T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POİSSON ORTALAMALARININ $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ FONKSİYONLARINA BAZI PÜRÜZSÜZLÜK NOKTALARINDAKİ YAKINSAMA HIZININ TAHMİNİ

Selim ÇOBANOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2012

POİSSON ORTALAMALARININ $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ FONKSİYONLARINA BAZI PÜRÜZSÜZLÜK NOKTALARINDAKİ YAKINSAMA HIZININ TAHMİNİ

Selim ÇOBANOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından, "2228 Son Sınıf Lisans Öğrencileri İçin Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" ile desteklenmiştir.

2012

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POİSSON ORTALAMALARININ $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ FONKSİYONLARINA BAZI PÜRÜZSÜZLÜK NOKTALARINDAKİ YAKINSAMA HIZININ TAHMİNİ

Selim ÇOBANOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 29/06 / 2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (95) not takdir edilerek oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr.İlham ALİYEV ....

Yard.Doç.Dr. Yusuf SUCU ....

Yard.Doç.Dr. Melih ERYİĞİT (Danışman) ....

ÖZET

POİSSON ORTALAMALARININ $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ FONKSİYONLARINA BAZI PÜRÜZSÜZLÜK NOKTALARINDAKİ YAKINSAMA HIZININ TAHMİNİ

Selim ÇOBANOĞLU

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Melih ERYİĞİT

Haziran 2012, 76 Sayfa

Tüm reel eksende Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyonun Fourier dönüşümü verildiğinde fonksiyonun kendisinin oluşturulması meselesi Harmonik Analizin önemli problemi olarak ortaya çıkmış ve birçok ünlü matematikçinin ilgi odağı olmuştur.

İntegrallenebilir bir fonksiyonun Fourier dönüşümü integrallenebilir olmayabilir. Dolayısıyla, bu durumlarda Fourier dönüşümü vasıtasıyla fonksiyonun kendisini oluşturmak için ters Fourier dönüşümü uygulamak mümkün olmayabilir. Bu zorlukların üstesinden gelebilmek için değişik toplanabilirlik metodları ortaya çıkmıştır. Bu metodların en ünlüleri Poisson, Gauss-Weierstrass ve Riesz-Bochner metodlarıdır.

Biz bu çalışmada bazı toplanabilirlik metodlarını inceleyerek Poisson ortalamalarının $L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarına bir tür pürüzsüzlük noktası olan μ-pürüzsüzlük noktalarındaki yakınsama hızını gösterdik.

ANAHTAR KELİMELER: Fourier dönüşümü, girişim, Poisson toplanabilirlik,

Gauss-Weierstrass toplanablirlik, μ-pürüzsüzlük,

Lebesgue noktaları, yakınsama hızı.

JÜRİ: Prof.Dr. İlham ALİYEV

Yard.Doç.Dr. Yusuf SUCU

Yard.Doç.Dr. Melih ERYİĞİT

ABSTRACT

ON DEGREE OF APPROXIMATION OF THE POISSON MEANS FOR $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ FUNCTIONS AT SOME SMOOTHNESS POINTS

Selim ÇOBANOĞLU

M. Sc. Thesis in Mathematics

Adviser: Asst. Prof. Dr. Melih ERYİĞİT

June 2012, 76 Pages

The question "Given the Fourier transform of a Lebesgue integrable function f, how do we obtain f back again from its Fourier transform" was an important problem of Harmonic analysis and its applications, and it has drawn many famous matematicans' attentions.

The Fourier transform of a Lebesgue integrable function may not be integrable therefore we could not obtain f back again by inverse Fourier transform of f. In order to get rid of this difficulty, matematicians reached different summability methods. The most well-known ones of these methods are Poisson, Gauss-Weierstrass and Riesz-Bochner.

In this work we concentrate on some summability methods and we study Poisson means' convergence rate for $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ functions at μ-smoothness points.

KEY WORDS: The Fourier transform, convolution, Abel-Poisson summability, Gauss-Weierstrass summability, μ-smoothness, Lebesgue points, convergence rate.

COMMITTEE: Prof.Dr. İlham ALİYEV

Asst.Prof.Dr. Yusuf SUCU

Asst.Prof.Dr. Melih ERYİĞİT

ÖNSÖZ

Fourier dönüşümü verilen fonksiyonun, çeşitli toplanabilirlik metodlarıyla oluşturulmasının incelendiği bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmaktadır.

Tezin ilk bölümünde ilerki bölümlerde kullanılacak olan bazı kavramlar hakkında ön bilgi ve tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde Fourier dönüşümünün girişim operatörü ile arasındaki önemli ilişkiler incelenmiş ve Fourier dönüşümü verilen fonksiyonun toplanabilirlik metodlarıyla belirlenmesi için yeterli koşullar verilmiştir. Tezin son bölümünde ise özel bir toplanabilirlik metodu olan Poisson metodu incelenmiş ve Poisson ortalamalarının $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki fonksiyonlara μ-pürüzsüzlük noktalarındaki yakınsama hızı belirlenmiştir.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Yard. Doç. Dr. Melih ERYİĞİT'e, hocalarıma, aileme, arkadaşlarıma ve desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ v
1. GİRİŞ 1
1.1. Çalışmanın Kapsamı 1
1.2. Temel Kavramlar ve Gösterimler 2
2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI 4
2.1. Girişim Operatörü ve Yakınsama Özellikleri 4
2.2. Girişim Operatörünün Noktasal Yakınsaması 19
2.3. Fourier Dönüşümü 25
2.3.1. Fourier dönüşümünü analiz etmek için üç örnek 28
3. MATERYAL VE METOT 32
3.1. Fourier Dönüşümünün Önemli Özellikleri 32
3.2. Fourier Dönüşümü Bilinen Bir Fonksiyonun Toplanabilirlik Metotlarıyla Yeniden İnşaası 42
3.2.1. Toplanabilirlik metodları 45
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 63
4.1. μ-Pürüzsüzlük 63
4.2. Önemli Sonuçlar 66
5. SONUÇ 74
6. KAYNAKLAR 75
ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ...x_n) : \ x_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, 2, ...\}$
$L_p(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir ve p. kuvveti integrallenen fonksiyonlar uzayı
$C_0(\mathbb{R}^n)$	Sonsuzlukta sıfıra giden sürekli fonksiyonlar uzayı
$\Im(\mathbb{R}^n)$	Schwartz uzayı
$f^\wedge, \hat{f}$	f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$f^\vee, \check{f}$	f fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü
$f * g$	f ile g fonksiyonlarının girişimi
$suppf$	$suppf = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$
$x \cdot y$	$x, y \in \mathbb{R}^n$ için $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
Σ_{n-1}, S^{n-1}	$\mathbb{R}^n$ 'de birim küre
$\Gamma(t)$	Gamma fonksiyonu
$\widetilde{L_f}, L_f$	f fonksiyonunun Lebesgue noktaları kümesi

Kısaltmalar

h.h.h.	Hemen hemen her

1. GİRİŞ

Bu tez çalışması dört ana bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerin içeriklerini kabaca şu şekilde özetleyebiliriz.

Birinci bölümde tez boyunca kullanılacak temel kavramlar ve gösterimlerin tanımları verilmiştir.

İkinci bölümde girişim(convolution) operatörü tanıtılmış ve bu operatörün temel özellikleri, Harmonik Analizin temel kitaplarına bakılarak, örneğin Stein-Weiss, Sadosky, Folland gibi, bu bölümde verilmiştir. Ayrıca bu bölümde Fourier dönüşümü de tanıtılmış ve Fourier dönüşümünün temel özellikleri bu bölümde ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde Fourier dönüşümü bilinen fonksiyonu toplanabilirlik metotlarıyla yeniden oluşturulması meselesi çözülmüş ve Abel-Poisson, Gauss-Weierstrass, Riesz-Bochner toplanabilirlik metotları tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde bu çalışmanın özgün sonuçları olan μ-pürüzsüzlük noktası tanıtılmış ve bu noktalarda Poisson ortalamalarının $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarına yakınsama hızı bulunmuştur.

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Tüm reel eksende Lebesgue anlamında integrallenebilen bir fonksiyonun Fourier dönüşümü verildiğinde fonksiyonun kendisinin oluşturulması meselesi Harmonik Analizin ve onun uygulamalarının önemli bir problemi olarak ortaya çıkmıştır.

Bu çalışmada esas olarak, "$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü verildiğinde, acaba bundan yararlanarak f fonksiyonunu nasıl elde ederiz?" sorusuna cevap veren değişik toplanabilirlik metodları tanıtılmış ve özel olarak Poisson ortalamalarının μ-pürüzsüzlük noktalarında sözkonusu fonksiyona yakınsama hızı incelenmiştir.

1.2. Temel Kavramlar ve Gösterimler

Bu bölümde tez boyunca sıkça kullanılan bazı kavramların tanımı ve gösterimleri verilecektir. Başka özel kavramların tanımı ve gösterimleri, tez boyunca konu içerisinde açıklanacaktır.

$\mathbb{R}^n$ ile n-boyutlu (reel) öklid uzayını ve $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ile bu uzayın elemanlarını göstereceğiz. $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sayısı $x, y \in \mathbb{R}^n$ 'nin iç çarpımı, $|x| = \sqrt{x.x}$ sayısı $x \in \mathbb{R}^n$ 'nin normudur. $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$ ile $\mathbb{R}^n$ 'de bilinen Lebesgue ölçümü kastedilmiştir.

$L_p(\mathbb{R}^n, dx) = L_p = L_p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$, ile $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı ve $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ olan ölçülebilir fonksiyonlar uzayını göstereceğiz. Burada $\|f\|_p$ sayısına f 'in L_p normu denir. $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ile de $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı ve $\|f\|_\infty = ess.\sup |f(x)| < \infty$ olan fonksiyonlar uzayını göstereceğiz. Bir özellik hemen hemen her x için sağlanıyor denildiğinde, bu özelliğin sağlanmadığı x noktaları kümesinin ölçümünün sıfır olduğu anlaşılacaktır ve "hemen hemen her" ifadesi de kısaca $h.h.h.$ ile gösterilecektir. Bir f fonksiyonun supportu(ya da dayanağı) kısaca 'supp f' ile gösterilcek olup supp f=$\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ 'dir. $C_0 = C_0(\mathbb{R}^n) = C_\infty(\mathbb{R}^n)$ ile sonsuzlukta sıfıra giden sürekli fonksiyonlar uzayı gösterilecektir. Ayrıca bu tezde aşağıdaki gösterimlere de yer verilmiştir:

$C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ ile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ olmak üzere her α için f 'nin α_ncı mertebeye kadar sürekli kısmi türevleri var olan fonksiyonlar kümesini, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ olmak üzere f 'nin her mertebeden sürekli kısmi türevleri var olan fonksiyonlar kümesini, $C_c^\infty = C_0^\infty$ ile $f \in C^\infty$ ve f kompakt supportlu olan fonksiyonlar kümesini ve C_b^m ile de m-inci mertebeye kadar sürekli kısmi türevleri var ve bu türevler sınırlı olan fonksiyonlar kümesini göstereceğiz.

Ayrıca aksi belirtilmedikçe bu tez boyunca tüm fonksiyonlarımız kompleks değerli düşünülecektir. Eğer $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$ integrali var ve sonlu ise, bu integrale yakınsak, aksi halde ıraksak denir.

$\phi \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$ ve $\phi(0) = 1$ olmak üzere $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$ integralinin (ıraksak veya yakınsak) ϕ-ortalamaları

$$M_{\varepsilon,\phi}(f) \equiv M_{\varepsilon}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\varepsilon x) f(x)\, dx, \quad (\varepsilon > 0)$$

şeklinde tanımlanır. Bu taktirde, eğer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M_{\varepsilon}(f) = l$$

sonlu limiti varsa, (ıraksak) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$ integrali l 'ye yakınsar denir. ϕ fonksiyonunun bu veya başka şekilde seçimi değişik toplanabilirlik (summability) metodları doğurur. Örneğin, $\phi(x) = e^{-2\pi|x|}$, $\phi(x) = e^{-|x|^2}$ ve $\delta > 0$ olmak üzere

$$\phi(x) = \phi_{\delta}(x) = \begin{cases} \left(1 - |x|^2\right)^{\delta}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

alındığında, sırası ile Poisson, Gauss-Weierstrass ve Bochner-Riesz ortalamaları ve uygun toplanabilirlik (summability) metodları elde ederiz.

Sözkonusu toplanabilirlik metodlarının uygulandığı en önemli problemlerden birisi, f fonksiyonunun, Fourier dönüşümü (ki onu $f^{\wedge}$ ile göstereceğiz) $f^{\wedge}$ 'ye göre oluşturulması (restoration) problemidir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Girişim Operatörü ve Yakınsama Özellikleri

Tanım 2.1 *(Sadosky 1979) $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tanımlı ve Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar olsun. f ve g fonksiyonlarının girişimi $f * g$ ile gösterilir ve*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

şeklinde tanımlanır.

Not 2.2 *Girişim operatörü ile diğer önemli bazı operatörler etkileşim içerisindedir. Örneğin Harmonik Analizin önemli gerçeklerinden biri olan ve gelecek bölümde göreceğimiz Fourier dönüşümü ile girişim arasında da önemli bir etkileşim vardır. Girişimin Fourier dönüşümü, Fourier dönüşümlerinin çarpımına eşittir.*

$$(f * g)^{\wedge} = f^{\wedge} g^{\wedge}$$

Tanım 2.3 *(Sadosky 1979) $y \in \mathbb{R}^n$ olsun. Kayma operatörü, her $f \in L_p(\mathbb{R}^n, dx)$ için*

$$\tau_y f(x) = f(x-y)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.4 *(Sadosky 1979) Lebesgue ölçümü kaymaya göre invaryanttır. Yani*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tau_y f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

tir.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \tau_y f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)dx \quad (x-y=u \text{ değişken değiştirmesi}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\left|(-1)^n\right| du \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)du
\end{aligned}$$

■

Sonuç 2.5 *(Sadosky 1979, Folland 1984) Her $f \in L_p$ için*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_y f(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx$$

tir. Yani

$$\|\tau_y f\|_p = \|f\|_p$$

dir.

Kanıt. $g = |f(x)|^p$ olmak üzere $\tau_y g(x) = g(x-y) = |f(x-y)|^p$ olur.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tau_y g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$$

idi. Buradan

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx$$

olur. Yani

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_y f(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx$$

elde edilir. ■

Teorem 2.6 *(Sadosky 1979) $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n, dx)$ olsun. O zaman hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f * g(x)$ sonludur ve $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n, dx)$ 'tir. Ayrıca*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \tag{2.1}$$

dir.

Kanıt. Eğer (2.1) eşitsizliğini gösterirsek hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f * g(x)$ 'in sonlu olduğu bulunur.

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f*g(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \right) dx \\
&= \text{(Fubini teoreminden)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx \right) dy \\
&= \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

dir. ■

Teorem 2.7 *(Young Eşitsizliği)(Sadosky 1979 ve Folland 1984)* $f \in L_p(\mathbb{R}^n, dx)$, $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L_1(\mathbb{R}^n, dx)$ *olsun. O zaman hemen hemen her* $x \in \mathbb{R}^n$ *için* $f*g(x) < \infty$ *olur. Ayrıca*

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

dir.

Şimdi Young eşitsizliğinin ispatı için yardımcı olacak şu lemmayı ifade edelim.

Lemma 2.8 *(Minkowski İntegral Eşitsizliği)(Sadosky 1979 ve Folland 1984)* (X, M, μ) *ve* (Y, N, ν) *iki ölçüm uzayı olmak üzere* $f(x,y) : X \times Y \to \mathbb{C}$ *tanımlı ve* $\mu \otimes \nu$ *ölçülebilir olsun. Eğer hemen hemen her* $y \in Y$ *için* $f(\cdot, y) \in L_p(x, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ *ve* $\int_Y \|f(\cdot,y)\|_{p,\mu} d\nu(y) < \infty$ *ise o zaman* $\int_Y f(x,\cdot)d\nu(y) < \infty$ *'dir ve*

$$\left\| \int_Y f(x,y)d\nu(y) \right\|_{p,\mu} \leq \int_Y \|f(\cdot,y)\|_{p,\mu} d\nu(y)$$

dir.

Kanıt. (Young Eşitsizliği) Önce $f, g \geq 0$ fonksiyonları için ispat yapalım. Bunun için

$$F(x,y) = f(x-y) \text{ ve } d\nu = g(y)dy$$

olsun. Minkowski integral eşitsizliğinden

$$\int_Y \|f(\cdot,y)\|_{p,\mu}\, d\nu(y) < \infty \Longrightarrow \int_Y f(x,\cdot)d\nu(y) < \infty$$

dir. Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy < \infty$$

olduğunu görmeliyiz. Bunun için

$$\int_Y \|f(\cdot,y)\|_{p,\mu}\, d\nu(y) < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} g(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} g(y)dy \\
&= \|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy \\
&\leq \|f\|_p \|g\|_1 < \infty
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy < \infty$$

olur. Yani $f * g(x)$ sonludur. Şimdi

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq (\text{minkowski}) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} g(y)\, dy \\
&= \|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, dy \\
&\leq \|f\|_p \|g\|_1 < \infty
\end{aligned}$$

yani $f \in L_p$ ve $g \in L_1$ olduğundan $f * g \in L_p$ 'dir.

Şimdi f ve g pozitif değilse ;

$$f = f^+ - f^- \text{ ve } g = g^+ - g^-$$

eşitliklerinden yararlanacağız. Burada

$$f^+ = \max(f,0)\ ,\ f^- = -\min(f,0)\ ,\ g^+ = \max(g,0)\ ,\ g^- = -\min(g,0)$$

dır. Böylece f^+, f^-, g^+, g^- pozitif integrallenebilir fonksiyonlardır.

$$f * g = \left(f^+ * g^+\right) - \left(f^+ * g^-\right) - \left(f^- * g^+\right) + \left(f^- * g^-\right)$$

dir. Burada $f^+ * g^+ \in L_p$, $f^+ * g^- \in L_p$, $f^- * g^+ \in L_p$ ve $f^- * g^- \in L_p$ olduğundan $f * g \in L_p$ 'dir. Ayrıca

$$f * g \leq |f| * |g|$$

olduğundan

$$\|f * g\|_p \leq \||f| * |g|\|_p \leq \||f|\|_p \||g|\|_1 = \|f\|_p \|g\|_1$$

elde edilir. ■

Önerme 2.9 *(Sadosky 1979) Her $f, g \in L_1$ için $f * g$ girişim operatörü tanımlıdır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:*

a) Girişim operatörü değişmelidir. Yani $f * g = g * f$ 'dir.

b) Girişim operatörü birleşme özelliğine sahiptir. Yani

$$f * (g * k) = (f * g) * k = f * g * k$$

c) Girişim operatörü doğrusaldır. Yani

$$(af + bg) * k = a\,(f * k) + b\,(g * k)$$

dir.

Kanıt. a)

$$\begin{aligned} f * g\,(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f\,(x-y)\,g\,(y)\,dy = \\ (\ y &= x - u \text{ değişken değiştirmesi}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f\,(u)\,g\,(x-u)\,|(-1)^n|\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f\,(u)\,g\,(x-u)\,du \\ &= g * f(x) \end{aligned}$$

Her $x \in \mathbb{R}^n$ için sağlandığından

$$f * g = g * f$$

olur.

b)

$$\begin{aligned}
(f*(g*k))(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)(g*k)(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y-z)\,k(z)\,dz\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y-z)\,k(z)\,dzdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y-z)\,dy\right)k(z)\,dz \text{ (Fubini teo.)}
\end{aligned}$$

Şimdi $y = u + z$ yazalım.

$$\begin{aligned}
(f*(g*k))(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-u-z)\,g(u)\,du\right)k(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x-z)\,k(z)\,dz = ((f*g)*k)(x) \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

(2.2) eşitliği her $x \in \mathbb{R}^n$ için sağlandığından

$$f*(g*k) = (f*g)*k$$

olur.

c)

$$\begin{aligned}
((af+bg)*k)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (af+bg)(x-y)\,k(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} [af(x-y)+bg(x-y)]\,k(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} af(x-y)\,k(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^n} bg(x-y)\,k(y)\,dy \\
&= a(f*k)(x) + b(g*k)(x) = (a(f*k)+b(g*k))(x)\,.
\end{aligned}$$

olup bu eşitlik her $x \in \mathbb{R}^n$ için sağlandığından

$$(af+bg)*k = a(f*k)+b(g*k)$$

dır. ■

Not 2.10 *(Sadosky 1979) Sabitlenmiş bir $k \in L_1(\mathbb{R}^n)$ verilsin. O zaman $K : f \to Kf = f*k$ ile tanımlanmış girişim operatörü L_p 'den L_p 'ye süreklidir (sınırlıdır) ve*

$$\|K\|_p \leq \|k\|_1$$

dir. Buradaki sabitlenmiş k fonksiyonuna K girişim operatörünün çekirdeği denir.

Önerme 2.11 *$f \in L_p$, $g \in L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda $f * g \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ 'dir. Ayrıca $f * g(x)$ düzgün süreklidir.*

Kanıt. $f \in L_p$, $g \in L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 \leq p \leq \infty$ olsun.

$$f * g \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| < \infty$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right| \leq \text{(Hölder eşitsizliği)} \\ &\leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \end{aligned}$$

olur. Buradan $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

dir. Burada her iki tarafın $x \in \mathbb{R}^n$ 'e göre supremumunu alalım.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_p \|g\|_{P'} = \|f\|_p \|g\|_{p'} < \infty$$

buradan

$$\|f * g\|_\infty < \infty \Longrightarrow f * g \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$$

elde edilir. Şimdi de önermenin koşullarını sağlayan $f*g$ 'nin düzgün sürekli olduğunu görelim. Burada şu lemmayı kullanacağız:

Lemma: $1 \leq p < \infty$ için kayma operatörü L_p normuna göre süreklidir. Yani,

$$\lim_{y\to 0} \|f(x-y) - f(x)\|_p = 0$$

dir.

Önce bu lemmayı kullanarak $f * g$ 'nin düzgün sürekliliğini gösterelim.

$$\begin{aligned} |f * g(x-y) - f * g(x)| &= |(f(x-y) - f(x)) * g| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y-u) - f(x-u))\, g(u)du \right| \leq \\ &\quad \text{(Hölder eşitsizliğinden)} \\ &\leq \|f(x-y) - f(x)\|_p \|g\|_{p'} \end{aligned}$$

Bu durumda lemma kullanılırsa

$$|f * g(x-y) - f * g(x)| \leq \|f(x-y) - f(x)\|_p \|g\|_{p'} \to 0 \ (y \to 0)$$

Şimdi de $p = \infty$ durumuna bakalım.

$$\begin{aligned}
\sup_x |g * f(x-y) - g * f(x)| &= \|(g(x-y) - g(x)) * f\|_\infty \leq \text{...(Hölder)...} \\
&\leq \|g(x-y) - g(x)\|_1 \|f\|_\infty \\
\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right. &= 1, \ p = 1 \text{ ve } p' = \infty)
\end{aligned}$$

ise buradan

$$\sup_x |g * f(x-y) - g * f(x)| \to 0 \ (y \to 0)$$

olduğu görülür. ■

Önerme 2.12 *$suppf \subset A$ ve $suppg \subset B$ ise*

$$suppf * g \subset A + B = \{x + y : \ x \in A, \ y \in B\}$$

'dir.

Kanıt. $u \notin A + B$ ise $u \notin supp \ f * g$ olduğunu görelim.

Her $y \in supp \ g$ için $u - y \notin supp \ f$ 'dir. Böylece her $y \in supp \ g$ için $f(u-y)g(y) = 0$ 'dır. Buda $f * g(u) = 0$ ' olmasını gerektirir. $u \notin supp \ f * g$ elde edilir.

$$(u \notin A + B \Longrightarrow u \notin supp \ f * g) \equiv (supp \ f * g \subset A + B)$$

■

Teorem 2.13 *(Lebesgue Baskın Yakınsama Teoremi) (Folland 1984)*
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(\mathbb{R}^n)$, hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f_n(x) \to f(x)$ ve her n için $|f_n(x)| \leq g(x)$ olacak şekilde $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ var ise

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

olur.

Tanım 2.14 *(Sadosky 1979)* $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *ve* $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$ *olmak üzere* $\varepsilon > 0$ *için*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

şeklinde tanımlanan $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *ailesine birimin yaklaşımı denir.*

Önerme 2.15 *(Stein ve Shakarchi 2005)*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$$

dir.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,dx &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx \\
&= ...(x = \varepsilon u \text{ değişken değiştirmesi}) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)\,\varepsilon^n du \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)\,du = 1
\end{aligned}$$

■

Teorem 2.16 *(Sadosky 1979)* $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *ve* $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$ *olsun. Eğer* $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, $(f \in C_\infty \subset L_\infty)$ *ise*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0$$

dir. Burada $C_\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\}$ *'dır.*

Kanıt.

$$\begin{aligned}
f * \varphi_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y)\,(f(x-y) - f(x))dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)(f(x-y) - f(x))dy \\
(\frac{y}{\varepsilon} &= u \text{ değişken değiştirmesi}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)\,\frac{1}{\varepsilon^n}\varepsilon^n(f(x-\varepsilon u) - f(x))du
\end{aligned}$$

Şimdi

$$\begin{aligned}
\|f*\varphi_\varepsilon - f\|_p &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-\varepsilon u) - f(x))\varphi(u)\, du \right\|_p \leq \text{(Minkowski integral eşitsizliği)} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x-\varepsilon u) - f(x)\|_p \,|\varphi(u)|\, du \\
&= \int_{|u|\leq M} \|f(x-\varepsilon u) - f(x)\|_p \,|\varphi(u)|\, du \\
&\quad + \int_{|u|>M} \|f(x-\varepsilon u) - f(x)\|_p \,|\varphi(u)|\, du
\end{aligned}$$

Burada

$$I_1 = \int_{|u|\leq M} \|f(x-\varepsilon u) - f(x)\|_p \,|\varphi(u)|\, du$$

ve

$$I_2 = \int_{|u|>M} \|f(x-\varepsilon u) - f(x)\|_p \,|\varphi(u)|\, du$$

diyelim. I_1 ve I_2 integrallerinin δ 'ya bağlı istenildiği kadar küçük yapılabileceğini görelim. Önce I_2 'ye bakalım.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|u|>M} \|f(x-\varepsilon u) - f(x)\|_p \,|\varphi(u)|\, du \\
&\leq 2\|f\|_p \int_{|u|>M} |\varphi(u)|\, du \leq \delta
\end{aligned}$$

olacak şekilde M vardır. Şimdi de I_1 'e bakalım. Burada kayma operatörünün $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L_p normuna göre sürekli olduğunu kullanacağız. Yani her $\delta > 0$ için $\exists \varepsilon_0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\|f(x-\varepsilon u) - f(x)\|_p < \delta$ olduğunu kullanacağız.

$$\int_{|u|\leq M} \|f(x-\varepsilon u) - f(x)\|_p \,|\varphi(u)|\, du \leq \delta \int_{|u|\leq M} \varphi(u)\, du \to 0 \ (\varepsilon \to 0,\ \delta \to 0)$$

Böylece

$$0 \leq \|f*\varphi_\varepsilon - f\|_p \leq 0 + \delta \ (\forall \delta > 0 \text{ için})$$

Buradan üstlimite geçersek (çünkü $\|f*\varphi_\varepsilon - f\|_p$ 'nin limitini varlığını bilmiyoruz.)

$$0 \leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \|f*\varphi_\varepsilon - f\|_p \leq 0$$

buradan

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \|f*\varphi_\varepsilon - f\|_p = 0 \text{ ise } \lim_{\varepsilon\to 0} \|f*\varphi_\varepsilon - f\|_p = 0$$

elde edilir. Son olarak da $f \in C_\infty \subset L_\infty$ durumunu inceleyeceğiz.

$$\begin{aligned}|f * \varphi_\varepsilon(x) - f| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon u) - f(x)|\,|\varphi(u)|\,du \\ &= \int_{|u|\leq M} |f(x-\varepsilon u) - f(x)|\,|\varphi(u)|\,du \\ &\quad + \int_{|u|>M} |f(x-\varepsilon u) - f(x)|\,|\varphi(u)|\,du\end{aligned}$$

ve yine

$$I_1 = \int_{|u|\leq M} |f(x-\varepsilon u) - f(x)|\,|\varphi(u)|\,du$$

ve

$$I_2 = \int_{|u|>M} |f(x-\varepsilon u) - f(x)|\,|\varphi(u)|\,du$$

diyelim. I_1 'e bakarsak $f \in C_\infty$ ise f , I_2 için ise f 'in sınırlılığını kullanırsak I_2 'nin de yeterince küçük yapılabildiğini görürüz. ■

Sonuç 2.17 *$\varphi \in L_1$ ve $\int \varphi = 0$ olsun. Her $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$ için $\varepsilon \to 0$ iken $\|f * \varphi_\varepsilon\|_p \to 0$ 'dır. (ya da $f \in C_\infty \subset L_\infty$)*

Önerme 2.18 *C_0^∞ , L_p 'de yoğundur. Yani*

$$\overline{C_0^\infty} = L_p\left(\mathbb{R}^n\right)\ ,\ 1 \leq p < \infty$$

Kanıt. Önce $f \in L_p$ fonksiyonu kompakt dayanaklı olsun. (kompakt dayanaklılar L_p 'de yoğundur.) ρ fonksiyonunu $\rho \in C_0^\infty$ olacak şekilde seçelim ve $g_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$ fonksiyonlar ailesini tanımlayalım.

$$g_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon \in C_0^\infty$$

dır. Ayrıca yukarıda ispatlanan teorem gereği

$$\|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \to 0,\ \varepsilon \to 0$$

idi. Şimdi $f \in L_p$ alalım. kompakt dayanaklı öyle g fonksiyonu vardır ki $\|f - g\|_p < \frac{\delta}{2}$ 'dir. (çünkü kompakt supportlular L_p 'de yoğundur.) Bu durumda

$$g_\varepsilon = g * \rho_\varepsilon$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\|f-g_\varepsilon\|_p &= \|f-g*\rho_\varepsilon\|_p = \|f-g+g-g*\rho_\varepsilon\|_p \\ &\leq \|f-g\|_p + \|g-g*\rho_\varepsilon\|_p\end{aligned}$$

Burada $\|f-g\|_p < \frac{\delta}{2}$ ve $\varepsilon \to 0$ için $\|g-g*\rho_\varepsilon\|_p \to 0$ olduğundan

$$\|f-g*\rho_\varepsilon\|_p \to 0$$

olur. $g*\rho_\varepsilon \in C_0^\infty$ olduğundan C_0^∞ 'daki fonksiyonlar L_p 'de yoğundur. ■

Tanım 2.19 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ *olmak üzere*

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\left(...\left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_m}} f\right)\right)\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.20 $N \in \mathbb{Z}^+$ *ve* α *multi indeksi için*

$$\|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left[(1+|x|)^N \partial^\alpha f\right]$$

olsun. Bu durumda Schwartz uzayı, $\Im$ *,*

$$\Im = \left\{f \in C^\infty : \text{ her } N \text{ ve } \alpha \text{ için } \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty\right\}$$

ile tanımlanır.

Örnek 2.21 $f(x) = e^{-|x|^2} \in \Im$ *'dir. Çünkü*

$$\|f\|_{(2,1)} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(1+x^2\right) f(x) < \infty$$

Önerme 2.22 *(Folland 1984)*$f \in \Im$ *ise her* α *multi indeksi için* $\partial^\alpha f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ *'dur.*

Kanıt. Her $N \in \mathbb{Z}^+$ için $f \in \Im$ ise $|\partial^\alpha f(x)| \leq C_N (1+|x|)^{-N}$ 'dir. Schwartz uzayının tanımından $(1+|x|)^N |\partial^\alpha f| < C_{N,\alpha}$ 'idi. Buradan da

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C_{N,\alpha} (1+|x|)^{-N}$$

dir. Eğer

$$\|\partial^\alpha f\|_p \leq C_{N,\alpha} \left\|(1+|x|)^{-N}\right\|_p < \infty$$

olduğunu gösterirsek ispat biter. Şimdi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|x|)^{-N}\right)^p = \int_{|x|<1} (1+|x|)^{-Np}\, dx + \int_{|x|\geq 1} (1+|x|)^{-Np}\, dx = I_1 + I_2$$

denirse $I_1 < \infty$ 'dır. Çünkü $\frac{1}{(1+|x|)^{Np}}$ fonksiyonu $|x| < 1$ bölgesinde süreklidir.

I_2 için

$$\frac{1}{(1+|x|)^{Np}} \leq \frac{1}{|x|^{Np}}$$

ise

$$\int_{|x|\geq 1} \frac{1}{(1+|x|)^{Np}} dx \leq \int_{|x|\geq 1} \frac{1}{|x|^{Np}} dx \tag{2.3}$$

$Np > n$ ise (2.3)'in sağ tarafı yakınsaktır. (Çünkü $\mathbb{R}^n$ 'de $\int_{|x|\geq 1} \frac{1}{|x|^\alpha} < \infty \Longleftrightarrow \alpha > n$). $N > \frac{n}{p}$ seçersek $I_2 < \infty$ olur. Böylece ispat tamamlanır. ∎

Önerme 2.23 *(Folland 1984) $f \in C^\infty$ olsun. O zaman*

$$\begin{aligned} f &\in \Im \Longleftrightarrow \forall \alpha, \beta \text{ multi indeksi için } \left|x^\beta \partial^\alpha f\right| \leq M_{\alpha,\beta} \\ &\Longleftrightarrow \forall \alpha, \beta \text{ multi indeksi için } \left|\partial^\alpha \left(x^\beta f\right)\right| \leq M_{\alpha,\beta} \end{aligned} \tag{2.4}$$

dir.

Not 2.24 *(Sadosky 1979) $\mathbb{R}^n$ de $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $n > 1$, için kutupsal koordinatlar şöyledir:*

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1 \\ x_2 &= r\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ x_3 &= r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \\ &\dots \\ x_{n-1} &= r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \\ x_n &= r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

Burada $r = |x|$, $x' = (\varphi_1, ..., \varphi_{n-1})$ *ve* $k = 1, 2, ..., n-2$ *için* $0 \leq \varphi_k \leq \pi$ *ve* $\varphi_{n-1} \in [0, 2\pi]$ *'dir. Böylece* $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = r^2$ *'dir. Dolayısıyla*

$$(\cos\varphi_1)^2 + (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2)^2 + ... + (\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1})^2 = 1$$

dir.

Not 2.25 *(Stein ve Shakarchi 2005, Sadosky 1979)* $\mathbb{R}^3$ *'te kutupsal koordinatlar için integral formülü*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\,dx = \int_{\Sigma_2} \int_0^\infty f(rx')\, r^2 dr dx'$$

$\mathbb{R}^n$ *de kutupsal koordinatlar için integral formülü*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_{\Sigma_{n-1}} \int_0^\infty f(rx')\, r^{n-1} dr dx' \\ &= \int_0^\infty r^{n-1} \left(\int_{\Sigma_{n-1}} f(rx')\, dx' \right) dr \end{aligned}$$

dir. Burada Σ_{n-1} *birim küreyi ve* dx' *yüzeyin alan elemanını ifade etmektedir.*

Lemma 2.26 $n > 1$ *için* ω_n *birim kürenin yüzey alanı ve* Ω_n *birim kürenin hacmi olmak üzere*

$$\omega_n = 2\pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

ve

$$\Omega_n = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}$$

dir.

Kanıt.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)} dx_1 dx_2 ... dx_n \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-x_1^2} dx_1 \int_{-\infty}^\infty e^{-x_2^2} dx_2 ... \int_{-\infty}^\infty e^{-x_n^2} dx_n \\ &= \sqrt{\pi}\sqrt{\pi} ... \sqrt{\pi} = \pi^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

dir. Şimdi

$$\begin{aligned}
\pi^{\frac{n}{2}} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = ...(x = rx' \text{ ve } dx = r^{n-1}dx')... \\
&= \int_0^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} e^{-r^2} r^{n-1} dr dx' \\
&= \left(\int_{\Sigma_{n-1}} dx' \right) \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr
\end{aligned}$$

dir. $\omega_n = \int_{\Sigma_{n-1}} dx'$ olduğundan $r = \sqrt{t}$, $dr = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, $0 \leq t < \infty$ denirse

$$\begin{aligned}
\pi^{\frac{n}{2}} &= \omega_n \int_0^\infty t^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}} e^{-t} dt \\
&= 2\omega_n \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt \\
&= \frac{1}{2} \omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\omega_n = 2\pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

olur. Şimdi de ikinci eşitliği gösterelim.

$$\begin{aligned}
\Omega_n &= \int_{|x|<1} 1dx = \int_{\Sigma_{n-1}} \int_0^1 r^{n-1} dr dx' = \omega_n \int_0^1 r^{n-1} dr = \omega_n \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} 2\pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{2\frac{n}{2}} 2\pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\
&= \pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\Omega_n = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}$$

olur. ■

Lemma 2.27 *$x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(x) = |x|^\alpha$ olsun. Bu durumda*

$$\int_{|x|<\varepsilon} |x|^\alpha dx < \infty \Longleftrightarrow \alpha > -n$$

ve

$$\int_{|x|>\varepsilon} |x|^\alpha dx < \infty \Longleftrightarrow \alpha < -n$$

dir.

Kanıt. $x = (x_1, ..., x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = r$ olmak üzere

$(\Longrightarrow)$

$$\begin{aligned} \int_{|x|<\varepsilon} |x|^{\alpha} dx &= \int_{\Sigma_{n-1}} \int_0^{\varepsilon} r^{n-1} r^{\alpha} dr dx' \\ &= \int_{\Sigma_{n-1}} dx' \int_0^{\varepsilon} r^{n-1+\alpha} dr = \omega_n \frac{r^{n+\alpha}}{n+\alpha} \Big|_0^{\varepsilon} \end{aligned}$$

$\alpha > -n$ için yakınsak olur.

$(\Longleftarrow)$ $\alpha > -n$ ise $n + \alpha > 0$ 'dır.

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|<\varepsilon} |x|^{\alpha} dx \right| &\leq \varepsilon^{\alpha} \int_{|x|<\varepsilon} dx \\ &\leq \varepsilon^{\alpha} \left(\omega_n \int_0^{\varepsilon} r^{n-1} dr \right) = \omega_n \frac{\varepsilon^{\alpha+n}}{n} < \infty \end{aligned}$$

ikinci gerek ve yeter koşul da benzer şekilde gösterilebilir. ■

2.2. Girişim Operatörünün Noktasal Yakınsaması

Bu bölümde amacımız $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$ için $\int \varphi = 1$ olmak üzere

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f * \varphi_{\varepsilon}(x) = f(x) \tag{2.5}$$

eşitliğinin hangi koşullar altında sağlandığını belirlemek olacaktır. Mesela aşağıdaki önerme özel koşullar altında yukarıdaki limitin varlığını garanti ediyor

Önerme 2.28 *(Sadosky 1979) $\varphi \in L_1$ kompakt dayanaklı ve $\int \varphi = 1$ olsun. Eğer f düzgün sürekli ise (ya da özel olarak $f \in C_{\infty}$) $\varepsilon \to 0$ için*

$$f * \varphi_{\varepsilon} \rightrightarrows f$$

dir.

Lemma 2.29 *(Sadosky 1979) $\varphi \in L_1$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$ ve $\psi(x) = \sup_{|y| \geq |x|} |\varphi(y)|$ olmak üzere $\psi(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda*

i) ψ radialdir. Yani $|x| = |y|$ ise $\psi(x) = \psi(y)$ 'dir.

ii) $|x| = r$ *olmak üzere* $\psi_0(r) = \psi(x)\,|_{|x|=r}$ *şeklinde tanımlanan* $\psi_0(r)$ *fonksiyonu* $r > 0$ *için azalandır.*

iii) $|x| \to 0$ *veya* $|x| \to \infty$ *iken (özel olarak* $\exists A > 0$, *her* $0 < |x| < \infty$ *için* $|x|^n \psi(x) \leq A$ *iken)* $|x|^n \psi(x) \to 0$ *'dir.*

iv) Her $0 < \eta < \infty$ *ve* $1 \leq p \leq \infty$ *için*

$$X_\eta = \begin{cases} 1, & |x| > \eta \\ 0, & |x| < \eta \end{cases}$$

olmak üzere $\|X_\eta \psi_\varepsilon\|_{p'} \to 0$, $\varepsilon \to 0$, *burada* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *ve* $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ *'dır.*

Kanıt. i) $\psi(x) = \sup\limits_{|y| \geq |x|} |\varphi(y)|$ olmak üzere

$$|x_1| = |x_2| \text{ ise } \psi(x_1) = \sup_{|y| \geq |x_1|} |\varphi(y)| = \sup_{|y| \geq |x_2|} |\varphi(y)| = \psi(x_2)$$

dir.

ii) $r_1 < r_2$ ise

$$\psi_0(r_1) = \sup_{|y| \geq r_1} |\varphi(y)| \geq \sup_{|y| \geq r_2} |\varphi(y)| = \psi_0(r_2)$$

olur. Yani $r_1 < r_2$ iken $\psi_0(r_1) \geq \psi_0(r_2)$ 'dir.

iii) Birim küre üzerinden integral formülünü kullanırsak

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{r}{2}<|x|<r} \psi(x)\,dx &= \int_{\Sigma_{n-1}} dx' \int_{\frac{r}{2}}^{r} \psi(\rho x')\,\rho^{n-1} d\rho \\
&= \omega_n \int_{\frac{r}{2}}^{r} \psi_0(\rho)\,\rho^{n-1} d\rho \geq ...(\psi_0 \text{ azalan olduğu için (ii) 'den}) \\
&\geq \omega_n \int_{\frac{r}{2}}^{r} \psi_0(r)\,\rho^{n-1} d\rho = \omega_n \psi_0(r) \frac{\rho^n}{n} \Big|_{\frac{r}{2}}^{r} \\
&= \omega_n \psi_0(r) \left(\frac{r^n}{n} - \frac{r^n}{2^n n}\right) \\
&= \psi_0(r)\, r^n \omega_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n n}\right)
\end{aligned}$$

Burada $\omega_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n n}\right) = c_n$ (sabit) dersek

$$\int_{\frac{r}{2}<|x|<r} \psi(x)\,dx \geq c_n r^n \psi_0(r) \geq 0 \text{ (çünkü } \psi_0(r) \geq 0)$$

Diğer yandan $\psi(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ idi. O zaman

$$\lim_{r\to 0} \int_{\frac{r}{2}<|x|<r} \psi(x)\,dx = 0 \text{ (integralin mutlak sürekliliğinden)}$$

ve

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\frac{r}{2}<|x|<r} \psi(x)\,dx = 0$$

dır. Çünkü

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx &= \lim_{r\to\infty} \int_{|x|<r} \psi(x)\,dx = A < \infty \\ &\iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists r_0,\ r > r_0 \text{ ise } \left| \int_{|x|<r} \psi(x)\,dx - A \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

ise

$$A = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) = \int_{|x|<r_0} \psi + \int_{|x|\geq r_0} \psi$$

$$A - \int_{|x|<r_0} \psi = \int_{|x|\geq r_0} \psi$$

$$\left| A - \int_{|x|<r_0} \psi \right| = \int_{|x|\geq r_0} \psi < \varepsilon$$

dir. Böylece

$$\int_{\frac{r}{2}<|x|<r} \psi = \int_{|x|>\frac{r}{2}} \psi - \int_{|x|>r} \psi$$

için $\int_{|x|>\frac{r}{2}} \psi < \varepsilon_1$ ve $\int_{|x|>r} \psi < \varepsilon_2$ denirse

$$\int_{\frac{r}{2}<|x|<r} \psi < \varepsilon(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

ise

$$\int_{\frac{r}{2}<|x|<r} \psi(x)\,dx \geq cr^n \psi_0(r) \geq 0$$

burada $r \to 0$ ve $r \to \infty$ için $\int_{\frac{r}{2}<|x|<r} \psi(x)\,dx \to 0$ olduğundan sıkıştırma teoremi gereği $cr^n\psi_0(r) \to 0$, $r \to 0$ ve $r \to \infty$. $x = \sqrt[n]{c}r$ seçilebilir. $r \to \infty \Longrightarrow |x| \to \infty$ ve $r \to 0 \Longrightarrow |x| \to 0$ olduğundan

$$x^n \psi(x) \to 0$$

iv)

$$
\begin{aligned}
\|X_\eta \psi_\varepsilon\|_{p'}^{p'} &= \int_{|x|>\eta} (1\cdot\psi_\varepsilon(x))^{p'}\,dx + \int_{|x|<\eta} (0\cdot\psi_\varepsilon(x))^{p'}\,dx \\
(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} &= 1 \Longrightarrow \frac{p'+p}{pp'} = 1 \Longrightarrow p' = \frac{p'}{p}+1) \\
&= \int_{|x|>\eta} (\psi_\varepsilon(x))^{\frac{p'}{p}+1}\,dx \\
&= \int_{|x|>\eta} \psi_\varepsilon(x)\,(\psi_\varepsilon(x))^{\frac{p'}{p}}\,dx \\
&= \int_{|x|>\eta} \psi_\varepsilon(x)\left(\varepsilon^{-n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{p'}{p}} \\
&\le \left(\varepsilon^{-n}\psi_0\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{p'}{p}} \int_{|x|>\eta} \psi_\varepsilon(x)\,dx \\
&\le \left(\varepsilon^{-n}\psi_0\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{p'}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x)\,dx \ (\int_{\mathbb{R}^n}\psi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\psi(x) \text{ sonlu })
\end{aligned}
$$

(iii) 'den $\varepsilon^{-n}\psi_0\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ 'dır. Böylece $\|X_\eta\psi_\varepsilon\|_{p'} \to 0$, $\varepsilon \to 0$ elde edilir. ■

Şimdi girişim operatörü için noktasal yakınsama teoremini ifade edelim.

Teorem 2.30 *(Sadosky 1979)* $\varphi \in L_1$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi = 1$, $\psi(x) = \sup\limits_{|y|\ge|x|}|\varphi(y)|$, $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$ *olsun. Eğer* $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *ise bu durumda* $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$ *olmak üzere her* $x \in \widetilde{L_f}$ *için*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f * \varphi_\varepsilon(x) = f(x)$$

dir.

Kanıt. $x \in \widetilde{L_f}$ alalım. Bu durumda $\forall\delta > 0$ için $\exists\eta_\delta$ $0 < r < \eta_\delta$ ise

$$\frac{1}{r^n}\int_{|y|\le r} |f(x-y) - f(x)|\,dy < \delta \tag{2.6}$$

olur. Şimdi

$$\begin{aligned} f*\varphi_\varepsilon(x)-f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(f(x-y)-f(x))\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy \\ &= \int_{|y|\le\eta_\delta}(f(x-y)-f(x))\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy \\ &\quad+\int_{|y|>\eta_\delta}(f(x-y)-f(x))\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy \\ &= I_1+I_2 \end{aligned}$$

ise

$$|f*\varphi_\varepsilon(x)-f(x)|\le|I_1|+|I_2|$$

olur. Amacımız I_1 ve I_2 integrallerinin x'ten bağımsız olarak $\varepsilon\to0$ iken yeterince küçük yapılabileceğini görmektir. Önce I_1 'i inceleyelim.

$$\begin{aligned} |I_1| &\le \int_{|y|\le\eta_\delta}|f(x-y)-f(x)|\,\frac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)dy \\ &= \int_{\Sigma_{n-1}}dy'\int_0^\eta r^{n-1}\left|f\left(x-ry'\right)-f(x)\right|\frac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\frac{ry'}{\varepsilon}\right)dr \\ &\quad\left(\psi\left(\frac{ry'}{\varepsilon}\right)=\psi_0(\frac{r}{\varepsilon})\text{ olduğundan}\right) && (2.7)\\ &= \int_{\Sigma_{n-1}}\left(\int_0^\eta r^{n-1}\left|f\left(x-ry'\right)-f(x)\right|\frac{1}{\varepsilon^n}\psi_0\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)dr\right) && (2.8) \end{aligned}$$

Şimdi

$$g(r)=\int_{\Sigma_{n-1}}|f(x-ry')-f(x)|\,dy' \text{ ve } G(r)=\int_0^r g(t)\,t^{n-1}dt$$

dersek (2.8) şuna dönüşür:

$$(2.8)=\int_0^\eta r^{n-1}g(r)\,\frac{1}{\varepsilon^n}\psi_0\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)dr$$

kısmi integrasyon uygularsak $dv=r^{n-1}g(r)\,dr$ ve $u=\frac{1}{\varepsilon^n}\psi_0\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)$ alınırsa

$$=G(r)\,\frac{1}{\varepsilon^n}\psi_0\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\Big|_0^\eta-\int_0^\eta G(r)\,\frac{1}{\varepsilon^n}\left(\frac{d}{dr}\psi_0\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\right)$$

$\frac{r}{\varepsilon}=s$ dönüşümü uygularsak

$$=G(r)\,\frac{1}{r^n}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^n\psi_0\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\Big|_0^\eta-\int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}}G(\varepsilon s)\,\frac{1}{\varepsilon^n}\left(\frac{d}{ds}\psi_0(s)\right) \tag{2.9}$$

elde edilir. Ayrıca (2.6) 'dan dolayı ((2.6) 'da kutupsal koordinatlara geçersek)

$$G(r)\frac{1}{r^n}=\frac{1}{r^n}\int_0^r\int_{\Sigma_{n-1}}|f(x-sy')-f(x)|\,s^{n-1}dsdy'<\delta \tag{2.10}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi

$$\begin{aligned}
(2.9)\ &\le\ \delta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^n\psi_0\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)|_0^\eta-\int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}}G(\varepsilon s)\frac{1}{\varepsilon^n}d\psi_0(s)\\
&=\ \delta\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)^n\psi_0\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)-\int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}}G(\varepsilon s)\frac{1}{\varepsilon^n}d\psi_0(s)\\
(\exists A\ &>\ 0,\ 0<|x|<\infty \text{ için } |x|^n\psi(x)\le A \text{ idi. (lemma 2.29) })\\
&\le\ \delta A-\int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}}G(\varepsilon s)\frac{1}{\varepsilon^n}d\psi_0(s)\\
&=\ \delta A-\int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}}G(\varepsilon s)\frac{1}{\varepsilon^n}\psi_0'(s)\,ds\\
(\psi_0(r) \text{ azalandı yani } \psi_0'(r)\ &<\ 0 \text{ (lemma 2.29) })\\
&=\ \delta A+\int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}}G(\varepsilon s)\frac{1}{\varepsilon^n}(-\psi_0'(s))ds\\
&=\ \delta A+\int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}}G(\varepsilon s)\frac{1}{\varepsilon^n}\frac{1}{(\varepsilon s)^n}(\varepsilon s)^n(-\psi_0'(s))\,ds\\
&\le\ \delta A+\int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}}\delta s^n(-\psi_0'(s))\,ds\\
&\qquad\left(G(\varepsilon s)\frac{1}{(\varepsilon s)^n}<\delta \text{ idi } (2.10)' \text{dan}\right)\\
&=\ \delta\left(A-\int_0^\infty s^n\psi_0'(s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

Şimdi burada $\int_0^\infty s^n\psi_0'(s)\,ds$ integralinin sonlu olduğunu görelim.

$$B=\int_0^\infty s^n\psi_0'(s)\,ds=s^n\psi_0(s)\,|_0^\infty-n\int_0^\infty\psi_0(s)\,s^{n-1}ds$$

Şimdi lemma 2.29 'un ii) ve iii) özelliklerini kullanırsak

$$-B=n\int_0^\infty\psi_0(s)\,s^{n-1}ds=\frac{n}{\omega_n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,dx<\infty\quad (\psi\in L_1 \text{ olduğundan})$$

Böylece

$$|I_1|\le(A+B)\,\delta_\eta\ ,\ \delta \text{ sadece } \eta \text{ 'ya bağlı}$$

Dolayısıyla $|I_1|$'i sadece η 'ya bağlı olarak çok küçük yapabildik. Şimdi $|I_2|$ 'yi tahmin edelim.

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{|t|>\eta} (f(x-t) - f(x))\, \varphi_\varepsilon(t)\, dt \right| \\ &\le \int_{|t|>\eta} |f(x-t)|\, \varphi_\varepsilon(t)\, dt + |f(x)| \int_{|t|>\eta} \varphi_\varepsilon(t)\, dt \\ &\le \int_{|t|>\eta} |f(x-t)|\, \psi_\varepsilon(t)\, dt + |f(x)| \int_{|t|>\eta} \psi_\varepsilon(t)\, dt \ \ (\varphi_\varepsilon(t) < \psi_\varepsilon(t) \text{ olduğundan}) \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} \int_{|t|>\eta} \psi_\varepsilon(t)\, dt &= \int_{|t|>\eta} \frac{1}{\varepsilon^n} \psi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt = ...(u = t\varepsilon \text{ değişken değiştirmesi})... \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|t|>\frac{\eta}{\varepsilon}} \psi(t)\, \varepsilon^n dt \\ &= \int_{|t|>\frac{\eta}{\varepsilon}} \psi(t)\, dt \to 0,\ \varepsilon \to 0 \end{aligned}$$

Şimdi de birinci integrali tahmin edelim.

$$\int_{|t|>\eta} |f(x-t)|\, \psi_\varepsilon(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)|\, \chi_\eta(t)\, \psi_\varepsilon(t)\, dt$$

Burada $\chi_\eta(t) = \begin{cases} 1, & |t| > \eta \\ 0, & |t| < \eta \end{cases}$,$\{t \in \mathbb{R}^n : \ |t| \ge \eta\}$ kümesinin karakteristik fonksiyonudur. $|f(x-t)|$ ve $\chi_\eta(t)\, \psi_\varepsilon(t)$ fonksiyonlarına Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\int_{|t|>\eta} |f(x-t)|\, \psi_\varepsilon(t)\, dt \le \|f\|_p \left\|\chi_\eta \psi_\varepsilon\right\|_{p'} ,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

elde edilir. Lemma 2.29 'un iv) özelliğinden dolayı $\left\|\chi_\eta \psi_\varepsilon\right\|_{p'} \to 0,\ \varepsilon \to 0$. Böylece ispat tamamlanır. ■

2.3. Fourier Dönüşümü

Tanım 2.31 *(Sadosky 1979, Stein ve Shakarchi 2005) $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun fourier dönüşümü*

$$\mathfrak{F}(f)(x) = \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt$$

şeklinde tanımlanır.

Not 2.32 $|e^{-2\pi i x \cdot t}| = 1$ *olduğundan*

$$\left|\hat{f}(x)\right| = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t)||e^{-2\pi i x\cdot t}|dt \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t)|dt < \infty$$

yani, $f^{\wedge}(x)$, *her* $x \in \mathbb{R}^n$ *için anlamlıdır.*

Şimdi $\hat{f}(x)$ fonksiyonunun bazı özelliklerini ifade edelim.

Önerme 2.33 *(Sadosky 1979)* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *verilsin. Bu durumda,*

(a) $f^{\wedge}(x)$ *sınırlı fonksiyondur ve* $\left\|\hat{f}(x)\right\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

(b) $f^{\wedge}(x)$ *düzgün süreklidir.*

(c) $f \geq 0$ *olsun. O zaman* $\|f^{\wedge}\|_{\infty} = \|f\|_1 = f^{\wedge}(0)$ *'dir.*

Kanıt. (a)

$$|f^{\wedge}(x)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t)||e^{-2\pi i x\cdot t}|dt \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t)|dt = \|f\|_1$$

dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|f^{\wedge}(x)| \leq \|f\|_1$$

Buradan

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f^{\wedge}(x)| \leq \|f\|_1 \iff \|f^{\wedge}\|_{\infty} \leq \|f\|_1 .$$

(b) Düzgün sürekliliği hatırlayalım:

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ için } \exists\delta \text{ vardır ki } \|x-y\| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Bu durumda $h \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} f^{\wedge}(x+h) - f^{\wedge}(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i(x+h)\cdot t}dt - \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i x\cdot t}dt \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)(e^{-2\pi i h\cdot t} - 1)e^{-2\pi i x\cdot t}dt \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} |f^{\wedge}(x+h) - f^{\wedge}(x)| &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \left|e^{-2\pi i h\cdot t} - 1\right| dt \\ &= \int\limits_{|t|\leq M} |f(t)| \left|e^{-2\pi i h\cdot t} - 1\right| dt + \int\limits_{|t|>M} |f(t)| \left|e^{-2\pi i h\cdot t} - 1\right| dt \end{aligned}$$

($\left|e^{-2\pi i h\cdot t}-1\right| \leq \left|e^{-2\pi i h\cdot t}\right| + |1| = 2$) Böylece,

$$|f\hat{}(x+h) - f\hat{}(x)| \leq \int\limits_{|t|\leq M} |f(t)| \left|e^{-2\pi i h\cdot t}-1\right| dt + 2 \int\limits_{|t|>M} |f(t)|\, dt$$

$f \in L_1$ olduğunda M 'yi yeteri kadar büyük seçerek $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ yapabiliriz. Şimdi M 'yi sabit tutalım ve $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ yapabileceğimizi görelim.

İddia: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $t \to e^{-2\pi i h\cdot t}$, h sabit, fonksiyonu için $\lim\limits_{h\cdot t\to 0} f(t) = 1$'dir.

İddianın ispatı: $\lim\limits_{h\cdot t\to 0} \cos(2\pi h\cdot t) + i\sin(2\pi h\cdot t) = \cos 0 + i \sin 0 = 1.$

Yani,

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ için } \exists\delta\ |h\cdot t| < \delta \implies \left|e^{-2\pi i h\cdot t}-1\right| < \varepsilon$$

$\implies |h\cdot t| \leq \|h\|\,\|t\| \leq (\|t\| < M)$

$\implies |h\cdot t| \leq \|h\|.M < \delta$

$\implies \|h\| < \frac{\delta}{M}$ seçersek $|h\cdot t| < \delta$ olur.

$\implies \|h\| < \frac{\delta}{M}$ için $\left|e^{-2\pi i h\cdot t}-1\right| < \varepsilon$ olur. Bu durumda,

$$\int\limits_{|t|\leq M} |f(t)| \left|e^{-2\pi i h\cdot t}-1\right| dt \leq \varepsilon \int\limits_{|t|\leq M} |f(t)|\, dt \leq \varepsilon \|f\|_1$$

Yeteri kadar küçük, $\|h\| < \frac{\delta}{M}$, h' ler için $\left|f\hat{}(x+h) - f\hat{}(x)\right|$ farkı x'ten bağımsız olarak çok küçük yapılabildi.

(c) $f \geq 0$ olsun.

$$\|f\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i 0\cdot t}dt = f\hat{}(0)$$

Buradan, $\|f\|_1 = f\hat{}(0)$ elde edilir. Diğer yandan,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f\hat{}(x) = \|f\hat{}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

((a) şıkkından) olduğundan,

$$\|f\|_1 = f\hat{}(0) \leq \|f\hat{}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

dir. Böylece

$$\|f\hat{}\|_\infty = \|f\|_1 = f\hat{}(0)$$

dir. ■

Not 2.34 *Yukarıdaki lemmadan*

$$\mathfrak{F}(f)(x) = f^{\wedge}(x)$$

şeklinde tanımlanan Fourier dönüşüm operatörü güçlü $(1,\infty)$ *tiplidir. (Not: Bir operatörün güçlü* (p,q) *tipli olması için:* $\|Tf\|_q \leq A.\|f\|_p$ *olmalıdır ve buradan güçlü* $(1,\infty)$ *tipli:* $\|\mathfrak{F}(f)\|_\infty \leq A.\|f\|_1$ *) Ayrıca bu operatörün normu* $\|\mathfrak{F}\| \leq 1'$*dir. Hatta* $\|\mathfrak{F}\| = 1'$*dir.* $1'$*den küçük olamaz! Çünkü*

$$f \geq 0 \implies \|\mathfrak{F}(f)\|_\infty = \|f\|_1$$

dir. ((c) şıkkından).

Lemma 2.35 *(Sadosky 1979)* $\{f_n\} \subset L^1$ *dizisi için*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$$

olsun. Bu durumda

$$f_n^{\wedge} \rightrightarrows f^{\wedge} \text{ (düzgün)}$$

dir.

Kanıt. Düzgün yakınsamayı hatırlayalım:

$$\forall\varepsilon > 0 \text{için } \exists n_0 \; n \geq n_0 \implies \sup_x |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Buradan,

$$\sup_x |f_n^{\wedge}(x) - f^{\wedge}(x)| = \|f_n^{\wedge}(x) - f^{\wedge}(x)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \to 0, n \to \infty (\text{önerme}2.33)$$

■

2.3.1. Fourier dönüşümünü analiz etmek için üç örnek

Örnek 2.36 $\mathbb{R}$ *'de tanımlı* $f(t) = \chi_{(a,b)}(t)$ *olsun.*

$$\begin{aligned}
f^{\wedge}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)}(t) e^{-2\pi ix\cdot t} dt \\
&= \int_a^b e^{-2\pi ix\cdot t} dt = \frac{1}{-2\pi ix} e^{-2\pi ix\cdot t} \Big|_a^b = \frac{e^{-2\pi ix\cdot b} - e^{-2\pi ix\cdot a}}{-2\pi ix} \\
&= \frac{e^{-2\pi ixa}}{2\pi ix} - \frac{e^{-2\pi ixb}}{2\pi ix}
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
|f^{\wedge}(x)| &= \frac{\left|e^{-2\pi iax}-e^{-2\pi ibx}\right|}{|2\pi ix|}=\frac{\left|e^{-iax}-e^{-ibx}\right|}{c\,|x|}\\
&= \frac{|\cos(-ax)+i\sin(-ax)-\cos(-bx)+i\sin(-bx)|}{c\,|x|}\\
&= \frac{|(\cos ax-\cos bx)+i(\sin ax-\sin bx)|}{c\,|x|}\\
&= \frac{(\cos^2 ax-2\cos ax\cos bx+\cos^2 bx+\sin^2 bx-2\sin bx\sin ax+\sin^2 ax)^{\frac{1}{2}}}{c\,|x|}\\
&= \frac{\sqrt{2-2\cos(a-b)x}}{c\,|x|}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$g(x)=\frac{\sqrt{2-2\cos kx}}{|x|}\ \textit{diyelim.}$$

Bu durumda $\int_0^\infty \frac{\sqrt{2-2\cos kx}}{|x|}dx=\infty$ *olduğunu gösterirsek* $f^{\wedge}$ *'in* $\mathbb{R}$ *'de integrallenemediğini göstereceğiz.* $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} &\geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1}{x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}+2\pi}^{\frac{3\pi}{2}+2\pi}\frac{1}{x}dx+\cdots\\
&= (\ln\frac{3\pi}{2}-\ln\frac{\pi}{2})+(\ln(\frac{3\pi}{2}+2\pi)-\ln(\frac{\pi}{2}+2\pi))+\cdots\\
&= \ln 3+\ln\frac{7}{5}+\cdots\\
&= \infty
\end{aligned}$$

Böylece kendisi L_1 *'den olup Fourier dönüşümü* L_1 *'den olmayan bir fonksiyon örneği göstermiş olduk.*

Ayrıca

$$|f^{\wedge}(x)|\leq\frac{1}{\pi\,|x|}\to 0,|x|\to\infty$$

dir..

Örnek 2.37 $\mathbb{R}$ *'de tanımlı*

$$\Psi_{a,c}(t)=\begin{cases}1, & -a\leq t\leq a\\ 0, & |t|\geq a+c\\ \frac{a-t+c}{c}, & a<t<a+c\\ \frac{a+t+c}{c}, & -a-c<t<-a\end{cases}$$

şeklinde olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\Psi\hat{}_{a,c}(x) &= f\hat{}(x) = \int_{\mathbb{R}^1} \Psi_{a,c}(t) e^{-2\pi i x t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{a,c}(t)(\cos 2\pi x t - i \sin 2\pi x t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{a,c}(t) \cos 2\pi x t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{a,c}(t) \sin 2\pi x t dt.
\end{aligned}
$$

Şimdi,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{a,c}(t) \cos 2\pi x t dt$$

ve

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{a,c}(t) \sin 2\pi x t \, dt$$

diyelim. Önce I_2 'yi hesaplayalım.

$$\Psi_{a,c}(-t) \sin 2\pi x(-t) = -\Psi_{a,c}(t) \sin 2\pi x t$$

dir. O zaman

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{a,c}(t) \sin 2\pi x t \, dt = \int_{-(a+c)}^{(a+c)} \Psi_{a,c}(t) \sin 2\pi x t \, dt = 0$$

Böylece

$$I_2 = 0$$

dır. Şimdi I_1 'yi hesaplayalım.

$$\Psi_{a,c}(-t) \cos 2\pi x(-t) = \Psi_{a,c}(t) \cos 2\pi x t$$

dir. O zaman

$$
\begin{aligned}
f\hat{}(x) &= 2 \int_{0}^{\infty} \Psi_{a,c}(t) \cos 2\pi x t \, dt \\
&= 2 \int_{0}^{a+c} \Psi_{a,c}(t) \cos 2\pi x t \, dt
\end{aligned}
$$

(Kısmi integrasyon uygularsak, $\Psi_{a,c}(t) = u$, $\cos 2\pi xt\ dt = dv$)

$$\begin{aligned}
f\hat{}(x) &= 2(\Psi_{a,c}(t)\frac{1}{2\pi x}\sin 2\pi xt\ |_0^{a+c} - \frac{1}{2\pi x}\int_0^{a+c}\Psi'_{a,c}(t)\sin 2\pi xt\ dt \\
&= -\frac{1}{\pi x}\int_0^{a+c}\Psi'_{a,c}(t)\sin 2\pi xt\ dt \\
&= -\frac{1}{\pi x}\int_0^{a} 0.\sin 2\pi xt\ dt - \frac{1}{\pi x}\int_a^{a+c}\left(-\frac{1}{c}\right)\sin 2\pi xt\ dt \\
&= \frac{1}{\pi cx}\int_a^{a+c}\sin 2\pi xt\ dt \\
&= \frac{1}{2\pi^2 cx^2}(\cos 2\pi ax - \cos 2\pi(a+c)x)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $|f\hat{}(x)| \leq \frac{1}{\pi^2 cx^2}$, $f\hat{}$ *sürekli, sınırlı ve* $f\hat{} \in L_1$ *'dir.*

Böylece hem kendisi hem de Fourier dönüşümü L_1 *'den olan fonksiyonlara bir örnek göstermiş olduk.*

Örnek 2.38 $f_k \in L_1(\mathbb{R}^1)$ *fonksiyonu* $k \in \{1, 2, ..., n\}$ *ve* $t = (t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ *olmak üzere* $f(t) = f_1(t_1)f_2(t_2)...f_n(t_n)$ *şeklinde olsun.Bu durumda;*

$$f\hat{}(x) = f_1\hat{}(x_1)f_2\hat{}(x_2)...f_n\hat{}(x_n)$$

şeklindedir.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
f\hat{}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(t_1)f_2(t_2)...f_n(t_n)e^{-2\pi i(x_1t_1+x_2t_2+...+x_nt_n)}dt_1dt_2...dt_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(t_1)e^{-2\pi ix_1t_1}f_2(t_2)e^{-2\pi ix_2t_2}...f_n(t_n)e^{-2\pi ix_nt_n}dt_1dt_2...dt_n
\end{aligned}$$

Fubini teoreminden

$$\begin{aligned}
f\hat{}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t_1)e^{-2\pi ix_1t_1}dt_1\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t_2)e^{-2\pi ix_2t_2}dt_2...\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t_n)e^{-2\pi ix_nt_n}dt_n \\
&= f_1\hat{}(x_1)f_2\hat{}(x_2)...f_n\hat{}(x_n)
\end{aligned}$$

■

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Fourier Dönüşümünün Önemli Özellikleri

Teorem 3.1 *(Riemann-Lebesgue Lemması) (Sadosky 1979, Stein ve Weiss 1971)*

$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $\lim\limits_{x\to\infty} f^{\wedge}(x) = 0$ 'dir. Ayrıca $\mathfrak{F} : L_1 \to C_\infty \subset L_\infty$ dönüşümü süreklidir.

$$\left(C_\infty = \left\{ f : \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \text{ ve } f \text{ sürekli} \right\} \right)$$

Kanıt. Basamak fonksiyonları L_1 uzayında yoğundur. Bundan dolayı

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ için } \exists\varphi\text{-basamak fonksiyonu vardır ki } \|f-\varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

demektir. Buradan

$$f^{\wedge} = (f-\varphi)^{\wedge} - \varphi^{\wedge} \text{ (fourier dön. doğrusal op. old.)}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} |f^{\wedge}| &\le |(f-\varphi)^{\wedge}| + |\varphi^{\wedge}| \\ &\le \|f-\varphi\|_1 + |\varphi^{\wedge}| \quad (|f^{\wedge}| \le \|f\|_1 \text{'idi}) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + |\varphi^{\wedge}| . \end{aligned}$$

Eğer $\lim\limits_{x\to\infty} |\varphi^{\wedge}(x)| = 0$ olduğunu gösterirsek ispat biter. $\varphi(x)$_basamak fonksiyonu, sonlu tane karekteristik fonksiyonun bir lineer kombinasyonudur.

$$\varphi(x) = c_1\chi_{D_1}(x) + c_2\chi_{D_2}(x) + ... + c_N\chi_{D_N}(x)$$

$$\begin{aligned} |\varphi^{\wedge}(x)| &\le |c_1| \left|\chi_{D_1}{}^{\wedge}(x)\right| + |c_2| \left|\chi_{D_2}{}^{\wedge}(x)\right| + ... + |c_N| \left|\chi_{D_N}{}^{\wedge}(x)\right| \\ &\le \frac{1}{\pi^n |x_1|} \frac{1}{|x_2|} \cdots \frac{1}{|x_N|} (|c_1| + |c_2| + ... + |c_N|) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{x\to\infty} |\varphi^{\wedge}(x)| = 0$$

dir. Buradan da

$$|f^{\wedge}| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu da ispatın ilk bölümünü tamamlar. İspatın ikinci bölümü için bir normlu uzaydan , bir normlu uzaya tanımlı fonksiyonun sürekli olmasının ne demek olduğunu hatırlayalım:

Tanım: $T : X \to Y$ normlu uzayına doğrusal operatör olsun. Eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta > 0 \ \ \|x - x_0\|_X < \delta \implies \|T(x) - T(x_0)\| \leq \varepsilon$$

ise T operatörü x_0 noktasında süreklidir denir.

Teorem: T doğrusal operatör olsun.

a) T sürekli $\iff$ T sınırlıdır.

b) T bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli ise (genelde $x_0 = 0$ alınır.) T tüm X 'te süreklidir.

Ayrıca şunlar da biliniyor:

(i) $\mathfrak{F} : L_1 \to L_\infty$ sınırlı operatör

(ii) Ayrıca $\mathfrak{F}(f) \in L_1 \subset C_\infty \implies \mathfrak{F} : L_1 \to C_\infty$ sınırlı $\implies \mathfrak{F} : L_1 \to C_\infty$ sürekli dönüşümdür.

Böylece ispat biter. ■

Not 3.2 *$f \in L_1$ gibi bir fonksiyonun Fourier dönüşümü olan $\Psi(x)$ arıyorsak ($f^\wedge = \Psi$) öncelikle $\Psi(x) \in C_\infty$ olmasına bakacağız. Yani, $\Psi(x)$ sürekli ve $\lim_{|x| \to \infty} \Psi(x) = 0$ olmalıdır.*

Fakat bu gerekli koşuldur, yeterli koşul değildir, yani öyle $\Psi(x) \in C_\infty$ vardır ki bu Ψ fonksiyonu $f \in L_1$ olan hiçbir fonksiyonun fourier dönüşümü değildir. Şimdi bunun örneğini verelim.

Örnek 3.3 *(Sadosky 1979) $f \in L_1(\mathbb{R}^1)$ ve f tek fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} f^\wedge(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i x t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos 2\pi x t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin 2\pi x t dt \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin 2\pi x t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{f^\wedge(x)}{x}dx &= \int_1^b (-i)(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin 2\pi xt}{x}dt)dx \\ &= -i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\int_1^b \frac{\sin 2\pi xt}{x}dx)dt \\ &= -i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\int_{2\pi t}^{2\pi bt}\frac{\sin y}{y}dy\end{aligned}$$

$$(\left|\int_\alpha^\beta \frac{\sin x}{x}dx\right| \leq B \ \textit{(şartlı yakınsak)}\ )$$

((not: şartlı yakınsak: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty$ *fakat* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \infty$ *))*

Buradan şu sonuç çıkıyor:

Sonuç 3.4 *Eğer* $f \in L_1(\mathbb{R}^1)$ *ve* f *tek fonksiyon ise*

$$\left|\int_1^b \frac{f^\wedge(x)}{x}dx\right| \leq B\,\|f\|_1$$

O zaman $g(x) = \frac{1}{\ln x}$ *,* $x \geq 1$ *alırsak (burada* $g(x)$ *i tek olarak devam ettirelim)*

$$\int_1^{\infty} \frac{g(x)}{x} \ \textit{sınırlı değildir. yani} \ \int_1^{\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \infty$$

Diğer yandan $g(x) = \frac{1}{\ln x} \in C_\infty$ *'dir. Sonuç olarak, Fourier dönüşümü* $\frac{1}{\ln x}$ *olan* $f \in L_1(\mathbb{R}^1)$ *fonksiyonu yoktur.*

Teorem 3.5 *(Çarpım formülü) (Stein ve Shakarchi 2005 ve Sadosky 1979)*

$f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *olsun. O zaman*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g^\wedge(x)dx$$

dir.

Kanıt. Eşitliğin her iki yanı da iyi tanımlıdır.

$$f, g \in L_1 \Longrightarrow f^\wedge, g^\wedge \in L_\infty \text{ ve } f^\wedge g, fg^\wedge \in L_1(\mathbb{R}^n)$$

(Yani $\|f^\wedge\|_\infty < \infty$ olduğundan her iki integral de yakınsaktır.Buradan

$$\|f^\wedge\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\, dx \leq \|f^\wedge\|_\infty \|g\|_1$$

dir) Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i x \cdot t}dt)g(x)dx$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f^{\wedge}(x)g(x)dx| &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|\, dt \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\, dx \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty \text{ (çünkü } f, g \in L_1)\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$f^{\wedge}(x)g(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$$

olduğu görülür. Öyleyse Fubini teoremini uygulayabiliriz:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x)g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot t}g(x)dx)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g^{\wedge}(t)dt.\end{aligned}$$

■

Şimdi , Harmonik Analizin temel özelliklerinden birini ifade edelim.

Teorem 3.6 *(Stein ve Shakarchi 2003, Sadosky 1979)* $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *olsun. O zaman*

$$(f * g)^{\wedge}(x) = f^{\wedge}(x)g^{\wedge}(x)$$

dir.

Kanıt.

$$(f * g)^{\wedge}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} f(t-s)g(s)ds)e^{-2\pi i x \cdot t}dt$$

Fubini teoremini uygulayabiliriz. Çünkü

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} |f(t-s)|\, |g(s)|\, ds) \left|e^{-2\pi i x \cdot t}\right| dt &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(t-s)|\, dt \int_{\mathbb{R}^n} |g(s)|\, ds \\ &\le \|f\|_1 \|g\|_1 \\ &< \infty \text{(çünkü } f, g \in L_1)\end{aligned}$$

dir. Şimdi

$$(f * g)^{\wedge}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(s)(\int_{\mathbb{R}^n} f(t-s)e^{-2\pi i x \cdot t}dt)ds$$

Burada,

$$t - s = u \Longrightarrow dt = du$$

değişken değiştirmesi yaparsak

$$\begin{aligned}
(f * g)\hat{}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(s)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i x\cdot(u+s)}du\right)ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(s)\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i x\cdot u}e^{-2\pi i x\cdot s}du\right)ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(s)e^{-2\pi i x\cdot s}ds \int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i x\cdot u}du \\
&= g\hat{}(x)f\hat{}(x)
\end{aligned}$$

■

Önerme 3.7 *(Sadosky 1979)* τ_h *kayma operatörü;* $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ *olmak üzere*

(i) $(\tau_h f)\hat{}\,(x) = e^{-2\pi i h\cdot x} f\hat{}(x)$

(ii) $\left(e^{2\pi i h\cdot t} f(t)\right)\hat{}\,(x) = (\tau_h f\hat{})(x) = f\hat{}\,(x-h)$

Kanıt. (i)

$$(\tau_h f)\hat{}\,(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_h f)(t)\, e^{-2\pi i x\cdot t}dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t-h)\, e^{-2\pi i x\cdot t}dt$$

($t - h = u \Longrightarrow dt = du$ değişken değiştirmesi yapalım). Bu durumda

$$\begin{aligned}
(\tau_h f)\hat{}\,(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\, e^{-2\pi i (u+h)\cdot x}du \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\, e^{-2\pi i x\cdot u}e^{-2\pi i x\cdot h}du \\
&= e^{-2\pi i h\cdot x} f\hat{}(x)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\left(e^{2\pi i h\cdot t} f(t)\right)\hat{}\,(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{2\pi i h\cdot t}e^{-2\pi i x\cdot t}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{2\pi i (x-h)\cdot t}dt \\
&= f\hat{}\,(x-h) = (\tau_h f\hat{})(x)
\end{aligned}$$

■

Önerme 3.8 *$a > 0$ için öteleme operatörü $(\delta_a f)(t) = f(at)$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda*

$$(\delta_a f)^{\wedge}(x) = \frac{1}{a^n} f^{\wedge}\left(\frac{x}{a}\right)$$

dir.

Önerme 3.9 *$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ doğrusal dönüşüm, $A = [a_{ij}]$ olsun. O zaman*

$$(f(At))^{\wedge}(x) = \frac{1}{\det A} f^{\wedge}(A^* x)$$

dir. Burada A^*, A' nın adjointinin tersidir.

Kanıt.

$$(f(At))^{\wedge}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(At)\, e^{-2\pi i x \cdot t} dt$$

Burada $g(t) = A^{-1}t$ değişken değiştirmesi yapalım. $|J_g| = |A^{-1}| = |A|^{-1}$ Bu durumda,

$$\begin{aligned}(f(At))^{\wedge}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{-2\pi i x \cdot A^{-1}t} \left|A^{-1}\right| dt \\ &= |A|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{-2\pi i x \cdot A^{-1}t} dt\end{aligned}$$

Şimdi $x \cdot A^{-1}t$ değerini hesaplayalım.

$$x \cdot A^{-1}t = A^* x \cdot t$$

olduğunu görmeliyiz.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ olmak üzere

$$A^{-1}t = \begin{pmatrix} b_{11} & . & . & . & . & b_{1n} \\ . & . & & & & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ b_{n1} & . & . & . & . & b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ . \\ . \\ . \\ t_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_{11}t_1 + ... + b_{1n}t_n \\ b_{21}t_1 + ... + b_{2n}t_n \\ . \\ . \\ . \\ b_{n1}t_1 + ... + b_{nn}t_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$\begin{aligned} x \cdot A^{-1}t &= (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (b_{11}t_1 + ... + b_{1n}t_n, ..., b_{n1}t_1 + ... + b_{nn}t_n \\ &= x_1(b_{11}t_1 + ... + b_{1n}t_n) + x_2(b_{21}t_1 + ... + b_{2n}t_n) + ... + x_n(b_{n1}t_1 + ... + b_{nn}t_n) \\ &= (x_1b_{11} + x_2b_{21} + ... + x_nb_{n1})t_1 + ... + (x_1b_{1n} + x_2b_{2n} + ... + x_nb_{nn})t_n \\ &= (x_1b_{11} + x_2b_{21} + ... + x_nb_{n1}, ..., x_1b_{1n} + x_2b_{2n} + ... + x_nb_{nn}) \cdot (t_1, t_2, ..., t_n) \\ &= \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & . & . & . & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & . & . & . & b_{n2} \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ b_{1n} & b_{2n} & . & . & . & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \right) \cdot t \\ &= A^{*}x \cdot t \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$(f(At))^{\wedge}(x) = \frac{1}{\det A} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{-2\pi i A^{*}x \cdot t} dt = \frac{1}{\det A} f^{\wedge}(A^{*}x)$$

■

Not 3.10 *A ortogonal ise $A^{*} = A$ 'dır ve $\det A = 1$ 'dir.*

Sonuç 3.11 *a) Tek fonksiyonun Fourier dönüşümü de tektir.*

b) Radial fonksiyonun Fourier dönüşümü de radialdir.

Kanıt. (a)

$$\begin{aligned} f^{\wedge}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i x t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos 2\pi x t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin 2\pi x t dt \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin 2\pi x t dt \end{aligned}$$

biliyoruz ki f tek fonksiyon ise $f(-x) = -f(x)$ idi. O zaman

$$\begin{aligned} f^{\wedge}(-x) &= -i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin 2\pi(-x)tdt \\ &= -i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-\sin 2\pi xt)dt \\ &= i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin 2\pi xtdt \\ &= -f^{\wedge}(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece tek fonksiyonun Fourier dönüşümünün de tek olduğunu göstermiş oluruz.

(b) f radial ise $|x| = |y|$ iken $f(x) = f(y)$ 'dir.

$|x| = |y|$ iken $f^{\wedge}(x) = f^{\wedge}(y)$ olduğunu göstermeliyiz. Ayrıca şunlar biliniyor:

(i) $A^T = A^{-1}$ ise A 'ya ortogonal denir.

(ii) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orijine göre dönme(rotasyon) ise A ortogonaldir ve $\det A = 1$ 'dir.

Buradan

$$\begin{aligned} f^{\wedge}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi ix\cdot t}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi iAy\cdot t}dt \quad (\,|x| = |y| \text{ ise } y = Ax\,) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi iy\cdot(A^{-1}t)}dt \quad (\ \langle Ay,t\rangle = \langle y, A^{-1}t\rangle\ ) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Au)e^{-2\pi iy\cdot u}\left|A^{-1}\right| dt \quad (A^{-1}t = u \text{ dönüşümü yapalım}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Au)e^{-2\pi iy\cdot u}\frac{1}{\det A}du \quad (\det A = 1 \text{ 'idi.}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi iy\cdot u}du \quad (f \text{ radial ise } f(Au) = f(u) \text{ olur.}) \\ &= f^{\wedge}(y) \end{aligned}$$

■

Gözlem 3.12 *τ_h kayma operatörü; $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ olmak üzere*

(i) $(\tau_h f)^{\wedge}(x) = e^{-2\pi ih\cdot x}f^{\wedge}(x)$

(ii) $\left(e^{2\pi ih\cdot t}f(t)\right)^{\wedge}(x) = \left(\tau_h f^{\wedge}\right)(x) = f^{\wedge}(x-h)$

idi. $h = (0, 0, ..., 0, h_k, 0, ..., 0)$ *için*

$$\begin{aligned}
\frac{f^{\wedge}(x+h) - f^{\wedge}(x)}{|h|} &= \frac{\left(\tau_{-h} f^{\wedge}\right)(x) - f^{\wedge}(x)}{|h|} \\
&= \frac{1}{|h|}\left(e^{-2\pi ih\cdot t}f(t)\right)^{\wedge}(x) - f^{\wedge}(x) \\
&= \frac{1}{|h|}\left(e^{-2\pi ih\cdot t}f(t) - f(t)\right)^{\wedge}(x) \\
&= \frac{1}{|h|}\left(f(t)(e^{-2\pi ih\cdot t} - 1)\right)^{\wedge}(x) \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Gözlem 3.13

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(t+h) - f(t)}{|h|}\right)^{\wedge} &= \frac{1}{|h|}\left((f(t+h))^{\wedge}(x) - (f(t))^{\wedge}(x)\right) \\
&= \frac{1}{|h|}\left(e^{2\pi ih\cdot x}f^{\wedge}(x) - f^{\wedge}(x)\right) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Aslında formal olarak (3.1) ve (3.2) formülleri şu anlama geliyor:

$|h| \to 0$ *için eşitliklerin her iki yanından limit alırsak*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^{\wedge}(x)}{\partial x_k} &= \left(f(t)\lim_{h\to 0}\frac{e^{-2\pi ih\cdot t} - 1}{h}\right)^{\wedge}(x) \\
&= (-2\pi it f(t))^{\wedge}(x)
\end{aligned}$$

ve

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t_k}\right)^{\wedge}(x) = 2\pi ix \cdot f^{\wedge}(x)$$

elde edilir.

Şimdi bu eşitliklerin doğru olduğunu ispatlayalım:

Önerme 3.14 *(Sadosky 1979)* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *ve* $t_k f(t) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *olsun. Burada* $t = (t_1, ..., t_k, ..., t_n)$ *'dir. Bu durumda,*

$f^{\wedge}$ *fonksiyonunun* x_k *'ya göre kısmi türevleri vardır ve*

$$\frac{\partial f^{\wedge}(x)}{\partial x_k} = (-2\pi it_k f(t))^{\wedge}(x)$$

dir.

Kanıt. $h = (0, 0, ..., h_k, .., 0)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{f^{\wedge}(x+h) - f^{\wedge}(x)}{h_k} = ...(3.1) \text{ 'den...} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{e^{-2\pi i h \cdot t} - 1}{h_k} \right) f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt$$

Burada $h \cdot t = h_k \cdot t_k$ 'dır.

$$\frac{\partial f^{\wedge}(x)}{\partial x_k} = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{e^{-2\pi i h_k \cdot t_k} - 1}{h_k} \right) f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt$$

limiti integralin içine alabilmek için Lebesgue Baskın Yakınsama Teoremi'ni kullanacağız.

$$\begin{aligned} \left| f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} \frac{e^{-2\pi i h_k \cdot t_k} - 1}{h_k} \right| &\leq |f(t)| . \left| \frac{e^{-2\pi i h_k \cdot t_k} - 1}{h_k} \right| \\ &\leq c |f(t)| . |t_k| \end{aligned}$$

Önkoşul olarak $t_k f(t) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olduğu için Lebesgue Baskın Yakınsama Teoremi'ni uygulayabiliriz.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h_k \to 0} \left(\frac{e^{-2\pi i h_k \cdot t_k} - 1}{h_k} \right) f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt &= \int_{\mathbb{R}^n} -2\pi i t_k f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt \\ &= -(2\pi i t_k f(t))^{\wedge}(x) \end{aligned}$$

■

Önerme 3.15 *(Sadosky 1979)* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *ve* $t_k f(t) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *olsun. Burada* $t = (t_1, ..., t_k, ..., t_n)$ *'dir. Bu durumda;*

$f^{\wedge}$ *fonksiyonunun* x_k *'ya göre kısmi türevleri vardır ve*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t_k} \right)^{\wedge}(x) = 2\pi i x_k \cdot f^{\wedge}(x)$$

dir.

Kanıt. $h = (0, 0, ..., h_k, .., 0)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \lim_{t_k \to 0} \frac{f(t + t_k) - f(t)}{t_k}$$

olmak üzere

$$\left(\frac{f(t+h) - f(t)}{|h|} \right)^{\wedge}(x) = (3.2) \text{ 'den} = \frac{1}{|h|} (e^{2\pi i h \cdot x} f^{\wedge}(x) - f^{\wedge}(x))$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(t+h)-f(t)}{|h|}\right)^{\wedge}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}(e^{2\pi i h\cdot x}f^{\wedge}(x)-f^{\wedge}(x)) \tag{3.3}$$
$$= \lim_{h_k\to 0}\frac{1}{h_k}(e^{2\pi i h_k\cdot x_k}f^{\wedge}(x)-f^{\wedge}(x))$$
$$= \lim_{h_k\to 0}\left(\frac{e^{2\pi i h_k\cdot x_k}f^{\wedge}(x)-f^{\wedge}(x)}{h_k}\right)$$
$$= 2\pi i x_k f^{\wedge}(x)$$

Şimdi $\left(\frac{f(t+h)-f(t)}{|h|}\right)^{\wedge}(x)$ 'in Lebesgue Baskın Yakınsama Teoremi'ni sağladığını görelim.

$$\left(\frac{f(t+h)-f(t)}{|h|}\right)^{\wedge}(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(t+h)-f(t)}{|h|}e^{-2\pi i x\cdot t}dt$$

$h=(0,0,...,h_k,..,0)$ olduğundan

$$\left|\frac{f(t+h_k)-f(t)}{h_k}e^{-2\pi i x\cdot t}\right| = \left|\frac{f(t+h_k)-f(t)}{h_k}\right|$$
$$\leq \frac{1}{|h_k|}|f(t+h_k)|+|f(t)| \in L_1(\mathbb{R}^n)$$

o zaman (3.3) 'deki eşitliğin sol tarafındaki limit içeri girebilir ve böylece önerme ispatlanmış olur. ■

3.2. Fourier Dönüşümü Bilinen Bir Fonksiyonun Toplanabilirlik Metotlarıyla Yeniden İnşaası

Teorem 3.16 *($\mathbb{R}^1$ versiyonu)*

$f\in \Im(\mathbb{R})$ ise o zaman

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f^{\wedge}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi$$

dir.

Kanıt. İlk olarak

$$f(0)=\int_{-\infty}^{\infty}f^{\wedge}(\xi)d\xi$$

olduğunu görelim. Bunun için

$$G_\delta(t)=e^{-\pi\delta t^2} \text{ ise } G_\delta^{\wedge}(x)=K_\delta(x)=\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}$$

olduğunu biliyoruz. Çarpım formülünden (teorem (3.5))

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(\xi)G_\delta(\xi)\,d\xi \tag{3.4}$$

dir. Ayrıca

$$f * K_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)K_\delta(t)\,dt$$

olur. $f \in \Im$ olduğundan $f \in C^\infty$ ve girişim operatörünün noktasal yakınsamasından

$$f * K_\delta(x) \to f(x),\ \delta \to 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

dir. Böylece

$$\lim_{\delta\to 0} f * K_\delta(x) = f(x)$$

olur. Buradan (3.4) 'ün sol tarafı için limite geçersek

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x)\,f(t-x) = f(0)$$

elde edilir. Ayrıca (3.4) 'ün sağ tarafı için de limite geçersek

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(\xi)G_\delta(\xi)\,d\xi &= \text{(Lebesgue baskın yak. teo.)} = \int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(\xi)\lim_{\delta\to 0}G_\delta(\xi)\,d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(\xi)d\xi\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(\xi)d\xi$$

olduğunu gördük. Teoremi ispatlamak için

$$F(y) = f(x+y)$$

olarak tanımlayalım. $F(y) \in \Im(\mathbb{R})$ ise

$$\begin{aligned}F(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} F^\wedge(\xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-2\pi i\xi t}dt)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\xi(t-x)}dt)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\xi t}e^{2\pi i\xi x}dt)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$F(0) = f(x+0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\wedge}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Teorem 3.17 *($\mathbb{R}^n$ versiyonu) $f \in \Im(\mathbb{R}^n)$ ise o zaman*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

dir.

Kanıt.

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi) d\xi$$

olduğunu görelim. Bunun için

$$G_\delta = e^{-\pi\delta|x|^2} \text{ ise } G_\delta^{\wedge}(\xi) = K_\delta(\xi) = \delta^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\delta}}$$

dir. Çarpım formülünden (teorem (3.5))

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) K_\delta(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi) G_\delta(\xi)\, d\xi$$

idi. Ayrıca

$$\lim_{\delta \to 0} f * K_\delta(x) = f(x)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) K_\delta(t)\, dt = f(x)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(0-t) K_\delta(t)\, dt = f(0)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(-t) K_\delta(t)\, dt = f(0)$$

olur. $t = -x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) K_\delta(x)\, dx = f(0)$$

olur. Şimdi de

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi) G_\delta(\xi)\, d\xi = (\text{Lebesgue baskın yak. teo.}) = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi) d\xi$$

elde ederiz. Böylece

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi) d\xi$$

dir. Teoremi şu şekilde ispatlayabiliriz

$$F(y) = f(x+y)$$

Burada $x, y \in \mathbb{R}^n$ 'dir. $F(y) \in \Im(\mathbb{R}^n)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
F(0) &= \int_{\mathbb{R}^n} F^{\wedge}(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x+t) e^{-2\pi i \xi \cdot t} dt \right) d\xi \\
&= (t = u - x \text{ değişken değiştirmesi}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-2\pi i \xi \cdot (u-x)} du \right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-2\pi i \xi \cdot u} e^{2\pi i \xi \cdot x} du \right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

olduğunu ispatlamış olduk. ∎

3.2.1. Toplanabilirlik metodları

Bu bölümde amacımız;

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

Fourier integralinin f fonksiyonuna yakınsaması için yeterli şartların neler olduğunu bulmak olacaktır.

Tanım 3.18 *(Sadosky 1979) $\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dx$ verilsin. Bu integralin Abel ortalamaları*

$$A_\varepsilon(F) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) e^{-\varepsilon |x|} dx$$

şeklinde tanımlanır. Eğer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} F(x) e^{-\varepsilon |x|} dx = l$$

limiti varsa, $\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dx$ integrali l değerine Abel toplanabilirdir denir.

Not 3.19 *$F \in L^1$ ise $A_\varepsilon(F) < \infty$ 'dir.Hatta $F \in C_\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty$ ise $A_\varepsilon(F) < \infty$ 'dir.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|\, e^{-\varepsilon|x|} dx \leq A \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|x|} dx < \infty$$

Tanım 3.20 *(Sadosky 1979) $\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dx$ integralinin Gauss-Weierstrass ortalamaları*

$$G_\varepsilon(F) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x) e^{-\varepsilon|x|^2} dx$$

şeklinde tanımlanır.Eğer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(F) = l$$

ise $\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dx$ integrali l değerine Gauss-Weierstrass toplanabilirdir denir.

Tanım 3.21 *(Genel olarak)*

$\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dx$ integralinin $\phi-$ ortalamaları

$$M_{\phi,\varepsilon}(F) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\phi(\varepsilon x)\, dx$$

olarak tanımlanır. Burada $F(x)\phi(\varepsilon x) \in L^1$ ve $\lim_{\varepsilon \to 0} \phi(\varepsilon x) = 1$ 'dir.Eğer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M_{\phi,\varepsilon}(F) = l$$

ise $\int_{\mathbb{R}^n} F(x)dx$ integrali l değerine $\phi-$ toplanabilirdir denir.

Bu bölümde f fonksiyonunun Fourier dönüşümü $f^{\wedge}(x)$ verildiğinde, ıraksak $\int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi$ Fourier integralinin Abel ve Gauss-Weierstrass ortalamalarının $f(x)$ fonksiyonuna yakınsadığını göstereceğiz.

Bunu yaparken çarpım formülünden ve $e^{-2\pi\varepsilon|t|}$ ile $e^{-2\pi\varepsilon^2|t|^2}$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerinden yararlanacağız.

Şimdi, bir boyutlu uzayda ($\mathbb{R}$ 'de) $\varepsilon = 1$ için bu dönüşümleri hesaplayalım:

(i)

$$\begin{aligned}
\left(e^{-2\pi|t|}\right)\hat{}\,(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|t|}e^{-2\pi ixt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|t|}\cos 2\pi xtdt + i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|t|}\sin 2\pi xtdt. \\
&= 2\int_{0}^{\infty} e^{-2\pi t}\cos 2\pi xtdt \\
&= (\text{ kısmi integrasyon uygularsak }) \\
&= 2(\cos(2\pi t)\,.(\frac{-1}{2\pi}e^{-2\pi t})\,|_0^\infty - \frac{2\pi x}{2\pi}\int_0^\infty e^{-2\pi t}\sin 2\pi xtdt \\
&= 2(\frac{1}{2\pi} - x\left[-\frac{1}{2\pi}e^{-2\pi t}\sin 2\pi xt\,|_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-2\pi t}\cos 2\pi xtdt\right])
\end{aligned}$$

Buradan

$$\frac{1}{\pi} - 2x^2\int_0^\infty e^{-2\pi t}\cos 2\pi xtdt = 2\int_0^\infty e^{-2\pi t}\cos 2\pi xtdt$$

$$2\int_0^\infty e^{-2\pi t}\cos 2\pi xtdt = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

elde edilir. Böylece

$$\left(e^{-2\pi|t|}\right)\hat{}\,(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

dir.

(ii)

$$\begin{aligned}
\left(e^{-\pi|t|^2}\right)\hat{}\,(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi|t|^2}e^{-2\pi ixt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(|t|^2+2ixt)}dt \\
&= \frac{1}{e^{\pi x^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t^2+2ixt)}e^{\pi x^2}dt \\
&= \frac{1}{e^{\pi x^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+ix)^2}dt \\
&= ...(t+ix = z \text{ ve } dt = dz \text{ ve } C = \{t+ix : -\infty < t < \infty\})... \\
&= \frac{1}{e^{\pi x^2}}\int_C e^{-\pi z^2}dz \\
&= \frac{1}{e^{\pi x^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}dt \\
&= \frac{1}{e^{\pi x^2}}
\end{aligned}$$

ise böylece

$$\left(e^{-\pi|t|^2}\right)\hat{}(x) = e^{-\pi x^2} \tag{3.5}$$

olduğunu görürüz. Şimdi de $n > 1$ için ($\mathbb{R}^n$ 'de)

$$\left(e^{-\pi|t|^2}\right)\hat{}(x) = e^{-\pi|x|^2}$$

olduğunu görelim. Bunun için $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ olmak üzere

$$f(t) = f_1(t_1)f_2(t_2)...f_n(t_n) \text{ ise } f\hat{}(x) = f_1\hat{}(x_1)f_2\hat{}(x_2)...f_n\hat{}(x_n)$$

dir ve

$$e^{-\pi|t|^2} = e^{-\pi(t_1^2+...+t_n^2)} = e^{-\pi t_1^2}e^{-\pi t_2^2}...e^{-\pi t_n^2}$$

olduğuna göre

$$\left(e^{-\pi|t|^2}\right)\hat{}(x) = ...(3.5)... = e^{-\pi x_1^2}e^{-\pi x_2^2}...e^{-\pi x_n^2} = e^{-\pi|x|^2}$$

dir.

Lemma 3.22 *(Sadosky 1979)* $\forall\varepsilon > 0$ *için*

$$\left(e^{-\pi\varepsilon|t|^2}\right)\hat{}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\varepsilon|t|^2}e^{-2\pi i x\cdot t}dt = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}}e^{-\pi\frac{|x|^2}{\varepsilon}} \tag{3.6}$$

dir.

Kanıt.

$$\left(e^{-\pi|t|^2}\right)\hat{}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|t|^2}e^{-2\pi i x\cdot t}dt = e^{-\pi|x|^2}$$

idi. Şimdi

$t = \sqrt{\varepsilon}u$ değişken değiştirmesi yaparsak

Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\varepsilon|u|^2}e^{-2\pi i x\cdot\sqrt{\varepsilon}u}\varepsilon^{\frac{n}{2}}du = e^{-\pi|x|^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\varepsilon|u|^2}e^{-2\pi i x\cdot\sqrt{\varepsilon}u}du = \varepsilon^{-\frac{n}{2}}e^{-\pi|x|^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\varepsilon|u|^2} e^{-2\pi i(\sqrt{\varepsilon}x\cdot u)} du = \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi|x|^2}$$

dir. Şimdi de

$$x \text{ yerine } \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ yazarsak}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\varepsilon|u|^2} e^{-2\pi i x\cdot u} du = \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi\frac{|x|^2}{\varepsilon}}$$

elde edilir. Böylece

$$\left(e^{-\pi\varepsilon|u|^2}\right)^{\wedge}(x) = \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi\frac{|x|^2}{\varepsilon}}$$

dir. ∎

Lemma 3.23 *(Sadosky 1979)* $\forall\varepsilon > 0$ *için*

$$\left(e^{-2\pi\varepsilon|t|}\right)^{\wedge}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\varepsilon|t|} e^{-2\pi i x\cdot t} dt = C_n \frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon^2 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \tag{3.7}$$

dir. Burada

$$C_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}$$

dir.

Kanıt. Lemmayı ispatlamak için

$$\left(e^{-2\pi|t|}\right)^{\wedge}(x) = C_n(1 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \tag{3.8}$$

olduğunu gösterip $t \longrightarrow \varepsilon t$ değişken değiştirmesi yapmamız yeterlidir. (3.8) 'i elde etmek için (3.6) 'yı kullanacağız. Şimdi, $\forall s > 0$ için,

$$e^{-s} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{s^2}{4u}} du \tag{3.9}$$

eşitliğini kullanacağız ve daha sonra bu eşitliğin doğruluğunu göstereceğiz. (3.9) 'da $s = 2\pi|t|$ alalım. Bu durumda

$$e^{-2\pi|t|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\pi^2|t|^2}{u}} du$$

elde edilir. Şimdi her iki tarafın Fourier dönüşümünü alalım

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|t|}e^{-2\pi i x\cdot t}dt &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-\frac{\pi^2|t|^2}{u}}du\right)e^{-2\pi i x\cdot t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\pi^2|t|^2}{u}}dt\right)e^{-2\pi i x\cdot t}du \\
...(\ (3.6)\ \text{da}\ \varepsilon &= \frac{\pi}{u}\ \text{alırsak })... \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(\frac{\pi}{u}\right)^{\frac{-n}{2}}e^{\frac{-\pi|x|^2}{\frac{\pi}{u}}}du \\
&= \pi^{\frac{-(n+1)}{2}}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{n-1}{2}}e^{-u|x|^2}du \\
&= \pi^{\frac{-(n+1)}{2}}\int_0^\infty e^{-(1+|x|^2)u}u^{\frac{n-1}{2}}du \\
...((1+|x|^2)u &= s\ \text{dersek})... \\
&= \pi^{\frac{-(n+1)}{2}}\int_0^\infty e^{-s}\left(\frac{s}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\frac{ds}{1+|x|^2} \\
&= \pi^{\frac{-(n+1)}{2}}(1+|x|^2)^{\frac{-(n+1)}{2}}\int_0^\infty e^{-s}s^{\frac{n-1}{2}}ds \\
&= \pi^{\frac{-(n+1)}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(1+|x|^2)^{\frac{-(n+1)}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemmanın ispatını tamamlamak için (3.9) 'u ispatlamak yeterlidir. Bu eşitlik yani (3.9) aşağıdaki iki eşitlikten elde edilir:

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)u}du \tag{3.10}$$

$$e^{-s} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos sx}{1+x^2}dx\ ,\ s>0 \tag{3.11}$$

(3.10) hemen görülebilir. (3.11) için ise $\frac{e^{isz}}{1+z^2}$ fonksiyonuna rezidü metodu uygulanır. Yani; $f(x) = \frac{\cos sx}{1+x^2}$ çift fonksiyondur. Dolayısıyla $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_0^\infty f(x)dx$ 'tir. $e^{isz} = \cos sz + i\sin sz$ olduğundan $f(z) = \frac{e^{isz}}{1+z^2}$ fonksiyonunun C eğrisi boyunca integralini alalım. C=$I+\gamma$ şeklindedir.

$$\int_C f(z)dz = \int_I f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_\gamma f(z)dz$$

dir. Sadece i 'de $f(z)$ 'nin rezidüsünü almak yeterlidir.

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\ \text{Res}(f(z), i) = 2\pi i \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{isz}}{(z-i)(z+i)} = \pi e^{-s}$$

dir. Şimdi

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

olduğunu görelim. $\gamma = \{z = R.e^{i\theta} : \ \theta \in [0, \pi]\}$ ve $R > 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_\gamma \frac{e^{isz}}{1+z^2} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{isR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{1+R^2e^{2i\theta}} iR.e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{isR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{1+R^2e^{2i\theta}} \right| \left| iR.e^{i\theta} \right| d\theta \\ &\leq \int_0^\pi \frac{e^{-sR\sin\theta}}{R^2-1} R d\theta \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1} d\theta = \frac{R}{R^2-1}\pi \end{aligned}$$

olur. $R \to \infty$ durumunda

$$0 \leq \left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \lim_{R\to\infty} \frac{R}{R^2-1}\pi = 0$$

olduğundan

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

dir. $R \to \infty$ için bunu kullanırsak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{1+x^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{1+x^2} dx = \pi e^{-s}$$

olur. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{1+x^2} dx = 0$ olduğundan

$$e^{-s} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos sx}{1+x^2} dx$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} e^{-s} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos sx}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos sx (\int_0^\infty e^{-(1+x^2)u} du) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} (\int_0^\infty (\cos sx) e^{-x^2u} dx) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} (\int_{-\infty}^\infty e^{isx} e^{-x^2u} dx) du \\ ...(x &= 2\pi t \text{ ve } dx = 2\pi dt)... \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} (2\pi \int_{-\infty}^\infty e^{2\pi ist} e^{-4\pi^2t^2u} dt) du \end{aligned}$$

(3.6) 'da $n = 1$ ve $\varepsilon = 4\pi u$ için

$$e^{-s} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{s^2}{4u}} du$$

olur. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur. ∎

Not 3.24 *(Sadosky 1979) $\varepsilon > 0$ olmak üzere $e^{-2\pi\varepsilon|t|}$ ve $e^{-4\pi^2\varepsilon|t|^2}$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerini ,sırasıyla, P ve W ile göstereceğiz.*

$$P(x,\varepsilon) = P_\varepsilon(x) = C_n \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \ , \ C_n = \Gamma(\frac{n+1}{2})\pi^{-\frac{(n+1)}{2}}$$

ve

$$W(x,\varepsilon) = W_\varepsilon(x) = (4\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}$$

dir. Burada $P(x,\varepsilon)$ Poisson çekirdeği ve $W(x,\varepsilon)$ 'da Weierstrass çekirdeği olarak adlandırılır.

Not 3.25

$$\delta_a f = f(at)$$

ve

$$\left(e^{-4\pi^2\varepsilon|t|^2}\right)\hat{}\,(x) = (4\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} = W(x,\varepsilon)$$

idi. Buradan, $\phi(t) = e^{-4\pi^2|t|^2}$ için

$$(\delta_\varepsilon\phi)\hat{}\,(x) = (e^{-4\pi^2\varepsilon^2|t|^2})\hat{}\,(x) = (4\pi\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon^2}} = W(x,\varepsilon^2)$$

ve $\phi(t) = e^{-2\pi|t|}$ için

$$(\delta_\varepsilon\phi)\hat{}\,(x) = \left(e^{-2\pi\varepsilon|t|}\right)\hat{}\,(x) = P(x,\varepsilon)$$

olur.

Teorem 3.26 *(Sadosky 1979) $f,\phi \in L_1$ ve $\phi\hat{} = \varphi$ olsun. Bu durumda, $\forall\varepsilon > 0$ için*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{}\,(x) e^{2\pi i x\cdot t}\phi(\varepsilon x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x-t)dx = f * \varphi_\varepsilon(t)$$

dir.

Kanıt. $f(x)$ ve $e^{2\pi i x\cdot t}\phi(\varepsilon x)$ fonksiyonlarına çarpım formülünü (teorem (3.5)) uygulayalım.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{}\,(x)e^{2\pi i x\cdot t}\phi(\varepsilon x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(e^{2\pi i u\cdot t}\phi(\varepsilon u))\hat{}\,(x)dx \\
...((e^{2\pi i x\cdot t}\delta_\varepsilon\phi)\hat{} &= \tau_t(\delta_\varepsilon\phi)\hat{} = \tau_t\varphi_\varepsilon \text{ Fourier dönüşümü özelliği})... \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x-t)\,dx \\
&= f * \varphi_\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.27

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) e^{2\pi i x \cdot t} e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) P(x-t,\varepsilon) dx = f * P_\varepsilon(t)$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) e^{2\pi i x \cdot t} e^{-4\pi^2\varepsilon|x|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) W(x-t,\varepsilon) dx = f * W_\varepsilon(t)$$

dir.

Lemma 3.28 *(Sadosky 1979, Stein ve Weiss 1971)*

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(x,\varepsilon) dx = \int_{\mathbb{R}^n} W(x,1) dx = 1$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x,\varepsilon) dx = \int_{\mathbb{R}^n} P(x,1) dx = 1$$

dir.

Kanıt.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} W(x,\varepsilon) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}} dx \\ (x \text{ yerine } \sqrt{\varepsilon}x \text{ yazacak olursak } |jakobiyen| &= \varepsilon^{\frac{n}{2}}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \varepsilon^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} W(x,1) dx \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} W(x,1) dx &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx \\ &= (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_k^2}{4}} dx \\ &= (4\pi)^{-\frac{n}{2}} (2\sqrt{\pi})^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} P(x,\varepsilon)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} C_n \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}dx \\
(x &= \varepsilon u \text{ değişken değiştirmesi yapılırsa } |jakobiyen| = \varepsilon^n) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} C_n \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2+\varepsilon^2|u|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\varepsilon^n du \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} C_n \frac{1}{(1+|u|^2)^{\frac{n+1}{2}}}du \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P(u,1)du
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x,1)dx = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}dx$$

idi.

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}dx$$

diyelim ve kutupsal koordinatlara geçersek

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \left(\int_\Sigma \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} r^{n-1}dx'\right)dr \\
&= \int_\Sigma dx'\left(\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}dr\right) \\
&= \omega_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}dr \quad (\omega_n\text{: } \mathbb{R}^{n+1}\text{ 'de birim kürenin yüzey alanı}) \\
r &= \tan\theta \text{ alırsak} \\
&= \omega_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta d\theta = \frac{\omega_{n+1}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(2\pi^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuçta

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} P(x,1)dx &= C_n \frac{1}{2}\left(2\pi^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right) \\
&= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{(n+1)}{2}} \frac{1}{2}\left(2\pi^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

dir. ■

Önerme 3.29 *(Sadosky 1979)* $\forall \eta > 0$ *için*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\eta} P(x,\varepsilon)dx = 0$$

dir.

Kanıt.

$$\int_{|x|\leq \eta} P(x,\varepsilon)dx + \int_{|x|>\eta} P(x,\varepsilon)dx = \int_{\mathbb{R}^n} P(x,\varepsilon)dx = 1$$

olduğundan

$$\int_{|x|>\eta} P(x,\varepsilon)dx < \infty \text{ ve } \int_{|x|\leq \eta} P(x,\varepsilon)dx < \infty$$

olur. Ayrıca $P_\varepsilon(x)$ pozitif fonksiyondur. Yani

$$P_\varepsilon(x) = C_n \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} > 0$$

dır. Yine

$$\frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \leq \frac{\varepsilon}{|x|^{n+1}}$$

olduğundan $\frac{1}{|x|^{n+1}} \in L_1$ midir diye bakmalıyız. Bunun için

$$\int_{|x|>\eta} \frac{1}{|x|^{n+1}} dx = \int_{|x|>\eta} |x|^{-n-1} dx$$

ve $-n-1 < -n$ olduğundan

$$\int_{|x|>\eta} |x|^{-n-1} dx < \infty$$

olur. Böylece $\frac{1}{|x|^{n+1}} \in L_1$ 'dir. O zaman Lebesgue baskın yakınsama teoremi uygulanabilir.

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\eta} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx &= ...(N = \frac{1}{\varepsilon} \text{ alınırsa})... = \lim_{N \to \infty} \int_{|x|>\eta} \frac{\frac{1}{N}}{(\frac{1}{N^2} + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx \\
&= \int_{|x|>\eta} \lim_{N \to \infty} \frac{\frac{1}{N}}{(\frac{1}{N^2} + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx \\
&= 0, \ \forall \eta > 0
\end{aligned}$$

■

Önerme 3.30 *(Sadosky 1979) $P(x,\varepsilon) = P_\varepsilon(x)$ Poisson çekirdeği ve $W(x,\varepsilon) = W_\varepsilon(x)$ Weierstrass çekirdeği olmak üzere her $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$ için f 'in Poisson ve Weierstrass integrallerinin L_p normları, f 'in L_p normuyla sınırlıdır. Yani;*

$$\|P_\varepsilon * f\|_p \leq \|f\|_p \text{ ve } \|W_\varepsilon * f\|_p \leq \|f\|_p \ , \forall\varepsilon > 0$$

Kanıt. Young eşitsizliği'nden

$$\|P_\varepsilon * f\|_p \leq \|f\|_p \|P_\varepsilon\|_1 = \|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} P(x,\varepsilon)dx = \|f\|_p$$

ve

$$\|W_\varepsilon * f\|_p \leq \|f\|_p \|W_\varepsilon\|_1 = \|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} W(x,\varepsilon)dx = \|f\|_p$$

elde edilir. ■

Teorem 3.31 *(Sadosky 1979) Eğer $\phi \in L_1$, $\phi^\wedge = \varphi \in L_1$ ve $\int \varphi = 1$ ise o zaman*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(x) e^{2\pi i x \cdot t} dx$$

Fourier integralinin $\phi-$ortalamaları L_1 normunda f fonksiyonuna yakınsar. Yani

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(x) e^{2\pi i x \cdot t} \phi(\varepsilon x) dx - f(x) \right\|_1 = 0$$

dır.

Kanıt. Daha önce ispatladığımız teorem (3.26) 'dan

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(x) e^{2\pi i x \cdot t} \phi(\varepsilon x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_\varepsilon(x - t) dx = f * \varphi_\varepsilon(t)$$

idi. Ayrıca şu teoremi de biliyoruz (teorem (2.16)): $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\int \varphi = 1$ olsun. Eğer $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$ ise

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0$$

dır. Bu teorem gereği

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(x) e^{2\pi i x \cdot t} \phi(\varepsilon x) dx = f * \varphi_\varepsilon$$

olur. Böylece

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_1 = 0$$

olduğu görülür. ■

Sonuç 3.32 *(Sadosky 1979) (Teklik)* $f_1, f_2 \in L_1$ *ve her* $x \in \mathbb{R}^n$ *için* $f_1\hat{}(x) = f_2\hat{}(x)$ *ise hemen hemen her* $t \in \mathbb{R}^n$ *için* $f_1(t) = f_2(t)$ *'dir.*

Kanıt.

$$f_1\hat{} - f_2\hat{} = (f_1 - f_2)\hat{} = 0$$

dır. Ayrıca

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (f_1 - f_2)\hat{}(x) e^{2\pi i x \cdot t} \phi(\varepsilon x) dx - (f_1 - f_2) \right\|_1 = 0$$

Böylece

$$\|f_1 - f_2\|_1 = 0$$

dır. Yani; hemen hemen her $t \in \mathbb{R}^n$ için

$$f_1(t) = f_2(t)$$

dir. ∎

Teorem 3.33 *(Sadosky 1979)* $\phi \in L_1$, $\phi\hat{} = \varphi \in L_1$, $\int \varphi = 1$ *ve* $\psi(x) = \sup_{|y| > |x|} |\varphi(y)|$ *olmak üzere* $\psi(x) \in L_1$ *olsun. O zaman her* $t \in L_f$ *(Lebesgue noktaları kümesi) için*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{}(x) e^{2\pi i x \cdot t} \phi(\varepsilon x)\, dx = f(t)$$

dir. Özel olarak

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (P_\varepsilon * f)(t) = f(t), t \in L_f$$

ve

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (W_\varepsilon * f)(t) = f(t), \ t \in L_f$$

dir.

Kanıt. $P(x, 1)$ ve $W(x, 1)$ fonksiyonlarının teoremin şartlarını sağladığını göstermeliyiz.

$$P_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} P(\frac{x}{\varepsilon}, 1) \text{ ve } W_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} W(\frac{x}{\varepsilon}, 1)$$

ve $\phi = e^{-2\pi|t|} \in L_1$ olmak üzere

$$\left(e^{-2\pi|t|}\right)\hat{} = P(x, 1) = \varphi, \ \phi\hat{} = \varphi \in L_1 \text{ ve } \int \varphi = 1$$

ve $\phi = e^{-4\pi^2|t|^2} \in L_1$ olmak üzere

$$\left(e^{-4\pi^2|t|^2}\right)^{\wedge} = W(x,1) = \varphi,\ \phi^{\wedge} = \varphi \in L_1 \text{ ve } \int \varphi = 1$$

olur. Ayrıca

$$\psi(x) = \sup_{|y|>|x|} |P(y,1)| = Cn \sup_{|y|>|x|} \frac{1}{\left(1+|y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} = Cn \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

ise böylece

$$\psi(x) = Cn \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \in L_1$$

elde edilir. Aynı şekilde $W(y,1)$ de gösterilebilir. Böylece $P(x,1)$ ve $W(x,1)$ fonksiyonları için teoremin şartları sağlanır. Girişim operatörü için noktasal yakınsama teoreminden (teorem (2.30) 'dan) her $t \in L_f$ için

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(P_\varepsilon * f\right)(t) = f(t),\ t \in L_f$$

ve

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(W_\varepsilon * f\right)(t) = f(t),\ t \in L_f$$

olduğu görülür. ■

Sonuç 3.34 *(Sadosky 1979) Eğer $f \in L_1$ ve $f^{\wedge} \in L_1$ ise*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) e^{2\pi i x \cdot t} dx,\ h.h.h.\ t \in \mathbb{R}^n$$

(Bu özelliği daha önce Schwarz uzayı için göstermiştik.)

Kanıt. Teorem (3.33) 'den; hhh $t \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) e^{2\pi i x \cdot t} e^{-4\pi^2 \varepsilon |x|^2} dx = f(t)$$

olduğunu biliyoruz. Eğer $f^{\wedge} \in L_1$ ise Lebesgue baskın yakınsama teoremini uygulayabiliriz. Çünkü

$$h_\varepsilon(x) = f^{\wedge}(x) e^{2\pi i x \cdot t} e^{-4\pi^2 \varepsilon |x|^2}$$

olmak üzere $|h_\varepsilon(x)| < g \in L_1$ bulmalıyız.

$$|h_\varepsilon(x)| = |f^{\wedge}(x)|\, e^{-4\pi^2 \varepsilon |x|^2} \leq |f^{\wedge}(x)|\, e^{-4\pi^2 |x|^2}$$

Burada $|f^{\wedge}(x)| \in L_1$ ve $e^{-4\pi^2|x|^2} \in L_\infty$ 'dır. Bu durumda artık limiti içeri atabiliriz.

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \to 0} f^{\wedge}(x) e^{2\pi i x\cdot t} e^{-4\pi^2 \varepsilon |x|^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) e^{2\pi i x\cdot t} dx, \ h.h.h. \ t \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. ∎

Not 3.35 *Eğer $f \in L_1$ ise $f^{\wedge}(x)$ sürekli olduğunu biliyoruz.*

Ayrıca $f^{\wedge}(x) \in L_1$ ise

$$f_0(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) e^{2\pi i x\cdot t} dx$$

fonksiyonu da süreklidir. Çünkü; $f_0(t) = (f^{\wedge})^{\wedge}(-t)$ 'dir ve L_1 'den bir fonksiyonun Fourier dönüşümü de sürekli olduğundan $f_0(t)$ süreklidir. Ayrıca sonuç (3.34) 'tan h.h.h. $t \in \mathbb{R}^n$ için $f_0(t) = f(t)$ olmak üzere ölçümü sıfır olan kümede $f(t)$ değerlerini değiştirirse her $t \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) e^{2\pi i x\cdot t} dx$$

olur.

Not 3.36

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x,1) dx = 1$$

dir. Bunu şu şekilde gösterebiliriz;

$$f(t) = e^{-2\pi|t|} \in L_1 \ \text{ve} \ f^{\wedge}(x) = P(x,1) \in L_1$$

dir. Sonuç'(3.34) tan; h.h.h. $t \in \mathbb{R}^n$ için

$$e^{-2\pi|t|} = \int_{\mathbb{R}^n} P(x,1) e^{2\pi i x\cdot t} dx$$

dir. Burada eşitliğin her iki tarafı da sürekli fonksiyondur. Ayrıca iki sürekli fonksiyon hemen hemen her x için çakışıyorsa(aynıysa) her x için aynıdır. Bundan dolayı bu eşitlik her t için sağlanır. Öyleyse $t = 0$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x,1) dx = 1$$

elde edilir.

Sonuç 3.37 *(Sadosky 1979) $f \in L_1$ ve $f^{\wedge} \geq 0$ olsun. Eğer f, $t = 0$ noktasında sürekli ise o zaman $f^{\wedge} \in L_1$ 'dir. Özel olarak*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x)\, e^{2\pi i x \cdot t} dx \tag{3.12}$$

ve

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x)\, dx$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt. $f^{\wedge} \geq 0$ ise $g_\varepsilon(x) = f^{\wedge}(x)\, e^{-2\pi\varepsilon|x|} \geq 0$ 'dır. Ayrıca her $t \in L_f$(Lebesgue noktaları kümesi) için

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) e^{2\pi i x \cdot t} e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx = f(t)$$

ve $t = 0$ noktası bir Lebesgue noktası olduğundan

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx = f(0)$$

olur. Fatous Lemması'ndan

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(x) = f^{\wedge}(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) dx \leq \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx = f(0)$$

olur. Böylece

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) dx \leq f(0)$$

olduğundan $f^{\wedge} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ 'dir. Ayrıca $f \in L_1$ ve $f^{\wedge} \in L_1$ olduğundan yukarıdaki Sonuç (3.34)'ten $h.h.h.$ $t \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x)\, e^{2\pi i x \cdot t} dx$$

dir ve f, $t = 0$ da sürekli ve $t \in L_f$ ise

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x)\, dx$$

olduğu görülür. ■

Önerme 3.38 *(Sadosky 1979) Her $\varepsilon > 0$ için*

$$\int W(x,\varepsilon)e^{2\pi i x\cdot t}dx = e^{-4\pi^2\varepsilon|t|^2} \tag{3.13}$$

ve

$$\int P(x,\varepsilon)e^{2\pi i x\cdot t}dx = e^{-2\pi\varepsilon|t|} \tag{3.14}$$

dir.

Kanıt.

$$\int W(x,\varepsilon)e^{2\pi i x\cdot t}dx = \int (e^{-4\pi^2\varepsilon|t|^2})^{\wedge}(x)e^{2\pi i x\cdot t}dx = \text{...(3.12) 'den...} = e^{-4\pi^2\varepsilon|t|^2}$$

ve

$$\int P(x,\varepsilon)e^{2\pi i x\cdot t}dx = \int (e^{-2\pi\varepsilon|t|})^{\wedge}(x)e^{2\pi i x\cdot t}dx = \text{...(3.12) 'den...} = e^{-2\pi\varepsilon|t|}$$

dir. ■

Önerme 3.39 *(Sadosky 1979) ε_1 ve ε_2 pozitif reel sayılar olmak üzere h.h.h. x için*

$$W(x,\varepsilon_1+\varepsilon_2) = W(x,\varepsilon_1) * W(x,\varepsilon_2)$$

ve

$$P(x,\varepsilon_1+\varepsilon_2) = P(x,\varepsilon_1) * P(x,\varepsilon_2)$$

dir.

Kanıt. Fourier dönüşümünün özelliği gereği

$$(W(x,\varepsilon_1) * W(x,\varepsilon_2))^{\wedge}(t) = (W(x,\varepsilon_1))^{\wedge}(t)\,(W(x,\varepsilon_2))^{\wedge}(t))$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}(W(x,\varepsilon_1))^{\wedge}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} W(x,\varepsilon_1)e^{-2\pi i x\cdot t}dx \\ &\quad \text{...(3.13)...} \\ &= e^{-4\pi^2\varepsilon_1|t|^2}\end{aligned}$$

ve aynı şekilde

$$(W(x,\varepsilon_2))\hat{}(t) = e^{-4\pi^2\varepsilon_2|t|^2}$$

olur. Buradan

$$(W(x,\varepsilon_1) * W(x,\varepsilon_2))\hat{}(t) = e^{-4\pi^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)|t|^2} = (W(x,\varepsilon_1+\varepsilon_2))\hat{}(t)$$

dir. Sonuç (3.32) 'ten $h.h.h.$ $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$W(x,\varepsilon_1+\varepsilon_2) = W(x,\varepsilon_1) * W(x,\varepsilon_2)$$

elde edilir.Diğer eşitlik için

$$(P(x,\varepsilon_1) * P(x,\varepsilon_2))\hat{}(t) = (P(x,\varepsilon_1))\hat{}(t)\,(P(x,\varepsilon_2))\hat{}(t))$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}(P(x,\varepsilon_1))\hat{}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} P(x,\varepsilon_1) e^{-2\pi i x\cdot t} dx \\ &\quad ...(3.14)... \\ &= e^{-2\pi\varepsilon_1|t|}\end{aligned}$$

ve aynı şekilde

$$(P(x,\varepsilon_2))\hat{}(t) = e^{-2\pi\varepsilon_2|t|}$$

olur. Buradan

$$(P(x,\varepsilon_1) * P(x,\varepsilon_2))\hat{}(t) = e^{-2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)|t|} = (P(x,\varepsilon_1+\varepsilon_2))\hat{}(t)$$

dir. Sonuç (3.32) 'den $h.h.h.$ $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$P(x,\varepsilon_1+\varepsilon_2) = P(x,\varepsilon_1) * P(x,\varepsilon_2)$$

elde edilir. ■

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. μ-Pürüzsüzlük

Tanım 4.1 *$\mu(r)$, $[0,\infty)$ üzerinde pozitif tanımlı bir fonksiyon ve $\lim_{r\to 0^+}\mu(r) = 0$ olsun. $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 'de tanımlı $\psi(t,x)$ ölçülebilir fonksiyonunun μ_ maksimal fonksiyonu*

$$M_\mu(\psi)(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{\mu(r)\,r^n}\int_{|t|\le r}|\psi(t,x)|\,dt$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.2 *(Sezer ve Aliev 2011) φ, $(0,\infty)$ üzerinde diferansiyellenebilir ve*

$$\lim_{r\to\infty} r^n\mu(r)\varphi(r) = 0 \text{ ve } \lim_{r\to 0^+} r^n\mu(r)\varphi(r) = 0 \tag{4.1}$$

olsun. O zaman $M_\mu(\psi)(x) < \infty$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\psi(t,x)\varphi(|t|)|\,dt \le (M_\mu\psi)(x)\int_0^\infty r^n\mu(r)\,|\varphi'(r)|\,dr \tag{4.2}$$

eşitsizliği sağlanır. (φ', φ 'nin türevi)

Kanıt.

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}^n}|\psi(t,x)\varphi(|t|)|\,dt$$

diyelim. Şimdi kutupsal koordinatlara geçelim.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|\psi(t,x)\varphi(|t|)|\,dt &= \int_0^\infty\int_{S^{n-1}}|\psi(r\theta,x)\varphi(|r\theta|)|\,r^{n-1}dr\,d\sigma(\theta)\\ &= \int_0^\infty r^{n-1}|\varphi(r)|\left[\int_{S^{n-1}}|\psi(r\theta,x)|\,d\sigma(\theta)\right]dr\end{aligned}$$

Burada

$$\lambda(t) = \int_{S^{n-1}}|\psi(t\theta,x)|\,d\sigma(\theta),\ 0\le t<\infty$$

ve

$$\Lambda(r) = \int_0^r \lambda(t)\,t^{n-1}dt,\ 0\le r\le\infty$$

gösterimleri altında

$$I(x) = \int_0^\infty r^{n-1}|\varphi(r)|\,\lambda(r)\,dr = \int_0^\infty|\varphi(r)|\,d\Lambda(r)$$

kısmi integrasyon uygularsak ($u = |\varphi(r)|$ ve $dv = d\Lambda(r)$ alınırsa)

$$\begin{aligned} I(x) &= |\varphi(r)|\Lambda(r)|_0^\infty - \int_0^\infty \Lambda(r)\, d|\varphi(r)| \\ &= |\varphi(r)|\Lambda(r)|_0^\infty - \int_0^\infty \Lambda(r)\, sgn\varphi(r)\,\varphi'(r)\, dr \end{aligned}$$

Burada

$$|\varphi(r)|\Lambda(r)|_0^\infty = 0$$

dır. Şimdi bunu görelim:

$$\begin{aligned} \Lambda(r) &= \int_0^r \lambda(t)\, t^{n-1} dt = \int_{|t|\le r} |\psi(t,x)|\, dt \\ &\le r^n \mu(r)\,(M_\mu \psi)(x) \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$0 \le |\varphi(r)|\Lambda(r) \le |\varphi(r)|\, r^n \mu(r)\,(M_\mu \psi)(x)$$

$(M_\mu \psi)(x) = M$ sonlu olmak üzere

$$0 \le \lim_{r\to\infty} |\varphi(r)|\Lambda(r) \le \lim_{r\to\infty} |\varphi(r)|\, r^n \mu(r)\, M = 0 \text{ (lemmanın ön koşulundan)}$$

Aynı şekilde

$$0 \le \lim_{r\to 0^+} |\varphi(r)|\Lambda(r) \le \lim_{r\to 0^+} |\varphi(r)|\, r^n \mu(r)\, M = 0 \text{ (lemmanın ön koşulundan)}$$

olduğundan

$$|\varphi(r)|\Lambda(r)|_0^\infty = 0$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} I(x) &= -\int_0^\infty \Lambda(r)\, sgn\varphi(r)\,\varphi'(r)\, dr \\ &\le \int_0^\infty \Lambda(r)\, |\varphi'(r)|\, dr \le ...(4.3) \text{ 'den...} \\ &\le (M_\mu \psi)(x) \int_0^\infty r^n \mu(r)\, |\varphi'(r)|\, dr \end{aligned}$$

■

Tanım 4.3 *(Sezer ve Aliev 2011)* $\rho < 1$ *olmak üzere* $\mu(r)$, $[0,\rho)$ *üzerinde sürekli, pozitif ve* $\lim_{r\to 0^+} \mu(r) = \mu(0) = 0$ *olsun. Eğer* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *için*

$$D_\mu(x) = \sup_{0<r<1} \frac{1}{r^n \mu(r)} \int_{|t|\le r} |f(x-t) - f(x)|\, dt < \infty \tag{4.4}$$

ise f fonksiyonuna $x \in \mathbb{R}^n$ noktasında "$\mu(r)$ mertebeden μ_pürüzsüzdür" denir. (4.4) *'ün sağlandığı $x \in \mathbb{R}^n$ noktasına da f fonksiyonunun μ_pürüzsüzlük noktası denir.*

Önerme 4.4 *Eğer f, $x \in \mathbb{R}^n$ noktasında μ_pürüzsüz ise o zaman x noktası f fonksiyonunun Lebesgue noktasıdır.*

Kanıt. Lebesgue noktasının tanımı: $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt = 0$$

idi.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt = \mu(r)\frac{1}{\mu(r)\,r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt \\ &\leq \mu(r)\sup_{0<r<1}\frac{1}{\mu(r)\,r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt \end{aligned}$$

Burada (4.4) 'ten $\sup\limits_{0<r<1}\frac{1}{\mu(r)r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt = M < \infty$ olur. Böylece

$$0 \leq \frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt \leq \mu(r)\,M \to 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt = 0$$

dır ve x noktası f fonksiyonunun Lebesgue noktasıdır. ■

Not 4.5 *(Sezer ve Aliev 2011) μ_pürüzsüzlük noktalarının karakterizasyonu bilinmemekle birlikte klasik anlamda pürüzsüz birçok fonksiyon μ_pürüzsüzlük özelliğine sahiptir. f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega_f(r) = \sup\limits_{|x|<r}\|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_\infty$ ile tanımlanır.*

$$\omega_f(r) = \sup_{|x|<r}\left(\sup_t |f(t-x)-f(t)|\right)$$

Lemma 4.6 *f fonksiyonunun süreklilik modülü için $\omega_f(r) \leq c\mu(r)$, $r \to 0$ sağlanıyorsa o zaman her $x \in \mathbb{R}^n$, f fonksiyonunun μ_pürüzsüzlük noktasıdır.*

Kanıt.

$$\begin{aligned}
D_\mu(x) &= \sup_{0<r<1} \frac{1}{r^n \mu(r)} \int_{|t|<r} |f(x-t) - f(x)|\, dt \\
&\leq \sup_{0<r<1} \frac{1}{r^n \mu(r)} \int_{|t|<r} \omega_f(r)\, dt \\
&\leq \sup_{0<r<1} \frac{1}{r^n \mu(r)} \int_{|t|<r} c\mu(r)\, dt \\
&= \sup_{0<r<1} \frac{1}{r^n} c \int_{|t|<r} dt = \frac{c}{r^n} c_1 r^n = cc_1 = c_2
\end{aligned}$$

$\left(\int_{|t|<r} dt\right.$ n boyutlu uzayda kürenin hacmi olduğundan $\left.\int_{|t|<r} dt = c_1 r^n\right)$ böylece

$$D_\mu(x) < \infty$$

elde edilir. Yani, x, μ_pürüzsüzlük noktasıdır. ■

Not 4.7 *Özel olarak f fonksiyonu lokal olarak Lipschitz koşulunu sağlıyorsa*

$$|f(x-t) - f(x)| \leq ct^\alpha, \; 0 < \alpha < 1$$

$\mu(r) = r^\alpha$ *için x noktası μ_pürüzsüzlük noktasıdır:*

$$\begin{aligned}
D_\mu(x) &= \sup_{0<r<1} \frac{1}{r^n r^\alpha} \int_{|t|<r} |f(x-t) - f(x)|\, dt \\
&\leq \sup_{0<r<1} \frac{1}{r^n r^\alpha} c \int_{|t|<r} |t|^\alpha\, dt \\
&\leq \sup_{0<r<1} \frac{1}{r^n r^\alpha} c \int_{|t|<r} r^\alpha dt \quad \ldots \left(\int_{|t|<r} dt = c_1 r^n\right) \ldots \\
&\leq \sup_{0<r<1} \frac{1}{r^n} c \int_{|t|<r} dt = cc_1 < \infty
\end{aligned}$$

4.2. Önemli Sonuçlar

Teorem 4.8 $\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(x) e^{2\pi i x \cdot t} dx$ *Fourier integralinin ϕ_ortalamaları için*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(x) e^{2\pi i x \cdot t} \phi(\varepsilon x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \varphi_\varepsilon(t-x)\, dx \tag{4.5}$$

eşitliği $\forall \varepsilon > 0$ *için sağlanır. Burada* $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varphi(x) = \phi^\wedge(x)$ *'tir.*

Kanıt. Teorem 3.5 'den elde edilir.(Çarpım formülü) ■

Özel olarak (4.5) 'de $\phi(x)$ fonksiyonu yerine $e^{-2\pi|x|}$ fonksiyonu konulursa

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^{\wedge}(x) e^{2\pi i x \cdot t} dx$$

integralinin Poisson ortalamaları için

$$u(x,\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, \varphi_\varepsilon(x-t)\, dt, \ \varepsilon > 0$$

formülünü elde ederiz. Burada $\varphi_\varepsilon(x)$ fonksiyonu, $C_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$ olmak üzere

$$\varphi_\varepsilon(x) = P(x,\varepsilon) = C_n \frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon^2 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

şeklinde tanımlanır ve Poisson çekirdeği olarak adlandırılır.

Not 4.9 *(Stein 1993, Rubin 1996) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$ olmak üzere*

(a) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|u(x,\varepsilon) - f\|_p = 0$

(b) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u(x,\varepsilon) = f(x)$, $x \in \widetilde{L_f}$

(c) $\sup\limits_{\varepsilon > 0} |u(x,\varepsilon)| \le c((Mf)(x))$, *burada* $((Mf)(x))$ *Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur.*

Bundan sonraki amacımız

$$|u(x,\varepsilon) - f(x)|$$

farkını $\varepsilon \to 0$ için üstten tahmin etmek olacaktır.

Bundan sonra $\mu(r)$ fonksiyonunun $[\rho,\infty)$ aralığında bir sabit olarak devam ettiğini kabul edeceğiz. Yani $r \ge \rho$ için $\mu(r) = \mu(\rho)$.

Şimdi tezin esas sonuçlarını ifade edelim.

Teorem 4.10 *$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$ fonksiyonu bir $x \in \mathbb{R}^n$ noktasında μ-pürüzsüzlük özelliğine sahip olsun. Bu taktirde, c_1 ve c_2, ε 'dan bağımsız sabitler olmak üzere*

$$|u(x,\varepsilon) - f(x)| \le c_1 \int_0^\infty r^{n+1} \mu(\varepsilon r) \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+3}{2}}} dr + c_2 \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt.

$$u(x,\varepsilon)=\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\,P(x-t,\varepsilon)\,dt$$

ve $C_n=\Gamma(\frac{n+1}{2})\pi^{-\frac{(n+1)}{2}}$ olmak üzere

$$P(x,\varepsilon)=C_n\frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon^2+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

idi. Ayrıca

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon)=f(x)\,,\ x\in L_f$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi $x\in\mathbb{R}^n$ $\mu-$pürüzsüzlük noktası iken bu yakınsamanın hızını tahmin edeceğiz. Bunun için

$$\begin{aligned}
|u(x,\varepsilon)-f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\,P(x-t,\varepsilon)\,dt-f(x)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\,P(t,\varepsilon)\,dt-f(x)\int_{\mathbb{R}^n} P(t,\varepsilon)\,dt\right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t)-f(x)|\,|P(t,\varepsilon)|\,dt \\
&= \int_{|t|\le 1} |f(x-t)-f(x)|\,|P(t,\varepsilon)|\,dt \\
&\quad+\int_{|t|>1} |f(x-t)-f(x)|\,|P(t,\varepsilon)|\,dt \\
&= A_1(\varepsilon)+A_2(\varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

İlk önce $A_1(\varepsilon)$ 'nun tahminini yapalım:

$$\psi(t,x)=\begin{cases} f(x-t)-f(x) & |t|\le 1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$$

fonksiyonu için

$$A_1(\varepsilon)=\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(t,x)|\,P(t,\varepsilon)\,dt$$

olur. $P(t,\varepsilon)$ radial olduğundan.

$$A_1(\varepsilon)=\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(t,x)|\,P(|t|,\varepsilon)\,dt \tag{4.6}$$

olur. Şimdi (4.6) 'ya lemma4.2 'yı uygulayalım. $r>0$ iken $|r|=r$ olduğundan

$$A_1(\varepsilon)\le (M_\mu\psi)(x)\int_0^\infty r^n\mu(r)\left|P'(r,\varepsilon)\right|dr$$

elde edilir. $x \in \mathbb{R}^n$, f fonksiyonunun $\mu-$pürüzsüzlük noktası olduğundan

$$(M_\mu \psi)(x) \equiv D_\mu(x) < \infty.$$

(Bakınız:(4.4)). Şimdi $\frac{dP}{dr}$ 'yi hesaplayalım.

$$P(r,\varepsilon) = C_n \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n+1}{2}}} \Longrightarrow \frac{dP}{dr} = C_n c_2 \frac{\varepsilon 2r}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n+3}{2}}}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
A_1(\varepsilon) &\leq c_3 \int_0^\infty r^{n+1} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n+3}{2}}} \mu(r)\, dr \\
&= c_3 \int_0^\infty \frac{r^{n+1} \varepsilon \mu(r)}{\varepsilon^{n+3} \left(1 + \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2\right)^{\frac{n+3}{2}}} dr \\
\ldots\left(\frac{r}{\varepsilon}\right. &= u \text{ değişken değiştirmesi yapılırsa } dr = \varepsilon du)\ldots \\
&= c_3 \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{n+1} u^{n+1} \varepsilon \mu(\varepsilon u)\, \varepsilon}{\varepsilon^{n+3} (1 + u^2)^{\frac{n+3}{2}}} du \\
&= c_3 \int_0^\infty u^{n+1} \mu(\varepsilon u) \frac{1}{(1 + u^2)^{\frac{n+3}{2}}} du
\end{aligned}$$

Şimdi de $A_2(\varepsilon)$ nun tahminini yapalım.

$$\begin{aligned}
A_2(\varepsilon) &= \int_{|t|>1} |f(x-t) - f(x)|\, |P(t,\varepsilon)|\, dt \\
&\leq \int_{|t|>1} (|f(x-t)| + |f(x)|)\, |P(t,\varepsilon)|\, dt \\
&= |f(x)| \int_{|t|>1} |P(t,\varepsilon)|\, dt + \int_{|t|>1} |f(x-t)|\, |P(t,\varepsilon)|\, dt \\
&= I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon)
\end{aligned}$$

$I_1(\varepsilon)$ 'a bakalım:

$$\begin{aligned}
I_1(\varepsilon) &= c_4 \int_{|t|>1} \frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon^2+|t|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} dt \\
&\quad \text{...(kutupsal koordinatlara geçersek)...} \\
&= c_4 \int_1^{\infty} r^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} \frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} d\sigma \right) dr \\
&= c_4 \left(\int_{S^{n-1}} d\sigma \right) \int_1^{\infty} r^{n-1} \frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} dr \\
&= c_5 \int_1^{\infty} r^{n-1} \frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} dr = \varepsilon c_5 \int_1^{\infty} \frac{r^{n-1}}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} dr \\
&\leq \varepsilon c_5 \int_1^{\infty} \frac{r^{n-1}}{\left(r^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} dr = \varepsilon c_5 \int_1^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{n+1}} dr \\
&= \varepsilon c_5 \int_1^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = c_6 \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de $I_2(\varepsilon)$ 'a bakalım.

$$I_2(\varepsilon) = \int_{|t|>1} |f(x-t)| \, |P(t,\varepsilon)| \, dt$$

$p > 1$ için Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
I_2(\varepsilon) &\leq \left(\int_{|t|>1} |f(x-t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|t|>1} (P(t,\varepsilon))^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right) \\
&\leq \|f\|_p \left(\int_{|t|>1} (P(t,\varepsilon))^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_p \left(c_7 \int_{|t|>1} \left(\frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon^2+|t|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \text{...(kutupsal koordinatlara geçelim)...} \\
&= c_8 \left(\int_1^{\infty} r^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} \frac{\varepsilon^q}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{\frac{(n+1)q}{2}}} d\sigma \right) dr \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= c_9 \varepsilon \left(\int_1^{\infty} r^{n-1} \frac{1}{\left(\varepsilon^2+r^2\right)^{\frac{(n+1)q}{2}}} dr \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq c_9 \varepsilon \left(\int_1^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{(n+1)q}} dr \right)^{\frac{1}{q}} = c_9 \varepsilon \left(\int_1^{\infty} \frac{1}{r^{n(q-1)} r^{(q+1)}} dr \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

burada

$$\left(\int_1^{\infty} \frac{1}{r^{n(q-1)} r^{(q+1)}} dr \right)^{\frac{1}{q}} \leq c_{10}$$

olduğundan

$$I_2(\varepsilon) \leq c_{11}\varepsilon$$

elde edilir. Böylece

$$A_2(\varepsilon) \leq c_{12}\varepsilon$$

bulunur. Sonuç olarak

$$|u(x,\varepsilon) - f(x)| \leq c_1 \int_0^\infty r^{n+1}\mu(\varepsilon r)\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}dr + c_2\varepsilon$$

olduğu görülür. Son olarak ispatı tamamlamak için lemma 4.2 'nin koşullarının sağlandığını göstermeliyiz. Bunun için

$$\varphi(r) = C_n \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

olmak üzere

$$\lim_{r \to 0^+} r^n \mu(r)\varphi(r) = \lim_{r \to 0^+} r^n \mu(r) C_n \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n+1}{2}}} = 0$$

sağlanır. Çünkü tanım 4.1 'den $\lim_{r \to 0^+} \mu(r) = 0$ 'dır ve $\lim_{r \to 0^+} r^n C_n \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} = 0$ 'dır. Diğer koşul ise

$$\lim_{r \to \infty} r^n \mu(r)\varphi(r)$$

ifadesinde $r \to \infty$ için $\mu(r) = \mu(\rho)$ gibi bir sabit olacağından

$$\lim_{r \to \infty} r^n \mu(r)\varphi(r) = \lim_{r \to \infty} r^n \mu(\rho) C_n \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + r^2)^{\frac{n+1}{2}}} = 0$$

olur ve böylece ispat biter. ∎

Sonuç 4.11 *$\delta \in (0,1)$ olmak üzere $0 \leq r \leq 1$ için $\mu(r) = r^{\delta+1}$ ve $1 \leq r < \infty$ için $\mu(r) = \mu(1) = 1$ olacak şekilde bir sabit olarak devam etsin. Yukarıdaki teoremin koşulları altında*

$$|u(x,\varepsilon) - f(x)| \leq c\varepsilon, \quad (\varepsilon \to 0).$$

Kanıt.

$$\begin{aligned}
|u(x,\varepsilon)-f(x)| &\leq c_1\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} r^{n+1}\varepsilon^{\delta+1}r^{\delta+1}\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}dr \\
&\quad +c_1\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} r^{n+1}1\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}dr+c_2\varepsilon \\
&\leq c_1\varepsilon^{\delta+1}\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{r^{n+2+\delta}}{r^{n+3}}dr+c_1\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty}\frac{r^{n+1}}{r^{n+3}}dr+c_2\varepsilon \\
&= c_1\varepsilon^{\delta+1}\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{r^{1-\delta}}dr+c_1\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty}\frac{1}{r^2}dr+c_2\varepsilon \\
&= c_1\varepsilon^{\delta+1}\left(\frac{r^{\delta}}{\delta}\Big|_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)+c_1\left(-\frac{1}{r}\Big|_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty}\right)+c_2\varepsilon \\
&= \frac{c_1}{\delta}\varepsilon+c_1\varepsilon+c_2\varepsilon=c\varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Sonuç 4.12

$$\mu(r)=\begin{cases}\tan r-r, & 0\leq r\leq\frac{\pi}{4}\\ 1-\frac{\pi}{4}, & r\geq\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

olmak üzere

$$|u(x,\varepsilon)-f(x)|\leq c\varepsilon,\ \ (\varepsilon\to 0).$$

Kanıt.

$$\begin{aligned}
|u(x,\varepsilon)-f(x)| &\leq c_1\int_0^{\frac{\pi}{4\varepsilon}} r^{n+1}\mu(\varepsilon r)\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}dr \\
&\quad +c_1\int_{\frac{\pi}{4\varepsilon}}^{\infty} r^{n+1}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}dr+c_2\varepsilon \\
&\leq c_1\int_0^{\frac{\pi}{4\varepsilon}}\frac{\tan\varepsilon r-\varepsilon r}{r^2}dr+c_1\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\int_{\frac{\pi}{4\varepsilon}}^{\infty}\frac{1}{r^2}dr+c_2\varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $r\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ için $\tan r-r\leq r^2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|u(x,\varepsilon)-f(x)| &\leq c_1\int_0^{\frac{\pi}{4\varepsilon}}\varepsilon^2r^2\frac{1}{r^2}dr+c_1\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{4\varepsilon}{\pi}+c_2\varepsilon \\
&\leq c_1\varepsilon^2\frac{\pi}{4\varepsilon}+c_1\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{4\varepsilon}{\pi}+c_2\varepsilon \\
&= c\varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Sonuç 4.13

$$\mu(r)=\begin{cases} r^2\tan r, & 0\le r\le 1\\ \tan 1, & r\ge 1\end{cases}$$

olmak üzere

$$|u(x,\varepsilon)-f(x)|\le c\varepsilon,\ \ (\varepsilon\to 0).$$

Kanıt.

$$\begin{aligned}|u(x,\varepsilon)-f(x)| &\le c_1\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} r^{n+1}\varepsilon^2 r^2\tan(\varepsilon r)\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}dr\\ &\quad +c_1\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} r^{n+1}\tan 1\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}dr+c_2\varepsilon\\ &\le c_1\varepsilon^2\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\tan(\varepsilon r)\,dr+c_1\tan 1\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty}\frac{1}{r^2}dr+c_2\varepsilon\end{aligned}$$

Şimdi

$$\begin{aligned}\int\tan(\varepsilon r)\,dr &= \int\frac{\sin\varepsilon r}{\cos\varepsilon r}dr=...(u=\cos\varepsilon r,\ du=-\varepsilon\sin\varepsilon r dr)...\\ &= -\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{du}{u}=-\frac{1}{\varepsilon}\ln(\cos\varepsilon r)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\tan(\varepsilon r)\,dr=-\frac{1}{\varepsilon}\ln(\cos\varepsilon r)\,|_0^{\frac{1}{\varepsilon}}=-\frac{1}{\varepsilon}(\cos 1-0)=-\frac{1}{\varepsilon}\cos 1$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}|u(x,\varepsilon)-f(x)| &\le -c_1(\cos 1)\varepsilon^2\frac{1}{\varepsilon}+c_1(\tan 1)\varepsilon+c_2\varepsilon\\ &= c\varepsilon.\end{aligned}$$

■

Sonuç 4.14

$$\mu(r)=\begin{cases}\frac{r^2}{\cos r}, & 0\le r\le 1\\ \frac{1}{\cos 1}, & r\ge 1\end{cases}\quad ve\ \mu(r)=\begin{cases}\frac{r^3}{1-r^2}, & 0\le r\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}, & r\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

olmak üzere

$$|u(x,\varepsilon)-f(x)|\le c\varepsilon,\ \ (\varepsilon\to 0).$$

5. SONUÇ

Fourier dönüşümü bilinen bir fonksiyonun oluşturulmasında kullanılan önemli toplanabilirlik metodlarından bazılarının incelendiği bu çalışmanın bulgılar kısmında Poisson ortalamalarının yakınsama hızı incelenmiştir.

Çalışmada da görüleceği gibi $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$ ve $\phi(0) = 1$ olmak üzere

$$M_{\varepsilon,\phi}(f) \equiv M_\varepsilon(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\varepsilon x) f(x)\, dx, \quad (\varepsilon > 0)$$

şeklinde tanımlanan $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$ integralinin (ıraksak veya yakınsak) ϕ ortalamaları tanımında $\phi(x) = e^{-2\pi|x|}$ alınarak Poisson ortalamaları ve toplanabilirlik metodları oluşturulmuş ve Poisson ortalamalarının $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonuna ait μ-pürüzsüzlük noktalarında yakınsama hızı incelenmiştir. Şu sonuca ulaşılmıştır:

$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ fonksiyonu bir $x \in \mathbb{R}^n$ noktasında $\mu-$pürüzsüzlük özelliğine sahip olsun. Bu taktirde, c_1 ve c_2, ε 'dan bağımsız sabitler olmak üzere

$$|u(x,\varepsilon) - f(x)| \leq c_1 \int_0^\infty r^{n+1} \mu(\varepsilon r) \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{n+3}{2}}} dr + c_2 \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca elde edilen bu bilgiden yola çıkılarak bazı özel $\mu-$pürüzsüzlük noktaları için yakınsama hızları da elde edilmiştir.

6. KAYNAKLAR

ALIEV, I.A. 1999. On the Bochner-Riesz summability and restoration of μ-smooth functions by means of their Fourier transforms, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **2**, No.3 265-277.

DEVORE, R.A. and LORENTZ, G.G. 1993. Constructive Approximation, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

FOLLAND, G. B. 1984. Real Analysis, Modern Techniquies and Their Applications, USA, 549 pp.

GOLUBOV, B. I. 1980. On the Summability method of Abel-Poisson type for multiple Fourier Integrals, *Math. USSR Sb.*, **36**,213-229.

GOLUBOV, B. I. 1981. On the rate of convergence of integrals of Gauss-Weierstrass type for functions of several variables *Math. USSR Izv.,* **17**,455-475.

GORODETSKII, V. V. 1989. Summation of Formal Fourier series by methods of Gauss-Weierstrass type, *Ukrainian Mathematical Journal*, **41**, 715-717.

GRADSHTEYN, I.S. and RYZHIK, I.M. 1994. Table of Integrals, Series, and Products (Fifth edition), Academic Press.

RUBIN, B. 1996. Fractional integrals and potentials. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Longman, Harlow.

SADOSKY, C. 1979. Interpolation of Operators and Singular Integrals. Marcel Dekker, INC. New York and Basel.

SEZER, S. and ALIEV, I.A. 2011. On the Gauss-Weierstrass summability of multiple trigonometric series at μ-smoothness points, *Acta Mathematica Sinica (English Series)*, **27**, No.4, 741-746.

STEIN, E.M. 1993. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

STEIN, E. and SHAKARCHI, R. 2003. Fourier Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton N.J.

STEIN, E. and SHAKARCHI, R. 2005. Real Analysis, Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., 223 pp.

STEIN, E.M. and WEISS, G. 1971. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces. Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

WEISZ, F. 2002. Summability of Multi-dimensional Fourier Series and Hardy Spaces, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers.

WEISZ, F. 2010. Restricted Summability of Fourier Transforms and Local Hardy Spaces, *Acta Mathematica Sinica (English Series)*, **26**, No.9, 1627-1640.

ÖZGEÇMİŞ

Selim Çobanoğlu, 1988 yılında Antalya'nın Finike ilçesinde doğdu. İlköğretim ve lise öğrenimini Finike'de tamamladı. 2006 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans öğreniminden 2010 yılında Matematikçi olarak mezun oldu ve aynı yıl Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında lisansüstü öğrenimine başladı.