T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ-DİRAC PARÇACIK SİSTEMİNİN 2+1 UZAY-ZAMAN BOYUTUNDA KUANTUM ELEKTRODİNAMİĞİ

Abdullah GÜVENDİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ-DİRAC PARÇACIK SİSTEMİNİN 2+1 UZAY-ZAMAN BOYUTUNDA KUANTUM ELEKTRODİNAMİĞİ

Abdullah GÜVENDİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

2016

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ-DİRAC PARÇACIK SİSTEMİNİN 2+1 UZAY-ZAMAN BOYUTUNDA KUANTUM ELEKTRODİNAMİĞİ

Abdullah GÜVENDİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

Bu tez 07/01/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile kabul/red edilmiştir.

Doç. Dr. Yusuf SUCU

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Yrd. Doç. Dr. Muzaffer ERDOĞAN

ÖZET

İKİ-DİRAC PARÇACIK SİSTEMİNİN 2+1 UZAY-ZAMAN BOYUTUNDA KUANTUM ELEKTRODİNAMİĞİ

Abdullah GÜVENDİ

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Danışman : Doç. Dr. Yusuf SUCU
07.01.2016, 58 sayfa

Bu çalışmada, (2+1) uzay-zaman boyutunda, iki-dirac parçacığının relativistik kuantum mekaniksel davranışları incelenmiştir. Parçacıklar arasındaki etkileşim potansiyenin genel, merkezcil bir potansiyel olduğu durum için radyal diferansiyel denklem seti türetilmiştir. Bu denklemler, etkileşim potansiyelinin sıfır seçilerek, eşit kütleli iki parçacık durumu, yani pozitronyum (m_1=m_2) için ve kütlelerin birbirinden farklı olduğu durum için çözülerek spinör bileşenleri bulunmuştur. Coulomb etkileşimi altında, yine eşit kütle ve farklı kütleler için radyal diferansiyel denklem seti çözülmüş ve enerji spektrumu elde edilmiştir. Son olarak, relativistik iki-parçacık sistemi exponansiyel olarak genişleyen düz evren modelinde incelenmiş ve çözüm bulunmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Dirac denklemi, relativistik iki-cisim problemi, (2+1) boyutta kuantum elektrodinamiği.

JÜRİ: Doç. Dr. Yusuf SUCU (Danışman)

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Yrd. Doç. Dr. Muzaffer ERDOĞAN

ABSTRACT

THE QUANTUM ELECTRODYNAMICS OF TWO-DIRAC PARTICLES SYSTEM IN (2+1) DIMENSIONS

Abdullah GÜVENDİ

MSc Thesis, in Physics
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Yusuf SUCU
07.01.2016, 58 pages

In this work, in (2+1) space-time dimensions, relativistic quantum mechanical behavior of two-dirac particles system has been investigated. For general central interaction potentials between particles, set of radial differential equation has been obtained. These equations have been solved when interaction potentials between particles is zero, in the case of equal masses and in the case of different masses, and then components of spinor have been found. Under the Coulomb interaction, again for same masses and for different masses, set of radial differential equation has been solved and then energy spectrum has been obtained. Finally, relativistic two-body system in exponentially expanding flat universe model has been investigated and for this space-time metric, it's solution has been obtained.

KEYWORDS: Dirac equation, relativistic two-body problem,
quantum electrodynamics in (2+1) dimensions.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Yusuf SUCU (Supervisor)

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Asst. Prof. Dr. Muzaffer ERDOĞAN

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesinde ve çalışma süresince, bilgisini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Yusuf SUCU'ya , öneri ve yardımlarıyla tez çalışmama destek veren sayın Prof. Dr. Nuri ÜNAL, Dr. Ganim GEÇİM ve Semra GÜRTAŞ'a, tüm desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

İki-parçacık probleminin relativistik kuantum mekaniği kapsamı içerisinde ele alınması, Dirac denkleminin kabul görmesinin hemen sonrasında başlamıştır. Bu nedenle bu problem oldukça eski olmakla birlikte, içerdiği matematiksel ve fiziksel zorluklar nedeni ile günümüzde halen güncelliğini korumaktadır. Son zamanlarda, nano ölçekten kozmik ölçeğe kadar olan fiziksel etkileşmelerin 2+1 uzay-zaman zemininde yapılmış analizleri, tutarlılık ve matematiksel yapılarda basitlik sergilemektedir.

Bilindiği gibi, relativistik olmayan Klasik mekanikte iki-cisim problemi sadece birbirleriyle etkileşen iki noktasal parçacığın hareketini tanımlamak için kullanılır (Goldstein 1980, Thorthon ve Marion 2003). Bir gezegen ve yörüngesinde dolanan bir uydu, bir yıldız ve yörüngesindeki bir gezegen, birbirlerinin yörüngelerinde dolanan iki yıldız (çift yıldız) sistemi örnek verilebilir. İki parçacıktan oluşan bu tür sistemleri tanımlamak için altı serbestlik derecesi gereklidir. Çünkü herbir parçacığın konum vektörü üç değişken, yani üç serbestlik derecesine sahip olduğundan, sistem toplamda altı serbestlik dereceli bir sistemdir. Klasik mekanik kapsamında, etkileşme hızı sonsuz kabul edildiği için, zaman tek ve mutlaktır. Bu nedenle relativistik olmayan klasik mekanikte, zaman, bir serbestlik derecesi olarak alınmaz. Alternatif olarak, iki-cisim sistemi kütle merkezi vektörünün üç bileşeni ve göreli uzaklığın üç bileşeni seçilerek, serbestlik derecesinin altı olduğu görülebilir. En genel halde parçacıkların etkileşimini tanımlayan potansiyel, göreli uzaklığa, göreli hıza ve göreli uzaklığın daha üst mertebeden türevlerine bağlı olabilir. Klasik mekanik çerçevesinde bu tip bir problem incelenirken genelde sürtünme kaynaklı kayıpların olmadığı ve etkileşim potansiyelinin sadece göreli uzaklığın bir fonksiyonu olduğu durumlar ile sınırlandırma yapılır. Klasik mekanikteki tek-cisim problemlerinin büyük çoğunluğu tam olarak çözümlenebildiği için, iki-cisim problemi, eşdeğer bir-cisim problemine indirgenerek çözülür. Bir eylemsiz referans sisteminde, bir parçacığın hareketinin Newton denklemi ile doğru olarak tanımlandığı deneyle sabittir. Newton yöntemini kullanarak problem çözebilmek için, sistemdeki tüm kuvvetlerin bilinmesi gerekir. Bazı problemlerde, sistemlerin hareketlerine kısıtlama getiren bağ kuvvetlerini yazabilmek oldukça karışık hatta bazı durumlarda imkansız olabilir. Bu sebeple farklı teori yada teorilere ihtiyaç duyulmaktaydı. İhtiyaç duyulan sadelik, Hamilton ilkesinde bulunmuştur. Bu ilkenin uygulanmasıyla elde edilen hareket denklemleri, Lagrange hareket denklemleri olarak adlandırılmış ve newton denklemleriyle bulunan sonuçlar ile birebir uyum göstermişlerdir. Tüm bu şartları sağlamanın yanı sıra, Hamilton ilkesi, Newton denklemleriyle ilişkisi olmayan, daha geniş çapta fiziksel durumlara uygulanabilen, oldukça sağlam temelleri olan bir fiziksel ilkedir. Fizikte minimal prensipler uzun ve oldukça ilginç bir geçmişe sahiptir, doğanın bazı önemli nicelikleri, daima en aza indirgediği anlayışına dayanır. En az etki ilkesi hamilton ilkesinden elde edilebilir ve klasik mekanikten optiğe ve kuantum mekaniğine geçiş yapmak için kullanışlı bir yöntemdir. Hamilton ilkesi kısaca "Belirli bir zaman aralığında, dinamik bir sistemin bir noktadan diğer bir noktaya giderken izleyebileceği bütün yollar içinden, gerçekten izlenen, kinetik ve potansiyel enerjileri arasındaki farkın (Lagranjiyen) zaman integralini minimum yapan yoldur" der (Thorthon ve Marion 2003). Bir fiziksel sistemin lagranjiyeninin zaman integralini alarak eylem (action) yazılabilir ve fizikte oldukça geniş kullanım alanına sahiptir. Ayrıca bu formalizmin uygulanması teorik-fizikte birincil prensiptir, yani problemin bu formalizm kullanılarak çözülmesi ilk tercih olmalıdır.

Spinsiz ve göreli olmayan kuantum mekaniğinde iki-cisim problemi genellikle, en basit atom olması sebebi ile, hidrojen atomu üzerinden kurgulanır (Brandsten ve Joachain 2006). Hidrojen atomu, küçük düzeltme terimleri dışında, çekici coulomb potansiyeli aracılığı ile etkileşen iki-parçacıklı, göreli olmayan bir sistem olarak ele alınabilir. Başlangıç noktası bir elektronlu atomlar için yazılan Schrödinger denklemidir. Etkileşme potansiyeli, yalnızca iki parçacık arası göreli uzaklığın bir fonksiyonu olduğu durumda, kütle merkezinin hareketi ayrı olarak incelenebilir. Kütle merkezi referans sisteminde, kütle merkezinin momentumu sıfır olacağı için, kütle merkezinin hareketi ayrılabilir, bu durumda, kütle merkezinin hareketine eşlik eden toplam momentum ve bağıl momentum tanımı yapılarak, toplam enerji iki kısıma ayırılabilir. Bunlardan birincisi kütle merkezinim hareketine karşılık gelen kinetik enerji, diğeri ise indirgenmiş kütle terimini içeren, bağıl hareketin enerjisidir. Çözümün yapılacağı koordinat sisteminin seçiminde, belirleyici unsurların başında, sistemin sahip olduğu simetrilerin önemi büyüktür. Bu simetriler sistemin serbestlik derecesi sayısını azaltarak, daha kolay bir hesaplamaya izin verir. Kütle merkezinin hareketini ayırdıktan sonra, tek-cisim için yazılmış zamandan bağımsız Schrödinger denklemini kullanarak, küresel koordinatlarda, bağıl hareket için özdeğer denklemi çözülür, enerji düzeyleri ve kesikli spektrumun dalga fonksiyonları elde edilir. Bu sonuçlar kullanılarak, fiziksel nicelikleri temsil eden operatörler için beklenen değerler hesaplanabilir, virial teoreminin sağlandığı gösterilir.

İki-cisim probleminin tam-olarak çözümü relativistik klasik mekanik çerçevesinde bile mümkün değildir. Bu noktada parçacıkların spinleri hesaba dahil edilmek zorundadır ve bu sebeple iki-cisim probleminin karmaşıklığı giderek artar. Tek elektron için yazılan Dirac denklemine benzer olarak, iki Dirac parçacığı için "relativistik bir dalga denklemi kurmak" girişimleri, Eddington ve Gaunt tarafından (1929) yapılan çalışmalar ile başlar. Onlar etkileşme enerjisinde yer alan parçacık hızlarının yerine Dirac matrisleri koymuşlardır. Yine aynı yıl içinde, Breit yaptığı bir analiz ile (Breit 1929), Eddington ve Gaunt tarafından yazılmış denklemin sonuçlarının, kabul edilemez olduğunu göstermiştir.

Birbirleriyle etkileşen spinli parçacık çiftlerinin geleneksel olarak incelenişi, spine bağlı kuvvetler için daha uygun bir ifadenin önerildiği, Gregory Breit'in (1929) çalışması ile başlamıştır denilebilir. Spinsiz iki parçacık için yazılmış Darwin lagranjiyenindeki (Darwin 1920) etkileşme teriminin bir benzerine, serbest iki

Dirac Hamiltonyeni ekleyerek, Breit etkin bir Hamiltonyen elde etti. Bu etkileşme terimi ele alınırsa, parçacıkların hızları çok büyük iken yada parçacıklar arasındaki relatif uzaklık çok fazla olduğunda Breit'in denkleminin geçerli olmayacağı görülür. Sistemin relativistik olması sebebinden kaynaklanan gecikme etkisi, bu etkileşimleri temsil eden potansiyellerde hassasiyet ile hesaba katılmamıştır. Yani Breit'in denklemi, gerçeğe bir "zayıf çiftlenim" yaklaşıklığı ifade eder. Bethe ve Salpeter (1960), kuantum alan teorisinden başlayarak ulaştıkları bir denklem ile relativistik problemin bir formülasyonunu ifade ettiler (Bethe ve Salpeter 1960). Yazdıkları denklem $O(v^2/c^2)$ basamağında pertürbasyon açılımı yapılıp zayıf-çiftlenim limitine bakıldığında, Breit etkileşmesini doğrulamaktadır. Bethe-Salpeter formalizmi bağlı-durum problemlerine, alan teorisinin temel ilkelerine dayanarak elde edilen bir yaklaşımı ifade ediyor ve kuantum elektrodinamiği kapsamında yapılan deneylerle iyi uyuşan sonuçlar veriyordu. Fakat relativistik bir serbestlik derecesi olan relatif zamandan kaynaklanan negatif büyüklüğe sahip çözümler sebebiyle bu denklem bağlı-durum denklemi olarak kabul edilemedi (Yılmazer 1987). Yani, o dönem için, başlangıçta, 3-boyutta tam çözülebilir, yaklaşık bir denkleme ihtiyaç vardı ve bu denklemin, relativistik kinematiği içermesi gerekiyordu. BS denklemi için bazı yaklaşıklık fikirleri literatürde mevcuttur. Bu öneriler içerisinde bizim için dikkat çekici olanlar Salpeter (1952) tarafından gösterilen, pozitronyum için geniş ölçüde kullanılan "ani etkileşme yaklaşıklığı" ve momentum uzayında yazıldığında Schrödinger ve Klein-Gordon (KG) denklemine benzerlik taşıyan denklemler veren kuasipotansiyel yaklaşıklığıdır (Todorov 1971). Daha sonraki zamanlarda, tez kapsamında sık sık yer verilen, ikinci parçacığın davranışının da hesaba katıldığı Dirac-Coulomb türü bir denklem yazıldı (Barut ve Komy 1985).

Relativistik bağlı-durum denklemleri konusunda diğer bir yaklaşımda Dirac' ın kısıtlanmış mekaniği ile relativistik kuantum mekaniğinin birlikte kullanılmasıdır (Crater ve Wong 2007, Kalb ve Alstein 1976). Dirac parçacıklarının iki-cisim bağlı durum problemi için yapılmış olan çalışmalar arasında, tek zamanlı relativistik bir dalga denklemi olan KFY denkleminin altı çizilmelidir (Fermi ve Yang 1949, Kemmer 1937). Bu denklem çok eski bir denklemdir ve etkileşme potansiyeli fenomenolojik olarak yazılmıştır (Yılmazer 1987). Barut ve arkadaşları (1985-86), yıllarında KFY denklemine oldukça benzeyen bir denklemi, kuantum elektrodinamiğinden, eksiksiz olarak türetilebileceğini ve iki parçacık arasındaki en genel elektrik ve manyetik potansiyelleri içerdiğini göstermişlerdir (Barut ve Komy 1985, Barut ve Ünal 1985). Relativistik iki-fermiyon probleminin tek-zamanlı formülasyonu için farklı önerilerde literatür kapsamında bulunmaktadır. Relativistik iki-cisim problemi kapsamında yapılan ve konumuza nispeten daha yakın olduğunu düşündüğümüz diğer çalışmalardan çok kısaca bahsedelim.

Bu çalışmalar kapsamında, İki Dirac parçacığının bağlı durumlarını (Koide 1968), yarı relativistik kuark modeli için iki-cisim dirac denklemini (Bethe ve Salpeter 1960), iki-cisim dirac denkleminin parapozitronyum gibi çözümlerini (Alstein ve Crater 1986), mezon spektroskopisini (Crater ve Alstein 2000), relativistik kısıtlanmış dinamiğin QED, QCC ve N-N saçılma problemlerine uygulanmasını (Crater vd 2003) ve kısıtlanmış dinamiği kullanmanın avantajlarının sergilendiği bir çalışma yapılmıştır (Lienert 2015). Tüm bu çalışmalar ışığında, relativistik iki cisim problemindeki iki-zaman karmaşası, ani etkileşme yada quasipotansiyel yaklaşıklıkları ile tek-zamanlı duruma indirgenebileceği yada söz konusu problemin direk olarak tek-zamanlı sistem olarak alınıp incelenebileceği fikri, literatürde hakimiyet kazanmıştır. Bu problemde matematiksel karmaşa ve zorluğa bir zaman değişkeni daha eklenmesi matematiksel analizi oldukça ağırlaştırmaktadır. Probleme ilişkin yapılan çalışmalar arasından Barut ve arkadaşlarının, lagranjiyen formalizmi kullanarak yaptıkları çalışmalar bizim için oldukça önemlidir (Barut ve Komy 1985, Barut ve Ünal 1985, 1986a,b, Barut 1987). Bu çalışmalarda relativistik iki-cisim problemi için, fenomenolojik yapıya uygun olan ve çok bilgece yazılmış bir denklem ve bu denklemin 3+1 uzay-zaman boyutunda analizleri ele alınmıştır. Bu çalışmaların, makul veriler ve sebeplerden dolayı, (2+1) uzay-zaman zemininde incelenmesi, bu tez çalışmasının büyük bir kısmını oluşturmuştur. Son zamanlarda relativistik iki-cisim problemi kapsamında Dirac'ın kısıtlı dinamiği kullanılarak yapılan çalışmalar bazı kolaylıklar sergilemiş olsada, (3+1) boyutta bu tür problemlerin üstesinden gelmek, denklem sayısının oldukça fazla olması sebebiyle, ağır bir iştir.

(3+1) uzay-zaman boyutunda eksenel simetriye sahip bazı potansiyeller ile veya bu potansiyeller vasıtasıyla etkileşen relativistik Dirac parçacıklarının yanı sıra, günümüzde yoğun olarak çalışılan nano malzemelerde (grafen v.b), sistemlerin geometrik özellikleri sebebiyle, parçacıkların dinamiğini anlamak için, sistemlerin 2+1 boyutta incelenmesi, kısmen matematiksel sadelikten dolayı mantıklı görülmektedir. Kaldı ki, 2+1 uzay-zaman boyutunda, kütle çekim kuramı kapsamında yapılan çalışmalar (Carlip ve Nelson 1995, Deser vd 1984, Gürtaş 2013, Menculini vd 2013, Oleg vd 2013, Witten 1988), (3+1) boyuttaki benzerinin neredeyse tüm fiziksel ve matematiksel özelliklerini ve sonuçlarını içermektedir. Ayrıca bazı problemler doğaları gereği 2+1 boyutludur ve 2+1 uzay-zaman zemininde incelenmelidir. Bu bağlamda sabit manyetik alanda yüklü parçacık (Deser vd 1984), Coulomb alanındaki Dirac parçacığı (Deser vd 1984), Hall olayı (Gürtaş 2013) gibi fiziksel önem taşıyan sistemlerin kuantum elektrodinamiği, (2+1) boyutta, Dirac denklemi kullanılarak incelenmiştir. Ayrıca son zamanlarda, (2+1) boyutta relativistik iki Dirac parçacığı problemi, tek katmanlı yapı olan Grafende, süper iletkenlik sebebiyle kütlesiz parçacıklar için tartışılmıştır (Sabio vd 2010). Tüm bu literatüre baktığımızda, eksiklikleri giderilmeye çalışılan bu konu üzerine araştırma yapmak, yeni sonuçlar bulmak veya eski sonuçlardan bazıları ile tutarlı sonuçlar bulunarak karmaşanın azalmasına yardımcı olabilmek amacı ile iki-cisim kuantumelektrodinamiği adı verilen tez konumuzu belirledik. Barut ve arkadaşları tarafından yazılan ve 3+1 uzay-zaman boyutunda analizi yapılan bu denklem referans alınarak ve geometri kaynaklı, matematiksel sadelik olacağı fikri ile, relativistik olarak etkileşen iki-cisim problemi, 3+1 uzay-zaman boyutunda eksenel simetriye sahip Coulomb potansiyeli için, problemin 2+1 uzay-zaman zemininde analizi ve bazı özel durumları yanısıra exponansiyel olarak genişleyen düz evren modelinde de iki-cisim problemi analiz edilecektir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Klasik ve Kuantum Mekaniğinde İki-Cisim Sistemleri

2.1.1. Klasik mekanikte iki-cismin merkezcil kuvvet problemi

Kütleleri m_1 ve m_2 olan ve yalnızca bir etkileşme potansiyelinden (V) türetilebilen kuvvetlerin söz konusu olduğu iki-parçacık sistemini ele alalım. Etkileşim potansiyeli, parçacıklar arası relatif $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}$ vektörünün ve bu vektörün türevlerinin bir fonksiyonu olsun. Bu tip bir sistem için Lagranjiyen şu şekilde olur:

$$L = T(\dot{\overrightarrow{R}}, \dot{\overrightarrow{r}}) - V(\overrightarrow{r}, \dot{\overrightarrow{r}}, ..). \tag{2.1}$$

Sırasıyla m_1 ve m_2 kütlelerinin orijine göre konum vektörleri $\overrightarrow{r_1}$ ve $\overrightarrow{r_2}$, kütle merkezine göre konum vektörleri ise $\overrightarrow{\acute{r}_1}$ ve $\overrightarrow{\acute{r}_2}$ şeklindedir. Buna göre,

$$m_1\acute{r}_1 + m_2\acute{r}_2 = 0,$$

$$r = \acute{r}_2 - \acute{r}_1,$$
$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2},$$

bağıntıları yazılabilir. Kütle merkezinin orjine göre konum vektörü $\overrightarrow{R}$ olmak üzere, toplam kinetik enerji (T), kütle merkezinin kinetik enerjisi ile kütle merkezi etrafındaki hareketin kinetik enerjisi olan T''nün toplamıdır.

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\overrightarrow{R}}^2 + T', \tag{2.2}$$

$$T' = \frac{1}{2}m_1\dot{\overrightarrow{\acute{r}_1}}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\overrightarrow{\acute{r}_2}}^2, \tag{2.3}$$

$$\overrightarrow{\acute{r}_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r} \quad , \quad \overrightarrow{\acute{r}_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r}. \tag{2.4}$$

Yukarıda verilen ifadelerde, Denklem (2.4), Denklem (2.3)'te yerine yazılarak,

$$T' = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\overrightarrow{r}}^2, \tag{2.5}$$

bağıntısı bulnur. Kütle merkezi etrafındaki hareketten kaynaklanan kinetik enerji terimi, parçacıklar arası bağıl hız cinsinden ifade edilebilir. Denklem (2.5) ve (2.2) kullanılarak, toplam Lagranjiyen aşağıdaki şekilde bulunur.

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\overrightarrow{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\overrightarrow{r}}^2 - V(\overrightarrow{r}, \dot{\overrightarrow{r}}, ..).$$

Lagranjiyene bakıldığında kütle merkezi koordinatları açıkça görünmez, fakat Lagranjiyen kütle merkezi koordinatlarının türevlerini içerir. Yani bu koordinatlar çevrimsel koordinatlardır ve kütle merkezinin hareketi için durgundur yada düzgün hareket eder diyebiliriz. Bu terim Lagranjiyenden çıkarılabilir. Sonrasında, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, indirgenmiş kütle tanımı yapılarak, iki-parçacık problemi, eşdeğer tek-parçacık problemine indirgenebilir. Bu durumda sistemin Hamiltonyeni şu şekildedir:

$$H = \frac{\overrightarrow{P_{cm}}^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{\overrightarrow{p}^2(m_1+m_2)}{2m_1m_2} + V(\overrightarrow{r}, \dot{\overrightarrow{r}}, ..) = H_{cm} + H_r.$$

Burada momentum terimleri aşağıdaki gibidir.

$$\overrightarrow{P_{cm}} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} \quad , \quad \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_1}\frac{m_2}{m_1+m_2} - \overrightarrow{p_2}\frac{m_1}{m_1+m_2}$$

dir (Goldstein 1980, Thorthon ve Marion 2003).

2.1.2. Göreli olmayan kuantum mekaniğinde iki-cisim sistemleri

Coulomb potansiyeli aracılığı ile etkileşen, iki-parçacığın, kuantum mekaniksel analizi, klasik teori ile oldukça benzerdir. Kütleleri m_1 ve m_2 olan iki-parçacık için Schrödeinger denklemi;

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, t) = [-\frac{\hbar^2}{2m_1}\overrightarrow{\nabla}_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\overrightarrow{\nabla}_2^2 + V(\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, t)]\Psi(\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, t) \quad (2.6)$$

şeklindedir. Eğer etkileşimi temsil eden, potansiyel enerji yalnızca relatif koordinatlara, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}$, bağlı ise, denklem (2.6) şu formda yazılabilir:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = [-\frac{\hbar^2}{2M}\overrightarrow{\nabla}_R^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\overrightarrow{\nabla}_r^2 + V(\overrightarrow{r})]\Psi. \quad (2.7)$$

Burada $M = m_1 + m_2$ sistemin toplam kütlesini, $\overrightarrow{R}$ kütle merkezinin koordinatını, $\overrightarrow{\nabla}_R^2$ ve $\overrightarrow{\nabla}_r^2$ ise sırasıyla kütle merkezi ve relatif koordinatlara göre uzaysal türevleri göstermektedir.

$$\Psi(\overrightarrow{R}, \overrightarrow{r}, t) := U(\overrightarrow{R})\ U(\overrightarrow{r})\ e^{-i(E+E')t/\hbar}. \quad (2.8)$$

Denklem (2.8)'de yapılan tanımlama denklem (2.7) de yerine yazılarak, bu denklem kolaylıkla değişkenlerine ayrılabilir.

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\overrightarrow{\nabla}_r^2 U + VU = EU, \quad (2.9)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\overrightarrow{\nabla}_R^2 U = E'U. \quad (2.10)$$

Denklem (2.9); bir V dış potansiyelindeki iki parçacığın göreli hareketini temsil eden, indirgenmiş kütleli tek parçacığın hareketini verir. Denklem (2.10) ise iki parçacıktan oluşan sistemin kütle merkezinin M kütleli serbest bir parçacık gibi hareket ettiğini söyler. Burada önem arz eden, denklem (2.9)'dan bulunan enerji spektrumudur (Brandsten ve Joachain 2006).

2.1.3. Relativistik kuantum mekaniğinde iki-cisim problemi için Barut modeli

Yaygın olarak relativistik teoride kullanılan metodun, Bethe-Salpeter tipi iki-zamanlı denklemler ve yaklaşık potansiyellerin elde edilmesiyle başladığını fakat bu metodun esasen pertürbatif bir yöntem olduğunu ve gerçek sonuçlarla iyi bir uyum göstermediğini düşünerek işe başlamışlardır. Bu yöntemin haricinde, birçok hesaplamada, her parçacık için serbest parçacık Hamiltonyenine, bir etkileşme potansiyeli eklenerek toplam Hamiltonyen kurulmuştur:

$$H = \sum_{i} \left(\overrightarrow{\alpha}_i \overrightarrow{p}_i + \beta_i m_i \right) + \sum_{i \prec j} V_{ij}. \tag{2.11}$$

Potansiyelin nasıl seçileceği esas problemdir. Genelde fenomenolojik olarak seçilir yada foton ve bir-bozon değişimi potansiyelleri kullanılır. Bu durumda genel algı teorinin bir yaklaşıma dayanmasıdır. A_μ elektromanyetik alanı ile etkileşen farklı iki-fermiyonik alan için eylem fonksiyonu yazılmıştır. Bu eylem fonksiyon şu şekildedir:

$$\begin{aligned} A = &\int dx \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{j} \left\{ \bar{\psi}_j (x) \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_j \right) \psi_j (x) \right\} \right] \\ &- \int dx \sum_{j} \left\{ e_j \bar{\psi}_j (x) \gamma^\mu \psi_j (x) A_\mu (x) + a_j \bar{\psi}_j (x) \sigma_{\mu\nu} \psi_j (x) F^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Burada, sırasıyla, e_i ve a_j fermiyonların elektrik yükü ve anormal manyetik momenti, $\sigma_{\mu\nu}$ spin operatörü olup,

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu \right)$$

ile temsil edilir ve $F_{\mu\nu}$ elektromagnetik alan tensörüdür. Denklem (2.12)'den elde edilen hareket denklemleri şu şekildedir.

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = J_\mu = -\sum_{j} \left[e_j \bar{\psi}_j \gamma_\mu \psi_j + 2a_j \left(\bar{\psi}_j \sigma_{\mu\nu} \psi_j \right)^{,\nu} \right], \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{2.13}$$

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_j \right) \psi_j - e_j \gamma^\mu A_\mu \psi_j - a_j \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi_j = 0. \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{2.14}$$

Dalga operatörü Green fonksiyonu kullanıldığı için kovaryant ayar tercihi yapılmıştır;

$$A^\mu_{,\mu} = 0. \tag{2.15}$$

Bu seçimle

$$\Box A_\mu = J_\mu = \sum_j \left[e_j \bar{\psi}_j \gamma_\mu \psi_j + 2a_j \left(\bar{\psi}_j \sigma_{\mu\nu} \psi_j \right)^{,\nu} \right] \tag{2.16}$$

olur. Denklem (2.16)'nün genel çözümü şu şekildedir.

$$A_\mu(x) = \int dy D(x-y) \sum_j \left[e_j \bar{\psi}_j(y) \gamma_\mu \psi_j(y) + 2a_j \left(\bar{\psi}_j(y) \sigma_{\mu\nu} \psi_j(y) \right)^{,\lambda} \right] + A_\mu^{in}(x) \tag{2.17}$$

Buradaki ikinci terimde kısmi integrasyon yapılır ve lokalize akım dağılımları için yüzey terimleri sonsuzda sıfırlanır.

$$\begin{aligned} A_\mu(x) = {} & A_\mu^{in}(x) + \sum_j e_j \int dy D(x-y) \bar{\psi}_j(y) \gamma_\mu \psi_j(y) \\ & - 2\sum_j a_j \int dy d^\lambda D(x-y) \bar{\psi}_j(y) \sigma_{\lambda\mu} \psi_j(y) . \end{aligned} \tag{2.18}$$

A_μ'yü komple elemek için bu çözüm eylem fonksiyonunda yerine yazılır. Alanın Lagranjiyeni şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} A_F &= -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dx = \frac{1}{2} \int dx F^{\mu\nu} A_{\mu,\nu} \\ &= \frac{1}{2} \int dx \left[F^{\mu\nu} A_\mu \right]_{,\nu} - \frac{1}{2} \int dx F^{\mu\nu}_{,\nu} A_\mu . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Dolayısıyla,

$$A_F = \frac{1}{2} \int dx J^\mu(x) A_\mu(x) \tag{2.20}$$

olur, çünkü yüzey terimi sonsuzda yine kaybolur. Böylece, toplam eylem fonksiyonu şu hale gelir:

$$\begin{aligned} A = {} & \int dx \sum_j \left\{ \bar{\psi}_j \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_j \right) \psi_j - \frac{1}{2} e_j \bar{\psi}_j \gamma^\mu \psi_j A_\mu \right\} \\ & + \int dx \sum_j \left\{ a_j \left(\bar{\psi}_j \sigma^{\mu\nu} \psi_j \right)_{,\nu} A_\mu - a_j \bar{\psi}_j \sigma^{\mu\nu} \psi_j F_{\mu\nu} \right\} \end{aligned}$$

olur. Son terim $-2a_j \bar{\psi}_j \sigma^{\mu\nu} \psi_j A_{\mu,\nu}$ yada kısmi integrasyon ile $-2a_j \left(\bar{\psi}_j \sigma^{\mu\nu} \psi_j \right)_{,\nu} A_\mu$ şeklinde yazılabilir. Yapılan bu işlemler ile eylem fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$A = \int dx \sum_j \left\{ \bar{\psi}_j \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_j \right) \psi_j - \left\{ \frac{1}{2} e_j \bar{\psi}_j \gamma^\mu \psi_j + a_j \left(\bar{\psi}_j \sigma^{\mu\nu} \psi_j \right)_{,\nu} \right\} A_\mu \right\} ,$$

(2.21)

A_μ için bulunan (2.18) çözümü, denklem (2.21) ye yerleştirilir.

$$
\begin{aligned}
A = &\int dx \sum_j \bar{\psi}_j \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_j\right) \psi_j \\
&- \int dx \sum_j \left\{ \frac{1}{2} e_j \bar{\psi}_j \gamma^\mu \psi_j + a_j \left(\bar{\psi}_j \sigma^{\mu\nu} \psi_j \right)_{,\nu} \right\} A_\mu^{in}(x) \\
&+ \int dx \sum_j \left\{ \frac{1}{2} e_j \bar{\psi}_j \gamma^\mu \psi_j + a_j \left(\bar{\psi}_j \sigma^{\mu\nu} \psi_j \right)_{,\nu} \right\} B \\
&- \int dx \sum_j \left\{ \frac{1}{2} e_j \bar{\psi}_j \gamma^\mu \psi_j + a_j \left(\bar{\psi}_j \sigma^{\mu\nu} \psi_j \right)_{,\nu} \right\} K. \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Burada

$$B = \sum_k e_k \int dy D(x-y) \bar{\psi}_k(y) \gamma_\mu \psi_k(y),$$

ve

$$K = \left\{ 2 \sum_k a_k \int dy d^\lambda D(x-y) \bar{\psi}_k(y) \sigma_{\lambda\mu} \psi_k(y) \right\}$$

kısaltmaları kullanılmıştır (Barut ve Komy 1985).

Burada karşılıklı etkileşim ile ilgilendiğimiz için sadece $j \neq k$ durumuna bakarız. İki parçacığın etkileşimi için gecikmiş Green fonksiyonu $D^{ret}(x-y)$ kullanırız. Denklem (2.22) denkleminde $e_1 e_2$ ve $e_2 e_1$ katsayıları ile iki terim karşımıza çıkar. İkinci terimde x ve y yi değiştirilir, $D^{adv}(x-y) = D^{ret}(y-x)$ ve $\overline{D} = \frac{1}{2}\left(D^{ret} + D^{adv}\right)$ eşitlikleri kullanılarak etkileşim terimi şu şekilde yazılabilir:

$$-\sum_{j \prec k} e_j e_k \int dx dy \bar{\psi}_j(x) \gamma^\mu \psi_j(x) \overline{D}(x-y) \bar{\psi}_k(y) \gamma_\mu \psi_k(y). \qquad (2.23)$$

Benzer şekilde diğer etkileşim terimlerinde de $\partial^\lambda D^{ret}(x-y) = -\partial^\lambda D^{adv}(y-x)$ eşitliği kullanılarak, farklı terimler birleştirilebilir. Özellikle, iki-cisim problemi için, spin cebrini iki Dirac cebrinin direk çarpımı gibi düşüneceğiz.

2.1.3.1. Zaman türevi terimlerinin evrimi

ea ve aa etkileşim terimlerinde $\partial^{\lambda} D(x-y)$ ve $\partial_{\nu}\partial^{\lambda} D(x-y)$ türevleri oluşur. Elimizde şu bağıntılar var:

$$D^{ret}(x-y) = \frac{1}{4\pi r}\delta\left(x^0 - y^0 - r\right),$$

$$D^{adv}(x-y) = \frac{1}{4\pi r}\delta\left(x^0 - y^0 + r\right),$$

$$r = |\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|,$$

$$\partial_m\left(4\pi D^{ret}(x-y)\right) = -\frac{r_m}{r^3}\delta\left(x^0 - y^0 - r\right) - \frac{r_m}{r^2}\delta'\left(x^0 - y^0 - r\right),$$

$$\begin{aligned}4\pi\partial_m\partial_n D^{ret}(x-y) = & \left[\frac{3r_m r_n - r^2\delta_{mn}}{r^5} - \frac{4\pi}{3}\delta_{mn}\delta\left(\overrightarrow{r}\right)\right]\delta\left(x^0 - y^0 - r\right) \\ & + \frac{3r_m r_n - r^2\delta_{mn}}{r^4}\delta'\left(x^0 - y^0 - r\right) \\ & + \frac{r_m r_n}{r^3}\delta''\left(x^0 - y^0 - r\right).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Böylece D-fonksiyonunun tüm türevleri δ ,δ' ve δ'' terimlerine indirgenebilir (Barut ve Komy 1985).

2.1.3.2. Kompozit yada bilokal alanlar

Eylem fonksiyonunun bireysel ψ_i alanlarına göre varyasyonları Hartree tipinde, çiftlenimli lineer olmayan integrodiferansiyel denklem seti verir. Bunun yerine kompozit objelere göre farklı eylem fonksiyonu ve kompozit alanlar tanımlarız (Barut ve Komy 1985).

$$\phi(x,y) = \psi_1(x) \otimes \psi_2(y).$$

Burada ϕ 16-bileşenli spinör olan, bilokal alandır. Basitlik için iki parçacık düşünelim. Etkileşim terimleri zaten kompozit alanları içerir. Eylem fonksiyonundaki serbest kısım sadece bir alan içeren tüm terimlerin toplamıdır. Bir parçacık için normalizasyon integrali, diğer parçacık kısmına yerleştirilerek kompozit alan cinsinden yazılabilir.

$$\begin{aligned}& \int dx\overrightarrow{dy}\overline{\psi_1}(x)\left(\overset{(1)}{\gamma}{}^{\mu} i\partial_\mu - m_1\right)\psi_1(x)\overline{\psi_2}(y)\overset{(2)}{\gamma}{}^{0}\psi_2(y) \\ + & \int dy\overrightarrow{dy}\overline{\psi_2}(y)\left(\overset{(2)}{\gamma}{}^{\mu} i\partial_\mu - m_2\right)\psi_2(y)\overline{\psi_1}(x)\overset{(1)}{\gamma}{}^{0}\psi_1(x).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Burada 4-boyutlu ve 3-boyutlu integraller iç içedir. Şimdi etkileşim terimlerine bakalım.

$$-e_1 e_2\int dxdy\overline{\phi}(x,y)\overset{(1)}{\gamma^{\mu}}\overline{D}\left(x-y\right)\overset{(2)}{\gamma_{\mu}}$$

bağıntısı yardımıyla,

$$-\frac{e_1e_2}{4\pi}\int dxdy\overline{\phi}(x,y)\overset{(1)}{\gamma^{\mu}}\otimes\overset{(2)}{\gamma_{\mu}}\phi(x,y)\left[\frac{1}{2}\frac{\delta\left(x^0-y^0-r\right)}{r}+\frac{1}{2}\frac{\delta\left(x^0-y^0+r\right)}{r}\right]$$

bulunur. Diğer etkileşim terimleride benzer şekilde ifade edilerek, δ ,δ' ve δ'' ifadeleri toparlanır. δ' ve δ'' terimleri için x_0'a göre kısmi integrasyon yapılır, $\overline{\phi}$ ve ϕ'nin türevleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
W_1 = &-\frac{e_1a_2}{8\pi}\left(i\frac{\gamma_m\otimes\alpha_m}{r}+i\gamma^0\otimes\frac{\overrightarrow{r}.\overrightarrow{\alpha}}{r^2}+\gamma_n\otimes\frac{r_m\sigma_s\varepsilon^{mns}}{r^2}\right)\\
&+\frac{a_1e_2}{8\pi}\left(i\frac{\alpha_m\otimes\gamma_m}{r}+i\frac{\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{r}}{r^2}\otimes\gamma^0+\frac{r_m\sigma_s\otimes\gamma_n\varepsilon^{mns}}{r^3}\right)\\
&+\frac{a_1a_2}{4\pi}\left(\sigma_m\otimes\sigma_n\frac{3r_mr_n-r^2\delta_{mn}}{r^4}-\alpha_m\otimes\alpha_n\frac{3r_mr_n-r^2\delta_{mn}}{r^4}\right)\\
&-\frac{a_1e_2}{8\pi}\left(i\alpha_m\otimes\sigma_s\frac{r_n\varepsilon^{nms}}{r^3}+i\sigma_s\otimes\alpha_m\frac{r_n\varepsilon^{nms}}{r^3}\right),
\end{aligned}\tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
W_2 = &\frac{a_1a_2}{8\pi}\left(\alpha_m\otimes\alpha_n\frac{r_mr_n-r^2\delta_{mn}}{r^3}-\sigma_m\otimes\sigma_n\frac{r_mr_n-r^2\delta_{mn}}{r^3}\right)\\
&+\frac{a_1a_2}{8\pi}\left(i\alpha_m\otimes\sigma_s\frac{r_n\varepsilon^{nms}}{r^2}+i\sigma_s\otimes\alpha_m\frac{r_n\varepsilon^{nms}}{r^2}\right)
\end{aligned}\tag{2.27}$$

olmak şartıyla,

$$\begin{aligned}
&\int dxdy\partial_0\left[\overline{\phi}(x,y)W_1\delta\left(x^0-y^0-r\right)\phi(x,y)\right]\\
&+\int dxdy\partial_0^2\left[\overline{\phi}(x,y)W_2\delta\left(x^0-y^0-r\right)\phi(x,y)\right]
\end{aligned}$$

olur. $\delta\left(x^0-y^0+r\right)$ içinde aynı şekilde gelir. Eylem fonksiyonuna katkı sadece ilerlemiş ve gecikmiş noktalardan geldiği için, eylem fonksiyonunun serbest kısmını $\delta-$ fonksiyonları ile, ϕ alanları cinsinden yazarız.

$$\begin{aligned}
&\int dxdy\left[\frac{1}{2}\delta\left(x^0-y^0-r\right)+\frac{1}{2}\delta\left(x^0-y^0+r\right)\right]\overline{\phi}(x,y)\left[\overset{(1)}{\gamma}{}^{\mu}i\partial_{\mu}^{(x)}-m_1\right]\otimes\overset{(2)}{\gamma}{}^{0}\phi(x,y)\\
+&\int dxdy\left[\frac{1}{2}\delta\left(x^0-y^0-r\right)+\frac{1}{2}\delta\left(x^0-y^0+r\right)\right]\overline{\phi}(x,y)\overset{(1)}{\gamma}{}^{0}\otimes\left[\overset{(2)}{\gamma}{}^{\mu}i\partial_{\mu}^{(y)}-m_2\right]\phi(x,y).
\end{aligned}$$

$\partial_{\mu}^{(x)}$ ve $\partial_{\mu}^{(y)}$,$\phi(x,y)$ nin x ve y bileşenleri üzerine türevlerdir ve δ fonksiyonları ile çarpılmadan önce alınır.

Eylem fonksiyonunun kompozit alanlara göre varyasyonundan, $\phi(x,y)$ için hareket denklemi;

$$[(\overset{(1)}{\gamma^{\mu}}i\overset{(1)}{\partial_{\mu}}-m_1)\otimes\overset{(2)}{\gamma^0}+\overset{(1)}{\gamma^0}\otimes(\overset{(2)}{\gamma^{\mu}}i\overset{(2)}{\partial_{\mu}}-m_2)+V]\Phi(x,y)=0.\tag{2.28}$$

$x^0{=}y^0 \pm |\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|$, burada toplam potansiyel şu şekildedir (Barut ve Komy 1985):

$$V = -\frac{e_1 e_2}{4\pi r}\gamma_\mu \otimes \gamma^\mu + 2\frac{a_1 e_2}{4\pi}\left(i\alpha_m \frac{r_m}{r^3} \otimes \gamma^0 \frac{r_m}{r^3} \otimes \gamma_n \varepsilon^{mns}\right)$$
$$- 2\frac{e_1 a_2}{4\pi}\left[i\gamma^0 \otimes \frac{\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{r}}{r^3} + \gamma_n \otimes \sigma_s \frac{r_m \varepsilon^{mns}}{r^3}\right].$$

2.1.3.3. İki cisim için Lagranjiyen ifadesi

Denklem (2.28)'deki dalga denklemini kovaryant formda yazacağız. r mesafesindeki i.parçacığın elektrik vektör potansiyeli ve buna karşılık gelen manyetik vektör potansiyeli sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$A_\mu^{(i)}(e) = \frac{1}{2}\frac{e_i}{4\pi r}\gamma_\mu^{(1)} \otimes \gamma^0, \qquad A_\mu^{(i)}(a) = \frac{a_i}{8\pi r^3}\sigma_{\mu k}^{(i)} r^k \otimes \gamma^0,$$

$$A_\mu^{(i)} = A_\mu^{(i)}(e) + A_\mu^{(i)}(a) \tag{2.29}$$

Bu vektör potansiyeller parçacıklar kaynağının iç spin indislerini taşıyan, aslında bir tür Yang-Mills potansiyelleridir. Bu potansiyellere karşılık gelen alanlar;

$$F_{\mu\nu}^{(i)} = A_{\nu,\mu}^{(i)} - A_{\mu,\nu}^{(i)}$$

ile elde edilir. Bu potansiyeller cinsinden dalga fonksiyonu şu şekilde olur (Barut ve Komy 1985):

$$\left\{\left[\overset{(1)}{\gamma^\mu}(i\overset{(1)}{\partial_\mu} - e_1 A_\mu^{(2)}) - m_1\right] \otimes \overset{(2)}{\gamma^0} + \overset{(1)}{\gamma^0} \otimes \left[\overset{(2)}{\gamma^\mu}(i\overset{(2)}{\partial_\mu} - e_2 A_\mu^{(1)}) - m_2\right]\right\}\Phi(x,y)$$
$$+\left\{a_1 \sigma_{\mu\nu}^{(1)} \otimes F^{\mu\nu(2)} + a_2 F^{\mu\nu(1)} \otimes \sigma_{\mu\nu}^{(2)}\right\}\Phi(x,y) = 0. \tag{2.30}$$

3. MATERYAL VE METOT

Bu tez kapsamında, (2+1) boyutta relativistik iki Dirac parçacığı sisteminin analizi, genel, merkezcil bir kuvvet alanı altında incelenmeye başlanmıştır. Genel bir merkezcil potansiyel varlığında, çiftlenimli diferansiyel denklem seti türetilmiştir. Türetilen bu denklem seti farklı başlık ve altbaşlıklar kapsamında incelenmiş, fiziksel durumlar için enerji özdeğerleri bulunmuş ve spinör bileşenleri tespit edilmiştir

3.1. Elektromagnetik Alandaki İki-cisim için Minimum Çiftlenim Durumu

Sadece yük-elektrik potansiyel etkileşimlerini dikkate alırsak, bu denklem aşağıdaki gibi olur.

$$\left\{\left[\overset{(1)}{\gamma}{}^{\mu}(i\overset{(1)}{\partial}_{\mu}-e_1A^{(2)}_{\mu})-m_1\right]\otimes\overset{(2)}{\gamma}{}^{0}+\overset{(1)}{\gamma}{}^{0}\otimes\left[\overset{(2)}{\gamma}{}^{\mu}(i\overset{(2)}{\partial}_{\mu}-e_2A^{(1)}_{\mu})-m_2\right]\right\}\Phi(x,y)=0 \tag{3.1}$$

veya daha açık olarak,

$$[(\overset{(1)}{\gamma}_0\left(i\overset{(1)}{\partial}_0-e_1A_0^{(2)}\right)+\overset{(1)}{\gamma}_1 i\overset{(1)}{\partial}_1+\overset{(1)}{\gamma}_2 i\overset{(1)}{\partial}_2-m_1)\otimes\overset{(2)}{\gamma}{}^{0}+\overset{(1)}{\gamma}{}^{0}\otimes(\overset{(2)}{\gamma}_0\left(i\overset{(2)}{\partial}_0-e_2A_0^{(1)}\right)]\Phi$$

$$+[\overset{(2)}{\gamma}_1 i\overset{(2)}{\partial}_1+\overset{(2)}{\gamma}_2 i\overset{(2)}{\partial}_2-m_2)+V]\Phi=0 \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir. 2+1 uzay-zaman boyutunda, Dirac cebrini sağlayan matrisler için farklı seçimler yapmak mümkündür. Fakat 2+1 uzay zaman boyutunda yapılmış çalışmaya göre(yusuf hocanın makaleyi yaz)Dirac matrislerini temsilen

$$\gamma^0=\sigma_3,\quad \gamma^1=i\sigma_1,\quad \gamma^2=i\sigma_2 \tag{3.3}$$

ile verilen seçimi yapmak doğrudur. Burada,

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Pauli matrisleridir. Denklem (3.4) ve (3.3), denklem (3.2)'de yerine yazılarak aşağıdaki matris denklemi elde edilir.

$$\left[\begin{pmatrix} & &1& \\ & & &-1\\ 1& & & \\ &-1& & \end{pmatrix}(-\overset{(1)}{\partial}_x)+\begin{pmatrix} & &-i& \\ & & &i\\ i& & & \\ &-i& & \end{pmatrix}(-\overset{(1)}{\partial}_y)\right]\Phi$$

$$+\left[\begin{pmatrix}1& & & \\ &-1& & \\ & &-1& \\ & & &1\end{pmatrix}i\,\overset{(1)}{\partial}_t+\begin{pmatrix}1& & & \\ &-1& & \\ & &-1& \\ & & &1\end{pmatrix}i\overset{(2)}{\partial}_t\right]\Phi$$

$$+\left[-m_1\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}-m_2\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}\right]\Phi$$

$$+\left[\begin{pmatrix}&1&&\\1&&&\\&&&-1\\&&-1&\end{pmatrix}(-\overset{(2)}{\partial_x})+\begin{pmatrix}&-i&&\\i&&&\\&&&i\\&&-i&\end{pmatrix}(-\overset{(2)}{\partial_y})\right]\Phi$$

$$-\left(e_1A_0^{(2)}+e_2A_0^{(1)}\right)\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&1\end{pmatrix}\Phi=0. \tag{3.5}$$

Burada Φ dörtlü spinördür. Birçok uygulama için bu spinörleri, ikili spinörler cinsinden yazmak kolaylık sağlamaktadır.

$$\Phi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\Psi_1\otimes\Psi_2=\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\chi_1\\\chi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_1\chi_1\\\varphi_1\chi_2\\\varphi_2\chi_1\\\varphi_2\chi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

$$M=m_1+m_2,\quad \Delta m=m_1-m_2,\quad V=\left(e_1A_0^{(2)}+e_2A_0^{(1)}\right) \tag{3.7}$$

(3.6) ve (3.7)'de yapılan tanımlar kullanılarak, denklem (3.5) ten bulunan, birinci mertebeden diferansiyel denklem seti şu şekilde olur:

$$\left(i(\overset{(1)}{\partial_t}+\overset{(2)}{\partial_t})-M-V\right)D_1+\left(-\partial_x\overset{(2)}{+}i\partial_y\right)D_2+\left(-\partial_x\overset{(1)}{+}i\partial_y\right)D_3=0, \tag{3.8}$$

$$\left(-i(\overset{(1)}{\partial_t}+\overset{(2)}{\partial_t})+\Delta m+V\right)D_2-\left(\partial_x\overset{(2)}{+}i\partial_y\right)D_1+\left(\partial_x\overset{(1)}{-}i\partial_y\right)D_4=0, \tag{3.9}$$

$$\left(-i(\overset{(1)}{\partial_t}+\overset{(2)}{\partial_t})-\Delta m+V\right)D_3+\left(\partial_x\overset{(2)}{-}i\partial_y\right)D_4-\left(\partial_x\overset{(1)}{+}i\partial_y\right)D_1=0, \tag{3.10}$$

$$\left(i(\overset{(1)}{\partial_t}+\overset{(2)}{\partial_t})+M-V\right)D_4+\left(\partial_x\overset{(2)}{+}i\partial_y\right)D_3+\left(\partial_x\overset{(1)}{+}i\partial_y\right)D_2=0. \tag{3.11}$$

Denklem setini bu formda yazarak, kütle merkezi ve bağıl koordinatlar sistemine geçebiliriz.

$$R=\frac{1}{M}\left(m_1x_1+m_2x_2\right),\quad r=|\overrightarrow{x}_1-\overrightarrow{x}_2|,\quad M=m_1+m_2 \tag{3.12}$$

$$x_1=\frac{m_2}{M}\left(r+\frac{M}{m_2}R\right),\quad x_2=\frac{m_2}{M}\left(-r+\frac{M}{m_1}R\right). \tag{3.13}$$

(3.12) ve (3.13) ile verilen tanımlar kullanılarak, uzaysal türev operatörleri için, kütle merkezi ve bağıl koordinatlar cinsinden, aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$\frac{\partial}{\partial R_\mu}=\frac{\partial}{\partial x^1_\mu}+\frac{\partial}{\partial x^2_\mu},\quad \frac{\partial}{\partial r_\mu}=\frac{1}{M}\left(m_2\frac{\partial}{\partial x^1_\mu}-m_2\frac{\partial}{\partial x^2_\mu}\right),$$

$$\nabla^\mu_1=\frac{\partial}{\partial x^1_\mu}=\frac{\partial}{\partial r_\mu}+\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R_\mu},\quad \nabla^\mu_2=\frac{\partial}{\partial x^2_\mu}=-\frac{\partial}{\partial r_\mu}+\frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial R_\mu}. \tag{3.14}$$

Burada,

$$\overset{(1)}{\partial_i}=\frac{\partial}{\partial r_i}+\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R_i},\quad \overset{(2)}{\partial_i}=-\frac{\partial}{\partial r_i}+\frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial R_i},\qquad i=(0,1,2) \tag{3.15}$$

Şimdi denklem (3.15) kullanılarak, (3.8)-(3.11)'deki birinci mertebe denklem setimiz, kütle merkezi ve bağıl koordinat değişkenleri cinsinden, şu şekilde olur:

$$\begin{aligned}&\left(i\frac{\partial}{\partial R_0}-M-V\right)D_1+\left(\frac{\partial}{\partial r_1}-i\frac{\partial}{\partial r_2}-\frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial R_1}+i\frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial R_2}\right)D_2\\&-\left(\frac{\partial}{\partial r_1}-i\frac{\partial}{\partial r_2}+\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R_1}-i\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R_2}\right)D_3=0,\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}&\left(-i\frac{\partial}{\partial R_0}+\Delta m+V\right)D_2+\left(\frac{\partial}{\partial r_1}+i\frac{\partial}{\partial r_2}-\frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial R_1}-i\frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial R_2}\right)D_1\\&+\left(\frac{\partial}{\partial r_1}-i\frac{\partial}{\partial r_2}+\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R_1}-i\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R_2}\right)D_4=0,\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}&\left(-i\frac{\partial}{\partial R_0}-\Delta m+V\right)D_3-\left(\frac{\partial}{\partial r_1}-i\frac{\partial}{\partial r_2}-\frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial R_1}+i\frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial R_2}\right)D_4\\&-\left(\frac{\partial}{\partial r_1}+i\frac{\partial}{\partial r_2}+\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R_1}+i\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R_2}\right)D_1=0,\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}&\left(i\frac{\partial}{\partial R_0}+M-V\right)D_4-\left(\frac{\partial}{\partial r_1}+i\frac{\partial}{\partial r_2}-\frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial R_1}-i\frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial R_2}\right)D_3\\&+\left(\frac{\partial}{\partial r_1}+i\frac{\partial}{\partial r_2}+\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R_1}+i\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R_2}\right)D_2=0,\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$D_i=\psi_i(\overrightarrow{R},\overrightarrow{r}),\quad (i=1,2,3,4) \tag{3.20}$$

$$\psi_i(\overrightarrow{R},\overrightarrow{r})=\psi_i(\overrightarrow{r})\phi_i(\overrightarrow{R})e^{-iER_0}.\quad (i=1,2,3,4) \tag{3.21}$$

Etkileşim potansiyeli, sadece parçacıklar arası bağıl uzaklığın bir fonksiyonu olduğu için, $V = V(r)$, spinör bileşenlerini aşağıdaki şekilde yazmakta sakınca yoktur.

$$\psi_i(\overrightarrow{R},\overrightarrow{r}) = \psi_i(\overrightarrow{r})\phi_i(\overrightarrow{R})e^{-iER_0} = \psi_i(\overrightarrow{r})e^{-i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{R}}e^{-iER_0}. \quad (i = 1,2,3,4) \tag{3.22}$$

Bu tanımların yanı sıra, bağıl koordinatlarımız r_1 ve r_2 yi, polar koordinatlar cinsinden ifade ederek, denklem (3.16)-(3.19)'te yazmış olduğumuz denklem setimizi nispeten daha sade bir şekilde yazabiliriz.

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \mp i\frac{\partial}{\partial r_2} = e^{\mp}\left(\mp\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{3.23}$$

Denklem (3.22) ve (3.23), (3.16)-(3.19)'te verilen denklem setinde kullanıldığında, birinci mertebeden diferansiyel denklem seti, şu hali alır:

$$\begin{aligned}&(E - M - V)\,\psi_1(r,\phi) + \left(e^{-i\phi}\left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right) + (i-1)\,\frac{m_2 k}{M}\right)\psi_2(r,\phi)\\ &-\left(e^{-i\phi}\left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right) - (i+1)\,\frac{m_1 k}{M}\right)\psi_3(r,\phi) = 0,\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}&(-E + \Delta m + V)\,\psi_2(r,\phi) + \left(e^{i\phi}\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right) + (i-1)\,\frac{m_2 k}{M}\right)\psi_1(r,\phi)\\ &+\left(e^{-i\phi}\left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right) - (i+1)\,\frac{m_1 k}{M}\right)\psi_4(r,\phi) = 0,\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}&(-E - \Delta m + V)\,\psi_3(r,\phi) - \left(e^{-i\phi}\left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right) + (i+1)\,\frac{m_2 k}{M}\right)\psi_4(r,\phi)\\ &-\left(e^{i\phi}\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right) + (i-1)\,\frac{m_1 k}{M}\right)\psi_1(r,\phi) = 0,\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}&(E + M - V)\,\psi_4(r,\phi) - \left(e^{i\phi}\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right) + (i-1)\,\frac{m_2 k}{M}\right)\psi_3(r,\phi)\\ &+\left(e^{i\phi}\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right) + (1-i)\,\frac{m_1 k}{M}\right)\psi_2(r,\phi) = 0.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Kütle merkezini durgun kabul edersek ($k = 0$), denklem seti aşağıdaki şekilde olur.

$$\begin{aligned}&(E - M - V)\,\psi_1(r,\phi) + \left(e^{-i\phi}\left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\psi_2(r,\phi)\\ &-\left(e^{-i\phi}\left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\psi_3(r,\phi) = 0,\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$
\begin{aligned}
&\left(-E+\Delta m+V\right)\psi_2(r,\phi)+\left(e^{i\phi}\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\psi_1(r,\phi)\\
&+\left(e^{-i\phi}\left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\psi_4(r,\phi)=0,
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(-E-\Delta m+V\right)\psi_3(r,\phi)-\left(e^{-i\phi}\left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\psi_4(r,\phi)\\
&-\left(e^{i\phi}\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\psi_1(r,\phi)=0,
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(E+M-V\right)\psi_4(r,\phi)-\left(e^{i\phi}\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\psi_3(r,\phi)\\
&+\left(e^{i\phi}\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\psi_2(r,\phi)=0.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Denklem setinde tutarsızlıkları ortadan kaldırmak için, (3.28) denklemini soldan $e^{i\phi}$ ile, (3.31) denklemini soldan $e^{-i\phi}$ ile çarpıp, (3.29) ve (3.30) denklemlerindeki exponansiyel terimleri, türev operatörlerinin sağ tarafına alırsak, bu değişiklikler denklem setine şu şekilde yansır:

$$
\begin{aligned}
&\left(E-M-V\right)\psi_1(r,\phi)e^{i\phi}+\left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_2(r,\phi)\\
&-\left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_3(r,\phi)=0,
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(-E+\Delta m+V\right)\psi_2(r,\phi)+\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_1(r,\phi)e^{i\phi}\\
&+\left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_4(r,\phi)e^{-i\phi}=0,
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(-E-\Delta m+V\right)\psi_3(r,\phi)-\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_4(r,\phi)e^{-i\phi}\\
&-\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_1(r,\phi)e^{i\phi}=0,
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(E+M-V\right)\psi_4(r,\phi)e^{-i\phi}-\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_3(r,\phi)\\
&+\left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_2(r,\phi)=0.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Şimdi aşağıdaki tanımlamaları yapmak biraz daha kolaylık sağlayacaktır.

$$\psi_1(r,\phi)e^{i\phi} = \widetilde{\psi}_1(r,\phi), \quad \psi_2(r,\phi) = \widetilde{\psi}_2(r,\phi),$$
$$\psi_3(r,\phi) = \widetilde{\psi}_3(r,\phi), \quad \psi_4(r,\phi)e^{-i\phi} = \widetilde{\psi}_4(r,\phi) \tag{3.36}$$

Bu denklem sistemine bakıldığında açısal koordinatın kendisi açık olarak bulunmamaktadır yani çevrimsel koordinat olduğu görülmektedir. Bu sebeple spinör bileşenlerini şu şekilde yazmamızda sakınca yoktur:

$$\widetilde{\psi}_n(r,\phi) = \overset{\diamond}{\psi}_n(r)e^{-ig\phi}. \qquad (n = 1,2,3,4) \tag{3.37}$$

(3.36) ve (3.37) tanımları altında, (3.32)-(3.35) da verilen denklem setimiz aşağıdaki şekilde olur.

$$(E - M - V)\,\overset{\diamond}{\psi}_1(r)e^{-ig\phi} + \left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)e^{-ig\phi}$$
$$- \left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)e^{-ig\phi} = 0, \tag{3.38}$$

$$(-E + \Delta m + V)\,\overset{\diamond}{\psi}_2(r)e^{-ig\phi} + \left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\overset{\diamond}{\psi}_1(r)e^{-ig\phi}$$
$$+ \left(-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\overset{\diamond}{\psi}_4(r)e^{-ig\phi} = 0, \tag{3.39}$$

$$(-E - \Delta m + V)\,\overset{\diamond}{\psi}_3(r)e^{-ig\phi} - \left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\overset{\diamond}{\psi}_4(r)e^{-ig\phi}$$
$$- \left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\overset{\diamond}{\psi}_1(r)e^{-ig\phi} = 0, \tag{3.40}$$

$$(E + M - V)\,\overset{\diamond}{\psi}_4(r)e^{-ig\phi} - \left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)e^{-ig\phi}$$
$$+ \left(\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)e^{-ig\phi} = 0. \tag{3.41}$$

3.2. Heun Fonksiyonları

Bu çalışmada denklemler analitik olarak çözülmüştür. Coulomb etkileşimi incelendiğinde ilk olarak Kütlesiz parçacıklar için bulunan çözüm H_c fonksiyonlarıdır (Gürtaş 2013). Enerji özdeğeri ifadesi, kuvvet serisi yöntemi kullanılarak elde edilir. Denklem şu formdadır:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left(\alpha + \frac{\beta+1}{z} + \frac{\gamma+1}{z-1}\right)\frac{dw}{dz} + \left(\frac{\mu}{z} + \frac{\nu}{z-1}\right)w = 0. \tag{3.42}$$

Burada;

$$\mu = \frac{1}{2}\left[\alpha - \beta - \gamma - 2\eta + \beta(\alpha - \gamma)\right],$$

$$\nu = \frac{1}{2}\left[\alpha + \beta + \gamma + 2\delta + 2\eta + \gamma(\alpha + \beta)\right],$$

$$w(z) = HeunC(\ \alpha,\ \beta,\ \gamma, \delta, \eta, z). \tag{3.43}$$

Denklem için z=0 ve z=1 düzenli tekil noktalardır ve z=∞ için düzensiz tekillik vardır. Heun denkleminde, polinom çözümler için bilinen koşul;

$$\delta = -\left(n + \frac{\beta + \gamma + 2}{2}\right)\alpha \quad , \quad n = 0, 1, 2... \tag{3.44}$$

olarak verilir.

4. BULGULAR

Şimdi denklem setimizde, açıya bağımlılıktan kurtulabiliriz. Açısal operatörü etki ettirip, sadeleştirme işlemleri yapıldıktan sonra, birinci mertebeden türevli, radyal denklem seti şu şekilde bulunur.

$$(E-M-V)\,\overset{\diamond}{\psi}_1(r)+\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)=0, \qquad (4.1)$$

$$\begin{aligned}&(-E+\Delta m+V)\,\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left(\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_1(r)\\&+\left(-\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_4(r)=0,\end{aligned} \qquad (4.2)$$

$$\begin{aligned}&(-E-\Delta m+V)\,\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\left(-\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_4(r)\\&-\left(\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_1(r)=0,\end{aligned} \qquad (4.3)$$

$$(E+M-V)\,\overset{\diamond}{\psi}_4(r)-\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)+\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0. \qquad (4.4)$$

Bu denklem setinde, (4.1) denklemindeki $\overset{\diamond}{\psi}_1(r)$, (4.4) denklemdeki $\overset{\diamond}{\psi}_4(r)$, $\overset{\diamond}{\psi}_2(r)$ ve $\overset{\diamond}{\psi}_3(r)$ cinsinden şu şekilde yazılabilir.

$$\overset{\diamond}{\psi}_1(r)=\frac{1}{(E-M-V)}\left[-\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right], \qquad (4.5)$$

$$\overset{\diamond}{\psi}_4(r)=\frac{1}{(E+M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right]. \qquad (4.6)$$

Denklem (4.5) ve (4.6), denklem (4.2)'de yerlerine yazılarak şu denklem bulunur.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\frac{1}{(E-M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}-\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right]\\&+\left(-\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{1}{(E+M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right]\right]\\&+(-E+\Delta m+V)\,\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0.\end{aligned} \qquad (4.7)$$

4.1. $V(r) = 0$ Durumu

Etkileşim potansiyelinin sıfır olduğu durum için bu denklem düzenlenirse;

$$(-E+\Delta m)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\frac{(1+g)}{(E-M)\,r}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)-\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\right]$$
$$+\frac{1}{(E-M)}\frac{d}{dr}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)-\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\right]$$
$$+\frac{(1-g)}{(E+M)\,r}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)+\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]$$
$$+\frac{1}{(E+M)}\frac{d}{dr}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)+\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]=0 \tag{4.8}$$

olur. Şimdi, Denklem (4.5) ve (4.6), denklem (4.3)'te yerlerine yazılarak şu denklem bulunur.

$$\left(-\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{1}{(E+M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right]\right]$$
$$+\left(\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{1}{(E+M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}-\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right]\right]$$
$$-\left(-E-\Delta m+V(r)\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)=0 \tag{4.9}$$

olur. Aynı şekilde, etkileşim potansiyeli sıfır seçilip, bu denklem düzenlenirse şu hali alır.

$$(-E-\Delta m)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\frac{(1-g)}{(E+M)\,r}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)+\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]$$
$$-\frac{1}{(E+M)}\frac{d}{dr}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)+\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]$$
$$-\frac{(1+g)}{(E-M)\,r}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)-\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\right]$$
$$-\frac{1}{(E-M)}\frac{d}{dr}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)-\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\right]=0. \tag{4.10}$$

Denklem (4.8) ve Denklem (4.10) kendi içlerinde biraz daha düzenlenirse, sırasıyla şu formu alırlar.

$$(-E+\Delta m)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left[\frac{(g^2+g)}{(E-M)\,r^2}-\frac{(g+1)}{(E-M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)$$
$$+\frac{1}{(E-M)}\left[-\frac{g}{r^2}+\frac{g}{r}\frac{d}{dr}-\frac{d^2}{dr^2}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)$$
$$-\left[\frac{(g-g^2)}{(E+M)\,r^2}+\frac{(1-g)}{(E+M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)$$
$$+\frac{1}{(E+M)}\left[+\frac{g}{r^2}-\frac{g}{r}\frac{d}{dr}-\frac{d^2}{dr^2}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)=0 \tag{4.11}$$

ve

$$
\begin{aligned}
&(-E-\Delta m)\,\overset{\diamond}{\psi}_3(r)+\left[\frac{(g-g^2)}{(E+M)\,r^2}+\frac{(1-g)}{(E+M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\\
&-\frac{1}{(E+M)}\left[\frac{g}{r^2}-\frac{g}{r}\frac{d}{dr}-\frac{d^2}{dr^2}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\\
&-\left[\frac{(g+g^2)}{(E-M)\,r^2}+\frac{(1+g)}{(E-M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\\
&+\frac{1}{(E-M)}\left[+\frac{g}{r^2}-\frac{g}{r}\frac{d}{dr}+\frac{d^2}{dr^2}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)=0. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Denklem (4.11) ve Denklem (4.12)'yi taraf tarafa toplarsak;

$$
(-E)\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)+\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)+\Delta m\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)=0 \qquad (4.13)
$$

bulunur. Şimdi

$$
\psi_A=\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)+\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right),\qquad \psi_B=\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right). \qquad (4.14)
$$

Denklem (4.14)'daki tanımlamalar ile, Denklem (4.13) şu şekilde yazılabilir.

4.1.1. $\Delta m \neq 0$ durumu durumu

$$
\psi_B=\frac{E}{\Delta m}\psi_A \qquad (4.15)
$$

Denklem (4.11) ve Denklem (4.12)'yi taraf tarafa çıkarırsak;

$$
\begin{aligned}
&(E)\,\psi_B-(\Delta m)\,\psi_A+\left[\frac{2\,(g-g^2)}{(E+M)\,r^2}+\frac{2\,(1-g)}{(E+M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\psi_B\\
&-\frac{1}{(E+M)}\left[\frac{2g}{r^2}-\frac{2g}{r}\frac{d}{dr}-\frac{2d^2}{dr^2}\right]\psi_B+\frac{1}{(E-M)}\left[+\frac{2g}{r^2}-\frac{2g}{r}\frac{d}{dr}+\frac{2d^2}{dr^2}\right]\psi_B\\
&-\left[\frac{2\,(g+g^2)}{(E-M)\,r^2}-\frac{2\,(1+g)}{(E-M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\psi_B=0 \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

bulunur. Denklem (4.15)'yi, denklem (4.16)'de kullanarak, denklem bütünüyle ψ_B cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır.

$$
\begin{aligned}
&(E)\,\psi_B-\frac{\Delta m^2}{E}\psi_B+\left[\frac{2\,(g-g^2)}{(E+M)\,r^2}+\frac{2\,(1-g)}{(E+M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\psi_B\\
&-\frac{1}{(E+M)}\left[\frac{2g}{r^2}-\frac{2g}{r}\frac{d}{dr}-\frac{2d^2}{dr^2}\right]\psi_B+\frac{1}{(E-M)}\left[+\frac{2g}{r^2}-\frac{2g}{r}\frac{d}{dr}+\frac{2d^2}{dr^2}\right]\psi_B\\
&-\left[\frac{2\,(g+g^2)}{(E-M)\,r^2}-\frac{2\,(1+g)}{(E-M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\psi_B=0. \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Yine benzer şekilde Denklem (4.15)'yi, denklem (4.16)'de kullanarak, denklemi tamamiyle ψ_A cinsinden yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
&\frac{E^2}{\Delta m}\psi_A-(\Delta m)\,\psi_A+\left[\frac{2\,(g-g^2)}{(E+M)\,r^2}+\frac{2\,(1-g)}{(E+M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\frac{E}{\Delta m}\psi_A\\
&-\frac{1}{(E+M)}\left[\frac{2g}{r^2}-\frac{2g}{r}\frac{d}{dr}-\frac{2d^2}{dr^2}\right]\frac{E}{\Delta m}\psi_A\\
&+\frac{1}{(E-M)}\left[+\frac{2g}{r^2}-\frac{2g}{r}\frac{d}{dr}+\frac{2d^2}{dr^2}\right]\frac{E}{\Delta m}\psi_A\\
&-\left[\frac{2\,(g+g^2)}{(E-M)\,r^2}-\frac{2\,(1+g)}{(E-M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\frac{E}{\Delta m}\psi_A=0.
\end{aligned}\tag{4.18}$$

Denklem (4.18)'i, $\frac{\Delta m}{E}$ ile çarparsak;

$$\begin{aligned}
&E\psi_A-\frac{\Delta m^2}{E}\psi_A+\left[\frac{2\,(g-g^2)}{(E+M)\,r^2}+\frac{2\,(1-g)}{(E+M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\psi_A\\
&-\frac{1}{(E+M)}\left[\frac{2g}{r^2}-\frac{2g}{r}\frac{d}{dr}-2\frac{d^2}{dr^2}\right]\psi_A\\
&+\frac{1}{(E-M)}\left[+\frac{2g}{r^2}-\frac{2g}{r}\frac{d}{dr}+2\frac{d^2}{dr^2}\right]\psi_A\\
&-\left[\frac{2\,(g+g^2)}{(E-M)\,r^2}-\frac{2\,(1+g)}{(E-M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\psi_A=0.
\end{aligned}\tag{4.19}$$

Denklemi tek bir spinör bileşeni cinsinden ifade etmek amacı ile, Denklem (4.17) ve Denklem (4.19) denklemlerini taraf tarafa toplarsam;

$$\begin{aligned}
&E\,(\psi_A+\psi_B)-\frac{\Delta m^2}{E}\,(\psi_A+\psi_B)\\
&+\left[\frac{2\,(g-g^2)}{(E+M)\,r^2}+\frac{2\,(1-g)}{(E+M)\,r}\frac{d}{dr}\right](\psi_A+\psi_B)\\
&-\frac{1}{(E+M)}\left[\frac{2g}{r^2}-\frac{2g}{r}\frac{d}{dr}-\frac{2d^2}{dr^2}\right](\psi_A+\psi_B)\\
&+\frac{1}{(E-M)}\left[+\frac{2g}{r^2}-\frac{2g}{r}\frac{d}{dr}+\frac{2d^2}{dr^2}\right](\psi_A+\psi_B)\\
&-\left[\frac{2\,(g+g^2)}{(E-M)\,r^2}-\frac{2\,(1+g)}{(E-M)\,r}\frac{d}{dr}\right](\psi_A+\psi_B)=0.
\end{aligned}\tag{4.20}$$

Burada daha önceki yaptığımız tanımlar kullanırız.

$$\begin{aligned}
\psi_A=\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)+\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right),&\qquad \psi_B=\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\\
\psi_A-\psi_B=2\overset{\diamond}{\psi}_3(r),&\qquad \psi_A+\psi_B=2\overset{\diamond}{\psi}_2(r).
\end{aligned}\tag{4.21}$$

Denklem (4.21) teki ifadeler,Denklem (4.20)de yerine yazılırsa, bu denklemi $\overset{\diamond}{\psi}_2(r)$ cinsinden yazabiliriz.

$$
\begin{aligned}
&2E\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\frac{2\Delta m^2}{E}\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left[\frac{4\left(g-g^2\right)}{(E+M)\,r^2}+\frac{4\,(1-g)}{(E+M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\\
&-\frac{4}{(E+M)}\left[\frac{g}{r^2}-\frac{g}{r}\frac{d}{dr}-\frac{d^2}{dr^2}\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\frac{4}{(E-M)}\left[+\frac{g}{r^2}-\frac{g}{r}\frac{d}{dr}+\frac{d^2}{dr^2}\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\\
&-\left[\frac{4\left(g+g^2\right)}{(E-M)\,r^2}-\frac{4\,(1+g)}{(E-M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

olur. Bu denklemde her terimi 4 ile bölersek:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{E^2-\Delta m^2}{2E}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left[\frac{\left(g-g^2\right)}{(E+M)\,r^2}+\frac{(1-g)}{(E+M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\\
&-\frac{1}{(E+M)}\left[\frac{g}{r^2}-\frac{g}{r}\frac{d}{dr}-\frac{d^2}{dr^2}\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\frac{1}{(E-M)}\left[\frac{g}{r^2}-\frac{g}{r}\frac{d}{dr}+\frac{d^2}{dr^2}\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\\
&-\left[\frac{\left(g+g^2\right)}{(E-M)\,r^2}-\frac{(1+g)}{(E-M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

olur. Bu denklemi kendi içerisinde biraz daha düzenleyelim.

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{E^2-\Delta m^2}{2E}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left[\frac{g}{r^2}\left(\frac{1}{(E+M)}-\frac{1}{(E-M)}\right)\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\\
&+\left[-\frac{g^2}{r^2}\left(\frac{1}{(E+M)}+\frac{1}{(E-M)}\right)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{(E+M)}+\frac{1}{(E-M)}\right)\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\\
&-\left[\frac{g}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{(E+M)}+\frac{1}{(E-M)}\right)-\frac{g}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{(E-M)}-\frac{1}{(E+M)}\right)\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\\
&+\left[\frac{g}{r^2}\left(\frac{1}{(E-M)}-\frac{1}{(E+M)}\right)\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\\
&+\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{(E-M)}+\frac{1}{(E+M)}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0.
\end{aligned}
$$

Yani etkileşim potansiyelinin sıfır seçildiği bu özel ve basit durumda, herhangi bir kütleye sahip iki-cisim için bulunan ikinci mertebe denklem şu şekildedir.

$$
\begin{aligned}
&\left[-\frac{2Eg^2}{\left(E^2-M^2\right)r^2}+\frac{2E}{\left(E^2-M^2\right)r}\frac{d}{dr}+\frac{2E}{\left(E^2-M^2\right)}\frac{d^2}{dr^2}\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\\
&+\left(\frac{E^2-\Delta m^2}{2E}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0.
\end{aligned}
$$

Bu denklemde her terimi $\frac{2E}{(E^2-M^2)}$ ile bölüp, düzenlersek;

$$
\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{g^2}{r^2}+\frac{\left(E^2-\Delta m^2\right)\left(E^2-M^2\right)}{4E^2}\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0
$$

ve her terimi r^2 ile çarpıp, tekrar küçük bir düzenleme ile denklemimiz şu hali alır:

$$\left[r^2\frac{d^2}{dr^2}+r\frac{d}{dr}+\frac{\left(E^2-\Delta m^2\right)\left(E^2-M^2\right)}{4E^2}r^2-g^2\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0. \tag{4.24}$$

Sabit terimler ve değişken için

$$s^2=\frac{\left(E^2-\Delta m^2\right)\left(E^2-M^2\right)}{4E^2}, \qquad \rho=sr \tag{4.25}$$

Denklem (4.25) tanımı, (4.24) denkleminde kullanarak, denkleme daha sade bir görünüm kazandırılabilinir.

$$\left[\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}+\rho\frac{d}{d\rho}+\rho^2-g^2\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(\rho)=0. \tag{4.26}$$

Bu denklem iyi bilinen Bessel diferansiyel denklemidir. Burada g, pozitif, reel bir sabittir. Bu denklemin çözümleri Bessel fonksiyonları olarak adlandırılır. Bu denklemle genelde, silindirik simetri içeren problemlerde karşılaşılır. Bu sebeple zaman zaman silindirik fonksiyonlar olarak adlandırılırlar. Burada, orjin tekil noktadır. Şimdi orjinde seri çözüme bakalım. Çözüm önerisi olarak aşağıdaki tanımı kullanabiliriz.

$$\overset{\diamond}{\psi}_2(\rho)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\rho^{(m+p)}. \tag{4.27}$$

Denklem (4.27)'nın, birinci ve ikinci türevleride alınıp yukarıdaki denklemde yerine yazılır, küçük bir düzenleme ile (4.26) den şu bağıntı elde edilir:

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m\left[(m+p)^2-g^2\right]\rho^{(m+p)}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m\rho^{(m+p+2)}=0.$$

Ilk terimi, $m=0$ ve 1 değerleri için açıp, $m\rightarrow m-2$ indis dönüşümü yaparsak, denklem aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}&a_0\left[p^2-g^2\right]\rho^p+a_1\left[(1+p)^2-g^2\right]\rho^{(1+p)}\\&+\sum_{m=2}^{\infty}\left[a_m\left((m+p)^2-g^2\right)+a_{m-2}\right]\rho^{(m+p)}=0,\end{aligned}$$

burada ρ nun her kuvvetinin katsayısını sıfıra eşitleyerek;

$$a_0\neq 0 \text{ ve } a_1=0 \text{ için,} \qquad p^2=g^2 \implies p=\pm g \tag{4.28}$$

indis denklemi bulunur. Şimdi

$$m\geq 2, \quad p=g, \quad a_0\neq 0, \quad a_1=0$$

durumunda, tekrarlama bağıntısını yazacagız.

$$a_m\left((m+p)^2-g^2\right)+a_{m-2}=0$$

idi.Bu bağıntıyı düzenlersek

$$a_m=-\frac{a_{m-2}}{(m+p)^2-g^2}$$

olur, (4.28)'nin sonuçlarından biri olan, $p=g$ durumu için bağıntı şu hale gelir:

$$a_m=-\frac{a_{m-2}}{m\,(m+2g)}$$

$m\geq 2$ idi. Buna göre, ilk birkaç değer, $m=2,4,6,..$, için bu bağıntı yazılıp sonuç genelleştirilirse tekrarlama bağıntısı aşağıdaki şekliyle bulunur.

$$a_m=(-1)^{m/2}\frac{a_0}{2^m\left(\frac{m}{2}\right)!\,(g+1)\,(g+2)\,(g+3)\,....\,(g+m/2)} \tag{4.29}$$

yada $n=1,2,3,..$ cinsinden;

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{a_0}{2^{2n}\,(n)!\,(g+1)\,(g+2)\,(g+3)\,....\,(g+n)} \tag{4.30}$$

olur. Burada Gama Fonksiyonlarının birkaç özelliğine ihtiyaç duyuyoruz. Bu özellikler aşağıda verilmiştir.

$$(g+1)\,(g+2)\,(g+3)\,....\,(g+n)=\frac{\Gamma\,(n+g+1)}{\Gamma\,(g+1)}$$

$$\Gamma\,(n+1)=n!,\qquad \Gamma\,(n+1)=n\Gamma\,(n) \tag{4.31}$$

Uygun sadeleştirmeler olması için, keyfi olarak,

$$a_0=\frac{1}{2^g\Gamma\,(g+1)} \tag{4.32}$$

seçilir. (4.31) ve (4.32) denklemleri (4.30)'ye yazılarak, tekrarlama bağıntısı son haliyle şu şekli alır.

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{1}{2^{2n+g}\Gamma\,(n+1)\,\Gamma\,(n+g+1)}. \tag{4.33}$$

Yani çözüm önerimizdeki a_m ifadesini bulmuş olduk. Şimdi çözüm önerisine geri dönelim. Şimdi çözüm önerimize yani denklem (4.27)'ya geri dönelim. $m=2n$ ve $p=g$ olduğunuda hatırlatarak, $\overset{\diamond}{\psi}_2(\rho)$ aşağıdaki halini alır.

$$\overset{\diamond}{\psi}_2(\rho)=\frac{(-1)^n}{\Gamma\,(n+1)\,\Gamma\,(n+g+1)}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n+g}=J_g\,(\rho) \tag{4.34}$$

veya

$$\overset{\diamond}{\psi}_2(r) = N\ J_g(sr) \tag{4.35}$$

olarak bulunur. Bu g.mertebeden, 1.çeşit Bessel fonksiyonu olarak bilinir. Bu çözüm, indis denkleminin verdiği birinci çözüm kullanılarak çıkarıldı. Eğer indis denkleminin verdiği ikinci çözümü kullansaydık, $p = -g$, ozaman bulacağımız ifade, aynı işlemler ile şu şekilde bulunurdu;

$$\overset{\diamond}{\psi}_2(\rho) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+g+1)}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n-g} = J_{-g}(\rho)$$

(4.15) ve (4.21) bağıntıları kullanılarak, $\overset{\diamond}{\psi}_2(r)$ ve $\overset{\diamond}{\psi}_3(r)$ arasında, aşağıdaki bağıntı bulunur.

$$\overset{\diamond}{\psi}_3(r) = \frac{\left(1 - \frac{E}{\Delta m}\right)}{\left(1 + \frac{E}{\Delta m}\right)}\overset{\diamond}{\psi}_2(r) \tag{4.36}$$

Denklem (4.36) ve (4.35)'den, $\overset{\diamond}{\psi}_3(r)$ şu şekilde bulunur:

$$\overset{\diamond}{\psi}_3(r) = -\frac{\left(1 - \frac{E}{\Delta m}\right)}{\left(1 + \frac{E}{\Delta m}\right)}\ N\ J_g(sr) \tag{4.37}$$

$\overset{\diamond}{\psi}_1(r)$ ve $\overset{\diamond}{\psi}_4(r)$ için

$$\overset{\diamond}{\psi}_1(r) = \frac{1}{(E-M-V)}\left[-\left(-\frac{g}{r} + \frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r) + \left(-\frac{g}{r} + \frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right],$$

$$\overset{\diamond}{\psi}_4(r) = \frac{1}{(E+M-V)}\left[\left(\frac{g}{r} + \frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r) - \left(\frac{g}{r} + \frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right]$$

denklemleri çıkarılmıştı. Bu denklemler ve Bessel fonksiyonlarının türev bağıntıları kullanılarak $\overset{\diamond}{\psi}_1(r)$ ve $\overset{\diamond}{\psi}_4(r)$ için çözümler bulunur.

$$\overset{\diamond}{\psi}_1(r) = N\ J_{g+1}(sr)\frac{2\ \Delta m\ s}{(E-M)\ \ (\Delta m + E)}, \tag{4.38}$$

$$\overset{\diamond}{\psi}_4(r) = -\frac{2sN\ \Delta m\ J_{g-1}(sr)}{(\Delta m + E)\ \ (E+M)} \tag{4.39}$$

(4.35)-(4.39) denklemleriyle verilen bu çözümler, (4.1)-(4.4) denklem setini sağlarlar ve normalizasyon katsayılarının tamamının aynı olduğu bulunur.

4.1.2. Pozitronyum olarak adlandırılan eşit kütleli parçacıklar $(\Delta m = 0)$ durumu

Eğer etkileşim içerisindeki parçacıklar eşit kütleli ise, yani pozitronyum durumu için $(m_1 = m_2, \Delta m = 0)$ sistemi incelersek, daha önce çıkarmış olduğumuz radyal, diferansiyel denklem setimiz aşağıdaki şekilde olur.

$$(E-M-V)\,\overset{\diamond}{\psi}_1(r)+\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)=0, \tag{4.40}$$

$$(-E+V)\,\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left(\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_1(r)+\left(-\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_4(r)=0, \tag{4.41}$$

$$(-E+V)\,\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\left(-\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_4(r)-\left(\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_1(r)=0, \tag{4.42}$$

$$(E+M-V)\,\overset{\diamond}{\psi}_4(r)-\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)+\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0. \tag{4.43}$$

Bu denklem setinde, (4.40) denklemindeki $\overset{\diamond}{\psi}_1(r)$, (4.43) denklemindeki $\overset{\diamond}{\psi}_4(r)$, $\overset{\diamond}{\psi}_2(r)$ ve $\overset{\diamond}{\psi}_3(r)$ cinsinden, şu şekilde yazılır:

$$\overset{\diamond}{\psi}_1(r)=\frac{1}{(E-M-V)}\left[-\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right],$$

$$\overset{\diamond}{\psi}_4(r)=\frac{1}{(E+M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right].$$

Bu ifadeler denklem (4.41)'de yerlerine yazılırsa, bu denklem dörtlü spinörümüzün, ikinci ve üçüncü bileşeni cinsinden şu hali alır:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\frac{1}{(E-M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}-\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right]\\&+\left(-\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{1}{(E+M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right]\right]\\&+(-E+V)\,\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0.\end{aligned}$$

Etkileşim potansiyelinin sıfır olduğu durum için bu ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned}&(-E)\,\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\frac{(1+g)}{(E-M)\,r}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)-\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\right]\\&+\frac{1}{(E-M)}\frac{d}{dr}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)-\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\right]\\&+\frac{(1-g)}{(E+M)\,r}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)+\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]\\&+\frac{1}{(E+M)}\frac{d}{dr}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)+\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]=0\end{aligned} \tag{4.44}$$

olur. Şimdi $\overset{\diamond}{\psi}_2(r)$ ve $\overset{\diamond}{\psi}_3(r)$ cinsinden, $\overset{\diamond}{\psi}_1(r)$ ve $\overset{\diamond}{\psi}_4(r)$ yi, (56.3) denkleminde yerine yazarsak, bulunan denklem aşağıdaki gibi olur.

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{1}{(E+M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right]\right]\\
&+\left(\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{1}{(E+M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}-\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right]\right]\\
&-(-E+V)\,\overset{\diamond}{\psi}_3(r)=0
\end{aligned}
$$

olur. Aynı şekilde, etkileşim potansiyeli sıfır seçilip, bu denklem düzenlenirse şu hali alır.

$$
\begin{aligned}
&(-E)\,\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\frac{(1-g)}{(E+M)\,r}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)+\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]\\
&-\frac{1}{(E+M)}\frac{d}{dr}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)+\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]\\
&-\frac{(1+g)}{(E-M)\,r}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)-\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\right]\\
&-\frac{1}{(E-M)}\frac{d}{dr}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)-\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\right]=0.
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

(4.44) ve (4.45) denklemini biraz daha düzenlersek, sırasıyla denklemler aşağıdaki gibi olur:

$$
\begin{aligned}
&(-E)\,\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left[\frac{(g^2+g)}{(E-M)\,r^2}-\frac{(g+1)}{(E-M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\\
&+\frac{1}{(E-M)}\left[-\frac{g}{r^2}+\frac{g}{r}\frac{d}{dr}-\frac{d^2}{dr^2}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\\
&+\frac{1}{(E+M)}\left[+\frac{g}{r^2}-\frac{g}{r}\frac{d}{dr}-\frac{d^2}{dr^2}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\\
&-\left[\frac{(g-g^2)}{(E+M)\,r^2}+\frac{(1-g)}{(E+M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)=0
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&(-E)\,\overset{\diamond}{\psi}_3(r)+\left[\frac{(g-g^2)}{(E+M)\,r^2}+\frac{(1-g)}{(E+M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\\
&-\frac{1}{(E+M)}\left[\frac{g}{r^2}-\frac{g}{r}\frac{d}{dr}-\frac{d^2}{dr^2}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\\
&-\left[\frac{(g+g^2)}{(E-M)\,r^2}+\frac{(1+g)}{(E-M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\\
&+\frac{1}{(E-M)}\left[+\frac{g}{r^2}-\frac{g}{r}\frac{d}{dr}+\frac{d^2}{dr^2}\right]\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)=0
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

olur. Denklem (4.46) ve denklem (4.47) denklemlerini taraf tarafa toplanırsa;

$$(-E)\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)+\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)=0$$

burada $E\neq 0$ için;

$$\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)$$

sonucu bu denklem için kullanılabilecek bir çözümdür. (4.46) ve (4.47) denklemlerini taraf tarafa çıkarırsak;

$$\begin{aligned}&(-E)\,(-\psi_B)+\left[\frac{2\,(g-g^2)}{(E+M)\,r^2}+\frac{2\,(1-g)}{(E+M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\psi_B\\&-\frac{1}{(E+M)}\left[\frac{2g}{r^2}-\frac{2g}{r}\frac{d}{dr}-\frac{2d^2}{dr^2}\right]\psi_B+\frac{1}{(E-M)}\left[+\frac{2g}{r^2}-\frac{2g}{r}\frac{d}{dr}+\frac{2d^2}{dr^2}\right]\psi_B\\&-\left[\frac{2\,(g+g^2)}{(E-M)\,r^2}-\frac{2\,(1+g)}{(E-M)\,r}\frac{d}{dr}\right]\psi_B=0\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\overset{\diamond}{\psi}_2(r)&=-\overset{\diamond}{\psi}_3(r),\qquad \psi_B=\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\\\psi_B&=2\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\end{aligned}$$

ifadeleri kullanılarak denklem şu hali alır:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{g}{r^2}\left(\frac{1}{(E+M)}-\frac{1}{(E-M)}\right)-\frac{g^2}{r^2}\left(\frac{1}{(E+M)}+\frac{1}{(E-M)}\right)\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\\&+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{(E+M)}+\frac{1}{(E-M)}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\frac{g}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{(E-M)}-\frac{1}{(E+M)}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\\&+\left[-\frac{g}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{(E+M)}-\frac{1}{(E-M)}\right)+\frac{g}{r^2}\left(\frac{1}{(E-M)}-\frac{1}{(E+M)}\right)\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\\&+\left(\frac{E}{2}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{(E-M)}+\frac{1}{(E+M)}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0.\end{aligned}\tag{4.48}$$

Böylelikle etkileşim potansiyelin sıfır seçildiği en ideal sistem olarak, pozitronyum durumu için bulunan ikinci mertebe denklem, bir önceki kısımda bulunan denklem gibi yine Bessel diferansiyel denklemi olarak bulundu.

$$\left(\frac{E}{2}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left[-\frac{2Eg^2}{(E^2-M^2)\,r^2}+\frac{2E}{(E^2-M^2)\,r}\frac{d}{dr}+\frac{2E}{(E^2-M^2)}\frac{d^2}{dr^2}\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0.$$

Bu denklemde her terimi $\frac{2E}{(E^2-M^2)}$ ile bölüp düzenlersek, denklem şu hali alır:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{g^2}{r^2}+\frac{(E^2-M^2)}{4}\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0.\tag{4.49}$$

(4.49) denklemini r^2 ile çarpıp, tekrar küçük bir düzenleme yaparsak, denklemimiz iyi bilinen formuyla Bessel diferansiyel denklemi olarak bulunur.

$$\left[r^2\frac{d^2}{dr^2}+r\frac{d}{dr}+\frac{(E^2-M^2)}{4}r^2-g^2\right]\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0. \tag{4.50}$$

Bu denklemin çözümleri Bessel fonksiyonlarıdır.

$$s=\frac{\sqrt{(E^2-M^2)}}{2} \tag{4.51}$$

(4.51) tanımı ile, bu denklemin çözümü aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=N_2J_g\left(sr\right) \tag{4.52}$$

$$\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=-\overset{\diamond}{\psi}_3(r) \tag{4.53}$$

Dörtlü spinörümüzün ikinci ve üçüncü bileşeni için bulunan (4.52) bağıntısı, eşit kütleli iki-parçacık durumunda, genel bir merkezcil potansiyel varlığında da kullanılabilecek bir çözümdür. Yani potansiyelin özel olarak seçimi, bu durumu değiştirmez. Bu bağıntı kullanılarak spinörün üçüncü bileşeni aşağıdaki gibi bulunur.

$$\overset{\diamond}{\psi}_3(r)=-N_2J_g\left(sr\right). \tag{4.54}$$

(4.40)-(4.43)da da verilen denklem setinde, spinörün birinci ve dördüncü bileşenleri için aşağıdaki eşitlikler bulunmuştu.

$$\overset{\diamond}{\psi}_1(r)=\frac{1}{(E-M-V)}\left[-\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right] \tag{4.55}$$

$$\overset{\diamond}{\psi}_4(r)=\frac{1}{(E+M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right] \tag{4.56}$$

(4.55) ve (4.56) denklemleri kullanılarak, spinörün birinci ve dördüncü bileşenleri, sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\overset{\diamond}{\psi}_1(r)=\frac{\sqrt{E^2-M^2}}{E-M}\;N_2\;J_{g+1}\left(sr\right) \tag{4.57}$$

ve

$$\overset{\diamond}{\psi}_4(r)=-N_4\;\frac{2s}{(E+M)}J_{g-1}\left(sr\right) \tag{4.58}$$

şeklinde bulunur. Spinör bileşenleri için bulunan bu çözümler, (4.40)-(4.43) ile verilen, birinci mertebe denklem setini sağlar ve normalizasyon katsayıları arasında aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$N_4=N_2\frac{(E^3-EM^2-2s^2E-2s^2M)}{2s^2\left(E-M\right)} \tag{4.59}$$

4.2. $V = \alpha/r$ **Durumu**

Denklem (4.5) ve (4.6), denklem (4.2) ve (4.3) te yerlerine yazılarak, sırasıyla,şu denklemler bulunuyordu:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\frac{1}{(E-M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}-\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right]\\&+\left(-\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{1}{(E+M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right]\right]\\&+(-E+\Delta m+V)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0,\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\frac{1}{(E+M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\left(\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right]\\&+\left(\frac{g}{r}+\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\left[\frac{1}{(E+M-V)}\left[\left(\frac{g}{r}-\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left(-\frac{g}{r}+\frac{d}{dr}\right)\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right]\right]\\&+(E+\Delta m+V(r))\overset{\diamond}{\psi}_3(r)=0.\end{aligned} \tag{4.61}$$

(4.60) ve (4.61) taraf tarafa toplanırsa, $\overset{\diamond}{\psi}_3(r)$ ve $\overset{\diamond}{\psi}_2(r)$ arasında, farklı kütleli iki parçacık için, aşağıdaki bağıntı bulunur.

$$(-E+V(r))\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)+\Delta m\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)=0, \tag{4.62}$$

$$\psi_A(r)=\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\overset{\diamond}{\psi}_3(r),\quad \psi_B(r)=\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r) \tag{4.63}$$

Denklem (4.63)'daki tanımlar ile, (4.62) bağıntısından, ψ_A ve ψ_B arasındaki ilişki bulunur.

$$\psi_B(r)=\frac{(E-V(r))}{\Delta m}\psi_A(r) \tag{4.64}$$

(4.62) kullanılarak $\overset{\diamond}{\psi}_3(r)$ ve $\overset{\diamond}{\psi}_2(r)$ birbirleri cinsinden ifade edilebilir.

$$\overset{\diamond}{\psi}_3(r)=\frac{\left(1-\frac{(E+V(r))}{\Delta m}\right)}{\left(1-\frac{(E-V(r))}{\Delta m}\right)}\overset{\diamond}{\psi}_2(r)$$

(4.60) ve (4.61) taraf tarafa çıkarılırsa;

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{(E-M-V(r))}\left[-\frac{g}{r^2}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)+\frac{g}{r}\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\right]\\
&+\frac{2}{(E-M-V(r))}\left[\frac{d^2}{dr^2}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]\\
&+\frac{2}{(E+M-V(r))}\left[-\frac{g}{r^2}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)+\frac{g}{r}\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]\\
&+\frac{2}{(E+M-V(r))}\left[\frac{d^2}{dr^2}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]\\
&+\frac{2(1-g)}{(E+M-V(r))r}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)+\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]\\
&+\frac{2\left(\frac{d}{dr}V(r)\right)}{(E-M-V(r))^2}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)+\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]\\
&+\frac{2\left(\frac{d}{dr}V(r)\right)}{(E+M-V(r))^2}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)+\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]\\
&+\frac{2(g+1)}{(E-M-V(r))r}\left[\frac{g}{r}\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)+\frac{d}{dr}\left(\overset{\diamond}{\psi}_3(r)-\overset{\diamond}{\psi}_2(r)\right)\right]\\
&+(-E+V(r))\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)-\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)\\
&+\Delta m\left(\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\overset{\diamond}{\psi}_3(r)\right)=0. \qquad (4.65)
\end{aligned}$$

Bu denklemin tam olarak çözümü yapılamamaktadır.

4.2.1. Kütlesiz parçacıklar durumu ($m_1 = m_2 = 0$)

Parçacıkları kütlesiz kabul ederek denklemi incelersek, pozitronyum durumundaki gibi, spinörün ikinci ve üçüncü bileşeni arasında $\overset{\diamond}{\psi}_2(r) = -\overset{\diamond}{\psi}_3(r)$ ilişkisi bulunur. Kütlesiz parçacıklar için, $A = E - V(r)$ tanımıyla, genel merkezcil bir potansiyel durumunda denklem şu yapıya indirgenir:

$$\frac{d^2}{dr^2}\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left(\frac{\left(\frac{d}{dr}V(r)\right)}{A}+\frac{1}{r}\right)\frac{d}{dr}\overset{\diamond}{\psi}_2(r)+\left(\frac{A^2}{4}-\frac{g^2}{r^2}\right)\overset{\diamond}{\psi}_2(r)=0. \qquad (4.66)$$

Bu denklem Coulomb potansiyeli için çözülürse, $\overset{\diamond}{\psi}_2(r)$ için Heun C çözümü bulunur.

$$\overset{\diamond}{\psi}_2(r) = D\,(r)\;\; H_c\;\,(a, b, c, d, e; y)\,. \qquad (4.67)$$

Burada bulunan çözümdeki terimler açık olarak şu şekildedir;

$$D\,(r) = C r^{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{4g^2+2}}{2}} e^{-\frac{1}{2}iEr}$$

$$a = i, \quad b = \sqrt{4g^2+2}, \quad c = -2, \quad d = 0, \quad e = \frac{3}{2}$$

ve fonksiyonun değişkenini temsil eden terim

$$y = -Er$$

olarak bulunmuştur.

Fakat bulunan bu çözüm, daha önce H_c fonksiyonları için yazılan enerji bağıntısı kullanıldığında, enerji spektrumu vermemektedir. Açısal kısmı temsil eden g kuantum sayısı ile "baş kuantum sayısı" olarak ifade edilen n arasında şu ilişki bulunur. Enerji bağıntısı için;

$$d = -a\left(n + \frac{b+c+2}{2}\right) \tag{4.68}$$

ifadesi kullanılır. Terimler yerlerine yerleştirildiğinde;

$$n = -\frac{\sqrt{4g^2+2}}{2}$$

ve buradan

$$g = \sqrt{n^2 - \frac{1}{2}}$$

bağıntısı elde edilir.

4.2.2. Farklı kütleli relativistik iki-cisim durum

Bulunan ikinci mertebe (4.65) diferansiyel denklemini, α' nın kuvvet serisine açıp ikinci mertebeye kadar olan terimler dikkate alındığında bulunan denklem şu şekildedir:

$$G(r)\frac{d^2}{dr^2}F_3(r) + P(r)\frac{d}{dr}F_3(r) + H(r)F_3(r) = 0. \tag{4.69}$$

Burada aşağıdaki kısaltmalar kullanıldı:

$$G(r) = -8\alpha\Delta m r^2 E M^2 + 4\alpha r^2 E^2 M^2 + 4\Delta m r^3 E^2 M^2 - 4r^3 E^3 M^2 + 4\alpha r^2 E^4 + 4r^3 E^5,$$

$$P(r) = 4\alpha\Delta m r E M^2 - 4\alpha\Delta m r E^3 + 4\Delta m r^2 E^2 M^2 - 4\Delta m r^2 E^4 - 4r^2 E^3 M^2 + 4r^2 E^5,$$

$$\begin{aligned} H(r) = {} & -4\Delta m r j^2 E^2 M^2 - 8\alpha j \Delta m E^2 M - 4\alpha\Delta m r^2 E^3 M^2 + 2\alpha\Delta m r^2 E M^4 \\ & - \alpha r^2 E^2 M^4 - \alpha r^2 \Delta m^2 M^4 E + 2\alpha r^2 \Delta m^2 E^2 M^2 + 8\alpha j^2 \Delta m E M^2 \\ & - \alpha\Delta m^2 r^2 M^4 - \Delta m r^3 M^4 E^2 + 8\alpha j E^3 M - 4\alpha\Delta m E M^2 + 2\alpha r^2 E^4 M^2 \\ & + 2\alpha\Delta m r^2 E^5 - 4\alpha j^2 E^2 M^2 + 2\Delta m r^3 E^4 M^2 + 2\Delta m^2 r^3 E^2 M^2 \\ & - 2\Delta m^3 r^3 E^2 M^2 + 4r\Delta m j^2 E^4 - r^3 \Delta m E^6 + r^3 E^3 M^4 \\ & - r^3 \Delta m^2 E^5 + r^3 \Delta m^3 E^4 + r^3 \Delta m^3 M^4 - \alpha r^2 E^6 - 2r^3 E^5 M^2 \\ & - 4E^5 r j^2 + 4\alpha\Delta m E^3 - 4\alpha j^2 E^4 + r^3 E^7. \end{aligned}$$

Bu denklemin çözümü, Konfluent Heun fonksiyonu (H_C) cinsinden bulunmuştur. Çözüm fonksiyonu şu formdadır.

$$F_3\left(r\right)=N\left(r\right)\;H_c\;\left(a,b,c,d,e,\mathbf{x}\right). \tag{4.70}$$

Burada kısaltılmış olarak yazılmış terimler sırası ile, aşağıdaki gibidir.

$$N(r)=C\;e^{-\zeta r}r^{ql\eta\kappa},$$

$$\zeta=\sqrt{\frac{-E-\Delta m}{\left(E-\Delta m\right)\left(E^2-M^2\right)}\frac{\left(E-M\right)\left(E+M\right)\left(E-\Delta m\right)}{2E}},$$

$$l=\frac{E^2\Delta m-3\Delta mM^2}{-4\Delta mM^2+2E^3+2EM^2},$$

$$q=\sqrt{\left(1+4j^2\right)E^6-\left(2\Delta m+8jM\right)E^5+\varphi_1},$$

$$\varphi_1=\left(18j^2+2\right)M^2+\left(8\Delta mjM+\Delta m^2\right)E^4,$$

$$\eta=\sqrt{\left(-8M^3j+\left(-16j^2-4\right)\Delta mM^2\right)E^3+\varphi_2},$$

$$\varphi_2=\left(\left(1+4j^2\right)M^4+24\Delta mjM^3+2M^2\Delta m^2\right)E^2,$$

$$\kappa=\sqrt{\left(\left(-2-16j^2\right)\Delta mM^4-16\Delta m^2jM^3\right)E+16\Delta m^2\left(j^2+\frac{1}{16}\right)M^4}$$
$$+E^3+EM^2,$$

$$a=\frac{\alpha\left(-2\Delta mM^2+E^3+EM^2\right)}{E^2}\sqrt{\frac{E+\Delta m}{\left(\Delta m-E\right)\left(E^2-M^2\right)}},$$

$$\begin{aligned}b=&\frac{1}{2\Delta mM^2-E^3-EM^2}\left[\left(2\Delta m+8jM\right)E^5\right]\\&+\frac{1}{-2\Delta mM^2+E^3+EM^2}\left[\left(\left(8j^2+2\right)M^2+8\Delta mjM+\Delta m^2\right)E^4\right]\\&+\frac{1}{-2\Delta mM^2+E^3+EM^2}\left[\left(1+4j^2\right)E^6-8jM^3\right]\\&-\left(\left(16j^2+4\right)\Delta mM^2\right)E^3+\left(\left(2+16j^2\right)\Delta mM^4+16\Delta m^2jM^3\right)E\\&+\left(\left(1+4j^2\right)M^4+24\Delta mjM^3+2M^2\Delta m^2\right)E^2\\&+16\Delta m^2\left(j^2+\frac{1}{16}\right)M^4)^{1/2},\end{aligned}$$

$$c=\frac{\Delta m\left(E^2-M^2\right)}{-2\Delta mM^2+E^3+EM^2},$$

$$d=\frac{\left(-2\Delta m M^2+E^3+EM^2\right)\left(\Delta m M+E^2\right)\left(-\Delta m M+E^2\right)\alpha^2}{2\left(E-M\right)\left(E+M\right)\left(E-\Delta m\right)E^4},$$

$$\begin{aligned}e=&\frac{M^3\left(12\Delta m j+M\right)E^2+\left(-3\Delta m M^4-8\Delta m^2 jM^3\right)E+3M^4\Delta m^2}{2\left(-2\Delta m M^2+E^3+EM^2\right)^2}\\&+\frac{\left(\Delta m^2+4\Delta m jM+2M^2\right)E^4-\left(4jM+\Delta m\right)E^5}{2\left(-2\Delta m M^2+E^3+EM^2\right)^2}\\&+\frac{E^6-\left(4\Delta m M^2+4M^3 j\right)E^3}{2\left(-2\Delta m M^2+E^3+EM^2\right)^2},\end{aligned}$$

ve x ile temsil ettiğimiz, fonksiyon değişkeni şu şekildedir:

$$x=-\frac{E\left(E-M\right)\left(E+M\right)\left(E-\Delta m\right)r}{\alpha\left(-2\Delta m M^2+E^3+EM^2\right)}.$$

Enerji spektrumu ise

$$E^2=\frac{1}{s}\in\left\{\left(-2\Delta m M^2+E^3+EM^2\right)(n+1)-\frac{1}{2}\Upsilon^{\frac{1}{2}}+\frac{\Delta m\left(E^2-M^2\right)}{2}\right\} \tag{4.71}$$

şeklindedir. Burada,

$$s=\alpha\left(-2\Delta m M^2+E^3+EM^2\right)\left(\Delta m M+E^2\right)\left(-\Delta m M+E^2\right),$$

$$\in=2\left(E-M\right)\left(E+M\right)\left(E-\Delta m\right),$$

$$\begin{aligned}\Upsilon=&E^6+4E^6j^2-2E^5\Delta m-8E^5jM+8E^4j^2M^2+2E^4M^2+8E^4\Delta m jM\\&+E^4\Delta m^2-8EjM^3-16E^3\Delta m j^2M^2-4E^3\Delta m M^2\\&+E^2M^4+4E^2j^2M^4+24E^2\Delta m jM^3+2E^2\Delta m^2M^2\\&-2E\Delta m M^4-16E\Delta m j^2M^4-16E\Delta m^2 jM^3+16\Delta m^2 j^2M^4\end{aligned}$$

kısaltmaları kullanıldı.

4.2.3. Eşit kütleli relativistik iki-cisim durumu

4.69) denklemi ($\Delta m=0$) için yeniden düzenlenirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}&\left(4\alpha r^2E^2M^2-4r^3E^3M^2+4\alpha r^2E^4+4r^3E^5\right)\frac{d^2F_3(r)}{dr^2}\\&+\left(-4r^2E^3M^2+4r^2E^5\right)\frac{dF_3(r)}{dr}\\&+\left(-\alpha r^2E^2M^4+8\alpha jE^3M+2\alpha r^2E^4M^2-4\alpha j^2E^2M^2+r^3E^3M^4\right)F_3(r)\\&+\left(-\alpha r^2E^6-2r^3E^5M^2-4E^5rj^2-4\alpha j^2E^4+r^3E^7\right)F_3(r)=0.\end{aligned} \tag{4.72}$$

Bu denklemin çözümü yine Heun C olarak bilinen fonksiyonlar cinsinden bulunmuştur. Çözüm fonksiyonu şu şekildedir:

$$F_3\left(r\right) = K(r) H_c\left(\lambda, \mu, \nu, \xi, \pi, z\right). \tag{4.73}$$

Burada terimlerin açık halleri şu şekilde bulunmuştur.

$$K(r) = C e^{-\Omega\, r} r^{\omega},$$

$$\Omega = \sqrt{-\frac{1}{E^4 - M^2E^2}\frac{E\left(E-M\right)\left(E+M\right)}{2}},$$

$$\omega = \frac{\sqrt{\left(E^2+M^2\right)\left(4j^2M^2+E^2+4E^2j^2-8EjM+M^2\right)}+\left(E^2+M^2\right)}{2\left(E^2+M^2\right)},$$

$$\lambda = \alpha\left(E^2+M^2\right)\sqrt{-\frac{1}{E^4-M^2E^2}},$$

$$\mu = \frac{\sqrt{\left(E^2+M^2\right)\left(4j^2M^2+E^2+4E^2j^2-8EjM+M^2\right)}}{E^2+M^2}, \qquad \nu = 0,$$

$$\xi = \frac{\alpha^2\left(E^2+M^2\right)}{2\left(E^2-M^2\right)},$$

$$\pi = \frac{E^2+M^2-4EjM}{2\left(E^2+M^2\right)}$$

ve z ile temsil ettiğimiz fonksiyon değişkenimizde açık olarak aşağıda verilmiştir.

$$z = -\frac{E\left(E^2-M^2\right)}{\alpha\left(E^2+M^2\right)} r. \tag{4.74}$$

Bu tanım ile enerji bağıntısı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E^2 = M^2 + \frac{A}{4} + \frac{\alpha}{2}E^6\left(E^2+M^2\right). \tag{4.75}$$

Burada,

$$A = \sqrt{\left(4j^2+1\right)E^6 - \left(M^2+1\right)8jME^5 + \left(8j+2\right)M^2E^4 + 4\left(j^2+1\right)M^4E^2}$$

kısaltması kullanıldı.

4.3. 2+1 Boyutlu De Sitter Evren Modelinde İki-Cisim Problemi

Bu evren modeli için, $(2+1)$ boyutta, flat uzay-zaman metriği şu şekilde bilinir.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[dx^2 + dy^2\right]. \tag{4.76}$$

Kovaryant ve kontravaryant metrik tensörler aşağıda verilmiştir.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t) \end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^{-2}(t) & 0 \\ 0 & 0 & -a^{-2}(t) \end{pmatrix}. \tag{4.77}$$

Christoffel sembolleri için genel bağıntı aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left[\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right]. \tag{4.78}$$

Buradan, sıfırdan farklı değere sahip olan bileşenler bulunmuştur.

$$\Gamma^0_{11} = \Gamma^0_{22} = a(t)\,\dot{a}(t), \quad \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \tag{4.79}$$

Bu bileşenleri kullanarak, Spin bağlantı katsayılarını hesaplarız.

Spin bağlantı katsayıları;

$$\Gamma_{\lambda} = -\frac{1}{8} g_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\lambda}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\beta}\right],$$

$$\Gamma_0 = 0, \quad \Gamma_1 = -\frac{1}{2} a(t)\,\dot{a}(t)\gamma^0\gamma^1, \quad \Gamma_1 = -\frac{1}{2} a(t)\,\dot{a}(t)\gamma^0\gamma^2 \tag{4.80}$$

şeklinde bulunur.

Triadlar:

$$g^{\mu\nu} = e^{\mu}_{(i)} e^{\nu}_{(j)} \eta^{ij},$$

$$e^0_{(0)} = 1, \quad e^1_{(1)} = e^2_{(2)} = \frac{1}{a(t)}. \tag{4.81}$$

Pauli matrisleri ve 2x2 boyutlu birim matris aşağıda tekrar hatırlatılmıştır.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Buna göre Dirac matrisleri;

$$\gamma^0 = e^0_{(0)}\bar{\gamma}^0, \quad \gamma^1 = e^1_{(1)}\bar{\gamma}^1, \quad \gamma^2 = e^2_{(2)}\bar{\gamma}^2$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{\gamma}^0 = \sigma_3, \quad \bar{\gamma}^1 = i\sigma_1, \quad \bar{\gamma}^2 = i\sigma_2 \\
&\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = \frac{i}{a\,(t)}\sigma_1, \quad \gamma^2 = \frac{i}{a\,(t)}\sigma_2
\end{aligned} \tag{4.82}
$$

şeklinde bulunur. Bu durumda daha önce minimal çiftlenim başlığı altında yazdığımız denkleme geri dönüp, uygun yerleştirmeler yapılınca,

$$
\begin{aligned}
&\left[(\overset{(1)}{\gamma}{}^0 \left(i\overset{(1)}{\partial}_0 - \Gamma_0 \right) + \overset{(1)}{\gamma}{}^1 \left(i\overset{(1)}{\partial}_1 - \Gamma_1 \right) + \overset{(1)}{\gamma}{}^2 \left(i\overset{(1)}{\partial}_2 - \Gamma_2 \right) - m_1) \otimes \overset{(2)}{\gamma}{}^0 \right] \Phi \\
&+ \left[\overset{(1)}{\gamma}{}^0 \otimes (\overset{(2)}{\gamma}{}^0 \left(i\overset{(2)}{\partial}_0 - \Gamma_0 \right) + \overset{(2)}{\gamma}{}^1 \left(i\overset{(2)}{\partial}_1 - \Gamma_1 \right) + \overset{(2)}{\gamma}{}^2 \left(i\overset{(2)}{\partial}_2 - \Gamma_2 \right) - m_2) \right] \Phi = 0
\end{aligned} \tag{4.83}
$$

elde edilir. Öte yandan,

$$
\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i, \qquad \sigma_i\sigma_i = (\sigma_i)^2 = 1
$$

özellikleri kullanılarak denklem düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \left[\sigma_3 i\overset{(1)}{\partial}_o - \frac{\sigma_1}{a\,(t)}\overset{(1)}{\partial}_1 + \frac{1}{2}\frac{\dot{a}\,(t)}{a\,(t)}\sigma_3 - \frac{\sigma_2}{a\,(t)}\overset{(1)}{\partial}_2 + \frac{1}{2}\frac{\dot{a}\,(t)}{a\,(t)}\sigma_3 - m_1\mathbf{I}_2 \right] \otimes \overset{(2)}{\sigma}_3 \right\} \Phi \\
&+ \left\{ \overset{(1)}{\sigma}_3 \otimes \left[\sigma_3 i\overset{(2)}{\partial}_o - \frac{\sigma_1}{a\,(t)}\overset{(2)}{\partial}_1 + \frac{1}{2}\frac{\dot{a}\,(t)}{a\,(t)}\sigma_3 - \frac{\sigma_2}{a\,(t)}\overset{(2)}{\partial}_2 + \frac{1}{2}\frac{\dot{a}\,(t)}{a\,(t)}\sigma_3 - m_2\mathbf{I}_2 \right] \right\} \Phi = 0
\end{aligned} \tag{4.84}
$$

denklemi elde edilir. Burada matris çarpımları direk çarpım şeklindedir.

$$
\begin{aligned}
&\sigma_3 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & -1 & \end{pmatrix}, \\
&\sigma_1 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix} \quad \mathbf{I}_2 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \\
&\sigma_3 \otimes \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} & & -i & \\ & & & i \\ i & & & \\ & -i & & \end{pmatrix} \\
&\sigma_3 \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i & & \\ i & & & \\ & & & i \\ & & -i & \end{pmatrix}, \qquad \Phi = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.85}
$$

Bu matris denkleminden elde edilen diferansiyel denklem seti şu şekilde olur:

$$a(t)\left[2i\partial_0+\frac{2\dot{a}(t)}{a(t)}-M\right]D_1-(\partial_1\overset{(2)}{-}i\partial_2)D_2-(\partial_1\overset{(1)}{-}i\partial_2)D_3=0, \tag{4.86}$$

$$a(t)\left[-2i\partial_0-\frac{2\dot{a}(t)}{a(t)}+\Delta m\right]D_2-(\partial_1\overset{(2)}{+}i\partial_2)D_1+(\partial_1\overset{(1)}{-}i\partial_2)D_4=0, \tag{4.87}$$

$$a(t)\left[-2i\partial_0-\frac{2\dot{a}(t)}{a(t)}-\Delta m\right]D_3-(\partial_1\overset{(1)}{+}i\partial_2)D_1+(\partial_1\overset{(2)}{-}i\partial_2)D_4=0, \tag{4.88}$$

$$a(t)\left[2i\partial_0+\frac{2\dot{a}(t)}{a(t)}+M\right]D_4+(\partial_1\overset{(1)}{+}i\partial_2)\,D_2+(\partial_1\overset{(1)}{+}i\partial_2)D_3=0. \tag{4.89}$$

Burada, $M=m_1+m_2$, ve $\Delta m=m_1-m_2$ dir. De Sitter uzay-zamanı arka fonunda iki-cisim problemini ele almak için

$$a(t)=e^{Ht} \tag{4.90}$$

seçilir. Öte yandan,

$$\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_2 \qquad k_1=k_2, \quad \text{için} \quad D_i(\mathbf{r},\mathbf{t}):=\widetilde{D_i}(t)\,e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}}, \quad i=1,2,3,4 \tag{4.91}$$

tanımlamalar yapılırsa denklem seti şu hali alır:

$$e^{Ht}\left[2i\frac{d}{dt}+2H-M\right]\widetilde{D_1}(t)+(i+1)\,k\widetilde{D_2}(t)+(i+1)\,k\widetilde{D_3}(t)=0, \tag{4.92}$$

$$e^{Ht}\left[-2i\frac{d}{dt}-2H+\Delta m\right]\widetilde{D_2}(t)-(1-i)\,k\widetilde{D_1}(t)-(i+1)\,k\widetilde{D_4}(t)=0, \tag{4.93}$$

$$e^{Ht}\left[-2i\frac{d}{dt}-2H-\Delta m\right]\widetilde{D_3}(t)-(1-i)\,k\widetilde{D_1}(t)-(i+1)\,k\widetilde{D_4}(t)=0, \tag{4.94}$$

$$e^{Ht}\left[2i\frac{d}{dt}+2H+M\right]\widetilde{D_4}(t)-(1-i)\,k\widetilde{D_2}(t)-(1-i)\,k\widetilde{D_3}(t)=0. \tag{4.95}$$

4.3.1. Eşit kütleli durumda ($\Delta m = 0$)

Bu durumda, (4.92)-(4.95) denklem setine bakılırsa; $\widetilde{D_2}(t) = \widetilde{D_3}(t)$ olması gerektiği görülür. Yani (102.2) ve (102.3) denklemleri özdeş olur. İşlemlerde kolaylık sağlaması amacı ile birkaç operatör tanımlarız.

$$\widehat{A} = e^{Ht}\left[2i\frac{d}{dt} + 2H - M\right], \widehat{B} = e^{Ht}\left[-2i\frac{d}{dt} - 2H\right],$$
$$\widehat{C} = e^{Ht}\left[2i\frac{d}{dt} + 2H + M\right] \tag{4.96}$$

operatörleri tanımlayalım ve denklem setindeki ilk denklem kullanılarak, $\widetilde{D_2}(t)$ yi $\widetilde{D_1}(t)$ cinsinden ifade edelim.

$$\widetilde{D_2}(t) = \frac{\widehat{A}}{2(i+1)k}\widetilde{D_1}(t) \tag{4.97}$$

denklem setindeki son denklem kullanılarak $\widetilde{D_2}(t)$ yi $\widetilde{D_4}(t)$ cinsinden ifade edelim.

$$\widetilde{D_2}(t) = \frac{\widehat{C}}{2(1-i)k}\widetilde{D_4}(t) \tag{4.98}$$

$\widetilde{D_2}(t)$ yi $\widetilde{D_1}(t)$ cinsinden, (4.93) denkleme yazalım.

$$\widehat{B}\widehat{A}\frac{1}{2(i+1)k}\widetilde{D_1}(t) + (1-i)k\widetilde{D_1}(t) - (i+1)k\widetilde{D_4}(t) = 0.$$

Bu denkleme soldan $\widehat{C}$ operatörü etki ettirirsek;

$$\widehat{C}\widehat{B}\widehat{A}\frac{1}{2(i+1)k}\widetilde{D_1}(t) + (1-i)k\widehat{C}\widetilde{D_1}(t) - (i+1)k\widehat{C}\widetilde{D_4}(t) = 0$$

$$\widehat{C}\widetilde{D_4}(t) = 2(1-i)k\widetilde{D_2}(t) = \frac{(1-i)}{(i+1)}\widehat{A}\widetilde{D_1}(t)$$

bağıntıları kullanılarak, denklem, tek bir spinör bileşeni cinsinden aşağıdaki gibi olur.

$$\widehat{C}\widehat{B}\widehat{A}\frac{1}{2(i+1)k}\widetilde{D_1}(t) + (i-1)k\left(\widehat{C} + \widehat{A}\right)\widetilde{D_1}(t) = 0. \tag{4.99}$$

Tanımladığımız operatörler açık olarak yazılıp bulunan üçüncü mertebe denklem düzenlenirse, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{d^3}{dt^3}\widetilde{D_1}(t) + \frac{1}{8i}\left((i+1)24H\right)\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{D_1}(t)$$
$$+\frac{1}{8i}\left(2iM^2 + 48H^2 - 8iH^2 - 8HM\right)\frac{d}{dt}\widetilde{D_1}(t)$$
$$+\frac{1}{8i}\left(-24iH^3 + 8H^3 - 2iH - 8H^2 + 8iH^2 + 24M^2\right)\frac{d}{dt}\widetilde{D_1}(t) = 0.$$

Bu denklemin çözümünde modifiye Bessel fonksiyonları cinsinden bulunmuştur.

$$\breve{a} = -\frac{\sqrt{(-iM + 2H^2)}}{4H}$$

tanımı yaparak bulunan çözüm aşagıdaki gibi ifade edilir.

$$\widetilde{D_1}(t) = C_1 e^{(i-1)Ht}\ I_{\breve{a}}\left(\frac{1}{2}\frac{k\sqrt{2}e^{-Ht}}{H}\right)^2 + C_2 e^{(i-1)Ht}\ K_{\breve{a}}\left(\frac{1}{2}\frac{k\sqrt{2}e^{-Ht}}{H}\right)^2$$
$$+ C_3 e^{(i-1)Ht}\ I_{\breve{a}}\left(\frac{1}{2}\frac{k\sqrt{2}e^{-Ht}}{H}\right)\ K_{\breve{a}}\left(\frac{1}{2}\frac{k\sqrt{2}e^{-Ht}}{H}\right).$$

5. TARTIŞMA

Bu tez kapsamında, Barut ve arkadaşları tarafından türetilen ve 3+1 uzay-zaman zemininde analizi yapılan, relativistik iki-cisim denklemi (Barut ve Komy 1985, Barut ve Ünal 1985, 1986a,b, Barut 1987), 2+1 uzay-zaman zemininde ele alınmıştır. Öncelikle literatür ışığında 2+1 uzay-zaman zemininde Dirac matrislerinin nasıl temsil edilmesi gerektiği konusunda araştırmalar yapılmıştır. Bu matrisler Dirac cebrini sağlayacak şekilde alternatifli olarak seçilebilir. Literatürde bu matrislerin seçimi konusunda farklı tercihlerde bulunmaktadır. Bu matrisler için uygun seçim bulunmuş (Sucu ve Ünal 2007) ve kısmi türevli birinci mertebe denklem seti çıkarılmıştır.

İki-cisim problemlerinin analizi sırasında, tek-cisim problemlerinin büyük çoğunluğu çözülebildiği için, kütle merkezi ve bağıl koordinatlar sistemine geçiş yapılır. Tez kapsamında izlenen yol bilinen, fenomenolojik olan yoldur. Bu geçiş yapıldıktan sonra, kütle merkezini durgun kabul ederek, bağıl koordinatlar cinsinden yazılmış bir denklem elde edilir. Bundan sonraki süreçte, simetrilerden faydalanmak sebebiyle, polar koordinatlara geçiş yapılır. Etkileşim potansiyeli sadece parçacıklar arası göreli uzaklığa bağlı olduğu için, açısal kısım denklemlerden ayrılabilir. Böylece radyal diferansiyel denklem seti elde edilmiştir. Bu denklemlerin analizi sırasında en ideal durumdan en karışık duruma doğru bir seyir izlenmiştir. İlk olarak serbest parçacıklar durumu ele alınmış ve ayrı iki alt başlıkta incelenmiştir. Bu kısımda ilk olarak pozitronyum durumu olarak bilinen durum ($\Delta m = 0$), sonra herhangi iki kütleli parçacık durumu ele alınmıştır.

Daha sonra Coulomb etkileşimi için yine $\Delta m = 0$ ve $m_1 \neq m_2$ durumları analiz edilmiş, spinör bileşenleri bulunmuş enerji için bağıntılar ve bazı durumların spektrumları elde edilmiştir. Son olarak exponansiyel olarak genişleyen düz evren modelinde iki-parçacık denklemi analiz edilmiş ve bulunan 3. mertebe diferansiyel denklemi $\Delta m = 0$ durumu için çözülerek spinör bileşeni elde edilmiştir. Özellikle $V(r) = 0$ durumunda bulunan çözümler, 3+1 uzay-zaman zemininde yapılmış olan çalışmalardaki sonuçlar ile birebir uyum göstermektedir (Barut ve Ünal 1986a,b).

6. SONUÇ

Relativistik kuantum mekaniği kapsamında iki-cisim probleminin analizi için uzun yıllardır birçok çalışma yapılmış, fakat problemin tam-olarak analizi günümüzde bile tamamlanamamıştır. Relativistik olarak, bir alan aracılığı ile etkileşen iki-cisim probleminde, alanın ne olması gerektiği tam olarak bilinmemektedir. Relativistik teoride ışık hızının sonlu olması, etkileşmeler arasında gecikme etkisi olacağı anlamına gelmekte ve bu gecikme etkileri, problemin analizinde tam-olarak kullanılamamaktadır. Problem aslında çok zamanlı (tek-zamandan fazla) bir problemdir. Literatür incelendiğinde, quasi-potansiyel yaklaşıklığı altında, sistemin, tek-zamanlı olarak ele alınabileceği görülmektedir. Relativistik iki-cisim problemi başlığı altında yapılan çalışmalar arasında bizim için çarpıcı olan 1980 li yıllarda Barut ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmalardır (Barut ve Komy 1985, Barut ve Ünal 1985, 1986a,b, Barut 1987). Bu çalışmalarda birincil prensip olması itibarı ile Lagrange prensibi ve kuantum-elektrodinamiğinin temel prensipleri kullanılarak, relativistik olarak etkileşen iki-cisim için, uygun iki-cisim Dirac Hamiltonyeni kurulmuştur. Bu Hamiltonyende cebrin ve geometrinin bazları arasındaki ilişki, bilindiği üzere Dirac matrisleri kullanılarak kurulur. Kurulan bu Hamiltonyen kullanılarak, 3+1 uzay-zaman tabanında, bazıları cebirsel, bazıları diferansiyel olmak üzere, radyal denklemler bulunmuş ve bu denklemler çözülmüştür. Cebirsel denklemlerin varlığı, 3+1 uzay-zaman tabanında matematiksel karmaşayı biraz hafifleştirsede, matematiksel karmaşa halen oldukça fazladır. 2+1 uzay-zaman tabanında, geometri ve cebrin bazları arasındaki bağlantının kurulması aşamasında birden çok alternatif mevcuttur. Burada 2+1 uzay-zaman boyutunda yapılan bir çalışmaya göre bu matrislerin uygun seçimi yapılmış ve bizim için referans oluşturmuştur (Sucu ve Ünal 2007). 2+1 uzay-zaman zemininde, relativistik kuantum mekaniği kapsamında yapılan çalışmalar incelendiğinde, 3+1 uzay-zamanda yapılan paralel çalışmalar arasında dikkate değer bir uyum görülmektedir. Tüm bunlar göz önünde bulundurularak, bu tez kapsamında, relativistik iki-cisim problemi, nispeten matematiksel sadelik sebebiyle, 2+1 uzay-zaman tabanında ele alınmıştır. 3+1 uzay-zaman boyutunda çiftlenimli denklem setindeki açısal kısımlar çeşitli grup teorisi yaklaşımları ile incelenmiştir (Barut ve Ünal 1985, Yılmazer 1987). 2+1 uzay-zaman boyutunda açısal kısımlar için sadelik, geometri kaynaklıdır. Etkileşim potansiyelinin sadece parçacıklar arası göreli uzaklığa bağlı olduğu durum için, açısal terimler sistemin hareketine dikkate değer katkı yapmamakta, serbest parçacık çözümleri şeklinde cebire dahil edilmektedir. 2+1 uzay-zaman boyutunda relativistik iki-cisim analizi için buraya kadar birçok şey yolundadır. Sistemin hareketini betimleyen radyal denklem seti türetildiğinde önemli bir zorlukla karşılaşılır. Bu denklem setinde denklemlerin tamamı birinci mertebeden diferansiyel denklem formunda karşımıza çıkar. Bu denklemlerin çiftlenimli yapıda olması çözümü zorlaştırmaktadır. Genel, merkezcil bir potansiyel için radyal denklemler türetilmiş, iyi bilinen, Coulomb potansiyeli için çözümler iyi bir yaklaşıklık ile yapılmış, enerji spektrumu elde edilmiştir. Bu kısımda dörtlü spinörün sadece bir bileşeni bulunmuştur. Bu potansiyel için bulunan çözüm literatürde çok yeni yeni sayılabilecek Heun fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların türev bağıntıları hakkında elimizde fazla bilgi bulunmaması sebebiyle diğer bileşenler için çalışmalar sonraki tarihlere bırakılmıştır. Yine bu diferansiyel denklem seti etkileşim potansiyelinin sıfır olduğu durum için, iki farklı başlık altında, özel durum kısıtlamaları ile çözümler bulunmuş ve 3+1 uzay-zaman boyutunda Ünal ve Barut tarafından yapılan çalışmalar ile birebir ve uyumlu sonuçlar bulunmuştur. Ayrıca genişleyen evren modelinde relativistik iki-cisim problemi analiz edilmiş, bulunan denklemler çözümlenmiştir. 2+1 uzay-zamanda, Pozitronyum durumunda etkileşim potansiyelini merkezcil bir potansiyel olması şartıyla, potansiyelin ne olduğundan bağımsız olarak, dörtlü spinörün, ikinci ve üçüncü bileşenleri arasında $\psi_2(r) = -\psi_3(r)$ ilişkisi bulunmuştur ve her iki durumda da bulunan çözümlerin, alakalı birinci mertebe denklem setlerini sağladıkları kontrol edilmiştir. Her iki durumda da ikinci mertebe diferansiyel denklem, iyi-bilinen Bessel diferansiyel denklemi ve çözümleride Bessel fonksiyonları olarak bulunmuştur. Bu denklemler Coulomb etkileşimi altında, kütlelerin sıfır olduğu durum için çözülmüş fakat enerji spektrumu elde edilememiştir. Parçacıkların kütlelerinin sıfır olduğu durum hakkında, günümüzde bu problemin Grafen tabanında analizi popülerlik kazandığı için, sonuçların fiziksel yorumları ve deneysel verilerle karşılaştırılması konusunda çalışmalarımız devam etmektedir.

7. KAYNAKLAR

ALSTEIN, P.V.and CRATER, W.H. 1986. Exact Parapositronium Like Solution to Two-Body Dirac Equations. *Phys. Rev. D*, 34: 1932.

AYDIN, Z.Z.and YILMAZER, A.U. 1988. On the Relativistic Two Fermion Problem. *J. Phys. G:Nucl. Phys.*, 14: 1345.

BANADOS, M., TEITELBOIM, C. and ZANELLI, J. 1992. Black Hole in Three-Dimensional Spacetime. *Phys. Rev. Lett.*, 69: 1849.

BARUT, A.O. and KOMY, S.1985. Derivation of Nonperturbative Relativistic Two-Body Equations from the Action Principle in Quantum-Electrodynamics. *Fortsch. Phys. V.*, 33(6): 309.

BARUT, A.O. and ÜNAL, N. 1985. Radial Equations for the Most General Electric and Magnetic Potentials. *Fortsch. Phys.*, 33(6): 319-322.

BARUT, A.O. and ÜNAL, N. 1986a. A New Approach to Bound-State Quantum Electrodynamics. *Phys. Scripta.*, 142: 467.

BARUT, A.O. and ÜNAL, N. 1986b. A New Approach to Bound-State Quantum Electrodynamics(2). *Phys. Scripta.*, 142: 488.

BARUT, A.O. 1987. On the Treatment of Müller and Breit Potentials and The Covariant Two-Body Equation For Positronium and Müonium. *Phys. Scripta.*, 36: 493.

BETHE, G. and SALPETER, E. 1960. Quantum Mechanics of Atoms with One and Two Electrons. Moscow, Fizmatgiz, 562p.

BRANDSTEN, B.H. and JOACHAIN, C.J. 2006. Physics of Atoms and Molecules. Dorling Kindersley Pvt. Ltd., USA, 1112p.

BREIT, G. 1929. The Effect of Retardation on Interaction of Two Electrons. *Phys. Rev.*, 34: 553-573.

CARLIP, S. and NELSON, J. E. 1995. Comparative quantizations of 2+1 Dimensional Gravity. *Phys. Rev. D*, 51: 5643.

CHILDERS, R.W. 1982. Two Body Dirac Equation for Semirelativistic Quarks. *Phys. Rev. D*, 26: 2902.

CRATER, W.H. and ALSTEIN, P.V. 1987. Two Body Dirac Equations for Particles Interacting through World Scalar and Vector Potentials. *Phys. Rev. D*, 36: 10.

CRATER, W.H. and ALSTEIN, P.V. 1988. Two-Body Dirac Equations for Meson Spectroscopy. *Phys. Rev. D*, 37: 1983.

CRATER, W.H. and ALSTEIN, P.V. 2000. Two-Body Dirac Equations for Relativistic Bound States of Quantum Field Theory. arXiv: hep-ph/ 9912386.

CRATER, W.H., LIU, B. and ALSTINE, P.V. 2003. Two-Body Dirac Equations from Relativistic Constraint Dynamics with Applications to QED and QCD Bound-States and to N-N Scattering. arXiv: hep - ph/ 0306291.

CRATER, W.H., WONG, C.Y. and ALSTEIN, P.V. 2006. Tests of Two-Body Dirac Equations Wave Functions in Decays of Quarkonium and Positronium into Two Photons. *Phys. Rev. D*, 74: 054028.

CRATER, W.H. and WONG, C.Y. 2007. Two-Gamma Quarkonium and Positronium Decays with Two-Body Dirac Equations of Constraint Dynamics. *J. Phys. Conf. Ser.* 69: 012021.

CRATER, W.H., YOON, J.H. and WONG, C.Y. 2009. Singularity Structures in Coulomb-Type Potentials in Two-Body Dirac Equations of Constraint Dynamics. *Phys. Rev. D*, 79, 034011.

DARWIN, C.G. 1920. The Dynamical Motions of Charged Particles. *Phil. Mag.*, 39: 537.

DESER, S., JACKIV, R. and T'HOOFT, G. 1984. Three-dimensional Einstein gravity; dynamics of flat space. *Ann. Phys.*, 152: 220.

DONG, S.H. and MA, Z.Q. 2003. Exact Solution to Dirac Equation with a Coulomb Potential in 2+1 Dimensions. *Phys. Lett. A*, 312: 78-83.

DUVIRYAK, A. 2008. Solvable Two-Body Dirac Equation as a Potential Model of Light Mesons. *SIGMA*, 048.

FERMI, E. and YANG, C. N. 1949. Relativistic Bound State Equation for Two-Fermions. *Phys. Rev.*, 16: 1739.

GEFFEN, D.A. and SUURA, H. 1977. Solution to a Gauge-Invariant, Equal-Time Two-Body Wave Equation. Light-Mass Quark-Antiquark System. *Phys. Rev. D*, 26(11): 3305-3319.

GOLSTEIN, H.1980. Classical Mechanics. Addison-Welley, USA, 600p.

GREINER, W. 2001. Quantum Mechanics an Introduction. Springer, New York, 485p.

GÜRTAŞ, S. 2013. Spin-1 ve Spin-1/2 Relativistik Parçacıklarının Çeşitli Potansiyeller İçin 2+1 Boyutta Kuantum Mekaniksel Davranışlarının İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, 60 sayfa.

KALB, M. and ALSTEIN, P. 1976. Constraint Hamiltonian Mechanics. Yale Preprint 3075.

KEMMER, N. 1937. Field Theory of Nuclear Interaction. *Phys. Rev.*, 52: 906.

KOIDE, Y. 1968. On the Two-Body Bound State Problem of Dirac Particles. *Prog. Theor. Phys.*, 39: 817-829.

LIENERT, M. 2015. On The Question of Current Conservation for The Two-Body Dirac Equations of Constraint Theory. arXiv: 1501. 07027(quanth-ph).

MARCOS, M. and VERONİCA, R. 2002. The Two-Body Problem with Spin in Relativistic Quantum Mechanics: The Case of Positronium. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 35: 8467-8477.

MENCULINI, L., PANELLA, O. and ROY, P. 2013. Exact Solution of The (2+1) Dimensional Dirac Equation in a Constant Magnetic Field in The Presence of a Minimal Length. *Phys. Rev. D*, 87: 065017.

OLEG, L.B., ROMAN, Y.K. and KLAUS, Z. 2013. Coupling of Two Dirac Particles. *Phys. Rev. A*, 87:042513.

SABIO, J., SOLS, F. and GUINEA, F. 2010. Two-Body Problem in Graphene. *Phys. Rev. B*, 81: 045428.

SEMAY, C. and CEULENEER, R. 1993. Two-Body Dirac Equation and Regge Trajectories. *Phys. Rev. D*, 48: 9.

SUCU, Y. and ÜNAL, N. 2007. Exact Solution of Dirac Equation in 2+1 Dimensional Gravity. *J. Matt. Phys.*, 48: 052503.

THORTHON, S.T. and MARION, J.B. 2003. Classical Dynamics of Particles and System. Cengage Learning, USA, 672p.

TODOROV, I. T. 1971. Quasipotential Equation Corresponding to The Relativistic Eikonal Approximation. *Phys. Rev. D*, 3(10): 2351-2356.

WHITNEY, J.F. and CRATER, W.H. 2014. Baryon Spectrum Analysis Using Dirac's Covariant Constraint Dynamics. *Phys. Rev. D*, 89: 014023.

WITTEN, E. 1988. 2+1 Dimensional Gravity as an Exactly Soluable System. *Nucl. Phys. B*, 311: 46.

YILMAZER, A.U. 1987. Relativistik iki-Cisim Problemi ve Onun Süpersimetrik Genelleştirilmesi. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, 187 sayfa.

ÖZGEÇMİŞ

Abdullah GÜVENDİ, 1988 yılında Sivas'ta doğdu. İlk, orta, lise ve ilk üniversite öğrenimlerini Sivas'ta tamamladı. 2009 yılında Akdeniz Üniversitesi Fizik bölümünü kazandı ve 2013 yılında üstün başarı ödülü ile mezun oldu. 2013 yılında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2016 yılında yüksek lisanstan mezun oldu.