T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HECKE TİPİ OPERATÖRLER VE UYGULAMALARI

Aykut Ahmet AYGÜNEŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2012

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HECKE TİPİ OPERATÖRLER VE UYGULAMALARI

Aykut Ahmet AYGÜNEŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../ .../ 2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz Şimşek (Danışman)..........................

Prof. Dr. Veli Kurt...

Prof. Dr. İ. Naci Cangül..

Prof. Dr. A. Sinan Çevik..

Doç. Dr. Mustafa Alkan..

ÖZET

HECKE TİPİ OPERATÖRLER VE UYGULAMALARI

Aykut Ahmet AYGÜNEŞ

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Yılmaz Şimşek
Kasım 2012, 91 Sayfa

Bu çalışmada, kısmi Hecke operatörleri ve bu operatörlere bağlı kısmi Hecke tipi operatörler tanımlanmıştır. Bu operatörlerin bazı uygulamaları verilmiştir. Kısmi Hecke operatörlerine karşılık gelen matrisler verilmiştir. Özel olarak Bernoulli ve Euler polinomlarını içeren iki matris temsili verilmiştir. Kısmi Hecke operatörleri ve genelleştirilmiş kısmi Hecke operatörleri, sırasıyla, Genocchi tipi polinomlara ve genelleştirilmiş Euler tipi polinomlara uygulanarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. T_p ile gösterilen Hecke tipi operatörleri, matematikte çok önemli yer tutan özel fonksiyonlara uygulanmıştır.

ANAHTAR KELiMELER: Genelleştirilmiş Bernoulli-Euler tipi polinomu, Hecke operatörleri, Kısmi Hecke operatörleri, Özel fonksiyonlar, Üreteç fonksiyonları

JÜRİ:

Prof. Dr. Yılmaz Şimşek (Danışman)

Prof. Dr. Veli Kurt

Prof. Dr. İ. Naci Cangül

Prof. Dr. A. Sinan Çevik

Doç. Dr. Mustafa Alkan

ABSTRACT

HECKE TYPE OPERATORS AND THEIR APPLICATIONS

Aykut Ahmet AYGÜNEŞ

Ph. D. in Mathematics
Adviser : Prof. Dr. Yılmaz Şimşek
November 2012, 91 Pages

In this study, partial Hecke operators are defined. By using these operators, partial Hecke type operators are obtained. Many applications of these operators are given. The matrices corresponding to the partial Hecke operators are represented, which contain the Bernoulli and Euler polynomials. Some identities and relations related to Genocchi type polynomials and generalized Euler type polynomials under the partial Hecke operators and generalized partial Hecke operators, respectively. Also Hecke type operators T_p are applied to the special functions, which have an essential role in Mathematics.

KEYWORDS : Generalized Bernoulli-Euler type polynomial,
Generating functions, Hecke operators,
Partial Hecke operators, Special functions

COMMITTEE:

Prof. Dr. Yılmaz Şimşek (Supervisor)

Prof. Dr. Veli Kurt

Prof. Dr. İ. Naci Cangül

Prof. Dr. A. Sinan Çevik

Doç. Dr. Mustafa Alkan

ÖNSÖZ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş kısmında Hecke tipi operatörlerle ilgili daha önce yapılan çalışmalar hakkında bilgiler, bazı kaynaklardan alıntılar yapılarak, verilmiştir.

İkinci bölümde temel kavramlar ve lineer dönüşümler cebiriyle ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir. Modüler formlar, Hecke operatörleri, Weierstrass $\wp$- fonksiyonu, Bernoulli ve Euler polinomları gibi bazı kavramlar hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde, kısmi Hecke operatörleri tanımlanıp bu operatörlerle ilgili bazı özellikler verildikten sonra, bu operatörlere karşılık gelen bazı özel matrisler, Bernoulli polinomları ve Euler polinomları cinsiden verilmiştir. Kısmi Hecke operatörleri yardımıyla tanımlanan kısmi Hecke tipi operatörleri için özdeğerler Hurwitz zeta fonksiyonunu içermektedir. Aynı zamanda kısmi Hecke tipi operatörlerine karşılık gelen özdeğerler ise kısmi zeta fonksiyonunu, Bernoulli sayılarını ve Euler sayılarını içermektedir. Ayrıca Genocchi tipi polinomlar tanımlanarak bu polinomların kısmi Hecke operatörleri altında birer özfonksiyon olduğu gösterilmiştir. Ek olarak bu polinomların üreteç fonksiyonu elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş Euler tipi polinomların genelleştirilmiş kısmi Hecke operatörleri altında birer özfonksiyon oldukları gösterilmiştir ve bu polinomların üreteç fonksiyonu elde edilmiştir. Genelleştirilmiş kısmi Hecke operatörleri için genelleştirilmiş Euler tipi polinomlara karşılık gelen özdeğerler ise Hurwitz zeta ve kısmi zeta fonksiyonunu içermektedir.

Beşinci bölümde ise, Hecke tipi operatörler altında Weierstrass tipi fonksiyonların, genelleştirilmiş Dedekind eta fonksiyonunun, Weierstrass σ- fonksiyonun, Weber ve Weber tipi fonksiyonların davranışları incelenmiştir.

Bu tezin oluşmasında bana katkısını esirgemeyen, beni çalışmaya özendiren ve yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Yılmaz Şimşek'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{H}$	Üst yarı düzlem
$T_{\chi_{a,N}}$	Kısmi Hecke operatörü
T_N	Kısmi Hecke tipi operatörü
$T_{\chi_{a,N(M)}}$	Genelleştirilmiş kısmi Hecke operatörü
$T_{N(M)}$	Genelleştirilmiş kısmi Hecke tipi operatörü
$P_{n,N}(x)$	Bernoulli-Euler tipi polinomlar
$P_{n,N(M)}$	Genelleştirilmiş Euler tipi sayılar
$P_{n,N(M)}(x)$	Genelleştirilmiş Euler tipi polinomlar
$\mathcal{G}_{n,N}(x)$	Genocchi tipi polinomlar
M_k	k ağırlıklı modüler formlar uzayı
$M_{\beta_m}(T_{\chi_{a,N}})$	β_m tabanına göre $T_{\chi_{a,N}}$ operatörüne karşılık gelen matris
Γ	Modüler grup
$\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$	Weber fonksiyonları
$\wp_{2n}$	Weierstrass tipi fonksiyonlar
$\eta_{g,h}(z;N)$	Genelleştirilmiş Dedekind eta fonksiyonu
$\sigma(z)$	Weierstrass σ-fonksiyonu
$Y_{1,g,h}(z,N)$	Birinci Weber tipi fonksiyonu
$Y_{2,g,h}(z,N)$	İkinci Weber tipi fonksiyonu
$Y_{g,h}(z,N)$	Üçüncü Weber tipi fonksiyonu

1. GİRİŞ

Hecke operatörleri, modüler formlar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu operatörde adı geçen Erich Hecke'nin en önemli çalışmaları, Hecke operatörlerinin cebirsel özelliklerini ve bu operatörlerle ilişkili Euler çarpımlarının özelliklerini keşfetmesiyle, 1936 yılında gerçekleşmiştir (Schoeneberg 1970-1990). Modüler formlar üzerine birçok ünlü matematikçinin (Leonhard Euler, Carl Gustav Jacob Jacobi, Srinivasa Ramanujan, Erich Hecke, v.s.) çalışmaları bulunmaktadır.

Modüler formlar ve özel bir modüler form tipi olan cusp (zirve ya da uç) formlar, Hecke operatörleri altında invaryant kalırlar; yani bir vektör uzayı olan modüler formlar uzayından seçilen herhangi bir fonksiyona Hecke operatörü uygulandığında elde edilen fonksiyon yine modüler formlar uzayının bir elemanı olacaktır. Hecke operatörleri, sadece karmaşık analizin önemli ve geniş bir dalı olan modüler formlar teorisinde değil, aynı zamanda p-adik analiz ve cebir gibi alanlarda da kullanılmaktadır. k herhangi bir tek sayı olmak üzere, $k/2$ ağırlıklı modüler formların geometrik olarak inşaasında p-adik modüler formlardan yararlanılır (Ramsey 2004) ve p-adik modüler formlar uzayında kullanışlı olan ve iyi sonuçlar veren Hecke operatörleri de tanımlanmıştır. Hecke ve Hecke tipi operatörleri diferensiyel denklemler teorisinde de uygulanmaktadır. Örneğin, lineer düzgün diferensiyel denklemler üzerindeki Hecke operatörlerinin özellikleri Min Ho Lee tarafından incelenmiştir (Lee 1996, 1999). Aynı zamanda bu operatörlerin herhangi bir asal sayının kuvvetleri üzerindeki matris gösterimleri Miyawaki'nin çalışmasında görülmektedir (Miyawaki 1992). Hala Hajj Shehadeh, Samar Jaafar ve Kamal Khuri- Makdisi, Hecke operatörlerinin, üreteç fonksiyonunu elde etmişlerdir (Shehadeh, Jaafar ve Makdisi 2006). Bu üreteç fonksiyonundan faydalanarak Hecke operatörlerinin özelliklerini incelemek ve yeni bağıntılar elde etmek mümkündür.

Theta fonksiyonları ve Eisenstein serileri gibi iyi bilinen bazı modüler formlara Hecke operatörlerini uygulamak mümkündür. Bu konuyla ilgili bir çalışma Y. Şimşek ve M. Açıkgöz tarafından yapılmıştır (Şimşek ve Açıkgöz 2005). Bunun yanı sıra, M. I. Knopp Hecke tipi operatörler altında klasik Dedekind eta fonksiyonunun logaritmasının davranışını incelemiştir ve Hecke tipi operatörler altında Dedekind toplamının özdeğerlerini elde etmiştir (Knopp 1980). Goldberg'in tezinde, klasik Hecke operatöründen ve Knopp'un tanımladığı Hecke operatöründen farklı şekilde bir Hecke tipi operatör tanımlayarak theta fonksiyonunun logaritmasının bu operatörler altındaki davranışı incelenmiştir (Goldberg 1975). L. A. Parson ve K. H. Rosen'in çalışmasında, Knopp tarafından verilen Hecke tipi operatörlerin Lambert serilerine etkisi incelenmiştir (Parson ve Rosen 1981). Bu tezde ise, Knopp'un tanımladığı gibi Hecke tipi operatörleri, matematikte ve matematiğin uygulamalarında oldukça önemli olan bazı özel fonksiyonlara uygulanacaktır.

Klasik Hecke operatörü, M_k ile gösterilen k ağırlıklı modüler formlar üzerinde tanımlanır (Apostol 1976) ve bu operatörlerin M_k üzerindeki cebirsel özellikleri günümüz matematikçileri tarafından halen incelenmektedir. Kısmi Hecke operatörleri ve kısmi Hecke tipi operatörleri ise vektör uzayı özelliğini sağlayan herhangi bir fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlanacaktır. Örneğin, n herhangi bir doğal sayı olmak üzere, derecesi en çok n olan polinomların oluşturduğu uzay bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayının bir elemanı olarak Bernoulli ya da Euler polinomları seçilerek ve bu polinomlarla ilgili Raabe bağıntısından yararlanarak, kısmi Hecke operatörlerinin bu polinomlar üzerinde özdeğere ve özfonksiyonlara sahip olduğu görülür. Bu tezde ise, klasik Bernoulli ve Euler polinomlarını kapsayan genelleştirilmiş özel polinomlar üzerinde kısmi Hecke operatörleri ve dolayısıyla genelleştirilmiş Raabe bağıntıları tanımlanarak özdeğer ve özfonksiyonlar incelenecektir. Hatta, özel polinomların üreteç fonksiyonu bulunacaktır.

W. Stein ,P. E. Gunnells'le birlikte, Miller tabanı aracılığıyla klasik Hecke operatörlerine karşılık gelen matrislerin bulunması ve bu matrislerin karakteristik polinomlarının elde edilmesiyle ilgili bazı uygulamalar verilmiştir (Stein ve Gunnells 1974). Bu tezde ise, Hecke tipi operatörlerine karşılık gelen matrisler incelenecektir. m 1'den büyük herhangi bir doğal sayı olmak üzere, $\{1, x, x^2, \cdots, x^m\}$ ile verilen taban üzerindeki kısmi Hecke operatörlerinden elde edilen sonuçlardan ve kısmi Hecke operatörlerinin değişme özelliğinden faydalanılarak, bazı özel polinomların kısmi Hecke operatörlerinin birer özfonksiyonları olduğu sonucuna varılacaktır.

Hecke ve Hecke tipi operatörleri, bazı matematikçiler tarafından farklı biçimlerde tanımlanmıştır. Klasik Hecke operatörleri ilk olarak Hecke tarafından keşfedilmiştir (Hecke 1983). Daha sonra J. S. Milne, T. Miyake tarafından Hecke'nin tanımından farklı şekilde tanımlar verilmiştir (Milne 1990, Miyake 1989).

K. Harada tarafından, genelleştirilmiş permütasyonlar aracılığıyla $\eta_{\{\pi\}}$ fonksiyonu tanımlanmıştır ve bu fonksiyonun özellikleri incelenmiştir (Harada 2010). Bu fonksiyonun Hecke tipi operatörler altındaki davranışlarını incelemek mümkün olabilir.

Son zamanlarda Hecke operatörlerinin birçok alanda uygulandığı görülmektedir. Bu alanlardan bazıları aşağıdaki gibi sıralanır:

Juan B. Gil ve Sinai Robins tarafından aşağıda verilen f rasyonel fonksiyonları üzerinde Hecke operatörleri tanımlanarak bu rasyonel fonksiyonların katsayıları incelenmiştir (Gil ve Robins 2003):

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (a_0 = 0)$$

ile verilen f rasyonel fonksiyonu,

$$U_p f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{np} x^n, \qquad \left(p \in \mathbb{Z}^+\right)$$

ile tanımlanan U_p operatörünün bir özfonksiyonu ve bu özfonksiyona karşılık gelen özdeğer ise $\lambda_n \neq 0$ olsun. Burada

$$B(x) = \prod_{j=1}^{d} (1 - \gamma_j x)$$

olsun. O zaman d'yi bölen bir κ tamsayısı ve bir L tamsayısı vardır öyle ki $\forall n \geq 0$ için

$$a_n = n^{\kappa-1} \sum_{j=1}^{\frac{d}{\kappa}} C_j e^{\frac{2\pi i l_j}{L} n}$$

şeklindedir. Burada f'nin tüm kutupları $\gamma_j = e^{\frac{2\pi i l_j}{L}}$ $(l_j \in \mathbb{N})$ ile verilir ve

$$C_j \in \mathbb{C}$$

dir. L sayısına da f fonksiyonunun seviyesi denir.

Gabriele Nebe tarafından kodlama teorisinde, Kneser- Hecke- operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Nebe 2006):

$0 \leq k \leq n$ için

$$\dim(C \cap D) = \dim(C) - k$$

özelliğini sağlayan $C, D \in \mathcal{F}$ kodları, k-komşuluk olarak tanımlanır.

$$C \sim_k D$$

olarak gösterilsin. $\mathcal{V}$ ise $\mathcal{F}$ 'nin elemanlarının oluşturduğu tüm denklik sınıflarının kümesi üzerinde bir $\mathbb{C}$-vektör uzayı olsun. $[C]$ ve $[D]$ denklik sınıfları ise, $\mathcal{V}$ üzerinde

$$T_k([C]) = \sum_{D \sim_k C} [D]$$

ile tanımlanan T_k lineer operatörüne $\mathcal{F}$ için k-nıncı Ksener-Hecke operatörü denir. Burada $[C] = \{C : D \sim_k C\}$ ile verilir.

Tobias Mühlenbruch tarafından kongrüans modüler altgruplar altında periyot fonksiyonları için Hecke operatörleri incelenmiştir (Mühlenbruch 2006). Burada periyot fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\psi : (0, \infty) \to \mathbb{C}^{\mu},$$

ve

$$\psi = (\psi_i)_{i \in \{1,...,\mu\}}$$

olsun. $\Gamma_0(n)$ kongrüans modüler altgrubu için periyot fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $\forall i \in \{1, ..., \mu\}$ için ψ_i, $(0, \infty)$ aralığında analitiktir.

(ii)

$$\psi(z) = \rho(T^{-1})\psi(z+1) + (z+1)^{-2s}\rho(T'^{-1})\psi(\frac{z}{z+1}).$$

Burada $s \in \mathbb{C}$ ve

$$\rho : \Gamma(1) \to \mathbb{C}^{\mu \times \mu}$$

dır.

(iii) $\forall i \in \{1, ..., \mu\}$ için ψ_i aşağıdaki özelliği sağlar:

$$\psi_i(z) = \begin{cases} O(z^{\max\{0, -2\operatorname{Re}(s)\}}), & z \downarrow 0 \\ O(z^{\min\{0, -2\operatorname{Re}(s)\}}), & z \to \infty \end{cases}$$

dir.

Eiichi Bannai, Koji Kojima ve Tsuyoshi Miezaki tarafından, $g \in \mathbb{M}$ (Monster grubu) için $\chi_i(g)$ bir karakter olmak üzere

$$T_g(z) = \frac{1}{q} + \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i(g) q^i, \qquad \left(q = e^{2\pi i z}\right)$$

şeklinde $T_g(z)$ McKay-Thompson serisi tanımlanmıştır ve bu seriye bağlı olarak, $\hat{T}$ Hecke operatörü için

$$T_g(z) \mid \hat{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{\substack{ad=n \\ 0\leq b<d}} T_m^{(a)} \left(\frac{az+b}{d} \right) = \frac{1}{n} P_n(T_g(z))$$

şeklinde Hecke tipi Faber polinomları tanımlanarak bu polinomların sıfırları incelenmiştir (Bannai, Kojima ve Miezaki 2006).

Lynne H. Walling tarafından Siegel theta serileri üzerinde Hecke operatörlerinin etkisi incelenmiştir (Walling 2007).

Suzanne Caulk ve Lynne H. Walling tarafından Hilbert-Siegel modüler formlar üzerinde Hecke operatörlerinin değerleri araştırılmıştır (Caulk ve Walling 2007).

Roelof W. Bruggeman, Roberto J. Miatello tarafından Hilbert modüler gruplar üzerinde Hecke operatörlerinin özdeğerleri incelenmiştir (Bruggeman ve Miatello 2009).

2010 yılında Victor H. Moll, Sinai Robins ve Kirk Soodhalter tarafından U_n lineer operatörü

$$(U_n f)(x) = \sum c_{nk} x^k$$

şeklinde tanımlanmıştır. Buradan $n \mid j$, $n, j \in \mathbb{N}$ ve $p = q + 1$ için,

$$U_n(x^j {}_pF_q(a, b, x)) = x^{\frac{j}{n}} {}_{np}F_{np-1}(c, d, x)$$

bağıntısı kullanılarak hipergeometrik fonksiyonların Hecke operatörleri altındaki değerleri araştırılmıştır (Moll, Robins ve Soodhalter 2010). Burada ${}_pF_q(a, b, x)$ hipergeometrik fonksiyonu

$${}_pF_q(a, b, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!}$$

ile tanımlanır. Burada

$$c_{in+l} = \frac{a_{i+1} + l - 1}{n}, \quad 0 \leq i \leq p-1, 1 \leq l \leq n$$

ve

$$d_{in+l} = \frac{b_{i+1} + l - 1}{n}, \quad 0 \leq i \leq q, 1 \leq l \leq n$$

dir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Lineer Dönüşümler Cebiri

Bu bölümde lineer dönüşümler ve bunların bazı özellikleri verilecektir. Bu dönüşümler Hecke tipi operatörler için kullanılacaktır. Aşağıdaki sonuçlar Kolman ve Hill tarafından alınmış olup herhangi bir lineer cebir kitabında da yer alan sonuçlardır (Kolman ve Hill 2000).

Teorem 2.1.1. V ve W iki vektör uzayı olsun.

$$L : V \to W$$

bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda $L(V)$, W'nun bir altuzayıdır.

Teorem 2.1.2. $L : V \to W$, n boyutlu bir V vektör uzayından m boyutlu W vektör uzayına bir lineer dönüşüm olsun ($n \neq 0$, $m \neq 0$). $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ve $T = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ de V ve W uzaylarının, sırasıyla, sıralı bazları olsun. O zaman $m \times n$ tipindeki A matrisinin j-inci sütunu T'ye göre $L(v_j)$'nin $[L(v_j)]_T$ koordinat vektörü

$$\forall x \in V \quad \text{için} \quad [L(x)]_T = A[x]_S$$

özelliğine sahiptir. Ayrıca, A bu özelliğe sahip olan tek matristir.

Tanım 2.1.1. V, n boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere bir $L : V \to V$ lineer dönüşümü verilsin. $x \in V$, $x \neq 0$ olmak üzere

$$L(x) = \lambda x$$

eşitliğini sağlayan λ reel sayısına L'nin bir özdeğeri denir. x vektörüne de L'nin λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir. Özvektör yerine karakteristik vektör kavramı da kullanılır.

Tanım 2.1.2. A, $n \times n$ tipinde bir matris olsun. O zaman, $\lambda I_n - A$ matrisinin determinantına A'nın karakteristik polinomu, ayrıca

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$$

denklemine de A'nın karakteristik denklemi denir.

Teorem 2.1.3. A, $n \times n$ tipinde bir matris olsun. A'nın özdeğerleri karakteristik polinomunun kökleridir.

Tanım 2.1.3. $i \neq j$ için, $a_{ij} = 0$ ise $n \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ matrisine köşegen matris denir.

Tanım 2.1.4. n boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde bir $L : V \to V$ lineer dönüşümü verilsin. Eğer V'nin bir S bazına göre L'yi temsil eden bir D köşegen matris varsa, L'ye köşegenleştirilebilir veya köşegenleşebilir matris denir.

Teorem 2.1.4. Eğer $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin karakteristik polinomunun kökleri reel ve hepsi birbirinden farklı ise A matrisi köşegenleştirilebilirdir.

Tanım 2.1.5. F bir cisim olsun.

$$F[x] = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n : n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in F\}$$

ile tanımlanan $F[x]$ kümesine polinomlar halkası denir. $p(x) \in F[x]$ için p'nin derecesi $d(p(x))$ olarak gösterilir.

$$\begin{cases} p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \in F[x] \\ q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_m x^m \in F[x] \end{cases}$$

olsun.

(i)

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow n = m$$

ve her $i = 1, \cdots, n$ için $\alpha_i = \beta_i$,

(ii)

$$p(x) + q(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_n x^n$$

öyle ki $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$ $(i = 1, \cdots, n)$,

(iii) $\delta_j = \alpha_0\beta_j + \alpha_1\beta_{j-1} + \cdots + \alpha_j\beta_0$ için,

$$p(x)q(x) = \delta_0 + \delta_1 x + \cdots + \delta_{n+m} x^{n+m}$$

dir.

Tanım 2.1.6. (Cangül 1994, 1998, 2004) $n \times n$ boyutlu bir A matrisinin F cismi üzerindeki μ_A minimal polinomu, F cismi üzerinde $P(A) = 0$ olacak şekildeki birim başkatsayılı ve en düşük dereceli P polinomudur. $Q(A) = 0$ olacak şekildeki bir başka Q polinomu μ_A polinomunun bir polinom katıdır.

2.2. Modüler Formlar

Hecke operatörleri, modüler formlarla yakından ilgili olduğundan, bu bölümde modüler formlarla ilgili bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1. (Apostol 1976, Knopp 1970)

$$f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

olsun. $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ile tanımlanan f fonksiyonuna kesirli doğrusal dönüşüm (Möbiüs dönüşümü) denir.

$$M = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ ve } ad - bc \neq 0 \right\}$$

ile tanımlanan M kümesi bileşke işlemi ile birlikte bir gruptur.

Tanım 2.2.2. (Apostol 1976) $ad - bc = 1$ olacak biçimdeki $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ için

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

ile tanımlanan tüm Möbiüs dönüşümlerinin kümesine modüler grup denir. Modüler grubu Γ ile göstereceğiz.

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ ve } ad - bc = 1 \right\}$$

ile verilen Γ, Möbiüs dönüşümlerinin grubunun bir alt grubudur.

$$A \in \Gamma \Longleftrightarrow Az = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}$$

dir.

Tanım 2.2.3. (Knopp 1970, Katok 1992) $SL_2(\mathbb{R})$'nin ayrık bir alt grubuna Fuchsian grup adı verilir.

Γ modüler grubunun bazı alt grupları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{n} \right\},$$

$$\Gamma_1(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) : a \equiv d \equiv 1 \pmod{n} \right\},$$

ve

$$\Gamma(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(n) : c \equiv b \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

dır.

$\Gamma(n)$ altgrubuna, Γ grubunun n-ninci seviyeden temel kongrüans alt grup denir ve burada

$$\Gamma(n) \leq \Gamma_1(n) \leq \Gamma_0(n) \leq \Gamma$$

dır (Apostol 1976, Kohnen 2008).

Tanım 2.2.4. (Apostol 1976)

$$\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$$

üst yarı düzlem olsun. Γ modüler grup olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan f fonksiyonuna k ağırlıklı tam modüler form denir ve k ağırlıklı modüler formlar uzayı M_k ile gösterilir.

1. f , $\mathbb{H}$'de analitik fonksiyondur.
2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olsun. $A \in \Gamma$ için

$$f(Az) = (cz+d)^k f(z)$$

   dır.

3. f fonksiyonunun Fourier serisi aşağıdaki şekilde verilir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) e^{2\pi i n z}.$$

Eğer 3. özellikte f'nin Fourier açılımının ilk katsayısı $c(0) = 0$ ise, f'ye cusp(uç ya da zirve) form adı verilir ve cusp formlar ailesi S_k ile gösterilir. f fonksiyonunun $z = i\infty$'daki değeri $c(0)$'dır. $c(r) \neq 0$ olacak biçimdeki en küçük r sayısına, f'nin $z = i\infty$'daki sıfırının mertebesi denir.

Eisenstein serilerinin $i\infty$'daki değeri sıfırdan farklıdır. Klein'in modüler fonksiyonu, $i\infty$'da bir kutba sahip olduğundan, $k = 0$ ağırlıklı ağırlıklı tam olmayan (nonentire) bir modüler formdur.

Sıfır fonksiyonu, her k için k ağırlıklı bir modüler formdur. Sıfırdan farklı sabit fonksiyon, $k = 0$ ağırlıklı bir modüler formdur. $k = 0$ ağırlıklı her tam modüler forma modüler fonksiyon adı verilir. Her tam modüler fonksiyon, $i\infty$ ile birlikte $\mathbb{H}$'nin her noktasında analitik olduğundan, Louville Teoremi'nden, sabit fonksiyondur.

Şimdi modüler formlar için bazı örnekler verelim:

Örnek 2.2.1. (Rademacher 1973, Apostol 1976) $z \in \mathbb{H}$ ve $k \geq 2$ için,

$$G_{2k} = G_{2k}(z) = \sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$$

ile tanımlanan Eisenstein serileri, k ağırlıklı bir modüler formdur. Bu durumda, $ad - bc = 1$ olacak biçimdeki a, b, c, d tamsayıları için,

$$G_{2k}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k} G_{2k}(z)$$

dir.

$k \geq 2$ ve $z \in \mathbb{H}$ olsun. Eisenstein serilerinin başlıca özellikleri:

1. Eisenstein serilerinin Fourier serisi,

$$\sigma_{2k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{2k-1}$$

ve

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \quad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

olmak üzere (Abramowitz ve Stegun 1972, Titchmarsh 1951),

$$G_{2k}(z) = 2\zeta(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi i n z}$$

dir (Apostol 1976).

2. Eisenstein serileri periyodiktir; yani

$$G_{2k}(z+1) = G_{2k}(z)$$

dir.

3.
$$G_{2k}\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{2k}G_{2k}(z)$$

dir. Buradan z'nin yerine, sırasıyla, $2i, i, e^{2\pi i/3}$ değerleri alınırsa, aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

(i) $k \geq 2$ için
$$G_{2k}\left(\frac{i}{2}\right) = (-4)^k G_{2k}(2i)$$
dir.

(ii) k tek sayısı için,
$$G_{2k}\left(i\right) = 0$$
dır.

(iii) $k \not\equiv 0 (\bmod 3)$ için,
$$G_{2k}(e^{2\pi i/3}) = 0$$
dır (Apostol 1976).

Örnek 2.2.2. (Rademacher 1973, Apostol 1976) $z \in \mathbb{H}$ için,

$$\eta(z) = e^{\frac{\pi i z}{12}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n z})$$

ile tanımlanan fonksiyona Dedekind eta fonksiyonu denir. η fonksiyonu $1/2$ ağırlıklı bir modüler formdur.

Örnek 2.2.3.
$$g_2(z) = 60G_4(z)$$
ve
$$g_3(z) = 140G_6(z)$$
olsun. Burada
$$G_4(z) = \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^4}$$
ve
$$G_6(z) = \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^6}$$

dir. O zaman

$$\Delta(z) = g_2^3(z) - 27g_3^2(z) = (2\pi)^{12}\eta^{24}(z)$$

fonksiyonu $z = i\infty$'da birinci mertebeden sıfıra sahip $k = 12$ ağırlıklı bir cusp formdur. Aynı zamanda bu fonksiyon bir modüler formdur (Rademacher 1973, Apostol 1976).

Örnek 2.2.4. (Apostol 1976) Tüm Eisenstein serileri G_4 ve G_6'nın pozitif reel katsayılı bir polinomu olarak yazılır ve $m \geq 4$ için

$$(2m+1)(m-3)(2m-1)G_{2m} = 3\sum_{r=2}^{m-2}(2r-1)(2m-2r-1)G_{2r}G_{2m-2r}$$

dir. Yukarıdaki formülden ve

$$E_{2k}(z) = \frac{G_{2k}(z)}{2\zeta(2k)}$$

bağıntısından aşağıdaki özdeşlikler bulunur (Şimşek 2005):

$$E_4^2 = E_8,$$

$$E_4E_6 = E_{10},$$

$$E_4E_{10} = E_{14},$$

ve

$$E_6E_8 = E_{14}$$

dir (Rademacher 1973, Apostol 1976).

Teorem 2.2.1. (Apostol 1976) k pozitif çift tamsayı ve f, k ağırlıklı bir tam modüler form olsun. $\forall z \in \mathbb{H}$ için $G_0(z) = 1$ olsun. O zaman f fonksiyonu aşağıdaki şekilde tek türlü yazılır:

$a_r \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$f = \sum_{\substack{r=0 \\ k-12r\neq 2}}^{[k/12]} a_r G_{k-12r}\Delta^r$$

dir.

Not 2.2.1. f, $2m$ ($m \in \mathbb{Z}^+$) ağırlıklı bir modüler form olsun. Teorem 2.2.1'de $k = 2m$ alınırsa ve Örnek 2.2.4'teki bağıntı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{\substack{r=0 \\ 2m-12r\neq 2}}^{[m/6]} a_r G_{2m-12r}(z)\Delta^r(z) \\ &= \sum_{\substack{r=0 \\ 2m-12r\neq 2}}^{[m/6]} \frac{3a_r(g_2^3(z) - 27g_3^2(z))^r}{(2m-12r+1)(m-6r-3)(2m-12r-1)} \\ &\quad \times \sum_{j=2}^{2m-12r-2} (2j-1)(2m-2j-1)G_{2j}(z)G_{2m-12r-2j}(z). \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.2.5. Teorem 2.2.1'de $k = 12$ alınırsa,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{\substack{r=0 \\ 12-12r\neq 2}}^{1} a_r G_{12-12r}(z)\Delta^r(z) \\ &= a_0 G_{12}(z) + a_1 G_0(z)\Delta(z) \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.2.2. f, k ağırlıklı modüler form olsun. O zaman,

$$f = \sum_{a,b\in\mathbb{N}} c_{a,b} G_4^a G_6^b$$

dir. Burada $c_{a,b} \in \mathbb{C}$ ve $a, b \in \mathbb{N}$'dir, öyle ki

$$4a + 6b = k$$

dır.

M_k, bir vektör uzayıdır. Bu uzayın bazı

$$\{G_4^a G_6^b\}_{4a+6b=k, \ (a,b\in\mathbb{N})}$$

formundadır (Apostol 1976).

k ağırlıklı M_k uzayının boyutu:

$$\dim(M_k) = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right], & k \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 12) \\ \left[\frac{k}{12}\right] + 1, & k \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 12) \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada $4a + 6b = k$ 'dır (Apostol 1976).

M_k'nın lineer alt uzayı olarak cusp formlar uzayını alalım ve bu uzayı $M_{k,0}$ ile gösterelim. Bu durumda, $a_0 = 0$ olduğundan dolayı

$$\dim M_{k,0} = \dim M_k - 1$$

dir.

Not 2.2.2. $k = 4, 6, 8, 10, 14$ için $\dim M_k = 1$'dir. $k = 12, 16, 18, 20, 22, 26$ için $\dim M_{k,0} = 1$'dir.

2.3. Hecke Operatörleri

Bu bölümde farklı tipte Hecke operatörleri incelenecektir. Bu operatörlerin tanımları ve bazı özellikleri verilecektir. Hecke operatörleri, Hecke tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Hecke 1983):

$\forall f \in M_k$, $\frac{w_1}{w_2} \in \mathbb{H}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$f \mid T(n) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0, b (\bmod d)}} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}(w_1, w_2)\right)$$

dir.

Bu operatörler aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$c(f \mid T(n)) = cf \mid T(n)$$

ve

$$f_1 \mid T(n) + f_2 \mid T(n) = (f_1 + f_2) \mid T(n)$$

dir. Sonuç olarak $T(n)$ operatörü lineer bir operatördür.

2. $T(n)$ operatörlerinin kümesini $\Im$ olarak gösterelim. Bu durumda, $\Im$ bir değişmeli cebirdir.

Apostol, Hecke'nin tanımladığı $f \mid T(n)$ operatörünü aşağıdaki gibi farklı bir şekilde tanımlamıştır (Apostol 1976):

Tanım 2.3.1. k sabit bir tamsayı ve $n = 1, 2, \cdots$ olmak üzere M_k üzerinde T_n ile gösterilen klasik Hecke operatörleri

$$(T_n f)(z) = n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{nz + bd}{d^2}\right)$$

ile tanımlanır.

Bu operatörlerin bazı özellikleri aşağıdaki şekilde verilir:

1. $T_n : M_k \to M_k$ ve $T_n : S_k \to S_k$.
2. $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $(m, n) = 1$ olsun. Bu durumda,

$$T_m T_n = T_{mn}$$

   dir.
3. p asal ise,

$$T_{p^n} = T_{p^{n-1}} T_p - p^{k-1} T_{p^{n-2}}$$

   dir.
4. M_k üzerinde tanımlanan T_n ve T_m Hecke operatörlerini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$T_m T_n = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T_{\frac{mn}{d^2}}$$

   dir.
5. $f \in M_k$ için $f(\infty) = 0$ ise $T_n f(\infty) = 0$.

Koblitz tarafından, kafesler üzerinde Hecke operatörleri farklı bir biçimde tanımlanmıştır (Koblitz 1984):

Tanım 2.3.2'den önce bazı notasyonları verelim:

F, k ağırlıklı bir modüler form olsun. L', L_z'yi kapsayan n indeksli bir kafes olsun. $\tau L'$ kafesi için (w_1, w_2) bazına etkiyen bir matris($n \times n$ tipinde) ve $\binom{z}{1} = \tau w$ olsun. L_z, 1 ve z ile gerilen bir kafes olsun.

Tanım 2.3.2. z'den bağımsız $\tau \in T$ için bir T kümesi üzerinde $\widehat{T}_n$ operatörü

$$\widehat{T}_n f(z) = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} F\left(L_{\tau^{-1}\binom{z}{1}}, \frac{1}{N}\right)$$

ile tanımlanır.

Milne tarafından, farklı tipte Hecke operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Milne 1990):

Tanım 2.3.3'ten önce bazı notasyonları verelim:

$\mathcal{L}$,$\mathbb{C}$'deki tüm kafeslerin kümesi ve $\mathcal{D}$ ise $\mathcal{L}$'nin elemanları tarafından üretilmekte olan bir serbest abelyen grup olsun. Λ' ,n indeksli Λ'nın tüm alt kafeslerinin toplamı olsun. $n = 1, 2, \cdots$ için $T(n) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ ile verilen bir lineer operatörü $T(n)[\Lambda']$ ile verilsin.

Bu durumda, aşağıdaki tanım verilir.

Tanım 2.3.3. $\mathcal{D}$'nin bir n_i elemanı ($n_i \in \mathbb{Z}$), $\Lambda_i \in \mathcal{L}$ için, Hecke operatörü: $\sum n_i[\Lambda_i]$ şeklinde tanımlanır.

T. Miyake tarafından, otomorfik formlar uzayı üzerindeki Hecke operatörlerinin tanımı farklı bir biçimde verilmiştir (Miyake 1989):

Tanım 2.3.4'ten önce bazı notasyanları verelim:

Γ bir Fuchsian grup olsun. Ξ Γ'nın tüm sonlu indeksli altgruplarının kümesi ve Δ ise $\widetilde{\Gamma}$'nın $\widetilde{\Gamma} \supset \Delta \supset \Gamma$ olacak şekildeki bir yarı altgrubu olsun. χ, Δ'dan alınan bir karakter olsun.

Tanım 2.3.4. (Miyake 1989) $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Xi$ ve $\alpha \in \Delta$ için

$$(f(z) \mid \Gamma_1 \alpha \Gamma_2) = (\det(\alpha))^{k-1} \sum_{\nu=1}^{d} \chi(\alpha_\nu)(j(\alpha_\nu, z))^{-k} f(\alpha, z)$$

dir.

Şu ana kadar vermiş olduğumuz Hecke tipi operatörler dışında aşağıdaki Hecke tipi operatörler de verilebilir (Moll, Robins ve Soodhalter 2010):

$q = e^{2\pi i z}$ ($|q| < 1$) ve $z \in \mathbb{H}$ olsun.

1.
$$U_r\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{rn} q^n,$$

2.
$$V_r\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\frac{n}{r}} q^n,$$

3.
$$D=\sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{az+b}{d}\right)=\sum_{m=0}^{\infty} da_{md}q^{ma}$$

dır.

Hecke tipi operatörlerin çok önemli uygulama alanları vardır. Özellikle Knopp, $k>0$ için, Hecke tipi operatörler yardımıyla Dedekind toplamları için aşağıdaki özdeşliği ispatlamıştır (Knopp 1980):

$$\sum_{\substack{ad=n \\ d>0}} \sum_{b(\operatorname{mod} d)} s\left(ah+bk, dk\right)=\sigma(n)s(h,k)$$

dır. Burada $k>0,\ h,k\in\mathbb{Z}$ ve $k>0$ için $s(h,k)$ Dedekind toplamını göstermektedir. $[x]$, x'ten küçük en büyük tamsayı olsun. Dedekind toplamı aşağıdaki gibi tanımlanır (Rademacher 1973, Apostol 1976, Berndt 1978):

$$s(h,k)=\sum_{\mu=1}^{k}\left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right).$$

Burada, $(h,k)=1$ ve $h,k\in\mathbb{Z}$ için,

$$((x))=\begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2}, & x\notin\mathbb{Z} \\ 0, & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

dir. Dedekind toplamları çok değişik alanlarda çalışılmıştır (Berndt 1978, Apostol 1976, Kurt 1990, Şimşek 2003, 2004).

Daha sonra, $c>0$ için, Goldberg, Hecke operatörleri yardımıyla Hardy toplamları için aşağıdaki özdeşliği bulmuştur (Goldberg 1975, Berndt 1978):

$$\sum_{\substack{ad=n \\ d>0}} \sum_{b=0}^{d-1} s_i\left(ah+2bk, dk\right)=\sigma(n)s_i(h,k)$$

dır. Burada, $i=1,2,3,4,5$ için,

$$s_1(d,c)=\sum_{j=1}^{c}(-1)^{\left[\frac{dj}{c}\right]}\left(\left(\frac{j}{c}\right)\right),$$

$$s_2(d,c)=\sum_{j=1}^{c}(-1)^{j}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{j}{c}\right)\right),$$

$$s_3(d,c)=\sum_{j=1}^{c}(-1)^{j}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right),$$

$$s_4(d,c)=\sum_{j=1}^{c}(-1)^{\left[\frac{dj}{c}\right]},$$
$$s_5(d,c)=\sum_{j=1}^{c}(-1)^{j+\left[\frac{dj}{c}\right]}\left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)$$
ile tanımlanır (Hardy 1905, Goldberg 1975, Berndt 1978).

Bunun yanı sıra Knopp, Hecke tipi operatörlerin Dedekind eta fonksiyonuna etkisini incelenmiştir ve p asal sayısı için aşağıdaki bağıntı kanıtlanmıştır (Knopp 1980):
$$T_p\log\eta(z)=\frac{\pi i(p-1)}{24}+(p+1)\log\eta(z),\quad (z\in\mathbb{H}).$$

Goldberg aşağıdaki Hecke tipi operatörünü tanımlamıştır (Goldberg 1975):
$$(\widetilde{T}_n f)(z)=\sum_{\substack{ad=n\\ d>0}}\sum_{b=0}^{d-1}f\left(\frac{az+2b}{d}\right)$$
ile verilen Hecke tipi operatörlerini kullanarak, bu operatörleri theta fonksiyonlarına uygulamıştır ve aşağıdaki bağıntıyı kanıtlamıştır:
$$\widetilde{T}_n\log\theta(z)=\sigma(n)\log\theta(z).$$

Burada, $z\in\mathbb{H}$ için
$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\pi i n^2 z}$$
dir.

Lambert serileri
$$G_a(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{mn}}{n^a},\qquad (|x|<1,a>1)$$
şekilde tanımlanır (Apostol 1976, Trahan 1981).

$1<q$ tek tamsayı olmak üzere, Parson ve Rosen, Lambert serisine klasik Hecke operatörlerini uygulamıştır ve
$$T(n)(G_q(e^{2\pi i\tau}))=n^{-q}\sigma_q(n)G_q(e^{2\pi i\tau}),\qquad \left(n\in\mathbb{Z}^+,\tau\in\mathbb{H}\right)$$
olduğunu kanıtlamışlardır (Parson ve Rosen 1981).

Tanım 2.3.5. $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. f fonksiyonu için T_n Hecke tipi operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanır (Apostol 1976):

$$(T_n f)(z) = \sum_{ad=n, d>0} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{az+b}{d}\right). \tag{1}$$

5. Bölümde, (1)'de tanımlanan Hecke tipi operatörler kullanılacaktır ve elde edilen sonuçlarda n'nin herhangi bir asal sayı olması durumu göz önüne alınacaktır.

2.4. Hecke Operatörlerinin Özdeğer ve Özfonksiyonları

$z \in \mathbb{H}$ ve $q = e^{2\pi i z}$ olsun. $f \in M_k$ olsun. f fonksiyonunun Fourier açılımı

$$f(z) = \sum c(m) q^m$$

ise, o zaman $T_n f$'nin Fourier açılımı:

$\forall n \geq 1$ için

$$(T_n f)(z) = \sum_{m=0} \gamma_n(m) q^m = \sum_{m=0} \left\{ \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right) \right\} q^m$$

ile verilir. Burada, $T_n f$'nin Fourier katsayısı:

$$c(n)c(m) = \gamma_n(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

dir (Apostol 1976).

$\lambda(n) \in \mathbb{C}$ ve $0 \neq f \in M_k$ olsun.

$$T_n f = \lambda(n) f$$

bağıntısını sağlayan f fonksiyonuna T_n operatörünün özfonksiyonu (özformu), $\lambda(n)$ sayısına da özdeğeri denir.

Örnek 2.4.1. (Stein ve Gunnells 1974) $k \geq 2$ olsun. E_{2k} ile gösterilen k ağırlıklı normalize edilmiş Eisenstein serilerine T_n operatörünü uygularsak, $n \geq 1$ için

$$T_n(E_{2k}) = \sigma_{2k-1}(n) E_{2k}$$

elde edilir. Buradan görülür ki, Hecke operatörleri için E_{2k} ile verilen normalize edilmiş Eisenstein serileri birer özfonksiyon ve E_{2k}'lara karşılık gelen $\sigma_{2k-1}(n)$'ler ise birer özdeğerdir.

Hecke operatörlerine karşılık gelen matrisin bulunmasıyla ilgili aşağıdaki Yardımcı Teorem, Victor Miller tarafından verilmiştir.

Yardımcı Teorem 2.4.1. (Stein ve Gunnells 1974) S_k uzayı $\{f_1, f_2, \cdots, f_d\}$ tabanına sahip olsun öyle ki $a_i(f_j) = \delta_{i,j}$'dir. Bu özelliği sağlayan $\{f_j\}$ tabanına S_k için Miller tabanı adı verilir. Burada, $i = 1, 2, \cdots, d$ için f_j'nin i-ninci katsayısı $a_i(f_j)$'dir.

Miller tabanı için aşağıdaki örneği vereceğiz:

Örnek 2.4.2. (Stein ve Gunnells 1974) S_k için $k = 24$ alınırsa, o zaman $d = 2$'dir. $k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 12)$ olduğundan, $a = b = 0$ seçersek,

$$g_1 = \Delta F_6^2 = q - 1032q^2 + 245196q^3 + 10965568q^4 + 60177390q^5 - \cdots$$

ve

$$g_2 = \Delta^2 = q^2 - 48q^3 + 1080q^4 - 15040q^5 + \cdots$$

elde edilir. Buradan, $f_2 = g_2$ ve

$$f_1 = g_1 + 1032g_2 = q + 195660q^3 + 12080128q^4 + 44656110q^5 - \cdots$$

alınırsa Miller tabanını M_k'ya genişletilmiş olur.

Şimdi, Yardımcı Teorem 2.4.1'i ve (3) bağıntısını kullanarak, $n = 2$ durumunda M_{12} üzerinde H_2'ye karşılık gelen matrisi bulalım:

$d = 2$ ve $k = 12$ olmak üzere,

$$F_4 = 1 + 240q + 2160q^2 + \cdots$$

ve

$$F_6 = 1 - 504q - 16632q^2 + \cdots$$

bulunur. Bu durumda, M_{12} için,

$$F_4^3 = 1 + 720q - 179280q^2 + \cdots$$

ve

$$\Delta = \frac{F_4^3 - F_6^2}{1728} = q - 24q^2 + \cdots$$

elde edilir.

F_4^3 fonksiyonundan 720Δ ifadesi çıkarılırsa

$$f_0 = 1 + 196560q^2 + \cdots \quad \text{ve} \quad f_1 = q - 24q^2 + \cdots$$

bulunur.

a_n, f_0 ya da f_1'in n-inci katsayısını göstersin. O zaman,

$$\begin{aligned} T_2(f_0) &= H_2(1 + 196560q^2 + \cdots) \\ &= (a_0 + 2^{11}a_0)q^0 + (a_2 + 2^{11}a_{1/2})q^1 + \cdots \\ &= 2049 + 196560q + \cdots \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T_2(f_1) &= H_2(q - 24q^2 + \cdots) \\ &= (a_0 + 2^{11}a_0)q^0 + (a_2 + 2^{11}a_{1/2})q^1 + \cdots \\ &= 0 - 24q + \cdots \end{aligned}$$

bulunur.

Burada, $a_{1/2} = 0$'dır.

O halde, f_0 ve f_1 tabanlarına göre T_2'ye karşılık gelen matris:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 2049 & 196560 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır.

T_2'nin karakteristik polinomu:

$$(x - 2049)(x + 24)$$

şeklindedir.

2.5. Bernoulli ve Euler Polinomları

Bir üreteç fonksiyonunun genel tanımı aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 2.5.1. $|t| < R$, $R \in \mathbb{R}$ ve $z \in \mathbb{C}$ için,

$$F(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) \frac{t^n}{n!}$$

olsun. Bu durumda, $F(t, z)$ fonksiyonuna $(g_n(z))$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir. $g_n(z)$ dizisinin bütün temel özellikleri $F(t, z)$ fonksiyonu tarafından bulunabilir (Carlitz 1969).

Üreteç fonksiyonu yardımıyla, Bernoulli ve Euler polinomları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.5.2. Bernoulli polinomları ve Euler polinomları, sırasıyla, $n \in \mathbb{N}$ için, aşağıdaki üreteç fonksiyonları ile tanımlanır:

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \qquad (|t| < 2\pi)$$

ve

$$\frac{2e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}, \qquad (|t| < \pi)\,.$$

Bu polinomlar birçok matematikçi tarafından matematiğin değişik alanlarında çalışmışlardır (Euler 1738, Abramowitz ve Stegun 1972, Carlitz 1959, Comtet 1974, Srivastava 2011, Shiratani 1975, Şimşek 2004, 2005, 2006, 2010, 2011, Srivastava, Kim ve Şimşek 2005, Özden ve Şimşek 2008, Agoh ve Dilcher 2009, Özden v.d. 2010):

Bernoulli polinomları ve Euler polinomlarını farklı şekilde ifade etmek mümkündür (Chang ve Ha 2006). Bu polinomlar daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi verilir (Gould 2010):

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (x+j)^n$$

ve

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (x+j)^n$$

verilir.

Özel olarak $x = 0$ için $B_n(0) = B_n$ ve $E_n(0) = E_n$'dir. Burada B_n ve E_n sayılarına, sırasıyla, Bernoulli sayıları ve Euler sayıları adı verilir.

Bernoulli ve Euler polinomlarını elde etmek için aşağıdaki bağıntılar da kullanılabilir (Gould 2010, Abramowitz ve Stegun 1972):

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} B_k$$

ve

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} E_k$$

dır.

Altıncı dereceye kadar olan Bernoulli polinomları sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$B_0(x) = 1,$$

$$B_1(x) = x - \tfrac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \tfrac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x,$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \tfrac{1}{30},$$

$$B_5(x) = x^5 - \tfrac{5}{2}x^4 + \tfrac{5}{3}x^3 - \tfrac{1}{6}x,$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \tfrac{5}{2}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{42}.$$

Altıncı dereceye kadar olan Euler polinomları sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$E_0(x) = 1,$$

$$E_1(x) = x - \tfrac{1}{2},$$

$$E_2(x) = x^2 - x,$$

$$E_3(x) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{4},$$

$$E_4(x) = x^4 - 2x^3 + x,$$

$$E_5(x) = x^5 - \tfrac{5}{2}x^4 + \tfrac{5}{2}x^2 - \tfrac{1}{2},$$

$$E_6(x) = x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x.$$

Bernoulli polinomları ve Euler polinomlarının en önemli özeliklerinden birisi de Raabe bağıntısıdır. Bu bağıntılar aşağıdaki gibi verilir (Raabe 1851, Carlitz 1953, Abramowitz ve Stegun 1972, Walum 1991):

$$B_n(x) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(\frac{x+k}{m}\right), \quad (\forall m \geq 1, \forall n \in \mathbb{N})\,. \tag{2}$$

$$E_n(x) = m^n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k E_n\left(\frac{x+k}{m}\right), \quad (\forall m \text{ (tek sayı)} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}). \tag{3}$$

$$E_n(x) = -\frac{2}{n+1} m^n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k B_{n+1}\left(\frac{x+k}{m}\right), \quad (\forall m \text{ (çift sayı)} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

Raabe bağıntılarının kanıtları aşağıdaki gibi verilir:

(2) Bağıntısının Kanıtı.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(\frac{x+k}{m}\right)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{te^{t\left(\frac{x+k}{m}\right)}}{e^t-1} \\
&= m\frac{\frac{t}{m}e^{\frac{tx}{m}}}{e^t-1}\sum_{k=0}^{m-1}\left(e^{\frac{t}{m}}\right)^k \\
&= m\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{\left(\frac{t}{m}\right)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} m^{1-n}B_n(x)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

dir.

(3) Bağıntısının Kanıtı.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k E_n\left(\frac{x+k}{m}\right)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{2e^{t\left(\frac{x+k}{m}\right)}}{e^t+1} \\
&= \frac{2e^{\frac{tx}{m}}}{e^t+1}\sum_{k=0}^{m-1}\left(-e^{\frac{t}{m}}\right)^k, \qquad (m \text{ tek sayıdır}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{\left(\frac{t}{m}\right)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} m^{-n}E_n(x)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

dir.

(4) Bağıntısının Kanıtı.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{(-2)}{n+1}B_{n+1}\left(\frac{x+k}{m}\right)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-2)\,(-1)^k}{t}\frac{te^{t\left(\frac{x+k}{m}\right)}}{e^t-1} \\
&= \frac{-2e^{\frac{tx}{m}}}{e^t-1}\sum_{k=0}^{m-1}\left(-e^{\frac{t}{m}}\right)^k, \qquad (m \text{ çift sayıdır}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{\left(\frac{t}{m}\right)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} m^{-n}E_n(x)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

dir.

Özel durumda Euler sayılarını veren Frobenius-Euler polinomları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.5.3. (Carlitz 1963) $1 \neq u \in \mathbb{C}$ cebirsel sayısı olsun. Bu durumda, $H_n(x,u)$ ile gösterilen Frobenius-Euler polinomları

$$\frac{1-u}{e^t-u}e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,u)\frac{t^n}{n!}, \qquad \left(\left|t+\ln\frac{1}{u}\right| < 2\pi\right)$$

ifadesi ile tanımlanır.

Özel olarak $x=0$ ve $u=-1$ alınırsa, sırasıyla, $H_n(0,u) = H_n(u)$ ve $H_n(x,-1) = E_n(x)$'tir. H_n sayılarına, Frobenius-Euler sayıları denir ve Frobenius-Euler sayıları yardımıyla Frobenius-Euler polinomları aşağıdaki şekilde verilir (Kim 2012):

$$H_n(x,u) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} H_j(u).$$

Tanım 2.5.3'te verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak,

$$H_0(u) = 1$$

ve

$$(H+1)^n - uH_n(u) = 0$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile hesaplanır.

Özel durumda Bernoulli polinomlarını veren Apostol-Bernoulli polinomları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.5.4. (Apostol 1951, Luo ve Srivastava 2005) $\mathcal{B}_n(x,\lambda)$ ile gösterilen Apostol-Bernoulli polinomları

$$\frac{t}{\lambda e^t-1}e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(x,\lambda)\frac{t^n}{n!}, \qquad (|t| < |\ln\lambda|)$$

ifadesi ile tanımlanır.

Burada $\lambda = 1$ için $\mathcal{B}_n(x,1) = B_n(x)$ elde edilir.

2.6. Weierstrass $\wp$-Fonksiyonu

$\frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$ için, $\Omega = \{m_1 z_1 + m_2 z_2 : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ ile verilen çifte periyotlar kümesini göz önüne alalım.

Tanım 2.6.1. (Dutta ve Debnath 1965, Rademacher 1973, Apostol 1976) $z \in \mathbb{C}$ için,

$$f(z + m_1 z_1 + m_2 z_2) = f(z)$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonuna çifte periyodik fonksiyon denir.

Tanım 2.6.2. (Dutta ve Debnath 1965, Rademacher 1973, Apostol 1976) Çifte periyodik ve meromorf bir fonksiyona eliptik fonksiyon denir.

Eliptik fonksiyonlar teorisinde çok önemli bir yer tutan fonksiyonlardan biri, Weierstrass tarafından verilen Weierstrass $\wp$-fonksiyonudur. Şimdi bu fonksiyonun tanımını verelim:

Tanım 2.6.3. (Dutta ve Debnath 1965, Rademacher 1973, Apostol 1976) $\Omega^* = \Omega\backslash\{0\}$ olmak üzere, Weierstrass $\wp$-fonksiyonu

$$\wp(u; z_1, z_2) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\Omega^*} \left(\frac{1}{(u - (m_1 z_1 + m_2 z_2))^2} - \frac{1}{(m_1 z_1 + m_2 z_2)^2} \right)$$

ile tanımlanır.

Weierstrass $\wp$-fonksiyonu, eliptik bir fonksiyondur.

Tanım 2.6.4. (Dutta ve Debnath 1965, Rademacher 1973, Apostol 1976) $\wp$ fonksiyonunun $\frac{z_1}{2}, \frac{z_2}{2}$ ve $\frac{z_1+z_2}{2}$ yarı periyotları için,

$$e_1 = \wp\left(\frac{z_1}{2}\right) \ , e_2 = \wp\left(\frac{z_2}{2}\right) \ , e_3 = \wp\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

ile tanımlanan birbirinden farklı e_1, e_2, e_3 değerleri $4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$ denkleminin kökleridir.

Tanım 2.6.1'de verilen Weierstrass $\wp$-fonksiyonu aşağıdaki diferensiyel denklemi sağlar:

$$\begin{aligned} (\wp'(z))^2 &= 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 \\ &= 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3). \end{aligned}$$

Yukarıdaki diferensiyel denklem yardımıyla, Δ'nın e_1, e_2 ve e_3 kökleri cinsinden açık ifadesi

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2$$

dir. Δ'nın g_2 ve g_3 değerleri cinsinden açık ifadesi ise,

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

olarak bulunur (Dutta ve Debnath 1965, Rademacher 1973, Apostol 1976).

3. KISMİ HECKE OPERATÖRLERİ

Bu bölümde kısmi Hecke operatörleri ve kısmi Hecke tipi operatörlerinin tanımları ve temel özellikleri verilecektir. Kısmi Hecke operatörünün Bernoulli , Euler ve diğer özel polinomlara etkisi incelenecektir. Bazı özel durumlar için kısmi Hecke tipi operatörünün uygulamaları verilecektir.

3.1. Kısmi Hecke Operatörlerinin Bernoulli-Euler Tipi Polinomlara Uygulanması ve Matris Gösterimleri

Bu bölümde aşağıdaki notasyon ve tanımlar kullanılacaktır:
$a \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ve $\chi_{a,N}$ fonksiyonu

$$\chi_{a,N} : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

ile verilsin. $\chi_{a,N}$ fonksiyonu, $0 \leq k \leq a-1$ için,

$$\chi_{a,N}(k) = \begin{cases} \xi_N^k, & N \geq 2 \\ \frac{1}{a}, & N = 1 \end{cases} \tag{5}$$

ile tanımlanır. Burada, $\xi_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$: N-ninci mertebeden birimin kökleridir. $\chi_{a,N}$, N ile periyodik bir fonksiyondur; yani

$$\chi_{a,N}(x+N) = \chi_{a,N}(x)$$

tir.

Kısmi Hecke operatörü $T_{\chi_{a,N}}$ ile gösterilecektir. Bu operatör aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 3.1.1. (Bayad, Aygüneş ve Şimşek 2010) $P_{n,N}(x) \in \mathbb{C}[x]$ için, $T_{\chi_{a,N}}$ kısmi Hecke operatörü

$$T_{\chi_{a,N}}(P_{n,N}(x)) = \sum_{k=0}^{a-1} \chi_{a,N}(k) P_{n,N}\left(\frac{x+k}{a}\right)$$

ile tanımlanır.

Burada $P_{n,N}$ polinomlarının derecesi n'dir. Yukarıdaki tanımdan,

$$T_{\chi_{a,N}} : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$$

yazılır. Burada $T_{\chi_{a,N}}$ operatörü $\mathbb{C}[x]$ vektör uzayı üzerinde lineer bir operatördür.

Şimdi T_N ile gösterilen kısmi Hecke tipi operatörünün tanımını verelim:

Tanım 3.1.2. (Bayad, Aygüneş ve Şimşek 2010) N'ye bağlı olan kısmi Hecke tipi operatörü

$$T_N = \sum_{a \equiv 1 (\operatorname{mod} N)} T_{\chi_{a,N}}.$$

ile tanımlanır.

T_N'nin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

1. T_N operatörleri $\mathbb{C}[x]$ üzerinde lineerdir,

2. T_N operatörleri $P_{n,N}(x)$ polinomlarının derecesini korur.

Bu bölümdeki temel amaç, $T_{\chi_{a,N}}$ kısmi Hecke operatörlerini kullanarak, $\mathbb{C}[x]$ üzerinde bütün birim başkatsayılı (monik) polinomları elde etmektir.

$P_{n,N}(x) \in \mathbb{C}[x]$ ve $a \equiv 1 (\operatorname{mod} N)$ olsun. O zaman,

$$T_{\chi_{a,N}}(P_{n,N}(x)) = a^{-n} P_{n,N}(x) \tag{6}$$

fonksiyonel denklemini sağlayan birim başkatsayılı (monik) polinomlar vardır.

(6) denklemi monik olmayan polinomları da sağlar. Aşağıdaki Yardımcı Teorem ile (6) denklemini sağlayan bir tek $P_{n,N}(x)$ monik polinomunun var olduğu gösterilir.

Yardımcı Teorem 3.1.1. (Bayad, Aygüneş ve Şimşek 2010) $a \equiv 1 (\operatorname{mod} N)$ ve herhangi bir $a, N \in \mathbb{N}^*$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $T_{\chi_{a,N}}$ operatörü, $\mathbb{C}[x]$ kompleks polinomlar halkasında dereceyi korur.

(ii)

$$T_{\chi_{a,N}}(x^m) = \begin{cases} S_0 = 1, & m = 0 \\ a^{-m} x^m + a^{-m} \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m}{v} S_{m-v}(\chi_{a,N}) x^v, & m \geq 1 \end{cases}$$

dir. Burada,

$$S_{m-v}(\chi_{a,N}) = \sum_{k=0}^{a-1} \chi_{a,N}(k) k^{m-v}$$

dir.

(iii) Herhangi bir $m \in \mathbb{N}^*$ için

$$\mathbb{C}_m[x] = \{P(x) \in \mathbb{C}[x] : der P(x) \leq m\}$$

ile verilen $\mathbb{C}_m$'nin kanonik $\mathbb{C}$-tabanı

$$\beta_m = \{1, x, x^2, \cdots, x^m\}$$

şeklinde olsun. O zaman, β_m tabanında $T_{\chi_{a,N}}$'ye karşılık gelen $M_{\beta_m}(T_{\chi_{a,N}})$ matrisi aşağıdaki gibi verilir:

$$M_{\beta_m}(T_{\chi_{a,N}}) = \begin{pmatrix} S_0 & a^{-1}S_1 & a^{-2}S_2 & \ldots & a^{-m}S_m \\ 0 & a^{-1}S_0 & 2a^{-2}S_1 & \ldots & a^{-m}\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} S_{m-1} \\ 0 & 0 & a^{-2}S_0 & \ldots & a^{-m}\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} S_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a^{-m}\begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix} S_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a^{-m}S_0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Burada, $S_l = S_{l,N}(a) = \sum_{k=0}^{a-1} \chi_{a,N}(k)k^l$, $(0 \leq l \leq m-1)$ şeklindedir.

(iv) $a, b \geq 1$ olsun. $a \equiv b \equiv 1 (\operatorname{mod} N)$ için

$$T_{\chi_{a,N}} T_{\chi_{b,N}} = T_{\chi_{b,N}} T_{\chi_{a,N}}.$$

O zaman (6) fonksiyonel denklemini sağlayan n-inci dereceden $P_{n,N}$ polinomları vardır. Hatta, verilen n tamsayısı için (6) bağıntısını sağlayan n-ninci dereceden bir tek $(P_{n,N})_{n\in\mathbb{N}}$ birim başkatsayılı polinomlar dizisi vardır.

Not 3.1.1. $\forall a \geq 1$ için $M_{\beta_m}(T_{\chi_{a,N}})$ diagonalleştirilebilir bir matris olduğu için, $\mathbb{C}_m[x]$ vektör uzayının bir tabanı olan $\widetilde{\beta}_m$vardır öyle ki

$$\mathbf{M}_{\widetilde{\beta}_m}\left(T_{\chi_{a,N}}\right) = \begin{pmatrix} S_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a^{-1}S_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2}S_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a^{-m}S_0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

dir.

Teorem 3.1.1. (Bayad, Aygüneş ve Şimşek 2010) $a \equiv 1(\operatorname{mod} N)$ ve $a, N \in \mathbb{N}^*$ olsun. Bu durumda,

(i) $P_{n,N}$ ile n-ninci dereceden birim başkatsayılı polinom verilsin. O zaman

$$T_{\chi_{a,N}}(P_{n,N}(x)) = a^{-n} P_{n,N}(x)$$

eşitliğini sağlayan bir tek $P_{n,N} \in Q(\xi_N)[x]$ polinomlar dizisi vardır.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$T_N(P_{n,N}(x)) = N^{-n} \zeta \left(n, \frac{1}{N}\right) P_{n,N}(x)$$

dir. Burada $\zeta(s, x)$ Hurwitz-zeta fonksiyonunu göstermektedir ve $\operatorname{Re} s > 1$ için, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\zeta(s, x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(x+k)^s}.$$

Tanım 2.1.3'ten yararlanılarak, T_N operatörlerinin özfonksiyonlarının ve özdeğerlerinin, sırasıyla, $P_{n,N}(x)$ ve $N^{-n}\zeta\left(n, \frac{1}{N}\right)$ olduğu görülür.

(iii) $P_{n,N}(x)$'in üreteç fonksiyonu, :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,N}(x) \frac{t^n}{n!} = \begin{cases} \frac{te^{tx}}{e^t - 1}, & (|t| < 2\pi) \quad N = 1 \text{ için} \\ \frac{(\xi_N - 1)e^{tx}}{\xi_N e^t - 1}, & \left(\left|t + \frac{2\pi i}{N}\right| < 2\pi\right) \quad N \geq 2 \text{ için} \end{cases}$$

şeklindedir.

Bundan sonra $P_{n,N}(x)$ polinomlarına Bernoulli-Euler tipi polinomlar diyeceğiz.

Not 3.1.2. Teorem 3.1.1-(iii)'teki üreteç fonksiyonundan yararlanılarak, $N = 1$ için

$$P_{n,1}(x) = B_n(x)$$

bulunur ve $N = 2$ için

$$P_{n,2}(x) = E_n(x)$$

bulunur. (6) bağıntısından yararlanılarak, Bernoulli polinomları ve Euler polinomları için, sırasıyla (2) ve (3) ile verilen Raabe bağıntıları elde edilir.

Aşağıdaki Yardımcı Teorem, $T_{\chi_{a,1}}$ operatörünün matris gösteriminde kullanılacaktır. Yardımcı Teorem 3.1.2'nin çok değişik ispat metodları vardır. Bu ispat metodlardan sadece biri verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.1.2. (Abramowitz ve Stegun 1972, Srivastava ve Choi 2001) $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 1$ için,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{B_{m+1}(n) - B_{m+1}(0)}{m+1}$$

dır.

Kanıt.

$$f(t) = \frac{t}{e^t - 1} = -t \sum_{m=0}^{\infty} e^{mt}, \qquad \left(\left|e^t\right| < 1\right)$$

ve

$$f(t,n) = \frac{te^{nt}}{e^t - 1} = -t \sum_{m=0}^{\infty} e^{(m+n)t}, \quad \left(\left|e^t\right| < 1\right)$$

olsun. Bu durumda,

$$f(t,n) - f(t) = t \sum_{m=0}^{\infty} \left(e^{mt} - e^{(m+n)t}\right) = t \sum_{k=0}^{n-1} e^{kt}$$

dir. Yukarıdaki bağıntıda e^{kt} 'nin seri açılımından yararlanılarak,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(B_m(n) - B_m\right) \frac{t^{m-1}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{B_{m+1}(n) - B_{m+1}}{m+1}\right) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k^m\right) \frac{t^m}{m!}$$

elde edilir.

Şimdi $T_{\chi_{a,1}}$ operatörüne karşılık gelen matris ile Bernoulli polinomları arasındaki ilişkiyi gösteren aşağıdaki Teoremi verelim:

Teorem 3.1.2. (Aygüneş ve Şimşek 2012) β_m tabanına göre $T_{\chi_{a,1}}$ operatörüne karşılık gelen $M_{\beta_m}(T_{\chi_{a,1}})$ matrisi, Bernoulli polinomları aracılığıyla, aşağıdaki gibi verilir:

$$M_{\beta_m}(T_{\chi_{a,1}}) = \begin{pmatrix} \frac{B_1(a)-B_1(0)}{a} & \frac{B_2(a)-B_2(0)}{2a^2} & \frac{B_3(a)-B_3(0)}{3a^3} & \cdots & \frac{B_{m+1}(a)-B_{m+1}(0)}{a^{m+1}(m+1)} \\ 0 & \frac{B_1(a)-B_1(0)}{a^2} & \frac{B_2(a)-B_2(0)}{a^3} & \cdots & \binom{m}{1}\frac{B_m(a)-B_m(0)}{a^{m+1}m} \\ 0 & 0 & \frac{B_1(a)-B_1(0)}{a^3} & \cdots & \binom{m}{2}\frac{B_{m-1}(a)-B_{m-1}(0)}{a^{m+1}(m-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{m}{3}\frac{B_{m-2}(a)-B_{m-2}(0)}{a^{m+1}(m-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{B_1(a)-B_1(0)}{a^{m+1}} \end{pmatrix}.$$

Kanıt. Lemma 3.1.1' de özel olarak $N = 1$ olsun. Yardımcı Teorem 3.1.2 'den,

$$S_{l,1}(a) = \sum_{k=0}^{a-1} \chi_{a,1}(k) k^l = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{a-1} k^l = \frac{B_{l+1}(a) - B_{l+1}(0)}{a(l+1)}$$

bulunur. O halde, $S_{l,1}(a)$ toplamının Bernoulli polinomları cinsinden ifadesi (7) matrisinde yerine yazılarak, istenen matris elde edilir.

Aşağıdaki Yardımcı Teorem, $T_{\chi_{a,2}}$ operatörünün matris gösteriminde kullanılacaktır. Yardımcı Teorem 3.1.3'te Yardımcı Teorem 3.1.2'de verilen ispat metodu kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 3.1.3. (Abramowitz ve Stegun 1972, Srivastava ve Choi 2001) $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 1$ için,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k^m = \frac{E_m - (-1)^n E_m(n)}{2}$$

dir.

Kanıt.

$$f(t) = \frac{2}{e^t + 1} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{mt}$$

ve

$$f(t, n) = \frac{2e^{nt}}{e^t + 1} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{(m+n)t}$$

olsun. Burada eşitliklerin sağındaki seriler yalnızca $|e^t| < 1$ ya da $t = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ için $x < 0$ durumunda yakınsaktır. Bu durumda,

$$f(t) - f(t, n) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(e^{mt} - (-1)^n e^{(m+n)t} \right) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k e^{kt}$$

dir. Yukarıdaki bağıntıda, e^{kt} 'nin seri açılımından yararlanılarak,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(E_m - (-1)^n E_m(n) \right) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k^m \right) \frac{t^m}{m!}$$

elde edilir.

Şimdi $T_{\chi_{a,2}}$ operatörüne karşılık gelen matris ile Euler polinomları arasındaki ilişkiyi gösteren aşağıdaki Teoremi verelim:

Teorem 3.1.3. (Aygüneş ve Şimşek 2012) a herhangi bir tek doğal sayı olsun. β_m tabanına göre $T_{\chi_{a,2}}$ operatörüne karşılık gelen $M_{\beta_m}(T_{\chi_{a,2}})$ matrisi, Euler polinomları aracılığıyla, aşağıdaki gibi verilir:

$$M_{\beta_m}(T_{\chi_{a,2}}) = \begin{pmatrix} \frac{E_0(0)+E_0(a)}{2} & \frac{E_1(0)+E_1(a)}{2a} & \frac{E_2(0)+E_2(a)}{2a^2} & \cdots & \frac{E_m(0)+E_m(a)}{2a^m} \\ 0 & \frac{E_0(0)+E_0(a)}{2a} & \frac{E_1(0)+E_1(a)}{a^2} & \cdots & \binom{m}{1}\frac{E_{m-1}(0)+E_{m-1}(a)}{2a^m} \\ 0 & 0 & \frac{E_0(0)+E_0(a)}{2a^2} & \cdots & \binom{m}{2}\frac{E_{m-2}(0)+E_{m-2}(a)}{2a^m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{m}{3}\frac{E_{m-3}(0)+E_{m-3}(a)}{2a^m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{E_0(0)+E_0(a)}{2a^m} \end{pmatrix}.$$

Kanıt. Lemma 3.1.1 ’de özel olarak $N = 2$ olsun. Lemma 3.1.3 ’ten,

$$S_{l,2}(a) = \sum_{k=0}^{a-1} \chi_{a,2}(k)k^l = \sum_{k=0}^{a-1} (-1)^k k^l = \frac{E_l(0) - (-1)^a E_l(a)}{2}$$

bulunur. Yardımcı Teorem 3.1.1’in koşulu gereğince $a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ olur ve a’nın tek olduğu durumlar için, $S_{l,2}(a)$ toplamının Euler polinomları cinsinden ifadesi (7) matrisinde yerine yazılarak, istenen matris elde edilir.

Not 3.1.3.

$$\frac{B_1(a) - B_1(0)}{a} = 1$$

ve

$$\frac{E_0(0) + E_0(a)}{2} = 1$$

olduğundan $M_{\beta_m}(T_{\chi_{a,1}})$ ve $M_{\beta_m}(T_{\chi_{a,2}})$ matrislerine karşılık gelen özdeğerlerin kümesi:

$$\{1, a^{-1}, a^{-2}, \cdots, a^{-m}\}$$

olur. Not 3.1.1’den $N = 1$ ve $N = 2$ durumları için, sırasıyla, (2) ve (3) bağıntıları sağlandığı için (8) matrisine karşılık gelen özfonksiyonlar da, sırasıyla, Bernoulli polinomları ve Euler polinomları olarak bulunur.

3.2. Kısmi Hecke Tipi Operatörlerin Uygulamaları

Bu bölümde, N'nin bazı özel değerleri için T_N operatörünün özdeğerleri ile ilgili uygulamalar verilecektir. Ayrıca kısmi zeta fonksiyonu ile T_N operatörü arasındaki ilişki verilecektir.

İlk olarak kısmi zeta fonksiyonunun tanımını verelim. Kısmi zeta fonksiyonu $H(s, a, F)$ olarak gösterilir.

Tanım 3.2.1. (Srivastava ve Choi 2001) Kısmi zeta fonksiyonu $0 < a < F$, $F \in \mathbb{Z}^+$ ve $\operatorname{Re} s > 1$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$H(s, a, F) = \sum_{\substack{n \equiv a (\operatorname{mod} F) \\ n > 0}} \frac{1}{n^s}.$$

Teorem 3.2.1. (Aygüneş ve Şimşek 2012) $N \in \mathbb{N}^*$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$T_N(P_{n,N}(x)) = H(n, 1, N) P_{n,N}(x)$$

tir.

Kanıt.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \equiv a (\operatorname{mod} F) \\ n > 0}} \frac{1}{n^s} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(a + mF)^s} \\ &= \frac{1}{F^s} \zeta\left(s, \frac{a}{F}\right) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\zeta\left(s, \frac{a}{F}\right) = F^s H(s, a, F)$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıda $F = N$, $s = n$ ve $a = 1$ alınarak ve Teorem 3.1.1-(ii) kullanılarak,

$$\begin{aligned} T_N(P_{n,N}(x)) &= N^{-n} \zeta\left(n, \frac{1}{N}\right) P_{n,N}(x) \\ &= H(n, 1, N) P_{n,N}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıdaki teoremi vermeden önce Riemann zeta fonksiyonunu, Euler sayılarını ve Bernoulli sayılarını içeren aşağıdaki özdeşlikleri verelim (Srivastava ve Choi 2001, 2012). Bu özdeşlikler daha sonraki teoremlerin ispatında kullanılacaktır:

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\zeta(s), \tag{9}$$

$$\zeta(2n) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\zeta(2k)\zeta(2n-2k) \quad (n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}), \tag{10}$$

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}, \tag{11}$$

$$E_{2n-1}(0) = \frac{4(-1)^n}{(2\pi)^{2n}}(2n-1)!(2^{2n}-1)\zeta(2n), \tag{12}$$

$$\zeta(2n+1) = \frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n+1}}{2(2n+1)!}\int_0^1 B_{2n+1}(t)\cot(\pi t)dt \ , \tag{13}$$

ve

$$\zeta'(-2n) = (-1)^n\frac{(2n)!}{2(2\pi)^{2n}}\zeta(2n+1) \tag{14}$$

olarak verilir.

Teorem 3.2.2. (Aygüneş ve Şimşek 2012) $\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ için,

$$T_2(E_{2n}(x)) = \frac{(-1)^n(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{(4n+2)(2n)!}(E_{2n}(x))\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_{2k}B_{2n-2k}$$

dır.

Kanıt. Teorem 3.1.1-(ii) 'de $N = 2$ alınırsa ve $P_{n,2}(x) = E_n(x)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$T_2(E_n(x)) = 2^{-n}\zeta\left(n, \frac{1}{2}\right)E_n(x)$$

elde edilir.

(9) bağıntısını yukarıdaki denklemde yerine yazarsak,

$$T_2(E_n(x)) = \zeta(n)(1-2^{-n})E_n(x) \tag{15}$$

bulunur. n'nin çift olduğu durumlar için,

$$T_2(E_{2n}(x)) = \zeta(2n)(1-2^{-2n})E_{2n}(x) \tag{16}$$

tir.

(16) bağıntısında (10) ve (11) bağıntılarını kullanırsak,

$$\begin{aligned}
T_2(E_{2n}(x)) &= \frac{2(1-2^{-2n})E_{2n}(x)}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\zeta(2k)\zeta(2n-2k) \\
&= \frac{2(1-2^{-2n})E_{2n}(x)}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}\frac{(-1)^{n-k+1}(2\pi)^{2n-2k}B_{2n-2k}}{2(2n-2k)!} \\
&= \frac{(-1)^n(1-2^{-2n})(2\pi)^{2n}E_{2n}(x)}{(4n+2)(2n)!}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_{2k}B_{2n-2k}\ .
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3. (Aygüneş ve Şimşek 2012) $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$T_2(E_{2n}(x)) = \frac{(-1)^{n+1}(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}E_{2n}(x)$$

tir.

Kanıt. (16) ve (11) bağıntılarından,

$$\begin{aligned}
T_2(E_{2n}(x)) &= \zeta(2n)(1-2^{-2n})E_{2n}(x) \\
&= \left(\frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}\right)(1-2^{-2n})E_{2n}(x) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}E_{2n}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bernoulli sayıları için girişim (convolution) bağıntısının ispatı değişik yöntemlerle verilebilir. Şimdi Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3'ü kullanarak girişim bağıntısını ispatlayacağız.

Sonuç 3.2.1. $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ olsun. Bu durumda Bernoulli sayıları için girişim (convolution) bağıntısı

$$B_{2n} = -\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_{2k}B_{2n-2k}$$

ile verilir.

Kanıt. Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3'teki bağıntıların sol tarafları eşit olduğu için sağ tarafları da birbirine eşitlenirse,

$$\frac{(-1)^{n+1}(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{2(2n)!}B_{2n} = \frac{(-1)^n(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{(4n+2)(2n)!}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_{2k}B_{2n-2k}$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.4. (Aygüneş ve Şimşek 2012) $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$T_2(E_{2n}(x)) = \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{4(2n-1)!} E_{2n-1}(0) E_{2n}(x)$$

tir.

Kanıt. (12) bağıntısı, (16) bağıntısında kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T_2(E_{2n}(x)) &= \zeta(2n)(1-2^{-2n})E_{2n}(x) \\ &= \left(\frac{(2\pi)^{2n} E_{2n-1}(0)}{4(-1)^n (2n-1)!(2^{2n}-1)} \right) (1-2^{-2n}) E_{2n}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5. (Aygüneş ve Şimşek 2012) $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$T_2(E_{2n+1}(x)) = E_{2n+1}(x) \frac{(-1)^{n+1}(1-2^{-2n-1})(2\pi)^{2n+1}}{2(2n+1)!} \int_0^1 B_{2n+1}(t) \cot(\pi t) dt$$

dir.

Kanıt. (15) bağıntısında n'nin tek olduğu durumlar göz önüne alınırsa,

$$T_2(E_{2n+1}(x)) = \zeta(2n+1)(1-2^{-2n-1})E_{2n+1}(x) \tag{17}$$

bulunur. (13) bağıntısı, (17) bağıntısında kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T_2(E_{2n+1}(x)) &= \zeta(2n+1)(1-2^{-2n-1})E_{2n+1}(x) \\ &= \left(\frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n+1}}{2(2n+1)!} \int_0^1 B_{2n+1}(t) \cot(\pi t) dt \right) (1-2^{-2n-1}) E_{2n+1}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.6. (Aygüneş ve Şimşek 2012) $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$T_2(E_{2n+1}(x)) = \frac{2(-1)^n (2\pi)^{2n}(1-2^{-2n-1})}{(2n)!} \zeta'(-2n) E_{2n+1}(x)$$

tir.

Kanıt. (14) bağıntısı, (17) bağıntısında kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T_2(E_{2n+1}(x)) &= \zeta(2n+1)(1-2^{-2n-1})E_{2n+1}(x) \\ &= \left(\frac{2(-1)^n\zeta'(-2n)(2\pi)^{2n}}{(2n)!}\right)(1-2^{-2n-1})E_{2n+1}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5 ve Teorem 3.2.6 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2. $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\zeta'(-2n) = -\frac{\pi}{2(2n+1)}\int_0^1 B_{2n+1}(t)\cot(\pi t)dt$$

dir.

Kanıt. Teorem 3.2.5 ve Teorem 3.2.6'daki bağıntıların sol tarafları eşit olduğu için sağ tarafları da birbirine eşitlenirse,

$$\frac{(-1)^{n+1}(1-2^{-2n-1})(2\pi)^{2n+1}}{2(2n+1)!}\int_0^1 B_{2n+1}(t)\cot(\pi t)dt = \frac{2(-1)^n(1-2^{-2n-1})(2\pi)^{2n}}{(2n)!}\zeta'(-2n)$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.7. (Aygüneş ve Şimşek 2012) $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$T_1(B_{2n}(x)) = \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}B_{2n}B_{2n}(x)$$

tir.

Kanıt. Teorem 3.1.1-(ii) 'de $N = 1$ alınırsa ve $P_{n,1}(x) = B_n(x)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$T_1(B_n(x)) = \zeta(n,1)\,B_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^n}\right)B_n(x) = \zeta(n)B_n(x)$$

ile

$$T_1(B_n(x)) = \zeta(n)B_n(x) \tag{18}$$

bulunur. n'nin çift olduğu durumlar için,

$$T_1(B_{2n}(x)) = \zeta(2n)B_{2n}(x) \tag{19}$$

tir. (11) bağıntısından,

$$T_1(B_{2n}(x)) = \frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}B_{2n}(x) \tag{20}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.8. (Aygüneş ve Şimşek 2012) $\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ için,

$$T_1(B_{2n}(x)) = B_{2n}(x)\frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(4n+2)(2n)!}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_{2k}B_{2n-2k}$$

dır.

Kanıt. (19), (10) ve (11) bağıntılarından,

$$\begin{aligned}
T_1(B_{2n}(x)) &= \zeta(2n)B_{2n}(x) \\
&= \left(\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\zeta(2k)\zeta(2n-2k)\right)B_{2n}(x) \\
&= \frac{2}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}\frac{(-1)^{n-k+1}(2\pi)^{2n-2k}B_{2n-2k}}{2(2n-2k)!}\right)B_{2n}(x) \\
&= \frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}B_{2n}(x)}{(4n+2)(2n)!}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_{2k}B_{2n-2k}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.9. (Aygüneş ve Şimşek 2012) $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$T_1(B_{2n}(x)) = \frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{4(2n-1)!(2^{2n}-1)}E_{2n-1}(0)B_{2n}(x)$$

tir.

Kanıt. (19) ve (12) bağıntılarından,

$$\begin{aligned}
T_1(B_{2n}(x)) &= \zeta(2n)B_{2n}(x) \\
&= \left(\frac{(2\pi)^{2n}E_{2n-1}(0)}{4(-1)^n(2n-1)!(2^{2n}-1)}\right)B_{2n}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.7 ve Teorem 3.2.9 kullanılarak, Bernoulli sayıları ve Euler sayıları arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.3. $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$E_{2n-1}(0) = \frac{(1-2^{2n})B_{2n}}{n}$$

dir.

Kanıt. Teorem 3.2.7 ve Teorem 3.2.9'daki bağıntıların sol tarafları eşit olduğu için sağ tarafları da birbirine eşitlenirse,

$$\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}B_{2n} = \frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{4(2n-1)!(2^{2n}-1)}E_{2n-1}(0)$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.10. (Aygüneş ve Şimşek 2012) $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$T_1(B_{2n+1}(x)) = B_{2n+1}(x)\frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n+1}}{2(2n+1)!}\int_0^1 B_{2n+1}(t)\cot(\pi t)dt$$

dir.

Kanıt. (18) bağıntısında n'nin tek olduğu durumlar göz önüne alınırsa,

$$T_1(B_{2n+1}(x)) = \zeta(2n+1)B_{2n+1}(x) \tag{21}$$

bulunur ve (13) bağıntısından,

$$T_1(B_{2n+1}(x)) = \left(\frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n+1}}{2(2n+1)!}\int_0^1 B_{2n+1}(t)\cot(\pi t)dt\right)B_{2n+1}(x)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.11. (Aygüneş ve Şimşek 2012) $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$T_1(B_{2n+1}(x)) = \frac{2(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(2n)!}\zeta'(-2n)B_{2n+1}(x)$$

tir.

Kanıt. (21) ve (14) bağıntılarından,

$$\begin{aligned} T_1(B_{2n+1}(x)) &= \zeta(2n+1)B_{2n+1}(x) \\ &= \left(\frac{2(-1)^n\zeta'(-2n)(2\pi)^{2n}}{(2n)!}\right)B_{2n+1}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.3. Kısmi Hecke Operatörlerinin Genocchi Tipi Polinomlara Uygulanması

Bu bölümde kısmi Hecke operatörlerinin Genocchi tipi polinomlara uygulanması ve Genocchi tipi polinomlarla ilgili bazı özellikler verilecektir.

Tanım 3.3.1. (Luo 2009) $G_n(x)$ ile gösterilen Genocchi polinomları

$$\frac{2te^{xt}}{1+e^t} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad (|t| < \pi)$$

ifadesi ile tanımlanır.

Özel olarak $x = 0$ için

$$G_n(0) = G_n$$

dir. Burada G_n sayısına Genocchi sayısı adı verilir.

$n \in \mathbb{N}$ için, Genocchi polinomları ile Euler polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir (Luo 2009):

$$G_n(x) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ nE_{n-1}(x), & n \geq 1. \end{cases}$$

$m \geq 1$ ve m tek sayı olsun. Bernoulli ve Euler polinomları için verilen Raabe bağıntılarının kanıtlarına benzer şekilde, Genocchi polinomlarının üreteç fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k G_n\left(\frac{x+k}{m}\right)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \frac{2te^{\left(\frac{x+k}{m}\right)t}}{1+e^t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} m^{1-n} G_n(x)\frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

bulunur. Bu bağıntıdan,

$$G_n(x) = m^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k G_n\left(\frac{x+k}{m}\right) \quad ,(\forall n \in \mathbb{N})$$

elde edilir. Burada $m \geq 1$ ve m tek sayıdır.

Teorem 3.1.1-(iii)'te verilen üreteç fonksiyonu ile tanımlanan $P_{n-1,N}(x)$ polinomları kullanılarak, Genocchi tipi polinomları aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 3.3.2. $N \in \mathbb{N}^*$ ve $N \geq 2$ olsun. $\mathcal{G}_{n,N}(x)$ ile gösterilen Genocchi tipi polinomları

$$\mathcal{G}_{n,N}(x) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ nP_{n-1,N}(x), & n \geq 1 \end{cases}$$

ifadesi ile tanımlanır. Burada özel olarak $N = 2$ alınırsa, $\mathcal{G}_{n,2}(x) = G_n(x)$ ile Genocchi polinomları elde edilir.

Tanım 3.3.2'de görüldüğü gibi, $\mathcal{G}_{n,N}(x)$ polinomlarının derecesi $n-1$'dir.

Teorem 3.3.1. $a \equiv 1(\operatorname{mod} N)$ ve $a, n, N \in \mathbb{N}^*$ $(N \geq 2)$ olsun. Bu durumda,

(i)

$$T_{\chi_{a,N}}(\mathcal{G}_{n,N}(x)) = a^{1-n}\mathcal{G}_{n,N}(x)$$

eşitliğini sağlayan bir tek $(\mathcal{G}_{n,N})_{n\in\mathbb{N}^*}$ Genocchi tipi polinomlar dizisi vardır.

(ii)

$$T_N(\mathcal{G}_{n,N}(x)) = N^{1-n}\zeta\left(n-1, \frac{1}{N}\right)\mathcal{G}_{n,N}(x)$$

tir. Burada T_N operatörlerinin özfonksiyonları ve özdeğerleri, sırasıyla,

$$\mathcal{G}_{n,N}(x)$$

ve

$$N^{1-n}\zeta\left(n-1, \frac{1}{N}\right)$$

dir.

(iii) $\mathcal{G}_{n,N}(x)$'in üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_{n,N}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{(\xi_N - 1)te^{tx}}{\xi_N e^t - 1}$$

şeklindedir.

Kanıt-(i). Teorem 1.1-(i)'de n yerine $n-1$ alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{a-1}\chi_{a,N}(k)P_{n-1,N}\left(\frac{x+k}{a}\right) = a^{1-n}P_{n-1,N}(x)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin her iki tarafını n ile çarparsak,

$$T_{\chi_{a,N}}(\mathcal{G}_{n,N}(x)) = \sum_{k=0}^{a-1}\chi_{a,N}(k)nP_{n-1,N}\left(\frac{x+k}{a}\right) = a^{1-n}nP_{n-1,N}(x) = a^{1-n}\mathcal{G}_{n,N}(x)$$

elde edilir.

Kanıt-(ii). T_N operatörünün tanımından,

$$T_N(\mathcal{G}_{n,N}(x)) = \sum_{\substack{a\equiv 1 (\mathrm{mod}\, N)\\ a\geq 0}} T_{\chi_{a,N}}(\mathcal{G}_{n,N}(x)) = \left(\sum_{\substack{a\equiv 1 (\mathrm{mod}\, N)\\ a\geq 0}} a^{1-n} \right) \mathcal{G}_{n,N}(x)$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıda $a = 1 + kN$ $(k \in \mathbb{Z})$ alınırsa,

$$\begin{aligned} T_N(\mathcal{G}_{n,N}(x)) &= \sum_{k\geq 0} (1+kN)^{1-n}\, \mathcal{G}_{n,N}(x) \\ &= N^{1-n} \sum_{k\geq 0} \left(k + \frac{1}{N}\right)^{1-n} \mathcal{G}_{n,N}(x) = N^{1-n} \zeta\left(n-1, \frac{1}{N}\right) \mathcal{G}_{n,N}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Kanıt-(iii). Teorem 1.1-(iii) gereğince, $N \geq 2$ için $P_{n,N}(x)$'in üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,N}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{(\xi_N - 1)e^{tx}}{\xi_N e^t - 1}$$

tir. Yukarıdaki bağıntıda her iki taraf t ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{(\xi_N - 1)te^{tx}}{\xi_N e^t - 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,N}(x) \frac{t^{n+1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n P_{n-1,N}(x) \frac{t^n}{n(n-1)!} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan gerekli işlemler yapılırsa istenen elde edilir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ KISMİ HECKE OPERATÖRLERİ

4.1. Genelleştirilmiş Kısmi Hecke Operatörlerinin Genelleştirilmiş Euler Tipi Polinomlara Uygulanması

Bu bölümde genelleştirilmiş kısmi Hecke operatörleri tanımlanacaktır ve bu operatörlerin bazı özellikleri verilecektir. Daha sonra Euler tipi polinomlar tanımlanacaktır ve bu polinomların genelleştirilmiş Hecke tipi operatörler altındaki davranışları verilecektir.

$a, M \in \mathbb{N}^*$ ve $N_1, N_2, \cdots, N_M \in \mathbb{N}^*$ için

$$N(M) = (N_1, N_2, \cdots, N_M)$$

olsun.

İlk olarak $\chi_{a,N(M)}$ fonksiyonunu tanımını verelim:

Tanım 4.1.1.

$$\chi_{a,N(M)} : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

ile verilen $\chi_{a,N(M)}$ fonksiyonu

$$\chi_{a,N(M)}(k) = \prod_{j=1}^{M} \xi^k(N_j)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $0 \leq k \leq a-1$, $j \in \{1, 2, \cdots, M\}$ ve

$$\xi(N_j) = e^{\frac{2\pi i}{N_j}}$$

olmak üzere $\xi(N_j)$, N_j-ninci mertebeden birimin kökleridir.

$\chi_{a,N(M)}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $\chi_{a,N(M)}$ fonksiyonu $N_1 N_2 \cdots N_M$ ile periyodik bir fonksiyondur.

2. Bu bölümde $\chi_{a,N(M)}(k) \neq \frac{1}{a}$ alınacaktır. Eğer

$$\chi_{a,N(M)}(k) = \frac{1}{a}$$

alınırsa (5) bağıntısı ile verilen $\chi_{a,1}(k)$ fonksiyonu elde edilir.

3. $N_1 \geq 2$ ve $N_2 = N_3 = \cdots = N_M = 1$ alınırsa

$$\chi_{a,(N_1,1,1,\cdots,1)}(k) = \xi^k(N_1)\xi^k(1)\xi^k(1)\cdots\xi^k(1) = \xi^k(N_1)$$

bulunur.

Tanım 4.1.1 kullanılarak genelleştirilmiş kısmi Hecke operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 4.1.2. $P_{n,N(M)}(x) \in \mathbb{C}[x]$ olsun. $T_{\chi_{a,N(M)}}$ ile gösterilen genelleştirilmiş kısmi Hecke operatörü,

$$T_{\chi_{a,N(M)}}\left(P_{n,N(M)}(x)\right) = \sum_{k=0}^{a-1} \chi_{a,N(M)}(k) P_{n,N(M)}\left(\frac{x+k}{a}\right)$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.1.1'de verilmiş olan $P_{n,N(M)}$ polinomu katsayıları kompleks sayılar olan n-ninci dereceden bir polinomdur ve

$$T_{\chi_{a,N(M)}} : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$$

ile verilir. $T_{\chi_{a,N(M)}}$ operatörü $\mathbb{C}[x]$ vektör uzayı üzerinde lineer bir operatördür.

Tanım 4.1.1 ve Tanım 4.1.2 yardımıyla genelleştirilmiş kısmi Hecke tipi operatörünün tanımını verelim:

Tanım 4.1.3. $T_{N(M)}$ ile gösterilen genelleştirilmiş kısmi Hecke tipi operatörü

$$T_{N(M)} = \sum_{a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, N_1 N_2 \cdots N_M)} T_{\chi_{a,N(M)}}$$

ile tanımlanır.

$T_{\chi_{a,N(M)}}$ operatörü $\mathbb{C}[x]$ vektör uzayı üzerinde bir lineer operatör olduğundan $T_{N(M)}$ operatörü de $\mathbb{C}[x]$ üzerinde bir lineer operatördür.

Bu bölümde $P_{n,N(M)}(x) \in \mathbb{C}[x]$ ve $a \equiv 1(\mathrm{mod}\, N_1 N_2 \cdots N_M)$ alınacaktır. Ayrıca, Teorem 4.1.1 ile, aşağıdaki fonksiyonel denklemin ispatı verilecektir.

$$T_{\chi_{a,N(M)}}\left(P_{n,N(M)}(x)\right) = a^{-n} P_{n,N(M)}(x). \tag{22}$$

(22) ile verilen fonksiyonel denklemi sağlayan $P_{n,N(M)}$ polinomları birim başkatsayılı (monik) polinomlardır ve $T_{\chi_{a,N(M)}}$ operatörü polinomun derecesini korur. (22) bağıntısının ispatı için, öncelikle aşağıdaki Yardımcı Teoremi vereceğiz.

Yardımcı Teorem 4.1.1. $a \equiv 1(\mathrm{mod}\, N_1 N_2 \cdots N_M)$ olsun. Herhangi bir $a, M \in \mathbb{N}^*$ ve $N_1, N_2, \cdots, N_M \in \mathbb{N}^*$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $T_{\chi_{a,N(M)}}$ operatörü, $\mathbb{C}[x]$ kompleks polinomlar halkasında dereceyi korur.

(ii)

$$T_{\chi_{a,N(M)}}(x^m) = \begin{cases} S_0 = 1, & m = 0 \\ a^{-m} x^m + a^{-m} \displaystyle\sum_{v=0}^{m-1} \binom{m}{v} S_{m-v}\left(\chi_{a,N(M)}\right) x^v, & m \geq 1. \end{cases}$$

Burada,

$$S_{m-v}\left(\chi_{a,N(M)}\right) = \sum_{k=0}^{a-1} \chi_{a,N(M)}(k) k^{m-v}.$$

(iii) Herhangi bir $m \in \mathbb{N}^*$ için

$$\mathbb{C}_m[x] = \{P(x) \in \mathbb{C}[x] : der P(x) \leq m\}$$

ile verilen $\mathbb{C}_m$'nin kanonik $\mathbb{C}$-tabanı

$$\beta_m = \left\{1, x, x^2, \cdots, x^m\right\}$$

olsun. O zaman, β_m tabanında $T_{\chi_{a,N(M)}}$'ye karşılık gelen $M_{\beta_m}(T_{\chi_{a,N(M)}})$ matrisi aşağıdaki gibi verilir:

$$M_{\beta_m}\left(T_{\chi_{a,N(M)}}\right) = \begin{pmatrix} S_0^* & a^{-1}S_1^* & a^{-2}S_2^* & \ldots & a^{-m}S_m^* \\ 0 & a^{-1}S_0^* & 2a^{-2}S_1^* & \ldots & a^{-m}\binom{m}{1}S_{m-1}^* \\ 0 & 0 & a^{-2}S_0^* & \ldots & a^{-m}\binom{m}{2}S_{m-2}^* \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a^{-m}\binom{m}{3}S_{m-3}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a^{-m}S_0^* \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Burada, $S_l^* = \sum_{k=0}^{a-1} \chi_{a,N(M)}(k)k^l$, $(0 \leq l \leq m-1)$ şeklindedir.

(iv) $a, b \geq 1$ olsun. $a \equiv b \equiv 1(\mathrm{mod}\, N_1 N_2 \cdots N_M)$ için

$$T_{\chi_{a,N(M)}} T_{\chi_{b,N(M)}} = T_{\chi_{b,N(M)}} T_{\chi_{a,N(M)}}$$

dir.

O zaman (22) fonksiyonel denklemini sağlayan n-ninci dereceden $P_{n,N(M)}$ polinomları vardır. Hatta, verilen n tamsayısı için (22) bağıntısını sağlayan n-ninci dereceden bir tek $(P_{n,N(M)})_{n\in\mathbb{N}}$ birim başkatsayılı polinomlar dizisi vardır.

Kanıt-(i). (22) bağıntısını sağlayan herhangi bir $\left(P_{n,N(M)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ polinomu varsa, o zaman

$$S_0^* = \sum_{k=0}^{a-1} \chi_{a,N(M)}(k) = 1$$

olduğundan (i) özelliği sağlanır.

Kanıt-(ii).

$$\sum_{k=0}^{a-1} \chi_{a,N(M)}(k) = 1$$

olduğundan, $m = 0$ için

$$T_{\chi_{a,N(M)}}(1) = 1$$

dir. Genelleştirilmiş kısmi Hecke operatörünün tanımından ,

$$\begin{aligned}
T_{\chi_{a,N(M)}}(x^m) &= \sum_{k=0}^{a-1} \chi_{a,N(M)}(k) \left(\frac{x+k}{a}\right)^m \\
&= a^{-m} \sum_{k=0}^{a-1} \chi_{a,N(M)}(k) \left(\sum_{v=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} x^v k^{m-v}\right) \\
&= a^{-m} \sum_{v=0}^{m} \left(\begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{a-1} \chi_{a,N(M)}(k) k^{m-v}\right) x^v
\end{aligned}$$

elde edilir.

Kanıt-(iii). $m \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere

$$\beta_m = \{1, x, x^2, \cdots, x^m\}$$

tabanı için $T_{\chi_{a,N(M)}}$ operatörünü kullanırsak, (ii)'den $M_{\beta_m}\left(T_{\chi_{a,N(M)}}\right)$ matrisi (23) aracılığıyla verilir.

$$T_{\chi_{a,N(M)}}(x^m) = a^{-m}\sum_{v=0}^{m}\left(\binom{m}{v}\sum_{k=0}^{a-1}\chi_{a,N(M)}(k)k^{m-v}\right)x^v$$

bağıntısı kullanılarak tümevarım yoluyla (23) matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$T_{\chi_{a,N(M)}}(x^0) = \sum_{k=0}^{a-1}\chi_{a,N(M)}(k) = S_0\left(\chi_{a,N(M)}\right),$$

$$\begin{aligned} T_{\chi_{a,N(M)}}(x^1) &= a^{-1}\sum_{v=0}^{1}\left(\binom{1}{v}S_{1-v}\left(\chi_{a,N(M)}\right)\right)x^v \\ &= a^{-1}S_1\left(\chi_{a,N(M)}\right) + a^{-1}S_0\left(\chi_{a,N(M)}\right)x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\chi_{a,N(M)}}(x^2) &= a^{-2}\sum_{v=0}^{2}\left(\binom{2}{v}S_{2-v}\left(\chi_{a,N(M)}\right)\right)x^v \\ &= \binom{2}{0}a^{-2}S_2\left(\chi_{a,N(M)}\right) + \binom{2}{1}a^{-2}S_1\left(\chi_{a,N(M)}\right)x \\ &\quad + \binom{2}{2}a^{-2}S_0\left(\chi_{a,N(M)}\right)x^2, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T_{\chi_{a,N(M)}}(x^3) &= a^{-3}\sum_{v=0}^{3}\left(\binom{3}{v}S_{3-v}\left(\chi_{a,N(M)}\right)\right)x^v \\ &= \binom{3}{0}a^{-3}S_3\left(\chi_{a,N(M)}\right) + \binom{3}{1}a^{-3}S_2\left(\chi_{a,N(M)}\right)x + \\ &\quad + \binom{3}{2}a^{-3}S_1\left(\chi_{a,N(M)}\right)x^2 + \binom{3}{3}a^{-3}S_0\left(\chi_{a,N(M)}\right)x^3. \end{aligned}$$

Bu şekilde devam edilirse, her $m = 0, 1, 2, 3, \cdots$ için x^m 'nin katsayıları (23) matrisinin m-inci sütunu olur.

Kanıt-(iv). $a = 1$ için $T_{\chi_{a,N(M)}}$ operatörünün matrisi diagonaldir. Çünkü,

$$T_{\chi_{1,N(M)}}(x^m) = \chi_{1,N(M)}(0)x^m$$

dir. $\forall a \geq 2$ için $M_{\beta_m}\left(T_{\chi_{a,N(M)}}\right)$ bir diagonalleştirilebilir matristir ve $m+1$ tane farklı özdeğere sahiptir ve bu özdeğerler, sırasıyla,

$$S_0^*, a^{-1}S_0^*, a^{-2}S_0^*, \cdots, a^{-m}S_0^*$$

şeklindedir. O zaman, (22) bağıntısı sağlanacak şekilde $\left(P_{n,N(M)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ polinomları bulunur.

$\forall a \geq 1$ için $M_{\beta_m}\left(T_{\chi_{a,N(M)}}\right)$ diagonalleştirilebilir bir matris olduğu için, $\mathbb{C}_m[x]$'in bir $\mathbb{C}$-tabanı olan $\widetilde{\beta}_m$vardır ki

$$\mathbf{M}_{\widetilde{\beta}_m}\left(T_{\chi_{a,N(M)}}\right)=\begin{pmatrix} S_0^* & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a^{-1}S_0^* & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2}S_0^* & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & a^{-m}S_0^* \end{pmatrix} \tag{24}$$

ile verilen $\mathbf{M}_{\widetilde{\beta}_m}\left(T_{\chi_{a,N(M)}}\right)$ matrisi diagonaldir.

$\mathbb{C}$'de $n\times n$ tipinde A ve B matrislerinin aynı anda diagonalleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart

$$AB = BA$$

olmasıdır. $T_{\chi_{a,N(M)}}$ ve $T_{\chi_{b,N(M)}}$ lineer operatörleri $\mathbb{C}[x]$'in kanonik bazı için diagonaldir. O zaman A ve B'nin aynı anda diagonalleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$T_{\chi_{a,N(M)}}T_{\chi_{b,N(M)}} = T_{\chi_{b,N(M)}}T_{\chi_{a,N(M)}}$$

olmasıdır. O halde, $\mathbb{C}[x]$'te $\left(P_{n,N(M)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$'nin varlığını kanıtlamak için

$$T_{\chi_{a,N(M)}}T_{\chi_{b,N(M)}} = T_{\chi_{b,N(M)}}T_{\chi_{a,N(M)}}$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$a\equiv b\equiv 1(\operatorname{mod} N_1N_2\cdots N_M)$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\chi_{a,N(M)}(k_1)\chi_{b,N(M)}(k_2) &= \xi^{k_1}(N_1)\xi^{k_1}(N_2)\cdots\xi^{k_1}(N_M)\xi^{k_2}(N_1)\xi^{k_2}(N_2)\cdots\xi^{k_2}(N_M) \\ &= \xi^{k_1b+k_2}(N_1)\xi^{k_1b+k_2}(N_2)\cdots\xi^{k_1b+k_2}(N_M) \\ &= \xi^{k_1+k_2a}(N_1)\xi^{k_1+k_2a}(N_2)\cdots\xi^{k_1+k_2a}(N_M)\end{aligned}$$

bulunur.

O halde, $P\in\mathbb{C}[x]$ için,

$$\chi_{a,N(M)}(k_1)\chi_{b,N(M)}(k_2) = \chi_{ab,N(M)}(k_1b+k_2) = \chi_{ab,N(M)}(k_1+k_2a)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
T_{\chi_{a,N(M)}}T_{\chi_{b,N(M)}}\left(P(x)\right) &= \sum_{\substack{0\leq k_1\leq a-1\\ 0\leq k_2\leq b-1}} \chi_{a,N(M)}(k_1)\chi_{b,N(M)}(k_2)P\left(\frac{x+k_1b+k_2}{ab}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{ab-1}\chi_{ab,N(M)}(k)P\left(\frac{x+k}{ab}\right)\\
&= T_{\chi_{ab,N(M)}}(P(x))\\
&= T_{\chi_{ba,N(M)}}(P(x))\\
&= T_{\chi_{b,N(M)}}T_{\chi_{a,N(M)}}(P(x))
\end{aligned}$$

bulunur, burada $k=k_1b+k_2$ dir.

Bu durumda, $N_1,N_2,\cdots,N_M\in\mathbb{N}^*$ için, ($\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall a\equiv 1(\mathrm{mod}\, N_1N_2\cdots N_M)$)

$$T_{\chi_{a,N(M)}}\left(P_{n,N(M)}\right)=a^{-n}P_{n,N(M)}$$

olacak biçimde n-ninci dereceden $P_{n,N}(x)\in\mathbb{C}[x]$ polinomlarının varlığını kanıtlamış oluruz.

$$P_{n,N(M)}\in\mathbb{Q}(\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M))[x]$$

olduğunu göstermek için $b_0=1$ ve

$$P_{n,N(M)}(x)=\sum_{v=0}^{n}b_vx^{n-v}$$

ile herhangi bir $\left(P_{n,N(M)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ birim başkatsayılı polinomu tanımlayalım. Burada,

$$P_{n,N(M)}(x)\in\mathbb{C}[x]$$

tir. O zaman,

$$a^{-n}P_{n,N(M)}(x)=T_{\chi_{a,N(M)}}\left(P_{n,N(M)}(x)\right)=\sum_{k=0}^{a-1}\chi_{a,N(M)}(k)P_{n,N(M)}\left(\frac{x+k}{a}\right) \quad (25)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{a-1}\chi_{a,N(M)}(k)\sum_{v=0}^{n}b_v\left(\frac{x+k}{a}\right)^{n-v} &= \sum_{k=0}^{a-1}\chi_{a,N(M)}(k)\sum_{v=0}^{n}b_va^{v-n}\sum_{\lambda=0}^{n-v}\left(\begin{array}{c} n-v\\ \lambda\end{array}\right)x^{n-v-\lambda}k^{\lambda}\\
&= \sum_{v=0}^{n}b_v\sum_{\lambda=0}^{n-v}x^{n-v-\lambda}a^{v-n}\left(\begin{array}{c} n-v\\ \lambda\end{array}\right)\left(\sum_{k=0}^{a-1}\chi_{a,N(M)}(k)k^{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

dır. $\lambda+v=r$ ve

$$S_\lambda\left(\chi_{a,N(M)}\right)=\sum_{k=0}^{a-1}\chi_{a,N(M)}(k)k^{\lambda}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{a-1}\chi_{a,N(M)}(k)\sum_{v=0}^{n}b_v\left(\frac{x+k}{a}\right)^{n-v} &= \sum_{v=0}^{n}b_v\sum_{r=0}^{n}x^{n-r}a^{v-n}\binom{n-v}{r-v}S_{r-v}\left(\chi_{a,N(M)}\right)\\ &= \sum_{r=0}^{n}b_r x^{n-r}a^{-n}=a^{-n}P_{n,N(M)}(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi x^{n-r}'nin katsayılarını eşitlersek,

$$\sum_{r=0}^{n}b_r a^{-n}x^{n-r}=\sum_{r=0}^{n}\left(\sum_{v=0}^{n}b_v a^{v-n}\binom{n-v}{r-v}S_{r-v}\left(\chi_{a,N(M)}\right)\right)x^{n-r}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikten

$$b_r=\sum_{v=0}^{r}b_v a^{v}\binom{n-v}{r-v}S_{r-v}\left(\chi_{a,N(M)}\right)=a^r b_r+\sum_{v=0}^{r-1}b_v a^{v}\binom{n-v}{r-v}S_{r-v}\left(\chi_{a,N(M)}\right)$$

bulunur. O halde

$$(a^r-1)b_r=-\sum_{v=0}^{r-1}\binom{n-v}{r-v}b_v a^v S_{r-v}\left(\chi_{a,N(M)}\right)$$

elde edilir.

$$S_{r-v}\left(\chi_{a,N(M)}\right)=\sum_{k=0}^{a-1}\chi_{a,N(M)}k^{r-v}\Rightarrow S_{r-v}(\chi_a)\in\mathbb{Z}[\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M)]$$

olduğundan dolayı

$$b_r\in\mathbb{Q}(\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M))$$

dir.

$P_{n,N(M)}(x)$ ve $Q_{n,N(M)}(x)$, (25) bağıntısını sağlayan ve derecesi n olan farklı iki birim başkatsayılı polinom olsun.

Varsayalım ki, $d<n$ ve $A_0\neq 0$ iken

$$P_{n,N(M)}(x)-Q_{n,N(M)}(x)=\Delta_{d,N(M)}(x)=A_0x^d+A_1x^{d-1}+\cdots$$

olsun. (25) bağıntısından,

$$\sum_{k=0}^{a-1}\chi_{a,N(M)}(k)\Delta_{d,N(M)}\left(\frac{x+k}{a}\right)=a^{-n}(A_0x^d+A_1x^{d-1}+\cdots)$$

elde edilir. Buradaki bağıntıdan her iki tarafta x^d katsayılarını incelersek

$$A_0=a^{d-n}A_0$$

olduğu görülür. Bu da bir çelişkidir. Çünkü $A_0 \neq 0$, $d < n$ ve $a \geq 2$'dir. Dolayısıyla (iv) ispatlanmış olur.

Not 4.1.1. Yardımcı Teorem 4.1.1-(iii)'ten görülür ki, β_m tabanına göre $T_{\chi_{a,N(M)}}$ operatörünün karakteristik polinomu, $m \in \mathbb{N}^*$ için, $S_0^* = 1$ ve

$$M_m(t) = \prod_{j=0}^{m} \left(t - \frac{S_0^*}{a^j} \right)$$

ile verilir. Burada karakteristik polinomun sıfıra eşitlenmesiyle, β_m tabanına göre $T_{\chi_{a,N(M)}}$ operatörüne karşılık gelen özdeğerler:

$$\left\{1, a^{-1}, a^{-2}, \cdots, a^{-m}\right\}$$

olarak bulunur. Ayrıca bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler $(P_{n,N(M)})_{n\in\mathbb{N}}$ monik polinomlar dizisidir.

Teorem 4.1.1. $a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, N_1 N_2 \cdots N_M)$ ve $a, N_1, N_2, \cdots, N_M \in \mathbb{N}^*$ olsun. Bu durumda,

(i) $P_{n,N(M)}$ ile n-ninci dereceden birim başkatsayılı monik polinom verilsin. O zaman

$$T_{\chi_{a,N(M)}} \left(P_{n,N(M)}(x)\right) = a^{-n} P_{n,N(M)}(x)$$

eşitliğini sağlayan bir tek $P_{n,N} \in \mathbb{Q}(\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M))[x]$ polinomlar dizisi vardır.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$T_{N(M)} \left(P_{n,N(M)}(x)\right) = \left(\prod_{j=1}^{M} N_j\right)^{-n} \zeta \left(n, \prod_{j=1}^{M} \frac{1}{N_j}\right) P_{n,N(M)}(x)$$

tir. Burada $\zeta(s,x)$ Hurwitz-zeta fonksiyonunu göstermektedir ve $\mathrm{Re}\, s > 1$ için, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\zeta(s,x) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(x+k)^s}.$$

Tanım 2.1.3'ten yararlanılarak, $T_{N(M)}$ operatörlerinin özfonksiyonlarının ve özdeğerlerinin, sırasıyla, $P_{n,N(M)}(x)$ ve

$$(N_1 N_2 \cdots N_M)^{-n} \zeta \left(n, \frac{1}{N_1 N_2 \cdots N_M}\right)$$

elde edilir.

(iii) $P_{n,N(M)}(x)$'in üreteç fonksiyonu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,N(M)}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{\left(\left(\prod_{j=1}^{M}\xi(N_j)\right)-1\right)e^{tx}}{\left(\prod_{j=1}^{M}\xi(N_j)\right)e^t-1}, \qquad \left(\left|t+\sum_{j=1}^{M}\frac{2\pi i}{N_j}\right|<2\pi\right)$$

olarak tanımlanır.

Bundan sonra $P_{n,N(M)}(x)$ polinomlarına genelleştirilmiş Euler tipi polinomlar diyeceğiz.

Kanıt-(i). Keyfi $n \geq 0$ ve $N_1, N_2, \cdots, N_M \geq 1$ olsun. $\forall a \equiv 1(\operatorname{mod} N_1N_2\cdots N_M)$ için Yardımcı Teorem 4.1.1'den,

$$T_{\chi_{a,N(M)}}\left(P_{n,N(M)}\right) = a^{-n}P_{n,N(M)}(x)$$

bulunur. Burada $P_{n,N(M)} \in \mathbb{Q}(\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M))[x]$ monik polinomunun derecesi n'dir ve $P_{n,N(M)}$ tektir. O halde, Teorem 4.1.1-(i) ispatlanmış olur.

Kanıt-(ii).

$$\begin{aligned} T_{N(M)}\left(P_{n,N(M)}(x)\right) &= \sum_{\substack{a\equiv 1(\operatorname{mod} N_1N_2\cdots N_M)\\ a\geq 0}} T_{\chi_{a,N(M)}}\left(P_{n,N(M)}(x)\right) \\ &= \left(\sum_{\substack{a\equiv 1(\operatorname{mod} N_1N_2\cdots N_M)\\ a\geq 0}} a^{-n}\right)P_{n,N(M)}(x) \end{aligned}$$

olsun. $a = 1 + kN_1N_2\cdots N_M$ $(k \geq 0)$ için,

$$\begin{aligned} T_N\left(P_{n,N(M)}(x)\right) &= \sum_{k\geq 0}(1+kN_1N_2\cdots N_M)^{-n}P_{n,N(M)}(x) \\ &= (N_1N_2\cdots N_M)^{-n}\sum_{k\geq 0}\left(k+\frac{1}{N_1N_2\cdots N_M}\right)^{-n}P_{n,N(M)}(x) \\ &= (N_1N_2\cdots N_M)^{-n}\zeta\left(n,\frac{1}{N_1N_2\cdots N_M}\right)P_{n,N(M)}(x) \end{aligned}$$

bulunur.

Kanıt-(iii). $F_{N(M)}(x,t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$F_{N(M)}(x,t) = \frac{(\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M)-1)e^{tx}}{\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M)e^t-1}.$$

$F_{N(M)}(x,t)$'yi t'nin kuvvetlerine göre açalım ve $\Psi_{n,N(M)}(x)$ polinomunun üreteç fonksiyonu $F_{N(M)}(x,t)$ olsun; yani

$$F_{N(M)}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{n,N(M)}(x)\frac{t^n}{n!} \tag{26}$$

dir.

$$\Psi_{n,N(M)}(x)=A_0^{(n,N(M))}x^n+A_1^{(n,N(M))}x^{n-1}+\cdots+A_n^{(n,N(M))}$$

olsun. (26) bağıntısında, x yerine $\frac{1}{y}$ ve t yerine ty alınırsa,

$$\begin{aligned} F_{N(M)}\left(\frac{1}{y},ty\right) &= \frac{(\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M)-1)e^t}{\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M)e^{ty}-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}y^n\Psi_{n,N(M)}(x)\frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir.

$y\longrightarrow 0$ iken,

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}A_0^{(n,N(M))}\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir.

Bu durumda $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$A_0^{(n,N(M))}=1$$

olduğundan dolayı $\Psi_{n,N(M)}(x)$ birim başkatsayılı polinomdur.

(26) bağıntısında x yerine $x+\frac{k}{a}$ alıp $\chi_{a,N(M)}(k)$ ile çarptıktan sonra

$$k\in\{0,1,\cdots,a-1\}$$

için k üzerinde sonlu toplam alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{a-1}\chi_{a,N(M)}(k)\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{n,N(M)}\left(x+\frac{k}{a}\right)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{a-1}F_{N(M)}\left(x+\frac{k}{a},t\right)\chi_{a,N(M)}(k) \\ &= \frac{(\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M)-1)e^{xt}}{\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M)e^t-1} \\ &\quad\times\frac{(\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M))^a e^t-1}{\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M)e^{\frac{t}{a}}-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $a\equiv 1(\operatorname{mod} N_1N_2\cdots N_M)$ ve $k\in\mathbb{N}$ için $a=kN_1N_2\cdots N_M+1$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{a-1}\xi_N^k\Psi_{n,N(M)}\left(x+\frac{k}{a}\right)\right)\frac{t^n}{n!}=\frac{(\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M)-1)e^{xt}}{\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M)e^{\frac{t}{a}}-1} \tag{27}$$

elde edilir. Şimdi (26) bağıntısında x yerine ax ve t yerine $\frac{t}{a}$ alınırsa,

$$F_{N(M)}\left(ax, \frac{t}{a}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n} \Psi_{n,N(M)}(ax) \frac{t^n}{n!} = \frac{(\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M) - 1)e^{tx}}{\xi(N_1)\xi(N_2)\cdots\xi(N_M)e^{\frac{t}{a}} - 1} \quad (28)$$

bulunur.

(27) ve (28) bağıntılarındaki $\frac{t^n}{n!}$'in katsayılarından $\Psi_{n,N(M)}(x)$'in (22) fonksiyonel denklemini sağladığı sonucunu çıkarabiliriz.

$\Psi_{n,N(M)}(x)$ monik polinom olduğundan, Teorem 1.1 aracılığıyla,

$$\Psi_{n,N(M)}(x) = P_{n,N(M)}(x)$$

elde edilir.

Not 4.1.2. $M = 1$ için Yardımcı Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.1, sırasıyla, Yardımcı Teorem 3.1.1'e ve Teorem 3.1.1'e indirgenir.

Not 4.1.3. $1 \leq j \leq M$ olacak biçimdeki bir tek $j_0 \in \{1, 2, \cdots, M\}$ olsun. Eğer

$$N_1 = N_2 = \cdots = N_{j_0-1} = N_{j_0+1} = \cdots = N_M = 1$$

ve $N_{j_0} \geq 2$ ise $P_{n,N(M)}(x)$ polinomu $P_{n,N_{j_0}}(x)$ polinomuna indirgenir. Burada $P_{n,N_{j_0}}(x)$ polinomu Teorem 3.1.1'de tanımlanır.

Teorem 4.1.1'in bazı özel durumlarını verelim:

$N_1 \geq 2$ ve $N_2 = N_3 = \cdots = N_M = 1$ olsun. Bu durumda,

$$\chi_{a,(N_1,1,1,\cdots,1)}(k) = \xi^k(N_1)$$

bulunur. Burada $\chi_{a,(N_1,1,1,\cdots,1)}(k)$ fonksiyonuyla, Bölüm 3.1'de tanımlanan $\chi_{a,N}(k) = \xi^k(N)$ fonksiyonu elde edilir.

Teorem 4.1.1-(i)'den,

$$T_{\chi_{a,(N_1,1,1,\cdots,1)}}\left(P_{n,(N_1,1,1,\cdots,1)}(x)\right) = a^{-n} P_{n,(N_1,1,1,\cdots,1)}(x)$$

ya da

$$T_{\chi_{a,N_1}}\left(P_{n,N_1}(x)\right) = a^{-n} P_{n,N_1}(x)$$

olacak biçimde bir tek $(P_{n,N_1})_{n\in\mathbb{N}}$ polinomlar dizisi vardır ve

$$P_{n,N_1} \in \mathbb{Q}(\xi(N_1))[x]$$

tir. Böylelikle Teorem 4.1.1-(i), Teorem 3.1.1-(i)'e indirgenir.

Teorem 4.1.1-(ii)'den,$\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$T_{(N_1,1,1,\cdots,1)}\left(P_{n,(N_1,1,1,\cdots,1)}(x)\right) = (N_1)^{-n}\zeta\left(n, \frac{1}{N_1}\right) P_{n,(N_1,1,1,\cdots,1)}(x)$$

ya da

$$T_{N_1}\left(P_{n,N_1}(x)\right) = (N_1)^{-n}\zeta\left(n, \frac{1}{N_1}\right) P_{n,N_1}(x)$$

tir. Böylelikle Teorem 4.1.1-(ii), Teorem 3.1.1-(ii)'ye indirgenir.

Teorem 4.1.1-(iii)'ten, $P_{n,N(M)}(x)$'in üreteç fonksiyonu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,(N_1,1,1,\cdots,1)}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{(\xi(N_1)\xi(1)\xi(1)\cdots\xi(1)-1)\,e^{tx}}{\xi(N_1)\xi(1)\xi(1)\cdots\xi(1)e^t - 1}$$

ya da

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,N_1}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{(\xi(N_1)-1)\,e^{tx}}{\xi(N_1)e^t - 1}$$

şeklinde tanımlanır. Böylelikle Teorem 4.1.1-(iii), Teorem 3.1.1-(iii)'e indirgenir.

Teorem 4.1.2.

$$T_{N(M)}(P_{n,N(M)}(x)) = H(n,1,N_1N_2\cdots N_M)P_{n,N(M)}(x)$$

ile verilir. Burada $H(n,1,N_1N_2\cdots N_M)$ fonksiyonu, kısmi zeta fonksiyonudur. Bu fonksiyon $N_1, N_2, \cdots N_M \in \mathbb{Z}^+$ ve $\operatorname{Re} s > 1$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$H(n,1,N_1N_2\cdots N_M) = \sum_{\substack{n\equiv 1 (\operatorname{mod} N_1N_2\cdots N_M)\\ n>0}} \frac{1}{n^s}.$$

Kanıt. Kısmi zeta fonksiyonunun tanımında $F = N_1N_2\cdots N_M$, $s = n$ ve $a = 1$ alınırsa ve Teorem 4.1.1-(ii) 'den yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} T_{N(M)}\left(P_{n,N(M)}(x)\right) &= (N_1N_2\cdots N_M)^{-n}\,\zeta\left(n, \frac{1}{N_1N_2\cdots N_M}\right) P_{n,N(M)}(x) \\ &= H(n,1,N_1N_2\cdots N_M)P_{n,N(M)}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3. $T_{N(M)}$ operatörleri için $P_{n,N(M)}(x)$ özfonksiyonlarına karşılık gelen özdeğerler, her $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ için,

$$\left(\prod_{j=1}^{M} N_j\right)^{-n} \left\{\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left(\frac{d^n}{dz^n}\log\Gamma(z)\,|_{z=\frac{1}{N_1N_2\cdots N_M}}\right)\right\}$$

dir.

Kanıt. Her $r \in \mathbb{N}^*$ için,

$$\frac{(-1)^{r+1}}{r!}\frac{d^{r+1}}{(dz)^{r+1}}\log\Gamma(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(z+m)^{r+1}} = \zeta(1+r,z) \tag{29}$$

dir (Whittaker ve Watson 1963, Washington 1997).

Teorem 4.1.1-(ii)'den ve $r = n-1$ için (29) bağıntısından yararlanarak,

$$\begin{aligned} T_{N(M)}\left(P_{n,N(M)}(x)\right) &= \left(\prod_{j=1}^{M}N_j\right)^{-n}\zeta\left(n,\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{N_j}\right)P_{n,N(M)}(x) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{M}N_j\right)^{-n}\left\{\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left(\frac{d^n}{(dz)^n}\log\Gamma(z)\mid_{z=\frac{1}{N_1N_2\cdots N_M}}\right)\right\}P_{n,N(M)}(x). \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. Genelleştirilmiş Euler Tipi Polinomların Bazı Özellikleri

Bu bölümde, genelleştirilmiş Euler tipi polinomların indirgeme bağıntısı ve bazı özel polinomlarla ilişkileri verilecektir. Genelleştirilmiş Euler tipi sayılar tanımlanarak, genelleştirilmiş Euler tipi polinomların elde edilmesi mümkün olacaktır.

$P_{n,N(M)}(x)$ polinomlarının Frobenious-Euler polinomları ile ilişkisi aşağıdaki teoremde verilir.

Teorem 4.2.1. $M \in \mathbb{N}^*$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$P_{n,N(M)}(x) = H_n\left(x,\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{\xi(N_j)}\right)$$

dir.

Kanıt. Teorem 4.1.1-(iii)'ten

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_{n,N(M)}(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}H_n\left(x,\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{\xi(N_j)}\right)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemin her iki tarafındaki $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse istenen sonuç elde edilir.

$P_{n,N(M)}(x)$ polinomları aşağıdaki diferensiyel denklemi sağlar.

Teorem 4.2.2. $M \in \mathbb{N}^*$ olsun. Her $n, v \in \mathbb{N}$ için,

$$\frac{\partial^v}{\partial x^v} P_{n,N(M)}(x) = (n)_v P_{n-v,N(M)}(x)$$

tir. Burada

$$(n)_v = n(n-1)(n-2)\cdots(n-v+1)$$

dir.

Kanıt. Genelleştirilmiş Euler tipi polinomların üreteç fonksiyonunun x değişkenine göre v kez türevi alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^v}{\partial x^v} P_{n,N(M)}(x) \frac{t^n}{n!} = t^v \left(\frac{1 - \prod_{j=1}^{M} \frac{1}{\xi(N_j)}}{e^t - \prod_{j=1}^{M} \frac{1}{\xi(N_j)}} e^{tx} \right)$$

elde edilir. Bu bağıntıdan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^v}{\partial x^v} P_{n,N(M)}(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (n)_v P_{n-v,N(M)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemin her iki tarafındaki $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse istenen sonuç elde edilir.

$P_{n,N(M)}(x)$ polinomları ile Apostol-Bernoulli polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki teoremde verilir.

Teorem 4.2.3. $M \in \mathbb{N}^*$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için,

$$P_{n-1,N(M)}(x) = \left(\prod_{j=1}^{M} \xi(N_j) - 1 \right) \frac{1}{n} \mathcal{B}_n \left(x, \prod_{j=1}^{M} \xi(N_j) \right)$$

dir. Burada $\mathcal{B}_n(x, \lambda)$ Apostol-Bernoulli polinomunu göstermektedir.

Kanıt. Genelleştirilmiş Euler tipi polinomların üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibi düzenlenirse,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1,N(M)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\prod_{j=1}^{M} \xi(N_j) - 1}{e^t \prod_{j=1}^{M} \xi(N_j) - 1} e^{xt}.$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıdan

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1,N(M)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \left(\prod_{j=1}^{M} \xi(N_j) - 1 \right) \mathcal{B}_n \left(x, \prod_{j=1}^{M} \xi(N_j) \right) \right) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemin her iki tarafındaki $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ katsayıları eşitlenirse istenen sonuç elde edilir.

Tanım 4.2.1. $P_{n,N(M)}(0) = P_{n,N(M)}$ olsun. $P_{n,N(M)}$ ile gösterilen genelleştirilmiş Euler tipi sayılar

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,N(M)} \frac{t^n}{n!} = \frac{\prod_{j=1}^{M} \xi(N_j) - 1}{-1 + e^t \prod_{j=1}^{M} \xi(N_j)}$$

ifadesi ile tanımlanır.

Teorem 4.2.4. $M \in \mathbb{N}^*$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için,

$$P_{n,N(M)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} P_{j,N(M)}$$

dir.

Kanıt. Genelleştirilmiş Euler tipi polinomların üreteç fonksiyonunun tanımından,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,N(M)}(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,N(M)} \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!} \right)$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıdan

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n,N(M)}(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} P_{j,N(M)} \right) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin her iki tarafındaki $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse istenen sonuç elde edilir.

$$\chi_{a,N(M)}(0) = \chi_{a,N(M)}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, $P_{n,N(M)}$ ile gösterilen genelleştirilmiş Euler tipi sayıların ilk dört tanesi aşağıda verilir:

$$P_{0,N(M)} = 1,$$

$$P_{1,N(M)}=\frac{1}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1},$$
$$P_{2,N(M)}=\frac{2}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{2}}+\frac{1}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1},$$
$$P_{3,N(M)}=\frac{6}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{3}}+\frac{6}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{2}}+\frac{1}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1},$$

ve

$$P_{4,N(M)}=\frac{24}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{4}}+\frac{36}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{3}}+\frac{14}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{2}}+\frac{1}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1}$$

bulunur.

$P_{n,N(M)}(x)$ polinomlarının ilk dört terimi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$P_{0,N(M)}(x)=1,$$
$$P_{1,N(M)}(x)=x+\frac{1}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1},$$
$$P_{2,N(M)}(x)=x^{2}+x\left(\frac{2}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1}\right)+\left(\frac{2}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{2}}+\frac{1}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1}\right),$$

$$\begin{aligned}P_{3,N(M)}(x) &= x^{3}+x^{2}\left(\frac{3}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1}\right)+x\left(\frac{6}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{2}}+\frac{3}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1}\right)\\ &\quad+\left(\frac{6}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{3}}+\frac{6}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{2}}+\frac{1}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}P_{4,N(M)}(x) &= x^{4}+x^{3}\left(\frac{4}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1}\right)+x^{2}\left(\frac{12}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{2}}+\frac{6}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1}\right)\\ &\quad+x\left(\frac{24}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{3}}+\frac{24}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{2}}+\frac{4}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1}\right)\\ &\quad+\left(\frac{24}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{4}}+\frac{36}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{3}}+\frac{14}{\left(\chi_{a,N(M)}^{-1}-1\right)^{2}}+\frac{1}{\chi_{a,N(M)}^{-1}-1}\right)\end{aligned}$$

dir.

5. HECKE TİPİ OPERATÖRLERİN BAZI ÖZEL FONKSİYONLARA UYGULANMASI

5.1. Hecke Tipi Operatörlerin Weierstrass Tipi Fonksiyonlarına Uygulanması

Weierstrass $\wp$-fonksiyonu matematikte, fizikte ve mühendislikte önemli bir yere sahiptir. Weierstrass fonksiyonlarını içeren ve $\wp_{2n}$ ile gösterilen Weierstrass tipi fonksiyonlar ailesi, C.-H. Chang, H. M. Srivastava ve T. C. Wu tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 5.1.1. $\frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$ için,

$$\Omega = \{m_1 z_1 + m_2 z_2 : z_1, z_2 \in \mathbb{C} \backslash \{0\}, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

ile tanımlanan Ω, $\mathbb{C}$ üzerinde bir latis olsun. $\Omega^* = \Omega \backslash \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ için Weierstrass tipi fonksiyonlar ailesi

$$\wp_{2n}(u) = \wp_{2n}(u; z_1, z_2) = \frac{1}{u^{2n}} + \sum_{\Omega^*} \left(\frac{1}{(u - (m_1 z_1 + m_2 z_2))^{2n}} - \frac{1}{(m_1 z_1 + m_2 z_2)^{2n}} \right)$$

ile tanımlanır (Chang ve Srivastava 2007, Chang, Srivastava ve Wu 2008, Wu, Chang ve Srivastava 2010).

Özel olarak $n = 1$ alınırsa,

$$\wp(u) = \wp_2(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\Omega^*} \left(\frac{1}{(u - (m_1 z_1 + m_2 z_2))^2} - \frac{1}{(m_1 z_1 + m_2 z_2)^2} \right)$$

ile tanımlanan Weierstrass $\wp$-fonksiyonu elde edilir.

Herhangi bir $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ için Weierstrass tipi fonksiyonları, kompleks düzlemde $2n$-ninci mertebeden kutup noktasına sahip bir eliptik fonksiyonudur.

Weierstrass tipi fonksiyonlar için aşağıdaki özellikler verilir:

1. $\wp_{2n}$ çift fonksiyondur; yani $\wp_{2n}(u) = \wp_{2n}(-u)$'dur.

2. $\wp'_{2n}$ tek fonksiyondur; yani $\wp'_{2n}(-u) = -\wp'_{2n}(u)$'dur.

3. $\wp_{2n}$ $(-2n)$-ninci mertbeden homojen fonksiyondur; yani

$$\wp_{2n}(\lambda u; \lambda w_1, \lambda w_2) = \lambda^{-2n} \wp_{2n}(u; w_1, w_2)$$

dir.

Teorem 5.1.1. (Aygüneş ve Şimşek 2011) $k \in \mathbb{N}^*$ olsun. p herhangi bir asal sayı ve $pz_1 \notin \mathbb{R}$ olsun.

$$T_p\left(\wp_{2n}^{(k)}\left(u; z_1, \frac{1}{p}\right)\right) = p\wp_{2n}^{(k)}\left(\frac{u}{p}; z_1, \frac{1}{p}\right) + \wp_{2n}^{(k)}\left(pu; z_1, \frac{1}{p}\right)$$

dir.

Kanıt. $\wp_{2n}(u)$ ve $\wp_{2n}'(u)$ 'nun türevleri alınırsa, sırasıyla,

$$\wp_{2n}^{'}(u) = -\frac{2n}{u^{2n-1}} - \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\frac{2n}{(u-(m_1z_1+m_2z_2))^{2n-1}}$$

ve

$$\wp_{2n}^{''}(u) = \frac{2n(2n-1)}{u^{2n-2}} + \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\frac{2n(2n-1)}{(u-(m_1z_1+m_2z_2))^{2n-2}}$$

elde edilir.

Bu şekilde devam edilerek $\wp_{2n}(u)$'nun k kez türev alınırsa,

$$\wp_{2n}^{(k)}(u) = (-1)^k\frac{(2n)!}{(2n-k+2)!}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(u+m_1z_1+m_2z_2)^{2n-k}} \tag{30}$$

bulunur.

$z \in \mathbb{C}$ ve $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+m)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{\infty} j^{k-1}e^{2\pi ijz}$$

ile verilen Lipschitz formülü (Lipschitz 1889, Rademacher 1973) (30) yardımıyla,

$$\begin{aligned}\wp_{2n}^{(k)}(u) &= (-1)^k\frac{(2n)!}{(2n-k+2)!}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\frac{(-2\pi i)^{2n-k}}{(2n-k-1)!z_2^{2n-k}}\\ &\quad\times\sum_{j=1}^{\infty} j^{2n-k-1}e^{2\pi ij\left(\frac{u+m_1z_1}{z_2}\right)}\end{aligned} \tag{31}$$

bulunur.

(1) bağıntısı ile verilen T_p Hecke tipi operatörlerinin (31) bağıntısına uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}T_p\left(\wp_{2n}^{(k)}(u)\right) &= \frac{(-1)^k(2n)!(-2\pi i)^{2n-k}}{z_2^{2n-k}(2n-k+2)!(2n-k-1)!}\\ &\quad\times\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} e^{2\pi ijm_1\frac{z_1}{z_2}}j^{2n-k-1}T_p\left(e^{\frac{2\pi iju}{z_2}}\right).\end{aligned} \tag{32}$$

T_p'nin tanımından

$$T_p\left(e^{\frac{2\pi iju}{z_2}}\right)=e^{\frac{2\pi ijup}{z_2}}+e^{\frac{2\pi iju}{pz_2}}\sum_{b=0}^{p-1}\left(e^{\frac{2\pi ij}{pz_2}}\right)^b$$

ve

$$\sum_{y=0}^{p-1}\left(e^{\frac{2\pi ij}{pz_2}}\right)^y=\frac{e^{\frac{2\pi ij}{z_2}}-1}{e^{\frac{2\pi ij}{pz_2}}-1}$$

olmak üzere $z_2=\frac{1}{p}$ için (32) bağıntısında gerekli düzenlemeler yapılırsa, istenen bağıntı elde edilir.

5.2. Hecke Tipi Operatörlerin Genelleştirilmiş Dedekind Eta Fonksiyonuna Uygulanması

Tanım 5.2.1. $\zeta_N=\exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right), q_N=\exp\left(\frac{2\pi iz}{N}\right)$ olmak üzere $z\in\mathbb{H}$, $N\in\mathbb{Z}^+$, $(g,h)\in\mathbb{Z}^2$ için genelleştirilmiş Dedekind eta fonksiyonu,

$$\alpha_{g,h}(N)=\begin{cases}\exp\left(\pi i\overline{B}_1\left(\frac{h}{N}\right)\right)(1-\zeta_N^{-h}), & g\equiv 0, h\not\equiv 0(N)\\ 1, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

iken aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\eta_{g,h}(z,N)=\alpha_{g,h}(N)\exp\left(\pi iz\overline{B}_2\left(\frac{g}{N}\right)\right)\prod_{\substack{m\equiv g(N)\\ m>0}}(1-\zeta_N^h q_N^m)\prod_{\substack{m\equiv -g(N)\\ m>0}}(1-\zeta_N^{-h}q_N^m). \quad (33)$$

Burada, $\overline{B}_1$ ve $\overline{B}_2$ birinci ve ikinci dereceden Bernoulli fonksiyonlarını gösterir. $\eta_{g,h}(z;N)$ fonksiyonu, $z\in\mathbb{H}$ için, holomorftur ve g, h $(\mathrm{mod}\,N)$ 'ye bağlıdır. Hatta her g ve h için,

$$\eta_{g,h}(z,N)=\eta_{-g,-h}(z,N)$$

ve $(g,h)\equiv(0,0)$ $(\mathrm{mod}N)$ için

$$\eta_{g,h}(z,N)=\eta^2(z)$$

dir (Hecke 1983, Miao 1996, Schoeneberg 1974, Şimşek 2003, Şimşek v.d. 2009).

Teorem 5.2.1. (Aygüneş ve Şimşek 2010) p herhangi bir asal sayı olsun. $N\mid g$ ise, o zaman

$$T_p(\log\eta_{g,h}(z,N))=\frac{\pi i(p-1)}{12}+\log\eta_{g,h}(pz,N)+p\log\eta_{g,h}\left(\frac{z}{p},N\right) \quad (34)$$

dir.

Kanıt. (33) bağıntısından,

$$\eta_{g,h}(z,N)=\alpha_{g,h}(N)\exp\left(\pi iz\overline{B}_2\left(\frac{g}{N}\right)\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\zeta_N^h q_N^{g+nN}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\zeta_N^{-h}q_N^{-g+nN}\right)$$

elde edilir.Yukarıdaki bağıntının her iki tarafının logaritması alınırsa:

$$\begin{aligned}\log(\eta_{g,h}(z,N)) &= \log\alpha_{g,h}(N)+\pi iz\overline{B}_2(\frac{g}{N})-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\exp\left(\frac{2\pi imh}{N}+2\pi imz(n+\frac{g}{N})\right)\\ &\quad-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\exp\left(-\frac{2\pi imh}{N}+2\pi imz(n-\frac{g}{N})\right)\end{aligned}$$

bulunur.

$$A=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{m}T_p\left(e^{\frac{2\pi imh}{N}+2\pi imz(n+\frac{g}{N})}\right)$$

ve

$$B=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{m}T_p\left(e^{-\frac{2\pi imh}{N}+2\pi imz(n-\frac{g}{N})}\right)$$

olsun. (1) bağıntısında, p herhangi bir asal sayı olmak üzere, $n=p$ seçilirse ve $\log(\eta_{g,h}(z,N))$ fonksiyonuna T_p operatörü uygulanırsa,

$$T_p(\log\eta_{g,h}(z,N))=(p+1)\log\alpha_{g,h}(N)+T_p\left(\pi iz\overline{B}_2\left(\frac{g}{N}\right)\right)-(A+B)\,, \tag{35}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılarak

$$A=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{2\pi imh}{N}}}{m}\left(e^{2\pi impz(n+\frac{g}{N})}+e^{\frac{2\pi imz}{p}(n+\frac{g}{N})}\sum_{b=0}^{p-1}\left(e^{\frac{2\pi im}{p}(n+\frac{g}{N})}\right)^b\right)$$

ve

$$B=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{2\pi imh}{N}}}{m}\left(e^{2\pi impz(n-\frac{g}{N})}+e^{\frac{2\pi imz}{p}(n-\frac{g}{N})}\sum_{b=0}^{p-1}\left(e^{\frac{2\pi im}{p}(n-\frac{g}{N})}\right)^b\right).$$

elde edilir. Yukarıdaki serileri elde ederken aşağıdaki sonuçları kullanılmıştır.

$p\nmid m(n-\frac{g}{N})$ ise, o zaman

$$\sum_{b=0}^{p-1}\left(e^{\frac{2\pi im}{p}(n-\frac{g}{N})}\right)^b=0$$

ve $p\mid m(n-\frac{g}{N})$ ise, o zaman

$$\sum_{b=0}^{p-1}\left(e^{\frac{2\pi im}{p}(n-\frac{g}{N})}\right)^b=p$$

dir.

Diğer taraftan, $p \nmid m(n+\frac{g}{N})$ ise, o zaman

$$\sum_{b=0}^{p-1}\left(e^{\frac{2\pi im}{p}(n+\frac{g}{N})}\right)^b = 0$$

ve $p \mid m(n+\frac{g}{N})$ ise, o zaman

$$\sum_{b=0}^{p-1}\left(e^{\frac{2\pi im}{p}(n+\frac{g}{N})}\right)^b = p$$

dir.

Sonuç olarak, $m = pm'$ and $n+\frac{g}{N} = pk$ iken, A'daki ikinci çift katlı toplam

$$\sum_{n,m=1,p|m(n+\frac{g}{N})}^{\infty}\cdots = \sum_{n,m=1,p|m}^{\infty}\cdots + \sum_{n,m=1,p|(n+\frac{g}{N})}^{\infty}\cdots - \sum_{n,m=1,p|m,p|(n+\frac{g}{N})}^{\infty}\cdots$$

ifadesine eşittir ve $m = pm'$, $(n-\frac{g}{N}) = pl$ iken, B'deki ikinci çift katlı toplam da

$$\sum_{n,m=1,p|m(n-\frac{g}{N})}^{\infty}\cdots = \sum_{n,m=1,p|m}^{\infty}\cdots + \sum_{n,m=1,p|(n-\frac{g}{N})}^{\infty}\cdots - \sum_{n,m=1,p|m,p|(n-\frac{g}{N})}^{\infty}\cdots$$

ifadesine eşittir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} A+B \quad = \quad & \sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{2\pi imh}{N}}}{m}e^{2\pi impz(n+\frac{g}{N})} + \sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{2\pi imh}{N}}}{m}e^{2\pi impz(n-\frac{g}{N})} + \\ & + \sum_{n,m'=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{2\pi ipm'h}{N}}}{m'}e^{2\pi im'(n+\frac{g}{N})z} + \sum_{n,m'=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{2\pi ipm'h}{N}}}{m'}e^{2\pi im'z(n-\frac{g}{N})} + \\ & + p\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{2\pi imh}{N}}}{m}e^{2\pi im(n+\frac{g}{N})\frac{z}{p}} + p\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{2\pi imh}{N}}}{m}e^{2\pi im(n-\frac{g}{N})\frac{z}{p}} - \\ & - \sum_{n,m'=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{2\pi ihpm'}{N}}}{m'}e^{2\pi im'(n+\frac{g}{N})z} - \sum_{n,m'=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{2\pi ipm'h}{N}}}{m'}e^{2\pi im'(n-\frac{g}{N})z} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, (35) bağıntısı kullanılarak, gerekli düzenlemeler yapılırsa istenen sonuç elde edilir.

Not 5.2.1. Teorem 5.2.1'deki bağıntıda $(g,h) \equiv (0,0)(N)$ alınırsa,

$$T_p(\log\eta(z)) = \frac{\pi i(p-1)}{24} + (p+1)\log\eta(z)$$

bulunur. Bu sonuç ile Knopp tarafından verilen klasik Dedekind eta fonksiyonunun Hecke tipi operatörler altındaki davranışı elde edilir (Knopp 1980).

Not 5.2.2. Teorem 5.2.1'de $g = 0$ alınırsa, p herhangi bir asal sayı olmak üzere, aşağıdaki sonuca varılır (Aygüneş ve Şimşek 2010):

$$\begin{aligned} T_p(\log \eta_{0,h}(z, N)) &= (p+1) \log \alpha_{0,h}(N) + \frac{\pi i}{6}\left(z + pz + \frac{p-1}{2}\right) \\ &+2 \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(e^{2\pi imnpz} + pe^{\frac{2\pi imnz}{p}}\right) \cos\left(\frac{2\pi mh}{N}\right). \end{aligned}$$

5.3. Hecke Tipi Operatörlerin Weber Tipi Fonksiyonlara Uygulanması

Tanım 5.3.1. $z \in \mathbb{H}$ için $q = e^{2\pi iz}$ olsun. Weber fonksiyonları (Cox 1989):

$$\mathfrak{f}(z) = q^{-\frac{1}{48}} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + q^{n-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\mathfrak{f}_1(z) = q^{-\frac{1}{48}} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^{n-\frac{1}{2}}\right),$$

ve

$$\mathfrak{f}_2(z) = \sqrt{2} q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + q^n)$$

ifadeleri ile tanımlanır.

Weber fonksiyonları Dedekind η-fonksiyonu aracılığıyla da aşağıdaki gibi tanımlanır (Cox 1989):

$$\mathfrak{f}(z) = \zeta_{48}^{-1} \frac{\eta\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\eta(z)},$$

$$\mathfrak{f}_1(z) = \frac{\eta\left(\frac{z}{2}\right)}{\eta(z)},$$

ve

$$\mathfrak{f}_2(z) = \sqrt{2}\frac{\eta(2z)}{\eta(z)}$$

dir. Burada

$$\zeta_{48} = e^{\frac{2\pi i}{48}}$$

tir.

Teorem 5.3.1. (Aygüneş ve Şimşek 2010) p herhangi bir tek asal sayı ise, o zaman

$$T_p(\log \mathfrak{f}_2(z)) = (p+1)(\log \mathfrak{f}_2(z)) + \frac{\pi i(p-1)}{24}$$

dir.

Teorem 5.3.2. (Aygüneş 2012) p herhangi bir asal sayı ise, o zaman

$$T_p(\log \mathfrak{f}_1^*(\tau)) = -\frac{\pi i(p-1)}{24} + p\log \mathfrak{f}_1^*\left(\frac{\tau}{p}\right) + \log \mathfrak{f}_1^*(p\tau)$$

dır. Burada

$$\mathfrak{f}_1^*(\tau) = \mathfrak{f}_1(2\tau)$$

dır.

Kanıt. Tanım 5.3.1'de $\mathfrak{f}_1^*$'ın logaritmasını alınırsa

$$\log \mathfrak{f}_1^*(\tau) = -\frac{\pi i\tau}{12} - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m(2n-1)\tau}}{m}$$

bulunur. $\log \mathfrak{f}_1^*(\tau)$ fonksiyonuna T_p operatörünü uygulanırsa ve buradan Teorem 5.2.1'in kanıtına benzer şekilde gerekli düzenlemeler yapılırsa istenen elde edilir.

Teorem 5.3.3. (Aygüneş 2012) p herhangi bir tek asal sayı ise, o zaman

$$T_p(\log \mathfrak{f}^*(\tau)) = -\frac{\pi i(p-1)}{24} + p\log \mathfrak{f}^*\left(\frac{\tau}{p}\right) + \log \mathfrak{f}^*(p\tau)$$

dır. Burada

$$\mathfrak{f}^*(\tau) = \mathfrak{f}(2\tau)$$

dır.

Kanıt. Tanım 5.3.1'de $\mathfrak{f}^*$'ın logaritmasını alınırsa

$$\log \mathfrak{f}^*(\tau) = -\frac{\pi i\tau}{12} + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} e^{2\pi i m(2n-1)\tau}$$

bulunur. $\log \mathfrak{f}^*(\tau)$ fonksiyonuna T_p operatörünü uygulanırsa ve buradan Teorem 5.2.1'in kanıtına benzer şekilde gerekli düzenlemeler yapılırsa istenen elde edilir.

Not 5.3.1. Teorem 5.3.1'in kanıtı Knopp'un makalesindeki kanıta benzerdir (Knopp 1980). Teorem 5.3.2 ve Teorem 5.3.3'ün kanıtları ise Teorem 5.2.1'in kanıtına benzerdir.

Tanım 5.3.2. (Aygüneş ve Şimşek 2011) $g, h \in \mathbb{Z}$ olsun. $Y_{2,g,h}(z,N)$ ile verilen Weber tipi fonksiyonu

$$Y_{2,g,h}(z,N) = 2e^{\pi i z \overline{B}_2\left(\frac{g}{N}\right)} \prod_{\substack{n\equiv g(N)\\ n>0}} (1-\zeta_N^h q^{2n})(1-\zeta_N^h q^n)^{-1} \prod_{\substack{n\equiv -g(N)\\ n>0}} (1-\zeta_N^{-h} q^{2n})(1-\zeta_N^{-h} q^n)^{-1} \tag{36}$$

ile tanımlanır.

Not 5.3.2. (36) bağıntısında gerekli düzenlemeler yapılarak

$$Y_{2,g,h}(z,N)=\frac{2\eta_{g,h}(2z,N)}{\eta_{g,h}(z,N)} \tag{37}$$

bulunur. (37) bağıntısında $g\equiv h\equiv 0(N)$ alınırsa,

$$Y_{2,0,0}(z,N)=\mathfrak{f}_2^2(z)$$

elde edilir.

Teorem 5.3.4. (Aygüneş ve Şimşek 2011) p herhangi bir asal sayı olsun. $N\mid g$ ise, o zaman

$$T_p\left(\log Y_{2,g,h}(z,N)\right)=(p+1)\log 2+\log\left(\frac{\eta_{g,h}(2pz,N)\eta_{g,h}^{p}\left(\frac{2z}{p},N\right)}{\eta_{g,h}(pz,N)\eta_{g,h}^{p}\left(\frac{z}{p},N\right)}\right)$$

dir.

Kanıt. (37) bağıntısında her iki tarafın logaritması alınırsa,

$$\log Y_{2,g,h}(z,N)=\log 2+\log\eta_{g,h}(2z,N)-\eta_{g,h}(z,N)$$

bulunur. Buradan her iki tarafa Hecke operatörünü uygulayarak ve Teorem 5.2.1'den yararlanarak istenen sonuç elde edilir.

Tanım 5.3.3. $Y_{1,g,h}(z,N)$ ve $Y_{g,h}(z,N)$ ile verilen Weber tipi fonksiyonları, sırasıyla,

$$Y_{1,g,h}(z,N)=\frac{\sqrt{2}}{\left(Y_{2,g,h}\left(\frac{z}{2},N\right)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ve

$$Y_{g,h}(z,N)=\frac{\sqrt{2}}{Y_{1,g,h}\left(z,N\right)\left(Y_{2,g,h}\left(z,N\right)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ile tanımlanır.

Not 5.3.3. Tanım 5.3.3'teki Weber tipi fonksiyonlar için $g\equiv h\equiv 0(N)$ alınırsa,

$$Y_{1,0,0}(z,N)=\mathfrak{f}_1\left(z\right)$$

ve

$$Y_{0,0}(z,N)=\mathfrak{f}\left(z\right)$$

elde edilir.

Teorem 5.3.5. (Aygüneş ve Şimşek 2011) p herhangi bir asal sayı ve $N \mid g$ olsun. Bu durumda,

$$T_p(\log Y_{1,g,h}(z,N)) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\eta_{g,h}\left(\frac{pz}{2},N\right)\eta^p_{g,h}\left(\frac{z}{2p},N\right)}{\eta_{g,h}(pz,N)\,\eta^p_{g,h}\left(\frac{z}{p},N\right)}\right)$$

ve

$$T_p(\log Y_{g,h}(z,N)) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\eta^2_{g,h}(pz,N)\,\eta^{2p}_{g,h}\left(\frac{z}{p},N\right)}{\eta_{g,h}(2pz,N)\,\eta_{g,h}\left(\frac{pz}{2},N\right)\eta^p_{g,h}\left(\frac{2z}{p},N\right)\eta^p_{g,h}\left(\frac{z}{2p},N\right)}\right)$$

elde edilir.

Not 5.3.4. Yukarıdaki Weber tipi fonksiyonların logaritmasına T_p operatörü uygulanır ve Teorem 5.3.5'in kanıtı Teorem 5.3.4'ün kanıtına benzer şekilde yapılır.

5.4. Hecke Tipi Operatörlerin Weierstrass σ- Fonksiyonuna Uygulanması

Tanım 5.4.1. Weierstrass σ-fonksiyonu sonsuz çarpım şeklinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sigma(z,\tau) = \frac{1}{2\pi i}e^{\frac{\eta_2 z^2}{2}}\left(\sqrt{q_z}-\sqrt{q_\tau}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n_\tau q_z)\left(1-\frac{q^n_\tau}{q_z}\right)}{(1-q^n_\tau)}.$$

Burada $q_\tau = e^{2\pi i\tau}$, $q_z = e^{2\pi iz}$ ve $\eta_2 = \eta_2(\tau)$: τ'ya bağlı bir kompleks sayıdır (Cox 1989).

Bundan sonra $\sigma(z,\tau)$ yerine $\sigma(z)$ alalım. Weber fonksiyonları, Dedekind η-fonksiyonu ve Weierstrass σ-fonksiyonu arasındaki ilişkiler

$$\sigma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}e^{\frac{\eta_2}{8}}\frac{\mathfrak{f}_2(\tau)^2}{\eta(\tau)^2}, \tag{38}$$

$$\sigma\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{i}{2\pi}e^{\frac{\tau^2\eta_2}{8}}q^{-\frac{1}{8}}\frac{\mathfrak{f}_1(\tau)^2}{\eta(\tau)^2} \tag{39}$$

ve

$$\sigma\left(\frac{\tau+1}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}e^{\frac{(\tau+1)^2\eta_2}{8}}q^{-\frac{1}{8}}\frac{\mathfrak{f}(\tau)^2}{\eta(\tau)^2} \tag{40}$$

ifadeleri ile tanımlanır (Cox 1989).

Teorem 5.4.1. (Aygüneş 2012) p tek asal sayı ise, o zaman

$$T_p\left(-\frac{\eta_2}{8}+\log\sigma\left(\frac{1}{2},\tau\right)\right)=(p+1)\left(-\frac{\eta_2}{8}+\log\sigma\left(\frac{1}{2},\tau\right)\right)$$

dır.

Kanıt. (38) bağıntısının her iki tarafının logaritmasını aldıktan sonra T_p opera-törü uygulanırsa,

$$T_p\left(-\frac{\eta_2}{8}+\log\sigma\left(\frac{1}{2},\tau\right)\right)=-(p+1)\log 2\pi+2T_p(\log\mathfrak{f}_2(\tau))-2T_p(\log\eta(\tau)).$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıdan,

$$T_p\left(-\frac{\eta_2}{8}+\log\sigma\left(\frac{1}{2},\tau\right)\right)=(p+1)\left(-\log 2\pi+2\log\mathfrak{f}_2(\tau)-2\log\eta(\tau)\right)$$

elde edilir. Buradan istenen sonuca ulaşılır.

Not 5.4.1. $T_n(f(\tau))=\lambda(n)f(\tau)$ bağınıtısını sağlayan sıfırdan farklı f fonksiyonu için $\lambda(n)$ kompleks skaleri, T_n Hecke operatörünün bir özdeğeridir ve f fonksiyonu ise, T_n Hecke operatörünün bir özfonksiyonudur. Teorem 5.4.1 aracılığıyla,

$$g(\tau)=-\frac{\eta_2}{8}+\log\sigma\left(\frac{1}{2},\tau\right)$$

ile tanımlı g fonksiyonu, T_p Hecke operatorünün bir özfonksiyonudur ve $\lambda(p)=p+1$ değeri de T_p Hecke operatörünün bir özdeğeridir.

Teorem 5.4.2. (Aygüneş 2012) p herhangi bir asal sayı ise, o zaman

$$T_p\left(-\frac{\eta_2^*\tau^2}{2}+\log\sigma(\tau,2\tau)\right)=-\frac{\pi i(p+1)\tau}{2}-\frac{5\pi i(p-1)}{12}+\log\left(\frac{i^{p+1}(\mathfrak{f}_1^*(\frac{\tau}{p}))^{2p}(\mathfrak{f}_1^*(p\tau))^2}{(2\pi\eta^2(2\tau))^{p+1}}\right)$$

dir. Burada $\eta_2^*=\eta_2(2\tau)$'dır.

Kanıt. (39) bağıntısında τ yerine 2τ alınırsa,

$$\sigma(\tau,2\tau)=\frac{i}{2\pi}e^{\frac{\eta_2^*\tau^2}{2}}e^{-\frac{\pi i\tau}{2}}\frac{\left(\mathfrak{f}_1^*(\tau)\right)^2}{\left(\eta(2\tau)\right)^2}$$

bulunur. Yukarıdaki fonksiyonun logaritması alınırsa,

$$-\frac{\tau^2\eta_2^*}{2}+\log\sigma(\tau,2\tau)=\log\left(\frac{i}{2\pi}\right)-\frac{\pi i\tau}{2}+2\log\mathfrak{f}_1^*(\tau)-2\log\eta(2\tau)$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıya T_p operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} T_p\left(-\frac{\tau^2\eta_2^*}{2}+\log\sigma\left(\tau,2\tau\right)\right) &= (p+1)\log\left(\frac{i}{2\pi}\right)-\frac{\pi i}{2}T_p(\tau) \\ &+2\left(-\frac{\pi i(p-1)}{24}+p\log\mathfrak{f}_1^*\left(\frac{\tau}{p}\right)+\log\mathfrak{f}_1^*\left(p\tau\right)\right) \\ &-2\left(\frac{\pi i(p-1)}{24}+(p+1)\log\eta(2\tau)\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan istenen sonuç elde edilir.

Teorem 5.4.3. (Aygüneş 2012) p herhangi bir tek asal sayı ise, o zaman

$$\begin{aligned} T_p\left(-\frac{(2\tau+1)^2\eta_2^*}{8}+\log\sigma\left(\frac{2\tau+1}{2},2\tau\right)\right) &= -\frac{\pi i(p+1)\tau}{2}-\frac{5\pi i(p-1)}{12} \\ &+\log\left(\frac{(\mathfrak{f}^*(\frac{\tau}{p}))^{2p}(\mathfrak{f}^*(p\tau))^2}{(2\pi\eta^2(2\tau))^{p+1}}\right) \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\eta_2^*=\eta_2(2\tau)$$

dır.

Kanıt. (40) bağıntısında τ yerine 2τ alınırsa,

$$\sigma\left(\frac{2\tau+1}{2},2\tau\right)=\frac{1}{2\pi}e^{\frac{(2\tau+1)^2\eta_2^*}{8}}e^{-\frac{\pi i\tau}{2}}\frac{\left(\mathfrak{f}^*(\tau)\right)^2}{\left(\eta(2\tau)\right)^2}$$

bulunur. $\sigma\left(\frac{2\tau+1}{2},2\tau\right)$ fonksiyonunun logaritması alınırsa,

$$-\frac{(2\tau+1)^2\eta_2^*}{8}+\log\sigma\left(\frac{2\tau+1}{2},2\tau\right)=\log\left(\frac{1}{2\pi}\right)-\frac{\pi i\tau}{2}+2\log\mathfrak{f}^*(\tau)-2\log\eta(2\tau)$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıya T_p operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} T_p\left(-\frac{\eta_2^*(2\tau+1)^2}{8}+\log\sigma\left(\frac{2\tau+1}{2},2\tau\right)\right) &= (p+1)\log\left(\frac{1}{2\pi}\right)-\frac{\pi i}{2}T_p(\tau) \\ &+2\left(-\frac{\pi i(p-1)}{24}+p\log\mathfrak{f}^*\left(\frac{\tau}{p}\right)+\log\mathfrak{f}^*\left(p\tau\right)\right) \\ &-2\left(\frac{\pi i(p-1)}{24}+(p+1)\log\eta(2\tau)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan istenen sonuç elde edilir.

SONUÇ

Bu tezde aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur:

Kısmi Hecke operatörleri, kısmi Hecke tipi operatörleri tanımlandı. Bu operatörlere karşılık gelen matrislerin Bernoulli polinomları ve Euler polinomları cinsinden ifadeleri bulundu. Kısmi Hecke tipi operatörlerin özdeğerleri ve özfonksiyonları ayrıntılı bir şekilde verildi. Bu özdeğerlerin Bernoulli sayıları, Euler sayıları, Euler gama fonksiyonu, kısmi zeta fonksiyonuyla ilişkili olduğu bazı bağıntılar ispatlandı. Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3 kullanılarak, Euler özdeşliği olarak bilinen Bernoulli sayılarının girişim formülünün farklı bir ispatı verildi. Teorem 3.2.7 ve Teorem 3.2.9 kullanılarak, Euler sayılarının Bernoulli sayıları cinsinden ifadesinin farklı bir ispatı verildi.

Kısmi Hecke operatörlerinin Genocchi tipi polinomlara uygulanması verildi. Bu polinomların kısmi Hecke operatörlerinin bir özfonksiyonu olduğu ispatlandı. Teorem 3.3.1'de Genocchi polinomlarının Raabe bağıntısı genelleştirildi ve Genocchi tipi polinomların üreteç fonksiyonu verildi.

Genelleştirilmiş kısmi Hecke operatörleri tanımlandı. Bu operatörlerin genelleştirilmiş Euler tipi polinomlarına etkisi verildi. Bu operatörlerin özdeğerleri ve özfonksiyonları bulundu. Genelleştirilmiş Euler tipi polinomlarının ve sayılarının üreteç fonksiyonları tanımlandı. Bu polinomların ve sayıların bazı özellikleri verildi. Ayrıca bu özellikler yardımıyla genelleştirilmiş Euler tipi polinomlarının ve sayılarının ilk dört tanesi hesaplandı. Teorem 4.2.1'de, Frobenius-Euler polinomları ile bu polinomlar arasındaki bağıntı ispatlandı. Teorem 4.2.3'te, genelleştirilmiş Euler tipi polinomları ile Apostol-Bernoulli polinomları arasındaki bağıntı ispatlandı.

Weierstrass $\wp$-fonksiyonu, Weierstrass σ-fonksiyonu, Eisenstein serileri, genelleştirilmiş Dedekind eta fonksiyonu ve Weber fonksiyonlarının Hecke tipi operatörler altındaki davranışları verildi. Weber fonksiyonları genelleştirildi. Bu genelleştirilmiş fonksiyonların Hecke tipi operatörler altındaki davranışları incelendi ve bazı özellikleri verildi.

Üreteç fonksiyonları, operatörler, Bernoulli polinomları ve Euler polinomları, v.s. gibi özel fonksiyonların başta matematik olmak üzere fizik, mühendislik ve diğer bilim alanlarında önemli bir yere sahip oldukları bilinmektedir.

Hecke operatörünün M_k (modüler formlar) üzerinde invaryant kalmasından ötürü, modüler formlar teorisi ile Hecke operatörleri arasında önemli bir ilişki vardır. Dolayısıyla M_k üzerindeki Hecke operatörleri ile ilgili özgün sonuçların elde edilmesi, modüler formlar teorisine de önemli katkılar sağlayacaktır.

Not 4.1.1' de genelleştirilmiş kısmi Hecke operatörlerine karşılık gelen $M_m(t)$ matrisinin karakteristik polinomunun köklerinin tümü farklı olduğundan dolayı, bu polinomun minimal polinomlar ile ilişkileri incelenebilir. Çünkü minimal polinomlar cebirde, üzerinde çalışılan yapının yetersiz kaldığı durumlarda oldukça fayda sağlamaktadır. Bir cebirsel sayının açık bir şekilde ifade edilememesi durumunda buna bağlı özelliklerin çalışılması da mümkün olamamakta, bu tür durumlarda minimal polinomun özelliklerinin çalışılması da istenen sonuca ulaşmakta yeterli olabilmektedir. Örnek olarak

$$H(\lambda_q) = \ < R, S \mid R^2 = S^q \ = I >$$

temsiliyle verilen Hecke gruplarının temel denklik altgruplarının çalışılmasındaki bir yöntem bu grupların elemanlarının n modunda indirgenmesidir. Ancak λ_q cebirsel sayısı $\lambda_q = 2\cos(\pi/q),\ q \in N,\ q \geq 3$ ile verildiğinden ilk dört λ_q sayısını net bir şe-kilde $\lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = \sqrt{2},\ \lambda_5 = (1+\sqrt{5})/2$ ve $\lambda_6 = \sqrt{3}$ olarak belirleyip ikinci dereceden kalanlar yardımıyla bu sayıların hangi modlarda bir tamsayıya dönüşeceğini bulabilsek de $q > 6$ için λ_q sayısının bu açıklıkta belirlenmesi mümkün olamamaktadır ve bu nedenle λ_q sayısının Q üzerindeki minimal polinomunun n modunda indirgenmesinden faydalanılmaktadır. Bu yöntemle $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının bölüm grupları üzerine epimorfizmlerinin çekirdeklerini hesaplayıp bu grupların temel denklik altgruplarının belirlenmesi sağlanabilmektedir (Cangül 1994, 1998, İkikardeş v.d. 2009).

KAYNAKLAR

ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, New York.

AGOH, T. and DILCHER, K. 2009. Shortened recurrence relations for Bernoulli numbers. *Discrete Mathematics,* 309: 887-898.

APOSTOL, T. M. 1951. On the Lerch zeta function. *Pacific Journal of Mathematics* 2 (1): 161-167.

APOSTOL, T. M. 1976. Modular functions and Dirichlet series in Number Theory. Berlin, Heidelberg and New York, Springer-Verlag.

AYGÜNEŞ, A. A. 2012. Weber functions and generalized theta-functions associated with Hecke operators. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics,* 22: 451-458.

AYGÜNEŞ, A. A. 2012. Weber functions and Weierstrass sigma function associated with Hecke operators. *Numerical Analysis and Applied Mathematics AIP Conference Proceedings* 1479: 356-359.

AYGÜNEŞ, A. A. and ŞİMŞEK, Y. 2010. Hecke Operators related to the generalized Dedekind eta functions and applications. *Numerical Analysis and Applied Mathematics AIP Conference Proceedings* 1281: 1098-1101.

AYGÜNEŞ, A. A. and ŞİMŞEK, Y. 2011. The action of Hecke operators to families of Weierstrass-type functions and Weber-type functions and their applications. *Applied Mathematics and Computation,* 218 (3): 678-682.

AYGÜNEŞ, A. A. and ŞİMŞEK, Y. 2012. Matrix representation of partial Hecke type operators and their applications. International Congress in Honour of Professor Hari M. Srivastava at Uludağ University (Bursa, Turkey; August 23-26).

BANNAI, E., KOJIMA, K. and MIEZAKI, T. 2008. On the zeros of Hecke-type Faber polynomials. *Kyushu Journal of Mathematics,* 62: 15-61.

BAYAD, A., AYGÜNEŞ A. A. and ŞİMŞEK, Y. 2010. Hecke operators and generalized Bernoulli-Euler polynomials. *Journal of Algebra, Number Theory: Advances and Applications,* 3 (2): 111-122.

BERNDT, B. 1978. Analytic Eisenstein series, theta-functions, and series relations in the spirit of Ramanujan. *Journal Fur Die Reine Und Angewandte Mathematik,* 303/304: 332-365.

BRUGGEMAN, R. W. and MIATELLO, R. J. 2009. Eigenvalues of Hecke operators on Hilbert modular groups. arXiv:0912.1692v1.

CANGÜL, İ. N. 1994. Normal Subgroups of the Hecke Groups. University of Southampton, PhD Thesis.

CANGÜL, İ. N. and SINGERMAN, D. 1998. Normal subgroups of Hecke groups and regular maps. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 123: 59-74.

CARLITZ, L. 1953. A note on the multiplication formulas for the Bernoulli and Euler polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 4: 184-188.

CARLITZ, L. 1959. Eulerian numbers and polynomials. *Mathematics Magazine,* 32: 247-260.

CARLITZ, L. 1963. The product of two eulerian polynomials. *Mathematics Magazine,* 36: 37-41.

CARLITZ, L. 1969. Generating functions. *Fibonacci Quarterly,* 7: 359-393.

CAULK, S. and WALLING, L.H. 2007. Hecke operators on Hilbert-Siegel modular forms. arXiv:0710.4224v1.

CHANG, C.- H. and HA, C. W. 2006. A multiplication theorem for the Lerch zeta function and explicit representations of the Bernoulli and Euler polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 315: 758-767.

CHANG, C.- H. and SRIVASTAVA, H. M. 2007. A note on Bernoulli identities associated with the Weierstrass $\wp$-function. *Integral Transforms and Special Functions,* 18: 245-253.

CHANG, C.- H., SRIVASTAVA, H. M. and WU, T.- C. 2008. Some families of Weierstrass-type functions and their applications. *Integral Transforms and Special Functions,* 19: 621-632.

COMTET, L. 1974. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. Reidel, Dordrecht and Boston, (Translated from the French by J. W. Nienhuys).

COX, D. A. 1989. Primes of the form $x^2 + ny^2$. John Wiley & Sons, New York.

DUTTA, M. and DEBNATH, L. 1965. Elements of the Theory of Elliptic and Associated Functions with Applications. The World Press Private, Calcutta (Kolkata), India.

EULER, L. 1738. Methodus generalis summandi progressiones. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperalis Petropolitanae,* 6: 68-97.

GIL, J. B. and ROBINS, S. 2003. Hecke operators on rational functions. arXiv:math/0309244v2.

GOLDBERG, L. A. 1975. PHD Thesis, Transformations of Theta-Functions and Analogues of Dedekind Sums. Vassar College.

GOULD, H. W. 2010. Table for Combinatorial Numbers and Associated Identities: Table 2, From the seven unpublished manuscripts of H.W. Gould. Edited and Compiled by Jocelyn Quaintance.

HECKE, E. 1983. Lectures on Dirichlet Series, Modular Functions and Quadratic Forms. Vandenhoeck&Ruprecht.

HECKE, E. 1983. Mathematische Werke. Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen.

HARADA, K. 2010. "Moonshine" of Finite Groups. The Ohio State University Lecture Notes.

HARDY, G. H. 1905. On certain series of discontinues functions, connected with the modular functions. *Quarterly Journal of Mathematics,* 36: 93-123 (Collected papers, vol.IV, pp. 362-392. Clarendon Press Oxford, 1969).

İKİKARDEŞ, S., ŞAHİN, R. and CANGÜL, İ. N. 2009. Principal congruence subgroups of the Hecke groups and related results. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series,* 40 (4): 479-494.

KATOK, S. 1992. Fuchsian Groups. The University of Chicago Press.

KIM, T. 2012. Identities involving Frobenius-Euler polynomials arising from non-linear differential equations. arXiv:1201.5088v1.

KOBLITZ, N. 1984. Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg.

KOLMAN, B. and HILL, D. R. 2000. Elementary Linear Algebra. Prentice Hall.

KNOPP, M. I. 1970. Modular Functions in Analytic Number Theory. Markham Publishing Company, Chicago.

KNOPP, M. I. 1980. Hecke operators and identity for Dedekind sums. *Journal of Number Theory,* 12: 2-9.

KOHNEN, W. 2008. Hecke Operators and Orthogonality on $\Gamma_1[N]$. Universität Heidelberg.

KURT, V. 1990. On Dedekind sums. *Indian Journal Pure and Applied Mathematics,* 21 (10): 893-896.

LEE, M. H. 1996. Differential equations and Hecke operators. *Applied Mathematics Letters,* 9 (5): 5-9.

LEE, M. H. 1999. Hecke operators on linear ordinary differential equations. *Acta Applicadae Mathematicae,* 59: 203-213.

LIPSCHITZ, R. 1889. Untersuchung der eigenschaften einer gattung von unendlichen reihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik ,* CV: 127-156.

LUO, Q.- M. 2009. Fourier expansions and integral representations for Genocchi polynomials. *Journal of Integer Sequences*, 12**:** Article 09.1.4.

LUO, Q.- M. and SRIVASTAVA, H. M. 2005. Some relationships between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Computers & Mathematics with Applications,* 10: 631-642.

MIAO, L. C. 1996. A study of Hecke operators. *Soochow Journal of Mathematics,* 22 (4): 573-581.

MILNE, J. S. 1990. Modular Functions and Modular Forms. University of Michigan Lecture Notes.

MIYAKE, T. 1989. Modular Forms. Springer-Verlag.

MIYAWAKI, I. 1992. Numerical examples of Siegel cusp forms of degree 3 and their zeta-functions. Memoirs of the Faculty of Science, *Kyushu University Serie A,* 46 (2): 307-339.

MOLL, V. H., ROBINS, S. and SOODHALTER, K. 2010. The action of Hecke operators on hypergeometric functions. arXiv:1005.2946v1.

MÜHLENBRUCH, T. 2006. Hecke operators for period functions for congruence subgroups. arXiv:math/0603566v1.

NEBE, G. 2006. Kneser-Hecke-operators in coding theory. arXiv:math/0509474v2.

ÖZDEN, H. and ŞİMŞEK, Y. 2008. A new extension of q-Euler numbers and polynomials related to their interpolation functions. *Applied Mathematics Letters,* 21: 934-939.

ÖZDEN, H., ŞİMŞEK, Y. and SRIVASTAVA, H. M. 2010. A unified presentation of the generating functions of the generalized Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Computers & Mathematics with Applications,* 60: 2779-2787.

PARSON, L. A. and ROSEN, K. H. 1981. Hecke operators and Lambert series. *Mathematica Scandinavica,* 49: 5-14.

RAABE, J. L. 1851. Zurückführung einiger summen and bestimmten integrale auf die Jacob Bernoullische function. *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 42: 348-376.

RADEMACHER, H. 1973. Topics in Analytic Number Theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

RAMSEY, N. A. 2004. PHD Thesis (Thesis Advisor: Barry Mazur), Geometric and p-adic Modular Forms of Half-Integral Weight. Harvard University, Cambridge, Massachusetts.

SCHOENEBERG, B. 1970-1990. Biography in Dictionary of Scientific Biography (New York).

SCHOENEBERG, B. 1974. An introduction elliptic modular functions. New York, Heidelberg and Berlin, Springer-Verlag.

SHEHADEH, H., JAAFAR, S. and MAKDISI, K. K. 2006. Generating functions for Hecke operators. arXiv:math/0610962v1.

SHIRATANI, K. 1975. On Euler numbers. Mem. Fac. Sci. *Kyushu University,* 27: 1-5.

SRIVASTAVA, H. M. 2011. Some generalizations and basic (or q-) extensions of the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Applied Mathematics & Information Sciences,* 5: 390-444.

SRIVASTAVA, H. M. and CHOI, J. 2001. Series Associated with the zeta and Related Functions. Dordrecht/ Boston/ London, Kluwer Academic Publishers.

SRIVASTAVA, H. M. and CHOI, J. 2012. Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, London and New York, 2012.

SRIVASTAVA, H. M., KİM, T. and ŞİMŞEK, Y. 2005. q-Bernoulli numbers and polynomials associated with multiple q-zeta functions and basic L-series. *Russian Journal of Mathematical Physics,* 12: 241-268.

STEIN, W. and GUNNELLS, P. E. 1974. Modular Forms a Computational Approach. Graduate Studies in Mathematics 79.

ŞİMŞEK, Y. 2003. Relations between theta-functions Hardy sums Eisenstein series and Lambert series in the transformation formula of $\log \eta_{g,h}(z)$. *Journal of Number Theory,* 99: 338-360.

ŞİMŞEK, Y. 2004. On twisted generalized Euler numbers. *Bulletin of the Korean Mathematical Society,* 41 (2): 299-306.

ŞİMŞEK, Y. 2004. On Weierstrass $\wp(z)$ function Hardy sums and Eisenstein series. *Proceedings of Jangjeon Mathematical Society,* 7 (2): 99-108.

ŞİMŞEK, Y. 2004. Generalized Dedekind sums associated with the Abel sum and the Eisenstein and Lambert series. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics,* 9 (2): 125-137.

ŞİMŞEK, Y. 2005. Theorems on twisted L-function and twisted Bernoulli numbers. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics,* 11 (2): 205-218.

ŞİMŞEK, Y. 2005. q-Analogue of the twisted l-Series and q-twisted Euler numbers. *Journal of Number Theory,* 100 (2): 267-278.

ŞİMŞEK, Y. 2005. On normalized Eisenstein series and new theta functions. *Proceedings of Jangjeon Mathematical Society,* 8 (1): 25-34.

ŞİMŞEK, Y. 2006. Hardy character sums related to Eisenstein series and theta functions. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics,* 12 (1): 39-53.

ŞİMŞEK, Y. 2006. Twisted (h, q)-Bernoulli numbers and polynomials related to twisted (h, q)-zeta function and L-function. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 324 (2): 790-804.

ŞİMŞEK, Y. 2010. Complete sum of products of (h, q)-extension of Euler polynomials and numbers. *Journal of Difference Equations and Applications*, 16 (11): 1331-1348.

ŞİMŞEK, Y. 2011. Generating functions for generalized Stirling type numbers, Array type polynomials, Eulerian type polynomials and their application. arxiv: 1111.3848v2.2011.

ŞİMŞEK, Y. and AÇIKGÖZ, M. 2005. Remarks on Dedekind eta function, theta functions and Eisenstein series under the Hecke operators. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics,* 10: 15-24.

ŞİMŞEK, Y., AÇIKGÖZ, M., CANGÜL, İ. N. and KIM, D. 2009. Applications of Hecke operator to generalized Dedekind eta functions. *Numerical Analysis and Applied Mathematics AIP Conference Proceedings,* 1168: 568.

TITCHMARSH, E. C. 1951. The theory of the Riemann Zeta-Function. Clarendon (Oxford University) Press, Oxford and London.

TRAHAN, D. H. 1981. Regions of convergence for a generalized Lambert series. *Mathematics Magazine,* 54 (1): 28-32.

WALLING, L. H. 2007. Action of Hecke operators on Siegel theta series II. arXiv:0710.

WALUM, H. 1991. H. Walum, Multiplication formulae for periodic function. *Pacific Journal of Mathematics,* 149: 383-396.

WASHINGTON, L. C. 1997. Introduction to Cyclotomic Fields. Springer-Verlag New York, 1997.

WHITTAKER, E. T. and WATSON, G. N. 1963. A Course of Modern Analysis: An Introduction to the General Theory of Infnite Processes and of Analytic Functions; with an Account of the Principal Transcendental Functions. Fourth Edition (Reprinted), Cambridge University Press, Cambridge, London and New York.

WU, T.- C., CHANG, C.- H. and SRIVASTAVA, H. M. 2010. A unified presentation of identities involving Weierstrass-type functions and their applications. *Applied Mathematics Letters,* 23: 864-870.

ÖZGEÇMİŞ

Aykut Ahmet Aygüneş, 1981 yılında Ankara'da doğdu. İlk öğrenimini Ankara'da, orta ve lise öğrenimini ise Antalya'da tamamladı. 2000 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden, bir sene Hazırlık eğitimi dahil, 2005 yılında mezun oldu. 2005 - 2008 yılları arasında, Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansını tamamladıktan sonra, 2008 yılında yine aynı bölümde doktora öğrenimine başladı. Halen, matematik anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.