T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FOURIER- BESSEL HARMONİK ANALİZİNDE BAZI UZAYLAR ve İNTEGRAL OPERATÖRLER ÜZERİNE

Şeyda KELEŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2014

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FOURIER- BESSEL HARMONİK ANALİZİNDE BAZI UZAYLAR ve İNTEGRAL OPERATÖRLER ÜZERİNE

Şeyda KELEŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 29/12/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI
Prof. Dr. İlham ALİYEV
Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Prof. Dr. Gabil ADİLOV
Yrd. Doç. Dr. Melih ERYİĞİT

ÖZET

FOURIER- BESSEL HARMONİK ANALİZİNDE BAZI UZAYLAR ve İNTEGRAL OPERATÖRLER ÜZERİNE

Şeyda KELEŞ

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI
İkinci Danışman: Prof. Dr. Vagif GULİYEV
Aralık 2014, 79 sayfa

Bu tez çalışmasının iki amacı vardır. İlk amaç Fourier- Bessel harmonik analizinde tanımlı bazı fonksiyon uzaylarını inceleyip ardından B- Campanato uzayını tanımlamak ve bu uzayın özelliklerini incelemektir. İkinci amaç ise Fourier- Bessel harmonik analizinde singular integral operatörlerin (B- singular integral operatörlerin) sınırlılığını elde etmektir. Bu amaç doğrultusunda ilk olarak B- singular integral ve vektör değerli B- singular integral operatörleri tanımlanmış ve bu operatörlerin sınırlılıkları elde edilmiştir. Son olarak B- karesel fonksiyon tanımı verilmiş ve vektör değerli B- singular integral operatörünün sınırlılığı vasıtasıyla B- karesel fonksiyonun sınırlılığı ispat edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Laplace- Bessel diferansiyel operatörü genelleşmiş kayma, singular integral operatör, karesel fonksiyon.

JÜRİ: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI (Danışman)
Prof. Dr. İlham ALİYEV
Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Prof. Dr. Gabil ADİLOV
Yrd. Doç. Dr. Melih ERYİĞİT

ABSTRACT

ON SOME SPACES AND INTEGRAL OPERATORS IN FOURIER-BESSEL HARMONIC ANALYSIS

Şeyda KELEŞ

PhD Thesis in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI
Second Supervisor: Prof. Dr. Vagif GULİYEV
December 2014, 79 pages

This thesis has two aims. The first aim of this thesis is to investigate some function spaces in Fourier- Bessel harmonic analysis then to define B- Campanato space and to study some properties of this space. The second aim is to obtain boundedness of the singular integral operators (B- singular integral operators) on Fourier- Bessel harmonic analysis. For this purpose, firstly, definitions of B- singular integral operators and vector- valued B- singular integral operators are given and boundedness of these singular integral operators are obtained. Finally, definition of B- square function is given and boundedness of B- square function is proved by using boundedness of vector- valued B- singular integral operators.

KEYWORDS: Laplace- Bessel differantial operator, generalized shift operator, singular integral operator, square function.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI (Supervisor)
Prof. Dr. İlham ALİYEV
Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Prof. Dr. Gabil ADİLOV
Asst. Prof. Dr. Melih ERYİĞİT

ÖNSÖZ

Fourier harmonik analiz, matematiğin, fiziğin ve birçok teknik bilimin ortak dili ve fonksiyon uzayları teorisi, singular integral operatör teorisi bu alanın önemli teknik araçlarıdır.

Fonksiyon uzayları teorisinin, analizin diğer dallarında özellikle de kısmi türevli denklemler teorisinde önemli uygulamaları vardır. Örneğin, Laplace diferansiyel operatörü

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

vasıtasıyla tanımlanan fonksiyon uzayları uzun yıllardır birçok matematikçi ve matematik- fizikçi tarafından çalışılmaktadır. Bundan başka, Laplace- Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

nin doğurduğu fonksiyon uzayları teorisi ise başta Klyuchantsev (1970), Kipriyanov ve Klyuchantsev (1970) olmak üzere son yıllarda birçok matematikçi tarafından çalışılmış ve günümüzde de üzerine hala çalışmalar yapılmaktadır.

Singular integral operatör teorisine gelince Fourier harmonik analizinin problemlerinin çözümlenmesinde, hem kısmi türevli denklemler teorisinde hem de matematik- fiziğin birçok uygulamalarında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Başta Calderon ve Zygmund (1956), Mihlin (1965) olmak üzere birçok matematikçinin bu teoriye katkıları yadsınamaz.

Fourier harmonik analizi aslında Öklid kayması ile çalışmaktadır ve çoğu zaman klasik Fourier harmonik analizi olarak anılır. Burada geçen fonksiyon uzayları, singular integral operatörler hep Öklid kayması üzerine kurulmuştur ve Öklid kayması ile Δ- Laplace diferansiyel operatörünün ilişkisi iyi bilinmektedir. Δ- Laplace diferansiyel operatörü yerine Δ_B- Laplace- Bessel diferansiyel operatörü alınarak oluşturulan Fourier- Bessel harmonik analizinde ise benzer bir ilişki genelleşmiş kayma operatörü ile Laplace- Bessel diferansiyel operatörü arasında vardır.

Bu çalışmanın genel amacı, Fourier- Bessel harmonik analizinde tanımlanan bazı fonksiyon uzaylarını ve singular integral operatörleri incelemektir. Bu amaç doğrultusunda tezin ön bilgiler kısmında Fourier- Bessel harmonik analizinden gerekli bilgiler verilmiş ve ardından literatürde var olan Fourier- Bessel harmonik analizinde tanımlı bazı fonksiyon uzayları ve singular integral operatörleri tanıtılmıştır. Tez Fourier- Bessel harmonik analizinde iki farklı çalışma içermektedir.

Önce, Fourier- Bessel harmonik analizindeki fonksiyon uzayları kategorisinde yerini alacak olan B- Campanato uzayı tanımlanacak ve bu uzayın bazı özellikleri, ilgili gömme teoremleri verilecektir.

Ardından Fourier- Bessel harmonik analizine katkı sağlayacağı düşünülen singular integral operatörün ve vektör değerli singular integral operatörün sınırlılığı incelenecektir. Buna ilaveten bu bölümün son kısmı, Fourier- Bessel harmonik analizinde önemli bir yeri olan karesel fonksiyonun, vektör değerli singular integral operatör vasıtasıyla sınırlılığının gösterilmesini içermektedir.

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında çok emeği geçen, benden bilgi ve desteklerini hiç esirgemeyen ve her zaman yardımcı, yol gösterici olan danışman hocalarım Doç. Dr. Simten Bayrakçı ve Prof. Dr. Vagif Guliyev'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm çalışmalarım boyunca her ihtiyaç duyduğumda yardımcı olan, değerli ve derin bilgileri ile bana ışık tutan, önüme çıkan her konuda yardımlarını esirgemeyen, beni tüm içtenliği ve samimiyeti ile destekleyen saygı değer hocam Prof. Dr. İlham Aliyev'e teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak, bugünlere gelmem de en az benim kadar emek veren sevgili eşim Sinan Keleş'e, benden desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen Altınkol ve Keleş ailelerine şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}^n$	n- boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n_+$	n- boyutlu Öklid uzayının üst yarı düzlemi
C_0^∞	kompakt supportlu smooth fonksiyonların uzayı
$M\left(\mathbb{R}^n_+\right)$	ölçülebilir fonksiyon uzayı
L_0^∞	kompakt supportlu sınırlı fonksiyon uzayı
$p.v$	esas değer
supp f	f in supportu
H, H_1, H_2	Ayrılabilir Hilbert uzaylar
$L_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$	$B-$ Morrey uzayı
$\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$	$B-$ Campanato uzayı
$C_\nu^{0,\beta}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$	Genelleşmiş Hölder fonksiyon uzayları
$H^\nu_{0,\beta}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$	$C_\nu^{0,\beta}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ üzerinde yarı norm
$F_\nu f$	f in Fourier- Bessel dönüşümü
$f \otimes g$	f ile g nin B- girişimi
$D\left(I\right)$	I birim operatörünün tanım kümesi
$R\left(I\right)$	I birim operatörünün değer kümesi
$g\left(F\right)$	B- karesel fonksiyon
$A \approx B$	$\exists C_1, C_2 > 0$ vardır ki $C_1 A \leq B \leq C_2 A$

1. GİRİŞ

Klasik Fourier harmonik analizin esas amacı, Öklid kaymasının $(\tau^h f(x) = f(x-h))$ doğurduğu fonksiyon uzayları üzerinde girişim tipli operatörleri incelemektir. Bu fonksiyon uzaylarının başında L_p- Lebesgue uzayı, ağırlıklı L_p- Lebesgue uzayı, BMO uzayı, Morrey uzayı, Campanato uzayı ve bu gibi uzaylar gelir. Fourier harmonik analizinde önemli bir yere sahip olan bu fonksiyon uzaylarının analizin diğer dallarında özellikle de kısmi türevli denklemler teorisinde birçok uygulamaları vardır. Fourier harmonik analizindeki bu fonksiyon uzayları üzerinde girişim tipli operatörlerin incelenmesi meselesi ise başlı başına bir teoridir. Bahsedilen girişim tipli operatörlerin başında singüler integral operatörler özellikle de potansiyeller (Riesz, Bessel,...), maksimal fonksiyonlar, karesel fonksiyonlar gelmektedir. Girişim tipli operatörlerin en önemlilerinden biri olan singüler integral operatörler

$$Tf(x) = p.v \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, k(x-y)\, dy$$

harmonik analizin önemli konusu olmakla beraber matematik- fiziğin, kısmi türevli denklemlerin, analitik fonksiyonlar teorisinin ve matematiğin diğer dallarının yaygın bir uygulama alanıdır. Singüler integral operatörler teorisi başta Mihlin, Calderon ve Zygmund'un çalışmaları olmak üzere son 60 yıl içerinde oldukça gelişmiştir. Singüler integral operatörlerin sınırlılık koşullarının belirlenmesi bu alandaki çalışmaların en önemli problemlerinden birisidir. Calderon- Zygmund operatörlerinin çeşitli fonksiyon uzaylarında sınırlılığından alınmış neticeler analizin bu ve diğer alanlarında, örneğin, kısmi türevli denklemlerin çözümlerinin regülerliği problemlerinin araştı rılmasında uygulanmaktadır.

Fourier- Bessel harmonik analizi ise Δ_B- Laplace- Bessel diferansiyel operatörü tarafından üretilen T^y genelleşmiş kayma operatörü ile çalışmaktadır. Genelleşmiş kayma operatörü ilk olarak Levitan (1951) tarafından tanımlanıp, çalışılmış ve ardından Kipriyanov ve Klyuchantsev (1970), Mouruo ve Trimeche (1998) tarafından geliştirilmiştir.

Genelleşmiş kayma tarafından doğrulan fonksiyon uzayları başta Kipriyanov, Klyuchantsev olmak üzere son yıllarda Gadjiev, Aliyev, Guliyev gibi matematikçilerin ilgi alanı olmuştur. 1994 yılında Gadjiev ve Aliyev ağırlıklı $L_{p,\nu}$ uzayını, 1998 yılında Guliyev $B-BMO$ uzayını ve 1999 yılında Guliyev $B-Morrey$ uzayını tanımlamış ve bu uzayların özelliklerini incelemişlerdir.

Klasik Fourier harmonik analizinde olduğu gibi Fourier- Bessel harmonik analizinde de fonksiyon uzayları üzerinde girişim tipli operatörleri incelemek birçok matematikçi tarafından popüler çalışma alanı olmuştur. Bu operatörlerden B- singüler integral operatörü, özellikle de B- Riesz potansiyeli, B- maksimal fonksiyon, B- karesel fonksiyon üzerine çalışmalar güncelliğini korumaktadır.

Fourier- Bessel harmonik analizinde girişim tipli operatör denilince ilk akla gelen ve genel anlamda

$$Tf(x) = p.v \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(y)\, K(x,y)\, d\mu(y)$$

ile gösterilen B- singüler integral operatörü ile Muckenhoupt ve Stein (1965), Kipriyanov (1968), Stein (1970), Kipriyanov ve Kluychantsev (1970), Gadjiev ve Aliyev (1994), Guliyev (1998) Gadjiev ve Guliyev (2005), Ekincioğlu ve Şerbetçi (2005) gibi önemli matematikçiler çalışmışlardır.

Bu tez çalışmasında, Laplace- Bessel diferansiyel operatörü Δ_B'nin doğurduğu T^y genelleşmiş kayma operatörü tarafından üretilen, B- Campanato uzayı tanımlanacak ve bu uzayın özellikleri incelenecektir. Ardından Laplace- Bessel diferansiyel operatörünün ürettiği B- singüler integral operatörü tanımlanacak ve $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayında sınırlılığı incelenecektir. Ayrıca bu bölümü referans alarak vektör değerli B- singüler integral operatör tanımı verilecek, H Hilbert uzayı olmak üzere $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H\right)$ uzayında sınırlılığı elde edilecektir. Son olarak, B- karesel fonksiyon tanımı verilecek ve sınırlılığı kanıtlanacaktır.

2. FOURİER- BESSEL HARMONİK ANALİZİNDEN GEREKLİ BİLGİLER

2.1. $L_{p,\nu}$ Uzayı Hakkında Gerekli Bilgiler

Bu tezin bütününde $\mathbb{R}^n$, n- boyutlu Öklid uzayı olup

$$\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{R}^n$ de norm $|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ eşitliği ile verilir. Ayrıca

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

biçiminde tanımlanacak ve $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$ ile $\mathbb{R}^n$ deki (ve $\mathbb{R}_+^n$ daki) hacim elemanı (Lebesgue ölçümü) gösterilecektir.

Tanım 2.1.1 *(X, M, μ) $\sigma-$ sonlu ölçüm uzayı olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere*

$$L_{p,\mu}(X) = \left\{ f : f,\ X - \text{ de ölçülebilir, } \|f\|_{L_{p,\mu}(X)} = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

ile tanımlanır. $X = \mathbb{R}_+^n, d\mu(x) = x_n^{2\nu} dx$ alınırsa

$$L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right) = \left\{ f : \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p \, x_n^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

elde edilir. $p = \infty$ durumunda ise

$$L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right) = \left\{ f : \|f\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)} = ess \sup_{x \in \mathbb{R}_+^n} |f(x)| < \infty \right\}$$

eşitliği ile tanımlanır (Folland 1984).

Tanım 2.1.2 *(Dağılım fonksiyonu) (X, M, μ) $\sigma-$ sonlu ölçüm uzayı ve f, (X, M, μ) de ölçülebilir fonksiyon olsun.*

$$\lambda_f : (0, \infty) \to [0, \infty)$$

olmak üzere $\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\})$ ile tanımlanan λ_f fonksiyonuna f'in dağılım fonksiyonu denir (Folland 1984).

Tanım 2.1.3 *(Chebishev eşitsizliği) $0 < p < \infty$ iken $f \in L_{p,\mu}$ ise herhangi $\alpha > 0$ için*

$$\mu\{x : |f(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{\|f\|_{L_{p,\mu}}}{\alpha} \right)^p$$

eşitsizliği sağlanır (Folland 1984).

Tanım 2.1.4 *(Zayıf $L_{p,\mu}(X)$ uzayı)* (X, M, μ) *$\sigma-$ sonlu ölçüm uzayı ve* $0 < p < \infty$ *olmak üzere zayıf* $L_{p,\mu}(X)$ *uzayı*

$$WL_{p,\mu}(X) = \left\{ f,\ X \text{ de ölçülebilir} : [f]_p = \left(\sup_{\alpha>0} \alpha^p \lambda_f(\alpha) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

biçimindedir (Folland 1984).

Tanım 2.1.5 *Lokal integrallenebilir fonksiyon uzayı* $L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$

$$L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_+^n\right) = \left\{ f : \int_K |f(x)| \, x_n^{2\nu} dx < \infty,\ K \subset \mathbb{R}_+^n \text{ kompakt küme} \right\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.6 *(Hölder eşitsizliği)* (X, M, μ) *$\sigma-$ sonlu ölçüm uzayı olsun. Bu durumda* $f \in L_{p,\mu}(X)$, $g \in L_{p',\mu}(X)$, $1 \leq p, p' \leq \infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\int_X |f(x) g(x)| \, d\mu(x) \leq \|f\|_{L_{p,\mu}(X)} \|g\|_{L_{p',\mu}(X)}.$$

Özel halde $d\mu(x) = x_n^{2\nu} dx$, $f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *ve* $g \in L_{p',\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *için*

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x) g(x)| \, x_n^{2\nu} dx \leq \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \|g\|_{L_{p',\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

olur (Sadosky 1979, Rubin 1996).

Teorem 2.1.7 *(Minkowski eşitsizliği)* (X, M, μ) *$\sigma-$ sonlu ölçüm uzayı olsun. Bu durumda* $f, g \in L_{p,\mu}(X)$ *ve* $1 \leq p \leq \infty$ *için*

$$\|f + g\|_{L_{p,\mu}(X)} \leq \|f\|_{L_{p,\mu}(X)} + \|g\|_{L_{p,\mu}(X)}$$

eşitsizliği sağlanır. Özel halde $d\mu(x) = x_n^{2\nu} dx$, $f, g \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *için*

$$\|f + g\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} + \|g\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

dir (Folland 1984).

Teorem 2.1.8 *(İntegraller için Minkowski eşitsizliği)* (X, M, μ) *ve* (Y, N, γ) *$\sigma-$ sonlu ölçüm uzayları ve* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu da* $\mu \times \gamma$*- ölçülebilir olsun. Eğer h.h.*$y \in Y$ *için* $f(\cdot, y) \in L_{p,\mu}(X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *ve* $\int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L_{p,\mu}(X)} d\gamma(y) < \infty$ *ise*

$$\int_Y f(x, y) \, d\gamma(y)$$

integrali de h.h.$x \in X$ için sonludur ve

$$\left\| \int\limits_{Y} f(x,y)\, d\gamma(y) \right\|_{L_{p,\mu}(X)} \leq \int\limits_{Y} \| f(\cdot, y) \|_{L_{p,\mu}(X)}\, d\gamma(y)$$

eşitsizliği sağlanır. Özel halde $d\gamma(y) = y_n^{2\nu} dy$, $d\mu(x) = x_n^{2\nu} dx$ ve f, $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ da ölçülebilir fonksiyon ise

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(x,y)\, y_n^{2\nu} dy \right\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \| f(x,y) \|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}\, y_n^{2\nu} dy$$

dir (Sadosky 1979, Folland 1984).

Teorem 2.1.9 *(Fubini teoremi) (X, M, μ) ve (Y, N, ν) $\sigma-$ sonlu ölçüm uzayları, $\mu \times \nu$ ise $M \times N$ üzerinde μ ve ν nın çarpımı olsun. Eğer $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu \times \nu$ ölçümüne göre integrallenebilir ise h.h.$x \in X$ için $\int\limits_{Y} f(x,y)\, d\nu(y)$ ve h.h.$y \in Y$ için $\int\limits_{X} f(x,y)\, d\mu(x)$ integralleri sonludur ve*

$$\int\limits_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu \times \nu) = \int\limits_{X} \left(\int\limits_{Y} f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_{Y} \left(\int\limits_{X} f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

eşitliği sağlanır (Folland 1984).

Tanım 2.1.10 *(Yarı- lineer operatör) (X, M, μ) ve (Y, N, ν) $\sigma-$ sonlu ölçüm uzayları olmak üzere $T : X \to Y$ operatörü herhangi bir $c > 0$ sabiti için*

$$|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$$
$$|T(cf)| = c\,|Tf|$$

özelliklerini sağlarsa T operatörüne yarı- lineer operatör denir (Folland 1984).

Tanım 2.1.11 *(Güçlü (p,q) tipli operatör) $1 \leq p, q \leq \infty$ ve*

$$T : L_{p,\mu}(X) \to L_{q,\nu}(Y)$$

yarı- lineer operatör olmak üzere her $f \in L_{p,\mu}(X)$ için

$$\|Tf\|_{L_{q,\nu}(Y)} \leq C\, \|f\|_{L_{p,\mu}(X)}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sabiti varsa T'ye güçlü (p,q) tipli operatör denir (Folland 1984).

Tanım 2.1.12 *(Zayıf (p,q) tipli operatör)* $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ *ve*

$$T : L_{p,\mu}(X) \to WL_{q,\nu}(Y)$$

yarı- lineer operatör olmak üzere her $f \in L_{p,\mu}(X)$ *için*

$$[Tf]_q \leq C \|f\|_{L_{p,\mu}(X)}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ *sabiti varsa* T*'ye zayıf* (p,q) *tipli operatör denir (Folland 1984).*

Teorem 2.1.13 *(Marcinkiewicz interpolasyon teoremi)* (X, M, μ) *ve* (Y, N, ν) *iki ölçüm uzayı ve*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad ve \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}, \quad 0 < t < 1$$

olacak şekilde $1 \leq p_0 < q_0 < \infty$, $p_1 \leq q_1$ *ve* $q_0 \neq q_1$ *olsun. Ayrıca* T *yarı- lineer operatörü zayıf* (p_0, q_0) *tipli ve zayıf* (p_1, q_1) *tipli ise* T *yarı- lineer operatörü, güçlü* (p,q) *tiplidir (Folland 1984).*

Teorem 2.1.14 *(Lebesque diferansiyelleme teoremi)* $f \in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *olsun. O halde h.h.*$x \in \mathbb{R}_+^n$ *için*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} T^y f(x) y_n^{2\nu} dy = f(x)$$

dır. Burada $E_t = \left\{y \in \mathbb{R}_+^n : |y| < t\right\}$ *ve* $|E_t|_\nu = Ct^\theta$, $\theta = n + 2\nu$ *dir.*

Tanım 2.1.15 *(Gömme (embedding) operatörü)* X *ve* Y *normlu lineer uzaylar ve* $X \subset Y$ *olsun.* I *birim operatörünün tanım ve değer kümesi,* $D(I) = R(I) = X$ *olmak üzere*

$$I : X \to Y$$

birim operatörü lineer ve sürekli ise I *operatörüne,* X *den* Y *ye gömme operatörü denir ve* $X \hookrightarrow Y$ *ile gösterilir. Gömme operatörü sürekli olduğundan dolayı öyle bir* $C > 0$ *sabiti vardır ki* $\forall u \in X$ *için*

$$\|u\|_Y \leq C \|u\|_X$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $X \hookrightarrow Y$ *ve* $Y \hookrightarrow X$ *ise* $X \leftrightarrows Y$ *yazılır (Kufner, John ve Fucǐk 1977).*

2.2. Genelleşmiş Kayma (Öteleme) Operatörü ve Özellikleri

Tanım 2.2.1 T^y *genelleşmiş kayma operatorünün* $\mathbb{R}_+^n$ *da tanımlı bir* $f(x)$ *fonksiyonuna etkisi,* $\nu > 0$ *sabit tutulmuş bir parametre olmak üzere*

$$T^y f(x) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int\limits_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) (\sin\alpha)^{2\nu - 1} d\alpha$$

biçiminde tanımlanır. Burada $x = (x', x_n)$, $y = (y', y_n)$ *ve* $x', y' \in \mathbb{R}^{n-1}$ *dir. Görüldüğü gibi genelleşmiş kayma* x' *değişkenine göre Öklid kayması ile* x_n *değişkenine göre Bessel kaymasının süperpozisyonudur (Levitan 1951, Kipriyanov ve Klyuchantsev 1970, Klyuchantsev 1970, Aliev ve Bayrakci 1998, Mourou ve Trimeche 1998).*

Genelleşmiş kaymanın aşağıdaki özellikleri iyi bilinmektedir.

Teorem 2.2.2 $f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$, $1 \le p \le \infty$ *olsun.* $\forall y \in \mathbb{R}^n_+$ *için*

$$\|T^y f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \le C\,\|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}$$

eşitsizliği sağlanır. Yani, T^y *operatörü* $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ *dan* $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ *ya sınırlı yani sürekli bir dönüşümdür (Levitan 1951).*

Teorem 2.2.3 $f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$, $1 \le p \le \infty$ *olsun. O halde* $|y| \to 0$ *için*

$$\|T^y f(x) - f(x)\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} \to 0$$

dir (Löfström ve Peetre 1969).

2.3. Bessel Fonksiyonu ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.3.1 $J_\nu(t)$,$\nu > \frac{-1}{2}$, *birinci tip Bessel fonksiyonu* ($t^2y''+ty'+(t^2-\nu^2)\,y=0$ *diferansiyel denkleminin bir çözümü) olmak üzere*

$$j_\nu(t) = 2^\nu \Gamma(\nu+1)\,\frac{J_\nu(t)}{t^\nu}$$

ile tanımlanan $j_\nu(t)$ *fonksiyonuna normalleştirilmiş Bessel fonksiyonu denir. Özel olarak* $t = 0$ *ve* $\forall \nu > 0$ *için* $j_{\nu-\frac{1}{2}}(0) = 1$ *ve* $j'_{\nu-\frac{1}{2}}(0) = 0$ *dir.* $\forall t \in \mathbb{R}$ *için* $|j_\nu(t)| \le 1$ *ve buna ilaveten* $j_\nu(t)$ *fonksiyonu*

$$j_\nu(t) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} \left(1-u^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(tu)\,du$$

ile de ifade edilir. Ayrıca $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ *için*

$$j_\nu(\lambda x)\, j_\nu(\lambda y) = T^x\left(j_\nu(\lambda \cdot)\right)(y)$$

eşitliği sağlanır (Levitan 1951).

2.4. B- Girişim (Convolution) Operatörü ve Özellikleri

Tanım 2.4.1 $f, g \in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ *olmak üzere* f *ile* g *nin B- girişim operatörü*

$$(f \otimes g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} f(y)\, T^y g(x)\, y_n^{2\nu}\, dy$$

biçiminde tanımlanır.

B- girişim operatörü aşağıdaki iki önemli özelliği sağlar:

1) $f \otimes g = g \otimes f$,

2) (Young eşitsizliği) $f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$, $g \in L_{q,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ için $1 \leq p,q,r \leq \infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$ iken

$$\|f \otimes g\|_{L_{r,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \|g\|_{L_{q,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}.$$

2.5. Fourier- Bessel Dönüşümü ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.5.1 *$f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ fonksiyonunun Fourier- Bessel dönüşümü*

$$(F_\nu f)(z) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(x)\, e^{-ix'z'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n z_n)\, x_n^{2\nu} dx$$

ile tanımlanır (Kipriyanov 1968).

Ayrıca Fourier- Bessel dönüşümünün B- girişimine etkisi

$$F_\nu (f \otimes g)(z) = (F_\nu f)(z)\,(F_\nu g)(z)$$

dir.

Teorem 2.5.2 *(Plancherel Teoremi) $f \in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right) \cap L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ise*

$$\|f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} = \|F_\nu f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

eşitliği sağlanır (Kipriyanov 1967).

2.6. Vektör Değerli Fonksiyon Uzayları

Tanım 2.6.1 *H Hilbert uzayı, $M \subset H$ olsun. Eğer $\bar{M} = H$ ise M ye H Hilbert uzayında yoğundur denir. H Hilbert uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa Hilbert uzayına ayrılabilir Hilbert uzayı denir (Kreyszig 1989).*

Tez içerisinde, H ayrılabilir Hilbert uzayı üzerinde iç çarpım $\langle .,. \rangle$ ile norm da $\|h\|_H = \langle h,h \rangle^{\frac{1}{2}}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.6.2 *H ayrılabilir Hilbert uzay ve $f : \mathbb{R}_+^n \to H$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}_+^n$ için $f(x) \in H$ ise f fonksiyonuna, H vektör değerli fonksiyon denir.*

Tanım 2.6.3 $\mathbb{R}^n_+$ *da tanımlı, H Hilbert uzayında değer alan f fonksiyonu için* $\langle f(x), h\rangle$, $(\forall h \in H)$ *skaler fonksiyonu Lebesgue ölçülebilir ise bu durumda f fonksiyonuna, H vektör değerli ölçülebilir fonksiyon denir (Torchinsky 1986).*

Tanım 2.6.4 $1 \leq p < \infty$ *için* $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+, H\right)$ *uzayı*

$$L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+, H\right) = \left\{f, H \text{ vektör değerli ölçülebilir} : \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+, H\right)} < \infty\right\}$$

olarak tanımlanır. Burada $\|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+, H\right)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \|f(x)\|^p_H \, x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ *dir.*

$p = \infty$ *iken*

$$L_\infty(\mathbb{R}^n_+, H) = \left\{f,\ H \text{ vektör değerli ölçülebilir} : \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_+, H)} = ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n_+} \|f(x)\|_H < \infty\right\}$$

dir (Torchinsky 1986).

Tanım 2.6.5 H_1 *ve* H_2 *ayrılabilir Hilbert uzayları olmak üzere*

$$B(H_1, H_2) = \{T \mid T : H_1 \to H_2 \text{ sınırlı, lineer operatör}\}$$

lineer uzayı,

$$\|T\|_{B(H_1,H_2)} = \sup_{h\in H_1} \frac{\|Th\|_{H_2}}{\|h\|_{H_1}},\ h \neq 0$$

normu ile H_1 *den* H_2 *ye vektör değerli sınırlı lineer operatörlerin oluşturduğu Banach uzaydır (Torchinsky 1986).*

Tanım 2.6.6 $\mathbb{R}^n_+$ *da tanımlı f fonksiyonu için* $f(x)\,h$, $(\forall h \in H_1)$ *fonksiyonu,* H_2 *değerli ölçülebilir ise bu durumda f fonksiyonuna,* $B(H_1, H_2)$ *vektör değerli ölçülebilir fonksiyon denir (Torchinsky 1986).*

Tanım 2.6.7 $1 \leq p < \infty$ *için* $L_{p,\nu}(\mathbb{R}^n_+, B(H_1, H_2))$ *uzayı öyle* $B(H_1, H_2)$ *vektör değerli ölçülebilir K fonksiyonlarından oluşur ki*

$$\|K\|_{L_{p,\nu}(\mathbb{R}^n_+, B(H_1,H_2))} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \|K(x)\|^p_{B(H_1,H_2)} \, x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dir (Torchinsky 1986).

Bu bölüm, tez çalışmasının içerisinde kullanılacak olan vektör değerli fonksiyonların bazı özellikleri verilerek sona erecektir.

Aşağıdaki integraller vektör değerli fonksiyonların Bochner integrali olarak düşünülmelidir (Grafakos 2008, s. 322).

$K \in L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n, B(H_1, H_2))$ ve $f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)$ olmak üzere

$$g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} K\left(y\right) T^y f(x) y_n^{2\nu} dy$$

integrali H_2 değerlidir ve $h.h.x \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\|g(x)\|_{H_2} \leq \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|K\left(y\right)\|_{B(H_1,H_2)} \|T^y f\left(x\right)\|_{H_1} y_n^{2\nu} dy$$

eşitsizliği sağlanır. Buna ilaveten

$$\|g\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)} \leq \|K\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, B(H_1,H_2)\right)} \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$$

dir.

Ayrıca $f \in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)$'nin Fourier- Bessel dönüşümü

$$\left(F_\nu f\right)(z) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f\left(x\right) e^{-ix'z'} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n z_n\right) x_n^{2\nu} dx$$

şeklinde olup $F_\nu f$, H_1 değerlidir ve

$$\|F_\nu f\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)} \leq \|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $f \in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right) \cap L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)$ ise $F_\nu f \in L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)$ ve

$$\|F_\nu f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)} = \|f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$$

dir.

3. FOURİER- BESSEL HARMONİK ANALİZİNİN BAZI ÖNEMLİ UZAYLARI

Fourier- Bessel harmonik analizi, Laplace- Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu uzayları, bu uzaylarda tanımlanmış operatörleri, singüler integralleri, potansiyelleri v.s. çalışma konusu edinmiş hem teorik hem de uygulamaları açısından son yıllarda oldukça gelişmiş bir teoridir. Laplace- Bessel diferansiyel operatörü Δ_B, Fourier- Bessel harmonik analizinin önemli teknik aracıdır. Bu operatör, ilk $n-1$ değişkene Laplace, sonuncu değişkene Bessel diferansiyel operatörünün uygulandığı bir hibrit operatördür. Bu bölümde, bu tezin amacı doğrultusunda Laplace- Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu birkaç uzaydan bahsedilecek ve bazı özellikleri verilecektir.

İlk örnek, tanımı önceki bölümde verilen $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayıdır. Klyuchantsev (1970), Kipriyanov ve Klyuchantsev (1970), Gadjiev ve Aliyev (1988), Guliyev (1998), Guliyev gibi birçok matematikçi bu uzay üzerinde çalışmıştır.

Bundan başka, 1994 yılında Aliyev ve Gadjiev ağırlıklı $L_{p,\omega,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayını

$$L_{p,\omega,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)=\left\{f:\|f\|_{L_{p,\omega,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(x)\omega\left(|x|\right)|^p\,x_n^{2\nu}dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}$$

biçiminde tanımlamışlardır. Burada $\omega\left(|x|\right)$ radial ağırlığı, $0\le t<\infty$ iken negatif olmayan $\omega\left(t\right)$ fonksiyonu tarafından üretilmiştir. Bu çalışmalarında Aliyev ve Gadjiev ağırlıklı $L_{p,\omega,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayında singüler integral operatörlerin sınırlılıkları ile ilgilenmişlerdir.

Son olarak Laplace- Bessel diferansiyel operatörü Δ_B'nin doğurduğu önemli uzaylardan BMO_ν ve $B-$ Morrey uzayları tanıtılacaktır. Bunun için gerekli olan birkaç notasyon ve tanım aşağıda verilmiştir.

$x\in\mathbb{R}_+^n$ ve $r>0$ olmak üzere $x-$ merkezli, r yarıçaplı yuvar

$$E\left(x,r\right)=\left\{y\in\mathbb{R}_+^n:|x-y|<r\right\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca $E_r=E\left(0,r\right)$, $|E_r|_\nu=\int\limits_{E_r}x_n^{2\nu}dx=r^\theta\omega\left(n,\nu\right)$, $\theta=n+2\nu$ ve

$$\omega\left(n,\nu\right)=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Tanım 3.0.8 $\mathbb{R}_+^n$ *da lokal integrallenebilir ve*

$$\|f\|_{BMO_\nu}=\sup_{x\in\mathbb{R}_+^n,r>0}\frac{1}{|E_r|_\nu}\int\limits_{E_r}|T^yf(x)-f_{E_r}|\,y_n^{2\nu}dy$$

normu ile tanımlanmış fonksiyonların oluşturduğu uzaya $BMO_\nu\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ *uzayı denir. Burada*

$$f_{E_r} = \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy$$

biçimindedir (Guliyev 1998).

Tanım 3.0.9 $1 \le p < \infty$, $0 \le \lambda \le \theta$ *olmak üzere* $\mathbb{R}^n_+$ *da lokal integrallenebilir ve*

$$\|f\|_{L_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n_+, r>0} \left(\frac{r^\lambda}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} T^y |f(x)|^p\, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile tanımlanmış fonksiyonların oluşturduğu $L_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ *uzayına B- Morrey uzayı denir (Guliyev 1999, 2008).*

B- Morrey uzayı, λ nın özel durumlarına göre Laplace- Bessel diferansiyel operatörü tarafından üretilen diğer fonksiyon uzayları ile çakışır. Örneğin,

$\lambda < 0$ ve $\lambda > \theta$ için $L_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right) = \{0\}$ dır.

$\lambda = \theta$ iken $L_{p,\theta,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right) = L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ve $\lambda = 0$ iken $L_{p,0,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right) = L_\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ dır.

B- Morrey uzayı λ'nın özel durumlarına göre tezin 5. bölümünde tanımlanacak olan B- Campanato uzayı ile de çakışmaktadır. Bu durumla ilgili teoremler 5. bölümdedir.

Not 3.0.10 $1 \le p < \infty$ *ve* f, $\mathbb{R}^n_+$ *da lokal integrallenebilir olmak üzere* $\widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ *uzayı*

$$\widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right) = \left\{ f : \|f\|_{\widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}} < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{\widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n_+, t>0} \left(t^\lambda \frac{1}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y f(x)|^p\, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanırsa, $\|.\|_{\widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}}$ *ve* $\|.\|_{L_{p,\lambda,\nu}}$ *normları arasında*

$$\|f\|_{\widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}} \le C \|f\|_{L_{p,\lambda,\nu}}$$

eşitsizliği sağlanır. Yani $L_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right) \hookrightarrow \widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ *dir.*

Gerçekten de

$$|T^y f(x)|^p = \left| \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) (\sin\alpha)^{2\nu-1}\, d\alpha \right|^p$$

$$\leq \left(\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right)^p \left(\int\limits_0^\pi \left| f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| (\sin\alpha)^{2\nu-1}\, d\alpha \right)^p$$

$$...\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ ve } (\sin\alpha)^{\frac{2\nu-1}{p}} (\sin\alpha)^{\frac{2\nu-1}{q}} = (\sin\alpha)^{2\nu-1}...$$

$$\leq \left(\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right)^p \left(\int\limits_0^\pi \left| f\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right|^p (\sin\alpha)^{2\nu-1}\, d\alpha \right)$$
$$\left(\int\limits_0^\pi (\sin\alpha)^{2\nu-1}\, d\alpha \right)^{\frac{p}{q}}$$
$$\leq C T^y \left| f(x) \right|^p$$

dir.

Fourier- Bessel harmonik analizinde tanımlı bazı fonksiyon uzaylarından bahsettikten sonra, şimdi Fourier- Bessel harmonik analizinde tanımlı bazı integral operatörlerden söz edilecektir.

4. FOURİER- BESSEL HARMONİK ANALİZİNİN BAZI İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Fourier harmonik analizinde olduğu gibi Fourier- Bessel harmonik analizinde de bazı integral operatörler oldukça önemli yer tutmaktadırlar. Bu integral operatörlerin başında singüler integral operatörler, zayıf singüler integral operatörler (potansiyeller) ve maksimal operatörler gelmektedir. Fourier- Bessel harmonik analizinde tanımlı integral operatörlere Muckenhoupt, Stein (1965), Kipriyanov (1967), Stein (1970), Aliev (1987, 1992), Maksudov ve Aliev (1984), Aliev, Gadjiev (1990, 1992, 1994), Gasanov, Guliyev, Narimanov (1996), Guliyev (1998, 2000), Guliyev, Narimanov (2000), Aliev ve Rubin (2001), Aliev ve Uyhan (2002), Uyhan, Gadjiev ve Aliev (2006), Aliev ve Eryiğit (2005), Guliyev, Hasanov (2006), Guliyev, Şerbetçi, Ekincioğlu (2007, 2011), Guliyev, Şerbetçi, Safarov (2008), Guliyev, Garakhanova, Zeren (2008), Gadjiev, Guliyev (2008), Guliyev, Hasanov, Zeren (2009), Guliyev, Garakhanova (2009), Gadjiev, Guliyev, Şerbetçi, E. Guliyev (2011), Akyol, Guliyev, Şerbetçi (2013), Guliyev, Isayev (2013), Guliyev, Isayev, Safarov (2014) gibi birçok matematikçi çalışmıştır.

Singüler integral operatörler harmonik analizde, kısmi türevli denklemler teorisinde önemli rol oynar. Δ_B, Laplace- Bessel diferansiyel operatörü ile bağlantılı singüler integral operatörler Muckenhoupt ve Stein (1965), Kipriyanov (1967), Stein (1970), Kipriyanov ve Klyuchantsev (1970), Klyuchantsev (1970), Aliev ve Gadjiev (1992, 1994), Guliyev (1998), Gadjiev ve Guliyev (2005) ve birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Fourier- Bessel harmonik analizinde, singüler integral operatörler en genel şekilde

$$(Tf)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $K(x,y)$ fonksiyonu çekirdek adını alır ve K, $x = y$ için singüleriteye sahiptir. Bu yüzden yukarıdaki integral, Cauchy' nin $p.v$ anlamında ifade edilir.

İlk olarak Klyuchantsev ve Kipriyanov (1970), Δ_B- Laplace- Bessel diferansiyel operatörü tarafından üretilen singüler integralin $L_{p,\nu}$ uzayında sınırlılığını incelemiştir. Aliyev ve Gadjiev (1994) radial ağırlıklı $L_{p,\nu}$ uzayında verilen B- singüler integral operatörün sınırlılığını incelemiştir.

Şimdi, Fourier- Bessel harmonik analizinden bazı integral operatör örneklerine yer verilecektir. Bunlar, B- maksimal operatör, kesir B- maksimal operatör, B-Riesz potansiyeli, vb dir. İlk olarak 1988 yılında Aliev ve Gadjiev tarafından çalışılan

B- Riesz potansiyeli

$$I_{\alpha,\nu}f\left(x\right)=\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}T^{y}\left|x\right|^{\alpha-n-2\nu}f\left(y\right)y_{n}^{2\nu}dy,\quad 0<\alpha<n+2\nu$$

şeklindedir. Gadjiev ve Aliev (1988, 1990, 1994) $1<p<q<\infty$ iken

$$\left\|I_{\alpha,\nu}f\right\|_{L_{q,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}\leq C\left\|f\right\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}$$

eşitsizliğini her $f\in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ fonksiyonunun sağlaması için gerekli ve yeterli koşulu

$$\alpha=\left(n+2\nu\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$$

biçiminde belirlemişlerdir. Bu ise $I_{\alpha,\nu}f$, B- Riesz potansiyelinin sınırlılığı için gerekli ve yeterli koşuldur.

1998 yılında Guliyev, $\Delta_{B}-$ Laplace- Bessel diferansiyel operatörü tarafından üretilen B- maksimal operatörünü, $f:\mathbb{R}_{+}^{n}\rightarrow\mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyon olmak üzere

$$M_{B}f\left(x\right)=\sup_{r>0}\frac{1}{\left|E\left(0,r\right)\right|_{\nu}}\int\limits_{E(0,r)}T^{y}\left|f\left(x\right)\right|y_{n}^{2\nu}dy$$

biçiminde tanımlamıştır. Burada $E\left(0,r\right)=\left\{y\in\mathbb{R}_{+}^{n}:\left|y\right|<r\right\}$ ve $\left|E\left(0,r\right)\right|_{\nu}=r^{\theta}\omega\left(n,\nu\right)$, $\theta=n+2\nu$ dir. Buna ilaveten Guliyev (1998, 1999, 2003) B- maksimal operatörün, $(1,1)$ zayıf tipli olduğunu yani, $f\in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ise her $\alpha>0$ için

$$\left|\left\{x:\left|M_{B}f\left(x\right)\right|>\alpha\right\}\right|_{\nu}\leq\frac{C}{\alpha}\left\|f\right\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}$$

eşitsizliğini sağlayan f' den bağımsız bir $C>0$ sabiti var olduğunu, $1<p\leq\infty$ iken (p,p) güçlü tipli olduğunu yani,

$$\left\|M_{B}f\right\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}\leq C_{p}\left\|f\right\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}$$

eşitsizliğini sağlayan f den bağımsız bir $C_{p}>0$ sabitinin var olduğunu göstermiştir.

Kesirli B- maksimal fonksiyon ise 2002 yılında ilk olarak Guliyev ve Safarov tarafından tanımlanmış ve sınırlılık koşulları incelenmiştir. Kesirli B- maksimal fonksiyon $M_{\alpha,\nu}$ ile gösterilmek üzere $n\in\mathbb{N}$, $0<\alpha<n+2\nu$ ve $f\in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ için

$$\left(M_{\alpha,\nu}f\right)\left(x\right)=\sup_{r>0}\frac{1}{\left|E\left(0,r\right)\right|_{\nu}^{1-\frac{\alpha}{n+2\nu}}}\int\limits_{E(0,r)}T^{y}\left|f\left(x\right)\right|y_{n}^{2\nu}dy$$

olarak tanımlanır.

Fourier- Bessel harmonik analizinde başka integral operatör örnekleri ve özellikleri de verilebilir. Verilen örneklerin yeterli olabileceği düşünülerek, şimdi tezin bulgular kısmını oluşturan 5. ve 6. bölümlere geçilecektir.

5. B- CAMPANATO UZAYI ve BU UZAY ÜZERİNDEKİ BAZI GÖMME (EMBEDDİNG) TEOREMLERİ

5.1. B- Campanato Uzayı Tanımı ve Bazı Özellikleri

Bu bölümde B- Campanato uzayı tanımlanacak ve bu uzay ile ilgili bazı özellikler incelenecektir. $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ olmak üzere $E(x,r)$ yuvarı

$$E(x,r) = \left\{y \in \mathbb{R}_+^n : |x-y| < r\right\}$$

biçimindedir. Bu bölüm boyunca ölçülebilir bir $E \subset \mathbb{R}_+^n$ kümesinin ölçümü

$$|E|_\nu = \int_E x_n^{2\nu} dx$$

olarak tanımlanacaktır. $E_t = E(0,t) = \left\{y \in \mathbb{R}_+^n : |y| < t\right\}$ ve $\theta = n + 2\nu$ olmak üzere $|E_t|_\nu = t^\theta \omega(n,\nu)$ ve $\omega(n,\nu) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2} \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$ dır.

Tanım 5.1.1 $1 \le p < \infty$, $\lambda \ge -p$ *olmak üzere B- Campanato Uzayı*

$$\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right) = \left\{f \in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_+^n\right) : \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} < \infty\right\}$$

ile tanımlanır. Burada

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^n, t>0} \left(t^\lambda \frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p y_n^{2\nu} dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve

$$f_{E_t}(x) = \frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} T^y f(x) y_n^{2\nu} dy$$

dir.

Not 5.1.2

1) $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}$, $\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *uzayı üzerinde bir yarı norm belirler. Gerçekten de* $\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} = 0$ *halinde* f, $\mathbb{R}_+^n$ *da hemen hemen her yerde sabittir. Bununla beraber*

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} + \|\cdot\|_{L_{p,\nu}}$$

ifadesi, $\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *uzayında bir normdur.*

2) Herhangi bir k *sabiti için*

$$\|f+k\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} = \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}$$

dir. Şöyle ki

$$\|f+k\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+^n, t>0} \left(t^{\lambda} \frac{1}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y(f+k)(x) - (f+k)_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$...T^y(f+k)(x) = T^y f(x) + k \quad ve \quad (f+k)_{E_t}(x) = f_{E_t}(x) + k...$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}_+^n, t>0} \left(t^{\lambda} \frac{1}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}.$$

Önerme 5.1.3 *$1 \le p < \infty$ ve $\lambda \ge -p$ olmak üzere*

$$f \in \mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right) \Longleftrightarrow f \in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_+^n\right) \quad ve \quad |||f|||_{p,\lambda,\nu} < \infty$$

dir ve burada

$$|||f|||_{p,\lambda,\nu} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+^n, t>0} \left(t^{\lambda} \inf_{c\in\mathbb{R}} \frac{1}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - c|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır.

Kanıt. $\Longrightarrow$: $f \in \mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ise $|||f|||_{p,\lambda,\nu} \le \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}$ olduğu açıktır.

$\Longleftarrow$: $f \in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $|||f|||_{p,\lambda,\nu} < \infty$ olsun. Herhangi bir $c \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{1}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \le \frac{2^p}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - c|^p \, y_n^{2\nu} dy + \frac{2^p}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |f_{E_t}(x) - c|^p \, y_n^{2\nu} dy$$

$$... \int\limits_{E_t} |f_{E_t}(x) - c|^p \, y_n^{2\nu} dy \le \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - c|^p \, y_n^{2\nu} dy...$$

$$\le 2^{p+1} \frac{1}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - c|^p \, y_n^{2\nu} dy$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik, herhangi bir $c \in \mathbb{R}$ için sağlandığından $t > 0$ ve $\lambda \ge -p$ için

$$\frac{t^\lambda}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \le 2^{p+1} \left(\inf_{c\in\mathbb{R}} \frac{t^\lambda}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - c|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)$$

dir. Şimdi bu eşitsizliğin her iki tarafından $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^n, t>0}$ alınırsa

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} \le 2^{1+\frac{1}{p}} |||f|||_{p,\lambda,\nu}$$

bulunur. ■

Sonuç 5.1.4 *$\|.\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} + \|.\|_{L_{p,\nu}}$ ile $|||.|||_{p,\lambda,\nu} + \|.\|_{L_{p,\nu}}$ normları denktir.*

Önerme 5.1.5 *Her $f \in \mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $x \in \mathbb{R}_+^n$ için öyle bir $K > 0$ sabiti vardır ki $0 < r < t$ olduğunda*

$$\left|f_{E_r}(x) - f_{E_t}(x)\right| \leq K \left(\frac{r^{\theta-\lambda} + t^{\theta-\lambda}}{r^\theta}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. $0 < r < t$ iken $E_r \subset E_t$ olur. Dolayısıyla $|E_r|_\nu < |E_t|_\nu$ ve $f \geq 0$ iken $\int\limits_{E_r} f \leq \int\limits_{E_t} f$ dir.

$$\left|f_{E_r}(x) - f_{E_t}(x)\right|^p \leq 2^p \left|f_{E_r}(x) - T^y f(x)\right|^p + 2^p \left|f_{E_t}(x) - T^y f(x)\right|^p$$

eşitsizliğinin her iki tarafından, E_r üzerinden integral alınırsa ve $\frac{1}{|E_r|_\nu} = \left(\frac{t}{r}\right)^\theta \frac{1}{|E_t|_\nu}$ kullanılırsa

$$\int\limits_{E_r} \left|f_{E_r}(x) - f_{E_t}(x)\right|^p y_n^{2\nu} dy \leq 2^p \left(\int\limits_{E_r} \left|f_{E_r}(x) - T^y f(x)\right|^p y_n^{2\nu} dy + \int\limits_{E_r} \left|f_{E_t}(x) - T^y f(x)\right|^p y_n^{2\nu} dy\right)$$

$$\left|f_{E_r}(x) - f_{E_t}(x)\right|^p \leq \frac{2^p}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} \left|f_{E_r}(x) - T^y f(x)\right|^p y_n^{2\nu} dy + \frac{2^p}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} \left|f_{E_t}(x) - T^y f(x)\right|^p y_n^{2\nu} dy$$

$$= 2^p \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} \left|f_{E_r}(x) - T^y f(x)\right|^p y_n^{2\nu} dy + 2^p \left(\frac{t}{r}\right)^\theta \frac{1}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} \left|f_{E_t}(x) - T^y f(x)\right|^p y_n^{2\nu} dy$$

$$\leq 2^p r^{-\lambda} \|f\|^p_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} + 2^p \frac{t^{\theta-\lambda}}{r^\theta} \|f\|^p_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}$$

$$= 2^p \left(\frac{r^{\theta-\lambda} + t^{\theta-\lambda}}{r^\theta}\right) \|f\|^p_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}$$

elde edilir. Yani

$$\left|f_{E_r}(x) - f_{E_t}(x)\right| \leq K \left(\frac{r^{\theta-\lambda} + t^{\theta-\lambda}}{r^\theta}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}$$

dir. ■

Önerme 5.1.6 *$f \in \mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve öyle bir $K' > 0$ sabiti vardır ki*

$$\left|f_{E_\rho}(x) - f_{E_{\frac{\rho}{2^k}}}(x)\right| \leq K' \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} \rho^{\frac{-\lambda}{p}} \sum_{m=0}^{k-1} 2^{\frac{m\lambda}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. $f \in \mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olsun. Önerme 5.1.5'den $\forall m \in \mathbb{N}$ için $r = \frac{\rho}{2^{m+1}}$, $t = \frac{\rho}{2^m}$ alınırsa

$$\left| f_{E_{\frac{\rho}{2^{m+1}}}}(x) - f_{E_{\frac{\rho}{2^m}}}(x) \right| \leq K' \rho^{\frac{-\lambda}{p}} 2^{\frac{m\lambda}{p}} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}\left| \sum_{m=0}^{k-1} \left(f_{E_{\frac{\rho}{2^{m+1}}}}(x) - f_{E_{\frac{\rho}{2^m}}}(x) \right) \right| &\leq \sum_{m=0}^{k-1} \left| f_{E_{\frac{\rho}{2^{m+1}}}}(x) - f_{E_{\frac{\rho}{2^m}}}(x) \right| \\ &\leq K' \rho^{\frac{-\lambda}{p}} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} \sum_{m=0}^{k-1} 2^{\frac{m\lambda}{p}}\end{aligned}$$

dir. Bu ise

$$\left| f_{E_\rho}(x) - f_{E_{\frac{\rho}{2^k}}}(x) \right| \leq K' \rho^{\frac{-\lambda}{p}} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} \sum_{m=0}^{k-1} 2^{\frac{m\lambda}{p}}$$

demektir. ■

Önerme 5.1.7 *$\lambda < 0$ olmak üzere her $f \in \mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve h.h.$x \in \mathbb{R}_+^n$ için $F(x) = f(x)$ olacak şekilde öyle bir F fonksiyonu vardır ki $F(x) = \lim\limits_{\rho \to o} f_{E_\rho}(x)$, $\left(h.h.x \in \mathbb{R}_+^n\right)$ dir ve yakınsama $\mathbb{R}_+^n$'da düzgündür.*

Kanıt. Teorem 2.1.14' e göre h.h.$x \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{|E_\rho|_\nu} \int_{E_\rho} T^y f(x) y_n^{2\nu} dy = f(x)$$

yani, $\lim\limits_{\rho \to o} f_{E_\rho}(x) = f(x)$ dir. Bundan başka Önerme 5.1.5'e göre herhangi $n, q \in \mathbb{N}$ için

$$\left| f_{E_{\frac{\rho}{2^n}}}(x) - f_{E_{\frac{\rho}{2^{n+q}}}}(x) \right| \leq C \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} \left(\frac{\rho}{2^n} \right)^{\frac{-\lambda}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi $\left\{ f_{E_{\frac{\rho}{2^n}}}(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin x'e göre düzgün Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir.

$$F(x) := \lim_{n \to \infty} f_{E_{\frac{\rho}{2^n}}}(x)$$

olsun.

F, ρ'nun seçiminden bağımsızdır. Şöyle ki, $\sigma > 0$ için Önerme 5.1.5 ve Önerme 5.1.6'den

$$\begin{aligned}\left| f_{E_{\frac{\sigma}{2^k}}}(x) - F(x) \right| &\leq \left| f_{E_{\frac{\rho}{2^k}}}(x) - F(x) \right| + \left| f_{E_{\frac{\sigma}{2^k}}}(x) - f_{E_{\frac{\rho}{2^k}}}(x) \right| \\ &\leq C(f, \rho, \sigma) \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} 2^{\frac{k\lambda}{p}}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\lim\limits_{k\to\infty}\left|f_{E_{\frac{\sigma}{2^k}}}(x)-F(x)\right|=0$ olur.Yani F, $\left\{f_{E_{\frac{\sigma}{2^k}}}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ tipindeki dizilerin düzgün limitidir. Önerme 5.1.6'den

$$\left|f_{E_\sigma}(x)-f_{E_{\frac{\sigma}{2^k}}}(x)\right|\leq K'\left\|f\right\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}\sigma^{\frac{-\lambda}{p}}\sum_{m=0}^{k-1}2^{\frac{m\lambda}{p}}.$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $k\to\infty$ iken limite geçilirse

$$\left|f_{E_\sigma}(x)-F(x)\right|\leq K'\left\|f\right\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}\sigma^{\frac{-\lambda}{p}}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{\sigma\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}_+^n}\left|f_{E_\sigma}(x)-F(x)\right|=0$$

dir. ■

5.2. B- Campanato Uzayı Üzerinde Bazı Gömme (Embedding) Teoremleri

Bu alt bölümde, B- Campanato uzayının λ'nın durumlarına göre diğer fonksiyon uzayları ile ilişkileri, birbirlerine gömülmeleri gösterilecektir.

Teorem 5.2.1 $1\leq p<\infty$ *olsun. Bu durumda*

1) $\lambda=\theta$, $\theta=n+2\nu$ *ise* $\mathcal{L}_{p,\theta,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)=L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$,

2) $1<p<\infty$ *ve* $\lambda=0$ *iken* $L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)\hookrightarrow\mathcal{L}_{p,0,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *ve* $\mathcal{L}_{p,0,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)\setminus L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)\neq\emptyset$. *Özel olarak* $p=1$ *ve* $\lambda=0$ *iken* $\mathcal{L}_{1,0,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)=BMO_\nu\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *ve* $\left\|f\right\|_{\mathcal{L}_{1,0,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}=\left\|f\right\|_{BMO_\nu\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$,

3) $\lambda<-p$ *veya* $\lambda>\theta$ *iken* $\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)=\{0\}$,

4) $1\leq p\leq q<\infty$, $\theta=n+2\nu$ *olmak üzere* $\lambda,\mu\leq\theta$ *ve* $\frac{\lambda}{p}\leq\frac{\mu}{q}$ *ise*

$$\mathcal{L}_{q,\mu,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)\hookrightarrow\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$$

dir.

Kanıt. $1\leq p<\infty$ olsun

1) $\lambda = \theta$, $\theta = n + 2\nu$ durumunda.

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\theta,\nu}} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+^n, t>0} \left(t^{\theta} \frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\frac{1}{\omega(n,\nu)} \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{x\in\mathbb{R}_+^n, t>0} \left(\int_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve

$$f_{E_t}(x) = \frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} T^y f(x) y_n^{2\nu} dy$$

olduğundan

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\theta,\nu}} = \|f\|_{L_{p,\nu}}$$

dir.

2) $1 < p < \infty$ iken $\lambda = 0$ ve $f \in L_\infty(\mathbb{R}_+^n)$ olsun. Böylece Not 3.0.10 kullanılarak

$$\begin{aligned}
&t^0 \frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \\
&\le 2^p \frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |T^y f(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy + 2^p \frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \\
&\le 2^{p+1} \frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |T^y f(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \\
&\le 2^{p+1} \frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} T^y |f(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \\
&\le \frac{C 2^{p+1}}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} \left(\int_0^\pi \left| f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \right|^p (\sin\alpha)^{2\nu-1} d\alpha \right) y_n^{2\nu} dy \\
&\le M \|f\|_\infty^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $L_\infty(\mathbb{R}_+^n) \hookrightarrow \mathcal{L}_{p,0,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ demektir.

Şimdi $\mathcal{L}_{p,0,\nu}(\mathbb{R}_+^n) \setminus L_\infty(\mathbb{R}_+^n) \neq \emptyset$ olduğu gösterilecektir.

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x_1|, & 0 < |x_1| < 1 \\ 0, & |x_1| > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın. Önce $f \in \mathcal{L}_{p,0,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ olduğu gösterilecektir. Yani,

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,0,\nu}} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+^n, t>0} \left(\frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

olmalıdır. Bunun yerine Önerme 5.1.3'den dolayı herhangi bir $c_{x,t}$ sabiti için

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+^n, t>0}\left(\frac{1}{|E_t|_\nu}\int\limits_{E_t}|T^y f(x)-c_{x,t}|^p\, y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$T^y f(x)=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f\left(x^{'}-y', \sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n\cos\alpha}\right)(\sin\alpha)^{2\nu-1}d\alpha$$

ve $f(x)=\begin{cases}\ln|x_1|\,, & 0<|x_1|<1\\ 0\,, & |x_1|>1\end{cases}$ için $|x_1-y_1|<1$ olmak üzere

$$T^y f(x)=C\int\limits_0^\pi \ln|x_1-y_1|\,(\sin\alpha)^{2\nu-1}d\alpha=\ln|x_1-y_1|$$

dir. Ayrıca $E_t=\left\{y\in\mathbb{R}_+^n : |y|<t\right\}$ ve $|E_t|_\nu=t^\theta\omega\left(n,\nu\right)$ olduğundan

$$\frac{1}{|E_t|_\nu}\int\limits_{|y|<t}|T^y f(x)-c_{x,t}|^p\, y_n^{2\nu}dy=\frac{1}{\omega\left(n,\nu\right)}\int\limits_{|z|<1}\left|T^{zt}f(x)-c_{x,t}\right|^p z_n^{2\nu}dz$$

dir. Böylece $|x_1-tz_1|<1$ iken

$$\int\limits_{|z|<1}|\ln|x_1-tz_1|-c_{x,t}|^p\, z_n^{2\nu}dz=\int\limits_{|z|<1}\left|\ln\left|z_1-t^{-1}x_1\right|+\ln t-c_{x,t}\right|^p z_n^{2\nu}dz$$

$$...\widetilde{x}=t^{-1}x_1,\ c_{\widetilde{x},1}=c_{x,t}-\ln t...$$

$$=\int\limits_{|z|<1}\left|\ln\left|z_1-\widetilde{x}\right|-c_{\widetilde{x},1}\right|^p z_n^{2\nu}dz$$

eşitliği elde edilir.

$\left|\widetilde{x}\right|\leq 2$ halinde $c_{\widetilde{x},1}=0$ alınırsa

$$\int\limits_{|z|<1}\left|\ln\left|z_1-\widetilde{x}\right|\right|^p z_n^{2\nu}dz\leq C$$

bulunur ki bu istenilendir.

$\left|\widetilde{x}\right|\geq 2$ halinde $c_{\widetilde{x},1}=\ln\left|\widetilde{x}\right|$ alınırsa

$$\int\limits_{|z|<1}\left|\ln\left|z_1-\widetilde{x}\right|-\ln\left|\widetilde{x}\right|\right|^p z_n^{2\nu}dz=\int\limits_{|z|<1}\left|\ln\frac{\left|z_1-\widetilde{x}\right|}{\left|\widetilde{x}\right|}\right|^p z_n^{2\nu}dz\leq\ln 2$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\left|z_1-\widetilde{x}\right|}{\left|\widetilde{x}\right|}<\frac{1+\left|\widetilde{x}\right|}{\left|\widetilde{x}\right|}<\frac{3}{2} \text{ ve } \frac{\left|\widetilde{x}\right|}{\left|z_1-\widetilde{x}\right|}<\frac{\left|\widetilde{x}\right|}{\left|\widetilde{x}\right|-1}<2$$

dır.

O halde $f \in \mathcal{L}_{p,0,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ fakat $\|f\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)}=ess\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^n}|f(x)|=\infty$ olduğundan $f \notin L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ dır.

$\lambda=0$ ve $p=1$ iken $\|f\|_{\mathcal{L}_{1,0,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}=\|f\|_{BMO_\nu\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\mathcal{L}_{1,0,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)=BMO_\nu\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ dır.

3) Şimdi $\lambda<-p$ durumunda $\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)=\{0\}$ olduğu gösterilecektir.

$f \in \mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olsun. $-\lambda>p$ olduğundan $-\lambda=p+\epsilon$ olacak şekilde bir $\epsilon>0$ vardır.

$$\begin{aligned} t^\lambda \frac{1}{|E_t|_\nu}\int\limits_{E_t}\left|T^y f(x)-f_{E_t}(x)\right|^p y_n^{2\nu}dy &= \frac{t^\lambda}{t^\theta\omega(n,\nu)}\int\limits_{E_t}\left|T^y f(x)-f_{E_t}(x)\right|^p y_n^{2\nu}dy \\ &= \frac{1}{t^{\theta-\lambda}\omega(n,\nu)}\int\limits_{E_t}\left|T^y f(x)-f_{E_t}(x)\right|^p y_n^{2\nu}dy \\ &= \frac{1}{t^{\theta+p+\epsilon}\omega(n,\nu)}\int\limits_{E_t}\left|T^y f(x)-f_{E_t}(x)\right|^p y_n^{2\nu}dy \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Teorem 2.1.14'a göre

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{|E_t|_\nu}\int\limits_{E_t}\left|T^y f(x)-f_{E_t}(x)\right|^p y_n^{2\nu}dy$$

limiti var olduğundan $\left|T^y f(x)-f_{E_t}(x)\right|=0$ olmadıkça hemen hemen her yerde

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{\theta+p+\epsilon}\omega(n,\nu)}\int\limits_{E_t}\left|T^y f(x)-f_{E_t}(x)\right|^p y_n^{2\nu}dy=\infty$$

elde edilir. Bu ise $\lambda<-p$ iken $\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)=\{0\}$ demektir.

$\lambda>\theta$ durumu da aynı yöntemle gösterilebilir.

4) $1 \leq p \leq q < \infty$, $\lambda, \mu \leq \theta$, $\frac{\lambda}{p} \leq \frac{\mu}{q}$ ve $f \in \mathcal{L}_{q,\mu,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ olsun. Böylece,

$$
\begin{aligned}
& t^{\lambda}\frac{1}{|E_t|_{\nu}}\int\limits_{E_t}\left|T^{y}f(x)-f_{E_t}(x)\right|^{p}y_n^{2\nu}dy \\
& \leq \frac{t^{\lambda}}{|E_t|_{\nu}}\left(\int\limits_{E_t}\left|T^{y}f(x)-f_{E_t}(x)\right|^{q}y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{p}{q}}|E_t|_{\nu}^{1-\frac{p}{q}} \\
& \leq t^{\lambda}\left(\frac{1}{|E_t|_{\nu}}\int\limits_{E_t}\left|T^{y}f(x)-f_{E_t}(x)\right|^{q}y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. $\frac{\lambda}{p} \leq \frac{\mu}{q}$ olduğundan

$$
\left(t^{\lambda}\frac{1}{|E_t|_{\nu}}\int\limits_{E_t}\left|T^{y}f(x)-f_{E_t}(x)\right|^{p}y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(t^{\mu}\frac{1}{|E_t|_{\nu}}\int\limits_{E_t}\left|T^{y}f(x)-f_{E_t}(x)\right|^{q}y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{1}{q}}
$$

ifadesinin her iki yanından $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_{+}^{n},t>0}$ alınırsa

$$
\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_{q,\mu,\nu}}
$$

bulunur. Dolayısıyla $\lambda, \mu \leq \theta$ ve $\frac{\lambda}{p} \leq \frac{\mu}{q}$ koşulu altında $\mathcal{L}_{q,\mu,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayı $\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayı içine gömülür. ■

Not 5.2.2 *f fonksiyonunun E_t yuvarı üzerindeki ortalaması $f_{E_t}(x)$ fonksiyonu,*

$$
\left|f_{E_t}(x)\right|^{p} \leq \frac{1}{|E_t|_{\nu}}\int\limits_{E_t}\left|T^{y}f(x)\right|^{p}y_n^{2\nu}dy
$$

özelliğini sağlar.

Gerçekten de Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\left|f_{E_t}(x)\right|^{p} &= \left|\frac{1}{|E_t|_{\nu}}\int\limits_{E_t}T^{y}f(x)y_n^{2\nu}dy\right|^{p} \leq \frac{1}{|E_t|_{\nu}^{p}}\left(\int\limits_{E_t}\left|T^{y}f(x)\right|y_n^{2\nu}dy\right)^{p} \\
&\leq \frac{1}{|E_t|_{\nu}^{p}}\left(\int\limits_{E_t}\left|T^{y}f(x)\right|^{p}y_n^{2\nu}dy\right)|E_t|_{\nu}^{p-1} \leq \frac{1}{|E_t|_{\nu}}\int\limits_{E_t}\left|T^{y}f(x)\right|^{p}y_n^{2\nu}dy
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 5.2.3 $0 < \lambda < \theta$ *iken $B-$ Morrey uzayı, $B-$ Campanato uzayına gömülür. Yani, $L_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right) \hookrightarrow \mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ dir.*

Kanıt. $0<\lambda<\theta$ ve $f\in L_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
t^{\lambda}\frac{1}{|E_t|_{\nu}}\int\limits_{E_t}\left|T^{y}f(x)-f_{E_t}(x)\right|^{p}y_n^{2\nu}dy &\leq 2^{p}\frac{t^{\lambda}}{|E_t|_{\nu}}\left[\int\limits_{E_t}\left|T^{y}f(x)\right|^{p}y_n^{2\nu}dy+\int\limits_{E_t}\left|f_{E_t}(x)\right|^{p}y_n^{2\nu}dy\right]\\
&\overset{Not\ 5.2.2}{\leq} 2^{p+1}\frac{t^{\lambda}}{|E_t|_{\nu}}\int\limits_{E_t}\left|T^{y}f(x)\right|^{p}y_n^{2\nu}dy\\
&\leq C2^{p+1}t^{\lambda}\frac{1}{|E_t|_{\nu}}\int\limits_{E_t}T^{y}\left|f(x)\right|^{p}y_n^{2\nu}dy
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinden

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}\leq K\,\|f\|_{L_{p,\lambda,\nu}}$$

elde edilir. Bu ise

$$L_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)\hookrightarrow\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$$

dir. ■

Tanım 5.2.4 *Ω, $\mathbb{R}_{+}^{n}$ da sınırlı bölge, çap$\Omega=\delta$ ve $\theta=n+2\nu$ olmak üzere*

$$\Omega\left(y,t\right)=\left\{x\in\Omega:|x-y|<t\right\}$$

için

$$\left|\Omega\left(y,t\right)\right|\geq At^{\theta},\quad 0<t<\delta$$

olacak şekilde bir $A>0$ sayısı varsa Ω bölgesine $A-$tipli bölge denir.

Not 5.2.5 *$\Omega_t=\Omega\left(0,t\right)$ ve $\left|\Omega_t\right|_{\nu}=\omega\left(n,\nu\right)t^{\theta}$, $\theta=n+2\nu$ dir.*

Önerme 5.2.6 *$f\in\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\Omega\right)$ için çap$\Omega=\delta$ ve $\rho\in(0,\delta)$ olmak üzere*

$$\left|f_{\Omega_\rho}\left(x\right)\right|\leq\left|f_{\Omega_\delta}\left(x\right)\right|+C\,\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}\rho^{\frac{-\lambda}{p}}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C>0$ sabiti vardır.

Kanıt. $f\in\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\Omega\right)$ ve $\rho\in(0,\delta)$ olsun. Bu durumda

$$\left|f_{\Omega_\rho}\left(x\right)\right|\leq\left|f_{\Omega_\delta}\left(x\right)\right|+\left|f_{\Omega_\rho}\left(x\right)-f_{\Omega_{\frac{\delta}{2^k}}}\left(x\right)\right|+\left|f_{\Omega_\delta}\left(x\right)-f_{\Omega_{\frac{\delta}{2^k}}}\left(x\right)\right|$$

yazılabilir. Şimdi $\frac{\delta}{2^{k+1}}\leq\rho<\frac{\delta}{2^k}$ olacak şekilde bir $k\in\mathbb{N}$ alınsın. Önerme 5.1.5'den

$$\left|f_{\Omega_\rho}\left(x\right)-f_{\Omega_{\frac{\delta}{2^k}}}\left(x\right)\right|\leq K\rho^{-\frac{\lambda}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}$$

ve Önerme 5.1.6'den

$$\left|f_{\Omega_\delta}\left(x\right)-f_{\Omega_{\frac{\delta}{2^k}}}\left(x\right)\right|\leq K'\rho^{\frac{-\lambda}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}$$

olduğundan

$$\left|f_{\Omega_\rho}(x)\right| \le |f_{\Omega_\delta}(x)| + C\,\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}\,\rho^{\frac{-\lambda}{p}}$$

eşitsizliği bulunur. ■

Sonuç 5.2.7 *$\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ sınırlı bölgesi $A-$tipli ve $0<\lambda<\theta$ iken $\widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}(\Omega)$ uzayı ile $\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}(\Omega)$ $B-$ Campanato uzayı birbirleri içine gömülürler. Yani*

$$\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}(\Omega) \rightleftarrows \widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}(\Omega).$$

Burada $\widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}(\Omega)$ uzayı Not 3.0.10'de tanımlanmıştır.

Kanıt. $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ çapı δ olan $A-$ *tipli* sınırlı bölge ve $t \in (0,\delta)$ olsun.Öncelikle $\widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}(\Omega)$ olduğu gösterilecektir. $f \in \widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}(\Omega)$ alınsın.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{t^\lambda}{|\Omega_t|_\nu}\int_{\Omega_t}|T^y f(x) - f_{\Omega_t}(x)|^p\,y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le C_1\left(\frac{t^\lambda}{|\Omega_t|_\nu}\int_{\Omega_t}|T^y f(x)|^p\,y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{1}{p}} + C_2\left(\frac{t^\lambda}{|\Omega_t|_\nu}\int_{\Omega_t}|f_{\Omega_t}(x)|^p\,y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\overset{Not\ 5.2.2}{\le} C\left(\frac{t^\lambda}{|\Omega_t|_\nu}\int_{\Omega_t}|T^y f(x)|^p\,y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafından $\sup\limits_{x\in\Omega,t>0}$ alınırsa

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}(\Omega)} \le C\,\|f\|_{\widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}(\Omega)}$$

bulunur. Dolayısıyla $\widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}(\Omega)$ dir. Şimdi, $f \in \mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}(\Omega)$ olmak üzere Önerme 5.2.6'e göre

$$\begin{aligned}
|f_{\Omega_t}(x)|^p &\le \left(|f_{\Omega_\delta}(x)| + C\,\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}\,t^{\frac{-\lambda}{p}}\right)^p\\
&\le 2^p\,|f_{\Omega_\delta}(x)|^p + 2^pC^p\,\|f\|^p_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}\,t^{-\lambda}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Buna ilaveten Not 5.2.2 ve Teorem 2.2.2'e göre

$$|f_{\Omega_\delta}(x)|^p \le \frac{1}{|\Omega_\delta|_\nu}\,\|f\|^p_{L_{p,\nu}}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\Omega_t|_\nu}\int_{\Omega_t}|T^y f(x)|^p\,y_n^{2\nu}dy \le \frac{2^p}{|\Omega_t|_\nu}\int_{\Omega_t}|T^y f(x) - f_{\Omega_t}(x)|^p\,y_n^{2\nu}dy + \frac{2^p}{|\Omega_t|_\nu}\int_{\Omega_t}|f_{\Omega_t}(x)|^p\,y_n^{2\nu}dy\\
&\le 2^p\frac{1}{|\Omega_t|_\nu}\int_{\Omega_t}|T^y f(x) - f_{\Omega_t}(x)|^p\,y_n^{2\nu}dy + 2^{2p}\,\|f\|^p_{L_{p,\nu}}\,\frac{1}{|\Omega_\delta|_\nu} + 2^pC^pt^{-\lambda}\,\|f\|^p_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}
\end{aligned}$$

dir. Bu ise

$$\|f\|_{\widetilde{L}_{p,\lambda,\nu}} \leq K \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}$$

demektir. ■

Tanım 5.2.8 *(β- mertebeli B- Hölder fonksiyonlar uzayı) $0 < \beta \leq 1$ ve $\nu > 0$ olmak üzere β- mertebeli B- Hölder fonksiyonlar uzayı*

$$C_\nu^{0,\beta}\left(\mathbb{R}_+^n\right) = \left\{f \in C\left(\mathbb{R}_+^n\right) : H_{0,\beta}^\nu(f) < \infty\right\}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$H_{0,\beta}^\nu(f) = \sup_{x,y\in\mathbb{R}_+^n} \frac{|T^y f(x) - f(x)|}{|y|^\beta}$$

ifadesi bu uzay üzerinde bir yarı norm belirler (Gadjiev, Aral, Aliev 2007).

Şimdi, aşağıdaki teorem bu uzay ile $B-$ Campanato uzayı arasındaki ilişkiyi verecektir.

Teorem 5.2.9 $1 \leq p < \infty$, $-p \leq \lambda < 0$ *ve* $\beta = \frac{-\lambda}{p}$ *olmak üzere*

$$C_\nu^{0,\beta}\left(\mathbb{R}_+^n\right) \hookrightarrow \mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$$

dir.

Kanıt. $1 \leq p < \infty$, $-p \leq \lambda < 0$ ve $\beta = \frac{-\lambda}{p}$ iken $0 < \beta \leq 1$ olur. Şimdi, $f \in C_\nu^{0,\beta}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ alınsın. Bu durumda $H_{0,\beta}^\nu(f)$ yarı- normu sonludur. Böylece

$$t^\lambda \frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p y_n^{2\nu} dy = \frac{t^\lambda}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |T^y f(x) - f(x) + f(x) - f_{E_t}(x)|^p y_n^{2\nu} dy$$
$$\leq \frac{2^p t^\lambda}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |T^y f(x) - f(x)|^p y_n^{2\nu} dy + \frac{2^p t^\lambda}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |f(x) - f_{E_t}(x)|^p y_n^{2\nu} dy$$
$$= \frac{2^p t^\lambda}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |T^y f(x) - f(x)|^p y_n^{2\nu} dy + 2^p t^\lambda |f(x) - f_{E_t}(x)|^p$$
$$\leq \frac{2^{p+1} t^\lambda}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |T^y f(x) - f(x)|^p y_n^{2\nu} dy = \frac{2^{p+1} t^\lambda}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} \frac{|T^y f(x) - f(x)|^p}{|y|^{\beta p}} |y|^{\beta p} y_n^{2\nu} dy$$
$$\leq \frac{2^{p+1} t^\lambda}{|E_t|_\nu} \left(H_{0,\beta}^\nu(f)\right)^p \int_{E_t} |y|^{\beta p} y_n^{2\nu} dy \leq C\left(H_{0,\beta}^\nu(f)\right)^p$$

eşitsizliğinin her iki tarafından $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^n, t>0}$ alınırsa

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}} \leq C H_{0,\beta}^\nu(f)$$

elde edilir ki bu $C_\nu^{0,\beta}\left(\mathbb{R}_+^n\right) \hookrightarrow \mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ demektir. ■

6. FOURİER- BESSEL HARMONİK ANALİZİNDE SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLER

6.1. Fourier- Bessel Singüler İntegral Operatörü ve Sınırlılığı

1999 yılında Guliyev ve Narimanov anisotropik B- singüler integral operatörünün, L_p^γ uzayında sınırlı olduğunu göstermişlerdir. Bu bölümün amacı Guliyev ve Narimanov'un (1999) çalışmalarından esinlenerek skaler değerli Fourier- Bessel singüler integral operatörünü (B- singüler integral operatörünü) tanımlayıp bu operatörün $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ uzayında sınırlılığını incelemektir. Bu sınırlılığı gösterebilmek için öncelikle bazı ön çalışmalar yapılacaktır.

Önerme 6.1.1 *$k \in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ fonksiyonu*

$$k(tx) = t^{-n-2\nu}k(x) \quad , \ t > 0$$

$\omega_k\left(t\right) = \sup\limits_{t>0}\left\{\left|k\left(\xi\right) - k\left(\eta\right)\right|; \left|\eta\right| = \left|\xi\right| = 1, \left|\xi - \eta\right| \leq t\right\}$ *olmak üzere*

$$\int_0^1 \frac{\omega_k\left(t\right)}{t}dt < \infty$$

özelliklerini sağlarsa

$$\int\limits_{r<|x|<4r} \left|k\left(x\right)\right| x_n^{2\nu}dx \leq M, \quad 0 < r < \infty \tag{6.1}$$

$$\int\limits_{|x|\geq 4|y|} \left|T^y k(x) - k(x)\right| x_n^{2\nu}dx \leq M, \quad |y| < \frac{1}{4} \tag{6.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Kanıt. Öncelikle (6.2) eşitsizliğini elde etmek için bazı çalışmalar yapılacaktır.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{|x|>1} \left|T^y k(x) - k(x)\right| x_n^{2\nu}dx \\ &\leq c_\nu \int\limits_{|x|>1}\left[\int_0^\pi \left|k\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) - k(x)\right| (\sin\alpha)^{2\nu-1}d\alpha\right] x_n^{2\nu}dx \\ &= c_\nu \int_0^\pi \left[\int\limits_{|x|>1} \left|k\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) - k(x)\right| x_n^{2\nu}dx\right] (\sin\alpha)^{2\nu-1}d\alpha. \end{aligned} \tag{6.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi (6.3) integralini hesaplamak için

$$\int\limits_{|x|>1} \left|k\left(x'-y', \sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)-k(x)\right| x_n^{2\nu}dx$$

integrali ile çalışılacaktır.

$$\int\limits_{|x|>1} \left|k\left(x'-y', \sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)-k(x)\right| x_n^{2\nu}dx$$
$$\leq \int\limits_{|x|>1} \left|k\left(z\right)-k(x)\right| x_n^{2\nu}dx + \int\limits_{|x|>1} \left|k\left(x'-y', \sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)-k(z)\right| x_n^{2\nu}dx$$
$$= I_1 + I_2.$$

Burada

$$z = \left(\frac{\left|\left(x'-y', \sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\right|}{|x|}\right)x$$

ve $|z| = \left|\left(x'-y', \sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\right|$ dır.

$\frac{z}{|z|} = \frac{x}{|x|} = \xi$ olsun. $z = |z|\frac{z}{|z|} = |z|\,\xi$ ve $x = |x|\frac{x}{|x|} = |x|\,\xi$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_{|x|>1} \left|k\left(z\right)-k(x)\right| x_n^{2\nu}dx \\
&= \int\limits_{|x|>1} \left|k\left(|z|\,\xi\right)-k(|x|\,\xi|\right)x_n^{2\nu}dx \\
&= \int\limits_{|x|>1} \left||z|^{-n-2\nu}k(\xi)-|x|^{-n-2\nu}k(\xi)\right| x_n^{2\nu}dx \\
&= \int\limits_{|x|>1} |k(\xi)|\left|\frac{1}{|z|^{n+2\nu}}-\frac{1}{|x|^{n+2\nu}}\right| x_n^{2\nu}dx \\
&= \int\limits_{|x|>1} |k(\xi)|\frac{\left||x|^{n+2\nu}-|z|^{n+2\nu}\right|}{|z|^{n+2\nu}|x|^{n+2\nu}} x_n^{2\nu}dx
\end{aligned} \tag{6.4}$$

elde edilir. $\min\{|x|, |z|\} < \zeta < \max\{|x|, |z|\}$ iken

$$\left||x|^{n+2\nu}-|z|^{n+2\nu}\right| \leq (n+2\nu)\,\zeta^{n+2\nu-1}\,||x|-|z|| \tag{6.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$|x|-|z| = |x| - \left|\left(x'-y', \sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\right| \leq |x|-|x-y| \leq |y|$$

ve $\widetilde{y} = (y', -y_n)$ olmak üzere

$$|x| - |z| = |x| - \left|\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| \geq -\left|\widetilde{y}\right| = -|y|$$

olduğundan $||x| - |z|| < |y|$ olur. Böylece (6.5) eşitsizliği

$$\left||x|^{n+2\nu} - |z|^{n+2\nu}\right| \leq (n+2\nu)\,\zeta^{n+2\nu-1}\,|y| \tag{6.6}$$

biçimine gelir. Ayrıca $|y| < \frac{1}{4}$, $|x| > 1$ ve (6.6) den

$$|z| = \left|\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| \approx |x|$$

dir. Böylece,yukarıdaki asimptotik davranış ve (6.6) eşitsizliği (6.4) integralinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C_1 \int\limits_{|x|>1} |k(\xi)| \frac{|y|}{|x|^{n+2\nu+1}} x_n^{2\nu} dx \\ &\leq C_1 \int\limits_{S^+} |k(\theta)|\, \theta_n^{2\nu} d\theta \int\limits_1^\infty \frac{dr}{r^2} < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan başka, $|z| \approx |x|$ kullanılarak

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{|x|>1} \left|k\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) - k(z)\right| x_n^{2\nu} dx \\ &= \int\limits_{|x|>1} \left|\frac{k\left(\xi_{\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)}\right)}{|z|^{n+2\nu}} - \frac{k(\xi_x)}{|z|^{n+2\nu}}\right| x_n^{2\nu} dx \\ &= \int\limits_1^\infty \int\limits_{S^+} \left|k\left(\xi_{\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)}\right) - k(\xi_x)\right| |z|^{-(n+2\nu)}\, t^{2\nu+n-1} \xi_n^{2\nu} d\sigma(\xi)\, dt \\ &\leq C \int\limits_1^\infty \int\limits_{S^+} \left|k\left(\xi_{\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)}\right) - k(\xi_x)\right| \xi_n^{2\nu} d\sigma(\xi) \frac{dt}{t} \\ &\leq C \int\limits_1^\infty \int\limits_{S^+} \omega_k\left(\left|\xi_{\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)} - \xi_x\right|\right) \xi_n^{2\nu} d\sigma(\xi) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda integral içindeki ifade

$$
\begin{aligned}
\left|\xi_{\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)}-\xi_x\right| &= \left|\frac{\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)}{\left|\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\right|}-\frac{z}{|z|}\right| \\
&= \left|\frac{\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)}{|z|}-\frac{z}{|z|}\right| \\
&\leq \frac{1}{|z|}\left|\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)-x\right|+\frac{1}{|z|}|z-x| \\
&= \frac{1}{|z|}A+\frac{1}{|z|}B. \qquad (6.7)
\end{aligned}
$$

biçiminde yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
A &= \left|\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)-x\right| \\
&= \left|\left(-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}-x_n\right)\right| \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1}(-y_i)^2+\left(\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}-x_n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1}|y_i|^2+\left|\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}-x_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (6.8)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. Burada

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}-x_n\right| &= \frac{|y_n^2-2x_ny_n\cos\alpha|}{\left|\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}+x_n\right|} \\
&\leq \frac{|y_n^2|}{\left|\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}+x_n\right|} \\
&\quad + \frac{2|x_n||y_n|}{\left|\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}+x_n\right|} \\
&\leq 3|y_n|
\end{aligned}
$$

olduğundan, bu eşitsizlik(6.8) de yerine yazılırsa

$$A \leq 3|y|$$

olur. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
B = |z-x| &= \left|x-\frac{\left|\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\right|}{|x|}x\right| \\
&= \left||x|-\left|\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\right|\right| \\
&= ||x|-|z|| < |y|
\end{aligned}
$$

dir. Şimdi A ve B için bulunan bu ifadeler (6.7) da yerine yazılırsa

$$\left|\xi_{\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)}-\xi_x\right|<\frac{4|y|}{|z|}<\frac{1}{|z|}<\frac{1}{|x|}$$

elde edilir. Böylece, $|y|<\frac{1}{4}$, $|z|\sim|x|$ de göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C\int\limits_{t>1}\omega_k\left(ct^{-1}\right)\frac{dt}{t} \\ &< C\int\limits_0^1\frac{\omega_k(cu)}{u}du \end{aligned}$$

olur. O halde

$$I=\int\limits_{|x|>1}\left|T^yk(x)-k(x)\right|x_n^{2\nu}dx\leq M$$

(6.2) eşitsizliği elde edilmiş olur. (6.1) eşitsizliği ise

$$\int\limits_{r<|x|<4r}|k(x)|\,x_n^{2\nu}dx=\int\limits_{1<|x|<4}|k(x)|\,x_n^{2\nu}dx$$

eşitliğinden ve $k\in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olduğundan

$$\int\limits_{r<|x|<4r}|k(x)|\,x_n^{2\nu}dx\leq M$$

hemen görülür. ∎

Önerme 6.1.2 *$K\in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ fonksiyonu*

$$\left|\int\limits_{\epsilon<|x|<r}K(x)\,x_n^{2\nu}dx\right|\leq M,\quad 0<\epsilon<r<\infty \tag{6.9}$$

$$\int\limits_{r<|x|<4r}|K(x)|\,x_n^{2\nu}dx\leq M,\quad 0<r<\infty \tag{6.10}$$

$$\int\limits_{|x|\geq4|y|}\left|T^yK(x)-K(x)\right|x_n^{2\nu}dx\leq M,\quad |y|<\frac{1}{4} \tag{6.11}$$

özelliklerini sağlarsa

$$|(F_\nu K)(x)|\leq CM,\quad x\in S_+^{n-1}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $S_+^{n-1}=\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|x|=1\right\}$ dır.

Kanıt. $K_t(x) := t^{n+2\nu}K(tx)$, $(t>0)$ fonksiyonu tanımlansın. K_t fonksiyonu (6.9) , (6.10) , (6.11) özelliklerini sağlar. Gerçekten de $0<\epsilon<r<\infty$ ve $t>0$ için

$$\left|\int\limits_{\frac{\epsilon}{t}<|x|<\frac{r}{t}} K_t(x)\, x_n^{2\nu}dx\right| = \left|\int\limits_{\epsilon<|tx|<r} t^{n+2\nu}K(tx)\, x_n^{2\nu}dx\right|$$

$$...tx = y,\ t^n dx = dy...$$

$$= \left|\int\limits_{\epsilon<|y|<r} K(y)\, y_n^{2\nu}dy\right| \leq M$$

elde edilir. Buna ilaveten

$$\int\limits_{\frac{r}{t}<|x|<\frac{4r}{t}} |K_t(x)|\, x_n^{2\nu}dx = t^{n+2\nu}\int\limits_{r<|tx|<4r} |K(tx)|\, x_n^{2\nu}dx$$

$$...tx = y, t^n dx = dy...$$

$$= \int\limits_{r<|y|<4r} |K(y)|\, y_n^{2\nu}dx \leq M$$

ve

$$\int\limits_{|x|\geq 4\frac{|y|}{t}} |T^y K_t(x) - K_t(x)|\, x_n^{2\nu}dx$$

$$= t^{n+2\nu}\int\limits_{|tx|\geq 4|y|} |T^y K(tx) - K(tx)|\, x_n^{2\nu}dx$$

$$...tx = z, t^n dx = dz...$$

$$= \int\limits_{|z|\geq 4|y|} |T^y K(z) - K(z)|\, z_n^{2\nu}dz \leq M$$

dir. Şimdi

$$(F_\nu K)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} K(y)\, e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)\, y_n^{2\nu}dy \tag{6.12}$$

ifadesinde y yerine ty alınırsa

$$(F_\nu K)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} K(ty)\, e^{-itx'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(tx_n y_n)\, y_n^{2\nu} t^{n+2\nu}dy$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} K_t(y)\, e^{-itx'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(tx_n y_n)\, y_n^{2\nu}dy$$

$$= (F_\nu K_t)(tx)$$

elde edilir. $(F_\nu K_t)(x)$ ifadesini tüm $t>0$ ve $|x|=1$ iken incelenirse ispat tamamlanmış olur.

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)\, T^x K(y)\, y_n^{2\nu} dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^x\left(e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)\right) K(y)\, y_n^{2\nu} dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ix'(y'-x')} T^{x_n} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)\, K(y)\, y_n^{2\nu} dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ix'y'} e^{i|x'|^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)\, j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n^2\right) K(y)\, y_n^{2\nu} dy \\
&= e^{i|x'|^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n^2\right) \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)\, K(y)\, y_n^{2\nu} dy \\
&= e^{i|x'|^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n^2\right)(F_\nu K)(x). \qquad (6.13)
\end{aligned}$$

(6.12) ve (6.13) ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(e^{i|x'|^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n^2\right)-1\right)(F_\nu K)(x) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)\left(T^x K(y)-K(y)\right) y_n^{2\nu} dy \\
&= \int\limits_{|y|\geq 4} \ldots + \int\limits_{|y|<4} .. = I_3(x)+I_4(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. $I_3(x)$ için,

$$|I_3(x)| \leq \int\limits_{|y|\geq 4} \left|T^x K(y)-K(y)\right| y_n^{2\nu} dy \leq M$$

bulunur. $I_4(x)$ için

$$\begin{aligned}
I_4(x) &= \int\limits_{|y|<4} e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)\left(T^x K(y)-K(y)\right) y_n^{2\nu} dy \\
&= \int\limits_{|y|<4} \left(e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)-1\right) T^x K(y)\, y_n^{2\nu} dy \\
&- \int\limits_{|y|<4} \left(e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)-1\right) K(y) y_n^{2\nu} dy \\
&- \int\limits_{|y|<4} K(y) y_n^{2\nu} dy + \int\limits_{|y|<4} T^x K(y)\, y_n^{2\nu} dy \\
&= L_1(x)+L_2(x)+L_3+L_4(x) \qquad (6.14)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\left|e^{-ix'y'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_ny_n)-1\right| &\leq \left|j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_ny_n)\right|\left|e^{-ix'y'}-1\right|+\left|j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_ny_n)-1\right| \\ &\leq \left|e^{-ix'y'}-1\right|+c_\nu\int_{-1}^{1}\left|e^{ix_ny_nt}-1\right|\left|1-t^2\right|^{\nu-1}dt \\ &\leq C\,|y|\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}|L_2(x)| &\leq \int_{|y|<4}\left|e^{-ix'y'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_ny_n)-1\right||K(y)|\,y_n^{2\nu}dy \\ &\leq C\int_{|y|<4}|y|\,|K(y)|\,y_n^{2\nu}dy \\ &\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\int_{4^{-k}<|y|<4^{-k+1}}|y|\,|K(y)|\,y_n^{2\nu}dy \\ &\leq C\sum_{k=0}^{\infty}4^{-k+1}\int_{4^{-k}<|y|<4^{-k+1}}|K(y)|\,y_n^{2\nu}dy \leq C\end{aligned}$$

bulunur. L_3 için, (6.9) den dolayı $\forall\epsilon>0$ için $\exists M>0$ vardır ki

$$|L_3|=\left|\int_{|y|<4}K(y)y_n^{2\nu}dy\right|=\left|\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{\epsilon<|y|<4}K(y)y_n^{2\nu}dy\right|\leq M$$

dir.

$$\begin{aligned}L_1(x) &= \int_{|y|<4}\left(e^{-ix'y'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_ny_n)-1\right)T^xK(y)\,y_n^{2\nu}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n}T^x\left[\chi_{\{|.|<4\}}(y)\left(e^{-ix'y'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_ny_n)-1\right)\right]K(y)\,y_n^{2\nu}dy\end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned}\left|T^x\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right| &\leq c_\nu\int_0^\pi\left|\chi_{\{|.|<4\}}\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\right|(\sin\alpha)^{2\nu-1}d\alpha \\ &\leq 1\end{aligned}$$

ve $\alpha\in(0,\pi)$ için

$$\left|\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\right|\geq 4$$

olduğundan

$$\left|T^x\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right|=0$$

olur. Böylece

$$D_x = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^n : \alpha \in (0,\pi) \text{ için } \left| \left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2} \right) \right| < 4 \right\}$$

kümesi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
|L_1(x)| &\leq \int\limits_{D_x} \left| T^x \left(e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) - 1 \right) \right| |K(y)| \, y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \int\limits_{D_x} \left| e^{-ix'(y'-x')} \left(T^{x_n} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) \right) - 1 \right| |K(y)| \, y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \int\limits_{D_x} \left| e^{-ix'y'} e^{i|x'|^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) \, j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n^2\right) - 1 \right| |K(y)| \, y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \int\limits_{D_x} \left| e^{i|x'|^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n^2\right) \right| \left| e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) - 1 \right| |K(y)| \, y_n^{2\nu} dy \\
&+ \int\limits_{D_x} \left| e^{i|x'|^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n^2\right) - 1 \right| |K(y)| \, y_n^{2\nu} dy \\
&= L_5(x) + L_6(x) \qquad (6.15)
\end{aligned}$$

olsun.

$$|y| \leq |y - x| + |x| < \left| x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2} \right| + 1 < 5$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|L_5(x)| &\leq \int\limits_{D_x} \left| e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) - 1 \right| |K(y)| \, y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \int\limits_{D_x} |y| \, |K(y)| \, y_n^{2\nu} dy \leq \int\limits_{|y|<5} |y| \, |K(y)| \, y_n^{2\nu} dy \leq C
\end{aligned}$$

ve

$$|L_6(x)| \leq \left| \int\limits_{D_x} |K(y)| \, y_n^{2\nu} dy \right| \leq C$$

elde edilir. Bu ifadeler (6.15) de yerine yazılırsa

$$|L_1(x)| \leq C$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
L_4(x) &= \int\limits_{|y|<4} T^x K(y) \, y_n^{2\nu} dy = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^x K(y) \, \chi_{\{|.|<4\}}(y) \, y_n^{2\nu} dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} K(y) \, T^x \left(\chi_{\{|.|<4\}}(y) \right) y_n^{2\nu} dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \setminus Z} K(y) \, T^x \left(\chi_{\{|.|<4\}}(y) \right) y_n^{2\nu} dy
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$Z=\left\{y\in\mathbb{R}_{+}^{n}:\alpha\in(0,\pi),\left|\left(x'-y',\sqrt{x_{n}^{2}-2x_{n}y_{n}\cos\alpha+y_{n}^{2}}\right)\right|\geq 4\right\}$$

dir. Ayrıca $y\in\mathbb{R}_{+}^{n}\setminus Z$ için $|y|<|y-x|+|x|\leq 4+1=5$ ve

$$\left|\left(x'-y',\sqrt{x_{n}^{2}-2x_{n}y_{n}\cos\alpha+y_{n}^{2}}\right)\right|<\sqrt{2}\,(|x|+|y|)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned}L_{4}(x)&=\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}\setminus Z}K(y)\,T^{x}\left(\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right)y_{n}^{2\nu}dy\\&=\int\limits_{|y|<\frac{3}{2}}K(y)\,T^{x}\left(\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right)y_{n}^{2\nu}dy+\int\limits_{|y|\geq\frac{3}{2}}K(y)\,T^{x}\left(\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right)y_{n}^{2\nu}dy\qquad(6.16)\end{aligned}$$

dir. $|y|<\frac{3}{2}$ iken

$$\left|\left(x'-y',\sqrt{x_{n}^{2}-2x_{n}y_{n}\cos\alpha+y_{n}^{2}}\right)\right|<\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)<4$$

olup $T^{x}\left(\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right)=1$ olur ve

$$\int\limits_{|y|<\frac{3}{2}}K(y)\,T^{x}\left(\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right)y_{n}^{2\nu}dy=\int\limits_{|y|<\frac{3}{2}}K(y)\,y_{n}^{2\nu}dy$$

elde edilir. Yukarıda bulunan eşitsizlikler(6.16) da yerine yazılırsa

$$|L_{4}(x)|\leq\left|\int\limits_{|y|<\frac{3}{2}}K(y)\,y_{n}^{2\nu}dy\right|+\int\limits_{\frac{3}{2}<|y|<5}|K(y)|\,y_{n}^{2\nu}dy\leq C$$

olur. Son olarak $L_{1}(x),L_{2}(x),L_{3}$ ve $L_{4}(x)$ tahminleri (6.14) de kullanılırsa

$$|I_{4}(x)|\leq C$$

ve dolayısıyla

$$\left|e^{i|x'|^{2}}j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_{n}^{2}\right)-1\right|\left|(F_{\nu}K)(x)\right|\leq C$$

bulunur. Yani $\beta:=\left|e^{i|x'|^{2}}j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_{n}^{2}\right)-1\right|>0$ olmak üzere

$$|(F_{\nu}K)(x)|\leq C\beta^{-1}$$

dır. ■

Önerme 6.1.3 *$k \in L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^n} \left|\left(F_\nu k\right)(x)\right| \leq B$ olsun.$f \in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right) \cap L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olmak üzere*

$$\left(Lf\right)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y f(x)\, k(y)\, y_n^{2\nu} dy$$

operatörü tanımlansın. Bu taktirde

$$\|Lf\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq B \|f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. $\forall f \in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right) \cap L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$F_\nu\left(Lf\right)(x) = F_\nu\left(k \otimes f\right)(x) = \left(F_\nu k\right)(x)\left(F_\nu f\right)(x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\|Lf\|^2_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left|\left(Lf\right)(x)\right|^2 x_n^{2\nu} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left|\left(k \otimes f\right)(x)\right|^2 x_n^{2\nu} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left|\left(F_\nu k\right)(x)\right|^2 \left|\left(F_\nu f\right)(x)\right|^2 x_n^{2\nu} dx \\
&\leq B^2 \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left|\left(F_\nu f\right)(x)\right|^2 x_n^{2\nu} dx = B^2 \|f\|^2_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}
\end{aligned}$$

olur. ■

Şimdi $A_\epsilon f$ operatörü, $x \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\left(A_\epsilon f\right)(x) = \int\limits_{\left\{y\in\mathbb{R}_+^n, |y|>\epsilon\right\}} T^y f(x)\, K(y)\, y_n^{2\nu} dy, \quad \epsilon > 0$$

olarak tanımlansın. Amaç $A_\epsilon f$ operatörünün $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ $(1 \leq p < \infty)$ uzayında sınırlılığını görebilmektir. Öncelikle $A_\epsilon f$ operatörünün $L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ sınırlılığı incelenecektir.

$f \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ için

$$\|A_\epsilon f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq C \|f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

dir. Gerçekten de

$$A_\epsilon f(x) = \int\limits_{|y|>\epsilon} T^y f(x)\, K(y)\, y_n^{2\nu} dy = \left(f \otimes K_\epsilon\right)(x)$$

ve $K_\epsilon(x) = K(x)\chi_{\{x:|x|>\epsilon\}}(x)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|A_\epsilon f\|^2_{L_{2,\nu}(\mathbb{R}^n_+)} &= \|f \otimes K_\epsilon\|^2_{L_{2,\nu}(\mathbb{R}^n_+)} = \|(F_\nu f)(F_\nu K_\epsilon)\|^2_{L_{2,\nu}(\mathbb{R}^n_+)} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |F_\nu f(x)|^2 |F_\nu K_\epsilon(x)|^2 x_n^{2\nu} dx \\
&= \int\limits_{|x|>\epsilon} |F_\nu f(x)|^2 |F_\nu K(x)|^2 x_n^{2\nu} dx \\
...x &= r\theta, dx = r^{n-1} dr d\theta ... \\
&= \int\limits_{S^+} \int\limits_{\epsilon}^{\infty} |F_\nu f(r\theta)|^2 |F_\nu K(r\theta)|^2 r^{2\nu} \theta_n^{2\nu} r^{n-1} dr d\theta \\
&= \int\limits_{\epsilon}^{\infty} \int\limits_{S^+} |F_\nu K(\theta)|^2 |F_\nu f(r\theta)|^2 \theta_n^{2\nu} r^{n-1} d\theta dr \\
&\leq C^2 \int\limits_{\epsilon}^{\infty} \int\limits_{S^+} |F_\nu f(r\theta)|^2 \theta_n^{2\nu} d\theta r^{n-1} dr \\
&\leq C^2 \int\limits_{|x|>\epsilon} |F_\nu f(x)|^2 x_n^{2\nu} dx \leq C^2 \|f\|^2_{L_{2,\nu}(\mathbb{R}^n_+)}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $f \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ için

$$\|A_\epsilon f\|_{L_{2,\nu}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \|f\|_{L_{2,\nu}(\mathbb{R}^n_+)} \tag{6.17}$$

eşitsizliği sağlanır. $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$, $L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ da yoğun olduğundan (6.17) eşitsizliği her $f \in L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ için de sağlanır.

Şimdi verilecek önerme $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ uzayında Calderón- Zygmund ayrışımı olarak bilinir.

Önerme 6.1.4 *$f \in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ve $t > 0$ olsun. O halde $\mathbb{R}^n_+$'nın*

$$\mathbb{R}^n_+ = F^+ \cup \Omega^+, \quad F^+ \cap \Omega^+ = \emptyset$$

biçiminde öyle bir ayrışımı vardır ki

1) h.h.$x \in F^+$ için $|f(x)| \leq t$,

2) $\Omega_i^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : |x - x_i| < b_i,\ i \in \mathbb{N}\right\}$ ve $\Omega_i^+ \cap \Omega_j^+ = \emptyset$, $i \neq j$ olmak üzere

$$\Omega^+ = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i^+$$

dir ve dahası

$$\upsilon(x)=\begin{cases}\frac{1}{|\Omega_i^+|_\nu}\int\limits_{\Omega_i^+} f(x)\,x_n^{2\nu}dx\ , & x\in\Omega_i^+\\ f(x) & ,\ x\in F^+\end{cases}$$

için

$$t\leq|\upsilon(x)|\leq 2^{n+2\nu}t\ ,\qquad x\in\Omega_i^+$$

3) $f(x)=\upsilon(x)+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\omega_i(x)$, $\omega_i\in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$, $x\notin\Omega_i^+$ *için* $\omega_i(x)=0$, $\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\omega_i(x)\,x_n^{2\nu}dx=0$,

4) $\|\upsilon\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|\omega_i\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}\leq C\,\|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$,

5) $|\Omega^+|\leq t^{-1}\|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$ *ifadeleri sağlanır.*

Not 6.1.5 *Coifmann- Weiss homojen tipli* (X,d,μ) *uzayları için Önerme 6.1.4 ü ispatlamışlardır. Bu ispatda* $X=\mathbb{R}_+^n$, $d(x,y)=|x-y|$ *ve* $d\mu(x)=x_n^{2\nu}dx$ *alınırsa Önerme 6.1.4 elde edilir.*

Teorem 6.1.6 $f\in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$, $\mathbb{R}_+^n$ *da kompakt supportlu ve* $k\in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *olsun. Öyle* $B,C>0$ *sabitleri vardır ki*

$$\int\limits_{|x|>B}|T^yk(x)-k(x)|\,x_n^{2\nu}dx\leq M,\qquad |y|<\frac{1}{B}$$

ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|(k\otimes f)(x)|^2\,x_n^{2\nu}dx\leq C\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(x)|^2\,x_n^{2\nu}dx \tag{6.18}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu takdirde

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|(k\otimes f)(x)|>s\right\}\right|_\nu\leq\frac{C_1}{s}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|f(x)|\,x_n^{2\nu}dx$$

olacak şekilde $C_1>0$ *sabiti vardır.*

Kanıt. Herhangi bir $s>0$ sayısı ve $\mathbb{R}_+^n$ da kompakt supportlu $f\in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ için Önerme 6.1.4 kullanılacaktır. $Af(x)=(k\otimes f)(x)$ ve $\omega=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\omega_i$ olmak üzere,

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|Af(x)|>t\right\}\right|_\nu \le \left|\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|Av(x)|>\frac{t}{2}\right\}\right|_\nu + \left|\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|A\omega(x)|>\frac{t}{2}\right\}\right|_\nu \tag{6.19}$$

şeklinde yazılır.

$$\|v\|^2_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}=\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|v(x)|^2x_n^{2\nu}dx=\int\limits_{F^+}|v(x)|^2x_n^{2\nu}dx+\int\limits_{\Omega^+}|v(x)|^2x_n^{2\nu}dx$$
$$\le C^2s\|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

ve buradan

$$\|v\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}\le Cs^{\frac{1}{2}}\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

dir. (6.18) eşitsizliğinden dolayı

$$\|Av\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}\le C_1\|v\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}\le Cs^{\frac{1}{2}}\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}\left|\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|Av(x)|>\frac{t}{2}\right\}\right|_\nu &= \frac{4}{t^2}\int\limits_{\left\{x\in\mathbb{R}_+^n:|Av(x)|>\frac{t}{2}\right\}}\left(\frac{t}{2}\right)^2x_n^{2\nu}dx\\ &\le \frac{4}{t^2}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|Av(x)|^2x_n^{2\nu}dx\\ &\le C\frac{4}{t^2}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|v(x)|^2x_n^{2\nu}dx\\ &\le C\frac{s}{t^2}\|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}\end{aligned} \tag{6.20}$$

bulunur. Şimdi (6.19) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci toplanan için tahminde bulunulacaktır. Öncelikle $\Omega_1=\left\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<\frac{1}{B}\right\}$ olmak üzere supp $\omega_1\subset\Omega_1$ ve $\int\limits_{\Omega_1}\omega_1(x)x_n^{2\nu}dx=0$ koşullarını sağlayan ω_1 fonksiyonu göz önüne alınsın. Ayrıca

$\Omega_1^+ = \Omega_1 \cap \mathbb{R}_+^n$, $Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < B\}$ ve $Q_1^+ = Q_1 \cap \mathbb{R}_+^n$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
A\omega_1(x) &= \int_{\mathbb{R}_+^n} T^y k(x)\,\omega_1(y)\,y_n^{2\nu} dy \\
&= \int_{\Omega_1^+} T^y k(x)\,\omega_1(y)\,y_n^{2\nu} dy \\
&= \int_{\Omega_1^+} \left[T^y k(x) - k(x)\right]\omega_1(y)\,y_n^{2\nu} dy
\end{aligned}$$

dir. Fubini teoremi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_{{}^C Q_1^+} |A\omega_1(x)|\,x_n^{2\nu} dx &= \int_{{}^C Q_1^+} \left| \int_{\Omega_1^+} \left[T^y k(x) - k(x)\right]\omega_1(y)\,y_n^{2\nu} dy \right| x_n^{2\nu} dx \\
&\le \int_{\Omega_1^+} \left(\int_{{}^C Q_1^+} \left|T^y k(x) - k(x)\right| x_n^{2\nu} dx \right) |\omega_1(y)|\,y_n^{2\nu} dy \\
&\le C_1 \|\omega_1\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} \le C_1 \|f\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Q_1^+ nın karakteristik fonksiyonu $\chi_{Q_1^+}(x)$ olarak gösterilirse Chebishev eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \left|\left(1 - \chi_{Q_1^+}(x)\right) A\omega(x)\right| > t\right\}\right|_\nu &\le \frac{c}{t} \left\|\left(1 - \chi_{Q_1^+}(x)\right) A\omega(x)\right\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} \\
&\le \frac{c}{t} \|f\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)}
\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |A\omega_1(x)| > t\right\}\right|_\nu &\le \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \left|\left(1 - \chi_{Q_1^+}(x)\right) A\omega_1(x)\right| > t\right\}\right|_\nu + \left|Q_1^+\right|_\nu \\
&\le \frac{c}{t} \|f\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} + \left|Q_1^+\right|_\nu \qquad (6.21)
\end{aligned}$$

ve

$$\left|Q_1^+\right|_\nu \le C_2 \left|\Omega_1^+\right|_\nu \le \frac{C_2}{s} \|f\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)}$$

olduğundan (6.21) eşitsizliği

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |A\omega_1(x)| > t\right\}\right|_\nu \le \frac{c}{t} \|f\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} + \frac{C_2}{s} \|f\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)}$$

olur. Şimdi supportu $\Omega_i = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|x - x^{(i)}\right| < \frac{1}{B}\right\}$ içinde olan ω_i fonksiyonu alınsın. Buradan, ${}^{C}Q_i^{+} = \left\{x \in \mathbb{R}_{+}^{n} : \left|x - x^{(i)}\right| > B\right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{{}^{C}Q_i^{+}} \left| \int\limits_{\Omega_i^{+}} T^{y} k\left(x\right) \omega_i\left(y\right) y_n^{2\nu} dy \right| x_n^{2\nu} dx \\
&= \int\limits_{{}^{C}Q_i^{+}} \left| \int\limits_{\Omega_i^{+}} \left[T^{y} k\left(x\right) - T^{x^{(i)}} k\left(x\right)\right] \omega_i\left(y\right) y_n^{2\nu} dy \right| x_n^{2\nu} dx \\
&\leq \int\limits_{\Omega_i^{+}} \left|\omega_i\left(y\right)\right| \left(\int\limits_{{}^{C}Q_i^{+}} \left|T^{y} k\left(x\right) - T^{x^{(i)}} k\left(x\right)\right| x_n^{2\nu} dx \right) y_n^{2\nu} dy
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. ${}^{C}B_i^{+} = \left\{z \in \overline{\mathbb{R}_{+}^{n+1}} : \left|\sqrt{z_n^2 + z_{n+1}^2}\right| > B, \left|x - x^{(i)}\right| > B\right\}$ ve $z_n = x_n \cos\alpha$, $z' = x'$, $z_{n+1} = x_n \sin\alpha$, $(0 \leq \alpha < \pi)$ için $z = (x', z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{R}_{+}^{n+1}$, $z_{n+1} > 0$ olmak üzere

$$J = \int\limits_{{}^{C}B_i^{+}} \left| k\left(z' - y', \sqrt{\left(z_n - y_n\right)^2 + z_{n+1}^2}\right) - k\left(z' - \left(x^{(i)}\right)', \sqrt{\left(z_n - x_n^{(i)}\right)^2 + z_{n+1}^2}\right) \right| z_{n+1}^{2\nu-1} dz$$

olsun. Şimdi

$$\xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}_{+}^{n},\ \xi' = z' - \left(x^{(i)}\right)',\ \xi_n = z_n - x_n^{(i)}$$

ve

$$\eta = \left(\eta', \eta_n, 0\right) \in \overline{\mathbb{R}_{+}^{n+1}},\ \eta' = \left(x^{(i)}\right)' - y',\ \eta_n = x_n^{(i)} - y_n$$

değişken değiştirmesi yapılarak

$$J = \int\limits_{\left({}^{C}B_i^{+}\right)'} \left| k\left(\xi' + \eta', \sqrt{\left(\xi_n + \eta_n\right)^2 + z_{n+1}^2}\right) - k\left(\xi', \sqrt{\xi_n^2 + z_{n+1}^2}\right) \right| z_{n+1}^{2\nu-1} d\xi$$

bulunur. Burada

$$\left({}^{C}B_i^{+}\right)' = \left\{ (\xi', \xi_n, z_{n+1}) \in \mathbb{R}_{+}^{n+1} : \left| \sqrt{\left(\xi_n + x_n^{(i)}\right)^2 + z_{n+1}^2} - x_n^{(i)} \right| > B, \left|\xi - x_n^{(i)}\right| > B \right\}$$

biçimindedir. Tekrar $\xi_n = x_n \cos\alpha$, $z_{n+1} = x_n \sin\alpha$, $x_n > 0$ değişken değişimi ile

$$\begin{aligned}
B &< \left| \sqrt{\left(\xi_n + x_n^{(i)}\right)^2 + z_{n+1}^2} - x_n^{(i)} \right| \\
&\leq \left| \sqrt{\left(x_n + x_n^{(i)}\right)^2} - x_n^{(i)} \right| = |x_n| = x_n
\end{aligned}$$

ve

$$|J| \leq \int\limits_{|x|>B} |T^{\eta} k(x) - k(x)| \, x_n^{2\nu} dx$$

elde edilir. $|\eta| < \frac{1}{B}$ olduğundan $|J| \leq C$ dir. O halde

$$\int\limits_{{}^{C}Q_i^+} |A\omega_i(x)| \, x_n^{2\nu} dx \leq \|\omega_i\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)}$$

bulunur. $\omega = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \omega_i$ olduğundan

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : |A\omega(x)| > t \right\} \right|_{\nu} \leq C \left(t^{-1} \|f\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} + s^{-1} \|f\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} \right) \tag{6.22}$$

dir. O halde (6.19) eşitsizliğinde (6.20) ve (6.22) ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : |Af(x)| > t \right\} \right|_{\nu} \leq C \left(\frac{s}{t^2} \|f\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} + t^{-1} \|f\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} + s^{-1} \|f\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} \right) \tag{6.23}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafını minimize etmek için seçilen $s > 0$ sayısı aritmetik ortalamanın geometrik ortalamaya eşit olma durumda bulunur. Böylece (6.23) eşitsizliği

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : |Af(x)| > t \right\} \right|_{\nu} \leq \frac{c_1}{t} \|f\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)}$$

haline gelir. Dolayısıyla Af operatörü $(1,1)$ zayıftır. ■

Teorem 6.1.7 *$f \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ ve $k \in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ fonksiyonu için*

$$\int\limits_{|x| \geq 4|y|} |T^y k(x) - k(x)| \, x_n^{2\nu} dx \leq M, \qquad |y| < \frac{1}{4}$$

ve

$$\|k \otimes f\|_{L_{2,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} \leq M \|f\|_{L_{2,\nu}(\mathbb{R}_+^n)}$$

ise $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\|k \otimes f\|_{L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|f\|_{L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} \tag{6.24}$$

eşitsizliğini sağlayan f den bağımsız bir $C > 0$ sabiti vardır.

Kanıt. $1 < p < 2$ için Teorem 6.1.6 ve Marcinkiewicz interpolasyon teoremi kullanılarak

$$\|k \otimes f\|_{L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|f\|_{L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu yüzden $2 < p < \infty$ için (6.24) eşitsizliğinin sağlandığı gösterilirse ispat biter. Bu kısmın ispatında $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ iken ψ lokal integrallenebilir fonksiyon ve kompakt supportlu, sürekli ve $\|\varphi\|_{L_{q,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} < 1$ özelliğindeki φ fonksiyonu için

$$\sup_{\varphi} \left| \int \varphi(x) \, \psi(x) \, x_n^{2\nu} dx \right| = A < \infty$$

ise $\psi \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ve $\|\psi\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)} = A$ dır, ifadesinden faydalanılacaktır. Bu durumda $2 < p < \infty$ halinde $f \in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right) \cap L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ fonksiyonu ve yukarıdaki özellikleri sağlayan $\varphi \in L_{q,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ fonksiyonu alınsın. $k \in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ olmak üzere

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} T^{y}k(x)\, f(y)\, \varphi(x)\, y_{n}^{2\nu} x_{n}^{2\nu} dx dy$$

integrali mutlak yakınsaktır. Şöyle ki

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} T^{y}k(x)\, f(y)\, \varphi(x)\, y_{n}^{2\nu} x_{n}^{2\nu} dx dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} T^{y}k(x)\, \varphi(x)\, x_{n}^{2\nu} dx \right) f(y)\, y_{n}^{2\nu} dy \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $1 < q < 2$ için $\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} T^{y}k(x)\, \varphi(x)\, x_{n}^{2\nu} dx$ integrali $L_{q,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayındandır. Böylece

$$\|k \otimes \varphi\|_{L_{q,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)} \leq A_{q,\nu} \|\varphi\|_{L_{q,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)} \leq A_{q,\nu}$$

ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} (k \otimes \varphi)(y)\, f(y)\, y_{n}^{2\nu} dy \right| \\ &\leq A_{q,\nu} \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)} \end{aligned}$$

mutlak yakınsaklık görülür. Bundan başka

$$|I| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} (k \otimes \varphi)(y)\, f(y)\, y_{n}^{2\nu} dy \right| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} (k \otimes f)(x)\, \varphi(x)\, x_{n}^{2\nu} dx \right| \leq A_{q,\nu} \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}$$

olduğundan $(k \otimes f) \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ dir ve $\|k \otimes f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)} \leq A_{q,\nu} \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}$ elde edilir. ■

Bu bölümün temel sonucu aşağıdaki teorem ile verilecektir. $A_{\epsilon}f$, B- singüler integral operatörünün $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ sınırlılığının gösterilmesinin yanında $\lim\limits_{\epsilon \to 0^{+}} A_{\epsilon}f(x)$ limitinin $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ da varlığından ve bu limit değerinin de sınırlılığından bahsedilecektir.

Teorem 6.1.8 *$f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$, $1 < p < \infty$ verilsin. Ayrıca $K \in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ fonksiyonu*

$$\left| \int\limits_{\epsilon<|x|<r} K(x)\, x_{n}^{2\nu} dx \right| \leq M, \quad o < \epsilon < r < \infty \tag{6.25}$$

$$\int\limits_{r<|x|<4r} |K(x)|\, x_n^{2\nu} dx \leq M, \quad 0<r<\infty \tag{6.26}$$

$$\int\limits_{|x|\geq 4|y|} |T^y K(x) - K(x)|\, x_n^{2\nu} dx \leq M, \quad |y| < \frac{1}{4} \tag{6.27}$$

özelliklerini sağlasın. O halde

$$(A_\epsilon f)(x) = \int\limits_{|y|>\epsilon} T^y f(x)\, K(y)\, y_n^{2\nu} dy \tag{6.28}$$

ile tanımlanan $A_\epsilon : f \to A_\epsilon f$ *operatörü* $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *dan* $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *ya sınırlıdır. Yani,*

$$\|A_\epsilon f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq C_{p,\nu} \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \tag{6.29}$$

olacak şekilde f *den bağımsız bir* $C_{p,\nu} > 0$ *sabiti vardır. Dahası, her* $f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *için*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} A_\epsilon f(x) \tag{6.30}$$

limiti $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ *normunda vardır ve bu limit* Af *ile gösterilirse*

$$\|Af\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq C_{p,\nu} \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \tag{6.31}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. (6.28) de verilen $A_\epsilon f$ operatörünün

$$\|A_\epsilon f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq C_{p,\nu} \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

eşitsizliğini sağlayacağı Teorem 6.1.7 den açıktır. Şimdi, (6.30) da verilen limitin $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ uzayında varlığı ve Af operatörünün (6.31) eşitsizliğini sağladığı gösterilecektir. Kompakt supportlu smooth fonksiyonlar için ispat yapmak yeterli olacaktır. Çünkü herhangi bir $f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ fonksiyonu

$$f = f_1 + f_2$$

olarak yazılabilir. Burada f_1 kompakt supportlu smooth fonksiyon, f_2 ise $\|f_2\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$ normu yeterince küçük olan ihmal edilebilir bir fonksiyondur. Böylece

$$(A_\epsilon f)(x) = (A_\epsilon f_1)(x) + (A_\epsilon f_2)(x)$$

dir. f_2 fonksiyonu için (6.29) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\|A_\epsilon f - A_\epsilon f_1\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} = \|A_\epsilon f_2\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq c\, \|f_2\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq \delta$$

elde edilir. Burada δ yeterince küçüktür.

Böylece, f kompakt supportlu smooth fonksiyon, $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ ve herhangi ϵ_1, ϵ_2 için

$$\begin{aligned}
A_{\epsilon_2} f(x) - A_{\epsilon_1} f(x) &= \int\limits_{|y|>\epsilon_2} T^y f(x) K(y) y_n^{2\nu} dy - \int\limits_{|y|>\epsilon_1} T^y f(x) K(y) y_n^{2\nu} dy \\
&= \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} T^y f(x) K(y) y_n^{2\nu} dy \\
&= \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} \left(T^y f(x) - f(x)\right) K(y) y_n^{2\nu} dy \\
&+ \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} f(x) K(y) y_n^{2\nu} dy
\end{aligned}$$

ve

$$\left\| T^y f(.) - f(.) \right\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq C |y|$$

ifadesi göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\left\| A_{\epsilon_2} f - A_{\epsilon_1} f \right\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left| A_{\epsilon_2} f(x) - A_{\epsilon_1} f(x) \right|^p x_n^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left(\int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} \left| T^y f(x) - f(x) \right| |K(y)| y_n^{2\nu} dy \right)^p x_n^{2\nu} dx \right]^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left[\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left| \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} f(x) K(y) y_n^{2\nu} dy \right|^p x_n^{2\nu} dx \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= J' + J''
\end{aligned} \tag{6.32}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
J' &= \left[\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left(\int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} \left| T^y f(x) - f(x) \right| |K(y)| y_n^{2\nu} dy \right)^p x_n^{2\nu} dx \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} |K(y)| |y| y_n^{2\nu} dy \leq \epsilon_2 M
\end{aligned}$$

dir. J'' ise

$$J'' = \left[\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left| \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} f(x) K(y) y_n^{2\nu} dy \right|^p x_n^{2\nu} dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_{L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} \left| \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} K(y) y_n^{2\nu} dy \right|$$

olup (6.25) den dolayı

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0} \left| \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} K(y) y_n^{2\nu} dy \right| = 0$$

dir. Şimdi, (6.32) eşitsizliğinin her iki tarafından limit alınırsa

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0^+} \|A_{\epsilon_2} f - A_{\epsilon_1} f\|_{L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} = 0$$

bulunur. Böylece $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ Banach uzay olduğundan $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} A_\epsilon f(x)$ limiti vardır. Bu limit değeri $Af(x)$ ile gösterilirse

$$\left\| \lim_{\epsilon\to 0^+} A_\epsilon f \right\|_{L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} = \|Af\|_{L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C_{p,\nu} \|f\|_{L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)}$$

elde edilir. ■

6.2. Vektör Değerli Fourier- Bessel Singüler İntegral Operatörü ve Sınırlılığı

Bu bölümde vektör değerli Fourier- Bessel singüler integral operatörü (vektör değerli B- singüler integral operatörü) tanımlanacak ardından bu operatörün sınırlılığı incelenecektir.

Teorem 6.2.1 $L_\infty^0(\mathbb{R}_+^n, H_1)$ *, kompakt supportlu* H_1 *vektör değerli sınırlı fonksiyonların uzayı,* $M(\mathbb{R}_+^n, H_2)$ *ölçülebilir ve* H_2 *vektör değerli fonksiyonların uzayı olmak üzere* A *yarı- lineer operatörü*

$$A : L_\infty^0(\mathbb{R}_+^n, H_1) \to M(\mathbb{R}_+^n, H_2)$$

olarak tanımlansın. $f \in L_\infty^0(\mathbb{R}_+^n, H_1)$ *için*

$$\left|\left\{x : \|Af\|_{H_2} > \lambda\right\}\right|_\nu \leq \frac{C_1}{\lambda} \|f\|_{L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n, H_1)}$$

ve

$$\left|\left\{x : \|Af\|_{H_2} > \lambda\right\}\right|_\nu \leq \frac{C_r^r}{\lambda^r} \|f\|_{L_{r,\nu}(\mathbb{R}_+^n, H_1)}^r$$

eşitsizlikleri sağlansın.

Bu taktirde $1 < p < r$ *ve* $f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)$ *için* $Af \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)$ *ve*

$$\|Af\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_2\right)} \leq C\,\|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_1\right)}$$

dir. Burada C_1, C_r *ve* C *sabitleri* f *ve* λ *dan bağımsızdır.*

Kanıt.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{\|f(x)\|_{H_1}} & , \; f(x) \neq 0 \\ 0 & , \; f(x) = 0 \end{cases}$$

olmak üzere skaler değerli g fonksiyonu için $Bg(x) = \|A(F(x)\,g)\|_{H_2}$olsun. O halde yarı- lineer B operatörü $(1,1)$ ve (r,r) zayıfdır. Şöyle ki,

$$\begin{aligned} \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |Bg(x)| > \lambda\right\}\right|_\nu &= \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \|A(F(x)\,g)\|_{H_2} > \lambda\right\}\right|_\nu \\ &\leq \frac{c_1}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|F(x)\|_{H_1} |g(x)|\, x_n^{2\nu} dx = \frac{c_1}{\lambda} \|g\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \end{aligned}$$

eşitsizliğinden B'operatörünün $(1,1)$ zayıf ve

$$\begin{aligned} \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |Bg(x)| > \lambda\right\}\right|_\nu &= \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \|A(F(x)\,g)\|_{H_2} > \lambda\right\}\right|_\nu \\ &\leq \frac{C_r^r}{\lambda^r} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|F(x)\|_{H_1}^r |g(x)|^r x_n^{2\nu} dx \\ &\leq \frac{C_r^r}{\lambda^r} \|g\|_{L_{r.\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \end{aligned}$$

eşitsizliğinden (r,r) zayıf olduğu görülür. O halde Marcinkiewicz interpolasyon teoremine göre B operatörü $1 < p < r$ için (p,p) güçlüdür, yani

$$\|Bg\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq C\,\|g\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \tag{6.33}$$

dir. (6.33) eşitsizliğinde $g(x) = \|f(x)\|_{H_1}$ alınırsa

$$\begin{aligned} \|Bg\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |Bg(x)|^p x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|A(F(x)\,g)(x)\|_{H_2}^p x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|A(f(x))\|_{H_2}^p x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|Af\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_2\right)} \end{aligned}$$

ve böylece

$$\|Af\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_2\right)} \leq C\,\|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_1\right)}$$

elde edilir. ■

Tanım 6.2.2 *H_1 ve H_2 ayrılabilir Hilbert uzaylar*

$$B(H_1,H_2) = \{T \mid T : H_1 \to H_2 \text{ sınırlı, lineer operatör}\}$$

olmak üzere

$$K : \mathbb{R}_+^n \to B(H_1,H_2)$$

fonksiyonu

1) K ölçülebilirdir ve orjini içermeyen kompakt kümelerde integrallenebilirdir,

2) $0 < \epsilon < r < \infty$ için

$$\left\| \int\limits_{\epsilon<|x|<r} K(x)\, x_n^{2\nu} dx \right\|_{B(H_1,H_2)} \leq M \tag{6.34}$$

ve her $h \in H_1$ için $\epsilon \to 0$ iken

$$\left[\int\limits_{\epsilon<|x|<r} K(x)\, x_n^{2\nu} dx \right] h \tag{6.35}$$

yakınsaktır,

3) $\|h\|_{H_1} < 1$ özelliğini sağlayan her $h \in H_1$ için

$$\int\limits_{r<|x|<4r} |x|\, \|K(x)\, h\|_{H_2}\, x_n^{2\nu} dx \leq Cr, \tag{6.36}$$

4)

$$\int\limits_{|x|\geq 4|y|} \|T^y K(x) - K(x)\|_{B(H_1,H_2)}\, x_n^{2\nu} dx \leq M, \quad |y| < \frac{1}{4} \tag{6.37}$$

özelliklerini sağlarsa K fonksiyonuna vektör değerli B- singüler integral çekirdeği denir.

Önerme 6.2.3

$$K:\mathbb{R}_{+}^{n}\rightarrow B(H_{1},H_{2})$$

vektör değerli B- singüler integral çekirdeği olsun. O halde

$$\|(F_{\nu}K)(x)\|_{B(H_{1},H_{2})}\leq CM,\quad x\in S_{+}^{n-1}$$

eşitsizliği sağlanır ve burada $S_{+}^{n-1}=\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n}:|x|=1\right\}$ *dır.*

Kanıt. $K_{t}(x):=t^{n+2\nu}K(tx)\,,\,t>0$ olsun. K_{t} fonksiyonu vektör değerli B- singüler integral çekirdeğinin özelliklerini sağlar. Şimdi

$$(F_{\nu}K)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}K(y)\,e^{-ix'y'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_{n}y_{n})\,y_{n}^{2\nu}dy \tag{6.38}$$

ifadesinde y yerine ty alınarak

$$\begin{aligned}(F_{\nu}K)(x)&=\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}K(ty)\,e^{-itx'y'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(tx_{n}y_{n})\,y_{n}^{2\nu}t^{n+2\nu}dy\\&=\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}K_{t}(y)\,e^{-itx'y'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(tx_{n}y_{n})\,y_{n}^{2\nu}dy\\&=(F_{\nu}K_{t})(tx)\end{aligned}$$

elde edilir. $(F_{\nu}K_{t})(x)$ ifadesini tüm $t>0$ ve $|x|=1$ iken incelenirse ispat tamamlanmış olur. Şöyle ki

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}e^{-ix'y'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_{n}y_{n})\,T^{x}K(y)\,y_{n}^{2\nu}dy\\&=\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}T^{x}\left(e^{-ix'y'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_{n}y_{n})\right)K(y)\,y_{n}^{2\nu}dy\\&=\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}e^{-ix'(y'-x')}T^{x_{n}}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_{n}y_{n})\,K(y)\,y_{n}^{2\nu}dy\\&=\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}e^{-ix'y'}e^{i|x'|^{2}}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_{n}y_{n})\,j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_{n}^{2}\right)K(y)\,y_{n}^{2\nu}dy\\&=e^{i|x'|^{2}}j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_{n}^{2}\right)\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}}e^{-ix'y'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_{n}y_{n})\,K(y)\,y_{n}^{2\nu}dy\\&=e^{i|x'|^{2}}j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_{n}^{2}\right)(F_{\nu}K)(x)\end{aligned} \tag{6.39}$$

ve (6.38) ve (6.39) ifadeleri taraf tafara çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(e^{i|x'|^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n^2\right) - 1\right) \left(F_\nu K\right)(x) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n y_n\right) \left(T^x K\left(y\right) - K(y)\right) y_n^{2\nu} dy \\
&= \int\limits_{|y|\geq 4} ... + \int\limits_{|y|<4} .. = I_3\left(x\right) + I_4\left(x\right).
\end{aligned}$$

bulunur. $I_3\left(x\right)$ için

$$\left\| I_3\left(x\right)\right\|_{B(H_1,H_2)} \leq \int\limits_{|y|\geq 4} \left\| T^x K\left(y\right) - K(y)\right\|_{B(H_1,H_2)} y_n^{2\nu} dy \leq M$$

eşitsizliği ve $I_4\left(x\right)$ için

$$\begin{aligned}
I_4\left(x\right) &= \int\limits_{|y|<4} e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n y_n\right) \left(T^x K\left(y\right) - K(y)\right) y_n^{2\nu} dy \\
&= \int\limits_{|y|<4} \left(e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n y_n\right) - 1\right) T^x K\left(y\right) y_n^{2\nu} dy \\
&- \int\limits_{|y|<4} \left(e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n y_n\right) - 1\right) K(y) y_n^{2\nu} dy \\
&- \int\limits_{|y|<4} K(y) y_n^{2\nu} dy + \int\limits_{|y|<4} T^x K\left(y\right) y_n^{2\nu} dy \\
&= L_1\left(x\right) + L_2\left(x\right) + L_3 + L_4\left(x\right) \qquad (6.40)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\left| e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n y_n\right) - 1\right| &\leq \left| j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n y_n\right)\right| \left| e^{-ix'y'} - 1\right| + \left| j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n y_n\right) - 1\right| \\
&\leq \left| e^{-ix'y'} - 1\right| + c_\nu \int\limits_{-1}^{1} \left| e^{ix_n y_n t} - 1\right| \left| 1 - t^2\right|^{\nu-1} dt \\
&\leq C\left| y\right|
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left\|L_2(x)\right\|_{B(H_1,H_2)} &\leq \int\limits_{|y|<4} \left|e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) - 1\right| \left\|K(y)\right\|_{B(H_1,H_2)} y_n^{2\nu} dy \\ &\leq C \int\limits_{|y|<4} |y| \left\|K(y)\right\|_{B(H_1,H_2)} y_n^{2\nu} dy \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{4^{-k}<|y|<4^{-k+1}} |y| \left\|K(y)\right\|_{B(H_1,H_2)} y_n^{2\nu} dy \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k+1} \int\limits_{4^{-k}<|y|<4^{-k+1}} \left\|K(y)\right\|_{B(H_1,H_2)} y_n^{2\nu} dy \leq C\end{aligned}$$

bulunur. L_3 için, (6.34) den dolayı $\forall\epsilon > 0$ için $\exists\ M > 0$ vardır ki

$$\left\|L_3\right\|_{B(H_1,H_2)} = \left\| \int\limits_{|y|<4} K(y) y_n^{2\nu} dy \right\|_{B(H_1,H_2)} = \left\| \lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{\epsilon<|y|<4} K(y) y_n^{2\nu} dy \right\|_{B(H_1,H_2)} \leq M$$

dir. $L_1(x)$ integrali hakkında tahminde bulunmak için aşağıdaki işlemler yapılacaktır.

$$\begin{aligned}\left|T^x \chi_{\{|.|<4\}}(y)\right| &\leq c_\nu \int\limits_0^\pi \left|\chi_{\{|.|<4\}}\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| (\sin\alpha)^{2\nu-1} d\alpha \\ &\leq 1\end{aligned}$$

ve $\alpha \in (0,\pi)$ için

$$\left|\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| \geq 4$$

olduğundan

$$\left|T^x \chi_{\{|.|<4\}}(y)\right| = 0$$

olur. Böylece

$$D_x = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^n : \alpha \in (0,\pi) \text{ için } \left|\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| < 4 \right\}$$

kümesi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
\|L_1(x)\|_{B(H_1,H_2)} &\leq \int\limits_{D_x} \left| T^x\left(e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) - 1\right)\right| \|K(y)\|_{B(H_1,H_2)}\, y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \int\limits_{D_x} \left| e^{-ix'(y'-x')}\left(T^{x_n} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)\right) - 1\right| \|K(y)\|_{B(H_1,H_2)}\, y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \int\limits_{D_x} \left| e^{-ix'y'} e^{i|x'|^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n)\, j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n^2\right) - 1\right| \|K(y)\|_{B(H_1,H_2)}\, y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \int\limits_{D_x} \left| e^{i|x'|^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n^2\right)\right| \left| e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) - 1\right| \|K(y)\|_{B(H_1,H_2)}\, y_n^{2\nu} dy \\
&+ \int\limits_{D_x} \left| e^{i|x'|^2} j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n^2\right) - 1\right| \|K(y)\|_{B(H_1,H_2)}\, y_n^{2\nu} dy \\
&= L_5(x) + L_6(x) \qquad (6.41)
\end{aligned}$$

olsun.

$$|y| \leq |y-x| + |x| < \left| x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right| + 1 < 5$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\|L_5(x)\|_{B(H_1,H_2)} &\leq \int\limits_{D_x} \left| e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) - 1\right| \|K(y)\|_{B(H_1,H_2)}\, y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \int\limits_{D_x} |y|\, \|K(y)\|_{B(H_1,H_2)}\, y_n^{2\nu} dy \leq \int\limits_{|y|<5} |y|\, \|K(y)\|_{B(H_1,H_2)}\, y_n^{2\nu} dy \leq C
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|L_6(x)\|_{B(H_1,H_2)} &\leq \int\limits_{D_x} \|K(y)\|_{B(H_1,H_2)}\, y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \int\limits_{|y|<5} \|K(y)\|_{B(H_1,H_2)}\, y_n^{2\nu} dy \leq C
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler (6.41) da yerine yazılırsa

$$\|L_1(x)\|_{B(H_1,H_2)} \leq C$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
L_4(x) &= \int\limits_{|y|<4} T^x K(y)\, y_n^{2\nu} dy = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^x K(y)\, \chi_{\{|.|<4\}}(y)\, y_n^{2\nu} dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} K(y)\, T^x\left(\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right) y_n^{2\nu} dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \backslash Z} K(y)\, T^x\left(\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right) y_n^{2\nu} dy
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$Z=\left\{y\in\mathbb{R}_{+}^{n}:\alpha\in(0,\pi)\,,\left|\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\right|\geq 4\right\}$$

dir. Ayrıca $y\in\mathbb{R}_{+}^{n}\setminus Z$ için $|y|<|y-x|+|x|\leq 4+1=5$ ve

$$\left|\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\right|<\sqrt{2}\left(|x|+|y|\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned}L_4(x)&=\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}\setminus Z}K(y)\,T^x\left(\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right)y_n^{2\nu}dy\\&=\int\limits_{|y|<\frac{3}{2}}K(y)\,T^x\left(\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right)y_n^{2\nu}dy\\&+\int\limits_{|y|\geq\frac{3}{2}}K(y)\,T^x\left(\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right)y_n^{2\nu}dy.\end{aligned}\tag{6.42}$$

dir. $|y|<\frac{3}{2}$ iken

$$\left|\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\right|<\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)<4$$

olup $T^x\left(\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right)=1$ olur ve

$$\int\limits_{|y|<\frac{3}{2}}K(y)\,T^x\left(\chi_{\{|.|<4\}}(y)\right)y_n^{2\nu}dy=\int\limits_{|y|<\frac{3}{2}}K(y)\,y_n^{2\nu}dy$$

elde edilir. Bu durumda yukarıda bulunan eşitsizlikler (6.42) da yerine yazılırsa

$$\|L_4(x)\|_{B(H_1,H_2)}\leq\left\|\int\limits_{|y|<\frac{3}{2}}K(y)\,y_n^{2\nu}dy\right\|_{B(H_1,H_2)}+\int\limits_{\frac{3}{2}<|y|<5}\|K(y)\|_{B(H_1,H_2)}\,y_n^{2\nu}dy\leq C$$

olur. Son olarak $L_1(x)\,,L_2(x)\,,L_3$ ve $L_4(x)$ tahminleri (6.40) de kullanılırsa

$$\|I_4(x)\|_{B(H_1,H_2)}\leq C$$

ve

$$\left|e^{i|x'|^2}j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n^2\right)-1\right|\,\|(F_\nu K)(x)\|_{B(H_1,H_2)}\leq C$$

bulunur. Yani $\beta:=\left|e^{i|x'|^2}j_{\nu-\frac{1}{2}}\left(x_n^2\right)-1\right|>0$ olmak üzere

$$\|(F_\nu K)(x)\|_{B(H_1,H_2)}\leq C\beta^{-1}$$

dir. ■

Önerme 6.2.4 *$K:\mathbb{R}_+^n \to B(H_1,H_2)$ vektör değerli B- singüler integral çekirdeği ve $f\in L_\infty^0\left(\mathbb{R}_+^n,H_1\right)$ olsun. Bu durumda*

$$(T_\epsilon f)(x) = \int\limits_{|y|>\epsilon} K(y)\,T^y f(x)\,y_n^{2\nu}dy,\ \epsilon>0$$

operatörü

$$\|T_\epsilon f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_2\right)} \leq C\,\|f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_1\right)}$$

eşitsizliğini sağlar.

Kanıt. $(T_\epsilon f)(x) = (K_\epsilon \otimes f)(x)$ ve $K_\epsilon(x) = K(x)\chi_{\{x:|x|>\epsilon\}}(x)$ olsun. Plancherel Teoremi kullanılarak istenilen eşitsizlik

$$\|T_\epsilon f\|^2_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_2\right)} = \|K_\epsilon\otimes f\|^2_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_2\right)} = \|(F_\nu K_\epsilon)(F_\nu f)\|^2_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_2\right)}$$

$$\begin{aligned}
\|T_\epsilon f\|^2_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_2\right)} &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|F_\nu K_\epsilon(x)\|^2_{B(H_1,H_2)} \|F_\nu f(x)\|^2_{H_1} x_n^{2\nu}dx \\
&= \int\limits_{|x|>\epsilon} \|F_\nu K(x)\|^2_{B(H_1,H_2)} \|F_\nu f(x)\|^2_{H_1} x_n^{2\nu}dx \\
&\ldots x = r\theta,\quad dx = r^{n-1}drd\theta \ldots \\
&= \int\limits_{S^+}\int\limits_{\epsilon}^{\infty} \|F_\nu K(r\theta)\|^2_{B(H_1,H_2)} \|F_\nu f(r\theta)\|^2_{H_1} r^{n+2\nu-1}\theta_n^{2\nu}drd\theta \\
&= \int\limits_{\epsilon}^{\infty}\left(\int\limits_{S^+} \|F_\nu K(\theta)\|^2_{B(H_1,H_2)} \|F_\nu f(r\theta)\|^2_{H_1} \theta_n^{2\nu}d\theta\right) r^{n-1}dr \\
&\leq C^2 \int\limits_{|x|>\epsilon} \|F_\nu f(x)\|^2_{H_1} x_n^{2\nu}dx \\
&\leq C^2\,\|f\|^2_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_1\right)}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. ■

Önerme 6.2.5 *H ayrılabilir Hilbert uzay, $f\in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H\right)$ ve $t>0$ olsun. O halde $\mathbb{R}_+^n$ nın*

$$\mathbb{R}_+^n = F^+\cup\Omega^+,\quad F^+\cap\Omega^+ = \emptyset$$

ayrışımı vardır ki

1) h.h.$x\in F^+$ için $|f(x)|\leq t$, *2)* $\Omega_i^+ = \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : |x - x_i| < b_i,\ i \in \mathbb{N}\right\}$ *ve* $\Omega_i^+ \cap \Omega_j^+ = \emptyset$, $i \neq j$ *olmak üzere*

$$\Omega^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i^+$$

dır ve dahası

$$\upsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left|\Omega_i^+\right|_\nu} \int\limits_{\Omega_i^+} f(x)\, x_n^{2\nu} dx \ , & x \in \Omega_i^+ \\ f(x) & , \ x \in F^+ \end{cases}$$

için

$$t \leq \|\upsilon(x)\|_H \leq 2^{n+2\nu} t \ , \qquad x \in \Omega_i^+,$$

3) $f(x) = \upsilon(x) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \omega_i(x)$, $\omega_i \in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H\right)$, $x \notin \Omega_i^+$, $\omega_i(x) = 0$ *ve*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \omega_i(x)\, x_n^{2\nu} dx = 0,$$

4) $\|\upsilon\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H\right)} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|\omega_i\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H\right)} \leq C \|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H\right)}$,

5) $|\Omega^+| \leq t^{-1} \|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H\right)}$ *ifadeleri sağlanır.*

Önerme 6.2.6 *$f \in L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n, H_1)$ $\mathbb{R}_+^n$'da kompakt supportlu ve $k \in L_{1,\nu}^{loc}(\mathbb{R}_+^n, B(H_1, H_2))$ olsun. Öyle $B, C > 0$ sabitleri vardır ki*

$$\int\limits_{|x| \geq B} \|T^y k(x) - k(x)\|_{B(H_1, H_2)}\, x_n^{2\nu} dx \leq C_1, \qquad |y| < \frac{1}{B}$$

ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|(k \otimes f)(x)\|_{H_2}^2\, x_n^{2\nu} dx \leq C_2 \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|f(x)\|_{H_1}^2\, x_n^{2\nu} dx$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu taktirde

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \|(k \otimes f)(x)\|_{H_2} > \lambda\right\}\right|_\nu \leq \frac{C_3}{\lambda} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|f(x)\|_{H_1} x_n^{2\nu} dx \right)$$

olacak şekilde $C_3 > 0$ sabiti vardır.

Kanıt. Herhangi bir $s>0$ sayısı ve $\mathbb{R}^n_+$ da kompakt supportlu $f\in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+,H_1\right)$ için Önerme 6.2.5 kullanılacaktır. $Af(x)=(k\otimes f)(x)$ ve $\omega=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\omega_i$ olmak üzere

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n_+:\|Af(x)\|_{H_2}>t\right\}\right|_\nu\leq\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n_+:\|A\upsilon(x)\|_{H_2}>\frac{t}{2}\right\}\right|_\nu+\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n_+:\|A\omega(x)\|_{H_2}>\frac{t}{2}\right\}\right|_\nu \tag{6.43}$$

şeklinde yazılır.

$$\|\upsilon\|^2_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+,H_1\right)}=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\|\upsilon(x)\|^2_{H_1}x_n^{2\nu}dx=\int\limits_{F^+}\|\upsilon(x)\|^2_{H_1}x_n^{2\nu}dx+\int\limits_{\Omega^+}\|\upsilon(x)\|^2_{H_1}x_n^{2\nu}dx$$
$$\leq C^2s\|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+,H_1\right)}$$

olup

$$\|\upsilon\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+,H_1\right)}\leq Cs^{\frac{1}{2}}\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+,H_1\right)}$$

dir. Dolayısıyla

$$\|A\upsilon\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}\leq C_1\|\upsilon\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}\leq Cs^{\frac{1}{2}}\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}$$

elde edilir. Böylece,

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n_+:\|A\upsilon(x)\|_{H_2}>\frac{t}{2}\right\}\right|_\nu=\frac{4}{t^2}\int\limits_{\left\{x\in\mathbb{R}^n_+:\|A\upsilon(x)\|_{H_2}>\frac{t}{2}\right\}}\left(\frac{t}{2}\right)^2x_n^{2\nu}dx$$
$$\leq\frac{4}{t^2}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\|A\upsilon(x)\|^2_{H_2}x_n^{2\nu}dx$$
$$\leq C\frac{4}{t^2}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\|\upsilon(x)\|^2_{H_1}x_n^{2\nu}dx$$
$$\leq C\frac{s}{t^2}\|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}^n_+,H_1\right)}$$

bulunur. Şimdi (6.43) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci toplanan için tahminde bulunulacaktır. Öncelikle $\Omega_1=\left\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<\frac{1}{B}\right\}$ olmak üzere supp $\omega_1\subset\Omega_1$ ve $\int\limits_{\Omega_1}\omega_1(x)x_n^{2\nu}dx=0$ koşullarını sağlayan ω_1 fonksiyonu göz önüne alınsın. Ayrıca

$\Omega_1^+ = \Omega_1 \cap \mathbb{R}_+^n$, $Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < B\}$ ve $Q_1^+ = Q_1 \cap \mathbb{R}_+^n$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} A\omega_1(x) &= \int_{\mathbb{R}_+^n} T^y k(x)\,\omega_1(y)\,y_n^{2\nu}dy \\ &= \int_{\Omega_1^+} T^y k(x)\,\omega_1(y)\,y_n^{2\nu}dy \\ &= \int_{\Omega_1^+} \left[T^y k(x) - k(x)\right]\omega_1(y)\,y_n^{2\nu}dy \end{aligned}$$

dir. Fubini teoremi kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_{{}^C Q_1^+} |A\omega_1(x)|\,x_n^{2\nu}dx &= \int_{{}^C Q_1^+} \left| \int_{\Omega_1^+} \left[T^y k(x) - k(x)\right]\omega_1(y)\,y_n^{2\nu}dy \right| x_n^{2\nu}dx \\ &\leq \int_{\Omega_1^+} \left(\int_{{}^C Q_1^+} \left|T^y k(x) - k(x)\right| x_n^{2\nu}dx \right) |\omega_1(y)|\,y_n^{2\nu}dy \\ &\leq C_1 \|\omega_1\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)} \leq C_1 \|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Q_1^+ nın karakteristik fonksiyonu $\chi_{Q_1^+}(x)$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \|A\omega_1(x)\|_{H_2} > t\right\}\right|_\nu &\leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \left\|\left(1 - \chi_{Q_1^+}(x)\right) A\omega_1(x)\right\|_{H_2} > t\right\}\right|_\nu \\ &\quad + \left|Q_1^+\right|_\nu \\ &\leq \frac{c}{t} \|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)} + \left|Q_1^+\right|_\nu \end{aligned}$$

$$\left|Q_1^+\right|_\nu \leq C_2 \left|\Omega_1^+\right|_\nu \leq \frac{C_2}{s} \|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$$

olduğundan

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \|A\omega_1(x)\|_{H_2} > t\right\}\right|_\nu \leq \frac{c}{t} \|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)} + \frac{C_2}{s} \|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$$

dir. Şimdi supportu, $\Omega_i=\left\{x\in\mathbb{R}^n : \left|x-x^{(i)}\right|<\frac{1}{B}\right\}$ içinde olan ω_i fonksiyonu alınsın. Burada ${}^{C}Q_i^{+}=\left\{x\in\mathbb{R}_{+}^{n} : \left|x-x^{(i)}\right|>B\right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{{}^{C}Q_i^{+}}\left\|\int\limits_{\Omega_i^{+}}T^{y}k\left(x\right)\omega_i\left(y\right)y_n^{2\nu}dyx_n^{2\nu}\right\|_{H_2}dx\\
&=\int\limits_{{}^{C}Q_i^{+}}\left\|\int\limits_{\Omega_i^{+}}\left[T^{y}k\left(x\right)-T^{x^{(i)}}k\left(x\right)\right]\omega_i\left(y\right)y_n^{2\nu}dy\right\|_{H_2}x_n^{2\nu}dx\\
&\leq\int\limits_{\Omega_i^{+}}\left\|\omega_i\left(y\right)\right\|_{H_1}\left(\int\limits_{{}^{C}Q_i^{+}}\left\|T^{y}k\left(x\right)-T^{x^{(i)}}k\left(x\right)\right\|_{B(H_1,H_2)}x_n^{2\nu}dx\right)y_n^{2\nu}dy
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada ${}^{C}B_i^{+}=\left\{z\in\mathbb{R}_{+}^{n+1} : \left|\sqrt{z_n^2+z_{n+1}^2}\right|>B, \left|x-x^{(i)}\right|>B\right\}$ olmak üzere $z_n=x_n\cos\alpha$, $z'=x'$, $z_{n+1}=x_n\sin\alpha$, $(0\leq\alpha<\pi)$ için $z=(x',z_n,z_{n+1})\in\mathbb{R}_{+}^{n+1}$, $z_{n+1}>0$ iken

$$J=\int\limits_{{}^{C}B_i^{+}}\left\|k\left(z'-y',\sqrt{\left(z_n-y_n\right)^2+z_{n+1}^2}\right)-k\left(z'-\left(x^{(i)}\right)',\sqrt{\left(z_n-x_n^{(i)}\right)^2+z_{n+1}^2}\right)\right\|_{B(H_1,H_2)}z_{n+1}^{2\nu-1}dz$$

integrali tanımlansın. Şimdi

$$\xi=\left(\xi',\xi_n\right),\ \xi_n=z_n-x_n^{(i)},\ \xi'=z'-\left(x^{(i)}\right)'$$

ve

$$\eta=\left(\eta',\eta_n,0\right)\in\overline{\mathbb{R}_{+}^{n+1}},\ \eta'=\left(x^{(i)}\right)'-y',\ \eta_n=x_n^{(i)}-y_n$$

değişken değiştirmesi yapılarak

$$J=\int\limits_{\left({}^{C}B_i^{+}\right)'}\left\|k\left(\xi'+\eta',\sqrt{\left(\xi_n+\eta_n\right)^2+z_{n+1}^2}\right)-k\left(\xi',\sqrt{\xi_n^2+z_{n+1}^2}\right)\right\|_{B(H_1,H_2)}z_{n+1}^{2\nu-1}d\xi$$

bulunur. Burada

$$\left({}^{C}B_i^{+}\right)'=\left\{\left(\xi',\xi_n,z_{n+1}\right)\in\mathbb{R}_{+}^{n+1} : \left|\sqrt{\left(\xi_n+x_n^{(i)}\right)^2+z_{n+1}^2}-x_n^{(i)}\right|>B, \left|\xi-x_n^{(i)}\right|>B\right\}$$

biçimindedir. Tekrar $\xi_n=x_n\cos\alpha$, $z_{n+1}=x_n\sin\alpha$, $x_n>0$ değişken değişimi ile

$$\begin{aligned}
B&<\left|\sqrt{\left(\xi_n+x_n^{(i)}\right)^2+z_{n+1}^2}-x_n^{(i)}\right|\\
&\leq\left|\sqrt{\left(x_n+x_n^{(i)}\right)^2}-x_n^{(i)}\right|=\left|x_n\right|=x_n
\end{aligned}$$

ve

$$\|J\|_{B(H_1,H_2)} \leq \int\limits_{|x|>B} \|T^{\eta}k(x) - k(x)\|_{B(H_1,H_2)} x_n^{2\nu} dx$$

elde edilir. $|\eta| < \frac{1}{B}$ olduğundan $\|J\|_{B(H_1,H_2)} \leq C$ dir. O halde

$$\int\limits_{{}^{C}Q_i^{+}} \|A\omega_i(x)\|_{H_2} x_n^{2\nu} dx \leq \|\omega_i\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} &\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \|Af(x)\|_{H_2} > t\right\}\right|_{\nu} \\ &\leq C\left(\frac{s}{t^2}\|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)} + t^{-1}\|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)} + s^{-1}\|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}\right) \end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizliğin sağ tarafını minimize etmek için seçilen $s > 0$ için

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \|Af(x)\|_{H_2} > t\right\}\right|_{\nu} \leq \frac{c_1}{t}\|f\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$$

bulunur. Bu da Af operatörünün $(1,1)$ zayıf olduğunu gösterir. ∎

Önerme 6.2.7 *$f \in L_{\infty}^{0}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)$ ve $k \in L_{1,\nu}^{loc}(\mathbb{R}_+^n, B(H_1,H_2))$ fonksiyonu için*

$$\int\limits_{|x|\geq 4|y|} \|T^{y}k(x) - k(x)\|_{B(H_1,H_2)} x_n^{2\nu} dx \leq M, \quad |y| < \frac{1}{4}$$

ve

$$\|k \otimes f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)} \leq C\|f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$$

ise $1 < p < \infty$ iken

$$\|k \otimes f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)} \leq C\|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)} \tag{6.44}$$

eşitsizliğini sağlayan f den bağımsız bir $C > 0$ sabiti vardır.

Kanıt. $1 < p < 2$ için Önerme 6.2.6 ve Teorem 6.2.1 kullanılarak

$$\|k \otimes f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)} \leq C\|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$$

elde edilir. Bu yüzden $2 < p < \infty$ için (6.44) eşitsizliği gösterilirse ispat biter. Bu kısmın ispatında $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ iken H Hilbert uzay olmak üzere ψ, H vektör değerli lokal integrallenebilir fonksiyon ve skaler değerli kompakt supportlu, sürekli ve $\|\varphi\|_{L_{q,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} < 1$ özelliğindeki φ fonksiyonu için

$$\sup_{\varphi}\left\|\int \varphi(x)\psi(x) x_n^{2\nu} dx\right\|_H = A < \infty$$

ise $\psi \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H\right)$ ve $\|\psi\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H\right)} = A$ dır, ifadesi kullanılacaktır. O halde $2 < p < \infty$ iken $f \in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right) \cap L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)$ fonksiyonu ve yukarıdaki özellikleri sağlayan $\varphi \in L_{q,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ fonksiyonu alınsın. $k \in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_+^n, B\left(H_1, H_2\right)\right)$ olmak üzere

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y k\left(x\right) f\left(y\right) \varphi\left(x\right) y_n^{2\nu} x_n^{2\nu} dx dy$$

integrali mutlak yakınsaktır.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y k\left(x\right) f\left(y\right) \varphi\left(x\right) y_n^{2\nu} x_n^{2\nu} dx dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y k\left(x\right) \varphi\left(x\right) x_n^{2\nu} dx \right) f\left(y\right) y_n^{2\nu} dy \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $1 < q < 2$ için $\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} T^y k\left(x\right) \varphi\left(x\right) x_n^{2\nu} dx$ integrali $L_{q,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, B\left(H_1, H_2\right)\right)$ uzayındandır. Böylece

$$\|k \otimes \varphi\|_{L_{q,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, B(H_1, H_2)\right)} \leq A_{q,\nu} \|\varphi\|_{L_{q,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq A_{q,\nu}$$

eşitsizliği ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\|I\|_{H_2} = \left\| \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left(k \otimes \varphi\right)\left(y\right) f\left(y\right) y_n^{2\nu} dy \right\|_{H_2} \leq A_{q,\nu} \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$$

mutlak yakınsaklık gösterilir Bundan başka

$$\begin{aligned} \|I\|_{H_2} &= \left\| \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left(k \otimes \varphi\right)\left(y\right) f\left(y\right) y_n^{2\nu} dy \right\|_{H_2} = \left\| \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left(k \otimes f\right)\left(x\right) \varphi\left(x\right) x_n^{2\nu} dx \right\|_{H_2} \\ &\leq A_{q,\nu} \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(k \otimes f) \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)$ ve $\|k \otimes f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)} \leq A_{q,\nu} \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$ dır. ■

Teorem 6.2.8 *$1 < p < \infty$ olmak üzere $f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)$, $K \in L_{1,\nu}^{loc}(\mathbb{R}_+^n, B(H_1, H_2))$ vektör değerli B- singüler integral çekirdeği olsun. Yani*

1) $0 < \epsilon < r < \infty$ için

$$\left\| \int\limits_{\epsilon < |x| < r} K\left(x\right) x_n^{2\nu} dx \right\|_{B(H_1, H_2)} \leq M$$

ve her $h \in H_1$ için $\epsilon \to 0$ iken

$$\left[\int\limits_{\epsilon<|x|<r} K(x)\, x_n^{2\nu} dx\right] h$$

yakınsaktır.

2) $\|h\|_{H_1} < 1$ *özelliğini sağlayan her* $h \in H_1$ *için*

$$\int\limits_{r<|x|<4r} \|K(x)\, h\|_{H_2} x_n^{2\nu} dx \le Cr$$

3)

$$\int\limits_{|x|\ge 4|y|} \|T^y K(x) - K(x)\|_{B(H_1,H_2)} x_n^{2\nu} dx \le M, \qquad |y| < \frac{1}{4}$$

özellikleri sağlansın. O halde

$$(T_\epsilon f)(x) = \int\limits_{|y|>\epsilon} K(y)\, T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy, \ \epsilon > 0$$

ile tanımlanan $T_\epsilon : f \to T_\epsilon f$ *operatörü* $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)$ *uzayından* $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)$ *uzayına sınırlıdır. Yani*

$$\|T_\epsilon f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)} \le C_{p,\nu} \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$$

eşitsizliğini sağlayan f *den bağımsız bir* $C_{p,\nu} > 0$ *sabiti vardır.*

Dahası her $f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)$ *için*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} (T_\epsilon f)(x) \tag{6.45}$$

limiti $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)$ *normunda vardır ve bu limit* Tf *ile gösterilirse*

$$\|Tf\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)} \le C_{p,\nu} \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)} \tag{6.46}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt.

$$(T_\epsilon f)(x) = \int\limits_{|y|>\epsilon} K(y)\, T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy, \ \epsilon > 0$$

ile tanımlı $T_\epsilon f$ operatörünün $\|T_\epsilon f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)} \le C_{p,\nu} \|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$ eşitsizliğini sağladığı Önerme 6.2.7 den açıktır. Şimdi (6.45) de verilen limitin varlığı gösterilecektir. Herhangi bir $f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)$ için

$$f = f_1 + f_2$$

eşitliği yazılabilir. Burada f_1, H_1 değerli kompakt supportlu smooth fonksiyon ve f_2, $\|f_2\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_1\right)}$ normu yeterince küçük olan H_1 değerli fonksiyondur.

$$(T_\epsilon f)(x) = (T_\epsilon f_1)(x) + (T_\epsilon f_2)(x)$$

dır. f_2 fonksiyonu için

$$\|T_\epsilon f_2\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_2\right)} \leq C \|f_2\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_1\right)} < \delta$$

yazılır. Burada δ yeterince küçüktür. O halde $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} (T_\epsilon f)(x)$ limitine kompakt supportlu H_1 değerli smooth fonksiyonlar için bakmak yeterlidir.

Böylece, f kompakt supportlu smooth fonksiyon, $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ ve herhangi ϵ_1, ϵ_2 için

$$\begin{aligned} T_{\epsilon_2} f(x) - T_{\epsilon_1} f(x) &= \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} K(y)\, T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy \\ &= \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} K(y)\left(T^y f(x) - f(x)\right) y_n^{2\nu} dy \\ &+ \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} K(y)\, f(x)\, y_n^{2\nu} dy \end{aligned}$$

ve

$$\|T^y f(.) - f(.)\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_1\right)} \leq C|y|$$

ifadeleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \|T_{\epsilon_2} f - T_{\epsilon_1} f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_2\right)} &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|T_{\epsilon_2} f(x) - T_{\epsilon_1} f(x)\|_{H_2}^p x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} \|K(y)\|_{B(H_1,H_2)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|T^y f(x) - f(x)\|_{H_1}^p x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad y_n^{2\nu} dy \\ &+ C\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left\| \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} K(y)\, f(x)\, y_n^{2\nu} dy\right\|_{H_2} x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} |y|\, \|K(y)\|_{B(H_1,H_2)}\, y_n^{2\nu} dy \\ &+ C\|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_1\right)} \left\| \int\limits_{\epsilon_1<|y|<\epsilon_2} K(y)\, y_n^{2\nu} dy\right\|_{B(H_1,H_2)} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ iken

$$\left\| T_{\epsilon_2} f - T_{\epsilon_1} f \right\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)} \to 0$$

olur. $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)$ Banach uzay olduğundan $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \left(T_\epsilon f\right)(x)$ limiti vardır ve (6.46) eşitsizliğini sağlar. ■

6.3. Fourier- Bessel Harmonik Analizinde Karesel Fonksiyonun (B- Karesel Fonksiyonun) Sınırlılığı

Buradaki amaç, Fourier- Bessel harmonik analizinde tanımlanan karesel fonksiyonun sınırlılığını göstermektir. Çalışmanın bundan sonraki kısmında özel olarak $H_1 = \mathbb{C}$ ve $H_2 = L_2\left(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}\right)$ ayrılabilir Hilbert uzayları ile çalışılacaktır. Eğer herhangi bir f fonksiyonu H_1 vektör değerli ise $\left\| f(x) \right\|_{H_1} = \left\langle f(x), f(x) \right\rangle^{\frac{1}{2}}$ ve $h \in H_2$ ise

$$\left\| h \right\|_{H_2} = \left(\int\limits_0^\infty \left| h(t) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 6.3.1 *(B- Littlewood- Paley Fonksiyonu) φ, $\mathbb{R}_+^n$ da skaler değerli fonksiyonu*

$$\varphi \in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right) \quad ve \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(x)\, x_n^{2\nu} dx = 0, \tag{6.47}$$

$$\left| \varphi(x) \right| \leq C\left(1 + |x|\right)^{-(\theta+\alpha)}, \quad \exists \alpha > 0,\ \theta = n + 2\nu \tag{6.48}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left| T^h \varphi(x) - \varphi(x) \right| x_n^{2\nu} dx \leq C\, |h|^\gamma, \quad \exists \gamma > 0 \tag{6.49}$$

özelliklerini sağlarsa φ ye B- Littlewood- Paley fonksiyonu denir.

Önerme 6.3.2 *φ, $\mathbb{R}_+^n$ da B- Littlewood- Paley fonksiyonu olsun. Bu durumda $\forall z \in \mathbb{R}_+^n$ için öyle bir $C > 0$ sabiti vardır ki*

$$\left\| F_\nu \varphi(.z) \right\|_{H_2} \leq C$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Amaç

$$\left\| F_\nu \varphi(.z) \right\|_{H_2} = \left(\int\limits_0^\infty \left| F_\nu \varphi(tz) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

olduğunu göstermektir. Bunun için $|F_\nu\varphi(z)|$ ifadesi incelenecektir.

$$\begin{aligned}(F_\nu\varphi)(z) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\varphi(x)\,e^{-ix'z'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_nz_n)\,x_n^{2\nu}dx\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\varphi(x)\left(e^{-ix'z'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_nz_n)-1\right)x_n^{2\nu}dx\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}|(F_\nu\varphi)(z)| &\le \int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|\varphi(x)|\left|e^{-ix'z'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_nz_n)-1\right|x_n^{2\nu}dx\\ &\le 2\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|\varphi(x)|\min\{|x|\,|z|\,,1\}\,x_n^{2\nu}dx\\ &\le 2\int\limits_{|x|\le\eta}|\varphi(x)|\,|x|\,|z|\,x_n^{2\nu}dx+2\int\limits_{|x|>\eta}|\varphi(x)|\,x_n^{2\nu}dx\\ &= I+J \end{aligned}\tag{6.50}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}I &= 2\int\limits_{|x|\le\eta}|\varphi(x)|\,|x|\,|z|\,x_n^{2\nu}dx \le 2c\,|z|\int\limits_{|x|\le\eta}|x|\,x_n^{2\nu}dx\\ &\le 2c\,|z|\,\eta^{Q+1}\end{aligned}\tag{6.51}$$

ve

$$\begin{aligned}J &= 2\int\limits_{|x|>\eta}|\varphi(x)|\,x_n^{2\nu}dx \le 2c\int\limits_{|x|>\eta}|x|^{-(\theta+\alpha)}\,x_n^{2\nu}dx\\ &\le 2c\eta^{-\alpha}\end{aligned}\tag{6.52}$$

biçimindedir. (6.51) ve (6.52) eşitsizlikleri (6.50) de kullanılırsa

$$|(F_\nu\varphi)(z)| \le 2c\left(|z|\,\eta^{\theta+1}+\eta^{-\alpha}\right)\tag{6.53}$$

elde edilir. Bu ifade her $\eta>0$ için sağlandığından η lara göre minimum alınarak en sade hale getirilir. Şöyle ki

$$g(\eta)=|z|\,\eta^{\theta+1}+\eta^{-\alpha}$$

olsun.

$$\begin{aligned}g'(\eta) &= |z|\,(\theta+1)\,\eta^{\theta}-\alpha\eta^{-\alpha-1}\\ &= \eta^{-\alpha-1}\left(|z|\,(\theta+1)\,\eta^{\theta+\alpha+1}-\alpha\right)\end{aligned}$$

dir. $g^{'}(\eta)=0$ için $|z|(\theta+1)\eta^{\theta+\alpha+1}=\alpha$ olduğundan

$$\eta=\left(\frac{\alpha}{|z|(\theta+1)}\right)^{\frac{1}{\theta+\alpha+1}}$$

elde edilir. Şimdi

$$c_0=\left(\frac{\alpha}{2|z|(\theta+1)}\right)^{\frac{1}{\theta+\alpha+1}}$$

olmak üzere

$$0<\eta<c_0 \text{ iken } g^{'}(\eta)<0 \text{ ve } \eta>c_0 \text{ iken } g^{'}(\eta)>0$$

olup $\min g(\eta)=g(c_0)$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
g(c_0) &= |z|\left(\frac{\alpha}{|z|(\theta+1)}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta+\alpha+1}}+\left(\frac{\alpha}{|z|(\theta+1)}\right)^{\frac{-\alpha}{\theta+\alpha+1}} \\
&= |z|^{1-\frac{\theta+1}{\theta+\alpha+1}}\left(\frac{\alpha}{(\theta+1)}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta+\alpha+1}}+|z|^{\frac{\alpha}{\theta+\alpha+1}}\left(\frac{\alpha}{(\theta+1)}\right)^{\frac{-\alpha}{\theta+\alpha+1}} \\
&= |z|^{\frac{\alpha}{\theta+\alpha+1}}C(\alpha,\theta)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve

$$\min g(\eta)=|z|^{\frac{\alpha}{\theta+\alpha+1}}C(\alpha,\theta)$$

olur. O halde (6.53) ifadesi

$$|(F_\nu\varphi)(z)|\leq|z|^{\frac{\alpha}{\theta+\alpha+1}}C(\alpha,\theta) \tag{6.54}$$

biçimini alır. Şimdi

$$\begin{aligned}
F_\nu\left(T^h\varphi\right)(z) &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\left(T^h\varphi\right)(x)\,e^{-ix'z'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_nz_n)\,x_n^{2\nu}dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\varphi(x)\,T^h\left(e^{-ix'z'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_nz_n)\right)x_n^{2\nu}dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\varphi(x)\,e^{-i(x'-h')z'}T^{h_n}\left(j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_nz_n)\right)x_n^{2\nu}dx \\
&= e^{ih'z'}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\varphi(x)\,e^{-ix'z'}T^{h_n}\left(j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_nz_n)\right)x_n^{2\nu}dx \\
&\quad ...h=(h',h_n) \text{ için } h'=\frac{\pi z'}{|z'|^2} \text{ ve } h_n=0... \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\varphi(x)\,e^{-ix'z'}j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_nz_n)\,x_n^{2\nu}dx \\
&= -F_\nu\varphi(z)
\end{aligned}$$

eşitliği ve

$$(F_\nu\varphi)(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \varphi(x)\, e^{-ix'z'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n z_n)\, x_n^{2\nu} dx$$

eşitliği taraf tarafa toplanırsa

$$2(F_\nu\varphi)(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left[\varphi(x) - T^h\varphi(x)\right] e^{-ix'z'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n z_n)\, x_n^{2\nu} dx$$

elde edilir. Ayrıca (6.49) eşitsizliği kullanılarak

$$|(F_\nu\varphi)(z)| \leq \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left|T^h\varphi(x) - \varphi(x)\right| x_n^{2\nu} dx \leq \frac{1}{2}|h|^\gamma$$

bulunur. $h = (h', h_n)$ için $h' = \frac{\pi z'}{|z'|^2}$ ve $h_n = 0$ olmak üzere bu son eşitsizlik

$$|(F_\nu\varphi)(z)| \leq C\,|z|^{-\gamma} \tag{6.55}$$

biçimine gelir. (6.54) ve (6.55) eşitsizliklerinden

$$|(F_\nu\varphi)(z)| \leq C \min\left\{|z|^{\frac{\alpha}{\theta+\alpha+1}}, |z|^{-\gamma}\right\}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\|F_\nu\varphi(.z)\|_{H_2}^2 &= \left(\int\limits_0^\infty |F_\nu\varphi(tz)|^2 \frac{dt}{t}\right) \\ &\leq C\int\limits_0^\infty \min\left\{|tz|^{\frac{\alpha}{\theta+\alpha+1}}, |tz|^{-\gamma}\right\}^2 \frac{dt}{t} \\ &\leq C\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Çalışmanın bu son bölümünde kullanılacak olan Tf operatörünü, φ, B- Littlewood-Paley fonksiyonu vasıtasıyla tanımlayabilmek için aşağıdaki ön bilgiye ihtiyaç vardır. φ, B- Littlewood- Paley fonksiyonu, $K(x) \in L\left(\mathbb{C}, L_2\left(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}\right)\right)$, $x \in \mathbb{R}^n_+$, a kompleks skaler olmak üzere, $K(x)$'in a kompleks skalerıne etkisi

$$K(x)\, a = t^{-\theta}\varphi\left(\frac{x}{t}\right) a = \varphi_t(x)\, a$$

biçiminde olsun. Böylece

$$\begin{aligned}Tf(x) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|y|>\epsilon} K(y)\, T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|y|>\epsilon} \varphi_t(y)\, T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy\end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 6.3.3
$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|y|>\epsilon} \varphi_t(y)\, T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy$$

operatörü $L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{C}\right)$ *den* $L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, L_2\left(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}\right)\right)$ *ye sınırlıdır.*

Kanıt. $f \in L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{C}\right)$ iken

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|K \otimes f(x)\|_{H_2}^2 x_n^{2\nu} dx = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left(\int\limits_0^\infty |\varphi_t \otimes f(x)|^2 \frac{dt}{t} \right) x_n^{2\nu} dx$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|K \otimes f(x)\|_{H_2}^2 x_n^{2\nu} dx &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |\varphi_t \otimes f(x)|^2 x_n^{2\nu} dx \frac{dt}{t} \\
&= \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |F_\nu(\varphi_t \otimes f)(x)|^2 x_n^{2\nu} dx \frac{dt}{t} \\
&= C \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |F_\nu \varphi_t(x)|^2 |F_\nu f(x)|^2 x_n^{2\nu} dx \right) \frac{dt}{t} \\
&= C \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |F_\nu \varphi(tx)|^2 |F_\nu f(x)|^2 x_n^{2\nu} dx \right) \frac{dt}{t} \\
&= C \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left(\int\limits_0^\infty |F_\nu \varphi(tx)|^2 \frac{dt}{t} \right) |F_\nu f(x)|^2 x_n^{2\nu} dx \\
&\leq C \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}_+^n} \int\limits_0^\infty |F_\nu \varphi(tx)|^2 \frac{dt}{t} \right) |F_\nu f(x)|^2 x_n^{2\nu} dx \\
&\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}_+^n} \|F_\nu \varphi(.z)\|_{H_2}^2 \|F_\nu f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}^2
\end{aligned}$$

olur. Böylece
$$\|Tf\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)} \leq C \|f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}$$
dir. ■

Teorem 6.3.4 φ, *B- Littlewood- Paley fonksiyonu olmak üzere*

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|y|>\epsilon} \varphi_t(y)\, T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy$$

verilsin. O halde T operatörü $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,\mathbb{C}\right)$ den $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, L_2\left(\mathbb{R}_+,\frac{dt}{t}\right)\right)$ ye sınırlıdır. Yani

$$\|Tf\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_2\right)} \leq C\,\|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_1\right)}$$

olacak şekilde $C>0$ sabiti vardır.

Kanıt. $\varphi_t(x)=t^{-\theta}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$, $\theta=n+2\nu$ fonksiyonunun Tanım 6.2.2 deki özellikleri sağladığı gösterilirse Teorem 6.2.8'den dolayı

$$\|Tf\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_2\right)} \leq C\,\|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n,H_1\right)}$$

eşitsizliğinin sağlandığı söylenir.

Öncelikle

$$\varphi\in L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)\quad \text{ve} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\varphi(x)\,x_n^{2\nu}dx=0$$

olduğundan φ_t ölçülebilir ve orjini içermeyen kompakt kümelerde integrallenebilirdir. Ayrıca

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}\varphi(x)\,x_n^{2\nu}dx=0$$

olduğundan

$$\int\limits_{|x|\leq R}\varphi(x)\,x_n^{2\nu}dx=-\int\limits_{|x|>R}\varphi(x)\,x_n^{2\nu}dx$$

dir. Bu durumda

$$\left|\int\limits_{|x|\leq R}\varphi(x)\,x_n^{2\nu}dx\right|\leq\frac{CR^{\theta}}{(1+R)^{\theta+\alpha}} \tag{6.56}$$

bulunur. Amaç

$$\left\|\int\limits_{|x|\leq R}\varphi_t(x)\,x_n^{2\nu}dx\right\|_{H_2}\leq C$$

olduğu göstermektir. Bunun için (6.56) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left\| \int\limits_{|x|\leq R} \varphi_t(x)\, x_n^{2\nu} dx \right\|_{H_2} &= \left(\int\limits_0^\infty \left| \int\limits_{|x|\leq R} \varphi_t(x)\, x_n^{2\nu} dx \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int\limits_0^\infty \left| t^{-\theta} \int\limits_{|x|\leq R} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) x_n^{2\nu} dx \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int\limits_0^\infty \left| \int\limits_{|u|\leq \frac{R}{t}} \varphi(u)\, u_n^{2\nu} du \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{C\left(\frac{R}{t}\right)^\theta}{\left(1+\frac{R}{t}\right)^{\theta+\alpha}} \right)^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\int\limits_0^\infty \frac{R^{2\theta} t^{2(\theta+\alpha)}}{t^{2\theta}(t+R)^{2(\theta+\alpha)}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C R^\theta \left(\int\limits_0^\infty \frac{t^{2\alpha-1}}{(t+R)^{2(\theta+\alpha)}} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C
\end{aligned}$$

bulunur. Bundan başka φ, B- Littlewood Paley fonkiyonunun

$$|\varphi(x)| \leq C(1+|x|)^{-(\theta+\alpha)}, \quad \exists\alpha > 0,\ \theta = n+2\nu$$

özelliğinden dolayı

$$\left| t^{-\theta} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right| \leq \frac{Ct^\alpha}{(t+|x|)^{\theta+\alpha}}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\int\limits_{r<|x|<4r} |x| \left\| \varphi_t(x) \right\|_{H_2} x_n^{2\nu} dx \leq Cr$$

olur. Şimdi Hörmander koşulu olarak da bilinen

$$\int\limits_{|x|\geq 4|y|} \left\| T^y \varphi_t(x) - \varphi_t(x) \right\|_{H_2} x_n^{2\nu} dx \leq M, \quad |y| < \frac{1}{4}$$

koşulunun sağlandığı gösterilecektir. Bunun için $0 < \epsilon < \min(\alpha, \gamma, \theta)$ iken

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|x|\geq 4|y|} \|T^y\varphi_t(x) - \varphi_t(x)\|_{H_2} x_n^{2\nu} dx \\
&= \int\limits_{|x|\geq 4|y|} |x|^{-\left(\frac{\theta+\epsilon}{2}\right)} \left(\|T^y\varphi_t(x) - \varphi_t(x)\|_{H_2} |x|^{\left(\frac{\theta+\epsilon}{2}\right)}\right) x_n^{2\nu} dx \\
&\leq \left(\int\limits_{|x|\geq 4|y|} |x|^{-(\theta+\epsilon)} x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{|x|\geq 4|y|} \|T^y\varphi_t(x) - \varphi_t(x)\|_{H_2}^2 |x|^{(\theta+\epsilon)} x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C|y|^{\frac{-\epsilon}{2}} \left(\int\limits_{|x|\geq 4|y|} |x|^{(\theta+\epsilon)} \left(\int\limits_0^\infty |T^y\varphi_t(x) - \varphi_t(x)|^2 \frac{dt}{t}\right) x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C|y|^{\frac{-\epsilon}{2}} \left(\int\limits_{|x|\geq 4|y|} |x|^{(\theta+\epsilon)} \left(\int\limits_0^\infty \left|T^{\frac{y}{t}}\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 \frac{dt}{t^{2\theta+1}}\right) x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C|y|^{\frac{-\epsilon}{2}} \left(\int\limits_0^\infty t^{-2\theta} \left(\int\limits_{|x|\geq 4|y|} |x|^{(\theta+\epsilon)} \left|T^{\frac{y}{t}}\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 x_n^{2\nu} dx\right) \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (6.57)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\left|T^{\frac{y}{t}}\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right| &\leq \left|T^{\frac{y}{t}}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right| + \left|\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right| \\
&\leq c_\nu \int\limits_0^\pi \left|\varphi\left(\frac{x'-y'}{t}, \frac{\sqrt{x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n}}{t}\right)\right| (\sin\alpha)^{2\nu-1} d\alpha + \left|\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right| \\
&\leq K\left(\frac{t}{|x|}\right)^{\theta+\epsilon}
\end{aligned}$$

olup (6.57) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|x|\geq 4|y|} \|T^y\varphi_t(x) - \varphi_t(x)\|_{H_2} x_n^{2\nu} dx \\
&\leq C|y|^{\frac{-\epsilon}{2}} \left(\int\limits_0^\infty t^{-2\theta} \left(\int\limits_{|x|\geq 4|y|} |x|^{(\theta+\epsilon)} \left|T^{\frac{y}{t}}\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 x_n^{2\nu} dx\right) \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C|y|^{\frac{-\epsilon}{2}} \left(\int\limits_0^\infty t^{-\theta+\epsilon} \left(\int\limits_{|x|\geq 4|y|} \left|T^{\frac{y}{t}}\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right| x_n^{2\nu} dx\right) \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\leq C\left|y\right|^{\frac{-\epsilon}{2}}\left(\int_{0}^{\infty}t^{-\theta+\epsilon}\left(\int_{\mathbb{R}_{+}^{n}}\left|T^{\frac{y}{t}}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)-\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right|x_{n}^{2\nu}dx\right)\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\left|y\right|^{\frac{-\epsilon}{2}}\left(\int_{0}^{\infty}t^{-\theta+\epsilon}\min\left\{2t^{\theta}\left\|\varphi\right\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)},t^{\theta}C_{1}\left(\frac{|y|}{t}\right)^{\gamma}\right\}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\left|y\right|^{\frac{-\epsilon}{2}}\left(\int_{[0,|y|)}t^{-\theta+\epsilon}2t^{\theta}\left\|\varphi\right\|_{L_{1,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}\frac{dt}{t}+\int_{[|y|,\infty)}t^{-\theta+\epsilon}t^{Q}C_{1}\left(\frac{|y|}{t}\right)^{\gamma}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\left|y\right|^{\frac{-\epsilon}{2}}\left|y\right|^{\frac{\epsilon}{2}}=C$$

olur. O halde

$$\int_{|x|\geq 4|y|}\left\|T^{y}\varphi_{t}\left(x\right)-\varphi_{t}\left(x\right)\right\|_{H_{2}}x_{n}^{2\nu}dx\leq C$$

dir.

Dolayısıyla, Teorem 6.2.8 den dolayı

$$\left\|Tf\right\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n},H_{2}\right)}\leq C\left\|f\right\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n},H_{1}\right)}$$

dır. ■

Tanım 6.3.5 *(B- karesel fonksiyon) φ, B- Littlewood- Paley fonksiyonu, $\theta=n+2\nu$ iken $\varphi_{t}\left(x\right)=t^{-\theta}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$ ve $f\in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n},\mathbb{C}\right)$ için*

$$F\left(x,t\right)=\left(f\otimes\varphi_{t}\right)\left(x\right)$$

olmak üzere

$$g(F)\left(x\right)=\left(\int_{[0,\infty)}\left|F\left(x,t\right)\right|^{2}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

fonksiyonuna B- karesel fonksiyon denir.

Teorem 6.3.6 *$1<p<\infty$ iken*

$$g(F)\left(x\right)=\left(\int_{[0,\infty)}\left|F\left(x,t\right)\right|^{2}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

B- karesel fonksiyonu, $L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ uzayındadır ve

$$\left\|g(F)\right\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)}\leq C\left\|f\right\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n},H_{1}\right)}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C=C_{p,\nu}$ sabiti vardır.

Kanıt. φ, B- Littlewood paley fonksiyonu, $\varphi_t(x) = t^{-\theta}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$, $\theta = n + 2\nu$ ve $f \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{C}\right)$ olmak üzere

$$F(x,t) = (f \otimes \varphi_t)(x)$$

için

$$F(.,.) \in L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, L_2\left(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t}\right)\right)$$

ve

$$\|F(x,.)\|_{H_2} = g(F)(x)$$

dir. Bu eşitlik Teorem 6.3.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|g(F)\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |g(F)(x)|^p x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \|F(x,.)\|_{H_2}^p x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|F(.,.)\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_2\right)} \\
&\leq C\|f\|_{L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n, H_1\right)}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sayısı bulunur. ■

7. SONUÇ

Bu çalışmada, fonksiyon uzayları teorisine katkı sağlayacağı düşünülen Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu B- Campanato uzayı, $\lambda \geq -p$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)=\left\{f\in L_{1,\nu}^{loc}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right):\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}<\infty\right\}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\lambda,\nu}}=\sup_{x\in\mathbb{R}_{+}^{n},t>0}\left(t^{\lambda}\frac{1}{|E_t|_{\nu}}\int\limits_{E_t}\left|T^{y}f(x)-f_{E_t}(x)\right|^{p}y_n^{2\nu}dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve

$$f_{E_t}(x)=\frac{1}{|E_t|_{\nu}}\int\limits_{E_t}T^{y}f(x)y_n^{2\nu}dy$$

şeklindedir. B- Campanato uzayının, λ nın özel durumlarına göre diğer fonksiyon uzayları ile bağlantıları incelenmiştir.

Ayrıca, yine bu çalışmada Laplace- Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu, önemli teknik araçlardan olan B- singüler integral operatörü ve vektör değerli B- singüler integral operatörü tanımlanmış, ardından sınırlılık koşulları incelenmiştir. Vektör değerli B- singüler integral operatörün sınırlılığından faydalanılarak B- karesel fonksiyonun sınırlılığı incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar, " Vector- valued B- singular integral operators in Lebesgue spaces", " Square functions, associated with the Laplace-Bessel differential operator" ve " On B- Campanato Spaces" başlıkları ile uluslararası saygın dergilerde yayına sunulacaktır.

Bu çalışmanın devamı olarak B- karesel fonksiyonun B- Campanato uzayında sınırlılığının incelenmesinin Fourier- Bessel harmonik analizine önemli katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

8. KAYNAKLAR

AKYOL, C., GULİYEV, V.S., SERBETCİ, A. 2013. O' Neil inequality for Hankel Convolution Operator and Some Applications. *Eurasian Mathematical Journal,* 4: 8-19.

ALIEV, I.A. 1987. Riesz Transform Generated by a Generalized Translation Operator. *Izv. Akad. Nauk. Azerb. SSR. Ser. Fiz.- Tekh. Math. Nauk.,* 1: 7-13.

ALIEV, I.A. 1992. The Properties and Inversion of the B- Parabolic Potentials. *Special Problems of Math. and Mech.,* 1: 56-75.

ALIEV, I.A., GADJIEV, A.D. 1994. Weighted Estimates of Multidimensional Sıngular Integrals Generated by the Generalized Shift Operator. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.,* 77: 37- 55.

ALIEV, I.A., RUBIN, B. 2001. Parabolic Potentials and Wavelet Transform with the Generalized Translation. *Studia Math.,* 1: 1-16.

ALIEV, I.A., UYHAN, S. 2002. On Inversion of Bessel Potentials Associated with the Laplace- Bessel Differantial Operator. *Acta Math. Hungar.,* 2: 125- 145.

ALIEV, I.A., ERYIGIT, M. 2005. Wavelet- Type Transform and Bessel Potentials Associated with the Generalized Translation. *Integral Equations Operator Theory,* 3: 303- 317.

BAYRAKCI, S., ALIEV, I.A. 1998. On Inversion of B- elliptic Potentials by the Method of Balakrishnan- Rubin. *Fractional Calculus and Applied Analysis,* 4: 365- 384.

CALDERON, A.P., ZYGMUND, A. 1956. On Singular Integrals. *Amer. J. Math.* 78: 289- 309.

EKINCIOĞLU, I., SERBETCI, A. 2005. On Weighted Estimates of Hıgh Order Riesz- Bessel Transformations Generated by the Generalized Shift Operator. *Acta Mathematica Sinica,* 21: 53-64.

FOLLAND, G.B. 1984. Real Analysis, Modern Techniquies and Their Applications. John Wiley and Sons, New York.

GADJIEV, A.D., ALIEV, I.A. 1988. On Classes of Operators of Potential Types Generated by a Generalized Shift. *Reports of Enlarged Session of the Seminars of I. N. Vekua Inst of Applied Math.,* 3: 21- 24.

GADJIEV, A.D., ALIEV, I.A. 1990. Riesz and Bessel Potentials Generated by the Generalized Shift Operator and Their Inversion. *Theory of Functions and Approximations,* 1: 47-53.

GADJIEV, A.D., GULIYEV, E.V. 2005. Two- Weighted Inequality for Sıngular Integrals in Lebesgue Spaces Associated with the Laplace- Bessel Differantial Operator. *Proceedings of A. Razmadze Math. Inst.,* 138: 1-15.

GADJIEV, A.D., ARAL, A., ALIEV, I.A. 2007. On Behaviour of the Riesz and Generalized Riesz Potentials as Order Tends to Zero. *Mathematical Inequalities and Applications,* 10: 875-888.

GADJIEV, A.D.,GULIYEV, V.S. 2008. The Stein- Weiss Type Inequality for Fractional Integrals, Associated with the Laplace- Bessel Differential Operator. *Fractional Calculus and Applied Analysis,* 11: 77-90.

GADJIEV, A.D.,GULIYEV, V.S., SERBETCİ A., GULİYEV E.V. 2011. The Stein-Weiss Type Inequality for B- Riesz Potentials, *Journal of Mathematical Inequalities,* 1: 87-106.

GASANOV, D.D., GULIYEV, V.S., NARIMANOV A.K. 1996. Certain Inequality for Anisotropic B- Maksimal Functions and for Anisotropic B- Riesz Potentials. *Academy of Science of Azerbaijan. Proc. of Inst. Math. and Mech.,* 4: 18-24.

GULIYEV, V.S. 1998. Sobolev's Theorem for Riesz B- Potential. *Dokl. Rus. Acad. Nauk.,* 358: 450- 451.

GULIYEV, V.S. 1998. Some aspects of B- Harmonic Analysis. *Proc. of Inst. Math. and Mech. Acad. Sci. Azerb.,* 8: 47-56.

GULIYEV, V.S., NARIMANOV A.K. 1999. On the L_p^γ- Boundedness of the Anisotropic Fourier- Bessel Singular Integrals. *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys. Tech. Math. Sci.,* 5: 32-41.

GULIYEV, V.S. 1999. Sobolev Theorems for Anisotropic Riesz- Bessel Potentias on Morrey- Bessel Spaces. *Dokl. Acad. Nauk Russia,* 2: 155- 156.

GULIYEV, V.S. 2000. Some Properties of the Anisotropic Riesz- Bessel Potential. *Anal. Math.,* 2: 99-118.

GULIYEV, V.S., SAFAROV, Z.V. 2002. On Generalized Fractional Integrals, Associated with the Bessel Differantial Expansions. *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys. Tech. Math. Sci.,* 22: 75- 90.

GULIYEV, V.S. 2003. On Maximal Function and Fractional Integral Associated with the Bessel Differantial Operator. *Math. Ineq. Appl.,* 6: 317-330.

GULIYEV, V.S. , HASANOV, J.J. 2006. The Sobolev-Morrey Type Inequality for Riesz Potentials, Associated with the Laplace- Bessel Differential Operator. *Fractional Calculus and Applied Analysis,* 1: 17-32.

GULIYEV, V.S., SERBETCI, A., EKINCIOGLU, I. 2007. On Boundednessof the Generalized B- Potential Integral Operators. *Integral Transforms and Special Functions,* 12: 885-895.

GULIYEV, V.S. , HASANOV, J.J. 2008. Neccessary and Sufficient Conditions for the Boundedness of B- Riesz Potential in the B- Morrey Spaces. *J. Math. Anal. Appl.,* 347: 113-122.

GULIYEV, V.S., SERBETCI, A., SAFAROV, Z.V. 2008. On the Rearrangement Estimates and the Boundedness of the Generalized Fractional Integrals Associated with the Laplace- Bessel Differential Operator. *Acta Mathematica Hungarica,* 119: 201-217.

GULIYEV, V.S., GARAKHANOVA, N.N., ZEREN, Y. 2008. Pointwise and Integral Estimates for B- Riesz Potentials in terms of B- Maksimal and B- Fractional Maximal Functions. *Siberian Mathematical Journal,* 6: 1008-1022.

GULIYEV, V.S., SERBETCI, A., SAFAROV, Z.V. 2008. Meda Inequality for Rearrangements of the B- Convolutions and Some Applications. *Journal of Mathematical Inequalities,* 4: 437-447.

GULIYEV, V.S., HASANOV, J.J., ZEREN, Y. 2009. On Limiting Case for Boundedness of the B- Riesz Potential in the B- Morrey Spaces. *Analysis Mathematica,* 2: 87-97.

GULIYEV, V.S., GARAKHANOVA, N.N. 2009. Sobolev- Ilyin Theorem for B-Riesz Potentials. *Siberian Math., J.* 1: 49- 59.

GULIYEV, V.S., SERBETCI, A., EKINCIOGLU, I. 2011. On the Boundedness of the Anisotropic Potentials with Rough Kernels Associated with the Laplace-Bessel Differential Operator in the Lorentz Space. *Integral Transforms and Special Functions,* 22: 919- 935.

GULIYEV, V.S., ISAYEV, F.A. 2013. The two- weighted Inequalities for Sublinear Operators Generated by B Singular Integrals in Weighted Lebesgue Spaces. *Acta Applicandae Mathematicae,* 1: 1- 16.

GULIYEV, V.S., ISAYEV, F.A., SAFAROV, Z.V. 2014. Two- weighted Inequality for p Addmissible $B_{k,n}$ Singular Operators in Weighted Lebesgue Space. *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.,* 4: 122- 146.

GRAFAKOS, L. 2008. Classical Fourier Analysis. Springer.

KLUYCHANTSEV, M.I. 1970. On Singüler Integrals Generated by the Generalized Shift Operator I. *Siberian Math. J.,* 11: 612- 620.

KIPRIYANOV, I.A. 1967. Fourier- Bessel Transform Embedding Theorems for Weighted Classes. *Trudy. Math. Inst. Akad. Nauk. SSSR.,* 89: 190- 213.

KIPRIYANOV, I.A., KLUYCHANTSEV, M.I. 1970. On singüler Integrals Generated by the Generalized Shift Operator II. *Siberian Math. J.,* 11: 1060- 1083.

KREYSZIG, E. 1989. Introductory Functional Analysis with Applications. John Willey and Sons Inc., New York.

KUFNER, A., JOHN, O., FUCIK, S. 1977. Function Spaces. Noordhoff International Publishing, Leyden.

LEVITAN, B.M. 1951. Expansion in Fourier Series and Integrals in Bessel Functions. *Uspekhi Math. Nauk.,* 6: 102- 143.

LOFSTROM, J., PEETRE, J. 1969. Approximation Theorems Connected with Generalized Translations. *Math. Ann.,* 181: 255- 268.

MAKSUDOV, F.G., ALIEV, I.A. 1984. Smoothness Properties of the Symbol of a Multidimensional Singular Integral Generated by a Generalized Shift Operator. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.,* 3: 539-541.

MIHLIN, S.G. 1965. Multidimensional singüler Integrals and Integral equations. Pergamon Press, N. Y.

MOUROU, M.A., TRIMECHE, K. 1998. Calderon's Reproducing Formula Associated with the Bessel Operator. *J. Math. Anal. Appl.,* 219: 97- 109.

MUCKENHOUPT, B., STEIN, E.M. 1965. Classical Expansions and Their Relation to Conjugate Harmonic Functions. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 118: 17- 92.

RUBIN, B.S. 1996. Fractional Integrals and Potentials. Addison Wesley Longman, Essex, U. K.

SADOSKY, C. 1979. Interpolation of Operators and Sıngular Integrals. Marcel Dekker, Inc. New York.

STEIN, E.M. 1970. singüler Integrals and Differantiability Properties of Function. Princeton Univ. Press, N. J.

STEIN, E.M. 1993. Harmonic Anaylsis: Real- Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton Univ. Press, N. J.

TORCHINSKY, A. 1986. Real- Variable Methods in Harmonic Analysis. Academic Press Inc., London.

UYHAN, S., GADJIEV, A.D., ALIEV, I.A. 2006. On Approximation Properties of the Parabolic Potentials. *Bull. Austral. Math. Soc.,* 3: 449-460.

ÖZGEÇMİŞ

Şeyda Keleş, 1985 yılında Çorum'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Turhal'da, lise öğrenimini Kastamonu Mustafa Kaya Anadolu Lisesinde tamamladı. Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında mezun oldu. 2008 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Yüksek lisans öğrenimini 2010 yılında tamamlayarak aynı yıl Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora öğrenimine başladı. İlgi alanları Fourier- harmonik analiz, fonksiyonel analiz ve reel analizdir. Lisans üstü eğitimi boyunca bir çok uluslararası ve ulusal seminerlere katılmış olup basılmış üç bilimsel çalışması bulunmaktadır.