğriliği K_{ij}

$$\Omega_{ij} = -\varepsilon_{\mathbf{e}_i} K_{ij} w_i \wedge w_j \quad (6.13)$$

denklemi ile bulunur. Codazzi denklemleri

$$dw_{i\alpha} = \sum_A w_{iA} \wedge w_{A\alpha} \quad (6.14)$$

ile verilir.

$$\Omega_{\alpha\beta} = \sum_k w_{\alpha k} \wedge w_{k\beta} \quad (6.15)$$

eşitliği \mathbb{M} altmanifoldunun normal eğriliği olmak üzere (6.7) denkleminde

$$dw_{\alpha\beta} = \sum_r w_{\alpha r} \wedge w_{r\beta} + \Omega_{\alpha\beta} \quad (6.16)$$

yazılabilir. Eğer normal eğrilik sıfır ya da normal konneksiyon düzlemsel ise, \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında \mathbb{M} altmanifoldunun normal demeti (bundle) de düzlemseldir.

\mathbb{M} altmanifoldunun birinci ve ikinci temel formları sırasıyla

$$\mathbf{I} = \sum_i \varepsilon_{\mathbf{e}_i} (w_i)^2, \quad (6.17)$$

$$\mathbf{II} = \sum_{i,\alpha} \varepsilon_{\mathbf{e}_\alpha} w_i w_{i\alpha} \mathbf{e}_\alpha = \sum_{i,\alpha,j} \varepsilon_{\mathbf{e}_\alpha} h_{ij}^\alpha w_i w_j \mathbf{e}_\alpha \quad (6.18)$$

ile verilir. Genelde ikinci temel form eşzamanlı olarak tüm vektörler için diagonalleşmez; yani, eğrilik vektörleri tanımlı olmayabilir. Bununla birlikte, aşağıdaki önerme söylenebilir.

Önerme 6.1 (Chen 2005) Sabit negatif eğrilikli \mathbb{M} Lorentz n -altmanifoldunun \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında izometrik olarak gömülmüş (immersed) olduğu farzedilsin. O halde normal konneksiyonu düzlemseldir.

Chen'de vd (2005) ikinci temel formu diagonalleşen \mathbb{M} üzerinde global bir $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ortonormal çatı alanı seçilebileceği kanıtlandı. Bu nedenle seçilen bir $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}$ çatı alanının

$$h_{ij}^\alpha = b_i^\alpha \delta_{ij} \quad \text{for any } \alpha, i, j \quad (6.19)$$

sağladığı söylenebilir. Ayrıca Chen'den vd (2005) aşağıdaki teorem vardır.

Teorem 6.2 \mathbb{M} sabit negatif eğrilikli \mathbb{E}_1^{2n-1} Lorentz uzayının bir Lorentz n -altmanifoldu olsun. $\mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}$, \mathbb{M} altmanifoldunun normal demeti için lokal ortonormal bir çatı alanı olsun öyle ki $w_{\alpha\beta} = 0$ sağlansın. O halde \mathbb{M} eğrilik çizgisiyle lokal olarak parametrize edilebilir ve

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \sum_i \varepsilon_{\frac{\partial}{\partial u_i}} x_i^2 (du_i)^2, \quad x_i > 0 \quad \text{ve} \quad \sum_i x_i^2 = 1, \\ \mathbf{II} &= \sum_i \varepsilon_{\mathbf{e}_\alpha} b_i^\alpha x_i^2 (du_i)^2 \mathbf{e}_\alpha \end{aligned} \quad (6.20)$$

şeklindedir.

Chen'den vd (2005)

$$i \neq j \text{ için } \sum_\alpha b_i^\alpha b_j^\alpha = \varepsilon_{\mathbf{e}_i} \varepsilon_{\mathbf{e}_j} K \text{ ve } \sum_i \varepsilon_{\mathbf{e}_i} b_i^\alpha x_i^2 = 0 \quad (6.21)$$

denklemleri vardır. $K = -1$ olduğu farzedilirse

$$i \neq j \text{ için } \sum_\alpha b_i^\alpha b_j^\alpha = -\varepsilon_{\mathbf{e}_i} \varepsilon_{\mathbf{e}_j} \text{ ve } \sum_i \varepsilon_{\mathbf{e}_i} b_i^\alpha x_i^2 = 0 \quad (6.22)$$

eşitlikleri yazılabilir. $\sum_i x_i^2 = 1$ olduğundan

$$\sum_\alpha (b_j^\alpha)^2 = \frac{1 - x_j^2}{x_j^2} \quad (6.23)$$

elde edilir.

6.1. Lorentz 3-Uzayında Sabit Gauss Eğrilikli Yüzeyler

Öklid 3-uzayındaki yarı-küresel doğru kongruansı, Bäcklund ve tamamlanabilme teoremlerinin ifadeleri aşağıdaki gibidir.

Tanım 6.3 Bir l diffeomorfizmi \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeyleri arasındaki bir doğru kongruansı olsun öyle ki $x \in \mathbb{M}$ ve $l(x) = x^* \in \mathbb{M}^*$ noktalarını içeren doğru bu iki yüzeyin ortak teğet doğrusudur. Bu kongruansa *yarı-küresel* denir ancak ve ancak aşağıdaki koşullar sağlanır.

$$(1) \|\vec{xx}^*\| = r, x \text{ noktasından bağımsız bir sabittir.}$$

(2) \mathbf{n}_x ve \mathbf{n}_{x^*} ve normalleri arasındaki açı x noktasından bağımsız bir θ sabitine eşittir.

Teorem 6.4 \mathbb{E}^3 Öklid uzayında l , \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* arasında sabit r uzaklığı ve θ açısıyla bir yarı-küresel doğru kongruansı olsun. O halde \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* yüzeylerinin Gauss eğrilikleri $-\sin^2 \theta / r^2$ sayısına eşittir.

Teorem 6.5 $r > 0$ ve $0 < \theta < \pi$ sabit olmak üzere \mathbb{M} sabit negatif $K = -\sin^2 \theta / r^2$ Gauss eğrilğine sahip \mathbb{E}^3 Öklid uzayında bir yüzey olsun. Asal vektör olmayan bir $\mathbf{v} \in T_x \mathbb{M}$ herhangi birim vektörü için tek bir \mathbb{M}^* yüzeyi ve bir yarı-küresel $l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ doğru kongruansı vardır öyle ki $x^* = l(x)$ ise $\vec{xx}^* = r\mathbf{v}$ ve θ , x ve x^* noktalarındaki normaller arasındaki açıdır.

Bundan sonraki bölümlerde sonlu boyutlu Minkowski uzaylarında bu teoremler ele alınacaktır.

6.1.1. Sabit Gauss eğrilikli yüzeyler için Chebyshev koordinatları

$\varphi = \varphi(u, v)$, spacelike ya da timelike \mathbb{M} yüzeyinin lokal parametrizasyonu ve $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ eğrilik çizgilerinin birim teğet vektörleri olmak üzere $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ \mathbb{M} yüzeyinin ortonormal çatısı olsun. Asal eğrilikler birbirinden farklı ve reel ve eğrilik çizgileri koordinat eğrileri olarak ele alınsın. Bu bölümde Gu vd (2005) tarafından incelenmiş olan \mathbb{E}_1^3 Lorentz uzayındaki sabit pozitif ya da negatif Gauss eğrilikli spacelike ve timelike yüzeyler için Chebyshev koordinatları verilecektir.

(1) **Sabit pozitif Gauss eğrilikli ($K = +1$) spacelike yüzey:**

$$w_1 = \cos \frac{\alpha}{2} du \quad \text{ve} \quad w_2 = \sin \frac{\alpha}{2} dv \quad (6.24)$$

olsun. O halde (6.10) eşitliği kullanılarak

$$w_{12} = \frac{1}{2} (\alpha_v du + \alpha_u dv) \quad (6.25)$$

elde edilir. Ayrıca

$$w_{13} = \sin \frac{\alpha}{2} du \quad \text{ve} \quad w_{23} = -\cos \frac{\alpha}{2} dv \quad (6.26)$$

alınırsa,

$$dw_{13} + w_{23} \wedge w_{12} = 0 \quad \text{ve} \quad dw_{23} + w_{13} \wedge w_{21} = 0$$

Codazzi denklemlerinin sağlandığı kolayca görülebilir, ve

$$h_{11}^3 = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad h_{22}^3 = -\cot \frac{\alpha}{2}, \quad h_{12}^3 = 0$$

olur. Bu nedenle $K = -h_{11}^3 h_{22}^3 = 1$ olarak sabit pozitif Gauss eğriliği elde edilir. Sonuç olarak; birinci temel form

$$\mathbf{I} = (w_1)^2 + (w_2)^2 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} du^2 + \sin^2 \frac{\alpha}{2} dv^2,$$

ikinci temel form

$$\mathbf{II} = \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} (du^2 - dv^2)$$

ve Gauss denklemi

$$\alpha_{uu} - \alpha_{vv} = -\sin \alpha \tag{6.27}$$

ile ifade edilen negatif sine-Gordon denklemi olarak bulunmuş olur. Bu şekilde tanımlanan koordinatlara *Chebyshev koordinatları* ve çatıya *Chebyshev çatısı* denir (Gu vd 2005).

(2) Sabit negatif Gauss eğriliği ($K = -1$) spacelike yüzey: (1)'e benzer şekilde

$$w_1 = \cosh \frac{\alpha}{2} du \quad \text{ve} \quad w_2 = \sinh \frac{\alpha}{2} dv$$

alınırsa

$$w_{12} = \frac{1}{2} (\alpha_v du - \alpha_u dv)$$

elde edilir. Ayrıca

$$w_{13} = \sinh \frac{\alpha}{2} du \quad \text{ve} \quad w_{23} = \cosh \frac{\alpha}{2} dv$$

alınırsa

$$h_{11}^3 = \tanh \frac{\alpha}{2}, \quad h_{22}^3 = \coth \frac{\alpha}{2}, \quad h_{12}^3 = 0$$

olur. Bu nedenle $K = -h_{11}^3 h_{22}^3 = -1$ olarak sabit negatif Gauss eğriliği elde edilir. Sonuç olarak; birinci temel form

$$\mathbf{I} = (w_1)^2 + (w_2)^2 = \cosh^2 \frac{\alpha}{2} du^2 + \sinh^2 \frac{\alpha}{2} dv^2,$$

ikinci temel form

$$\mathbf{II} = \cosh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\alpha}{2} (du^2 + dv^2)$$

ve Gauss denklemi

$$\alpha_{uu} + \alpha_{vv} = \sinh \alpha$$

şeklindedir.

(3) Sabit pozitif Gauss eğriliği ($K = +1$) timelike yüzey: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ortonormal çatısında \mathbf{e}_1 spacelike ve \mathbf{e}_2 timelike birim vektör olsun.

$$w_1 = \cosh \frac{\alpha}{2} du \quad \text{ve} \quad w_2 = \sinh \frac{\alpha}{2} dv$$

alınırsa

$$w_{12} = w_{21} = \frac{1}{2} (\alpha_v du + \alpha_u dv)$$

bulunur. Bağlantı formları

$$w_{13} = \sinh \frac{\alpha}{2} du \quad \text{ve} \quad w_{23} = \cosh \frac{\alpha}{2} dv$$

olarak seçilirse

$$h_{11}^3 = \tanh \frac{\alpha}{2}, \quad h_{22}^3 = -\coth \frac{\alpha}{2}, \quad h_{12}^3 = 0$$

olur ve Gauss eğriliği $K = -h_{11}^3 h_{22}^3 = +1$ bulunur. Ayrıca Codazzi denklemleri sağlanır. Sonuç olarak; birinci temel form

$$\mathbf{I} = (w_1)^2 - (w_2)^2 = \cosh^2 \frac{\alpha}{2} du^2 - \sinh^2 \frac{\alpha}{2} dv^2,$$

ikinci temel form

$$\mathbf{II} = \cosh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\alpha}{2} (du^2 - dv^2)$$

ve Gauss denklemi

$$\alpha_{uu} - \alpha_{vv} = -\sinh \alpha \tag{6.28}$$

olarak ifade edilir.

(4) Sabit negatif Gauss eğriliği ($K = -1$) timelike yüzey: (3)'e benzer şekilde \mathbf{e}_1 spacelike ve \mathbf{e}_2 timelike birim vektör olarak seçilsin.

$$w_1 = \cos \frac{\alpha}{2} du \quad \text{ve} \quad w_2 = \sin \frac{\alpha}{2} dv \tag{6.29}$$

alınırsa

$$w_{12} = w_{21} = \frac{1}{2} (-\alpha_v du + \alpha_u dv) \tag{6.30}$$

bulunur. Bağlantı formları

$$w_{13} = \sin \frac{\alpha}{2} du \quad \text{ve} \quad w_{23} = \cos \frac{\alpha}{2} dv \tag{6.31}$$

olarak seçilirse

$$h_{11}^3 = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad h_{22}^3 = \cot \frac{\alpha}{2}, \quad h_{12}^3 = 0$$

ve Gauss eğriliği $K = -h_{11}^3 h_{22}^3 = +1$ bulunur. Birinci temel form

$$\mathbf{I} = (w_1)^2 - (w_2)^2 = \cosh^2 \frac{\alpha}{2} du^2 - \sinh^2 \frac{\alpha}{2} dv^2,$$

ikinci temel form

$$\mathbf{II} = \cosh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\alpha}{2} (du^2 - dv^2)$$

ve Gauss denklemi

$$\alpha_{uu} + \alpha_{vv} = \sin \alpha$$

olur.

Özet olarak yukarıdaki hesaplamalarla aşağıdaki teorem söylenebilir.

Teorem 6.6 (Gu vd 2005) Asal eğrilikleri reel ve birbirinden farklı olan sabit Gauss eğriliği ($K = \pm 1$) spacelike ya da timelike yüzeyin Gauss-Codazzi denklemleri sine-Gordon ya da sinh-Gordon denklemidir. Bu yüzeylerin inşası bu denklemlerin çözümüne ve yüzeylerin temel denklemlerine tamamlanmasına indirgenir.

6.1.2. Backlund ve tamamlanabilme teoremleri

Bäcklund teoremi \mathbb{E}_1^3 Lorentz uzayında aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 6.7 (Gu vd 2005) \mathbb{E}_1^3 uzayında yarı-küresel doğru kongruansının iki fokal yüzeyi \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* aynı sabit K Gauss eğriliğine sahiptir. Bu dört farklı durumda sınıflandırılabilir:

- (a) Doğru kongruansı spacelike ve iki fokal yüzey spacelike;
- (b) Doğru kongruansı spacelike, ve iki fokal yüzey timelike;
- (c) Doğru kongruansı timelike, ve iki fokal yüzey de timelike;
- (d) Doğru kongruansı spacelike, bir fokal yüzey spacelike diğeri timelike.

(a), (b) ve (c) durumlarında, K sırasıyla $\sinh^2 \theta/r^2$, $\sinh^2 \theta/r^2$ ve $\sin^2 \theta/r^2$ sayılarına eşittir. (d) durumunda, $K - \cosh^2 \theta/r^2$ sayısına eşittir.

İspat: (a): Tanım 6.3'den $x \in \mathbb{M}$, $x^* \in \mathbb{M}^*$ ve $l(x) = x^*$ olmak üzere $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ve $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$ çatıları sırasıyla $\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1^*$ vektörünün \vec{xx}^* vektörüne paralel birim vektör olacak şekilde \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* fokal yüzeylerinin ortonormal çatısı olsun. O halde

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2^* &= (\cosh \tau) \mathbf{e}_2 + (\sinh \tau) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3^* &= (\sinh \tau) \mathbf{e}_2 + (\cosh \tau) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

yazılabilir, burada $\tau \neq 0$ sabittir. Dahası φ ve φ^* sırasıyla \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* 'in lokal parametrizasyonları olmak üzere

$$\varphi^* = \varphi + r\mathbf{e}_1 \quad (r = \text{sabit} \neq 0)$$

yazılabilir. Bu denklemin diferensiyeli alınır ve $d\varphi^* = w_1^*\mathbf{e}_1^* + w_2^*\mathbf{e}_2^*$ ile karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned} w_1 &= -w_1^*, \\ w_2 + rw_{12} &= (\cosh \tau) w_2^*, \\ rw_{13} &= (\sinh \tau) w_2^* \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$(\cosh \tau) w_{13} - (\sinh \tau) w_{12} = \frac{\sinh \tau}{r} w_2$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$\begin{aligned} w_{13}^* &= -\langle d\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_3^* \rangle = -\frac{w_2}{r} \sinh \tau, \\ w_{23}^* &= -\langle d\mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^* \rangle = w_{23}, \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} -w_{13}^* \wedge w_{23}^* &= w_{23} \wedge \left(-\frac{w_2}{r} \sinh \tau \right) = \frac{\sinh \tau}{r} w_{13} \wedge w_1 \\ &= \frac{\sinh^2 \tau}{r^2} w_1^* \wedge w_2^* \end{aligned}$$

bulunur ki bu da \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* fokal yüzeylerinin Gauss eğriliklerinin

$$K^* = K = \frac{\sinh^2 \tau}{r^2}$$

olması demektir.

(b): \mathbf{e}_2 ve \mathbf{e}_2^* teğet vektörler timelike vektörler olarak alınarak bir önceki duruma benzer şekilde kanıtlanır.

(c): Bu duruma göre \mathbf{e}_1 ve \mathbf{e}_1^* timelike vektörler olsun. $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3^* \rangle = \cos \tau = \text{sabit} \neq 0$ olmak üzere bir önceki duruma benzer şekilde

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_1^*, \\ \mathbf{e}_2^* &= (\cos \tau) \mathbf{e}_2 + (\sin \tau) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3^* &= -(\sin \tau) \mathbf{e}_2 + (\cos \tau) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{6.32}$$

yazılabilir. $\varphi^* = \varphi + r\mathbf{e}_1$ eşitliğinin diferensiyelini alırsak

$$\begin{aligned} w_1 &= -w_1^*, \\ w_2 + rw_{12} &= (\cos \tau) w_2^*, \\ rw_{13} &= (\sin \tau) w_2^* \end{aligned}$$

elde edilir. (6.32)'den

$$\begin{aligned} w_{13}^* &= -\frac{w_2}{r} \sin \tau, \\ w_{23}^* &= w_{23}, \end{aligned}$$

olur ki bu da

$$\begin{aligned} -w_{13}^* \wedge w_{23}^* &= w_{23} \wedge \left(-\frac{w_2}{r} \sin \tau \right) = \frac{\sin \tau}{r} w_{13} \wedge w_1 \\ &= \frac{\sin^2 \tau}{r^2} w_1^* \wedge w_2^* \end{aligned}$$

eşitliğini verir. Bu son eşitlik ve (6.13) eşitliği

$$K^* = K = \frac{\sin^2 \tau}{r^2}$$

olduğunu söyler. Bu nedenle \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* aynı sabit Gauss eğrilğine sahip fokal yüzeylerdir.

(d): Bu sınıflandırmada \mathbf{e}_2 ve \mathbf{e}_3^* timelike vektörler olarak alınır ve $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3^* \rangle = \sinh \tau = \text{sabit}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_1^*, \\ \mathbf{e}_2^* &= (\sinh \tau) \mathbf{e}_2 + (\cosh \tau) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3^* &= (\cosh \tau) \mathbf{e}_2 + (\sinh \tau) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılırsa önceki durumlara benzer şekilde

$$K^* = K = -\frac{\cosh^2 \tau}{r^2}$$

bulunur. \square

Yukarıdaki teorem bu dört durumun oluşabileceğini garanti etmez çünkü böyle yüzeylerin varlığının kanıtı yoktur. Yeni teoreme yarı-küresel doğru kongruanslarını kullanarak verilen sabit Gauss eğrilikli yüzeyden gene aynı sabit Gauss eğrilğine sahip başka bir yüzey inşa edilebilecek bir metod verilecektir. Bu klasik Backlund dönüşümünün Lorentz 3-uzayına genelleştirilmesidir. Her bir durum için tamamlanabilme teoremi ya da varlık teoremi ayrı ayrı aşağıdaki gibidir.

(1) \mathbb{M} sabit pozitif Gauss eğrilikli bir spacelike yüzey ve kongruans spacelike: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ φ parametrizasyonuna göre Chebyshev çatısı olsun. \mathbb{M} yüzeyinden \mathbb{M}^* yüzeyine

$$\varphi^* = \varphi + r(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2), \quad (r=\text{sabit} \neq 0) \quad (6.33)$$

dönüşümü tanımlansın. φ ve φ^* parametrizasyonlarıyla x ve x^* sırasıyla \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* üzerinde herhangi iki nokta olsun. xx^* doğrularının bir yarı-küresel doğru kongruansı oluşturduğu gösterilecektir. Burada $\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$ ya da θ belirlenecektir. \mathbb{M}^* yüzeyinin normal vektörü \mathbf{e}_3 timelike vektördür ve $\overrightarrow{xx^*}$ vektörüne paraleldir.

\mathbb{M} yüzeyinin sine-Gordon denkleminin bir α çözümüne karşılık geldiği varsayalım. (6.33) dönüşümü diferensiyellenirse ve (6.24)-(6.26) eşitlikleri kullanılırsa

$$d\varphi^* = \left(\left[\cos \frac{\alpha}{2} - r \sin \theta \left(\theta_u + \frac{\alpha_v}{2} \right) \right] \mathbf{e}_1 + r \cos \theta \left(\theta_u + \frac{\alpha_v}{2} \right) \mathbf{e}_2 + r \cos \theta \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{e}_3 \right) du \\ + \left(-r \sin \theta \left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2} \right) \mathbf{e}_1 + \left[\sin \frac{\alpha}{2} + r \cos \theta \left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2} \right) \right] \mathbf{e}_2 - r \sin \theta \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{e}_3 \right) dv$$

bulunur. x^* noktasında \mathbb{M}^* 'in \mathbf{e}_3^* birim normali ile x noktasında \mathbb{M} yüzeyinin \mathbf{e}_3 birim normali arasındaki açı τ sabit ve xx^* , x^* noktasında \mathbb{M}^* fokal yüzeyine teğet olduğu için

$$\mathbf{e}_3^* = \sinh \tau (-\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2) + \cosh \tau \mathbf{e}_3 \quad (6.34)$$

yazılabilir. Buradan $\langle d\varphi^*, \mathbf{e}_3^* \rangle = 0$ eşitliği θ için çözülürse xx^* tam olarak bir yarı-küresel doğru kongruansı üretir. Genelliği kaybetmeksizin $\theta = \alpha_1/2$ olsun. Ayrıca $K = 1$ olarak düşünülürse Teorem 6.7'den $r = \sinh \tau$ yazılabilir. O halde (6.34) eşitliği

$$\frac{1}{2} \sinh \tau (\alpha_{1u} + \alpha_v) = \sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \cosh \tau \cos \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (6.35) \\ \frac{1}{2} \sinh \tau (\alpha_{1v} + \alpha_u) = -2 \cos \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - 2 \cosh \tau \sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

denklemlerini verir. (6.35), α_1 için bir kısmi diferensiyel denklem sistemidir. Bu sistemin tamamlayıcı koşulu (6.27) negatif sine-Gordon denklemdir. Bu eşitlik sağlandığından (6.35)'in α_1 çözümü tek olarak vardır. (6.33) ile tanımlanan dönüşüme sine-Gordon denkleminin iki çözümü arasındaki Backlund dönüşümü denir. O halde aşağıdaki teorem söylenebilir.

Teorem 6.8 (Gu vd 2005) Verilen sabit pozitif Gauss eğrilikli bir \mathbb{M} spacelike yüzeyi için, fokal yüzeyleri \mathbb{M} ve \mathbb{M} ile aynı sabit Gauss eğrilğine sahip başka bir spacelike \mathbb{M}^* yüzeyi olan bir yarı-küresel spacelike doğru kongruansı vardır.

(2) \mathbb{M} sabit pozitif Gauss eğrilikli bir timelike yüzey ve kongruans spacelike: \mathbb{M}^* yüzeyinin parametrizasyonu $r \neq 0$ sabit olmak üzere

$$\varphi^* = \varphi + r (\cosh \theta \mathbf{e}_1 + \sinh \theta \mathbf{e}_2) \quad (6.36)$$

ve normal vektörü

$$\mathbf{e}_3^* = \sinh \tau (\sinh \theta \mathbf{e}_1 + \cosh \theta \mathbf{e}_2) + \cosh \tau \mathbf{e}_3 \quad (6.37)$$

şeklinde. $K = 1$ olarak farzedilirse $r = \sinh \tau$ bulunur. Ayrıca

$$d\varphi^* = \left(\left[\cosh \frac{\alpha}{2} + r \sinh \theta \left(\theta_u + \frac{\alpha_v}{2} \right) \right] \mathbf{e}_1 + r \cosh \theta \left(\theta_u + \frac{\alpha_v}{2} \right) \mathbf{e}_2 + r \cosh \theta \sinh \frac{\alpha}{2} \mathbf{e}_3 \right) du \\ + \left(r \sinh \theta \left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2} \right) \mathbf{e}_1 + \left[\sinh \frac{\alpha}{2} + r \cosh \theta \left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2} \right) \right] \mathbf{e}_2 - r \sinh \theta \cosh \frac{\alpha}{2} \mathbf{e}_3 \right) dv$$

olduğundan, $\langle d\varphi^*, \mathbf{e}_3^* \rangle = 0$ koşulundan

$$\sinh \tau \left(\theta_u + \frac{\alpha_v}{2} \right) = \sinh \theta \cosh \frac{\alpha}{2} + \cosh \tau \cosh \theta \sinh \frac{\alpha}{2} \quad (6.38) \\ \sinh \tau \left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2} \right) = -\cosh \theta \sinh \frac{\alpha}{2} - \cosh \tau \sinh \theta \cosh \frac{\alpha}{2}$$

elde edilir. $\theta = \alpha_1/2$ için kısmi diferensiyel denklem sisteminin tamamlayıcı koşulu (6.28) Gauss denklemidir ki bu denklemin çözülebilirliğini gösterir. (6.37)'den \mathbb{M}^* yüzeyinin timelike yüzey olduğu görülebilir. Bu yarı-küresel doğru kongruansın varlığını kanıtlar. Ayrıca, Teorem 6.7'den \mathbb{M}^* yüzeyinin Gauss eğriliği $+1$ 'dir. Bu nedenle aşağıdaki teorem söylenebilir.

Teorem 6.9 (Gu vd 2005) \mathbb{M} sabit pozitif Gauss eğrilikli bir spacelike yüzey olsun. O halde, fokal yüzeyleri \mathbb{M} ve \mathbb{M} ile aynı sabit Gauss eğriliğine sahip bir başka timelike \mathbb{M}^* yüzeyi olan bir yarı-küresel spacelike doğru kongruansı vardır.

(3) \mathbb{M} sabit pozitif Gauss eğrilikli bir timelike yüzey ve kongruans timelike: Bir önceki duruma benzer şekilde aynı \mathbb{M} için

$$\begin{aligned}\varphi^* &= \varphi + r \left(\sinh \frac{\alpha_1}{2} \mathbf{e}_1 + \cosh \frac{\alpha_1}{2} \mathbf{e}_2 \right), \\ \mathbf{e}_3^* &= \sin \tau \left(\cosh \frac{\alpha_1}{2} \mathbf{e}_1 + \sinh \frac{\alpha_1}{2} \mathbf{e}_2 \right) + \cos \tau \mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

burada $\sin \tau = r \neq 0$ sabittir. $d\varphi^*$ hesaplanarak ve $\langle d\varphi^*, \mathbf{e}_3^* \rangle = 0$ koşulundan faydalanarak (6.38)'a benzer şekilde

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sin \tau (\alpha_{1u} + \alpha_v) &= -\cosh \frac{\alpha_1}{2} \cosh \frac{\alpha}{2} + \cos \tau \sinh \frac{\alpha_1}{2} \sinh \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2} \sin \tau (\alpha_{1v} + \alpha_u) &= \sinh \frac{\alpha_1}{2} \sinh \frac{\alpha}{2} + \cos \tau \cosh \frac{\alpha_1}{2} \cosh \frac{\alpha}{2}\end{aligned}\quad (6.39)$$

elde edilir. Dönüşümün tamamlayıcı koşulu (6.28) ile çözülebilen bir denklemdir. Bu durum için de varlık teoremi ispatlanmış olur. O halde, **(2)** ve **(3)** durumları için aşağıdaki teorem söylenebilir.

Teorem 6.10 (Gu vd 2005) \mathbb{M} sabit pozitif Gauss eğrilikli bir spacelike yüzey olsun. O halde, fokal yüzeyleri \mathbb{M} ve \mathbb{M} ile aynı sabit Gauss eğriliğine sahip bir başka timelike \mathbb{M}^* yüzeyi olan bir yarı-küresel spacelike ve timelike doğru kongruansları vardır.

(4) \mathbb{M} sabit pozitif Gauss eğrilikli bir timelike yüzey ve kongruans spacelike: \mathbb{M} , -1 Gauss eğriliğine sahip bir timelike yüzey olsun öyle ki \mathbf{e}_2 timelike birim vektör olsun. Bölüm 6.1.1 **(4)**'deki Chebyshev koordinatları ve karşılık gelen çatı seçilsin; yani (6.29)-(6.31) eşitlikleri ele alınsın. Buna göre

$$\begin{aligned}\varphi^* &= \varphi + r (\cosh \theta \mathbf{e}_1 + \sinh \theta \mathbf{e}_2), \quad (r = \cosh \tau) \\ \mathbf{e}_3^* &= \cosh \tau (\sinh \theta \mathbf{e}_1 + \cosh \theta \mathbf{e}_2) + \sinh \tau \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

olur. \mathbb{M} yüzeyinin temel denklemlerinden, tamamlayıcı koşuldan ve (6.29)-(6.31) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}d\varphi^* &= \left(\left[\cos \frac{\alpha}{2} + r \sinh \theta \left(\theta_u - \frac{\alpha_v}{2} \right) \right] \mathbf{e}_1 + r \cosh \theta \left(\theta_u - \frac{\alpha_v}{2} \right) \mathbf{e}_2 + r \cosh \theta \sin \frac{\alpha}{2} \mathbf{e}_3 \right) du \\ &\quad + \left(r \sinh \theta \left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2} \right) \mathbf{e}_1 + \left[\sin \frac{\alpha}{2} + r \cosh \theta \left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2} \right) \right] \mathbf{e}_2 + r \sinh \theta \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{e}_3 \right) dv\end{aligned}$$

elde edilir. $\langle d\varphi^*, e_3^* \rangle = 0$ koşulundan

$$\sinh \theta \left(\cos \frac{\alpha}{2} + r \sinh \theta \left(\theta_u - \frac{\alpha_v}{2} \right) \right) - r \cosh^2 \theta \left(\theta_u - \frac{\alpha_v}{2} \right) + \sinh \tau \cosh \theta \sin \frac{\alpha}{2} = 0, \quad (6.40)$$

$$r \sinh^2 \theta \left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2} \right) - \cosh \theta \left(\sin \frac{\alpha}{2} + r \cosh \theta \left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2} \right) \right) + \sinh \tau \sinh \theta \cos \frac{\alpha}{2} = 0,$$

yani

$$\cosh \tau \left(\theta_u + \frac{\alpha_v}{2} \right) = \sinh \theta \cos \frac{\alpha}{2} + \sinh \tau \cosh \theta \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$\cosh \tau \left(\theta_v + \frac{\alpha_u}{2} \right) = -\cosh \theta \sin \frac{\alpha}{2} + \sinh \tau \sinh \theta \cos \frac{\alpha}{2}$$

eşitlikleri bulunur. θ için tamamlayıcı koşul

$$\alpha_{uu} + \alpha_{vv} = \sin \alpha$$

denklemdir ve bu denklemin çözümü vardır. Bu nedenle bir (u_0, v_0) noktasında herhangi verilen $\theta = \theta_0$ başlangıç koşulu için (6.40) denkleminin θ çözümü vardır ve $\alpha_1 = \theta/2$ olmak üzere

$$\alpha_{1uu} + \alpha_{1vv} = \sin \alpha_1$$

olur. Bu yarı-küresel doğru kongruansının varlığı anlamına gelir ve φ^* sabit negatif Gauss eğrilikli bir spacelike fokal yüzeydir. O halde aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 6.11 (Gu vd 2005) \mathbb{M} sabit negatif Gauss eğrilikli bir timelike yüzey olsun. O halde, fokal yüzeyleri \mathbb{M} ve \mathbb{M} ile aynı sabit Gauss eğriliğine sahip bir başka spacelike \mathbb{M}^* yüzeyi olan bir yarı-küresel spacelike doğru kongruansı vardır.

6.2. 2n-1 Boyutlu Lorentz Uzayında Sabit Kesitsel Eğrilikli Yüzeyler

6.2.1. Bäcklund teoremi

Bäcklund teoremini yüksek boyutlara genelleştirmek için ilk olarak Lorentz n-altmanifoldlar arasındaki doğru kongruansı genelleştirilmelidir.

Tanım 6.12 (Tenenblat ve Terng 1980, Şimşek ve Özdemir 2016) \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında herhangi iki n-boyutlu Lorentz altmanifoldlar \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* arasındaki bir $l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ diffeomorfizmi olsun. Eğer $x \in \mathbb{M}$ için x ve $x^* = l(x)$ noktalarını içeren bir doğru \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* altmanifoldlarının ortak teğet doğrusu ise bu dönüşüme *doğru kongruansı* denir.

$l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ doğru kongruansı için, x ve x^* noktalarına karşılık gelen $N_x\mathbb{M}$ ve $N_{x^*}\mathbb{M}^*$ normal düzlemleri $n - 1$ boyutludur. Bu normal düzlemler $\vec{x}x^*$ vektörüne dik olduğu için $N_x\mathbb{M}$ ve $N_{x^*}\mathbb{M}^*$, $2n - 2$ boyutlu Lorentz iç çarpım uzayı içindedir. (6.1) denkleminde, $N_x\mathbb{M}$ ve $N_{x^*}\mathbb{M}^*$ arasında $n - 1$ tane açı vardır.

Tanım 6.13 (Tenenblat ve Terng 1980, Şimşek ve Özdemir 2016) \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında iki Lorentz n-altmanifold arasındaki bir $l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ doğru kongruansına *yarı-küresel* denir öyle ki aşağıdaki koşullar sağlanır:

- (1) x ve x^* arasındaki uzaklık x 'den bağımsız bir r sabitidir.
- (2) $N_x\mathbb{M}$ ve $N_{x^*}\mathbb{M}^*$ arasındaki $n - 1$ aç x 'den bağımsız aynı sabit bir θ açısına eşittir.
- (3) $N\mathbb{M}$ ve $N\mathbb{M}^*$ normal demetler (bundle) düzlemseldir.
- (4) Ortogonal izdüşüm ile verilen $\Phi : N\mathbb{M} \rightarrow N\mathbb{M}^*$ demet dönüşümü (bundle map) normal konneksiyonları birbirine dönüştürür.

Şimdi Bäcklund teoremini \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında ifade edilecektir. Dört farklı durum söz konusudur.

Durum 1: \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* 'ın teğet demetleri timelike ve spacelike vektörlerden oluşur ve yarı-küresel doğru kongruansının yönü timelikedir.

Durum 2: \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* 'ın teğet demetleri timelike ve spacelike vektörlerden oluşur ve yarı-küresel doğru kongruansının yönü spacelikedir.

Durum 3: \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* 'ın teğet demetleri spacelike vektörlerden oluşur ve yarı-küresel doğru kongruansının yönü spacelikedir.

Durum 4: \mathbb{M} 'nin teğet demeti timelike ve spacelike vektörlerden, \mathbb{M}^* 'ın teğet demeti spacelike vektörlerden oluşur ve yarı-küresel doğru kongruansının yönü spacelikedir.

Teorem 6.14 (Şimşek ve Özdemir 2016) $l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ fonksiyonu \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında Lorentz n-altmanifoldlar arasında yarı-küresel doğru kongruansı olsun öyle ki r uzaklığı ve normaller arasındaki aç $\theta \neq 0$ sabittir. **Durum 1** geçerli olsun. O halde, \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* Lorentz altmanifoldlarının kesitsel eğrilikleri $\sin^2 \theta / r^2$ sayısına eşittir.

İspat: Normal demet $N\mathbb{M}^*$ düzlemsel olduğu için, $N\mathbb{M}^*$ üzerinde ortonormal $\mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}$ çatı seçilebilir öyle ki normal konneksiyon

$$w_{n+i-1, n+j-1}^* = 0 \quad (6.41)$$

şeklindedir. Burada

$$2 \leq i, j, k \leq n$$

indis sistemi kullanılacaktır. Tanım 6.13'ün 2. koşulu ve (6.2) denkleminde, \mathbf{e}_1 vektörü timelike birim vektör olarak seçilmek üzere \mathbb{M} için ortonormal $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}$ çatı alanı vardır öyle ki

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n+i-1}^* &= -\sin \theta \mathbf{e}_i + \cos \theta \mathbf{e}_{n+i-1}, \\ \mathbf{e}_1 &= \vec{x}^* \text{ yönündeki vektör} \end{aligned} \quad (6.42)$$

olur ve $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, $T\mathbb{M}$ teğet demeti için ortonormal çatı oluşturur.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^* &= -\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_i^* &= \cos \theta \mathbf{e}_i + \sin \theta \mathbf{e}_{n+i-1}, \end{aligned} \quad (6.43)$$

alınabilir ki böylece $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$, TM^* teğet demeti için bir ortonormal çatı oluşturur. $\Phi : NM \rightarrow NM^*$ dönüşümü

$$\Phi(\mathbf{e}_{n+i-1}) = \mathbf{e}_{n+i-1}^*, \quad w_{n+i-1, n+j-1}^* = 0,$$

eşitliklerini sağladığı için

$$w_{n+i-1, n+j-1} = 0 \quad (6.44)$$

eşitliği vardır. U , \mathbb{R}^n 'nin açık alt kümesi olmak üzere $\varphi : U \rightarrow \mathbb{E}_1^{2n-1}$, M altmanifoldunun lokal bir parametrizasyonu olsun. O halde M^* altmanifoldunun parametrizasyonu

$$\varphi^* = \varphi + r\mathbf{e}_1 \quad (6.45)$$

ile verilir. (6.45) eşitliğinin diferensiyali alınırsa

$$\begin{aligned} d\varphi^* &= d\varphi + r d\mathbf{e}_1 \quad (6.46) \\ &= w_1\mathbf{e}_1 + \sum_i w_i\mathbf{e}_i + r \sum_i w_{1i}\mathbf{e}_i + r \sum_i w_{1, n+i-1}\mathbf{e}_{n+i-1} \\ &= w_1\mathbf{e}_1 + \sum_i (w_i + r w_{1i})\mathbf{e}_i + r \sum_i w_{1, n+i-1}\mathbf{e}_{n+i-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan w_1^*, \dots, w_n^* , $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$ çatısı alanının dual koçatısı ise (6.43) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} d\varphi^* &= w_1^*\mathbf{e}_1^* + \sum_i w_i^*\mathbf{e}_i^* \quad (6.47) \\ &= -w_1^*\mathbf{e}_1 + \sum_i w_i^* (\cos \theta \mathbf{e}_i + \sin \theta \mathbf{e}_{n+i-1}) \end{aligned}$$

bulunur. (6.46) ve (6.47)'den

$$\begin{aligned} w_1^* &= -w_1, \quad (6.48) \\ \cos \theta w_i^* &= w_i + r w_{1i}, \\ \sin \theta w_i^* &= r w_{1, n+i-1} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$w_i + r w_{1i} = r \cot \theta w_{1, n+i-1} \quad (6.49)$$

olur. (6.41), (6.42) ve (6.44) kullanılarak,

$$\begin{aligned} 0 &= w_{n+i-1, n+j-1}^* \\ &= \varepsilon_{\mathbf{e}_{n+j-1}^*} \langle d\mathbf{e}_{n+i-1}^*, \mathbf{e}_{n+j-1}^* \rangle \\ &= \langle d(-\sin \theta \mathbf{e}_i + \cos \theta \mathbf{e}_{n+i-1}), -\sin \theta \mathbf{e}_j + \cos \theta \mathbf{e}_{n+j-1} \rangle \\ &= \varepsilon_{\mathbf{e}_j} \sin^2 \theta w_{ij} - \sin \theta \cos \theta (\varepsilon_{\mathbf{e}_{n+j-1}} w_{i, n+j-1} + \varepsilon_{\mathbf{e}_j} w_{n+i-1, j}) \\ &\quad + \cos^2 \theta \delta(\mathbf{e}_{n+j-1}) w_{n+i-1, n+j-1} \\ &= \sin^2 \theta w_{ij} - \sin \theta \cos \theta (w_{i, n+j-1} - \varepsilon_{\mathbf{e}_{n+i-1}} \varepsilon_{\mathbf{e}_j} w_{j, n+i-1}) \\ &= \sin^2 \theta w_{ij} - \sin \theta \cos \theta (w_{i, n+j-1} - w_{j, n+i-1}) \end{aligned} \quad (6.50)$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$w_{ij} = \cot \theta (w_{i,n+j-1} - w_{j,n+i-1}) \quad (6.51)$$

yazılır. Şimdi kesitsel eğrilik için; (6.42), (6.43), (6.49) ve (6.51) kullanılarak

$$\begin{aligned} w_{1,n+k-1}^* &= \varepsilon_{\mathbf{e}_{n+k-1}^*} \langle d\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_{n+k-1}^* \rangle \\ &= -\langle d\mathbf{e}_1, -\sin \theta \mathbf{e}_k + \cos \theta \mathbf{e}_{n+k-1} \rangle \\ &= \varepsilon_{\mathbf{e}_k} \sin \theta w_{1k} - \varepsilon_{\mathbf{e}_{n+k-1}} \cos \theta w_{1,n+k-1} \\ &= -\frac{\sin \theta}{r} w_k, \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} w_{i,n+k-1}^* &= \varepsilon_{\mathbf{e}_{n+k-1}^*} \langle d\mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_{n+k-1}^* \rangle \\ &= -\varepsilon_{\mathbf{e}_k} \sin \theta \cos \theta w_{ik} + \cos^2 \theta \varepsilon_{\mathbf{e}_{n+k-1}} w_{i,n+k-1} + \\ &\quad \varepsilon_{\mathbf{e}_{n+i-1}} \sin^2 \theta w_{k,n+i-1} \\ &= w_{k,n+i-1} \end{aligned} \quad (6.53)$$

yazılır. (6.6), (6.11), (6.52) ve (6.53) denklemleri vasıtasıyla,

$$\begin{aligned} \Omega_{1i}^* &= \sum_k w_{1,n+k-1}^* \wedge w_{n+k-1,i}^* \\ &= -\sum_k \varepsilon_{\mathbf{e}_i^*} \varepsilon_{\mathbf{e}_{n+k-1}^*} w_{1,n+k-1}^* \wedge w_{i,n+k-1}^* \\ &= \frac{\sin \theta}{r} \sum_k w_k \wedge w_{k,n+i-1}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

bulunur. (6.8) eşitliği kullanılarak,

$$w_1 \wedge w_{1,n+i-1} = -\sum_k w_k \wedge w_{k,n+i-1} \quad (6.55)$$

bulunur. O halde, (6.48) (6.54) ve (6.55) eşitliklerinden,

$$\Omega_{1i}^* = -\frac{\sin \theta}{r} w_1 \wedge w_{1,n+i-1} = \frac{\sin^2 \theta}{r^2} w_1^* \wedge w_i^* \quad (6.56)$$

elde edilir. Buradan \mathbb{M}^* , $K_{1i}^* = \sin^2 \theta / r^2$ sabit kesitsel eğriliğine sahiptir. Ayrıca

$$\Omega_{ij}^* = \sum_k w_{i,n+k-1}^* \wedge w_{n+k-1,j}^* = -\sum_k w_{k,n+i-1} \wedge w_{k,n+j-1}$$

olur. \mathbb{NM} düzlemsel ve $w_{n+i-1,n+j-1} = 0$ olduğundan, (6.16) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= dw_{n+i-1,n+j-1} \\ &= w_{n+i-1,1} \wedge w_{1,n+j-1} + \sum_k w_{n+i-1,k} \wedge w_{k,n+j-1} \end{aligned} \quad (6.57)$$

elde edilir. Buradan ve (6.48)'i kullanarak

$$\Omega_{ij}^* = -w_{1,n+i-1} \wedge w_{1,n+j-1} = -\frac{\sin^2 \theta}{r^2} w_i^* \wedge w_j^*$$

bulunur. O halde, \mathbb{M}^* $K_{ij}^* = \sin^2 \theta / r^2$ kesitsel eğriliğine sahiptir. Aynı işlemler \mathbb{M} için de yapılabileceğinden \mathbb{M} Lorentz n-altmanifoldu da aynı kesitsel eğriliğe sahiptir. \square

$n = 2$ için Teorem 6.14, Teorem 6.7 ile aynıdır. Yani bu teorem Bäcklund Teoreminin n boyuta genelleştirilmesidir.

Teorem 6.15 (Şimşek ve Özdemir 2016) $l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ fonksiyonu \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında Lorentz n-altmanifoldlar arasında yarı-küresel doğru kongruansı olsun öyle ki r uzaklığı ve normaller arasındaki açı $\theta \neq 0$ sabittir. **Durum 2** geçerli olsun. (6.14) ile verilen $dw_{2\alpha}$ Codazzi denklemleri birinci tür Cartan yapı denklemi dw_2 ile orantılı ve \mathbf{e}_2 bir timelike vektör ise \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* Lorentz n-altmanifoldları $-\sin^2 \theta / r^2$ sabit negatif kesitsel eğriliğe sahiptir.

İspat: **Durum 2** boyunca

$$3 \leq i, j, k \leq n$$

indisi kullanılacaktır. (6.42) ve (6.43) denklemleri hariç (6.41) – (6.46) denklemleri bu durum için de geçerlidir ve \mathbf{e}_2 vektörünün timelike olması koşulu altında (6.42) ve (6.43) denklemleri yerine sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n+1}^* &= \sinh \theta \mathbf{e}_2 + \cosh \theta \mathbf{e}_{n+1}, \\ \mathbf{e}_{n+i-1}^* &= -\sin \theta \mathbf{e}_i + \cos \theta \mathbf{e}_{n+i-1}, \\ \mathbf{e}_1 &= \vec{x}^* \text{ yönündeki vektör} \end{aligned} \quad (6.58)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^* &= -\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_2^* &= \cosh \theta \mathbf{e}_2 + \sinh \theta \mathbf{e}_{n+1}, \\ \mathbf{e}_i^* &= \cos \theta \mathbf{e}_i + \sin \theta \mathbf{e}_{n+i-1} \end{aligned} \quad (6.59)$$

denklemleri geçerlidir. Diğer yandan, $w_1^*, \dots, w_n^*, \mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$ çatısının dual koçatısı olduğundan, (6.59) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} d\varphi^* &= w_1^* \mathbf{e}_1^* + w_2^* \mathbf{e}_2^* + \sum_i w_i^* \mathbf{e}_i^* \\ &= -w_1^* \mathbf{e}_1 + w_2^* (\cosh \theta \mathbf{e}_2 + \sinh \theta \mathbf{e}_{n+1}) + \sum_i w_i^* (\cos \theta \mathbf{e}_i + \sin \theta \mathbf{e}_{n+i-1}) \end{aligned} \quad (6.60)$$

eşitliği bulunur. (6.46) ve (6.60)'daki $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}$ vektörlerinin katsayıları kıyaslanırsa,

$$\begin{aligned} w_1^* &= -w_1, \\ w_2^* \cosh \theta &= w_2 + r w_{12}, & \cos \theta w_i^* &= w_i + r w_{1i}, \\ w_2^* \sinh \theta &= r w_{1,n+1}, & \sin \theta w_i^* &= r w_{1,n+i-1} \end{aligned} \quad (6.61)$$

ve

$$w_2 + rw_{12} = r \coth \theta w_{1,n+1}, \quad w_i + rw_{1i} = r \cot \theta w_{1,n+i-1} \quad (6.62)$$

elde edilir. (6.41), (6.44) ve (6.58) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= w_{n+1,n+j-1}^* \\ &= \varepsilon_{\mathbf{e}_{n+j-1}^*} \langle d\mathbf{e}_{n+1}^*, \mathbf{e}_{n+j-1}^* \rangle \\ &= \langle d(\sinh \theta \mathbf{e}_2 + \cosh \theta \mathbf{e}_{n+1}), -\sin \theta \mathbf{e}_j + \cos \theta \mathbf{e}_{n+j-1} \rangle \\ &= -\sin \theta \sinh \theta w_{2j} + \sinh \theta \cos \theta w_{2,n+j-1} - \sin \theta \cosh \theta w_{n+1,j} \end{aligned} \quad (6.63)$$

yazılabilir yani $3 \leq i, j \leq n$ için

$$w_{2j} = \cot \theta w_{2,n+j-1} - \coth \theta w_{n+1,j} \quad (6.64)$$

ve (6.51) denklemini geçerlidir. Kesitsel eğrilik için (6.58), (6.59), (6.62) ve (6.64) kullanılarak

$$\begin{aligned} w_{1,n+1}^* &= \varepsilon_{\mathbf{e}_{n+1}^*} \langle d\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_{n+1}^* \rangle \\ &= -\langle d\mathbf{e}_1, (\sinh \theta \mathbf{e}_2 + \cosh \theta \mathbf{e}_{n+1}) \rangle \\ &= \sinh \theta w_{12} - \cosh \theta w_{1,n+1} \\ &= -\frac{\sinh \theta}{r} w_2, \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} w_{2,n+1}^* &= \varepsilon_{\mathbf{e}_{n+1}^*} \langle d\mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_{n+1}^* \rangle \\ &= \langle d(\cosh \theta \mathbf{e}_2 + \sinh \theta \mathbf{e}_{n+1}), \sinh \theta \mathbf{e}_2 + \cosh \theta \mathbf{e}_{n+1} \rangle \\ &= w_{2,n+1}, \end{aligned} \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned} w_{i,n+1}^* &= \varepsilon_{\mathbf{e}_{n+1}^*} \langle d\mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_{n+1}^* \rangle \\ &= \langle d(\cos \theta \mathbf{e}_i + \sin \theta \mathbf{e}_{n+i-1}), \sinh \theta \mathbf{e}_2 + \cosh \theta \mathbf{e}_{n+1} \rangle \\ &= -\frac{\sinh \theta}{\sin \theta} w_{2,n+i-1}, \end{aligned} \quad (6.67)$$

$$\begin{aligned} w_{2,n+k-1}^* &= \varepsilon_{\mathbf{e}_{n+k-1}^*} \langle d\mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_{n+k-1}^* \rangle \\ &= \langle d(\cosh \theta \mathbf{e}_2 + \sinh \theta \mathbf{e}_{n+1}), -\sin \theta \mathbf{e}_k + \cos \theta \mathbf{e}_{n+k-1} \rangle \\ &= -\frac{\sin \theta}{\sinh \theta} w_{k,n+1} \end{aligned} \quad (6.68)$$

eşitlikleri elde edilir. (6.52) ve (6.53)'den

$$w_{1,n+k-1}^* = -\frac{\sin \theta}{r} w_k, \quad w_{i,n+k-1}^* = w_{k,n+i-1} \quad (6.69)$$

eşitliği vardır. O halde (6.6), (6.11), (6.65), (6.66), (6.68) ve (6.69) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\Omega_{12}^* &= w_{1,n+1}^* \wedge w_{n+1,2}^* + \sum_k w_{1,n+k-1}^* \wedge w_{n+k-1,2}^* \\ &= -\frac{\sinh \theta}{r} w_2 \wedge w_{2,n+1} - \frac{\sin \theta}{r} \sum_k w_k \wedge w_{2,n+k-1}^* \\ &= -\frac{\sinh \theta}{r} w_2 \wedge w_{2,n+1} + \frac{\sin^2 \theta}{r \sinh \theta} \sum_k w_k \wedge w_{k,n+1}\end{aligned}\quad (6.70)$$

elde edilir. (6.8)'den,

$$w_1 \wedge w_{1,n+1} + w_2 \wedge w_{2,n+1} = -\sum_k w_k \wedge w_{k,n+1}\quad (6.71)$$

yazılabilir. Bu nedenle (6.61), (6.70) ve (6.71)'den

$$\Omega_{12}^* = \frac{\sin^2 \theta}{r^2} w_1^* \wedge w_2^* - \left(\frac{\sin^2 \theta + \sinh^2 \theta}{r \sinh \theta} \right) w_2 \wedge w_{2,n+1}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\Omega_{1i}^* &= w_{1,n+1}^* \wedge w_{n+1,i}^* + \sum_k w_{1,n+k-1}^* \wedge w_{n+k-1,i}^* \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{r^2} w_1^* \wedge w_i^* - \left(\frac{\sin^2 \theta + \sinh^2 \theta}{r \sinh \theta} \right) w_2 \wedge w_{2,n+i-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{2j}^* &= w_{2,n+1}^* \wedge w_{n+1,j}^* + \sum_k w_{2,n+k-1}^* \wedge w_{n+k-1,j}^* \\ &= -\frac{\sin^2 \theta}{r^2} w_2^* \wedge w_j^* + \left(\frac{\sin^2 \theta + \sinh^2 \theta}{\sinh \theta \sin \theta} \right) w_{2,n+1} \wedge w_{2,n+j-1}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\Omega_{ij}^* &= w_{i,n+1}^* \wedge w_{n+1,j}^* + \sum_k w_{i,n+k-1}^* \wedge w_{n+k-1,j}^* \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{r^2} w_i^* \wedge w_j^* - \left(\frac{\sin^2 \theta + \sinh^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) w_{2,n+i-1} \wedge w_{2,n+j-1}\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunabilir. (6.14) ile verilen $dw_{2\alpha}$ Codazzi denklemleri dw_2 birinci Cartan yapı denkleminde orantılı ise, \mathbb{M}^* için $K_{12}^* = K_{2j}^* = K_{1i}^* = K_{ij}^* = -\sin^2 \theta / r^2$ kesitsel eğrilikleri elde edilir. \mathbb{M} için de benzer adımlar takip edilebildiği için bu fokal yüzey de aynı sabit negatif kesitsel eğriliklerine sahiptir. \square

Teorem 6.16 (Şimşek ve Özdemir 2016) $l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ fonksiyonu \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında Lorentz n-altmanifoldlar arasında yarı-küresel doğru kongruansı olsun öyle ki r uzaklığı ve normaller arasındaki açı $\theta \neq 0$ sabittir. **Durum 3** geçerli olsun. (6.14) ile

verilen $dw_{2\alpha}$ Codazzi denklemleri birinci tür Cartan yapı denklemi dw_2 ile orantılı ve \mathbf{e}_{n+1} bir timelike vektör ise \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* Lorentz n -altmanifoldları $-\sin^2 \theta/r^2$ sabit negatif kesitsel eğriliğe sahiptir.

İspat: Durum 3 boyunca

$$3 \leq i, j, k \leq n$$

indisi kullanılacaktır. \mathbf{e}_{n+1} timelike vektör olsun. (6.51), (6.58), (6.59), (6.60), (6.61), (6.62), (6.64), (6.65), (6.66) ve (6.69) denklemlerinin tümü geçerlidir. Ayrıca, (6.67) ve (6.68) yerine

$$w_{i,n+1}^* = \frac{\sinh \theta}{\sin \theta} w_{2,n+i-1} \quad \text{ve} \quad w_{2,n+k-1}^* = \frac{\sin \theta}{\sinh \theta} w_{k,n+1}$$

denklemleri vardır. Bu denklemlerin tümü kullanılarak

$$\begin{aligned} \Omega_{12}^* &= \frac{\sin^2 \theta}{r^2} w_1^* \wedge w_2^* - \left(\frac{\sin^2 \theta + \sinh^2 \theta}{r \sinh \theta} \right) w_2 \wedge w_{2,n+1}, \\ \Omega_{1i}^* &= \frac{\sin^2 \theta}{r^2} w_1^* \wedge w_i^* - \left(\frac{\sin^2 \theta + \sinh^2 \theta}{r \sin \theta} \right) w_2 \wedge w_{2,n+i-1}, \\ \Omega_{2j}^* &= \frac{\sin^2 \theta}{r^2} w_2^* \wedge w_j^* + \left(\frac{\sin^2 \theta + \sinh^2 \theta}{\sinh \theta \sin \theta} \right) w_{2,n+1} \wedge w_{2,n+j-1}, \\ \Omega_{ij}^* &= \frac{\sin^2 \theta}{r^2} w_i^* \wedge w_j^* + \left(\frac{\sin^2 \theta + \sinh^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) w_{2,n+i-1} \wedge w_{2,n+j-1} \end{aligned}$$

elde edilir. \square

\mathbf{e}_{n+1} yerine \mathbf{e}_{n+i-1} ($3 \leq i \leq n$) seçilerek de yukarıdaki teoreme benzer bir teorem elde edilir.

Teorem 6.17 (Şimşek ve Özdemir 2016) $l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ fonksiyonu \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında Lorentz n -altmanifoldlar arasında yarı-küresel doğru kongruansı olsun öyle ki r uzaklığı ve normaller arasındaki açı $\theta \neq 0$ sabittir. **Durum 4** geçerli olsun. (6.14) ile verilen $dw_{2\alpha}$ Codazzi denklemleri birinci tür Cartan yapı denklemi dw_2 ile orantılı ve \mathbf{e}_2 ve \mathbf{e}_{n+1}^* timelike vektörler ise \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* Lorentz n -altmanifoldları $-\cos^2 \theta/r^2$ sabit negatif kesitsel eğriliğe sahiptir.

İspat: Durum 4 boyunca

$$3 \leq i, j, k \leq n$$

indisi kullanılacaktır. (6.42) ve (6.43) denklemleri hariç (6.41) – (6.46) denklemleri **Durum 4** için de geçerlidir ve \mathbf{e}_2 ve \mathbf{e}_{n+1}^* vektörlerinin timelike vektörler olması koşulu altında (6.42) ve (6.43) denklemleri yerine sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n+1}^* &= \cosh \theta \mathbf{e}_2 + \sinh \theta \mathbf{e}_{n+1}, \\ \mathbf{e}_{n+i-1}^* &= \cos \theta \mathbf{e}_i + \sin \theta \mathbf{e}_{n+i-1}, \\ \mathbf{e}_1 &= \overrightarrow{xx^*} \text{ yönündeki vektör} \end{aligned} \tag{6.72}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^* &= -\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_2^* &= \sinh \theta \mathbf{e}_2 + \cosh \theta \mathbf{e}_{n+1}, \\ \mathbf{e}_i^* &= -\sin \theta \mathbf{e}_i + \cos \theta \mathbf{e}_{n+i-1} \end{aligned} \quad (6.73)$$

Diğer yandan $w_1^*, \dots, w_n^*, \mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$ çatisının dual koçatisı olduğundan (6.59) kullanılarak

$$\begin{aligned} d\varphi^* &= w_1^* \mathbf{e}_1^* + w_2^* \mathbf{e}_2^* + \sum_i w_i^* \mathbf{e}_i^* \\ &= -w_1^* \mathbf{e}_1 + w_2^* (\sinh \theta \mathbf{e}_2 + \cosh \theta \mathbf{e}_{n+1}) + \sum_i w_i^* (-\sin \theta \mathbf{e}_i + \cos \theta \mathbf{e}_{n+i-1}) \end{aligned} \quad (6.74)$$

bulunur. (6.46) ve (6.74)'deki $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}$ vektörlerinin katsayıları kıyaslanırsa

$$\begin{aligned} w_1^* &= -w_1, \\ w_2^* \sinh \theta &= w_2 + r w_{12}, & -\sin \theta w_i^* &= w_i + r w_{1i}, \\ w_2^* \cosh \theta &= r w_{1,n+1}, & \cos \theta w_i^* &= r w_{1,n+i-1} \end{aligned} \quad (6.75)$$

elde edilir. Buradan

$$w_2 + r w_{12} = r \tanh \theta w_{1,n+1}, \quad w_i + r w_{1i} = -r \tan \theta w_{1,n+i-1}. \quad (6.76)$$

yazılır. (6.41), (6.44) ve (6.72) kullanılarak $3 \leq i, j \leq n$ için

$$\begin{aligned} 0 &= w_{n+1,n+j-1}^* \\ &= \cos \theta \cosh \theta w_{2j} + \cosh \theta \sin \theta w_{2,n+j-1} + \sinh \theta \cos \theta w_{n+1,j} \end{aligned}$$

ya da

$$w_{2j} = -(\tan \theta w_{2,n+j-1} + \tanh \theta w_{n+1,j}) \quad (6.77)$$

ve

$$\begin{aligned} 0 &= w_{n+i-1,n+j-1}^* \\ &= \cos^2 \theta w_{ij} + \sin \theta \cos \theta w_{n+i-1,j} + \cos \theta \sin \theta w_{i,n+j-1} \end{aligned}$$

ya da

$$w_{ij} = -\tan \theta (w_{i,n+j-1} - w_{j,n+i-1}) \quad (6.78)$$

söylenabilir. Önceki durumlarda olduğu gibi aşağıdaki denklemler hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} w_{1,n+1}^* &= \frac{\cosh \theta}{r} w_2, & w_{2,n+1}^* &= w_{2,n+1}, \\ w_{i,n+1}^* &= \frac{\cosh \theta}{\cos \theta} w_{2,n+i-1}, & w_{2,n+k-1}^* &= -\frac{\cos \theta}{\cosh \theta} w_{k,n+1}, \\ w_{1,n+k-1}^* &= \frac{\cos \theta}{r} w_k, & w_{i,n+k-1}^* &= -w_{k,n+i-1}. \end{aligned}$$

Bu denklemler kullanılarak

$$\begin{aligned}\Omega_{12}^* &= \frac{\cos^2 \theta}{r^2} w_1^* \wedge w_2^* + \left(\frac{\cosh^2 \theta - \cos^2 \theta}{r \cosh \theta} \right) w_2 \wedge w_{2,n+1}, \\ \Omega_{1i}^* &= \frac{\cos^2 \theta}{r^2} w_1^* \wedge w_i^* + \left(\frac{\cosh^2 \theta - \cos^2 \theta}{r \cos \theta} \right) w_2 \wedge w_{2,n+i-1}, \\ \Omega_{2j}^* &= \frac{\cos^2 \theta}{r^2} w_2^* \wedge w_j^* + \left(\frac{\cosh^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cosh \theta \cos \theta} \right) w_{2,n+1} \wedge w_{2,n+j-1}, \\ \Omega_{ij}^* &= \frac{\cos^2 \theta}{r^2} w_i^* \wedge w_j^* + \left(\frac{\cosh^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) w_{2,n+i-1} \wedge w_{2,n+j-1}\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. \square

Durum 2, Durum 3 ve **Durum 4** $n > 2$ için geçerlidir çünkü bu durumdaki sonuçlar $n = 2$ için Teorem 6.7'deki sonuçlardan farklıdır. Bunun sebebi \mathbb{E}_1^{2n-1} Minkowski uzayının Lorentz n-altmanifoldları üzerindeki teğet vektörler arasındaki hiperbolik açıdan dolayıdır.

6.2.2. Tamamlanabilme teoremi

İlk olarak sabit negatif eğrilikli Lorentz altmanifoldları için tamamlanabilme teoremi ispatlanacaktır.

Teorem 6.18 (Şimşek ve Özdemir 2016) \mathbb{M} , normal doğrultuları spacelike vektörler olan, $r > 0$ ve θ sabit olmak üzere $K = -\sin^2 \theta / r^2$ sabit negatif eğrilige sahip \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında bir Lorentz n-altmanifold ve $2 \leq t \leq n$ için $dw_{t,n+1}$ Codazzi denklemi, $dw_{1,n+1}$ Codazzi denklemiyle $\lambda_t \neq 0$ orantısına sahip olsun. Ayrıca, $\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0, \dots, \mathbf{v}_n^0$ eğrilik vektörlerinden oluşan p_0 noktasında bir ortonormal taban ve $\mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i^0$, $1 \leq i \leq n$ için $c_i \neq 0$ ile bir birim vektör olsun. O halde normal doğrultuları spacelike bir \mathbb{M}^* Lorentz n-altmanifold ve doğrultusu spacelike olan bir $l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ yarı-küresel doğru kongruansı vardır öyle ki $p_0^* = l(p_0)$ ise $\overrightarrow{p_0 p_0^*} = r \mathbf{v}_0$ ve θ , p_0 ve p_0^* noktalarındaki normal düzlemler arasındaki açıdır.

İspat: $3 \leq i, j \leq n$ olmak üzere ϱ , aşağıdaki

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= w_2 + r w_{12} - r \coth \theta w_{1,n+1}, \\ \alpha_i &= w_i + r w_{1i} - r \cot \theta w_{1,n+i-1}, \\ \beta_{2j} &= w_{2j} - \cot \theta w_{2,n+j-1} + \coth \theta w_{n+1,j}, \\ \beta_{ij} &= w_{ij} - \cot \theta (w_{i,n+j-1} - w_{j,n+i-1}), \\ \gamma_{ij} &= w_{n+i-1,n+j-1},\end{aligned}\tag{6.79}$$

1-formlarla oluşturulan bir ideal olsun. ϱ idealinin kapalı diferensiyel ideal yani

$d\varrho \subseteq \varrho$ olduğu gösterilecektir. $w_{1,n+1} = \lambda_1 w_{2,n+1}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
d\alpha_2 &= dw_2 + rdw_{12} - r \coth \theta dw_{1,n+1} \\
&= w_1 \wedge w_{12} + \sum_{k=2}^n w_k \wedge w_{k2} + r \left(\sum_{k=2}^n w_{1k} \wedge w_{k2} \right) \\
&+ r \left(\sum_{k=2}^n w_{1,n+k-1} \wedge w_{n+k-1,2} \right) - r \coth \theta \sum_{k=2}^n w_{1k} \wedge w_{k,n+1} \\
&- r \coth \theta \sum_{k=2}^n w_{1,n+k-1} \wedge w_{n+k-1,n+1} \\
&\equiv -\frac{1}{r} w_1 \wedge w_2 + \coth \theta w_1 \wedge w_{1,n+1} + \coth \theta \sum_{k=2}^n w_k \wedge w_{k,n+1} \\
&+ \cot \theta \sum_{k=2}^n w_k \wedge w_{2,n+k-1} \\
&+ r \cot \theta \sum_{k=2}^n w_{1k} \wedge w_{2,n+k-1} - r \coth \theta \sum_{k=2}^n w_{1k} \wedge w_{n+1,k} \\
&+ r \left(\sum_{k=2}^n w_{1,n+k-1} \wedge w_{n+k-1,2} \right) - r \coth \theta \sum_{k=2}^n w_{1k} \wedge w_{k,n+1} \\
d\alpha_2 &\equiv -\frac{1}{r} w_1 \wedge w_2 + \cot \theta \sum_{k=2}^n w_k \wedge w_{2,n+k-1} + r \cot \theta \sum_{k=2}^n w_{1k} \wedge w_{2,n+k-1} \\
&+ r \left(\sum_{k=2}^n w_{1,n+k-1} \wedge w_{n+k-1,2} \right) \\
&\equiv -\frac{1}{r} w_1 \wedge w_2 + r \cot^2 \theta \Omega_{12} + r \Omega_{12} \quad (\text{mod } \varrho)
\end{aligned}$$

elde edilir. M altmanifoldunun kesitsel eğriliği $-\sin^2 \theta / r^2$ olduğundan

$$\Omega_{12} = \sin^2 \theta / r^2 w_1 \wedge w_2$$

olur ki böylece $d\alpha_2 \equiv 0 \pmod{\varrho}$; yani, $d\alpha_2 \in \varrho$ bulunur. Benzer şekilde

$$\lambda_i w_{1,n+1} = w_{i,n+1}$$

eşitliği kullanılarak $d\alpha_i \equiv 0 \pmod{\varrho}$; yani, $d\alpha_i \in \varrho$ bulunabilir. $d\beta_{2j}$ diferensiyel formu da

$$\begin{aligned}
d\beta_{2j} &= w_{21} \wedge w_{1j} + \sum_{k=2}^n w_{2k} \wedge w_{kj} + \Omega_{2j} - \cot \theta (w_{21} \wedge w_{1,n+j-1}) \\
&\equiv \Omega_{2j} + \frac{1}{r^2} w_2 \wedge w_j + \cot^2 \theta \Omega_{2j} \quad (\text{mod } \varrho)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $\Omega_{2j} = -\sin^2 \theta / r^2 w_2 \wedge w_j$ olduğundan $d\beta_{2j} \equiv 0 \pmod{\varrho}$; yani, $d\beta_{2j} \in \varrho$ olur. Benzer şekilde, $3 \leq i, j \leq n$ için $\lambda_j w_{i,n+1} = \lambda_i w_{j,n+1}$ eşitliği kullanılarak $d\beta_{ij} \equiv 0 \pmod{\varrho}$; yani, $d\beta_{ij} \in \varrho$ bulunabilir.

(6.16)'dan

$$d\gamma_{ij} = \Omega_{n+i-1, n+j-1}$$

yazılabilir. Sabit negatif kesitsel eğrilikli Lorentz n-altmanifoldun normal demeti düzlemsel olduğu için $\Omega_{n+i-1, n+j-1} = 0$, yani, $d\gamma_{ij} \in \varrho$ olur.

Frobenius teoremi kullanılarak, $\mathbf{e}_1(p_0) = v_0$ olacak şekilde p_0 komşuluğunda \mathbb{M} üzerinde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}$ ortonormal çatı alanı vardır ve

$$w_2 + r w_{12} = r \coth \theta w_{1, n+1}, \quad (6.80)$$

$$w_i + r w_{1i} = r \cot \theta w_{1, n+i-1}, \quad (6.81)$$

$$w_{2j} = \cot \theta w_{2, n+j-1} - \coth \theta w_{n+1, j}, \quad (6.82)$$

$$w_{ij} = \cot \theta (w_{i, n+j-1} - w_{j, n+i-1}), \quad (6.83)$$

$$w_{n+i-1, n+j-1} = 0 \quad (6.84)$$

eşitlikleri söylenebilir. U , \mathbb{R}^n 'nin açık alt kümesi olmak üzere M , p_0 komşuluğunda $\varphi : U \rightarrow \mathbb{E}_1^{2n-1}$ ile verilsin. $\varphi^* = \varphi + r\mathbf{e}_1$ tanımlansın. φ^* dönüşümü \mathbb{E}_1^{2n-1} Minkowski uzayının bir \mathbb{M}^* Lorentz n-altmanifoldunun parametrizasyonu olduğu ve $l(p_0) = p_0^*$ ile $l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ yarı-küresel doğru kongruansı olduğu gösterilmelidir.

φ^* dönüşümünün diferensiyeli alınır

$$\begin{aligned} d\varphi^* &= d\varphi + r d\mathbf{e}_1 \\ &= w_1 \mathbf{e}_1 + \sum_{k=2}^n (w_1 + r w_{1k}) \mathbf{e}_k + \sum_{k=2}^n r w_{1, n+k-1} \mathbf{e}_{n+k-1} \end{aligned} \quad (6.85)$$

bulunur ve (6.80) ve (6.81)'den,

$$\begin{aligned} d\varphi^* &= w_1 \mathbf{e}_1 + \frac{r}{\sinh \theta} w_{1, n+1} (\cosh \theta \mathbf{e}_2 + \sinh \theta \mathbf{e}_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{k=3}^n \frac{r}{\sin \theta} w_{1, n+k-1} (\cos \theta \mathbf{e}_k + \sin \theta \mathbf{e}_{n+k-1}) \end{aligned}$$

olur. Şimdi, $w_1, w_{1, n+1}, \dots, w_{1, 2n-1}$ lineer bağımsız olduğu gösterilmelidir ki böylece φ^* bir Lorentz n-altmanifold \mathbb{M}^* tanımlar.

Teorem 6.2 kullanılarak \mathbb{M} için p komşuluğunda $\mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}$ normal çatı alanına göre $u = (u_1, \dots, u_n)$ eğrilik çizgisi koordinatları seçilebilir ki böylece $\mathbf{v}_i^0 = \frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_{p_0}$ olur, burada a_i 'ler birinci temel formun katsayılarıdır. $\mathbf{v}_i = \frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial u_i}$ olsun ve ϑ_i bu vektörün dual koçatısı olsun. $\mathbf{v}_{n+j-1} = \mathbf{e}_{n+j-1}$ ve $1 \leq A, B \leq 2n-1$ için $\vartheta_{A, B} = \delta(\mathbf{v}_B) \langle d\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B \rangle$ olduğu düşünölsün. O halde, (6.20) eşitliğinden

$$\vartheta_{i, n+j-1} = \delta(\mathbf{e}_i) b_i^{n+j-1} \vartheta_i \quad (6.86)$$

elde edilir. $\mathbf{e}_1 = \sum_{k=1}^n \delta(\mathbf{e}_k) f_k \mathbf{v}_k$ farzedilirse $f_k(p_0) = \delta(\mathbf{e}_k) c_k$ yazılabilir. Bu nedenle,

$$w_1 = \sum_{k=1}^n \delta(\mathbf{e}_k) f_k \vartheta_k, \quad (6.87)$$

$$w_{1,n+i-1} = \delta(\mathbf{e}_{n+i-1}) \langle d\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{n+i-1} \rangle = \sum_{k=1}^n \delta(\mathbf{e}_k) f_k b_k^{n+i-1} \vartheta_k$$

elde edilir.

$k = 1, \dots, n$ olmak üzere $\mathbf{B}_k = \delta(\mathbf{e}_k) \mathbf{e}_1 + \sum_{i=2}^n b_k^{n+i-1} \mathbf{e}_{n+i-1}$ olsun. (6.22)'nin ilk denklemini \mathbf{B}_i vektörlerinin karşılıklı ortogonal, yani, lineer bağımsız olduğunu gösterdiğinden $w_1, w_{1,n+1}, \dots, w_{1,2n-1}$ lineer bağımsızlığı buradan söylenebilir.

$\mathbf{e}_1, \cosh \theta \mathbf{e}_2 + \sinh \theta \mathbf{e}_{n+1}$, ve $\cos \theta \mathbf{e}_k + \sin \theta \mathbf{e}_{n+k-1}$ vektörleri \mathbb{M}^* altmanifoldunun teğet vektörleri olduğu (6.85)'den takip edilir. Bu nedenle, $\sinh \theta \mathbf{e}_2 + \cosh \theta \mathbf{e}_{n+1}$, ve $-\sin \theta \mathbf{e}_k + \cos \theta \mathbf{e}_{n+k-1}$ vektörleri \mathbb{M}^* altmanifoldunun normalleridir; yani, \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* altmanifoldlarının normal düzlemleri arasındaki açı aynı ve θ 'ya eşittir. Ayrıca \mathbf{e}_1, \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* altmanifoldlarının ortak teğet vektörleridir ve \mathbb{M}^* normalleri spacelike olan bir Lorentz n -altmanifold olur.

Son olarak, ortogonal projeksiyonun normal konneksiyonları değiştirdiği; yani, $w_{n+1,n+j-1}^* = 0$ ve $w_{n+i-1,n+j-1}^* = 0$, $3 \leq i, j \leq n$ olduğu gösterilecektir. (6.50)'de hesaplandığı gibi,

$$w_{n+1,n+j-1}^* = -\sin \theta \sinh \theta w_{2j} + \sinh \theta \cos \theta w_{2,n+j-1} - \sin \theta \cosh \theta w_{n+1,j} \\ + \cosh \theta \cos \theta w_{n+1,n+j-1},$$

$$w_{n+i-1,n+j-1}^* = \delta(\mathbf{e}_j) \sin^2 \theta w_{ij} - \sin \theta \cos \theta (\delta(\mathbf{e}_{n+j-1}) w_{i,n+j-1} \\ + \delta(\mathbf{e}_j) w_{n+i-1,j}) + \cos^2 \theta \delta(\mathbf{e}_{n+j-1}) w_{n+i-1,n+j-1}$$

olur. (6.82), (6.83) ve (6.84) eşitliklerinden $w_{n+1,n+j-1}^* = 0$ ve $w_{n+i-1,n+j-1}^* = 0$, $3 \leq i, j \leq n$, bulunur. \square

Benzer şekilde Teorem 6.18'in kanıtı takip edilerek **Durum 3** ve **Durum 4** için de tamamlanabilme teoremi verilebilir. **Durum 3** için tamamlanabilme sistemi (6.44), (6.51), (6.62) ve (6.64) tarafından oluşturulur.

Teorem 6.19 (Şimşek ve Özdemir 2016) \mathbb{M} , teğet doğrultuları spacelike vektörler olan, $r > 0$ ve θ sabit olmak üzere $K = -\sin^2 \theta / r^2$ sabit negatif eğrilige sahip \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında bir Lorentz n -altmanifold ve $2 \leq t \leq n$ için $dw_{t,n+1}$ Codazzi denklemi, $dw_{1,n+1}$ Codazzi denklemiyle $\lambda_t \neq 0$ orantısına sahip olsun. Ayrıca, $\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0, \dots, \mathbf{v}_n^0$ eğrilik vektörlerinden oluşan p_0 noktasında bir ortonormal taban ve $\mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i^0$, $1 \leq i \leq n$ için $c_i \neq 0$ ile bir birim vektör olsun. O halde teğet doğrultuları spacelike

bir \mathbb{M}^* Lorentz n -altmanifold ve doğrultusu spacelike olan bir $l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ yarı-küresel doğru kongruansı vardır öyle ki $p_0^* = l(p_0)$ ise $\overrightarrow{p_0 p_0^*} = r\mathbf{v}_0$ ve θ , p_0 ve p_0^* noktalarındaki normal düzlemler arasındaki açıdır.

Durum 4 için de tamamlanabilme sistemi (6.44), (6.76), (6.77) ve (6.78) tarafından oluşturulur.

Teorem 6.20 (Şimşek ve Özdemir 2016) \mathbb{M} , normal doğrultuları spacelike vektörler olan, $r > 0$ ve θ sabit olmak üzere $K = -\cos^2 \theta / r^2$ sabit negatif eğrilige sahip \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında bir Lorentz n -altmanifold ve $2 \leq t \leq n$ için $dw_{t,n+1}$ Codazzi denklemi, $dw_{1,n+1}$ Codazzi denklemiyle $\lambda_t \neq 0$ orantısına sahip olsun. Ayrıca, $\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0, \dots, \mathbf{v}_n^0$ eğrilik vektörlerinden oluşan p_0 noktasında bir ortonormal taban ve $\mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i^0$, $1 \leq i \leq n$ için $c_i \neq 0$ ile bir birim vektör olsun. O halde teğet doğrultuları spacelike bir \mathbb{M}^* Lorentz n -altmanifold ve doğrultusu spacelike olan bir $l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ yarı-küresel doğru kongruansı vardır öyle ki $p_0^* = l(p_0)$ ise $\overrightarrow{p_0 p_0^*} = r\mathbf{v}_0$ ve θ , p_0 ve p_0^* noktalarındaki normal düzlemler arasındaki açıdır.

Durum 1 durumunda sabit pozitif kesitsel eğrilikli bir Lorentz n -altmanifold olduğu için, genellikle normal demeti düzlemsel olması koşulu ve ikinci temel formu diagonalleşen bir ortonormal çatı alanı seçebilme koşulları sağlanmaz. Bu nedenle tamamlanabilme teoremini ispatlamak için bu hipotezler kabul edilmek zorundadır. O halde bu varsayımlar altında **Durum 1** için aşağıdaki tamamlanabilme teoremi verilebilir.

Teorem 6.21 (Şimşek ve Özdemir 2016) \mathbb{M} , normal doğrultuları spacelike vektörler olan, $r > 0$ ve θ sabit olmak üzere $K = \sin^2 \theta / r^2$ sabit pozitif eğrilige sahip \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında bir Lorentz n -altmanifold olsun. Ayrıca, $\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0, \dots, \mathbf{v}_n^0$ eğrilik vektörlerinden oluşan p_0 noktasında bir ortonormal taban ve $\mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i^0$, $1 \leq i \leq n$ için $c_i \neq 0$ ile bir birim vektör olsun. O halde normal doğrultuları spacelike bir \mathbb{M}^* Lorentz n -altmanifold ve doğrultusu spacelike olan bir $l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ yarı-küresel doğru kongruansı vardır öyle ki $p_0^* = l(p_0)$ ise $\overrightarrow{p_0 p_0^*} = r\mathbf{v}_0$ ve θ , p_0 ve p_0^* noktalarındaki normal düzlemler arasındaki açıdır.

İspat: ρ ifadesi $2 \leq i, j \leq n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha_i &= w_i + rw_{1i} - r \cot \theta w_{1,n+i-1}, \\ \beta_{ij} &= w_{ij} - \cot \theta (w_{i,n+j-1} - w_{j,n+i-1}), \\ \gamma_{ij} &= w_{n+i-1,n+j-1} \end{aligned} \quad (6.88)$$

1-formlarıyla üretilen bir ideal olsun. $d\rho \subseteq \rho$ olduğu yani ρ idealinin kapalı diferan-

siyel ideal olduğu gösterilecektir. Buna göre

$$\begin{aligned}
d\alpha_i &= dw_i + rdw_i - r \coth \theta dw_{1,n+i-1} \\
&= w_1 \wedge w_i + \sum_{k=2}^n w_k \wedge w_{ki} + r \left(\sum_{k=2}^n w_{1k} \wedge w_{ki} \right) + r \left(\sum_{k=2}^n w_{1,n+k-1} \wedge w_{n+k-1,i} \right) \\
&\quad - r \cot \theta \sum_{k=2}^n w_{1k} \wedge w_{k,n+i-1} - r \coth \theta \sum_{k=2}^n w_{1,n+k-1} \wedge w_{n+k-1,n+i-1} \\
&\equiv -\frac{1}{r} w_1 \wedge w_i + \cot \theta w_1 \wedge w_{1,n+i-1} + \cot \theta \sum_{k=2}^n w_k \wedge w_{k,n+i-1} \\
&\quad - \cot \theta \sum_{k=2}^n w_k \wedge w_{i,n+k-1} + r \cot \theta \sum_{k=2}^n w_{1k} \wedge w_{k,n+i-1} - r \cot \theta \sum_{k=2}^n w_{1k} \wedge w_{i,n+k-1} \\
&\quad + r \left(\sum_{k=2}^n w_{1,n+k-1} \wedge w_{n+k-1,2} \right) - r \cot \theta \sum_{k=2}^n w_{1k} \wedge w_{k,n+i-1} \\
&\equiv -\frac{1}{r} w_1 \wedge w_i - \cot \theta \sum_{k=2}^n w_k \wedge w_{i,n+k-1} - r \cot \theta \sum_{k=2}^n w_{1k} \wedge w_{i,n+k-1} \\
&\quad + r \left(\sum_{k=2}^n w_{1,n+k-1} \wedge w_{n+k-1,2} \right) \\
&\equiv -\frac{1}{r} w_1 \wedge w_i + r \cot^2 \theta \Omega_{1i} + r \Omega_{1i} \pmod{\varrho}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca, M fokal yüzeyi $\sin^2 \theta / r^2$ pozitif kesitsel eğriliğe sahip olduğundan $\Omega_{1i} = \sin^2 \theta / r^2 w_1 \wedge w_i$ olur. Buradan $d\alpha_i \equiv 0 \pmod{\varrho}$; yani $d\alpha_i \in \varrho$ elde edilir. Şimdi $d\beta_{ij}$

$$\begin{aligned}
d\beta_{ij} &= w_{i1} \wedge w_{1j} + \sum_{k=2}^n w_{ik} \wedge w_{kj} + \Omega_{ij} - \cot \theta (w_{i1} \wedge w_{1,n+j-1}) - \cot \theta (w_{j1} \wedge w_{1,n+i-1}) \\
&\quad - \cot \theta \left(\sum_{k=2}^n w_{ik} \wedge w_{k,n+j-1} \right) + \cot \theta \left(\sum_{k=2}^n w_{jk} \wedge w_{k,n+i-1} \right) \\
&\equiv \Omega_{ij} + \frac{1}{r^2} w_i \wedge w_j + \cot^2 \theta \sum_{k=2}^n w_{i,n+k-1} \wedge w_{n+k-1,j} \\
&\equiv \frac{1}{\sin^2 \theta} \Omega_{ij} + \frac{1}{r^2} w_i \wedge w_j \pmod{\varrho}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Buradan $\Omega_{ij} = -\frac{\sin^2 \theta}{r^2} w_i \wedge w_j$ olduğundan $d\beta_{ij} \equiv 0 \pmod{\varrho}$; yani $d\beta_{ij} \in \varrho$ sonucuna varılır.

(6.16)'dan

$$d\gamma_{ij} = \Omega_{n+i-1,n+j-1}$$

yazılabilir. Hipotezden \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında sabit pozitif kesitsel eğrilikli Lorentz n -altmanifoldun normal demeti düzlemseldir; bu nedenle $\Omega_{n+i-1, n+j-1} = 0$, yani, $d\gamma_{ij} \in \rho$ elde edilir.

Frobenius teoremi kullanılırsa, M üzerinde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}$ yarı-ortonormal çatı alanı bulunmuş olur, burada \mathbf{e}_1 p_0 komşuluğunda $\mathbf{e}_1(p_0) = v_0$ olacak şekilde timelike vektör ve

$$w_i + rw_{1i} = r \cot \theta w_{1, n+i-1}, \quad (6.89)$$

$$w_{ij} = \cot \theta (w_{i, n+j-1} - w_{j, n+i-1}), \quad (6.90)$$

$$w_{n+i-1, n+j-1} = 0 \quad (6.91)$$

eşitlikleri vardır. $U \subset \mathbb{R}^n$ açık bir altküme olmak üzere \mathbb{M} altmanifoldunun p_0 komşuluğunda $\varphi : U \rightarrow \mathbb{E}_1^{2n-1}$ immersiyonu ile verilsin. $\varphi^* = \varphi + r\mathbf{e}_1$ tanımlansın öyle ki φ^* 'in \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayının bir \mathbb{M}^* Lorentz altmanifoldu tanımladığını ve $l(p_0) = p_0^*$ ile verilen $l : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^*$ fonksiyonunun bir yarı-küresel doğru kongruansı oluşturduğu görülmelidir.

φ^* fonksiyonunun diferensiyeli alınırsa

$$\begin{aligned} d\varphi^* &= d\varphi + r d\mathbf{e}_1 \\ &= w_1 \mathbf{e}_1 + \sum_{k=2}^n (w_1 + rw_{1k}) \mathbf{e}_k + \sum_{k=2}^n rw_{1, n+k-1} \mathbf{e}_{n+k-1} \end{aligned} \quad (6.92)$$

ve (6.89)'dan

$$d\varphi^* = w_1 \mathbf{e}_1 + \sum_{k=2}^n \frac{r}{\sin \theta} w_{1, n+k-1} (\cos \theta \mathbf{e}_k + \sin \theta \mathbf{e}_{n+k-1})$$

elde edilir.

Şimdi $w_1, w_{1, n+1}, \dots, w_{1, 2n-1}$ 1-formlarının lineer bağımsız olduğu gösterilecektir ki böylece φ^* 'in \mathbb{E}_1^{2n-1} uzayında \mathbb{M}^* Lorentz n -altmanifoldu tanımladığı bulunmuş olacaktır. Kabulden, $\mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{2n-1}$ çatı alanına göre p noktasının komşuluğunda \mathbb{M} için $u = (u_1, \dots, u_n)$ eğrilik çizgisi koordinatları seçilebilir ki böylece $\mathbf{v}_i^0 = \frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_{p_0}$ yazılır, burada a_i sayıları birinci temel formun katsayılarıdır. $\mathbf{v}_i = \frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial u_i}$ ve ϑ_i dual koçatısı, $\mathbf{v}_{n+j-1} = \mathbf{e}_{n+j-1}$ ve $1 \leq A, B \leq 2n-1$ için $\vartheta_{A, B} = \delta(\mathbf{v}_B) \langle d\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B \rangle$ olsun. O halde (6.20)'den

$$\vartheta_{i, n+j-1} = \delta(\mathbf{e}_i) b_i^{n+j-1} \vartheta_i \quad (6.93)$$

elde edilir. $\mathbf{e}_1 = \sum_{k=1}^n \delta(\mathbf{e}_k) \sqrt{K} f_k \mathbf{v}_k$ farzedilirse $f_k(p_0) = \frac{1}{\sqrt{K}} \delta(\mathbf{e}_k) c_k$ yazılabilir. Bu

nedenle

$$w_1 = \sum_{k=1}^n \delta(\mathbf{e}_k) \sqrt{K} f_k \vartheta_k, \quad (6.94)$$

$$w_{1,n+i-1} = \delta(\mathbf{e}_{n+i-1}) d\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_{n+i-1} = \sum_{k=1}^n \delta(\mathbf{e}_k) \sqrt{K} f_k b_k^{n+i-1} \vartheta_k \quad (6.95)$$

eşitlikleri bulunur.

$k = 1, \dots, n$ için $\mathbf{B}_k = \delta(\mathbf{e}_k) \sqrt{K} \mathbf{e}_1 + \sum_{i=2}^n b_k^{n+i-1} \mathbf{e}_{n+i-1}$ olsun. (6.21)'in ilk denklemi vasıtasıyla \mathbf{B}_i vektörlerinin karşılıklı ortogonal ve bu nedenle lineer bağımsız olduğunu gösterdiğinden $w_1, w_{1,n+1}, \dots, w_{1,2n-1}$ 1-formlarının lineer bağımsız olduğu sonucuna varılır.

(6.92) denklemi kullanılarak, $\mathbf{e}_1, \cos \theta \mathbf{e}_k + \sin \theta \mathbf{e}_{n+k-1}$ vektörlerinin \mathbb{M}^* altmanifolduna teğet vektörler olduğu sonucu bulunur. Bu nedenle, $-\sin \theta \mathbf{e}_k + \cos \theta \mathbf{e}_{n+k-1}$ vektörleri \mathbb{M}^* 'in normalleridir; yani, φ immersiyona göre \mathbb{M} 'nin ve φ^* immersiyonuna göre \mathbb{M}^* 'in normal düzlemleri arasındaki açılar aynı ve θ 'ya eşittir. Dahası, \mathbf{e}_1 \mathbb{M} ve \mathbb{M}^* Lorentz altmanifoldlarının ortak teğet vektörüdür ve \mathbb{M}^* normal vektörleri spacelike olan bir Lorentz n-altmanifolddur.

Son olarak, ortogonal izdüşümün normal konneksiyonları birbirine dönüştürdüğü yani $2 \leq i, j \leq n$ için $w_{n+i-1, n+j-1}^* = 0$ olduğu görülecektir. (6.50)'de hesaplandığı gibi

$$w_{n+i-1, n+j-1}^* = \delta(\mathbf{e}_j) \sin^2 \theta w_{ij} - \sin \theta \cos \theta (\delta(\mathbf{e}_{n+j-1}) w_{i, n+j-1} + \delta(\mathbf{e}_j) w_{n+i-1, j}) + \cos^2 \theta \delta(\mathbf{e}_{n+j-1}) w_{n+i-1, n+j-1}$$

elde edilir. (6.90) ve (6.91) eşitliklerinden $2 \leq i, j \leq n$ için $w_{n+i-1, n+j-1}^* = 0$ bulunur. \square

7. SONUÇ

Lorentz-Minkowski geometri, matematiksel fizikle birlikte diferensiyel geometrinin bir parçası olarak görülen matematik biliminin canlı bir alanıdır. Ayrıca fiziğin en güzel ve en başarılı teorilerinden biri olan genel görecelik ve sicim teorisinin matematiksel buluşlarını bize sunar. Görecelik teorisinde bu uzaydaki altmanifoldların diferensiyel geometrisinin çalışılması da özel bir ilgiye sahiptir. Bu tezde, Lorentz-Minkowski uzayında fokal eğri ve fokal yüzeyler üzerine kapsamlı bir çalışma yapılmış, özellikle fokal yüzeyler ile ilgili yeni ve ilginç sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak Minkowski $(m+1)$ -uzayında fokal eğri ve geometrik özellikleri verilmiştir. Özellikle Minkowski 3-uzayındaki lightlike olmayan bir regüler yüzey üzerindeki bir spacelike ya da timelike eğrinin fokal eğrisi (evolütü) tekillik teorisi vasıtasıyla tanıtılmış ve diferensiyel geometrisi yapılan çalışmalar çerçevesinde derlenerek araştırmacılara sunulmuştur. Daha sonra yine tekillik teorisi kullanılarak, Minkowski 3-uzayında üzerinde lightlike noktalar ile oluşturulan bir eğrinin bulunduğu karışık yüzeylerin fokal yüzeyleri uzaklık kare fonksiyonlar ailesinin çatallanma kümesi olarak (yani Kostik) verilmiş sağladığı önemli hipotez ve teoremler açıklanmıştır. Bununla birlikte, Minkowski 3-uzayında daha önce düşünülmemiş olan doğru kongruansları açısından fokal yüzeylere yaklaşılmış; parametrizasyonları açık şekilde ifade edilerek Gauss eğrilikleri hem spacelike ve hem timelike yüzey olması durumunda bulunmuştur. Ayrıca sırt ve alt-parabolik gibi önemli eğriler null olmayan yüzey üzerinde tanımlanmış ve fokal yüzeyler vasıtasıyla geometrisi incelenerek önemli yeni teoremler ifade edilmiştir. Son olarak Minkowski 3-uzayında yapılan Backlund teoremi ve tamamlanabilme teoremlerinin $2n-1$ boyutlu Lorentz uzayın n boyutlu Lorentz altmanifoldlarına genişletilmesi suretiyle bu teoremlerin yüksek boyutlu Lorentz uzaylarda farklı ve ilginç sonuçlar doğurduğu tespit edilmiştir.

8. KAYNAKLAR

- ABDEL-BAKY, R.A. 1999. On the Congruences of the Tangents to a Surface. *Anzeiger Abt. II*, 136: 9-18.
- ABDEL-BAKY, R.A. 2003. On Instantaneous Rectilinear Congruences. *Journal for Geometry and Graphics*, 7 (2): 129-135.
- ADAM, J.A. 2002. The mathematical physics of rainbows and glories. *Physics Reports*, 356: 229–365.
- ARNOLD, V.I., VARCHENKO, A. N. and GUSSEIN-ZADE, S. M. 1986. Singularities of Differentiable Maps, Vol. 1, Birkhäuser.
- BARBOSA, J.L., FERREIRA, W., and TENENBLAT, K. 1996. Submanifolds of Constant Sectional Curvature in Pseudo-Riemann Manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 14: 381-401.
- BRUCE, J.W. and GIBLIN, P. 1992. Curves and Singularities, 2nd ed. Cambridge University Press.
- BRUCE, J.W., GIBLIN, P.J. and TARI, F. 1999. Families of surfaces: Focal Sets, Ridges and Umbilics. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 125: 243-268.
- BRUCE, J.W. and TARI, F. 1996. Extrema of Principal Curvature and Symmetry. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 39: 397–402.
- BRUCE, J.W. and WILKINSON, T.C. 1991. Folding maps and focal sets. *Lecture Notes in Mathematics*, 1462: 63–72.
- CHEN, W., LI, H. and Ma, H. 2005. Isometric Immersions of Indefinite Space Forms in Indefinite Space Forms. *Advances in Mathematics*, 34 (5): 693-706.
- CHERN, S.S. and TERNG, C.L. 1980. An analogue of Bäcklund's Theorem in Affine Geometry. *Rocky Mt. J. Math.*, 10 (1): 105-124.
- EISENHART L.P. 1969. A Treatise in the Differential Geometry of Curves and Surfaces. *Ginn Camp*, New York.
- GOETZ, A. 1968. Introduction to Differential Geometry. *Addison-Wesley Publishing Company*, Canada, 350 p.
- GORDON, C.G. 1991. Face recognition from depth maps and surface curvature. *Proc.SPIE Conference on Geometric Methods in Computer Vision*, San-Diego CA.
- GOLUB, G.H. and VAN LOAN, C.F. 1996. Matrix Computations. 3rd edn. *Johns Hopkins University Press*, Baltimore, Maryland.
- GU, C., HU, H. and ZHOU, Z. 2005. Darboux Transformations in Integrable Systems Theory and Their Applications to Geometry. *Mathematical Physics Studies*, 26: 305.

- HACISALİHOĞLU, H. H., 1983. Diferensiyel Geometri. *İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları*, No 2.
- HAGEN, H., HAHMANN, S. and SCHREIBER, T. 1995. Visualization and Computation of Curvature Behaviour of Freeform Curves and Surfaces. *Computer-Aided Design*, 27 (7): 545-552.
- IZUMIYA, S., NABARRO, A.C. and SACRAMENTO, A.J. 2015. Pseudo-spherical normal Darboux images of curves on a timelike surface in three dimensional Lorentz–Minkowski space. *J. of Geometry and Physics*, 97: 105-118.
- IZUMIYA, S., PEI, D.H., SANO, T. and TORII, E. 2004a. Evolutes of Hyperbolic Plane Curves. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 20 (3): 543-550.
- IZUMIYA, S., PEI, D.H. and TAKAHASHI, M. 2004b. Singularities of Evolutes of Hypersurfaces in Hyperbolic Space. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 47: 131–153.
- IZUMIYA, S., TAKAHASHI, M. and TARI, F. 2010. Folding maps on spacelike and timelike surfaces and duality. *Osaka J. Math.*, 47: 839–862.
- IZUMIYA, S. and TARI, F. 2010. Self-adjoint operators on surfaces with singular metrics. *J. Dyn. Control Syst.*, 16: 329–353.
- KOKUBU, M., ROSSMAN, W., SAJI, K., UMEHARA, M. and YAMADA, K. 2005. Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space. *Pac. J. Math.*, 221: 303–351.
- MORRIS, M. 1996. The sub-parabolic lines of a surface. *The Mathematics of Surfaces, vol. VI (Uxbridge, 1994)*, Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Series, 58: 79–102.
- O'NEILL, B. 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. *Academic Press Inc.*, London.
- ÖZDEMİR, M. 2004. On the Focal Curvatures of Non-lightlike Curves in Minkowski $(m+1)$ -Space. *F. Ü. Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 16 (3): 401-409.
- ÖZDEMİR, M. and ERGİN, A.A. 2007. Spacelike darboux curves in Minkowski 3-space. *Differ. Geom. Dyn. Syst.*, 9: 131–137.
- PEI, D. 1999. Singularities of $\mathbb{R}P^2$ -valued Gauss maps of surfaces in Minkowski 3-space. *Hokkaido Mathematical Journal*, 28: 97-115.
- PORTEOUS, I.R. 1971. The normal singularities of a submanifold. *J. Diff. Geom.*, 5: 543–564.
- PORTEOUS, I.R. 2001. Geometric Differentiation for the Intelligence of Curves and Surfaces. *2nd edn. Cambridge University Press*, Cambridge.

- ROGERS, C. and SCHIEF, W.K. 2002. Bäcklund and Darboux Transformations, Geometry and Modern Applications in Soliton Theory. *Cambridge Univ. Press*, Cambridge, 424 p.
- SAJI, K., UMEHARA, M., YAMADA, K. 2009. The Geometry of Fronts. *Ann. Math.*, 169: 491–529.
- SATO, T. 2012. Pseudo-spherical Evolutes of Curves on a Spacelike surface in Three Dimensional Lorentz–Minkowski space. *J. Geom.*, 103: 319–331.
- ŞİMŞEK, H. and ÖZDEMİR, M. 2015. The Sub-Parabolic Lines in the Minkowski 3-Space. *Results. Math.*, 67: 417–430.
- ŞİMŞEK, H. and ÖZDEMİR, M. 2016. Bäcklund’s Theorem for n Dimensional Lorentzian Submanifold in the Minkowski Space \mathbb{E}_1^{2n-1} . *Results. Math.*, 69: 201–223.
- TARI, F. 2012. Caustics of Surfaces in the Minkowski 3-Space. *Q. J. Math.* 63 (1): 189–209.
- TARI, F. 2013. Umbilics of Surfaces in the Minkowski 3-space. *J. Math. Soc. Jpn.* 65 (3): 723–731.
- TENENBLAT, K. and TERNG, C.L. 1980. Bäcklund’s Theorem for n-dimensional Submanifold of \mathbb{R}^{2n-1} , *Annals of Mathematics*, Second Series, 111 (3): 477–490.
- THIRION, J.P. and GOURDON, A. 1993. The Marching Lines Algorithm, New results and proofs. *Rapports de Recherche*, 1881: INRIA, Sophia Antipolis, France.
- VARGAS, R.U. 2005. On Vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves. *Bull Braz Math Soc, New Series*, 36 (3): 285–307.
- YATES, R. C. 1952. A Handbook on Curves and Their Properties, J. W. Edwards, Ann Arbor.
- ZHONG, H.H. and LI, L. 2008. A kind of rectilinear congruences in the Minkowski 3-Space. *J. Math. Res. Expos.*, 28 (4), 911–918.

ÖZGEÇMİŞ



Hakan ŞİMŞEK 1987 yılında Ankara'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara'da, lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2004 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. 2008 yılı Eylül ayında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2010 yılı Haziran ayında da yüksek lisansını tamamladı. 2011 yılı Eylül ayında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı. Halen Akdeniz Üniversitesi'nde doktora eğitimi yapmaktadır.

