T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARMAŞIK İNTERVAL ARİTMETİK VE KARMAŞIK FUZZY ARİTMETİK ÜZERİNE

Sümeyra İNCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARMAŞIK İNTERVAL ARİTMETİK VE KARMAŞIK FUZZY ARİTMETİK ÜZERİNE

Sümeyra İNCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARMAŞIK İNTERVAL ARİTMETİK VE KARMAŞIK FUZZY ARİTMETİK ÜZERİNE

Sümeyra İNCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 11 / 10 / 2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği / ~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Yrd.Doç. Dr. Gültekin SOYLU ....

Prof.Dr.Gabil ADİLOV ....

Yrd.Doç.Dr.Şuayip YÜZBAŞI ....

ÖZET

KARMAŞIK İNTERVAL ARİTMETİK VE KARMAŞIK FUZZY ARİTMETİK ÜZERİNE

Sümeyra İNCİ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Gültekin SOYLU

Ekim 2013, 36 sayfa

Fuzzy küme teorisi, uygulama alanlarının genişliği ve bu alanlarda oluşturduğu sonuçların etkisi bakımından bilimsel çalışmalarda önemli bir yer tutmaktadır.

Bu tezde, öncelikle fuzzy kümeler ve genel özellikleri verilmiştir. Konvekslik tanımından yola çıkılarak fuzzy konvekslik tanımı verilmiş ve $\alpha-$kesmeleri ile ilişkilendirilmiştir. Ayrıca, fuzzy sayılar ve genişletilmiş aritmetik işlemler incelenmiştir. Fuzzy sayılar ve karmaşık fuzzy sayılar $\alpha-$kesmeleri aracılığıyla sırasıyla interval aritmetiğe ve karmaşık interval aritmetiğe indirgenerek bunlar üzerindeki temel işlemler ve özellikleri tartışılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Fuzzy sayı, Genişleme Prensibi, İnterval aritmetik, Karmaşık fuzzy sayılar

JÜRİ: Yrd. Doç. Dr. Gültekin SOYLU (Danışman)
Prof. Dr. Gabil ADİLOV
Yrd. Doç. Dr. Şuayip YÜZBAŞI

ABSTRACT

COMPLEX INTERVAL ARITHMETIC AND COMPLEX FUZZY ARITHMETIC

Sümeyra İNCİ

MSc Thesis in Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Gültekin SOYLU
October 2013, 36 pages

Fuzzy set theory has an important role on scientific studies with extensive application field and the effect of the results generated from these fields.

In this thesis, firstly we give general properties of fuzzy sets. Definition of fuzzy convexity is given and related to $\alpha-$cuts and convexity. Moreover, extended aritmetic operations of fuzzy numbers are investigated. Fuzzy numbers and fuzzy complex numbers are degrated to interval arithmetic and complex interval arithmetic, respestively and fundamental operations and properties are discussed.

KEYWORDS: Extension Principle, Fuzzy complex numbers, Fuzzy number, Interval arithmetic

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Gültekin SOYLU (Supervisor)
Prof. Dr. Gabil ADİLOV
Asst. Prof. Dr. Şuayip YÜZBAŞI

ÖNSÖZ

Fuzzy küme teorisinin üyelikten üye olmamaya dereceli geçişi ifade etmesindeki yeteneği geniş faydaları olan bir niteliktir. Belirsizliğin ölçülmesinde güçlü ve anlamlı araçlar sunmasının yanısıra, doğal dilde ifade edilen belirsiz kavramların anlamlı bir şekilde temsilini vermektedir.

Bu çalışma esas olarak, üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, fuzzy küme kavramı tanıtılmış ve bazı temel tanımlar ve bunların sağladığı özelliklerden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, interval aritmetik ve cebirsel özellikleri incelenmiş, Zadeh Genişleme Prensibi açıklanmıştır. Fuzzy aritmetik probleminin $\alpha-$kesmeleri yardımıyla interval aritmetiğe indirgendiği gösterilmiştir.Bulgular bölümünde ise, fuzzy sayıların karmaşık sayılarla ilişkilendirilmesi yapılmıştır. Karmaşık fuzzy sayıların dikdörtgensel ve polar formları $\alpha-$kesmeleri yardımıyla açıklanmıştır.

Bu tez çalışması boyunca bilgisini ve desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Yard. Doç. Dr. Gültekin SOYLU'ya (Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi), sevgili arkadaşlarım Sabriye Güven ve Ebru Paksu'ya, ayrıca beni bugünlere getirmek için hiçbir şeyini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\varnothing$	Boş küme
$a \vee b$	a ve b sayılarının en büyüğü
$a \wedge b$	a ve b sayılarının en küçüğü
$\subseteq$	Alt küme, fuzzy alt küme
$\mu_{\widetilde{A}}(x)$	x'in $\widetilde{A}$'ya üye olma derecesi
$F(\mathbb{R})$	Tüm reel fuzzy kümelerin ailesi
$Supp(\widetilde{A})$	$\widetilde{A}$'nın destek kümesi
$\widetilde{A}^{\alpha}$	$\widetilde{A}$'nın α-kesmesi
$\widetilde{\eta}(\mathbb{R})$	Tüm reel fuzzy sayıların kümesi
$\widetilde{\eta}(\mathbb{C})$	Tüm karmaşık fuzzy sayıların kümesi
$\widetilde{Z}$	Karmaşık fuzzy sayı
Z	Karmaşık interval
$\widetilde{Z}^{-1}$	$\widetilde{Z}$ karmaşık fuzzy sayısının tersi
$\widetilde{Z}^{*}$	$\widetilde{Z}$ karmaşık fuzzy sayısının konjugesi
$\widetilde{Z}^{\alpha}$	$\widetilde{Z}$ karmaşık fuzzy sayısının α-kesmesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Klasik kümelerin genelleştirilmelerinden biri olan fuzzy kümeler ilk olarak Lütfi A. Zadeh tarafından ortaya atılmıştır. Zadeh, 1961 yılında yayımladığı bir makalesinde olasılık dağılımıyla tanımlanamayan belirtisiz ve şüpheli nicelikler için farklı bir matematiğe ihtiyaç olduğuna dikkat çekmiş ve 1965 yılında konuyla ilgili ilk çalışma olan "Fuzzy Sets" başlıklı makalesini yayınlamıştır. Zadeh bu makalesinde fuzzy küme teorisiyle, matematiğin dil ve insan zekasını ilişkilendirebileceğini ve fuzzy mantığın gerçek hayatın daha iyi bir modelini oluşturduğunu göstermesine rağmen bilim camiasından pek ilgi görmediği gibi tenkitlerle karşılaşmış ve hatta ABD Ulusal Bilim Vakfı (National Science Foundation) tarafından kaynakların boşa harcanmasına örnek olarak gösterilmişti. 1972 yılında İngiltere'de İran kökenli Ebrahim Mamdani'nin bir buhar makinesi için fuzzy mantık teorisini kullanarak, bir kontrol edici tasarlaması dünyanın ilgisini bu konuya çekmiştir. Fuzzy mantığın ilk ticari uygulamasının, 1980'de, Danimarka'da bir çimento fabrikasının kontrolünde kullanılmasından sonra, başta Japonya olmak üzere dünyadaki çoğu ülkeler araştırma ve mühendislik uygulamalarıyla bu konuda büyük gelişmeler kat etmişlerdir. Özellikle, elektronik aletlerin ana yapılarını oluşturan transistor veya algoritmalar gibi anahtarlama araçlarında yoğun olarak fuzzy mantık kullanılır.

Kümeler kuramında önceden belirlenmiş olan bir X kümesinin her bir A alt kümesi her $x \in X$ için

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir $1_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ dönüşümüne karşılık gelir. Bu dönüşüm A'nın karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır ve X evrensel kümesinin her bir elemanını ya 0 (yok) ya da 1 (var) değerine taşıyarak X'in elemanlarının A'ya ait olmasını derecelendirir. Ancak günlük hayatta karşılaşılan kavramların bir çoğunun (kesin olarak ölçülebilen nitelikler bile olsalar) üzerinde çalışılan nesnelerde tam anlamıyla varlığını veya tam anlamıyla yokluğunu söyleyebilmek mümkün değildir. Dolayısıyla kümeler çoğu zaman bilimsel modellemede tek başlarına yeterli olmazlar.

Türkçe konuşabilen insanların kümesi, çok büyük reel sayılar kümesi, ucuz fiyatlı arabaların kümesi, yorucu meslekler kümesi, uzun boylu insanlar kümesi gibi tanımlamaları anlamlı hale getirmek için küme elemanlarına değişik üyelik dereceleri verilerek $1_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ karakteristik fonksiyonu yerine $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu alınabilir. Örneğin, "çok büyük reel sayılar" için böyle bir yapı oluşturulmak istendiğinde, bir sayının "çok büyük sayı" olma derecesi göreceli olduğundan herkesin oluşturacağı $\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu birbirinden farklı olabilir. Yine de bu fonksiyonların hepsinin, artan olmak gibi ortak yönleri bulunabilir ve sayıların çok büyüklüğü hakkında genel bir bilgi verme bakımından her biri klasik kümelere göre çok daha başarılıdır.

Küme karakteristik fonksiyonunun değer aralığının genişletilmesiyle hassasiyet artar ve süreklilik oluşurken, μ_A'nın belirlediği A nesnesi artık bir küme olma niteliğini kaybeder. Değer aralığı $[0,1]$'e genişletilmiş fonksiyonların belirlediği bu yeni nesneler birer fuzzy küme olarak adlandırılacaklardır.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Fuzzy Kümeler Teorisi

2.1.1. Fuzzy kümeler

Tanım 2.1 *X klasik anlamda boş olmayan bir küme, $\mu_{\widetilde{A}} : X \to [0,1]$ bir fonksiyon olmak üzere $\widetilde{A} = \{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)) : x \epsilon X\}$ kümesine X'in bir **fuzzy altkümesi** denir. Verilen herhangi bir $x \in X$ için $\mu_{\widetilde{A}}(x) \in [0,1]$ reel sayısı x'in $\widetilde{A}$ fuzzy kümesine ait olma derecesini göstermektedir.*
i) $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$ ise; x öğesi $\widetilde{A}$'ya kesin olarak aittir denir.
ii) $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0$ ise; x öğesi $\widetilde{A}$'ya kesin olarak ait değildir denir.
iii) $0 < \mu_{\widetilde{A}}(x) < 1$ ise; x'in $\widetilde{A}$'ya kesin olarak ait olup olmadığından bahsedilemez. Bu durumda; x'in $\widetilde{A}$'ya $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ kadar ait olduğu söylenir.

X sonlu bir küme, yani $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şeklinde ise, $\widetilde{A}$ fuzzy kümesi;
$\widetilde{A} = \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_2)}{x_2} + ... + \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_n)}{x_n}$ şeklinde gösterilir.

X sonlu değilse, $\widetilde{A}$ fuzzy kümesi;
$\widetilde{A} = \int\limits_{x} \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x)}{x}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.2 *$X = \mathbb{N}$ olsun.*
$\widetilde{A} = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
$\widetilde{B} = \{x \in \mathbb{N} : x,\ 2\text{'ye yakın bir sayıdır.}\}$ *ve*
$\widetilde{C} = \{x \in \mathbb{N} : x, 20\text{'den çok büyük bir sayıdır.}\}$ *kümelerini gözönüne alalım. $\widetilde{A}$ kümesi klasik bir küme, $\widetilde{B}$ ve $\widetilde{C}$ fuzzy kümelerdir. Bu kümeler,*
$\widetilde{A} = \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$,
$\widetilde{B} = \{(0, 0.7), (1, 0.9), (2, 1), (3, 0.9), (4, 0.7)\}$,
$\widetilde{C} = \{1000, 0.6), (1001, 0.8), (x, 1) : x \geqslant 1002\}$ *şeklinde gösterilebilir.*

Örnek 2.3 *Uzun bir aralıkta seyreden arabaların mümkün hızlarının (km/h) kümesi, $X = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$ olsun. Bir kişi tarafından "Uzun bir yolculuk için en uygun hız" kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.*
$\widetilde{A} = \{(30, 0.7), (40, 0.75), (50, 0.8), (60, 0.8), (70, 1.0), (80, 0.8), (90, 0.30)\}$
Dikkat edilirse $\widetilde{A}$ kümesinde $x = 10, 20, 100$ hızları yer almamaktadır. Bu hızlar uzun yolculuk için kabul edilebilir uygunlukta olmayan hızlar olarak tanımlanabilir. Dolayısıyla bu hızların üyelik dereceleri sıfır olmaktadır. Tanımlanan fuzzy kümede yazılmayabilir.

Örnek 2.4 *$X = [0, 100]$ kapalı aralığı insanların yaşlarını göstersin. X üzerindeki $\widetilde{A}$ fuzzy kümesi yaşlı insanlar kümesi olsun. $\widetilde{A}$'nın üyelik fonksiyonu,*

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} \left[1 + (\frac{x-50}{5})^{-2}\right]^{-1} & , \ x \geqslant 50 \\ 0 & , \ x < 50 \end{cases}$$

şeklinde veya

$$\widetilde{A} = \int_{[50,100]} \frac{\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}}{x}$$

olarak yazılabilir.

Tanım 2.5 *$X \neq \emptyset$ klasik bir küme ve $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$, X üzerinde iki fuzzy küme olsun.*
i) $\forall x \epsilon X$ için $\mu_{\widetilde{A}}(x) \leq \mu_{\widetilde{B}}(x)$ oluyorsa $\widetilde{A}$ fuzzy kümesi $\widetilde{B}$ fuzzy kümesinin altkümesidir denir ve $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$ ile gösterilir.
ii) $\forall x \epsilon X$ için $\mu_{\widetilde{A}}(x) = \mu_{\widetilde{B}}(x)$ oluyorsa $\widetilde{A}$ fuzzy kümesi $\widetilde{B}$ fuzzy kümesine eşittir denir ve $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ ile gösterilir.

Örnek 2.6 *$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ olmak üzere,*
$\widetilde{A} = \frac{0.1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ ve $\widetilde{B} = \frac{0.1}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ fuzzy kümeleri için (i)'deki eşitsizlik sağlandığından $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$ olur.

Tanım 2.7 *$X \neq \emptyset$ klasik bir küme ve $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$, X üzerinde iki fuzzy küme olsun. $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ nin kesişimi ve birleşimi sırasıyla $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ ve $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ şeklinde gösterilen fuzzy kümelerdir. Üyelik fonksiyonları sırasıyla; $\forall x \in X$ için,*

$$\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x) = \min\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\} = \mu_{\widetilde{A}}(x) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(x)$$

$$\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x) = \max\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\} = \mu_{\widetilde{A}}(x) \vee \mu_{\widetilde{B}}(x)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. $\widetilde{A}$ fuzzy kümesinin tümleyeni ise $\widetilde{A}^c$ ile gösterilir ve tümleyen kümenin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\widetilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.8 *$X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere, $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ fuzzy kümeleri aşağıdaki gibi verilsin.*
$\widetilde{A} = \{(-1, 0.3), (0, 0.6), (1, 1), (2, 0.6), (3, 0.3)\}$,
$\widetilde{B} = \{(-3, 0.1), (-2, 0.1), (-1, 0.4), (0, 0.5), (1, 0.6), (2, 0.7)\}$. *Bu durumda,*
$\widetilde{A}^c = \{(-3, 1), (-2, 1), (-1, 0.7), (0, 0.4), (2, 0.4), (3, 0.7), (4, 1), (5, 1)\}$,
$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \{(-1, 0.3), (0, 0.5), (1, 0.6), (2, 0.6)\}$,
$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = \{(-3, 0.1), (-2, 0.1), (-1, 0.4), (0, 0.6), (1, 1), (2, 0.7), (3, 0.3)\}$
fuzzy kümeleri elde edilir.

Klasik kümeler için bilinen tüm işlemler aşağıdaki iki durum haricinde fuzzy kümeler için de geçerlidir.

$$\widetilde{A} \cup \widetilde{A}^c = X$$
$$\widetilde{A} \cap \widetilde{A}^c = \emptyset$$

Örnek olarak, $\forall x \in X$ için $\mu_{\widetilde{A}}(x) = \frac{1}{2}$ alırsak,

$\mu_{\widetilde{A} \cup \widetilde{A}^c}(x) = \max\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{A}^c}(x)\right\} = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \neq 1$

$\mu_{\widetilde{A} \cap \widetilde{A}^c}(x) = \min\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{A}^c}(x)\right\} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \neq 0$

Fuzzy küme kavramı, klasik anlamdaki küme kavramını içine alan daha geniş bir kavramdır. X'in her sıradan altkümesi $\widetilde{A}$, özel bir fuzzy kümedir. $\widetilde{A}$'nın üyelik fonksiyonu $\mu_{\widetilde{A}}$, $\widetilde{A}$'nın karakteristik fonksiyonu $1_{\widetilde{A}}$'dır. Fuzzy kümeler için tanımlanan tüm işlemler klasik kümeler için geçerli olmalıdır. Bu gereklilik fuzzy kümeler arasındaki işlemleri tanımlamak için zorunlu kriterdir.

Tanım 2.9 *$\widetilde{A}$, X'in bir fuzzy altkümesi olsun.*
a) $Supp(\widetilde{A}) = \left\{x \epsilon X : \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\right\}$ kümesine $\widetilde{A}$'nın ***dayanağı (destek kümesi)*** *denir.*
b) $Core(\widetilde{A}) = \left\{x \epsilon X : \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1\right\}$ kümesine $\widetilde{A}$'nın ***merkezi*** *(çekirdeği) denir.*
c) $\underset{x \epsilon X}{Sup}\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x)\right\} = 1$ ise $\widetilde{A}$'ya ***normal*** *fuzzy küme denir.*
d) $Hgt(\widetilde{A}) = \underset{x \epsilon X}{Sup}\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x)\right\}$ reel sayısına $\widetilde{A}$'nın ***yüksekliği*** *denir.*

Örnek 2.10 *$X = \{a, b, c, d, e, f\}$ olmak üzere, $\widetilde{A} = \frac{0.2}{b} + \frac{0.8}{d} + \frac{0.6}{f}$ fuzzy kümesini göz önüne alalım.*
$Supp(\widetilde{A}) = \left\{x \epsilon X : \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\right\} = \{b, d, f\}$
$Hgt(\widetilde{A}) = \max\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x) : x \epsilon X\right\} = 0.8$, $Core(\widetilde{A}) = \emptyset$'dir.

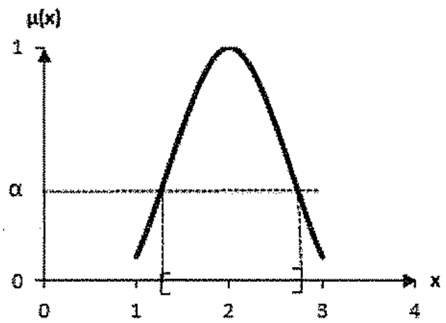
Tanım 2.11 *$X \neq \emptyset$ sıradan bir küme; $\widetilde{A}$, X'in bir fuzzy altkümesi olsun. $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere,*

$$\widetilde{A}^{\alpha} = \left\{x \epsilon X : \mu_{A}(x) \geqslant \alpha\right\}$$

ve

$$\widetilde{A}^{\overline{\alpha}} = \left\{x \epsilon X : \mu_{\widetilde{A}}(x) > \alpha\right\}$$

kümelerine sırasıyla; $\widetilde{A}$'nın ***α-kesmesi*** *ve $\widetilde{A}$'nın* ***kesin α-kesmesi*** *denir.*



Şekil 2.1. α-**kesmesi**

Örnek 2.12 *$Supp(\widetilde{A})$ sonlu olmak üzere, $\widetilde{A}$ fuzzy kümesi,*

$$\widetilde{A} = \frac{0.1}{2} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.5}{7} + \frac{0.9}{8} + \frac{1.0}{9}$$

olarak tanımlansın. $\widetilde{A}$'nın α-kesmeleri ($\widetilde{A}^{\alpha}$);
$\widetilde{A}^{0.1} = 2+4+7+8+9 = \{2,4,7,8,9\}$,
$\widetilde{A}^{0.3} = 4+7+8+9 = \{4,7,8,9\}$,
$\widetilde{A}^{0.5} = 8+9 = \{8,9\}$,
$\widetilde{A}^{0.9} = 9 = \{9\}$,
$\widetilde{A}^{1.0} = 9 = \{9\}$ *şeklinde olacaktır.*

Sonuç 2.13 *$Supp(\widetilde{A}) = \widetilde{A}^{0}$ ve $Core(\widetilde{A}) = \widetilde{A}^{1}$'dir. Ayrıca $Core(\widetilde{A}) \neq \emptyset \Leftrightarrow \widetilde{A}$ normaldir.*

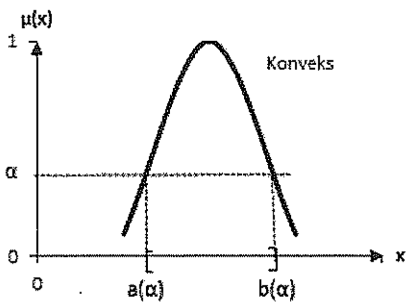
2.1.2. Fuzzy konvekslik

Tanım 2.14 *$X = \mathbb{R}^n$ ve A, X'in sıradan bir altkümesi olsun. Eğer $\forall\lambda \in [0,1]$ ve $x_1, x_2 \in A$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$ ise A konveks bir kümedir denir.*

Tanım 2.15 *$\widetilde{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall\lambda \in [0,1]$ için*

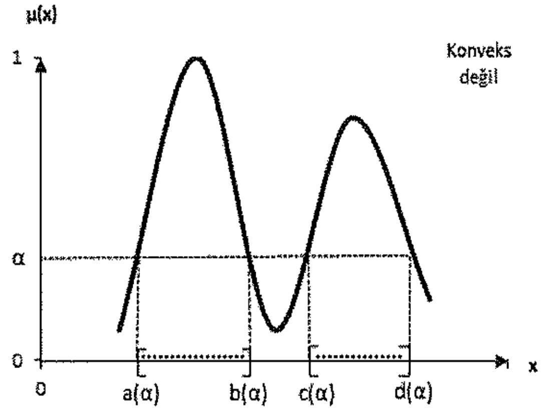
$$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \min\{\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{A}}(x_2)\}$$

*eşitsizliği sağlanıyorsa $\widetilde{A}$ **fuzzy konvekstir** denir (Kaufmann 1991).*



Şekil 2.2. Fuzzy konveks küme

Yukarıdaki koşulu üyelik fonksiyonunun dalgalanma yapmaması olarak da anlayabiliriz. Yani, $\mathbb{R}$'nin bir $\widetilde{A}$ fuzzy altkümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in [0,1]$ için $\widetilde{A}^{\alpha}$'nın $[a(\alpha), b(\alpha)]$ şeklinde bir kapalı aralık olmasıdır.



Şekil 2.3. Fuzzy konveks olmayan küme

Teorem 2.16 *$\widetilde{A}$, $\mathbb{R}^n$'de bir fuzzy küme olsun ($X = \mathbb{R}^n$). $\widetilde{A}$ fuzzy konvekstir $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha \in [0,1]$ için $\widetilde{A}^\alpha$ konvekstir.*

İspat. *($\Rightarrow$) $\widetilde{A}$ fuzzy konveks olsun. Konvekslik tanımından, $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall\lambda \in [0,1]$ için,*

$$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \min\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{A}}(x_2)\right\}$$

olur. $x_1, x_2 \in \widetilde{A}^\alpha$ ve $\lambda_0 \in [0,1]$ olsun. ($\lambda_0 x_1 + (1-\lambda_0)x_2 \in \widetilde{A}^\alpha$ olduğunu görmeliyiz.) $\mu_{\widetilde{A}}(x_1) \geqslant \alpha$ ve $\mu_{\widetilde{A}}(x_2) \geqslant \alpha$ olduğu biliniyor.

$$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda_0 x_1 + (1-\lambda_0)x_2) \geqslant \min\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{A}}(x_2)\right\} \geqslant \alpha$$

$$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda_0 x_1 + (1-\lambda_0)x_2) \geqslant \alpha \Rightarrow \lambda_0 x_1 + (1-\lambda_0)x_2 \in \widetilde{A}^\alpha$$

dır. Dolayısıyla $\widetilde{A}^\alpha$ konvekstir.
($\Leftarrow$) $\forall\alpha \in [0,1]$ için $\widetilde{A}^\alpha$ konveks olsun. $\alpha = \mu_{\widetilde{A}}(x_1) \leq \mu_{\widetilde{A}}(x_2)$ alalım. Bu durumda $x_2 \in \widetilde{A}^\alpha$'dır. $\widetilde{A}^\alpha$'nın konveksliğinden $\forall\lambda \in [0,1]$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \widetilde{A}^\alpha$ olur. Dolayısıyla,

$$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \alpha = \mu_{\widetilde{A}}(x_1) = \min\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{A}}(x_2)\right\}$$

elde edilir. Buradan, $\widetilde{A}$ fuzzy konvekstir. ■

Teorem 2.17 ***(Gösterim Teoremi)*** *$X \neq \emptyset$ ve $\widetilde{A}$, X'in fuzzy altkümesi olsun. Bu durumda, $\forall x \in X$ için,*

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \left\{\min\left\{\alpha, 1_{\widetilde{A}^\alpha}(x)\right\}\right\}$$

İspat. $x \in X$ ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. Bu durumda,

$$\min\left\{\alpha, 1_{\widetilde{A}^\alpha}(x)\right\} = \begin{cases} \alpha & , \ \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha \\ 0 & , \ \mu_{\widetilde{A}}(x) < \alpha \end{cases}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{A}}(x) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \left\{\alpha : \alpha \leq \mu_{\widetilde{A}}(x)\right\} \\ &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \left\{\min\left\{\alpha, 1_{\widetilde{A}^{\alpha}}(x)\right\}\right\}\end{aligned}$$

olur.
Bu teorem geometrik olarak şunu ifade ediyor: $\alpha-$kesmelerini yatay eksene paralel olarak α yükseklikte çizersek bunların dış çerçevesi bize fuzzy kümeyi verir. Bu yüzden bir $\widetilde{A}$ fuzzy kümesi için üyelik fonksiyonu $\mu_{\widetilde{A}}$ düşey ifadesiyken $\alpha-$kesmeleri yatay ifadesidir. ∎

2.1.3. Cebirsel fuzzy küme işlemleri

Tanım 2.18 ***(cebirsel toplam)*** *X üzerindeki $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ fuzzy kümelerinin cebirsel toplamı $\widetilde{A}+\widetilde{B}$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu; $\forall x \in X$ için,*

$$\mu_{\widetilde{A}+\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x) - \mu_{\widetilde{A}}(x).\mu_{\widetilde{B}}(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.19 ***(sınırlı toplam)*** *X üzerindeki $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ fuzzy kümelerinin sınırlı toplamı $\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu; $\forall x \in X$ için,*

$$\mu_{\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}}(x) = \min\left\{1, \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.20 ***(sınırlı fark)*** *X üzerindeki $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ fuzzy kümelerinin sınırlı farkı $\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu; $\forall x \in X$ için,*

$$\mu_{\widetilde{A}\_\widetilde{B}}(x) = \max\left\{0, \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x) - 1\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.21 ***(cebirsel çarpım)*** *X üzerindeki $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ fuzzy kümelerinin cebirsel çarpımı $\widetilde{A}.\widetilde{B}$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu; $\forall x \in X$ için,*

$$\mu_{\widetilde{A}.\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x).\mu_{\widetilde{B}}(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu operatörler $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$ ve $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$ tanımları için $\wedge$ ve $\vee$ yerine kullanılabilirler.

Örnek 2.22 $\widetilde{A}$ *ve* $\widetilde{B}$ *fuzzzy kümeleri aşağıdaki gibi verilsin.*
$\widetilde{A} = \{(4,0), (5,0.2), (6,0.4), (7,0.6), (9,1.0), (10,0)\}$ *ve*
$\widetilde{B} = \{(3,0)(4,0.5), (5,0.7), (6,1.0), (7,0.7), (8,0.5), (9,0)\}$.
Bu kümelerin yukarıdaki cebirsel işlemlere göre sonuçları tabloda gösterilmiştir.

x	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
$\mu_{\widetilde{A}}$	*0*	*0*	*0.2*	*0.4*	*0.6*	*0.8*	*1.0*	*0*
$\mu_{\widetilde{B}}$	*0*	*0.5*	*0.7*	*1.0*	*0.7*	*0.5*	*0*	*0*
$min(\mu_{\widetilde{A}}, \mu_{\widetilde{B}})$	*0*	*0*	*0.2*	*0.4*	*0.6*	*0.5*	*0*	*0*
$max(\mu_{\widetilde{A}}, \mu_{\widetilde{B}})$	*0*	*0.5*	*0.7*	*1.0*	*0.7*	*0.8*	*1.0*	*0*
$\mu_{\widetilde{A}.\widetilde{B}}$	*0*	*0*	*0.14*	*0.4*	*0.42*	*0.4*	*0*	*0*
$\mu_{\widetilde{A}+\widetilde{B}}$	*0*	*0.5*	*0.76*	*1.0*	*0.88*	*0.9*	*1.0*	*0*
$\mu_{\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}}$	*0*	*0.5*	*0.9*	*1.0*	*1.0*	*1.0*	*1.0*	*0*
$\mu_{\widetilde{A}\_\widetilde{B}}$	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0.3*	*1.0*	*0*

Örneğin, x=8 alındığında;
$\min\left\{\mu_{\widetilde{A}}(8), \mu_{\widetilde{B}}(8)\right\} = 0.5,$
$\max\left\{\mu_{\widetilde{A}}(8), \mu_{\widetilde{B}}(8)\right\} = 0.8,$
$\mu_{\widetilde{A}.\widetilde{B}}(8) = \mu_{\widetilde{A}}(8).\mu_{\widetilde{B}}(8) = 0.4,$
$\mu_{\widetilde{A}+\widetilde{B}}(8) = \mu_{\widetilde{A}}(8) + \mu_{\widetilde{B}}(8) - \mu_{\widetilde{A}}(8).\mu_{\widetilde{B}}(8) = 0.9,$
$\mu_{\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}}(8) = \min\left\{1, \mu_{\widetilde{A}}(8) + \mu_{\widetilde{B}}(8)\right\} = 1.0,$
$\mu_{\widetilde{A}\_\widetilde{B}}(8) = \max\left\{0, \mu_{\widetilde{A}}(8) + \mu_{\widetilde{B}}(8) - 1\right\} = 0.3$ *değerleri hesaplanabilmektedir.*

3. MATERYAL ve METOT

3.1. İnterval Aritmetik

İnterval aritmetik, 1950'lerden sonra matematiksel hesaplamalarda hataları yuvarlama ve büyüklüğünü bulma yaklaşımı olarak güvenilir sonuçlar elde etmek için geliştirilmiş, bilinen kesin değerler yerine belirlenmiş bölgelerle (yani aralıklarla) yapılan aritmetiktir.

Tanım 3.23 *(interval sayı) Bir $[a, b]$ kapalı aralığı,*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

şeklinde tanımlı, reel sayıların kapalı ve sınırlı bir altkümesidir. Bu şekilde reel sayıların kapalı aralıklarından oluşan kümeye interval sayı denir.

Herhangi bir X intervali başlangıç ve bitiş noktaları sırasıyla $\underline{X}$ ve $\overline{X}$ olmak üzere $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ şeklinde gösterilir. X ve Y gibi iki intervalin eşitliği $\underline{X} = \underline{Y}$ ve $\overline{X} = \overline{Y}$ olduğu durumda mümkündür. $\underline{X} = \overline{X}$ ise X'e dejenere interval denir.

Tanım 3.24 *Bir X interval sayısının,*
i) Genişliği (uzunluğu); $w(X) = \overline{X} - \underline{X}$
ii) Mutlak değeri; $|X| = \max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\}$
iii) Orta noktası; $m(X) = \frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X})$'dir.

Bir reel sayı, genişliği 0 olan bir interval sayı gibi düşünülebilir. X ve Y interval sayıları için, $X < Y$ ise $\overline{X} < \underline{Y}$ demektir. (Örnek olarak, $[0, 1] < [2, 3]$)
İntervaller arasındaki sıralama bağıntısı,

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow \underline{Y} \leq \underline{X} \text{ ve } \overline{X} \leq \overline{Y}$$

şeklinde tanımlıdır (Örneğin; $[1, 3] \subseteq [0, 3]$).

Tanım 3.25 *X ve Y iki interval sayı olmak üzere,*
a) $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$
b) $X - Y = \{x - y : x \in X, y \in Y\}$
c) $X \cdot Y = \{x \cdot y : x \in X, y \in Y\}$
d) $X \div Y = \{x \div y : x \in X, y \in Y, 0 \notin Y\}$'dir.

Aynı genel formüle sahip tüm bu tanımlar, $*$ yukarıdaki işlemlerden birini göstermek üzere, özetle;

$$X * Y = \{x * y : x \in X, y \in Y\}$$

şeklinde yazılabilir.

Aritmetik İşlemler İçin Uç Nokta Formülleri
X ve Y iki interval sayı olmak üzere, $x \in X$ ve $y \in Y$ olsun. Yani, $\underline{X} \leq x \leq \overline{X}$ ve

$\underline{Y} \leq y \leq \overline{Y}$ olmak üzere,
Toplama: Yukarıdaki eşitsizlikler toplandığında, interval tanımından,

$$\underline{X} + \underline{Y} \leq x + y \leq \overline{X} + \overline{Y}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

olması sebebiyle iki intervalin toplamının yine bir interval olduğu görülür.
Böylece, $X + Y = \left[\underline{X} + \underline{Y}, \overline{X} + \overline{Y}\right]$ yazılabilir.

Örnek 3.26 *$X = [0,2]$ ve $Y = [-1,1]$ alındığında,*
$X + Y = [0 - 1, 2 + 1] = [-1, 3]$ olur.

Çıkarma: Bir Y intervalinin zıttı,

$$-Y = -\left[\underline{Y}, \overline{Y}\right] = \left[-\overline{Y}, -\underline{Y}\right] = \{-y : y \in Y\}$$

olarak tanımlanır. X ve Y intervallerinin farkı ise,

$$X - Y = X + (-Y) = \{x - y : x \in X, y \in Y\}$$

şeklinde tanımlanır. $X - Y = \left[\underline{X} - \overline{Y}, \overline{X} - \underline{Y}\right]$ biçiminde de yazılabilir.

Örnek 3.27 *$X = [0,1]$ ve $Y = [1,2]$ ise $-Y = [-2,-1]$ ve*
$X - Y = X + (-Y) = [-2, 0]$ olur.

Çarpma: $S = \{\underline{X}.\underline{Y}, \underline{X}.\overline{Y}, \overline{X}.\underline{Y}, \overline{X}.\overline{Y}\}$ olmak üzere, $X.Y = [\min S, \max S]$ şeklindedir.

Örnek 3.28 *$X = [-1, 0]$ ve $Y = [1,2]$ olsun.*
$S = \{-1.1, -1.2, 0.1, 0.2\} = \{-1, -2, 0\}$
Buradan, $X.Y = [\min S, \max S] = [-2, 0]$, $2Y = [2,2] . [1,2] = [2,4]$ olur.

İnterval çarpım $\underline{X}, \overline{X}, \underline{Y}, \overline{Y}$ uç noktalarının işaretlerine göre 9 duruma parçalanabilir.

	Durum	$\underline{X.Y}$	$\overline{X.Y}$
1)	$0 \leq \underline{X}$ ve $0 \leq \underline{Y}$	$\underline{X}.\underline{Y}$	$\overline{X}.\overline{Y}$
2)	$\underline{X} \leq 0 \leq \overline{X}$ ve $0 \leq \underline{Y}$	$\underline{X}.\overline{Y}$	$\overline{X}.\overline{Y}$
3)	$\overline{X} \leq 0$ ve $0 \leq \underline{Y}$	$\underline{X}.\overline{Y}$	$\overline{X}.\underline{Y}$
4)	$0 \leq \underline{X}$ ve $\underline{Y} \leq 0 \leq \overline{Y}$	$\overline{X}.\underline{Y}$	$\overline{X}.\overline{Y}$
5)	$\overline{X} \leq 0$ ve $\underline{Y} \leq 0 \leq \overline{Y}$	$\underline{X}.\overline{Y}$	$\underline{X}.\underline{Y}$
6)	$0 \leq \underline{X}$ ve $\overline{Y} \leq 0$	$\overline{X}.\underline{Y}$	$\underline{X}.\overline{Y}$
7)	$\underline{X} \leq 0 \leq \overline{X}$ ve $\overline{Y} \leq 0$	$\overline{X}.\underline{Y}$	$\underline{X}.\underline{Y}$
8)	$\overline{X} \leq 0$ ve $\overline{Y} \leq 0$	$\overline{X}.\overline{Y}$	$\underline{X}.\underline{Y}$
9)	$\underline{X} \leq 0 \leq \overline{X}$ ve $\underline{Y} \leq 0 \leq \overline{Y}$	$\min\{\underline{X}.\overline{Y}, \overline{X}.\underline{Y}\}$	$\max\{\underline{X}.\underline{Y}, \overline{X}.\overline{Y}\}$

Bölme: Bir Y intervalinin $\frac{1}{Y}$ tersi,

$$\frac{1}{Y} = \{\frac{1}{y} : y \in Y, 0 \notin Y\} = \left[\frac{1}{\overline{Y}}, \frac{1}{\underline{Y}}\right]$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda, $\frac{X}{Y} = X.\frac{1}{Y}$ olur.

Örnek 3.29 *A ve B iki interval olmak üzere, $a \in A$ ve $b \in B$ noktaları alındığında $ax = b$ denklemini çözmek için, bölme işlemi kullanılarak, x' in $\frac{B}{A}$ intervalinde olduğu bulunabilir. Buna rağmen $A.(B/A) = B$ olduğu söylenemez.*

Gözlem 3.30 *X intervali aşağıdaki gibi ifade edilebilir.*

$$\begin{aligned} X &= m(X) + \left[-\frac{1}{2}w(X), \frac{1}{2}w(X)\right] \\ &= m(X) + \frac{1}{2}w(X)\,[-1,1] \end{aligned}$$

Örnek 3.31 $X = [0,2]$ *ise* $X = 1 + [-1,1]$ *şeklinde yazılabilir.*

İnterval Aritmetiğin Bazı Cebirsel Özellikleri

Değişme ve birleşme özelliği: İntervallerde toplama ve çarpma işlemleri değişmeli ve birleşmelidir. Herhangi X, Y ve Z intervalleri için,

$$X + Y = Y + X \text{ ve } XY = YX$$

ayrıca

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z \text{ ve } X(YZ) = (XY)Z$$

olduğu kolayca görülebilir.

Toplamsal ve çarpımsal birim elemanlar: O ve 1 dejenere intervalleri sırasıyla toplama ve çarpmaya göre birim elemanlardır. Herhangi bir X intervali için,

$$\begin{aligned} 0 + X &= X + 0 = X \\ 1.X &= X.1 = X \\ 0.X &= X.0 = 0 \end{aligned}$$

dır.

Ters elemanın yokluğu: İntervaller sisteminde X'in toplamaya göre tersi $-X$ değildir. Gerçekten,

$$X + (-X) = [\underline{X}, \overline{X}] + [-\overline{X}, -\underline{X}] = [\underline{X} - \overline{X}, \overline{X} - \underline{X}]$$

dir. Bu eşitlik sadece $\underline{X} = \overline{X}$ olduğunda $[0,0]$'a eşit olur. Eğer X'in genişliği sıfır değilse,

$$X - X = w(X).[-1,1]$$

olur. Benzer şekilde, X/X sadece $w(X) = 0$ olduğunda 1'e eşit olur. Genellikle,

$$X/X = \begin{cases} [\underline{X}/\overline{X}, \overline{X}/\underline{X}] & , \ 0 < \underline{X} \\ [\overline{X}/\underline{X}, \underline{X}/\overline{X}] & , \ \overline{X} < 0 \end{cases}$$

seklindedir. Dejenere intervaller hariç toplamaya ve çarpmaya göre ters eleman yoktur.

Alt dağılma: İnterval sayılar için dağılma kuralı genelde sağlanmaz. Örnek olarak;
$X = [1, 2]$,
$Y = [1, 1]$ ve $Z = -[1, 1]$ alınırsa,

$$\begin{aligned} X \otimes (Y + Z) &= [1, 2] . ([1, 1] - [1, 1]) \\ &= [1, 2] . [0, 0] \\ &= [0, 0] \end{aligned}$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} XY + XZ &= [1, 2] . [1, 1] - [1, 2] . [1, 1] \\ &= [\min\{1, 2\}, \max\{1, 2\}] - [\min\{1, 2\}, \max\{1, 2\}] \\ &= [1, 2] - [1, 2] \\ &= [-1, 1] \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat altdağılma kuralı sağlanır. Yani, $X \otimes (Y + Z) \subseteq XY + XZ$'dir. Dağılma özelliği sadece dejenere intervallerde geçerlidir. İnterval çarpımı, interval sayıların işaretleri aynı olduğu sürece interval toplamı üzerine dağılabilir. Yani,

$$Y.Z > 0 \Rightarrow X.(Y + Z) = XY + XZ$$

sağlanır.

Örnek 3.32 $[1, 2] . ([-3, -2] + [-5, -1]) = [-16, -3]$
$= [1, 2] . [-3, -2] + [1, 2] . [-5, -1]$

Sadeleştirme: İnterval toplamında sadeleştirme kuralı sağlanır.

$$X + Z = Y + Z \Rightarrow X = Y$$

Fakat interval çarpımında geçerli değildir. Yani, $ZX = ZY$ olduğunda $X = Y$ sağlanmaz.

Simetrik intervaller: X intervalinde $\underline{X} = -\overline{X}$ eşitliği sağlanıyorsa X simetriktir denir. Simetrik intervallerin orta noktası 0'dır. Eğer X simetrik ise,

$$|X| = \frac{1}{2} w(X) \text{ ve } X = |X| [-1, 1]$$

dir.

Bazı Hesaplamalar:

$A = [4, 5], B = [-3, -2]$ ve $C = [0, 1]$ olsun. $AX^2 + BX + C$'yi inceleyelim.
$X = [1, 2]$ olsun.

$$\begin{aligned} X^2 &= [1, 2] . [1, 2] = [1, 4] \\ AX^2 &= [4, 5] . [1, 4] = [4, 20] \text{ ve} \\ BX &= [-3, -2] . [1, 2] = [-6, -2] \\ AX^2 + BX + C &= [4, 20] + [-6, -2] + [0, 1] = [-2, 19] \end{aligned}$$

olur. Eğer, $(AX+B)X+C$ ifadesi yukarıdaki A, B, C ve X'lerle elde edilirse sonuç farklı olur;

$$AX+B = [4,5].[1,2]+[-3,-2] = [1,8]$$
$$(AX+B)X+C = [1,8].[1,2]+[0,1] = [1,7]$$

3.1.1. Karmaşık interval aritmetik

Kompleks Düzleme Genişleme

Bilindiği gibi, karmaşık sayılar $a, a' \in \mathbb{R}$ olmak üzere kartezyen formda (a, a') sıralı ikilileriyle gösterilir. (a, a') ve (b, b') karmaşık sayılarının toplamı $(a+b, a'+b')$, çarpımları da $(ab - a'b', ab' + a'b)$ karmaşık sayılarıdır. a reel sayısı $(a, 0)$ karmaşık sayısı olarak yazılabilir. $(0,1)$ ikilisi i olarak adlandırılır. (a, a') karmaşık sayısı,

$$(0,1).(0,1) = (-1,0);\ i^2 = -1$$

olduğundan,

$$(a, a') = (a, 0) + (0, a') = a + a'(0,1) = a + a'i$$

olarak da ifade edilir.

Tanım 3.33 *A ve B iki interval sayı olmak üzere, bir karmaşık interval sayı (A, B) sıralı ikilisidir. Karmaşık sayılarda olduğu gibi, karmaşık interval sayılarda da i sayısı $([0,0], [1,1])$ ikilisine eşittir.*

Küme gösterimine göre bir karmaşık interval sayı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathcal{A} = [a,b] + [c,d]\, i = \{x + yi : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Geometrik olarak da kompleks düzlemde dikdörtgensel bir bölgeye karşılık gelir. Başlangıç noktası orjin olan ve bitiş noktası dikdörtgensel bölgenin içinde kalan bütün vektörlerin kümesi olarak düşünülebilir.

Tanım 3.34 *$\mathcal{A}$ karmaşık interval sayısının konjugesi reel eksene göre simetriği olan bölgeyi oluşturan karmaşık interval sayıdır. Zıttı ise, orjine göre simetriği olan $-\mathcal{A}$ karmaşık interval sayısıdır.*

Tanım 3.35 *(A, A') ve (B, B') iki karmaşık interval sayı olmak üzere,*
a) $(A, A') + (B, B') = (A + B, A' + B')$
b) $(A, A').(B, B') = (AB - A'B', AB' + A'B)$*'dir.*

Örnek 3.36 *İki konjuge karmaşık sayının toplamı;* $(a, b) + (a, -b) = (2a, 0) = 2a$ *reel sayısıdır. Fakat, İki konjuge karmaşık interval sayının toplamı;*

$$(A, B) + (A, -B) = (2A, B - B) \neq 2A$$

Çünkü, $a \neq b$ *iken* $B - B = [a,b] - [a,b] = [a-b, b-a] \neq [0,0]$*'dır.*

Örnek 3.37 *İki konjuge karmaşık interval sayının çarpımı;*

$$(A, B).(A, -B) = (A^2 + B^2, AB - AB) \neq (A^2 + B^2, 0)$$

Toplamaya göre ters elemanın olmaması karmaşık interval sayılarda diğer önemli özelliklerin sağlanmamasına neden oluyor.

Tanım 3.38 (A, A') *ve* (B, B') *karmaşık interval sayılar ve* $0 \notin (B, B')$ *olmak üzere, bunların oranları;*

$$\frac{(A, A')}{(B, B')} = \left(\frac{AB + A'B'}{B^2 + B'^2}, \frac{A'B - AB'}{B^2 + B'^2}\right)$$

dir.

Karmaşık sayıların polar(kutupsal) gösteriminin karmaşık polar aralıklara(sektörlere) genişletilmesinde çarpma ve bölme işlemleri tanımlı iken toplama ve çıkarma işlemleri tanımlı değildir.

Tanım 3.39 $[\rho] \subseteq \mathbb{R}^+$ *ve* $[\theta] \subseteq \mathbb{R}$ *olmak üzere,*

$$Z = \{z \in \mathbb{C} : z = \rho.e^{i\theta}, \ \rho \in [\rho], \ \theta \in [\theta]\}$$

şeklinde tanımlı kümeye sektör denir ve $([\rho], [\theta])$ *ile gösterilir.*

$Z_1 = ([\rho_1], [\theta_1])$ ve $Z_2 = ([\rho_2], [\theta_2])$ herhangi iki sektör olsun. Reel intervallerin kümesi toplamaya ve çıkarmaya göre kapalı olduğundan bu iki sektörün çarpımı ve birbirine oranı yine bir sektördür.

$$\begin{aligned} Z_1 \times Z_2 &= \{\rho_1.\rho_2.e^{i(\theta_1+\theta_2)} : \rho_1 \in [\rho_1], \rho_2 \in [\rho_2], \theta_1 \in [\theta_1], \theta_2 \in [\theta_2]\} \\ &= ([\rho_1] \times [\rho_2], [\theta_1] + [\theta_2]) \\ \frac{Z_1}{Z_2} &= (\frac{[\rho_1]}{[\rho_2]}, [\theta_1] - [\theta_2]) \end{aligned}$$

Bir sektörün negatifi; $-Z = ([\rho], [\theta] + 180)$ şeklinde tanımlı bir sektördür. Fakat

$$Z_1 + Z_2 = \{z_1 + z_2 : z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2\}$$

bir sektör değildir. Toplama işlemi için basit bir formül yoktur. İnterval operatörlerini doğrudan uygulayamayız. Algoritmalar yardımıyla veya optimizasyon problemi olarak çözüldüğünde mümkün çözümleri içeren minimum sektör bulunabilir.

$Z = Z_1 + Z_2 = ([\rho], [\theta])$ olsun.

$$
\begin{aligned}
|Z| &= |\rho_1.e^{i\theta_1} + \rho_2.e^{i\theta_2}| = |\rho_1.(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + \rho_2.(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)| \\
&= |\rho_1.\cos\theta_1 + \rho_2.\cos\theta_2 + i(\rho_1.\sin\theta_1 + \rho_2.\sin\theta_2)| \\
&= \sqrt{(\rho_1.\cos\theta_1 + \rho_2.\cos\theta_2)^2 + (\rho_1.\sin\theta_1 + \rho_2.\sin\theta_2)^2} \\
&= \left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2.\rho_1.\rho_2(\cos\theta_1.\cos\theta_2 + \sin\theta_1.\sin\theta_2)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2.\rho_1.\rho_2.\cos(\theta_1 - \theta_2)\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\tan\theta = \frac{\rho_1.\sin\theta_1 + \rho_2.\sin\theta_2}{\rho_1.\cos\theta_1 + \rho_2.\cos\theta_2}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
&f : (\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2) \longrightarrow \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2.\rho_1.\rho_2.\cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&\Omega : [\rho_1] \times [\rho_2] \times [[\theta_1] - [\theta_2]]
\end{aligned}
$$

fonksiyonu tanımlansın. Buradan, $[\rho]$'nun alt ve üst sınırları $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ fonksiyonunun işaretine göre 3 durumda optimizasyon problemi olarak çözülüp kararlaştırılabilir. Aynı şekilde, $[\theta]$'nın alt ve üst sınırları da,

$$
\begin{aligned}
&h : (\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2) \longrightarrow \frac{\rho_1.\sin\theta_1 + \rho_2.\sin\theta_2}{\rho_1.\cos\theta_1 + \rho_2.\cos\theta_2} \\
&\Omega : [\rho_1] \times [\rho_2] \times [\theta_1] \times [\theta_2]
\end{aligned}
$$

problemi ile bulunabilir. Yine de bu teknikler tam çözümü vermez, fakat çözümü içeren kümeyi verir. Doğal bir yaklaşım olarak, sektörün köşe noktaları toplanarak mümkün bir sonuç elde edilebilir fakat bu işlem sektörlerin açıları 90 dereceden küçük olduğunda uygun çözümü verir..

3.2. Zadeh Genişleme Prensibi

Motivasyon: $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ işlemi göz önüne alındığında $x, y \in \mathbb{R}$ için $x + y$ kolaylıkla bulunabilir. Peki bu işlem $A, B \subseteq \mathbb{R}$ kümelerine nasıl genişletilebilir? Yani, $A + B =?$ (Bu yeni işlemi $\oplus$ ile göstereceğiz). Doğal yaklaşımımız şu şekilde olur;

$$
A \oplus B = C := \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in A \text{ ve } \exists b \in B \ \ni x = a + b\}
$$

Örnek 3.40 $\{2, 3, 4\} \oplus \{7, 8\} = \{9, 10, 11, 12\}$

Örnek 3.41 *(interval analiz)*
$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$
$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$
$[a, b] \times [c, d] = [\min\{ac, ad, bc, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\}]$
$[a, b] \div [c, d] = [a, b] \times [\frac{1}{d}, \frac{1}{c}] = [\min\{\frac{a}{d}, \frac{a}{c}, \frac{b}{d}, \frac{b}{c}\}, \max\{\frac{a}{d}, \frac{a}{c}, \frac{b}{d}, \frac{b}{c}\}]\ ; d, c \neq 0$

Örnek 3.42 $[2,3] \oplus [4,6] = [6,9]$.

Fuzzy kümeler kuramı açısından burada ortaya çıkan soru, bu genişletme işleminin fuzzy alt kümelere nasıl yapılabileceğidir. Yani, $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in F(\mathbb{R})$, ise $\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}$ nasıl tanımlanabilir?

Tanım 3.43 *(Kartezyen Çarpım) $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n$ sırasıyla $X_1, X_2, ..., X_n$ kümelerinin birer fuzzy alt kümesi olsun. $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ çarpım uzayında, $\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times ... \times \widetilde{A}_n$ fuzzy kümelerin kartezyen çarpımı;*

$$\mu_{\widetilde{A}_1, \times \widetilde{A}_2 \times ... \times \widetilde{A}_n}(x) = \min_i \left\{ \mu_{\widetilde{A}_i}(x_i) : x_i \in X_i \right\}, \ x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

üyelik fonksiyonuna sahip bir fuzzy kümedir.

Örnek 3.44 $\widetilde{A} = \{(3,.5),(5,1),(7,.6)\}$ *ve* $\widetilde{B} = \{(3,1),(5,.6)\}$ *olmak üzere, bu kümelerin kartezyen çarpımı;*
$\widetilde{A} \times \widetilde{B} = \{((3,3),.5),((3,5),.5),((5,3),1),((5,5),.6),((7,3),.6),((7,5),.6)\}$
olarak bulunur.

Tanım 3.45 *(Zadeh 1973) $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ olmak üzere, $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n$ sırasıyla $X_1, X_2, ..., X_n$'in birer fuzzy alt kümesi ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\widetilde{B} \in f(X)$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu genişleme prensibi ile aşağıdaki gibi tanımlanır;*

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,x_2,...,x_n) \in f^{-1}(y)} \min\left\{ \mu_{\widetilde{A}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2), ..., \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n) \right\} & , \ eğer \ f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \ eğer \ f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Özel olarak, $n = 1$ durumunda $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun fuzzy kümelere genişlemesini elde ederiz.

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \left\{ \mu_{\widetilde{A}}(x) \right\} & , \ eğer \ f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \ eğer \ f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Örnek 3.46 $\widetilde{A} = \{(-1,.5),(0,.8),(1,1),(2,.4)\}$ *olsun.* $f(x) = x^2$ *olmak üzere,* $f(\widetilde{A})$*'yı bulalım. Genişleme prensibi ile* $f(\widetilde{A}) = \widetilde{B}$ *dersek,* $\widetilde{B} = \{(0,.8),(1,1),(4,.4)\}$ *olur.*

Örnek 3.47 *($n = 2$ durumu)* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
$\widetilde{A} = \frac{0.5}{0} + \frac{0.7}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.2}{4}$ *ve* $\widetilde{B} = \frac{0.7}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.6}{6} + \frac{0.1}{7}$ *olsun.* $\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}$*'yi bulalım.*
$\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} = \widetilde{C}$ *dersek,* $\widetilde{C} = \frac{0.5}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.7}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0.8}{8} + \frac{0.6}{9} + \frac{0.2}{10} + \frac{0.1}{11}$ *olur.*

Örnek 3.48 *$\widetilde{A}_1$ ve $\widetilde{A}_2$ fuzzy kümeleri ile bunlara ait üyelik fonksiyonlarının değerleri aşagıdaki tabloda verilmiştir.*

x_1, x_2	2	3	4	5	6	7
$\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1)$	0	.4	1.0	.7	0	0
$\mu_{\widetilde{A}_2}(x_2)$	0	.1	.8	1.0	.3	0

$f(x) = 2x_1 + x_2$ fonksiyonuna dayanarak, genişleme prensibine göre $\mu_{\widetilde{B}}(y)$ aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$y = 2x_1 + x_2$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\mu_{\widetilde{B}}(y)$	0	0	0	.1	.4	.4	.8	1.0	.7	.7	.3	0

Örnek olarak, $12 = 2x_1 + x_2$ eşitliğini sağlayan mümkün (x_1, x_2) ikilileri;

x_1	3	4	5
x_2	6	4	2

$\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1)$ ve $\mu_{\widetilde{A}_2}(x_2)$ ile bunların minimumları aşağıdaki gibidir.

$\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1)$	.4	1.0	.7
$\mu_{\widetilde{A}_2}(x_2)$	.3	.8	0
$\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2)$	.3	.8	0

Böylece, $\mu_{\widetilde{B}}(12) = \max(.3, .8, 0) = .8$ olarak bulunur.

Tanım 3.49 ***(Fuzzy Sayı)*** *$\widetilde{M} \in F(\mathbb{R})$ fuzzy kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\widetilde{M}$'ye fuzzy sayı denir.*
i) *$\widetilde{M}$ fuzzy konvekstir.*
ii) *$\widetilde{M}$ normaldir $(\exists! x_0 \in \mathbb{R} \ni \mu_{\widetilde{M}}(x_0) = 1)$.*
iii) *$\mu_{\widetilde{M}}(x)$ parçalı süreklidir.*

Tanım 3.50 ***(Üçgensel Fuzzy Sayı)*** *$x, a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a < b < c$ olmak üzere,*

$$\mu_{\widetilde{A}}(x, a, b, c) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & , \quad x \in [a, b] \\ \frac{c-x}{c-b} & , \quad x \in [b, c] \\ 0 & , \quad x \notin [a, c] \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile verilen $\widetilde{A}$ fuzzy sayısına üçgensel fuzzy sayı denir. Üçgensel fuzzy sayılar kısaca (a, b, c) sıralı üçlüleri ile gösterilir.

Tanım 3.51 ***(Yamuksal Fuzzy Sayı)*** *$x, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $a < b < c < d$ olmak üzere,*

$$\mu_{\widetilde{A}}(x, a, b, c, d) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & , \quad x \in [a, b] \\ 1 & , \quad x \in [b, c] \\ \frac{d-x}{d-c} & , \quad x \in [c, d] \\ 0 & , \quad x \notin [a, d] \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile verilen $\widetilde{A}$ fuzzy sayısına yamuksal fuzzy sayı denir. Yamuksal fuzzy sayılar kısaca (a, b, c, d) sıralı dörtlüleri ile gösterilirler.

Teorem 3.52 *(Dubois and Prade 1980)* $\widetilde{B} = f(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n)$ *olmak üzere,*
$\left[f(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n)\right]^{\alpha} = f(\widetilde{A}_1^{\alpha}, \widetilde{A}_2^{\alpha}, ..., \widetilde{A}_n^{\alpha}) \Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* \in X$,
$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \mu_{\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times ... \times \widetilde{A}_n}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \min\left\{\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1^*), \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2^*), ..., \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n^*)\right\}$
Bu teorem Genişleme Prensibinin $\alpha-$kesmelerine uygunluğunu ifade etmektedir.

3.3. Genişletilmiş Reel Sayı İşlemleri

Tanım 3.53 *Bir $\widetilde{M}$ fuzzy sayısının üyelik fonksiyonu, $\forall x < 0$ ($\forall x > 0$) için, $\mu_{\widetilde{M}}(x) = 0$ koşulunu sağlıyorsa $\widetilde{M}$* ***pozitif*** *(negatif) fuzzy sayıdır. $\widetilde{M} > 0$ ($\widetilde{M} < 0$) şeklinde gösterilir.*

Tanım 3.54 $\mathbb{R}$ *üzerinde bir $*$ ikili işlemi $x_1 > y_1$ ve $x_2 > y_2$ olduğunda $x_1 * x_2 > y_1 * y_2$ ($x_1 * x_2 < y_1 * y_2$) koşulunu sağlıyorsa $*$ işlemine* ***artan****dır (azalan) denir.*

Örnek 3.55 $f(x, y) = x + y$ *artan bir işlemdir.*
$f(x, y) = x.y$ *işlemi $\mathbb{R}^+$'da artandır.*
$f(x, y) = -(x + y)$ *azalan bir işlemdir.*

Gözlem 3.56 *$\widetilde{\eta}(\mathbb{R})$ ile $\mathbb{R}$ üzerinde* ***sürekli*** *üyelik fonksiyonuna sahip fuzzy sayıları gösterelim. Genişleme Prensibi kullanılarak $*$ işlemi fuzzy sayılarda $\circledast$ işlemine genişletilebilir. $\widetilde{M}, \widetilde{N} \in \widetilde{\eta}(\mathbb{R})$ olmak üzere,*

$$\mu_{\widetilde{M} \circledast \widetilde{N}}(z) = \sup_{z = x * y} \min\left\{\mu_{\widetilde{M}}(x), \mu_{\widetilde{N}}(y)\right\}$$

dir.

Teorem 3.57 *$\widetilde{M}, \widetilde{N} \in \widetilde{\eta}(\mathbb{R})$ fuzzy sayılarının üyelik fonksiyonları örten ve $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ artan veya azalan bir ikili işlem olsun. Bu durumda, $\widetilde{M} \circledast \widetilde{N}$ ($\circledast : \widetilde{\eta}(\mathbb{R}) \times \widetilde{\eta}(\mathbb{R}) \to \widetilde{\eta}(\mathbb{R})$) genişlemesi de üyelik fonksiyonu örten olan bir fuzzy sayıdır.*

Gözlem 3.58 *$\widetilde{M}, \widetilde{N}, \widetilde{P} \in \widetilde{\eta}(\mathbb{R})$ olmak üzere,*
i) $*$ değişmeli ise $\circledast$ değişmelidir.
ii) $*$ birleşmeli ise $\circledast$ birleşmelidir.
iii) $\widetilde{M} \circledast (\widetilde{N} \cup \widetilde{P}) = (\widetilde{M} \circledast \widetilde{N}) \cup (\widetilde{M} \circledast \widetilde{P})$
iv) $\cup$, $\circledast$ işlemine dağılmaz ve $\circledast$, $\cap$'e dağılmaz.

Teorem 3.59 *$\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n \in \widetilde{\eta}(\mathbb{R})$ olmak üzere, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise $\forall \alpha \in (0, 1]$ için, $[f(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n)]^{\alpha} = f(\widetilde{A}_1^{\alpha}, \widetilde{A}_2^{\alpha}, ..., \widetilde{A}_n^{\alpha})$'dır.*

Sonuç 3.60 *$\widetilde{M}$, $\widetilde{N} \in \widetilde{\eta}(\mathbb{R})$ fuzzy sayıları örten üyelik fonksiyonlarına sahip ve $*$ işlemi artan veya azalan olsun. Bu durumda, $\widetilde{M} \circledast \widetilde{N} \in \widetilde{\eta}(\mathbb{R})$ ve*

$$(\widetilde{M} \circledast \widetilde{N})^{\alpha} = \widetilde{M}^{\alpha} \circledast \widetilde{N}^{\alpha}$$

olur.

3.3.1. $\mathbb{R}$ üzerinde bazı tekli işlemler

$f : X \to Y$ ve $\forall \widetilde{A} \in \widetilde{\eta}(\mathbb{R})$ için $f(\widetilde{A})$'nın üyelik fonksiyonu, $f(x) = y$ olmak üzere, Genişleme Prensibinden;

$$\mu_{f(\widetilde{A})}(y) = \sup_{x=f^{-1}(y)} \mu_{\widetilde{A}}(x)$$

dir.

Fuzzy sayının zıttı : $f(x) = -x$ için $\widetilde{A}$ fuzzy sayısının zıttı, $\mu_{-\widetilde{A}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(-x)$ olmak üzere, $-\widetilde{A} = \{(x, \mu_{-\widetilde{A}}(x) : x \in X\}$ biçimindedir. Görelim;

$$\begin{aligned}
\mu_{-\widetilde{A}}(y) &= \sup_{y=-x} \mu_{\widetilde{A}}(x) \\
\mu_{-\widetilde{A}}(-x) &= \sup_{y=-x} \mu_{\widetilde{A}}(x) \\
\mu_{-\widetilde{A}}(x) &= \mu_{\widetilde{A}}(-x)
\end{aligned}$$

$\widetilde{A}$ ve $-\widetilde{A}$, $x = 0$ eksenine göre simetriktir.

Fuzzy sayının tersi : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash 0$ ve $f(x) = \frac{1}{x}$ için $\widetilde{A}$ fuzzy sayısının tersi, $\mu_{\widetilde{A}^{-1}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(\frac{1}{x})$ olmak üzere, $\widetilde{A}^{-1} = \{(x, \mu_{\widetilde{A}^{-1}}(x) : x \in X\}$ biçimindedir. Görelim;

$$\begin{aligned}
\mu_{\widetilde{A}^{-1}}(y) &= \sup_{y=\frac{1}{x}} \mu_{\widetilde{A}}(x) \\
\mu_{\widetilde{A}^{-1}}(\frac{1}{x}) &= \sup_{y=\frac{1}{x}} \mu_{\widetilde{A}}(x) \\
\mu_{\widetilde{A}^{-1}}(x) &= \mu_{\widetilde{A}}(\frac{1}{x})
\end{aligned}$$

Fuzzy sayının sabit ile çarpımı : $\forall \lambda \in \mathbb{R}\backslash 0$ ve $f(x) = \lambda.x$ için $\widetilde{A}$ fuzzy sayısının bir sabit ile çarpımı, $\mu_{\lambda\widetilde{A}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(\frac{x}{\lambda})$ olmak üzere, $\lambda\widetilde{A} = \{(x, \mu_{\lambda\widetilde{A}}(x) : x \in X\}$ biçiminde elde edilir. Görelim;

$$\begin{aligned}
\mu_{\lambda\widetilde{A}}(y) &= \sup_{y=\lambda.x} \mu_{\widetilde{A}}(x) \\
\mu_{\lambda\widetilde{A}}(\lambda x) &= \sup_{y=\lambda.x} \mu_{\widetilde{A}}(x) \\
\mu_{\lambda\widetilde{A}}(x) &= \mu_{\widetilde{A}}(\frac{x}{\lambda})
\end{aligned}$$

Fuzzy sayının mutlak değeri : $f(x) = |x|$ için $\widetilde{A}$ fuzzy sayısının mutlak değerinin üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{|\widetilde{A}|}(x) = \begin{cases} \max\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{A}}(-x)\} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

3.3.2. Genişletilmiş aritmetik işlemlerin özelikleri

1) Toplama : $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ artan bir fonksiyon olduğundan, Sonuç 3.60'den, $\widetilde{M}$ ve $\widetilde{N}$ herhangi iki fuzzy sayı ise, $f(\widetilde{M}, \widetilde{N}) = \widetilde{M} \oplus \widetilde{N}$ de fuzzy sayıdır.

Özellikler :
a) $-(\widetilde{M} \oplus \widetilde{N}) = (-\widetilde{M}) \oplus (-\widetilde{N})$ eşitliği vardır.

$$\begin{aligned} \mu_{(-\widetilde{M})\oplus(-\widetilde{N})}(z) &= \sup_{z=x+y} \min \left\{ \mu_{-\widetilde{M}}(x), \mu_{-\widetilde{N}}(y) \right\} \\ &= \sup_{z=x+y} \min \left\{ \mu_{\widetilde{M}}(-x), \mu_{\widetilde{N}}(-y) \right\} \end{aligned}$$

$-x = m$ ve $-y = n$ yazıldığında,

$$\begin{aligned} \mu_{(-\widetilde{M})\oplus(-\widetilde{N})}(z) &= \sup_{-z=m+n} \min \left\{ \mu_{\widetilde{M}}(m), \mu_{\widetilde{N}}(n) \right\} \\ &= \mu_{\widetilde{M}\oplus\widetilde{N}}(-z) \\ &= \mu_{-(\widetilde{M}\oplus\widetilde{N})}(z), \forall z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Buradan , $-(\widetilde{M} \oplus \widetilde{N}) = -\widetilde{M} \oplus -\widetilde{N}$ olur.
b) $\oplus$ işlemi değişmeli ve birleşmelidir. Değişmeliliği görelim;

$$\begin{aligned} \mu_{\widetilde{M}\oplus\widetilde{N}}(z) &= \sup_{z=x+y} \min \left\{ \mu_{\widetilde{M}}(x), \mu_{\widetilde{N}}(y) \right\} \\ &= \sup_{z=y+x} \min \left\{ \mu_{\widetilde{N}}(y), \mu_{\widetilde{M}}(x) \right\} \\ &= \mu_{\widetilde{N}\oplus\widetilde{M}}(z) \end{aligned}$$

Birleşmelilik de aynı şekilde gösterilebilir.
c) $0 \in \mathbb{R} \subseteq F(\mathbb{R})$ sıradan sayısı $\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x \neq 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanır ve $\oplus$ işleminin birim elemanıdır. Yani, $0 \oplus \widetilde{M} = \widetilde{M} \oplus 0 = \widetilde{M}$'dır.
d) $\widetilde{M}$ fuzzy sayısının $\oplus$ işlemine göre, $-\widetilde{M}$ ters elemanı yoktur. Yani, $\widetilde{M} \oplus (-\widetilde{M}) \neq 0$ dır (grup yapısı oluşturmaz).

2) Çıkarma : $-: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ işlemi ne artan ne azalan bir fonksiyondur. Ancak $\widetilde{M}, \widetilde{N} \in \widetilde{\eta}(\mathbb{R})$ için $\widetilde{M} \ominus \widetilde{N} = \widetilde{M} \oplus (-\widetilde{N})$ şeklinde yazılabilir. Genişleme Prensibi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \mu_{\widetilde{M}\ominus\widetilde{N}}(z) &= \sup_{z=x-y} \min \left\{ \mu_{\widetilde{M}}(x), \mu_{\widetilde{N}}(y) \right\} \\ &= \sup_{z=x+y} \min \left\{ \mu_{\widetilde{M}}(x), \mu_{\widetilde{N}}(-y) \right\} \\ &= \sup_{z=x+y} \min \left\{ \mu_{\widetilde{M}}(x), \mu_{-\widetilde{N}}(y) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\widetilde{M}$ ve $\widetilde{N}$ fuzzy sayı ise $\widetilde{M} \ominus \widetilde{N}$ de fuzzy sayıdır.

Örnek 3.61 $(3,5,8)=\begin{cases}\frac{x-3}{2}, & 3\le x\le 5\\ \frac{8-x}{3}, & 5\le x\le 8\\ 0, & \textit{diğer}\end{cases}$ *ve* $(2,7,10)=\begin{cases}\frac{x-2}{5}, & 2\le x\le 7\\ \frac{10-x}{3}, & 7\le x\le 10\\ 0, & \textit{diğer}\end{cases}$
üçgensel fuzzy sayılarının α-kesmeleri sırasıya $[2\alpha+3, 8-3\alpha]$ *ve* $[5\alpha+2, 10-3\alpha]$ *dir. O halde bu iki üçgensel fuzzy sayının toplamı ve farkı α-kesmeleri cinsinden,*
$[2\alpha+3,8-3\alpha]+[5\alpha+2,10-3\alpha]=[7\alpha+5,18-6\alpha]$ *ve*
$[2\alpha+3,8-3\alpha]-[5\alpha+2,10-3\alpha]=[2\alpha+3,8-3\alpha]+[10-3\alpha,-5\alpha-2]$
$=[5\alpha-7,6-8\alpha]$ *dır.*

3) Çarpma :.:$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ işlemi $\mathbb{R}^+$ üzerinde artan, $\mathbb{R}^-$ üzerinde azalan bir işlem olduğundan, $\widetilde{M}$ ve $\widetilde{N}$ 'nin her ikisi de pozitif veya negatif fuzzy sayılar iken $\widetilde{M}\odot\widetilde{N}$ bir pozitif fuzzy sayıdır. $\widetilde{M}$ pozitif ve $\widetilde{N}$ negatif fuzzy sayıları alındığında ($-\widetilde{M}$ negatif fuzzy sayıdır) $\widetilde{M}\odot\widetilde{N}=-((-\widetilde{M})\odot\widetilde{N})$ olur.

Özellikler :
a) $(-\widetilde{M})\odot\widetilde{N}=-(\widetilde{M}\odot\widetilde{N})$ eşitliği vardır.

$$\begin{aligned}\mu_{(-\widetilde{M})\odot\widetilde{N}}(x)&=\sup_{x=y.z}\min\{\mu_{-\widetilde{M}}(y),\mu_{\widetilde{N}}(z)\}\\&=\sup_{x=y.z}\min\{\mu_{\widetilde{M}}(-y),\mu_{\widetilde{N}}(z)\}\ ,\ -y=t \text{ yazıldığında}\\&=\sup_{-x=t.z}\min\{\mu_{\widetilde{M}}(t),\mu_{\widetilde{N}}(z)\}\\&=\mu_{\widetilde{M}\odot\widetilde{N}}(-x)\\&=\mu_{-(\widetilde{M}\odot\widetilde{N})}(x)\end{aligned}$$

Buradan, $(-\widetilde{M})\odot\widetilde{N}=-(\widetilde{M}\odot\widetilde{N})$ olur.
b) $\odot$ işlemi değişmeli ve birleşmelidir. Değişmeliliği görelim;

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{M}\odot\widetilde{N}}(x)&=\sup_{x=y.z}\min\{\mu_{\widetilde{M}}(y),\mu_{\widetilde{N}}(z)\}\\&=\sup_{x=z.y}\min\{\mu_{\widetilde{N}}(z),\mu_{\widetilde{M}}(y)\}\\&=\mu_{\widetilde{N}\odot\widetilde{M}}(x)\end{aligned}$$

c) $1\in\mathbb{R}\subseteq F(\mathbb{R})$ sayısının üyelik fonksiyonu $\mu_1(x)=\begin{cases}1 & , x=1\\ 0 & , x\neq 1\end{cases}$ şeklinde tanımlanır ve $\odot$ işleminin birim elemanıdır. Yani, $\forall\widetilde{M}\in\widetilde{\eta}(\mathbb{R})$ için,
$\widetilde{M}\odot 1=1\odot\widetilde{M}=\widetilde{M}$ 'dir.
d) $\widetilde{M}$ fuzzy sayısının $\odot$ işlemine göre ters elemanı yoktur. Yani, $\widetilde{M}\odot(\widetilde{M})^{-1}\neq 1$ 'dir. (Grup yapısı oluşturmaz)
e) $\widetilde{M},\widetilde{N}\in\widetilde{\eta}(\mathbb{R})$ olmak üzere $(\widetilde{M}\odot\widetilde{N})^{-1}=\widetilde{M}^{-1}\odot\widetilde{N}^{-1}$'dir.

$$\begin{aligned}\mu_{(\widetilde{M}\odot\widetilde{N})^{-1}}(x)&=\mu_{\widetilde{M}\odot\widetilde{N}}(\frac{1}{x})\\&=\sup_{\frac{1}{x}=y.z}\min\{\mu_{\widetilde{M}}(y),\mu_{\widetilde{N}}(z)\}\\&=\sup_{\frac{1}{x}=y.z}\min\{\mu_{\widetilde{M}^{-1}}(\frac{1}{y}),\mu_{\widetilde{N}^{-1}}(\frac{1}{z})\}\end{aligned}$$

$\frac{1}{y} = t$ ve $\frac{1}{z} = w$ yazıldığında,

$$\mu_{(\widetilde{M}\odot\widetilde{N})^{-1}}(x) = \sup_{x=t.w} \min\left\{\mu_{\widetilde{M}^{-1}}(t), \mu_{\widetilde{N}^{-1}}(w)\right\}$$
$$= \mu_{\widetilde{M}^{-1}\odot\widetilde{N}^{-1}}(x)$$

Buradan, $(\widetilde{M}\odot\widetilde{N})^{-1} = \widetilde{M}^{-1}\odot\widetilde{N}^{-1}$olur.

Sonuç 3.62 *$\widetilde{M}$, $\widetilde{N}$ fuzzy sayılarından biri pozitif, diğeri negatif ise bunların çarpımı ($\odot$) yine bir fuzzy sayıdır.*

Teorem 3.63 *$\widetilde{M}, \widetilde{N}$ ve $\widetilde{P}$ üç fuzzy sayı olsun. Bu durumda,*
$\widetilde{M}\odot(\widetilde{N}\oplus\widetilde{P}) \subseteq (\widetilde{M}\odot\widetilde{N})\oplus(\widetilde{M}\odot\widetilde{P})$'dir.
Bu teoreme örnek daha sonra verilmiştir.

Teorem 3.64 *$\widetilde{M}$ pozitif veya negatif bir fuzzy sayı, $\widetilde{N}$ ve $\widetilde{P}$ birlikte pozitif veya birlikte negatif fuzzy sayılar olsunlar. Bu durumda,*
$\widetilde{M}\odot(\widetilde{N}\oplus\widetilde{P}) = (\widetilde{M}\odot\widetilde{N})\oplus(\widetilde{M}\odot\widetilde{P})$ olur (zayıf dağılma).

İspat. i) $\widetilde{M}, \widetilde{N}, \widetilde{P} > 0$ ise,

$$\begin{aligned}
[(\widetilde{M}\odot\widetilde{N})\oplus(\widetilde{M}\odot\widetilde{P})]^\alpha &= (\widetilde{M}\odot\widetilde{N})^\alpha + (\widetilde{M}\odot\widetilde{P})^\alpha \\
&= \widetilde{M}^\alpha.\widetilde{N}^\alpha + \widetilde{M}^\alpha.\widetilde{P}^\alpha \\
&= \left[\underline{m_\alpha}, \overline{m_\alpha}\right]\cdot\left[\underline{n_\alpha}, \overline{n_\alpha}\right] + \left[\underline{m_\alpha}, \overline{m_\alpha}\right]\cdot\left[\underline{p_\alpha}, \overline{p_\alpha}\right] \\
&= \left[\underline{m_\alpha}.\underline{n_\alpha}, \overline{m_\alpha}.\overline{n_\alpha}\right] + \left[\underline{m_\alpha}.\underline{p_\alpha}, \overline{m_\alpha}.\overline{p_\alpha}\right] \\
&= \left[\underline{m_\alpha}.\underline{n_\alpha} + \underline{m_\alpha}.\underline{p_\alpha}, \overline{m_\alpha}.\overline{n_\alpha} + \overline{m_\alpha}.\overline{p_\alpha}\right] \\
&= \left[\underline{m_\alpha}(\underline{n_\alpha} + \underline{p_\alpha}), \overline{m_\alpha}(\overline{n_\alpha} + \overline{p_\alpha})\right] \\
&= \left[\underline{m_\alpha}, \overline{m_\alpha}\right]\cdot\left[\underline{n_\alpha} + \underline{p_\alpha}, \overline{n_\alpha} + \overline{p_\alpha}\right] \\
&= \left[\underline{m_\alpha}, \overline{m_\alpha}\right]\cdot\left[\left(\underline{n_\alpha}, \overline{n_\alpha}\right) + \left(\underline{p_\alpha}, \overline{p_\alpha}\right)\right] \\
&= \widetilde{M}^\alpha\odot(\widetilde{N}^\alpha + \widetilde{P}^\alpha) \\
&= [\widetilde{M}\odot(\widetilde{N}\oplus\widetilde{P})]^\alpha
\end{aligned}$$

ii)$\widetilde{M}$ ile $\widetilde{N}$, $\widetilde{P}$ çifti zıt işaretli ise, aynı ispat $-[(-\widetilde{M})\odot(\widetilde{N}\oplus\widetilde{P})] = \widetilde{M}\odot(\widetilde{N}\oplus\widetilde{P})$ özdeşliği ile yapılabilir. ■

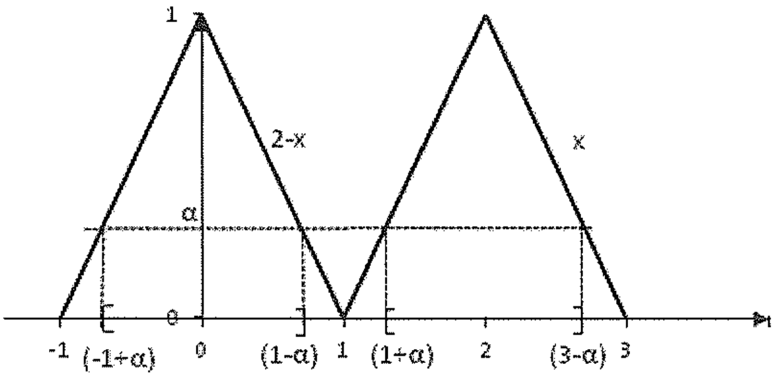
4) Bölme : Bölme işlemi de ne artan ne azalan bir fonksiyondur. Ancak, $\widetilde{M}\oslash\widetilde{N} = \widetilde{M}\odot(\widetilde{N}^{-1})$ olduğundan, $\widetilde{M}$ ve $\widetilde{N}$ herhangi iki pozitif veya negatif veya biri pozitif diğeri negatif iki fuzzy sayı ise $\widetilde{M}\oslash\widetilde{N}$ de bir fuzzy sayıdır.

$$\mu_{\widetilde{M}\oslash\widetilde{N}}(z) = \sup_{z=x/y} \min\left\{\mu_{\widetilde{M}}(x), \mu_{\widetilde{N}}(y)\right\}$$
$$= \sup_{z=x.y} \min\left\{\mu_{\widetilde{M}}(x), \mu_{\widetilde{N}}(\frac{1}{y})\right\}$$
$$= \sup_{z=x.y} \min\left\{\mu_{\widetilde{M}}(x), \mu_{\widetilde{N}^{-1}}(y)\right\}$$

Örnek 3.65 *Teorem 3.63'e örnek olarak,* $f(x) = x.(2-x) = -x^2+2x$ *olsun.* $\widetilde{X} = (1,2,3)$ *üçgensel fuzzy sayısı için* $f(\widetilde{X})$*'i bulalım.*
Önce $\widetilde{X} \odot (2 \ominus \widetilde{X})$ *durumuna bakalım.* $-\widetilde{X} = (-3,-2,-1)$ *olur. 2' yi* $(2,2,2)$ *şeklinde yazarsak,*

$$\begin{aligned} 2 \ominus \widetilde{X} &= 2 \oplus (-\widetilde{X}) = (2,2,2) \oplus (-3,-2,-1) \\ &= (-1,0,1). \end{aligned}$$

Buradan, $\widetilde{X} \odot (2 \ominus \widetilde{X}) = (1,2,3) \odot (-1,0,1)$ *olur. Sonuç 3.60'den,* $\alpha -$ *kesmeleri yardımıyla,*



Şekil 3.1. X ve 2-X' in $\alpha-$kesmeleri

$$[(1,2,3) \odot (-1,0,1)]^\alpha = (1,2,3)^\alpha \odot (-1,0,1)^\alpha$$
$$[-1+\alpha, 1-\alpha] \,.\, [1+\alpha, 3-\alpha] = [(-1+\alpha).(3-\alpha), (1-\alpha).(3-\alpha)] \,.$$

$\alpha = 0$ için kesme $[-3,3]$,
$\alpha = 1$ için kesme $[0,0]$' dır.
Diğer taraftan $-\widetilde{X}^2 \oplus 2\widetilde{X}$ için, yine $\alpha -$ *kesmeleri* ile

$$[-\widetilde{X}^2 \oplus 2\widetilde{X}]^\alpha = [-\widetilde{X}^2]^\alpha \oplus [2\widetilde{X}]^\alpha$$

yazılabilir.

$$[\widetilde{X}^2]^\alpha = \left[(1+\alpha)^2, (3-\alpha)^2\right]$$

ve

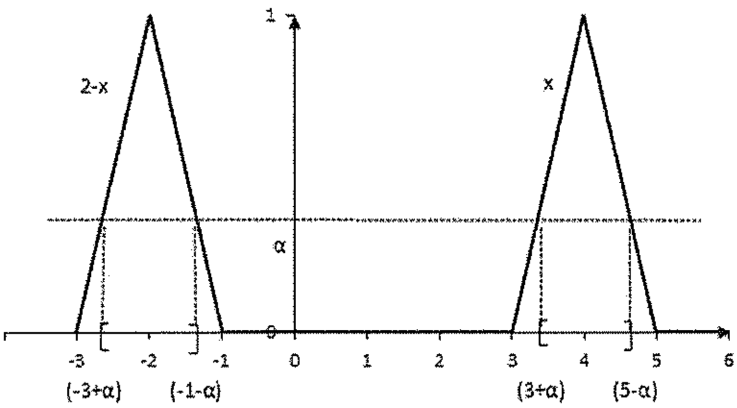
$$[-\widetilde{X}^2]^\alpha = \left[-(3-\alpha)^2, -(1+\alpha)^2\right]$$

olur. $\left[2\widetilde{X}\right]^\alpha = [2+2\alpha, 6-2\alpha]$ ile birlikte yerlerine yazarsak,

$$[-\widetilde{X}^2 \oplus 2\widetilde{X}]^\alpha = [-\widetilde{X}^2]^\alpha \oplus [2\widetilde{X}]^\alpha = \left[-(3-\alpha)^2 + 2 + 2\alpha, -(1+\alpha)^2 + 6 - 2\alpha\right]$$

$\alpha = 0$ kesmesi $[-7, 5]$,
$\alpha = 1$ kesmesi $[0, 0]$'dır.
Sonuç olarak, $x.(2-x)$ ile $-x^2+2x$ aynı fonksiyondur fakat fuzzy sayılarda bu geçerli değildir. Yani, $\widetilde{X} \odot (2 \ominus \widetilde{X}) \neq -\widetilde{X}^2 \oplus 2\widetilde{X}$

Örnek 3.66 $\widetilde{X} = (3,4,5)$ *olsun.* $-\widetilde{X} = (-5,-4,-3)$ *ve* $2-\widetilde{X} = (-3,-2,-1)$ *'dir.*



Şekil 3.2. Örnek 3.66' nın $\alpha-$kesmeleri

$$\begin{aligned}[\widetilde{X} \odot (2 \ominus \widetilde{X})]^\alpha &= [-3+\alpha, -1-\alpha]\,.\,[3+\alpha, 5-\alpha] \\ &= [(-3+\alpha)(5-\alpha), (-1-\alpha)(3+\alpha)]\end{aligned}$$

$\alpha = 0$ kesmesi $[-15, -3]$,
$\alpha = 1$ kesmesi $[-8, -8]$'dir.
Diğer taraftan,

$$[-\widetilde{X}^2]^\alpha = \left[-(5-\alpha)^2, -(3+\alpha)^2\right]$$

$$[-\widetilde{X}^2 \oplus 2X]^\alpha = \left[-(5-\alpha)^2 + 6 + 2\alpha, -(3+\alpha)^2 + 10 - 2\alpha\right]$$

$\alpha = 0$ kesmesi $[-19, 1]$,
$\alpha = 1$ kesmesi $[-8, -8]$'dir.

Örnek 3.67 ***Gözlem 3.68*** *İki örnekten de anlaşılacağı gibi fuzzy sayılarda çarpma işleminin toplama üzerine dağılmasında, bileşenlerin tek başına pozitif ya da negatif olması bu fonksiyonların sonuçlarının aynı olması için yeterli değildir. Teorem 3.64'i hatırlayacak olursak;* $\widetilde{M}$ *pozitif veya negatif bir fuzzy sayı,* $\widetilde{N}$ *ve* $\widetilde{P}$ *birlikte pozitif veya negatif fuzzy sayılar ise,*

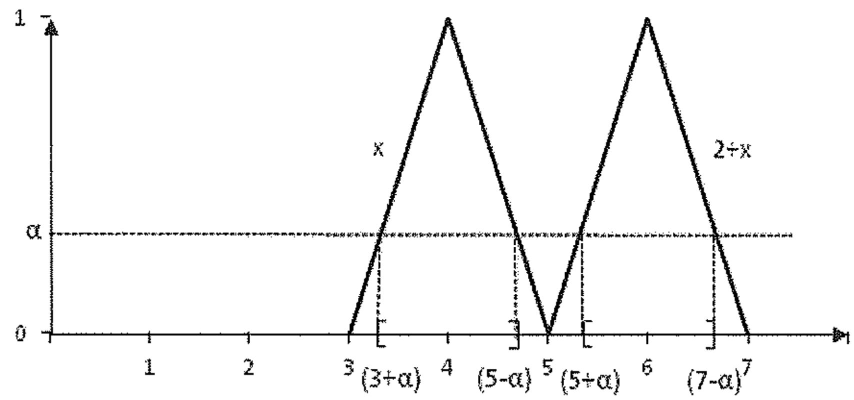
$$\widetilde{M} \odot (\widetilde{N} \oplus \widetilde{P}) = (\widetilde{M} \odot \widetilde{N}) \oplus (\widetilde{M} \odot \widetilde{P})$$

eşitliği sağlanır. Bunu probleme uyarlarsak,

$$\widetilde{X} \odot (2 \ominus \widetilde{X}) = \widetilde{X} \odot (2 \oplus (-\widetilde{X})) = 2X \ominus \widetilde{X}^2$$

olması için teoremin koşullarını sağlaması gerekir. Örneklerde 2 ile $-\widetilde{X}$ 'in işaretleri aynı olmadığı için eşitlik sağlanmadı. Buna göre örnekte $x.(2-x)$ fonksiyonu $x.(2+x)$ ile değiştirildiğinde eşitlikte sorun çıkmayacaktır.

Örnek 3.69 $\widetilde{X} = (3,4,5)$ *ve* $f(x) = x.(2+x)$ *için* $f(\widetilde{X})$*'i yazalım.*
$2 \oplus \widetilde{X} = (5,6,7)$



Şekil 3.3. X ve 2+X' in $\alpha-$kesmeleri

$$[\widetilde{X} \odot (2 \oplus \widetilde{X})]^{\alpha} = [(3+\alpha)(5+\alpha), (5-\alpha)(7-\alpha)]$$

olur. Diğer taraftan,

$$[\widetilde{X}^2]^{\alpha} = [(3+\alpha)(3+\alpha), (5-\alpha)(5-\alpha)]$$

ve

$$\begin{aligned}
[\widetilde{X}^2 \oplus 2\widetilde{X}]^{\alpha} &= [(3+\alpha)(3+\alpha) + 6 + 2\alpha, (5-\alpha)(5-\alpha) + 10 - 2\alpha] \\
&= \left[15 + 8\alpha + \alpha^2, 35 - 12\alpha + \alpha^2\right] \\
&= [(3+\alpha)(5+\alpha), (\alpha - 5)(\alpha - 7)] \\
&= [(3+\alpha)(5+\alpha), -(5-\alpha). -(7-\alpha)] \\
&= [(3+\alpha)(5+\alpha), (5-\alpha).(7-\alpha)]
\end{aligned}$$

Sonuçta, $\widetilde{X} \odot (2 \oplus \widetilde{X}) = \widetilde{X}^2 \oplus 2\widetilde{X}$ eşitliği sağlandı.

Örnek 3.70 *Bir sıvının basıncı ile hacminin çarpımının sabit olduğu bilinmektedir. Hacim "yaklaşık* $2m^3$*" iken basıncın "yaklaşık* $10n/m^2$*" olduğu saptanıyor. Yaklaşık* $2m^3$ *ve yaklaşık* $10n/m^2$ *ifadeleri* $\widetilde{V}_1 = (1,2,3)$ *üçgensel fuzzy sayısı ve* $\widetilde{P}_1 = (9,10,11)$ *fuzzy sayısı olarak veriliyor. Sıvının hacmi "yaklaşık* $5m^3$*" yani* $\widetilde{V}_2 = (4,5,6)$ *iken sıvının basıncını hesaplayınız.*

Çözüm: $\widetilde{P}.\widetilde{V}$ sabit olduğundan, $\widetilde{P}_1 \otimes \widetilde{V}_1 = \widetilde{P}_2 \otimes \widetilde{V}_2$ ve $(\widetilde{P}_1 \otimes \widetilde{V}_1)^\alpha = \widetilde{P}_1^\alpha \times \widetilde{V}_1^\alpha = (\widetilde{P}_2 \otimes \widetilde{V}_2)^\alpha = \widetilde{P}_2^\alpha \times \widetilde{V}_2^\alpha$ olur.

$\widetilde{P}_1^\alpha = [9 + (10-9)\alpha, 11 - \alpha(11-10)] = [9+\alpha, 11-\alpha]$

$\widetilde{V}_1^\alpha = [1 + (2-1)\alpha, 3 - \alpha(3-2)] = [1+\alpha, 3-\alpha]$

$\widetilde{P}_2^\alpha = [\underline{p_\alpha}, \overline{p_\alpha}]$ ve $\widetilde{V}_2^\alpha = [4 + (5-4)\alpha, 6 - \alpha(6-5)] = [4+\alpha, 6-\alpha]$

$\widetilde{P}_1^\alpha \times \widetilde{V}_1^\alpha = [9+\alpha, 11-\alpha].[1+\alpha, 3-\alpha]$

$[(9+\alpha).(1+\alpha), (11-\alpha), (3-\alpha)] = [4+\alpha, 6-\alpha].[\underline{p_\alpha}, \overline{p_\alpha}]$

$\underline{p_\alpha} = \frac{(9+\alpha).(1+\alpha)}{4+\alpha}$, $\overline{p_\alpha} = \frac{(11-\alpha),(3-\alpha)}{6-\alpha}$ olur.

$\widetilde{P}_2^1 = [\underline{p_1}, \overline{p_1}] = [\frac{10.2}{5}, \frac{10.2}{5}] = [4,4] = Core(\widetilde{P}_2)$

$\widetilde{P}_2^0 = [\underline{p_0}, \overline{p_0}] = [\frac{9}{4}, \frac{11}{2}]$

$\frac{9}{4} \leq x \leq 4$ aralığını alalım. $\alpha = \mu_{\widetilde{P}_2}(x)$ ve $x = \frac{(9+\alpha).(1+\alpha)}{4+\alpha}$ dersek,

$4x + \alpha x = 9 + \alpha^2 + 10\alpha \Rightarrow \alpha^2 + \alpha(10-x) + 9 - 4x = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{x-10 \pm \sqrt{(10-x)^2 + 16x - 36}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{x-10+\sqrt{x^2-4x+64}}{2}$ elde ederiz.

$4 \leq x \leq \frac{11}{2}$ aralığını aldığımızda, $\alpha = \mu_{\widetilde{P}_2}(x)$ ve $x = \frac{(11-\alpha),(3-\alpha)}{6-\alpha}$ dersek,

$6x - x\alpha = 33 + \alpha^2 - 14\alpha \Rightarrow \alpha^2 + \alpha(14-x) + 33 - 6x = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{14-x \pm \sqrt{(14-x)^2 + 24x - 132}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{14-x-\sqrt{x^2-4x+64}}{2}$ elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\mu_{\widetilde{P}_2}(x) = \begin{cases} \frac{x-10+\sqrt{x^2-4x+64}}{2} & , \quad \frac{9}{4} \leq x \leq 4 \\ \frac{14-x-\sqrt{x^2-4x+64}}{2} & , \quad 4 \leq x \leq \frac{11}{2} \\ 0 & , \quad x \in (-\infty, \frac{9}{4}] \cup [\frac{11}{2}, +\infty) \end{cases}$$

buluruz.

4. BULGULAR

Bu bölümde karmaşık fuzzy sayının tanımı ve $\alpha-$ *kesmeleri* yardımıyla karmaşık fuzzy sayıların temel aritmetik işlemleri verilmiştir. $z = x + iy$ ve $w = x + iy$ ile regüler (fuzzy olmayan) karmaşık sayılar, $\widetilde{Z}$ ve $\widetilde{W}$ ile de karmaşık fuzzy sayılar gösterilecektir.

4.1. Karmaşık Fuzzy Sayılar

$\widetilde{Z}$ karmaşık fuzzy sayısı, $\mathbb{C}$ 'den $[0,1]$'e tanımlı bir dönüşüm olan $\mu_{\widetilde{Z}}(z)$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. $\widetilde{Z}$ 'nin $\alpha-$kesmesi $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere,

$$\widetilde{Z}^{\alpha} = \left\{z : \mu_{\widetilde{Z}}(z) > \alpha\right\} \;\; ve \;\; \widetilde{Z}^{1} = \left\{z : \mu_{\widetilde{Z}}(z) = 1\right\}$$

dir.

Tanım 4.1 ***(Kompaktlık)*** *Bir X uzayı ve birleşimleri X uzayını kaplayan herhangi bir açık kümeler topluluğu verildiğinde, bu topluluğun içinden sonlu sayıda açık küme hala X uzayını kaplayabiliyorsa, X uzayına kompakttır denir.*

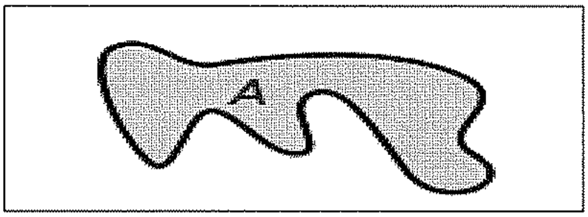
Tanım 4.2 ***(Bağlantılılık)*** *Bir (X, τ) topolojik uzayında X kümesi boştan farklı iki ayrık açık kümenin birleşimi şeklinde yazılamıyor ise (X, τ) topolojik uzayına bağlantılı uzay denir.*

Tanım 4.3 ***(Basit bağlantılılık)*** *X topolojik uzayında herhangi iki nokta arasındaki her yol sürekli bir şekilde bir diğerine dönüştürülebiliyorsa X uzayı basit bağlantılıdır. 3 boyutlu uzayda bir nesne tek parçaysa ve nesnenin bir tarafından girip diğer tarafından çıkan bir delik yoksa basit bağlantılıdır.*

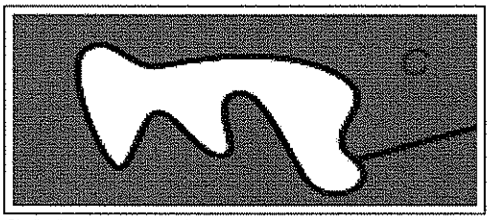
Tanım 4.4 ***(Yol bağlantılılık)*** *X topolojik uzayında, $\forall x, y \in X$ için $f(0) = x$ ve $f(1) = y$ olacak biçimde sürekli bir $f : [0,1] \to X$ fonksiyonu varsa X uzayı yol bağlantılıdır. Yani X 'ten alınan herhangi iki nokta bir eğri ile birleştirilebilir.*

Tanım 4.5 ***(Arc bağlantılılık)*** *X topolojik uzayında, $\forall x, y \in X$ için $f(0) = x$ ve $f(1) = y$ olacak biçimde tersi ve kendisi sürekli bir $f : [0,1] \to X$ fonksiyonu varsa X uzayı arc bağlantılıdır. Yani $[0,1]$ ve $f([0,1])$ arasında bir homeomorfizm vardır.*

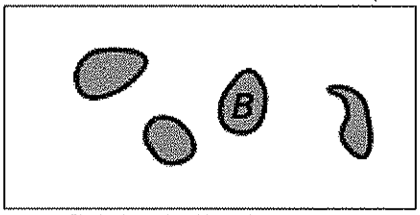
Örnek 4.6 *Aşağıdaki şekiller $\mathbb{R}^2$ 'nin bağlantılı ve bağlantısız alt uzaylarına örnek olarak verilebilir.*



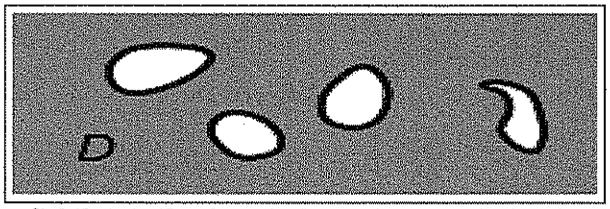
Şekil 4.1. Basit bağlantılı ve yol bağlantılı



Şekil 4.2. Bağlantılı ve yol bağlantılı



Şekil 4.3. Bağlantısız



Şekil 4.4. Bağlantılı, basit bağlantılı değil

Tanım 4.7 *Aşağıdaki şartları sağlayan $\widetilde{Z}$'ye* ***karmaşık fuzzy sayı*** *denir.*
i) $\mu_{\widetilde{Z}}(z)$ *süreklidir.*
ii) $0 \leq \alpha < 1$ *olmak üzere,* $\widetilde{Z}^{\alpha}$ *açık, sınırlı,bağlantılı ve basit bağlantılıdır.*
iii) $\widetilde{Z}^{1}$ *boş olmayan, kompakt, arc bağlantılı ve basit bağlantılıdır.*

$\widetilde{Z}^{\alpha}$'nın fuzzy sayı tanımındaki gibi konveks olma şartı aranmamıştır. Çünkü polar formdaki bir karmaşık fuzzy sayının $\alpha-$kesmesi $\mathbb{C}$'nin konveks bir altkümesi olmayacaktır. Bunun yerine, $\widetilde{Z}^{\alpha}$'nın boşluk içermemesi gerektiği için basit bağlantılı olması istenmiştir. $\widetilde{Z}^{1}$'in boş olmaması, reel fuzzy sayı tanımındaki normallik koşuluna benzer şekilde, her karmaşık fuzzy sayının normalize edilmiş olması demektir.

4.1.1. $\mathbb{C}$ üzerindeki aritmetik işlemler

$f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ herhangi bir dönüşüm olmak üzere, $f(z_1, z_2) = w$ olsun. Genişleme Prensibi kullanılarak f karmaşık fuzzy sayılara genişletildiğinde,

$$\Pi(z_1, z_2) = \min\left\{\mu_{\widetilde{Z}_1}(z_1), \mu_{\widetilde{Z}_2}(z_2)\right\}$$

olmak üzere,

$$\mu_{\widetilde{W}}(w) = \sup\left\{\Pi(z_1, z_2) : f(z_1, z_2) = w\right\}$$

olduğunda $f(\widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2) = \widetilde{W}$ yazılabilir. $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2$ ve $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2$ genişlemeleri sırasıyla $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2$ ve $f(z_1, z_2) = z_1.z_2$ işlemleri yardımıyla yapılabilir. Çıkarma işlemi için $-\widetilde{Z}$,

$$\mu_{-\widetilde{Z}}(z) = \mu_{\widetilde{Z}}(-z)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır ve $\widetilde{Z}_1 - \widetilde{Z}_2 = \widetilde{Z}_1 + (-\widetilde{Z}_2)$ şeklinde yazılır. $\widetilde{Z}^{-1}$'in üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\widetilde{Z}^{-1}}(z) = \mu_{\widetilde{Z}}(z^{-1}), z \neq (0,0)$$

biçimindedir. Eğer $\widetilde{Z}^0$ sınırlı değilse, $\widetilde{Z}^{-1}$ tanımsız olur. Sıfır $supp(\widetilde{Z})$ 'ye ait olduğu zaman $supp(\widetilde{Z}^{-1})$ sınırlı olmayacaktır. Dolayısıyla, karmaşık fuzzy sayı tanımına göre, $\widetilde{Z}^{-1}$ bir karmaşık fuzzy sayı olmayacaktır. İki karmaşık fuzzy sayının oranı

$$\frac{\widetilde{Z}_1}{\widetilde{Z}_2} = \widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2^{-1}$$

dir. $\widetilde{Z}$ 'nin karmaşık konjugesi $\widetilde{Z}^*$; $z = x - iy$, $z = x + iy$ 'nin karmaşık konjugesi olmak üzere

$$\mu_{\widetilde{Z}^*}(z) = \mu_{\widetilde{Z}}(\overline{z})$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlıdır. $\widetilde{Z}$'nin modülü $|\widetilde{Z}|$; r, z'nin modülü olmak üzere

$$\mu_{|\widetilde{Z}|}(r) = \sup\left\{\mu_{\widetilde{Z}}(z) : |z| = r\right\}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlıdır. Karmaşık fuzzy sayılarda toplama ve çarpma işlemlerini $\alpha-$kesmeleri yardımıyla yapabilmek için

$$S^\alpha = \left\{z_1 + z_2 : (z_1, z_2) \in \widetilde{Z}_1^\alpha \times \widetilde{Z}_2^\alpha\right\}$$

ve

$$P^\alpha = \left\{z_1.z_2 : (z_1, z_2) \in \widetilde{Z}_1^\alpha \times \widetilde{Z}_2^\alpha\right\}$$

olsun.

Teorem 4.8 *$\widetilde{Z}_1$ ve $\widetilde{Z}_2$ karmaşık fuzzy sayılar olmak üzere,*
a) $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2$ ise $\widetilde{W}^\alpha = S^\alpha$,
b) $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2$ ise $\widetilde{W}^\alpha = P^\alpha$'dır.

İspat. a) $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $w \in \widetilde{W}^\alpha$ alalım. O zaman, $z_1 + z_2 = w$ olacak biçimde $z_i \in \widetilde{Z}_i^\alpha$bulunabilir. $\mu_{\widetilde{W}}(w) > \alpha$ olduğundan $\Pi(z_1, z_2) > \alpha$'dır. Yani, $i = 1,2$ için $\mu_{\widetilde{Z}_i}(z_i) > \alpha$'dır. Buradan, $(z_1, z_2) \in \widetilde{Z}_1^\alpha \times \widetilde{Z}_2^\alpha$ ve $w \in S^\alpha$ olur. $w \in S^\alpha$ olsun. $i = 1,2$ için $\mu_{\widetilde{Z}_i}(z_i) > \alpha$ ve $w = z_1 + z_2$ olacak biçimde $z_i \in \widetilde{Z}_i^\alpha$ vardır. $\Pi(z_1, z_2) > \alpha$ ve $\mu_{\widetilde{W}}(w) > \alpha$ olur. Buradan, $w \in \widetilde{W}^\alpha$'dır. $\alpha = 1$ için $w \in S^1$ ise $w = z_1 + z_2$ olacak biçimde z_1 ve z_2 vardır ve $\Pi(z_1, z_2) = 1$'dir. Böylece, $\mu_{\widetilde{W}}(w) = 1$ ve $w \in \widetilde{W}^1$'dir. Tersine, $w \in \widetilde{W}^1$ olsun. $\forall n = 2, 3, ..$ için $z_{1n} + z_{2n} = w$ olacak biçimde $supp(\widetilde{Z}_1)$ kümesinde z_{1n} ve $supp(\widetilde{Z}_2)$ kümesinde z_{2n} vardır ve $\Pi(z_1, z_2) > 1 - \frac{1}{n}$ dir. Destek kümeleri kompakt olduğundan, $z_1 + z_2 = w$ ve $\Pi(z_1, z_2) \geq 1$ olacak biçimde $z_{1n_k} \longrightarrow z_1$ ve $z_{2n_k} \longrightarrow z_2$ altdizileri seçilebilir. Buradan da $i = 1,2$ için $z_i \in \widetilde{Z}_i^1$ ve $w \in \widetilde{S}^1$ olur.
b) Benzer şekilde ispatlanabilir. ■

Bu teorem bize $0 \leq \alpha < 1$ için $(\widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2)^\alpha = \widetilde{Z}_1^\alpha + \widetilde{Z}_2^\alpha$ ve $(\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2)^\alpha = \widetilde{Z}_1^\alpha.\widetilde{Z}_2^\alpha$ olduğunu söylüyor. Aynı şekilde çıkarma ve bölme işlemleri de $\alpha-$kesmeleri yardımıyla yapılabilir. Yani, $(\widetilde{Z}_1 - \widetilde{Z}_2)^\alpha = \widetilde{Z}_1^\alpha - \widetilde{Z}_2^\alpha$ ve $(\widetilde{Z}_1/\widetilde{Z}_2)^\alpha = \widetilde{Z}_1^\alpha.(\widetilde{Z}_2^{-1})^\alpha$ dir. $\widetilde{Z}$ karmaşık fuzzy sayısının konjugesi de, $z \longrightarrow \overline{z}$ dönüşümü sürekli olduğundan, karmaşık bir fuzzy sayıdır ve $(\widetilde{Z}^*)^\alpha = (\widetilde{Z}^\alpha)^*$ sağlanır.

Lemma 4.9 *$\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2$ veya $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2$ ise $\widetilde{W}^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$ aralığında açıktır.*

İspat. $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere, $w \in \widetilde{W}^\alpha$ olsun. Teorem 4.8'den $z_1 + z_2 = w$ olacak biçimde $(z_1, z_2) \in \widetilde{Z}_1^\alpha \times \widetilde{Z}_2^\alpha$ vardır. $\widetilde{Z}_2^\alpha$ açık olduğundan, $\widetilde{Z}_2^\alpha$'den z_2 merkezli ve ε yarıçaplı $0(z_2, \varepsilon)$ açık diski seçilebilir.$\widetilde{W}^\alpha = S^\alpha$ olduğundan, $z_1 + 0(z_2, \varepsilon)$, w'yi içeren ve tamamen $\widetilde{W}^\alpha$'nın içinde olan açık bir kümedir. Dolayısıyla, $\widetilde{W}^\alpha$ açıktır. Benzer şekilde, $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2$ ise $z_1.z_2 = w$ ve $z_1 + 0(z_2, \varepsilon)$ yerine $z_1.0(z_2, \varepsilon)$ yazılarak $\widetilde{W}^\alpha$'nın açık olduğu görülebilir. ■

Lemma 4.10 *$\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2$ veya $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2$ olsun. $[0, 1]$ aralığında $w_n \in \widetilde{W}^0$ w'ye, $\mu_{\widetilde{W}}(w_n)$ de λ'ya yakınsasın. Bu durumda, $\mu_{\widetilde{W}}(w) \geq \lambda$ olur.*

İspat. $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $z_{1n} \in \widetilde{Z}_1^0$ ve $z_{2n} \in \widetilde{Z}_2^0$ vardır. Böylece, $z_{1n} + z_{2n} = w_n$ ve

$$\mu_{\widetilde{W}}(w_n) \geq \Pi(z_{1n}, z_{2n}) > \mu_{\widetilde{W}}(w_n) - \varepsilon$$

dur. Bu durumda, her z_{1n}, her z_{2n} ve her w_n kompakt kümelere aittir ve altdizilerini seçebiliriz. Böylece, $z_{1n_k} \longrightarrow z_1$, $z_{2n_k} \longrightarrow z_2$, $w_{n_k} \longrightarrow w$ ve $z_1 + z_2 = w$ olur. Π sürekli olduğundan,

$$\lambda \geq \Pi(z_1, z_2) > \lambda - \varepsilon$$

dur. ε keyfi olduğundan $\lambda = \Pi(z_1, z_2)$ olduğu görülür. Buradan, $\lambda \leq \mu_{\widetilde{W}}(w)$ olur. $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2$ durumu da benzer şekilde ispatlanabilir. ■

Teorem 4.11 *$\widetilde{Z}_1$ ve $\widetilde{Z}_2$ karmaşık fuzzy sayılar ise $\widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2$, $\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2$, $\widetilde{Z}_1 - \widetilde{Z}_2$ ve $\widetilde{Z}_1/\widetilde{Z}_2$ karmaşık fuzzy sayılardır.*

İspat. a) Öncelikle $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2$ olsun.($w_n \longrightarrow w$ iken $\mu_{\widetilde{W}}(w_n)$'in $\mu_{\widetilde{W}}(w)$'ye yakınsama durumuna bakarak $\mu_{\widetilde{W}}(w)$'nin sürekliliğini gösterelim.)

$\mu_{\widetilde{W}}(w_n) \in [0, 1]$ olduğundan, λ'ya yakınsayan bir $\mu_{\widetilde{W}}(w_{n_k}) \in [0, 1]$ altdizisi vardır (Taylor 1965).

$$\liminf \mu_{\widetilde{W}}(w_n) \leq \lambda \leq \limsup \mu_{\widetilde{W}}(w_n)$$

olduğunu biliyoruz. Lemma 4.9'den $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\{w : \mu_{\widetilde{W}}(w) \leq t\}$ kümesi kapalıdır. Dolayısıyla, $\mu_{\widetilde{W}}(w)$ alttan yarı sürekli ve

$$\liminf \mu_{\widetilde{W}}(w_n) \geq \mu_{\widetilde{W}}(w)$$

dir. Lemma 4.10'den de $\mu_{\widetilde{W}}(w) \geq \lambda$ elde edilir. Böylece,

$$\liminf \mu_{\widetilde{W}}(w_n) = \lambda = \mu_{\widetilde{W}}(w)$$

olur. $\limsup \mu_{\widetilde{W}}(w_n)$'ye yakınsayan bir $\mu_{\widetilde{W}}(w_{n_j})$ altdizisi vardır(Taylor 1965). Lemma 4.10'den

$$\mu_{\widetilde{W}}(w) \geq \limsup \mu_{\widetilde{W}}(w_n)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\liminf \mu_{\widetilde{W}}(w_n) = \mu_{\widetilde{W}}(w) = \limsup \mu_{\widetilde{W}}(w_n)$$

dir. Buradan,

$$\lim \mu_{\widetilde{W}}(w_n) = \mu_{\widetilde{W}}(w)$$

olur ve $\mu_{\widetilde{W}}(w)$ süreklidir.

$\widetilde{Z}_1^\alpha$ ve $\widetilde{Z}_2^\alpha$ bağlantılı,arcwise bağlantılı ve basit bağlantılı olduğundan, $0 \leq \alpha \leq 1$ için $\widetilde{Z}_1^\alpha \times \widetilde{Z}_2^\alpha$ da bağlantılı, arcwise bağlantılı ve basit bağlantılıdır. S^α, $\widetilde{Z}_1^\alpha \times \widetilde{Z}_2^\alpha$'nın sürekli görüntüsü olduğundan $\widetilde{W}^\alpha = S^\alpha$ da bağlantılı, arcwise bağlantılı ve basit bağlantılıdır. Bu durumda, $\widetilde{W}$ karmaşık fuzzy sayıdır.
b) $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2$'nin ispatı da $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2$'nin ispatına benzerdir.
c) $\widetilde{Z}$ karmaşık fuzzy sayı ise $-\widetilde{Z}$ ve dolayısıyla, $\widetilde{Z}_1 - \widetilde{Z}_2$ karmaşık fuzzy sayıdır.
d) $z \neq 0$ olmak üzere, $z \longrightarrow z^{-1}$ dönüşümü süreklidir ve $(\widetilde{Z}^{-1})^\alpha = (\widetilde{Z}^\alpha)^{-1}$ 'dir. $\widetilde{Z}$ karmaşık fuzzy sayı ise $\widetilde{Z}^{-1}$ ve dolayısıyla $\widetilde{Z}_1/\widetilde{Z}_2$ de karmaşık fuzzy sayıdır. ■

Teorem 4.12 $0 \leq \alpha \leq 1$ *olmak üzere,* $|\widetilde{Z}|^\alpha = |\widetilde{Z}^\alpha|$*'dır.* $|\widetilde{Z}|$ *bir reel fuzzy sayıdır.*

İspat. (Buckley 1989) ■

Teorem 4.13 $\widetilde{Z}_1$ *ve* $\widetilde{Z}_2$ *karmaşık fuzzy sayılar olmak üzere,*
1) $|\widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2| \leq |\widetilde{Z}_1| + |\widetilde{Z}_2|$,
2) $|\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2| = |\widetilde{Z}_1|.|\widetilde{Z}_2|$,
3) $|\widetilde{Z}_1/\widetilde{Z}_2| = |\widetilde{Z}_1|/|\widetilde{Z}_2|$*'dir.*

İspat. 1) $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere, Teorem 4.8 ve Teorem 4.12'dan

$$\begin{aligned} |\widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2|^\alpha &= |(\widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2)^\alpha| = |\widetilde{Z}_1^\alpha + \widetilde{Z}_2^\alpha| \\ &= \Big\{ |z_1 + z_2| : z_i \in \widetilde{Z}_i^\alpha, i = 1,2 \Big\} \end{aligned}$$

olduğu görülür.Teorem 4.12 ve reel fuzzy sayıların sonuçlarından,

$$\begin{aligned} (|\widetilde{Z}_1| + |\widetilde{Z}_2|)^\alpha &= |\widetilde{Z}_1|^\alpha + |\widetilde{Z}_2|^\alpha = |\widetilde{Z}_1^\alpha| + |\widetilde{Z}_2^\alpha| \\ &= \Big\{ |z_1| + |z_2| : z_i \in \widetilde{Z}_i^\alpha, i = 1,2 \Big\} \end{aligned}$$

elde edilir. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ durumundan sonuca ulaşılır.
2) $|\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2|^\alpha = |(\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2)^\alpha| = |\widetilde{Z}_1^\alpha.\widetilde{Z}_2^\alpha| = \Big\{ |z_1.z_2| : z_i \in \widetilde{Z}_i^\alpha, i = 1,2 \Big\}$ ve
$(|\widetilde{Z}_1|.|\widetilde{Z}_2|)^\alpha = |\widetilde{Z}_1|^\alpha.|\widetilde{Z}_2|^\alpha = |\widetilde{Z}_1^\alpha|.|\widetilde{Z}_2^\alpha| = \Big\{ |z_1|.|z_2| : z_i \in \widetilde{Z}_i^\alpha, i = 1,2 \Big\}$.
Böylece, $|\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2|$'nin $\alpha-$kesmeleri, $|\widetilde{Z}_1|.|\widetilde{Z}_2|$'nin karşılık gelen $\alpha-$kesmelerine eşit

olur. Buradan da bu iki reel fuzzy sayı birbirine eşit olur.
3) $|\widetilde{Z}_1/\widetilde{Z}_2|^\alpha = |\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2^{-1}|^\alpha = |\widetilde{Z}_1^\alpha.(\widetilde{Z}_2^{-1})^\alpha| = |\widetilde{Z}_1^\alpha.(\widetilde{Z}_2^\alpha)^{-1}|$
$= \left\{|z_1/z_2| : z_i \in \widetilde{Z}_i^\alpha, i = 1,2\right\}$. Ayrıca,
$(|\widetilde{Z}_1|/|\widetilde{Z}_2|)^\alpha = [|\widetilde{Z}_1|.(|\widetilde{Z}_2|^{-1})]^\alpha = |\widetilde{Z}_1|^\alpha(|\widetilde{Z}_2|^{-1})^\alpha = |\widetilde{Z}_1^\alpha|.|\widetilde{Z}_2^\alpha|^{-1}$
$= \left\{|z_1|/|z_2| : z_i \in \widetilde{Z}_i^\alpha, i = 1,2\right\}$ yazabiliriz. Karşılık gelen $\alpha-$kesmeleri birbirine eşit olduğundan iki reel fuzzy sayı birbirine eşit olur. ∎

$\widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2$ ve $\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2$ genişleme prensibi ile tanımlandığından, toplama ve çarpma işlemleri reel fuzzy sayılara uygulandığında da aynı özellikler sağlanacaktır. Toplama işlemi, birleşmeli ve değişmelidir. Sıfır karmaşık sayısı toplamaya göre birim elemandır ve toplamaya göre ters eleman yoktur. Çarpma işlemi, birleşmeli ve değişmelidir. $1 + i0$ karmaşık sayısı çarpmaya göre birim elemandır ve çarpmaya göre ters eleman yoktur. Çarpmanın toplamaya dağılması, reel fuzzy sayılardaki gibi, karmaşık fuzzy sayının kullanımına bağlı olarak bazen doğru bazen de yanlış sonuçlar verebilir. Karmaşık fuzzy sayıların cebirindeki her mümkün çözümün doğruluğu ya da yanlışlığı tek tek incelenmelidir. Örnek olarak,

$$|\widetilde{Z}|^2 \neq \widetilde{Z}.\widetilde{Z}^*$$

dir. Çünkü sol taraftaki ifade reel fuzzy sayı fakat,sağdaki ifade karmaşık bir fuzzy sayıdır.

4.1.2. Dikdörtgensel karmaşık fuzzy sayılar

$\widetilde{X}$ ve $\widetilde{Y}$ fuzzy sayılarının üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_{\widetilde{X}}(x)$ ve $\mu_{\widetilde{Y}}(y)$ olmak üzere, $\widetilde{Z} = \widetilde{X} + i\widetilde{Y}$ üyelik fonksiyonu, $z = x + iy$ için,

$$\mu_{\widetilde{Z}}(z) = \min\left\{\mu_{\widetilde{X}}(x), \mu_{\widetilde{Y}}(y)\right\}$$

olan bir karmaşık fuzzy sayıdır.

Teorem 4.14 *$\widetilde{X}$ ve $\widetilde{Y}$ fuzzy sayılar ve $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere, $\widetilde{Z}^\alpha = \widetilde{X}^\alpha \times \widetilde{Y}^\alpha$'dır.*

İspat. $0 \leq \alpha < 1$ olsun.
$(\subseteq)$ $z \in \widetilde{Z}^\alpha$ alalım. $\min\left\{\mu_{\widetilde{X}}(x), \mu_{\widetilde{Y}}(y)\right\} > \alpha$ dır. Yani, $\mu_{\widetilde{X}}(x) > \alpha$ ve $\mu_{\widetilde{Y}}(y) > \alpha$ olur. Dolayısıyla, $z = x + iy$ olmak üzere $(x, y) \in \widetilde{X}^\alpha \times \widetilde{Y}^\alpha$'dır.
$(\supseteq)$ $(x, y) \in \widetilde{X}^\alpha \times \widetilde{Y}^\alpha$ olsun. Bu durumda, x ve y noktalarındaki üyelik fonksiyonlarının minimumu α'dan büyüktür. Yani, $z \in \widetilde{Z}^\alpha$ olur.
$\alpha = 1$ olsun. Eğer, $(x, y) \in \widetilde{X}^1 \times \widetilde{Y}^1$ ise $\mu_{\widetilde{Z}}(z) = 1$ olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla, $z \in \widetilde{Z}^1$ olur. Tersine, $z \in \widetilde{Z}^1$ olsun. O zaman, $z = x + iy$ ve $\mu_{\widetilde{X}}(x) = \mu_{\widetilde{Y}}(y) = 1$ olacak şekilde x ve y vardır. Böylece, $(x, y) \in \widetilde{X}^1 \times \widetilde{Y}^1$ olur. ∎

Bu teorem $\widetilde{Z}$'nin $\alpha-$kesmelerinin dikdörtgenler olduğunu ve bu tipteki $\widetilde{Z}$'lerin neden dikdörtgensel karmaşık fuzzy sayı adını aldığını söylüyor.

Teorem 4.15 *$\widetilde{Z}$ dikdörtgensel fuzzy karmaşık sayı olmak üzere,*
1) $\widetilde{Z}^* = \widetilde{X} + i(-\widetilde{Y})$.
2) $j = 1, 2$ *için* $\widetilde{Z}_j = \widetilde{X}_j + i\widetilde{Y}_j$ *ise* $\widetilde{Z}_1 \pm \widetilde{Z}_2 = (\widetilde{X}_1 \pm \widetilde{X}_2) + i(\widetilde{Y}_1 \pm \widetilde{Y}_2)$.
3) $0 \leq \alpha \leq 1$ *olmak üzere,* $(\widetilde{Z}_1 \pm \widetilde{Z}_2)^\alpha = (\widetilde{X}_1^\alpha \pm \widetilde{X}_2^\alpha) + i(\widetilde{Y}_1^\alpha \pm \widetilde{Y}_2^\alpha)$.
4) $0 \leq \alpha \leq 1$ *olmak üzere,* $|\widetilde{Z}|^\alpha = [(\widetilde{X}^\alpha)^2 + (\widetilde{Y}^\alpha)^2]^{1/2}$*'dir.*

İspat. 1) Karmaşık konjuge tanımından kolayca görülebilir.
2) $\widetilde{W} = \widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2$ olsun.

$$\mu_{\widetilde{W}}(w) = \sup\{\Pi(z_1, z_2) : z_1 + z_2 = w\}$$

dir. $i = 1, 2$ için $\mu_{\widetilde{X}_i}(x_i)$ ve $\mu_{\widetilde{Y}_i}(y_i)$ değerlerinin minimumunu $\Gamma(x_1, x_2, y_1, y_2)$ ile gösterelim. $x_1 + iy_1 = z_1$ ve $x_2 + iy_2 = z_2$ olduğunda,

$$\Gamma(x_1, x_2, y_1, y_2) = \Pi(z_1, z_2)$$

olur. $\widetilde{X} = \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2$ ve $\widetilde{Y} = \widetilde{Y}_1 + \widetilde{Y}_2$ olsun. Bu durumda,

$$\Pi(x_1, x_2) = \min\{\mu_{\widetilde{X}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{X}_2}(x_2)\}$$
$$\Pi(y_1, y_2) = \min\{\mu_{\widetilde{Y}_1}(y_1), \mu_{\widetilde{Y}_2}(y_2)\}$$

olmak üzere,

$$\mu_{\widetilde{X}}(x) = \sup\{\Pi(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = x\}$$
$$\mu_{\widetilde{Y}}(y) = \sup\{\Pi(y_1, y_2) : y_1 + y_2 = y\}$$

olur. $\widetilde{Z} = \widetilde{X} + i\widetilde{Y}$ olduğunda, $z = x + iy$ için

$$\min\{\mu_{\widetilde{X}}(x), \mu_{\widetilde{Y}}(y)\} = \mu_{\widetilde{Z}}(z)$$

olur. Öncelikle, $\mu_{\widetilde{W}}(w) \leq \mu_{\widetilde{Z}}(w)$ durumunu gösterelim. $w = x + iy$, $x_1 + x_2 = x$ ve $y_1 + y_2 = y$ olsun.

$$\Gamma(x_1, x_2, y_1, y_2) \leq \Pi(x_1, x_2) \text{ ve } \Gamma(x_1, x_2, y_1, y_2) \leq \Pi(y_1, y_2)$$

dir. Buradan,

$$\Gamma(x_1, x_2, y_1, y_2) \leq \mu_{\widetilde{X}}(x) \text{ ve } \Gamma(x_1, x_2, y_1, y_2) \leq \mu_{\widetilde{Y}}(y)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\Gamma(x_1, x_2, y_1, y_2) \leq \mu_{\widetilde{Z}}(w)$$

ve

$$\mu_{\widetilde{W}}(w) \leq \mu_{\widetilde{Z}}(w)$$

olur. $\mu_{\widetilde{Z}}(w) \leq \mu_{\widetilde{W}}(w)$ durumunu gösterelim. $w = x + iy$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists x_i^*, y_i^*$ öyle ki, $i = 1, 2$ için $x = x_1^* + x_2^*$, $y = y_1^* + y_2^*$ ve

$$\Pi(x_1^*, x_2^*) > \mu_{\widetilde{X}}(x) - \varepsilon,$$
$$\Pi(y_1^*, y_2^*) > \mu_{\widetilde{Y}}(y) - \varepsilon$$

dur.

$$\Gamma(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) > \mu_{\widetilde{Z}}(w) - \varepsilon$$

ve buradan

$$\mu_{\widetilde{W}}(w) > \mu_{\widetilde{Z}}(w) - \varepsilon$$

olur. ε keyfi seçildiğinden $\mu_{\widetilde{W}}(w) > \mu_{\widetilde{Z}}(w)$ olur. İki eşitsizlikten

$$\mu_{\widetilde{W}}(w) = \mu_{\widetilde{Z}}(w)$$

elde edilir.
3) Teorem 4.8 ve Teorem 4.14 yardımıyla yapılabilir.
4) $|\widetilde{Z}|^\alpha = |\widetilde{Z}^\alpha| = \left\{(x^2+y^2)^{1/2} : x \in \widetilde{X}^\alpha, y \in \widetilde{Y}^\alpha\right\} = [(\widetilde{X}^\alpha)^2 + (\widetilde{Y}^\alpha)^2]^{1/2}$'dir. ■

Dikdörtgensel karmaşık fuzzy sayılarda çarpma işlemi bu şekilde güzel sonuçlar vermiyor. Çünkü $(\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2)^\alpha$ dikdörtgensel değildir. Dolayısıyla, $j = 1, 2$ için $\widetilde{Z}_j = \widetilde{X}_j + i\widetilde{Y}_j$ olduğunda,

$$\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2 \neq (\widetilde{X}_1\widetilde{X}_2 - \widetilde{Y}_1\widetilde{Y}_2) + i(\widetilde{X}_1\widetilde{Y}_2 + \widetilde{X}_2\widetilde{Y}_1)$$

dir. Çünkü,sağ taraftaki ifade dikdörtgensel karmaşık fuzzy sayıdır. Yine de, $(\widetilde{X}_1\widetilde{X}_2 - \widetilde{Y}_1\widetilde{Y}_2) + i(\widetilde{X}_1\widetilde{Y}_2 + \widetilde{X}_2\widetilde{Y}_1)$ dikdörtgensel karmaşık fuzzy sayısının $\alpha-$kesmeleri $\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2$'nin $\alpha-$kesmelerini kapsar.

4.1.3. Polar formda karmaşık fuzzy sayılar

$\widetilde{R} \geq 0$ ve $\widetilde{\theta}$ reel fuzzy sayılar olmak üzere, *diamsupp*$(\widetilde{\theta}) < 2\pi$'dir. $\widetilde{Z} = \widetilde{R}.\exp(i\widetilde{\theta})$, $z = r.e^{i\theta}$ olmak üzere, üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\widetilde{Z}}(z) = \min\left\{\mu_{\widetilde{R}}(r), \mu_{\widetilde{\theta}}(\theta)\right\}$$

olan karmaşık bir fuzzy sayıdır. Bu formdaki karmaşık fuzzy sayıların cebirsel işlemleri $\alpha-$kesmeleri yardımıyla tanımlanmıştır (Kaufmann and Gupta,1985).

Teorem 4.16 $0 \leq \alpha \leq 1$ *olmak üzere,* $\widetilde{Z}^\alpha = \widetilde{R}^\alpha.\exp(i\widetilde{\theta}^\alpha)$*'dır.*

İspat. $\widetilde{R}^\alpha.\exp(i\widetilde{\theta}^\alpha) = \left\{r.e^{i\theta} : r \in \widetilde{R}^\alpha, \theta \in \widetilde{\theta}^\alpha\right\}$ alındığı zaman Teorem 4.14'deki ispata bezer şekilde yapılabilir. ■

Dikkat edilirse $\widetilde{Z}^\alpha$, $\mathbb{C}$'nin konveks bir altkümesi değildir. Bu sebeple Tanım 4.7'de $\widetilde{Z}$'nin $\alpha-$kesmelerinin konveks olma şartı aranmamıştır.

Teorem 4.17 $\widetilde{Z}_j$ *polar formda bir fuzzy karmaşık sayı olsun.*
1) $j = 1, 2$ *için* $\widetilde{Z}_j = \widetilde{R}_j.\exp(i\widetilde{\theta}_j)$ *olmak üzere,*
(a) $\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2 = \widetilde{R}_1.\widetilde{R}_2\exp(i[\widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_2])$,
(b) $|\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2| = \widetilde{R}_1.\widetilde{R}_2$,
(c) $\widetilde{Z}_1/\widetilde{Z}_2 = \widetilde{R}_1.\widetilde{R}_2^{-1}\exp(i[\widetilde{\theta}_1 - \widetilde{\theta}_2])$.

2) $\widetilde{Z}^* = \widetilde{R}.\exp(i[-\widetilde{\theta}])$.
3) $|\widetilde{Z}| = \widetilde{R}$.
4) $\widetilde{Z}^{-1} = \widetilde{R}^{-1}\exp(i[-\widetilde{\theta}])$.
5) $0 \leq \alpha \leq 1$ *olmak üzere,* $(\widetilde{Z}_1.\widetilde{Z}_2)^\alpha = \widetilde{R}_1^\alpha.\widetilde{R}_2^\alpha \exp(i[\widetilde{\theta}_1^\alpha + \widetilde{\theta}_2^\alpha])$ *dir.*

İspat. 1) (a) Teorem 4.15'daki 1. maddenin ispatına benzer şekilde yapılır.
3) $|\widetilde{Z}| = \widetilde{R}$ olduğunu gösterdikten sonra 1b'nin ispatına döneceğiz.

$$\mu_{|\widetilde{Z}|}(r) = \sup\left\{\mu_{\widetilde{Z}}(z) : |z| = r\right\}$$

ve

$$\mu_{\widetilde{Z}}(z) = \min\left\{\mu_{\widetilde{R}}(r), \mu_{\widetilde{\theta}}(\theta)\right\}$$

dır. Reel veya karmaşık tüm fuzzy sayılar normal olduğundan θ'yı $\mu_{\widetilde{\theta}}(\theta) = 1$ olacak şekilde seçersek ve $\mu_{|\widetilde{Z}|}(r) = \mu_{\widetilde{R}}(r)$ olur.
(b) 1a ve 3. maddeler yardımıyla yapılır.
4) $\mu_{\widetilde{Z}^{-1}}(z) = \mu_{\widetilde{Z}}(z^{-1})$ ve $z = r.e^{i\theta}$ iken $z^{-1} = r^{-1}.e^{-i\theta}$'dır. Buradan sonuç kolayca bulunur.
(c) 1a ve 4. maddeler yardımıyla yapılır.
2) $\mu_{\widetilde{Z}^*}(z) = \mu_{\widetilde{Z}}(\overline{z})$ ve $z = r.e^{i\theta}$ iken $\overline{z} = r.e^{-i\theta}$'dır. Buradan sonuç bulunur.
5) Teorem 4.16 ve 1a'dan elde edilir. ■

Karmaşık fuzzy sayıların polar formda gösteriminde toplama ve çıkarmada sonuçlar bu kadar güzel değildir. Dahası,

$$\widetilde{R}.\exp(i\widetilde{\theta}) \neq \widetilde{R}.\cos\widetilde{\theta} + i\widetilde{R}.\sin\widetilde{\theta}$$

Çünkü, $\widetilde{R}.\cos\widetilde{\theta} + i\widetilde{R}.\sin\widetilde{\theta}$ dikdörtgensel karmaşık fuzzy sayıdır.

5. KAYNAKLAR

BOCHE, R. 1966. Complex Interval Arithmetic With Some Applications. (yayınlanmamış), California.

BUCKLEY,J.J. 1989. Fuzzy Complex Numbers Fuzzy Sets and Systems, 33: 333-345.

CANDAU, Y., RAISSI, T., RAMDANI, N. and IBOS, L. 2005. Complex Interval Arithmetic Using Polar Form. Journal of Process Control, 12 (5): 537-545

ÇAĞMAN, N. 2006. Bulanık Mantık. Bilim ve Teknik, 463: 50-51.

DUBOIS, D. and PRADE, H. 1978. Operations on Fuzzy Numbers. International Journal of Systems Science, 9 (6): 613-626

DUBOIS, D. and PRADE, H. 1980. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application, Academic Press, New York, 393 p.

GOETSCHEL, R. and VOKSMAN, W. 1983. Topological Properties of Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and Systems, 10: 87-99.

GOETSCHEL, R. and VOKSMAN, W. 1986. Elementary Fuzzy Calculus, Fuzzy Sets and Systems, 18: 31-43.

HANS, M. 2005. Applied Fuzzy Arithmetic, Springer, Berlin, 407 p.

KAUFMANN, A. and GUPTA, M. 1985. Introduction to Fuzzy Arithmetic, Theory and Applications, New York, 351 p.

KLATTE, R. and ULLRICH C. 1980. Complex Sector Arithmetic, Computing 24: 139-148.

LAI, Y.J. and HWANG, C.L. 1992. Fuzzy Mathematical Programming, Springer-Verlag, Germany, 301 p.

MOORE, R.E. 1979. Methods and Applications of Interval Analysis, SIAM, Philadelphia, 190 p.

ZADEH, L.A. 1965. Fuzzy Sets, Information and Control, 8: 338-353.

ZIMMERMANN, H.J. 2001. Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer, London, 476 p.

ÖZGEÇMİŞ

Sümeyra İNCİ, 1986 yılında Karaman'ın Ermenek ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini, Kocaeli'nin Gölcük ilçesinde tamamladı. 2005 yılında girdiği Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik (İngilizce) Bölümü'nden 2010 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 2010'da Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.