T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# YAKLAŞIK BİRİM OPERATÖRLERİN DOĞURDUĞU DALGACIK TİPLİ İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER VE BAZI UYGULAMALARI

Esra ÇEVİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2012

# YAKLAŞIK BİRİM OPERATÖRLERİN DOĞURDUĞU DALGACIK TİPLİ İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER VE BAZI UYGULAMALARI

**Esra ÇEVİK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından, "2210 - Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" ile desteklenmiştir.

**2012**

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# YAKLAŞIK BİRİM OPERATÖRLERİN DOĞURDUĞU DALGACIK TİPLİ İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER VE BAZI UYGULAMALARI

Esra ÇEVİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 06 / 07 / 2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından ( 95 ) not takdir edilerek oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İlham ALİYEV (Danışman) ..............................

Doç. Dr. Mehmet CENKCİ ..............................

Yrd. Doç. Dr. Sinem SEZER ..............................

# ÖZET

## YAKLAŞIK BİRİM OPERATÖRLERİN DOĞURDUĞU DALGACIK TİPLİ İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER VE BAZI UYGULAMALARI

**Esra ÇEVİK**

**Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Prof. Dr. İlham ALİYEV**

**Haziran 2012, 32 Sayfa**

Bu tez çalışmasında, Riesz-Bochner integrali, bir ağırlık fonksiyonu ve dalgacık fonksiyonu yardımıyla bir İntegral Dalgacık Dönüşümü tanımlanmış ve ona uygun ters çevirme formülü ( Calderón Formülü ) elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Dalgacık fonksiyonları, dalgacık dönüşümleri, Calderón formülü, Fourier dönüşümü, Riesz-Bochner integrali, girişim

JÜRİ: Prof. Dr. İlham ALİYEV

Doç. Dr. Mehmet CENKCİ

Yrd. Doç. Dr. Sinem SEZER

# ABSTRACT

## WAVELET TYPE INTEGRAL TRANSFORMS GENERATED BY APPROXIMATE IDENTITY OPERATORS AND SOME APPLICATIONS

**Esra ÇEVİK**

**M. Sc. Thesis in Mathematics**

**Adviser: Prof. Dr. İlham ALİYEV**

**June 2012, 32 Pages**

In this thesis, a Weighted Wavelet Type Transform has been introduced with the aid of the Riesz-Bochner integral, a weighted function and some wavelet function. The Calderón-type reproducing formula for this transform is obtained.



KEY WORDS: Wavelet functions, wavelet transforms, Calderón's reproducing formula, Fourier transform, Riesz-Bochner integrals, convolution


COMMITTEE: Prof. Dr. İlham ALİYEV

Assoc. Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

Asst. Prof. Dr. Sinem SEZER

# ÖNSÖZ

Harmonik Analiz'in çeşitli integral dönüşümlerinin (Fourier, Laplace, Mellin, Riesz, Hankel, Radon v.s. gibi) Metamatikte ve onun uygulamalarında, bir teknik araç olarak, ne kadar önemli olduğu yalnızca matematikçiler tarafından değil, fizikçiler, mühendisler gibi çeşitli alanlarda çalışanlar tarafından da iyi bilinmektedir.

Bundan yaklaşık 50 yıl önce Harmonik Analiz'de ortaya çıkarak, hem matematiğin çeşitli dallarında ve hem de mühendislikte ciddi şekilde kullanım alanı bulan Dalgacık (Wavelet) Dönüşümleri günümüzde Analizin önemli aracı haline gelmiştir. Matematikçiler ve uygulamacılar, genel olarak, kendi problemlerine uygun Dalgacık Dönüşümü tanımlar ve ona uygun ters dönüşüm (Calderón Formülü) bulup uygularlar. Bu tez çalışmasında, ilk olarak, ilgilendiğimiz alanda yapılmış çalışmaların bir kısmının özeti verilmiştir. Çalışmamızın daha sonraki kısmında, yarı-grup özelliğine sahip olmayan bir aile yardımıyla dalgacık dönüşümü tanımlanarak, onun tersi (Calderón Formülü) bulunmuştur. Tanımlanan yeni Dalgacık Dönüşümünde Riesz-Bochner integrali, dalgacık tipli fonksiyon ve bir ağırlık fonksiyonu kullanılmıştır.

Elde edilen sonuçların Harmonik Analiz'e katkısı olacağı kanaatindeyiz.

Bu tez çalışması boyunca benden bilgisini ve desteğini esirgemeyen değerli danışmanım, Sayın Prof. Dr. İlham ALİYEV'e, çok değerli aileme, yardımını gördüğüm bölüm hocalarıma, arkadaşlarıma ve desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}^n$ | $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ...x_n) : \; x_j \in \mathbb{R}, \; j = 1, 2, ...\}$ |
| $L_p(\mathbb{R}^n)$ | $\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir ve $p$. kuvveti integrallenen fonksiyonlar uzayı |
| $C_0(\mathbb{R}^n)$ | Sonsuzlukta sıfıra giden sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $S(\mathbb{R}^n)$ | Schwartz test fonksiyonları uzayı |
| $f^{\wedge}, \hat{f}$ | $f$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü |
| $f^{\vee}, \check{f}$ | $f$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü |
| $f * g$ | $f$ ile $g$ fonksiyonlarının girişimi |
| $B_t^{(\delta)} f(x)$ | Riesz-Bochner integrali |
| $(Tf)(x,t)$ | Ağırlıklı dalgacık tipli dönüşüm |
| $J_\lambda(t)$ | 1. tip Bessel fonksiyonu |
| $\Gamma(t)$ | Gamma fonksiyonu |
| $M_f(x)$ | Hardy-Littlewood maksimal operatörü |

### Kısaltmalar

| | |
|---|---|
| $h.h.h.$ | Hemen hemen her |

# 1. GİRİŞ

## 1.1. Çalışmanın Kapsamı

Fourier Analizin temel teknik araçları olan Fourier Serileri ve Fourier Dönüşümleri teorik ve uygulamalı matematikte olduğu kadar fizikte, mühendislikte ve başka bilim dallarında da geniş uygulama alanları bulmaktadır. Özellikle Fourier serisinin yalnız iki periyodik fonksiyondan ( kosinüs ve sinüsten) türetilmesi ve toplananların ortogonallik özelliği onu kullanışlı yapmaktadır. 1965'lerden itibaren Fourier Analize paralel olarak Dalgacık (Wavelet) Analizi denilen bir analiz ortaya çıkmış ve matematikte de mühendislikte de hızlı bir şekilde uygulama alanı bulmuştur. Dalgacık analizinde de Fourier Analizdeki, Fourier serisi ve Fourier dönüşümü kavramlarına benzer İntegral Dalgacık Dönüşümü ve Dalgacık Serisi kavramları tanımlanarak uygulanmaktadır.

Bu tez çalışması, Giriş ve Kaynaklar hariç dört bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın ikinci bölümünde, tez boyunca kullanılacak bazı tanım, teorem ve gösterimler verilmişir. Üçüncü bölümde, çalışmada kullanılan materyal ve metot hakkında bilgi verildikten sonra, yukarıda bahsedilen Dalgacık Dönüşümüyle ilgili kısa bir hatırlatma yapılmış ve bir sonraki bölümde yeni bir Dalgacık Dönüşümü tanımlamak için kullanılacak Riesz-Bochner integrali $B_t^{(\delta)}f$ tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde de Riesz-Bochner integrali, $\rho(\beta) \geq 0$ ağırlık fonksiyonu ve $g(t)$ dalgacık tipli fonksiyonu yardımıyla,

$$(Tf)(x,t) = \int_0^\infty \rho(t\eta) B_{t\eta}^{(\delta)} f(x) g(\eta) d\eta$$

şeklinde bir ağırlıklı dalgacık tipli dönüşüm tanımlanmış ve bu dönüşüme uygun ters dönüşüm (Calderón Formülü) şu şekilde elde edilmişir:

$$\int_0^\infty (Tf)(x,t)\frac{dt}{t} \equiv \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^\infty (Tf)(x,t)\frac{dt}{t} = cf(x).$$

Son olarak da, beşinci bölümde, yapılan çalışmalardan elde edilen sonuçlar derlenmiştir.

# 2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak bazı gösterim (notasyon), tanım ve teoremler verilecektir.

$\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$ n boyutlu Öklid uzayı olup, $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ 'dir. $\mathbb{R}^n$'deki hacim elemanı, $dx = dx_1dx_2...dx_n$ 'dir.

$C_0(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$'deki sürekli ve $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı gösterilecek ve $S \equiv S(\mathbb{R}^n)$ ile de kendisi ve tüm türevleri hızla azalan diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayı olan Schwartz uzayı temsil edilecektir (bir $f$ fonksiyonu için $\lambda - \text{ıncı}$ mertebeden türevin hızla azalması demek; her $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ için, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$ ve $D^\lambda \equiv \frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}...\partial x_n^{\lambda_n}}$ olmak üzere, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha| \left|D^\lambda f(x)\right| < \infty$ olmasıdır).

Bir $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için, $|x_1| = |x_2|$ olduğunda $|\psi(x_1)| = |\psi(x_2)|$ sağlanıyorsa, $\psi$ radialdir, denir.

## 2.1. L$_p$ Uzayları ile İlgili Bazı Önemli Bilgiler

$L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ 'de ölçülebilir ve

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \,, \quad 1 \le p \le \infty \tag{2.1}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı gösterilecektir. $\|f\|_p$ sayısı, $f$ fonksiyonunun $L_p$ normudur.

$p = \infty$ durumunda $L_\infty \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f$ ölçülebilir ve $\|f\|_\infty < \infty\}$ şeklinde tanımlanır. Burada $\|f\|_\infty = ess\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$ olup, esas supremum denilen değer olarak kullanılmaktadır.

$L_p$'de tanımlı $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $f$'ye $L_p$ normu anlamında yakınsaması; $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ koşulunun sağlanmasıdır.

Şimdi, bu çalışmada kullanacağımız bazı önemli tanım ve teoremleri ifade edelim. Aşağıda "*h.h.h.*" kısaltması "hemen hemen her yerde" veya "hemen hemen her $x$ için" anlamını vermektedir.

**Teorem 2.1** ***(Lebesgue Baskın Yakınsama Teoremi)*** *(Folland 1984 sf.193)* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $L_1$ *uzayında,*

*(i)* $f_n \to f$, *(h.h.h.)*

*(ii) Bir* $g$ *pozitif fonksiyonu ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için,* $|f_n| \leq g$

*özelliklerini sağlayan bir dizi olsun. O zaman* $f \in L_1$*'dir ve*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_n(x)dx$$

*dir.*

**Teorem 2.2** ***(Fubini Teoremi)*** *(Folland 1984 sf.65)* $(X, M, \mu)$ *ve* $(Y, N, \nu)$ $\sigma-$*sonlu ölçüm uzayları,* $\mu \times \nu$ *ölçümü de* $M \times N$ *üzerinde* $\mu$ *ve* $\nu$*'nün çarpımı olsun. Eğer,* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\mu \times \nu$ *ölçümüne göre integrallenebilir ise, h.h.h.* $y \in Y$ *için* $\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)$ *integrali ve h.h.h.* $x \in X$ *için* $\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)$ *integrali sonludur ve*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

*eşitliği sağlanır.*

**Tanım 2.3** *(Stein ve Weiss 1971 sf.53 , Stein 1970 sf.4) Bir* $f \in L_p$ *fonksiyonuna uygun* $M_f$ *Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$M_f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int\limits_{B_r} |f(x-y)|\, dy. \tag{2.2}$$

*Burada,* $B_r = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq r\}$ *olup,* $\mathbb{R}^n$*'de orijin merkezli* $r$ *yarıçaplı yuvar demektir.* $|B_r|$ *de bu yuvarın hacmidir.*

$M_f$ fonksiyonu için Hardy-Littlewood'un iyi bilinen bir teoremi aşağıdaki gibidir:

**Teorem 2.4** *(Hardy-Littlewood) (Stein 1970 sf.5)*

*(a)* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$ *ise,* $M_f(x)$ *fonksiyonu h.h.h.* $x \in \mathbb{R}^n$ *için sonlu değer alır.*

*(b)* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \le \infty$ *için,*

$$\|M_f\|_p \le A_p \|f\|_p$$

*sağlanacak biçimde* $A_p \equiv A_p(n)$ *sabiti vardır.*

*(c)* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *ise, her* $\alpha > 0$ *için,*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_f(x) > \alpha\}| \le \frac{A}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx$$

*sağlanacak şekilde* $A \equiv A(n)$ *sabiti vardır. Burada,* $|\{x \in \mathbb{R}^n : M_f(x) > \alpha\}|$ *ile* $\{x \in \mathbb{R}^n : M_f(x) > \alpha\}$ *kümesinin Lebesgue ölçümü gösterilmektedir.*

**Teorem 2.5** *(Stein 1970 sf.62,63)* $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *ve* $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, $(x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0)$ *olsun.*

*(a)* $\psi(x) \equiv \sup\limits_{y:|y| \ge |x|} |\varphi(y)|$ *pozitif radial fonksiyonu* $|x| \to \infty$ *için azalan ve* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx \equiv A < \infty$ *ise, o zaman her* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \le p \le \infty)$ *için,*

$$\sup_{\varepsilon > 0} |(f * \varphi_\varepsilon)(x)| \le A M_f(x)$$

*eşitsizliği sağlanır.*

*(b)* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$ *ise, o zaman f'nin her Lebesgue noktasında (dolayısıyla h.h.h.* $x \in \mathbb{R}^n$ *noktasında),*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (f * \varphi_\varepsilon)(x) = f(x)$$

*eşitliği sağlanır.*

*(c) Her* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$ *için,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0$$

*olur.*

**Tanım 2.6** *(Stein ve Weiss 1971 sf.184)* $(X,\mu)$, $(Y,\nu)$ *ölçüm uzayları ve* $T : L_p(X,\mu) \to L_q(Y,\nu)$ *şeklinde tanımlı bir operatör olsun. Eğer* $q < \infty$ *için,*

$$\nu\left(\{y \in Y : |Tf(y)| > \alpha\}\right) \le \left(\frac{c\,\|f\|_p}{\alpha}\right)^q$$

*eşitsizliği sağlanıyorsa,* $T$ *operatörüne zayıf tipli veya zayıf* $(p,q)$ *tipli denir. Eğer* $T : L_p(X,\mu) \to L_\infty(Y,\nu)$ *sınırlı operatör ise, zayıf* $(p,\infty)$ *tipli denir.*

**Not 2.7** *Bu tanım kullanılarak, (2.2) formülüyle tanımlanan Hardy-Littlewood maksimal operatörünün her* $1 \le p < \infty$ *için zayıf* $(p,p)$ *tipli olduğu görülür.*

**Teorem 2.8** ***(Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği)*** *(Folland 1984 sf.186, Sadosky 1979 sf.14)* $(X,M,\mu)$ *ve* $(Y,N,\nu)$ $\sigma-$*sonlu ölçüm uzayları ve* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu ölçülebilir olsun. Eğer, h.h.h.* $y \in Y$ *için* $f(.,y) \in L_p(X,M,\mu)$ $(1 \le p \le \infty)$ *ve* $\int\limits_Y \|f(.,y)\|_{p,\mu}\,d\nu(y) < \infty$ *ise,* $\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)$ *integrali h.h.h.* $x \in X$ *için sonludur ve*

$$\left\|\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)\right\|_{p,\mu} \le \int\limits_Y \|f(.,y)\|_{p,\mu}\,d\nu(y)$$

*eşitsizliği sağlanır.*

**Teorem 2.9** ***(Hölder eşitsizliği)*** *(Rubin 1996 sf.1, Sadosky 1979 sf.13)* $(X,M,\mu)$ $\sigma-$*sonlu ölçüm uzayı ve* $\|f\|_{p,\mu} = \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$ *olsun. Bu durumda,* $f \in L_{p,\mu}$, $g \in L_{q,\mu}$, $1 \le p \le \infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\int\limits_X |f(x)g(x)|\,d\mu(x) \le \|f\|_{p,\mu}\,\|g\|_{q,\mu}\,.$$

*Özel halde,* $d\mu(x) = dx$; $f \in L_p$, $g \in L_q$, $1 \le p \le \infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *için,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_p\,\|g\|_q$$

*eşitsizliği sağlanır.*

## 2.2. Fourier Dönüşümü ve Ters Fourier Dönüşümü

**Tanım 2.10** *(Sadosky 1979 sf.55) $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\hat{f}$, her $x \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdaki gibi tanımlıdır:*

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi ixt}dt \ . \tag{2.3}$$

*Bir $g \in L_1$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü de şu şekilde tanımlanır:*

$$\check{g}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{2\pi itx}dx \ . \tag{2.4}$$

*$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü için $f^\wedge$, $F(f)$ ve ters Fourier dönüşümü için $f^\vee$, $F^{-1}(f)$ gibi gösterimler de kullanılmaktadır.*

**Not 2.11** *Eğer $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olursa,*

$$f(t) = (\check{\hat{f}})(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi itx}dx \tag{2.5}$$

*sağlanır. Dahası, eğer örneğin $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ise (2.5) eşitliği yine sağlanır.*

**Not 2.12** *Yukarıda tanımı yapılan radial bir fonksiyonun Fourier dönüşümünün de radial olduğu iyi bilinmektedir. Özel halde, tek değişkenli çift fonksiyonun Fourier dönüşümü de çifttir.*

**Teorem 2.13** ***(Plancherel Teoremi)*** *(Stein ve Shakarchi 2007 sf.143) $f \in S(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman,*

$$\|f^\wedge\|_2 = \|f\|_2 \tag{2.6}$$

*dır.*

*(2.6) eşitliği, Fourier dönüşümü $L_2(\mathbb{R}^n)$'den olan fonksiyonlar için de tanımlanır ve bu dönüşüm $L_2(\mathbb{R}^n)$'de bir izometri olur.*

**Tanım 2.14** *(Stein ve Shakarchi 2007 sf.139) $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ise, $f$ ile $g$'nin girişimi,*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \tag{2.7}$$

*şeklinde tanımlıdır. Benzer şekilde, $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının girişimi de tanımlanır:*

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)dt \ , \quad dt = dt_1 dt_2 ... dt_n$$

Fourier dönüşümü ve girişim arasındaki ilişkiyi gösteren önemli iki formül aşağıdaki gibidir:

$$(f * g)^\wedge = (f^\wedge)(g^\wedge) \ , \ (f, g \in L_1) \tag{2.8}$$

$$(fg)^\wedge(x) = (f^\wedge * g^\wedge)(x) \ , \ (f, g \in S) \tag{2.9}$$

**Not 2.15** *Bazı kaynaklarda $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü sırasıyla,*

$$f^\wedge(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-ixt}dt$$

*ve*

$$f^\vee(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\lambda x}dx$$

*şeklinde tanımlanır (Spigel 1974 sf.81). Bu şekilde tanımlanmış Fourier dönüşümü için (2.9) formülü,*

$$(fg)^\wedge(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}(f^\wedge * g^\wedge)(x)$$

*şeklini alır.*

# 3. MATERYAL VE METOT

Bu tezde materyal olarak alana ait makale ve kitaplardan yararlanılmış olup, metot olarak da Harmonik Analizde ve genel olarak, Matematik Analizde kullanılan ispat yöntemleri, tanım ve teoremler kullanılmıştır.

## 3.1. İntegral Dalgacık Dönüşümleri

İkinci bölümde, Fourier dönüşümünün sık kullanılan iki tanımı ile ilgili bazı hatırlatmalar yapılmıştı. Şimdi de, Fourier serisi kavramı ile ilgili kısa bir hatırlatma yapalım:

**Tanım 3.1** *(Spiegel 1974 sf.24) $f \in L_2[-\pi,\pi]$ $2\pi$ periyotlu ise $f$ $L_2$'de yakınsayan Fourier serisi biçiminde gösterilebilir. $f$'nin Fourier serisi;*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

*dir. Burada $c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ şeklinde tanımlıdır.*

Yukarıdaki eşitlik $L_2$ anlamındadır. Yani,

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f(x) - \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx} \right\|_2 = 0$$

dır.

$f$ 'nin Fourier serisi gösteriminin önemli yanı, yukarıda da bahsedildiği gibi $\{e^{inx}\}$ sisteminin $\langle f,g\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ iç çarpımına göre ortogonal olması ve $\omega_n(x) = e^{inx}$ 'lerin hepsinin aynı $\omega(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ "sinüsoidal dalga"dan türetilmesidir. $\omega_n(x) = \omega(nx)$ fonksiyonları, $\omega(x) = e^{ix}$ 'in tamsayı genişlemeleridir. $n$ sayısı büyüdükçe $\omega_n(x) = \omega(nx)$ fonksiyonlarının frekansları (dalgalanmaları) artar.

Böylece, bir $f \in L_2[-\pi,\pi]$ fonksiyonunun Fourier serisi aslında; bu fonksiyonun farklı frekanslı sinüsoitlerin "$l_2$ lineer kombinasyonu" biçiminde gösterilmesidir.

Şimdi $f \in L_2(\mathbb{R})$ olsun. Yani $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ sağlansın. Böyle bir fonksiyon periyodik olamayacağından Fourier serisi biçiminde gösterilememektedir. Sinüsoidal dalgalar $L_2(\mathbb{R})$'den olmadığından, $f$ bunlar vasıtasıyla ifade edilemez. Her $f \in L_2(\mathbb{R})$ fonksiyonunu tek bir "dalga" fonksiyonu kullanarak seri veya integral biçiminde ifade edebilmek için bu dalga fonksiyonu öncelikle $|x| \to \infty$ için sıfıra gitmelidir. Söz konusu dalga fonksiyonuna $\Psi(x)$ dersek, $f$ 'yi bu $\Psi$ yardımıyla ifade edebilmek için hem kaymalardan hem de genişlemelerden yararlanmak gerekecektir. Yani $\Psi$ bir dalga fonksiyonu ise, $\Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ şeklindeki fonksiyonlar kullanılacaktır. Literatürde, "dalga fonksiyonu" ifadesi yerine "dalgacık fonksiyonu" ifadesi de sıkça kullanılmaktadır.

**Tanım 3.2** *$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|\, dx < \infty$ ve $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)dx = 0$ koşullarını sağlayan $\Psi$ fonksiyonuna esas dalgacık denir.*

Uygulamalarda çoğu zaman $\Psi$ dalgacık fonksiyonu hem kendisi hem de Fourier dönüşümü $\Psi^\wedge$ hızla sıfıra giden fonksiyon olarak tercih edilir. Bu özelliğe uygun olarak verilebilecek en iyi esas dalgacık örneği Gauss fonksiyonunun türevidir: $\Psi(x) = (e^{-x^2})'$ esas dalgacık fonksiyonu koşullarını sağlayan bir fonksiyon olup, aynı zamanda hem kendisi hem de Fourier dönüşümü hızla sıfıra giden bir fonksiyondur.

Amaca uygun şekilde belirlenen çeşitli dalgacık fonksiyonları tarafından üretilen integral dalgacık dönüşümleri vardır. Yalnız tek değişkenli değil çok değişkenli dalgacık fonksiyonlarının ürettiği integral dalgacık dönüşümleri de tanımlanmaktadır.

Tek değişkenli fonksiyonlar sınıfında yaygın olarak kullanılan klasik Dalgacık Dönüşümlerinden biri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$\Psi$ bir esas dalgacık olsun. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere, $\Psi_{b,a}$ fonksiyonu,

$$\Psi_{b,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

şeklinde tanımlansın. İntegralde değişken değişimi yapılarak $\|\Psi_{b,a}\|_2 = \|\Psi\|_2$ olduğu görülebilir.

$f \in L_2(\mathbb{R})$ olmak üzere, $\Psi$'nin doğurduğu İntegral Dalgacık Dönüşümü aşağıdaki ifadeye denir (Hernandez ve Weiss 1996):

$$(W_\Psi f)(b,a) := \langle f \, , \, \Psi_{b,a} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\Psi_{b,a}(x)}dx = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\Psi(\frac{x-b}{a})}dx \quad (3.1)$$

Burada, iki fonksiyonun iç çarpımı $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$ şeklinde tanımlıdır.

Şimdi, $(W_\Psi f)(b,a)$ integral dalgacık dönüşümüne uygun ters çevirme formülünü (Calderón Formülünü) ifade edelim.

**Teorem 3.3** *(Hernández ve Weiss 1996) $\Psi \in L_1 \cap L_2$ olup,*

$$c_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi^\wedge(v)|^2}{|v|} dv < \infty \quad (3.2)$$

*koşulunu sağlasın.*

*(a) Her $f \in L_2(\mathbb{R})$ için,*

$$f(x) = \frac{1}{c_\Psi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} [(W_\Psi f)(b,a)] \, \Psi_{b,a}(x) db \right) \frac{da}{a^2} \, ; \quad (3.3)$$

*dır (bu formül, Calderón Formülü diye adlandırılır).*

*(b) Her $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ için,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\Psi f)(b,a) \overline{(W_\Psi(g))\,(b,a)} db \frac{da}{a^2} = c_\Psi \, \langle f, g \rangle \, . \quad (3.4)$$

*dır.*

Burada, $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$ şeklinde tanımlıdır.

Teoremde $\Psi \in L_1(\mathbb{R})$ olduğundan $\Psi^\wedge$ fonksiyonu süreklidir. O halde (3.2) koşulunun gerçeklenebilmesi için $v = 0$ noktasında $\Psi^\wedge(0) = 0$ olmak zorundadır. Aksi halde (3.2)'deki integral ıraksar. O zaman,

$$0 = \Psi^\wedge(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) e^{-i.0.x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) dx$$

elde edilir. Dolayısıyla, teoremde verilen $\Psi$ fonksiyonunun esas dalgacık olduğu açıkça söylenmese de, (3.2) koşulundan onun bir esas dalgacık olduğu sonucu çıkar.

**Not 3.4** *$\Psi$ esas dalgacık fonksiyonu çift fonksiyon ise, onun Fourier dönüşümü de çift fonksiyon olur. Gerçekten;*

$$\begin{aligned}
\Psi^\wedge(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t)e^{-ixt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(-u)e^{ixu}du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(u)e^{-i(-x)u}du \\
&= \Psi^\wedge(-x)
\end{aligned}$$

*dir. O halde, (3.2) koşulundan,*

$$c_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi^\wedge(v)|^2}{|v|}dv = 2\int_{0}^{\infty} \frac{|\Psi^\wedge(x)|^2}{v}dv$$

*elde edilir. Bu durumda, Calderón Formülünde $a \in (-\infty, \infty)$ yerine, $a \in (0, \infty)$ yazılabilir ve Calderón Formülü şu hale gelir:*

$$f(x) = \frac{2}{c_\Psi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} [(W_\Psi f)(b,a)]\, \Psi_{b,a}(x)db\right)\frac{da}{a^2}\,. \tag{3.5}$$

(3.5)'te ve (3.3)'te $a$ parametresine göre integralin yakınsaması $L_2$ anlamındadır, yani; $0 < \varepsilon < \delta < \infty$ olmak üzere,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to\infty}} \left\| f(x) - \frac{2}{c_\Psi}\int_{\varepsilon}^{\delta}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(W_\Psi f)(b,a)\Psi_{b,a}(x)db\right]\frac{da}{a^2}\right\|_2 = 0$$

Yukarıda kullanılan esas dalgacık fonksiyonuna birtakım özel koşullar eklenerek tanımlanan (3.1) dalgacık dönüşümü ile (3.3) ve (3.5) Calderón formülleri daha simetrik şekiller alabilir. Söz konusu formüller $\mathbb{R}^n$'de de ifade edilebilir. Biz yalnız $n = 1$ durumu ile yetineceğiz.

$\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ fonksiyonu reel değerli ve $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun (başka bir ifadeyle, $\varphi$ fonksiyonu reel değerli esas dalgacık fonksiyonu olsun).

$\varphi_t(x)$ fonksiyonu, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\varphi_t(x) = \frac{1}{t}\varphi(\frac{x}{t})$ şeklinde tanımlansın. İntegralde değişken değişimi yapılarak her $t > 0$ için, $\|\varphi_t\|_1 = \|\varphi\|_1$ olduğu görülebilir.

**Tanım 3.5** *$\varphi$ reel değerli esas dalgacık ve $f \in L_2(\mathbb{R})$ olmak üzere, $\varphi$'nin doğurduğu İntegral Dalgacık Dönüşümü,*

$$(W_{\varphi_t}f)(x) = (\varphi_t * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_t(y)f(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi_t(x-y)dy \tag{3.6}$$

*şeklinde tanımlanır (Hernández ve Weiss 1996).*

Görüldüğü gibi İntegral Dalgacık Dönüşümü girişim tipli bir operatördür.

(3.6) dönüşümüne uygun ters çevirme yani, Calderón Formülü aşağıdaki teoremde ifade edildiği gibidir:

**Teorem 3.6** *(Hernández ve Weiss 1996) $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ reel değerli çift fonksiyon olup,*

$$\int_0^{\infty} [\varphi^\wedge(t)]^2 \frac{dt}{t} = 1 \tag{3.7}$$

*koşulunu sağlasın. O halde her $f \in L_2(\mathbb{R})$ için,*

$$f(x) = \int_0^{\infty} (\varphi_t * W_{\varphi_t}f)(x)\frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x)\frac{dt}{t} \tag{3.8}$$

*dir.*

(3.8)'deki eşitlik $L_2$ anlamındadır. Yani, $0 < \varepsilon < \delta < \infty$ için,

$$f_{\varepsilon,\delta}(x) = \int_{\varepsilon}^{\delta} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x)\frac{dt}{t} \tag{3.9}$$

denilirse,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to\infty}} \|f - f_{\varepsilon,\delta}\|_2 = 0 \tag{3.10}$$

dır.

### 3.2. Riesz-Bochner Çekirdeği ve Riesz-Bochner İntegrali

Bir $\delta > 0$ sayısı verilsin. $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\Phi(x) = \Phi^{(\delta)}(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} (1-|x|^2)^\delta & , & |x| \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & , & |x| > 1 \text{ ise} \end{array} \right\} \tag{3.11}$$

radial fonksiyonu tanımlansın. Burada $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ 'dir.
$\Phi \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ olduğu açıktır. $\Phi$ radial fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\varphi$ ile gösterilsin. Yani,

$$\varphi(x) = \Phi^\wedge(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t) e^{-2\pi i x t} dt$$

olsun. Dolayısıyla Not 2.12'den $\varphi$ fonksiyonu radialdir ve analitik ifadesi bilinmektedir (daha doğrusu, aşağıdaki lemmada verildiği gibi 1. tip Bessel fonksiyonu ile ifade edilmektedir).

**Lemma 3.7** *(Stein ve Weiss 1971 sf.171)*

$$\varphi(x) = \Phi^\wedge(x) = \frac{\Gamma(\delta+s)}{\pi^\delta} \frac{J_{\frac{n}{2}+\delta}(2\pi\,|x|)}{|x|^{\frac{n}{2}+\delta}}, \ (x \in \mathbb{R}^n) \ . \tag{3.12}$$

*dir.*

Yukarıdaki lemmada, $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$, $(s > 0)$ şeklinde tanımlı Gamma fonksiyonu olup $J_\lambda(t)$ aşağıda tanımı verilen 1. tip Bessel fonksiyonudur.

**Tanım 3.8** $\lambda > -\frac{1}{2}$ *ve* $s > 0$ *olmak üzere,*

$$J_\lambda(s) = \frac{(\frac{s}{2})^\lambda}{\Gamma(\frac{2\lambda+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int\limits_{-1}^{1} e^{ist}(1-t^2)^{\frac{(2\lambda-1)}{2}} dt \tag{3.13}$$

*ifadesine* $\lambda-$*mertebeli 1. tip Bessel fonksiyonu denir.*

**Lemma 3.9** *(Stein ve Weiss 1971 sf.158)* $J_\lambda$, *(3.13)'te tanımlanan 1. tip Bessel fonksiyonu olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır:*

*(a)* $s \to 0^+$ *için* $J_\lambda(s) \sim cs^\lambda$, $(c > 0)$;

*(b)* $s \to \infty$ *için* $J_\lambda(s) = O(\frac{1}{\sqrt{s}})$.

Yukarıdaki lemmada geçen $\sim$ ve $O$ gösterimleri şu anlamdadır:

$\lim\limits_{s\to 0^+} \frac{u(s)}{v(s)} = 1$ ise, $v(s) \sim u(s)$, $(s \to 0^+)$;

$s \to \infty$ için $\left|\frac{u(s)}{v(s)}\right|$ sınırlı ise, $u(s) = O(v(s))$, $(s \to \infty)$

dir.

$\varphi(x)$ fonksiyonu yardımıyla, bir $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Riesz-Bochner integralleri diye bilinen integraller ailesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

**Tanım 3.10** *$\varphi$ fonksiyonu yukarıdaki gibi verilmek üzere, her $t > 0$ için,*

$$\varphi_t(y) = \frac{1}{t^n}\varphi(\frac{1}{t}y),\ (y \in \mathbb{R}^n) \tag{3.14}$$

*tanımlansın. $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \le p < \infty)$ olmak üzere, $\varphi_t(y)$ ' nin doğurduğu*

$$B_t^{(\delta)} f(x) = (\varphi_t * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(y) f(x-y)dy,\ (t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n) \tag{3.15}$$

*integraline $f$ fonksiyonunun Riesz-Bochner integrali ve $\varphi_t(y)$ ' ye de Riesz-Bochner çekirdeği denir.*

Riesz-Bochner integralinin ve çekirdeğinin bazı önemli özellikleri aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir:

**Teorem 3.11** *(Stein ve Weiss 1971 sf.172, Karapınar 2006 sf.10) $\varphi_t(y)$ ve $B_t^{(\delta)} f(x)$ fonksiyonları sırasıyla, (3.14) ve (3.15) formülleriyle tanımlanan fonksiyonlar olsun. $\delta > 0$ parametresi $\delta > \frac{n-1}{2}$ koşulunu sağlarsa,*

*(a)*

$$(\varphi_t(.))^\wedge(\xi) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi y.\xi}\varphi_t(y)dy = \Phi(t\xi),\quad (t > 0, \xi \in \mathbb{R}^n) \tag{3.16}$$

*dir. Buradaki $\Phi$ fonksiyonu (3.11)'de tanımlanan fonksiyon olup,*

$$\Phi(t\xi) = \left\{ \begin{array}{ccc} (1 - t^2\left|\xi\right|^2)^\delta & , & |\xi| \le \frac{1}{t} \text{ ise} \\ 0 & , & |\xi| > \frac{1}{t} \text{ ise} \end{array} \right\} \tag{3.17}$$

*dir.*

*(b)* $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *ve her* $t > 0$ *için,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)dy = 1 \tag{3.18}$$

*sağlanır.*

*(c)* $\forall t > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ *ve* $f \in L_p$ *için*

$$\left\| B_t^{(\delta)} f \right\|_p \leq c_1 \left\| f \right\|_p \quad , \quad \left( c_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \, dx < \infty \right) \tag{3.19}$$

*eşitsizliği sağlanır.*

*(d)* $M_f$ *Tanım 2.3'te tanımlanan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu olmak üzere,* $1 \leq p \leq \infty$ *ve* $\forall f \in L_p$ *için,*

$$\sup_{t>0} \left| B_t^{(\delta)} f(x) \right| \leq A M_f(x) \quad , \quad (A = sabit) \tag{3.20}$$

*eşitsizliği sağlanır.*

*(e)* $1 \leq p \leq \infty$ *için,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| B_t^{(\delta)} f(x) \right| \leq \tilde{c} t^{-\frac{n}{p}} \left\| f \right\|_p \tag{3.21}$$

*dir. Burada* $\tilde{c} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}}$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ *olarak tanımlanmıştır.* $p = 1$ *için* $q = \infty$ *ve* $\tilde{c} = ess\sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\varphi(y)|$ *olur.*

*(f) Her* $f \in L_p$ *ve* $1 \leq p < \infty$ *için,*

$$\lim_{t \to 0} \left\| B_t^{(\delta)} f - f \right\|_p = 0 \tag{3.22}$$

*olur. Ayrıca,* $1 \leq p < \infty$ *için* $\lim_{t \to 0} B_t^{(\delta)} f(x) = f(x)$ *eşitliği* $f$ *'nin her Lebesgue noktasında (dolayısıyla h.h.*$x \in \mathbb{R}^n$ *için) sağlanır. Bundan başka, her* $f \in C_0$ *için* $\lim_{t \to 0} B_t^{(\delta)} f = f$ *yakınsaması düzgün yakınsama olur.*

**İspat.** (Stein ve Weiss 1971 sf.172, Karapınar 2006 sf.10)

**(a)** (3.12) formülüyle verilen $\varphi$ fonksiyonu $L_1(\mathbb{R}^n)$'nin elemanıdır. Bu, $\delta > \frac{n-1}{2}$ koşulundan ve $J_\lambda(t)$'nin asimptotik davranışından görülebilir. Böylece

(3.11)'de verilen $\Phi$ fonksiyonu ve onun Fourier dönüşümü olan $\varphi$ fonksiyonunun her ikisi de $L_1(\mathbb{R}^n)$'nin elemanı olan sürekli fonksiyonlardır. O halde, Lemma 3.7'den,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi y.\xi}\varphi(y)dy = \Phi(\xi) \tag{3.23}$$

eşitliği her $\xi \in \mathbb{R}^n$ için sağlanır. Ayrıca, $\varphi$ ve $\Phi$ radial fonksiyonlar olduğundan, (3.16) formülü elde edilir.

(b) (3.16) formülünde $\xi = 0$ ve (3.11)'de $x = 0$ alınıp integralde gerekli değişken değişimi yapılırsa,

$$1 = \Phi(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n}\varphi(\frac{1}{t}y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)du$$

olur ve istenen eşitlik elde edilir.

(c) Teorem 2.8'deki genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \left\| B_t^{(\delta)} f \right\|_p &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(y)| \, \|f\|_p \, dy \\ &= \|f\|_p \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(y)| \, dy \\ &= \|f\|_p \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n} \left|\varphi(\frac{1}{t}y)\right| dy \\ &= \|f\|_p \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \, dx \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\delta > \frac{n-1}{2}$ için $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olduğundan,

$$c_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \, dx < \infty$$

olur. Bu, son eşitlikte yerine konulursa,

$$\left\| B_t^{(\delta)} f \right\|_p \leq c_1 \, \|f\|_p$$

elde edilir.

(d) $J_\lambda(t)$ 1. tip Bessel fonksiyonunun Lemma 3.9'daki asimptotik davranışı nedeniyle yeterince büyük $x$'ler için (3.12)'den,

$$|\varphi(x)| \leq c(n,\delta)\frac{1}{|x|^{\frac{n+1}{2}+\delta}}$$

elde edilir. $\delta > \frac{n-1}{2}$ olduğundan $\frac{n+1}{2} + \delta > n$ olur ve buradan da $|\varphi(x)|$ fonksiyonunun azalan, integrallenebilir ve radial bir majoranta sahip olduğu söylenebilir. Yani,

$$\psi(x) \equiv \sup_{y:|y|\geq|x|} |\varphi(y)|$$

alınırsa, $\psi(x)$ radial ve $\mathbb{R}^n$'de integrallenebilir bir fonksiyon olup $|x| \to \infty$ için azalandır.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx \equiv A$$

denirse, $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için, Teorem 2.5-(a)'dan,

$$\sup_{t>0} \left| B_t^{(\delta)} f(x) \right| = \sup_{t>0} |(\varphi_t * f)(x)| \leq AM_f(x)$$

elde edilir.

**(e)** Teorem 2.9'da verilen Hölder Eşitsizliği kullanılırsa, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\left| B_t^{(\delta)} f(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(y)| \, |f(x-y)| \, dy \leq \|f\|_p \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.24}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki integralde, $y = tx$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{t^{\frac{n}{q}}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.25}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $\varphi \in L_q(\mathbb{R}^n)$ olduğundan, $\tilde{c} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}}$ denirse, $\tilde{c} < \infty$ olur. Sonuç olarak, (3.24) ve (3.25) kullanılarak, (3.21) eşitsizliğine ulaşılmış olur. Yani,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| B_t^{(\delta)} f(x) \right| \leq \tilde{c} t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_p \ , \quad \tilde{c} < \infty$$

dır.

**(f)** Her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ için, Teorem 2.5-(c)'den,

$$\lim_{t\to 0} \|f * \varphi_t - f\|_p = 0$$

olur.

Yine Teorem 3.8-(b)'den, $\lim_{t\to 0}(f * \varphi_t)(x) = f(x)$ eşitliği $f$'nin her Lebesgue noktasında (dolayısıyla $h.h.h.$ $x \in \mathbb{R}^n$ noktasında) sağlanır. Yukarıda (3.15) formülündeki Riesz-Bochner integrali tanımı yerine yazılırsa,

$$\lim_{t\to 0}\left\|B_t^{(\delta)} f - f\right\|_p = 0$$

eşitliğine ve teoremin (f) maddesindeki diğer iddialara ulaşılmış olur. ■

# 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Çalışmamızın bu bölümünde, yarı-grup özelliğine sahip olmayan Riesz-Bochner integral ailesi, bir dalgacık tipli fonksiyon ve ağırlık fonksiyonu kullanılarak bir dalgacık tipli dönüşüm tanımlanacaktır. Sonra, yeni dönüşüme uygun ters bulma formülü yani, Calderón Formülü verilip ispatlanacaktır.

## 4.1. Riesz-Bochner Çekirdeğinin Doğurduğu Bir Dalgacık Tipli Dönüşüm ve Calderón Formülü

$g(t)$, $[0,\infty)$'da integrallenebilir bir fonksiyon olup,

$$\int_0^\infty |\ln t|\,|g(t)|\,dt < \infty \tag{4.1}$$

ve

$$\int_0^\infty g(t)dt = 0 \tag{4.2}$$

sağlansın. Bu özelliğe sahip $g$'ye bir dalgacık tipli fonksiyon diyeceğiz. Bu $g(t)$ fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki gibi bir fonksiyon tanımlayalım:

$$K(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(\eta)d\eta\ , \quad (0 < \tau < \infty) \tag{4.3}$$

**Lemma 4.1** *(Aliev ve Rubin 2002) $K(\tau)$, (4.3) formülünde tanımlanan fonksiyon olmak üzere, $K(\tau) \in L_1(0,\infty)$ ve $\int_0^\infty K(\tau)d\tau = \int_0^\infty \left(\ln\frac{1}{\eta}\right) g(\eta)d\eta = -\int_0^\infty (\ln\eta)\, g(\eta)d\eta$ dır.*

**İspat.** $\int_0^\infty g(\eta)d\eta = 0$ olduğundan, her $\tau > 0$ için,

$$\int_0^\tau g(\eta)d\eta = -\int_\tau^\infty g(\eta)d\eta \Longrightarrow \left|\int_0^\tau g(\eta)d\eta\right| = \left|\int_\tau^\infty g(\eta)d\eta\right| \tag{4.4}$$

dır ve dolayısıyla (4.3)'ten,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |K(\tau)|\, d\tau &= \int_0^\infty \frac{1}{\tau}\left|\int_0^\tau g(\eta)d\eta\right| d\tau = \int_0^1 \frac{1}{\tau}\left|\int_0^\tau g(\eta)d\eta\right| d\tau \\
&+ \int_1^\infty \frac{1}{\tau}\left|\int_\tau^\infty g(\eta)d\eta\right| d\tau \\
&\le \int_0^1 \frac{1}{\tau}\left(\int_0^\tau |g(\eta)|\, d\eta\right) d\tau + \int_1^\infty \frac{1}{\tau}\left(\int_\tau^\infty |g(\eta)|\, d\eta\right) d\tau \\
&= \int_0^1 |g(\eta)| \left(\int_\eta^1 \frac{1}{\tau} d\tau\right) d\eta + \int_1^\infty |g(\eta)| \left(\int_1^\eta \frac{1}{\tau} d\tau\right) d\eta \\
&= \int_0^1 |g(\eta)|\,(-\ln\eta)\, d\eta + \int_1^\infty |g(\eta)| \ln\eta d\eta \\
&= \int_0^1 |g(\eta)|\, |\ln\eta|\, d\eta + \int_1^\infty |g(\eta)|\, |\ln\eta|\, d\eta \\
&= \int_0^\infty |g(\eta)|\, |\ln\eta|\, d\eta \overset{(4.1)}{<} \infty
\end{aligned}$$

elde edilir.Yani, $K(\tau) \in L_1(0,\infty)$'dur.

Yine $\int_0^\tau g(\eta)d\eta = -\int_\tau^\infty g(\eta)d\eta$ eşitliği kullanılarak şunlar yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty K(\tau)d\tau &= \int_0^1 \frac{1}{\tau}\left(\int_0^\tau g(\eta)d\eta\right) d\tau - \int_1^\infty \frac{1}{\tau}\left(\int_\tau^\infty g(\eta)d\eta\right) d\tau \\
&= \int_0^1 g(\eta)\left(\int_\eta^1 \frac{1}{\tau}d\tau\right) d\eta - \int_1^\infty g(\eta)\left(\int_1^\eta \frac{1}{\tau}d\tau\right) d\eta \\
&= \int_0^1 g(\eta)(-\ln\eta)d\eta - \int_1^\infty g(\eta)\ln\eta d\eta \\
&= \int_0^\infty (-\ln\eta)g(\eta)d\eta \\
&= \int_0^\infty \left(\ln\frac{1}{\eta}\right) g(\eta)d\eta\ .
\end{aligned}$$

Yani,

$$\int_0^\infty K(\tau)d\tau = \int_0^\infty (-\ln\eta)g(\eta) = \int_0^\infty \left(\ln\frac{1}{\eta}\right) g(\eta)d\eta$$

dır. ■

$\rho(\beta) \geq 0$ "ağırlık" fonksiyonu $[0,\infty)$'da sürekli, sınırlı ve $\lim\limits_{\beta\to 0^+}\rho(\beta) = 1$ koşulunu sağlayan fonksiyon olsun (örneğin, $\rho(\beta) = e^{-a\beta}$, $(a > 0)$; $\rho(\beta) = e^{-a\beta^2}$, $(a > 0)$; $\rho(\beta) = \frac{\sin\beta}{\beta}$, $(\rho(0) = 1)$; $\rho(\beta) = \frac{\ln(1+\beta)}{\beta}$, $(\rho(0) = 1)$ vs. olarak alınabilir).

Şimdi, $f \in L_p$, $(0 \leq p < \infty)$ olmak üzere, (3.15)'te tanımlanan $B_t^{(\delta)} f$ integraller ailesi ile (4.1) ve (4.2) koşullarını sağlayan $g$ fonksiyonu ve $\rho$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak bir integral dönüşümü tanımlayalım:

$$(Tf)(x,t) = \int_0^\infty \rho(t\eta)B_{t\eta}^{(\delta)} f(x)g(\eta)d\eta \tag{4.5}$$

Bu dönüşüme Riesz-Bochner integrali ile $g$ dalgacık tipli fonksiyon ve $\rho$ ağırlık fonksiyonunun ürettiği **ağırlıklı dalgacık tipli dönüşüm** diyeceğiz.

$g$ dalgacık tipli fonksiyon ile $\rho \geq 0$ fonksiyonunun farklı seçimi farklı ağırlıklı dalgacık tipli dönüşümler elde etmeye olanak sağlar.

**Lemma 4.2** *(4.5)'te tanımlanan $Tf$ lineer bir operatör olup, her $t > 0$ için $L_p \to L_p$ sınırlıdır.*

**İspat.** Sabitlenmiş her $t > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ve $f_1, f_2 \in L_p$ için,

$T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x,t) = \int\limits_0^\infty \rho(t\eta)B_{t\eta}^{(\delta)}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x)g(\eta)d\eta =$ (Riesz-Bochner integral operatörü lineer olduğundan) $= (\alpha_1 Tf_1 + \alpha_2 Tf_2)(x,t)$ olur. Buradan, $T$'nin lineer olduğu görülür.

Sınırlılık (Teorem 2.8) Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliğinden çıkar. Gerçekten, yine $t > 0$ sabit tutulsun. Teorem 3.11-(c)'den,

$$\|Tf\|_p \leq \int_0^\infty \rho(t\eta)\left\|B_{t\eta}^{(\delta)} f\right\|_p |g(\eta)|\, d\eta \leq c_1 \|f\|_p \int_0^\infty |g(\eta)|\, d\eta \leq c_2 \|f\|_p$$

dir. Sonuç olarak her $f \in L_p$ için $Tf$ anlamlıdır. ■

Dalgacık tipli fonksiyona birkaç örnek verelim:

**1.** $g(t) = e^{-t}(1-t)$, $(0 \leq t < \infty)$ alınsın. $\int\limits_0^\infty |g(t)|\,dt < \infty$ olup $g \in L_1(0,\infty)$'dur. Bundan başka, $\int\limits_0^\infty |\ln t|\,|g(t)|\,dt < \infty$ ve $\int\limits_0^\infty e^{-t}(1-t)dt = 0$ olduğundan, (4.1) ve (4.2) koşulları sağlanır.

**2.**

$$g(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} c & , & 0 \leq t \leq 1 \\ -c & , & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & , & 2 \leq t < \infty \end{array} \right\}, \ (c > 0)$$

olsun. $g \in L_1(0,\infty)$ olduğu açıkça görülür. $\int\limits_0^\infty |\ln t|\,|g(t)|\,dt < \infty$ ve $\int\limits_0^\infty g(t)dt = \int\limits_0^1 cdt - \int\limits_1^2 cdt = 0$ olup (4.1) ve (4.2) koşulları sağlanır.

**3.** $h(t)$, $\mathbb{R}^1$'de tanımlanmış Lizorkin sınıfından bir fonksiyon olsun (yani, $h$ Schwartz uzayından olsun ve her $k = 0,1,2,...$ için $h^{(k)}(0) = 0$ olsun).

Örneğin,

$$h(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} e^{-t^2-\frac{1}{t^2}} & , & t \neq 0 \\ 0 & , & t = 0 \end{array} \right\}$$

olsun ve $g(t) = h'(t)$ diyelim. $\int\limits_0^\infty |g(t)|\,dt < \infty$ ve $\int\limits_0^\infty |\ln t|\,|g(t)|\,dt < \infty$ 'dur.
Ayrıca, $\int\limits_0^\infty g(t)dt = \int\limits_0^\infty h'(t)dt = h(\infty) - h(0) = 0$ olduğundan, gerekli tüm koşullar sağlanır.

**4.** $0 \leq t \leq 1$ için $B_n(t)$, $n$ dereceli Bernoulli polinomu olsun. Her $n = 1,2,3,...$ için, $\int\limits_0^1 B_n(t)dt = 0$, $(n = 1,2,...)$'dir (Stein ve Shakarchi 2003 sf.180).

$$g(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} B_n(t) & , & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , & t > 1 \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanan $g \in L_1$'dir. Ayrıca, $\int\limits_0^\infty |\ln t|\,|g(t)|\,dt = \int\limits_0^1 |\ln t|\,|g(t)|\,dt < \infty$ ve $\int\limits_0^\infty g(t)dt = \int\limits_0^1 B_n(t)dt = 0$ olur. Buradan da $g$ fonksiyonu için gerekli koşulların sağlandığı görülür.

**5.** $0 < a < b < \infty$ olmak üzere, $[a,b]$'de sürekli herhangi bir $h(t)$ fonksiyonu alınsın.

$$g(t) = \left\{ \begin{array}{lll} h(t) - \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b h(x)dx & , & a \leq t \leq b \\ 0 & , & \textit{diğer } t\textit{'ler} \end{array} \right\}$$

tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty g(t)dt &= \int\limits_a^b \left( h(t) - \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b h(x)dx \right) dt \\ &= \int\limits_a^b h(t)dt - \frac{1}{b-a}(b-a)\int\limits_a^b h(x)dx = 0 \end{aligned}$$

sağlanır.

Ayrıca $\int\limits_0^\infty |\ln t|\, |g(t)|\, dt = \int\limits_0^1 |\ln t|\, |g(t)|\, dt < \infty$ sağlandığı da açıktır.

Bu son örnekteki $h$ fonksiyonu yerine sürekli olan her fonksiyon yazılabilir ve bu sayede de birçok farklı dalgacık tipli fonksiyon türetilebilir.

Şimdi, (4.5) formülü ile tanımlanan $Tf$ ağırlıklı dalgacık tipli dönüşümüne uygun Calderón tipli formül yani, ters çevirme formülü elde etmek için bazı hazırlıklar yapılacaktır.

**Lemma 4.3** *(Stein ve Weiss 1971 sf.60)* $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, *$L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir fonksiyonlar ailesine etki eden lineer operatörler ailesi olsun. Her $h \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için $(Mh)(x) = \sup\limits_{\varepsilon>0} |(T_\varepsilon h)(x)|$ eşitliği ile $M$ operatörü tanımlansın. Her $h \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\alpha > 0$ için*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : (Mh)(x) > \alpha\}| \leq \left( \frac{A\,\|h\|_p}{\alpha} \right)^q$$

*sağlanacak biçimde $A > 0$ ve $q \geq 1$ sabitleri var olsun. $L_p(\mathbb{R}^n)$'nin bir yoğun alt kümesinden alınmış her $g$ fonksiyonu için $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon g)(x)$ limiti var ve sonlu ise, her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ için de h.h.h. $x$ noktasında $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon f)(x)$ limiti var ve sonludur.*

$T$ operatörü (4.5)'teki gibi verilsin. Bir $\varepsilon > 0$ ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ alınsın. $\varepsilon$ parametresine bağlı aşağıdaki operatörler ailesi tanımlayalım:

$$A_\varepsilon f(x) = \int_\varepsilon^\infty (Tf)(x,t)\frac{dt}{t}. \tag{4.6}$$

Her $\varepsilon > 0$ için $A_\varepsilon : L_p \to L_p$ sınırlı bir operatördür. Gerçekten; aşağıda Lemma 4.4'ün ispatında,

$$|A_\varepsilon f(x)| \leq c_3 M_f(x)$$

eşitsizliği elde edilecektir. O halde, Teorem 2.4-(b)'den,

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon f\|_p &\leq c_3 \|M_f\|_p \\ &\leq c_3 A_p \|f\|_p \ , \quad c_3, A_p = \text{sabit} \end{aligned}$$

bulunur. $f \in L_p$ olduğundan, $A_\varepsilon f$ operatörü sınırlı bir operatördür.

Şimdi, yukarıda (4.5) formülü ile verilen $Tf$ operatörü ve Fubini Teoremi kullanılarak $A_\varepsilon f$ operatörü ile ilgili bazı dönüşümler yapalım:

$$\begin{aligned} A_\varepsilon f(x) &= \int_\varepsilon^\infty \left( \int_0^\infty \rho(t\eta) B_{t\eta}^{(\delta)} f(x) g(\eta) d\eta \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty g(\eta) \left( \int_\varepsilon^\infty \rho(t\eta) B_{t\eta}^{(\delta)} f(x) \frac{dt}{t} \right) d\eta \quad \left(t = \frac{\varepsilon\tau}{\eta} \text{ dönüşümü yapılırsa}\right) \\ &= \int_0^\infty g(\eta) \left( \int_\eta^\infty \rho(\varepsilon\tau) B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)} f(x) \frac{d\tau}{\tau} \right) d\eta \quad (0 \leq \eta < \tau < \infty \text{ olduğundan}) \\ &= \int_0^\infty \rho(\varepsilon\tau) B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)} f(x) \left( \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(\eta) d\eta \right) d\tau \\ &= \int_0^\infty \rho(\varepsilon\tau) B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)} f(x) K(\tau) d\tau \ . \end{aligned}$$

Burada $K(\tau)$, (4.3) ile tanımlı olup $K \in L_1$'dir.

Böylece,

$$A_\varepsilon f(x) = \int_0^\infty \rho(\varepsilon\tau) B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)} f(x) K(\tau) d\tau, \quad (\varepsilon > 0) \tag{4.7}$$

dır. $c=\int\limits_0^\infty K(\tau)d\tau$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_\varepsilon f(x)-cf(x) &= \int\limits_0^\infty (\rho(\varepsilon\tau)-1)B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)}f(x)K(\tau)d\tau+\int\limits_0^\infty B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)}f(x)K(\tau)d\tau \\ &\quad -\int\limits_0^\infty f(x)K(\tau)d\tau \\ &= \int\limits_0^\infty (\rho(\varepsilon\tau)-1)B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)}f(x)K(\tau)d\tau \\ &\quad +\int\limits_0^\infty \left(B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)}f(x)-f(x)\right)K(\tau)d\tau \end{aligned}$$

dır. Yani,

$$\begin{aligned} A_\varepsilon f(x)-cf(x) &= \int\limits_0^\infty (\rho(\varepsilon\tau)-1)B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)}f(x)K(\tau)d\tau \\ &\quad +\int\limits_0^\infty \left(B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)}f(x)-f(x)\right)K(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. Şimdi yukarıdaki eşitliklerde Fubini Teoreminin uygulanabilmesi için gerekli koşulların sağlandığını kontrol edelim:

$$D_\varepsilon f(x)=\int\limits_\varepsilon^\infty\left(\int\limits_0^\infty\left|\rho(t\eta)B_{t\eta}^{(\delta)}f(x)g(\eta)\right|d\eta\right)\frac{dt}{t}$$

ifadesinin $h.h.h.$ $x\in\mathbb{R}^n$ için sonlu olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için,

$1\le p<\infty$ ve $f\in L_p$ olmak üzere,

$$D_\varepsilon^{(1)}f(x)=\int\limits_\varepsilon^\infty\left(\int\limits_0^{\frac{1}{t}}\left|\rho(t\eta)B_{t\eta}^{(\delta)}f(x)g(\eta)\right|d\eta\right)\frac{dt}{t}$$

ve

$$D_\varepsilon^{(2)}f(x)=\int\limits_\varepsilon^\infty\left(\int\limits_{\frac{1}{t}}^\infty\left|\rho(t\eta)B_{t\eta}^{(\delta)}f(x)g(\eta)\right|d\eta\right)\frac{dt}{t}$$

dersek, $h.h.h.$ $x$ için, $D_\varepsilon^{(1)}f(x)$ ve $D_\varepsilon^{(2)}f(x)$ 'nin sonlu olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Teorem 3.11-(d)'den,

$$\sup_{t>0}\left|B_t^{(\delta)}f(x)\right| \leq AM_f(x)$$

sağlanır. $f \in L_p$, $(1 \leq p < \infty)$ olduğundan, $M_f(x)$, $h.h.h.$ $x$ için sonludur. Ayrıca, $\sup_{t>0}|\rho(t)| = c_1$ denirse,

$$\begin{aligned}
D_\varepsilon^{(1)}f(x) &\leq Ac_1M_f(x)\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{t}\left(\int_0^{\frac{1}{t}}|g(\eta)|\,d\eta\right)dt \quad (t=\frac{1}{r}\text{ dönüşümü yapılırsa})\\
&= Ac_1M_f(x)\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{r}\left(\int_0^{r}|g(\eta)|\,d\eta\right)dr \quad (0<\eta<r<\frac{1}{\varepsilon})\\
&= Ac_1M_f(x)\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}|g(\eta)|\left(\int_\eta^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{r}dr\right)d\eta\\
&= Ac_1M_f(x)\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}-\ln\eta\right)|g(\eta)|\,d\eta\\
&= Ac_1M_f(x)\left[\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}|g(\eta)|\,d\eta+\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\left|\ln\frac{1}{\eta}\right||g(\eta)|\,d\eta\right]\\
&< \infty
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan, $1 \leq p < \infty$ için, (3.21) eşitsizliğinden, $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|B_t^{(\delta)}f(x)\right| \leq \tilde{c}t^{-\frac{n}{p}}\|f\|_p$ 'dir. O halde,

$$\begin{aligned}
D_\varepsilon^{(2)}f(x) &< \tilde{c}c_1\|f\|_p\int_\varepsilon^\infty\frac{1}{t}\left(\int_{\frac{1}{t}}^\infty|g(\eta)|\,d\eta\right)t^{-\frac{n}{p}}dt\\
&= \tilde{C}\int_\varepsilon^\infty\frac{1}{t^{1+\frac{n}{p}}}\left(\int_{\frac{1}{t}}^\infty|g(\eta)|\,d\eta\right)dt\\
&\leq \tilde{C}\int_0^\infty|g(\eta)|\,d\eta\int_\varepsilon^\infty\frac{1}{t^{1+\frac{n}{p}}}dt\\
&= \tilde{C}\frac{p}{n\varepsilon^{\frac{n}{p}}}\int_0^\infty|g(\eta)|\,d\eta\\
&< \infty
\end{aligned}$$

bulunur ve istenilen elde edilmiş olur. Yani, Fubini Teoremi uygulanabilir.

**Lemma 4.4** *$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $A_\varepsilon f$ , (4.5) formülü ile tanımlanan operatörler ailesi olsun. $\tilde{A}f(x) = \sup\limits_{\varepsilon>0} |A_\varepsilon f(x)|$ şeklinde bir maksimal operatör tanımlayalım. O halde, $\tilde{A}$ operatörü $(p,p)$ zayıf tiplidir.*

**İspat.** (4.7) eşitliği ve Teorem 3.11-(d) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} |A_\varepsilon f(x)| &= \left| \int_0^\infty \rho(\varepsilon\tau) B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)} f(x) K(\tau) d\tau \right| \\ &\leq c_1 \sup_{t>0} \left| B_t^{(\delta)} f(x) \right| \int_0^\infty |K(\tau)|\, d\tau \\ &= c_2 \sup_{t>0} \left| B_t^{(\delta)} f(x) \right| \\ &\leq c_3 M_f(x) \end{aligned}$$

olur. Burada $M_f(x)$, $f$ 'nin Hardy-Littlewood maksimal operatörüdür. Not 2.7'den, $M_f$ maksimal operatörü her $p \geq 1$ için $(p,p)$ zayıf tiplidir. Ayrıca, son bulunan eşitsizlik de kullanılırsa, her $\varepsilon > 0$ için,

$$|A_\varepsilon f(x)| \leq c_3 M_f(x) \Rightarrow \tilde{A}f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |A_\varepsilon f(x)| \leq c_3 M_f(x)$$

elde edilir ki bu da $\tilde{A}f = \sup\limits_{\varepsilon>0} |A_\varepsilon f|$ operatörünün $(p,p)$ zayıf tipli olduğunu gösterir. ■

Yukarıda yapmış olduğumuz hazırlıklardan sonra, şimdi, (4.5) formülüyle tanımlanan $Tf$ ağırlıklı dalgacık tipli dönüşüm için uygun Calderón Formülü bir teorem şeklinde ifade edilebilir.

**Teorem 4.5** *$Tf$, (4.5)'teki gibi tanımlansın ve $[0,\infty)$'da integrallenebilen $g$ dalgacık tipli fonksiyonu (4.1) ve (4.2) koşullarını sağlasın. Yani,*

$$\int_0^\infty |\ln t|\, |g(t)|\, dt < \infty \quad ve \quad \int_0^\infty g(t) dt = 0 \tag{4.9}$$

*olsun. O halde her $f \in L_p$, $(1 \leq p \leq \infty)$ için,*

$$\int_0^\infty Tf(x,t) \frac{dt}{t} \equiv \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^\infty Tf(x,t) \frac{dt}{t} = cf(x) \tag{4.10}$$

*dir. Burada,* $c = \int\limits_0^\infty K(\tau)d\tau = \int\limits_0^\infty \left(\ln\frac{1}{\eta}\right) g(\eta)d\eta = -\int\limits_0^\infty (\ln\eta)\, g(\eta)d\eta$ *'dir. Limit hem h.h.h.* $x$ *için hem de* $L_p$ *normu anlamındadır. Ayrıca bir* $1 \leq q < \infty$ *için,* $f \in L_q \cap C_0$ *olursa, (4.10)'daki yakınsama düzgün olur.*

**İspat.** İlk olarak, $L_p$ anlamındaki yakınsama gösterilecektir.

(4.6) formülüyle tanımlanan $A_\varepsilon f$ operatörler ailesini ele alalım. Yukarıda yapılan işlemler sonucu (4.8) formülü elde edilmişti. Buna göre, her $\varepsilon > 0$ için,

$$A_\varepsilon f(x) - cf(x) = \int\limits_0^\infty (\rho(\varepsilon\tau) - 1)B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)} f(x)K(\tau)d\tau + \int\limits_0^\infty \left(B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)} f(x) - f(x)\right) K(\tau)d\tau$$

sağlanmaktadır. Şimdi, $1 \leq p < \infty$ için Minkowski Eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon f(x) - cf(x)\|_p &\leq \int\limits_0^\infty |1 - \rho(\varepsilon\tau)| \left\|B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)} f(x)\right\|_p |K(\tau)|\, d\tau \\ &\quad + \int\limits_0^\infty \left\|B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)} f - f\right\|_p |K(\tau)|\, d\tau \\ &\equiv I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Teorem 3.11-(c)'den

$$|1 - \rho(\varepsilon\tau)| \left\|B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)} f(x)\right\|_p |K(\tau)| \leq c_1 \|f\|_p |K(\tau)|$$

bulunur. Burada, Lemma 4.1'den $K(\tau) \in L_1(0,\infty)$ ve $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(1 - \rho(\varepsilon\tau)) = 0$ olup, (Teorem 2.1) Lebesgue Baskın Yakınsama teoreminin koşulları sağlanmış olur. O halde,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_1(\varepsilon) = 0$$

dır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \left\|B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)} f - f\right\|_p |K(\tau)| &\leq \left(\left\|B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)} f\right\|_p + \|f\|_p\right) |K(\tau)| \\ &\leq c_2 \|f\|_p |K(\tau)| \end{aligned}$$

dır. Burada yine Lemma 4.1'den $K(\tau) \in L_1(0,\infty)$ ve Teorem 3.3.11-(f)'den $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\|B_{\varepsilon\tau}^{(\delta)} f - f\right\|_p = 0$ olduğundan, Teorem 2.1'den,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_2(\varepsilon) = 0$$

dır.

(4.11)'de $p = \infty$ alınırsa ve bir $q$ için $f \in C_0 \cap L_q$ varsayılırsa, $\varepsilon \to 0$ için $A_\varepsilon f$ ailesinin $cf$ 'e tüm $\mathbb{R}^n$'de düzgün yakınsadığı görülür.

Böylece, $1 \leq p < \infty$ için $A_\varepsilon f$ ailesinin $cf$ 'e $L_p$ normunda yakınsadığı ve $f \in C_0 \cap L_q$ olmak üzere, $p = \infty$ durumunda da düzgün yakınsadığı gösterildi.

Şimdi de $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_p$ için (4.10) limitinin var olduğu ve eşitliğin $h.h.h.$ $x$ için sağlandığını gösterelim.

$$\sup_{\varepsilon > 0} |A_\varepsilon f(x)| \leq c_3 M_f(x)$$

eşitsizliği kanıtlanarak, $\tilde{A} f = \sup_{\varepsilon > 0} |A_\varepsilon f|$ operatörünün $(p, p)$ zayıf tipli olduğu gösterilmişti. Dahası, $f \in C_0 \cap L_p$ olması halinde

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon f(x) = cf(x)$$

eşitliği her $x \in \mathbb{R}^n$ için sağlandığından, (hatta yakınsamanın düzgün olduğu yukarıda gösterildi) ve $C_0 \cap L_p$ kümesi $L_p$'de yoğun olduğundan, Lemma 4.3'e göre her $f \in L_p$ $(1 \leq p < \infty)$ için,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon f(x) = cf(x)$$

eşitliği $h.h.h.$ $x \in \mathbb{R}^n$ için de sağlanacaktır.

Böylece teoremin ispatı bitmiş oldu. ■

## 5. SONUÇ

$\varphi$ fonksiyonu (3.11)'de tanımladığımız $\Phi$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olmak üzere,

$$\varphi_t(y) = \frac{1}{t^n}\varphi\left(\frac{1}{t}y\right), \quad (y \in \mathbb{R}^n)$$

şeklinde tanımlanan Riesz-Bochner çekirdekleri ailesinin doğurduğu Riesz-Bochner integralleri,

$$B_t^{(\delta)} f(x) = (\varphi_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(y) f(x-y)dy, \ (t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n)$$

şeklinde tanımlanır. Bir yaklaşık birim operatör olan Riesz-Bochner integralleri ailesinin Harmonik Analizde çeşitli uygulamaları bilinmektedir.

Bu tez çalışmasında, $f \in L_p$, $(0 \leq p < \infty)$ olmak üzere, $B_t^{(\delta)} f$ Riesz-Bochner integrali, $\rho(\beta) \geq 0$ ağırlık fonksiyonu ve $g(t)$ dalgacık tipli fonksiyonun ürettiği,

$$(Tf)(x,t) = \int_0^\infty \rho(t\eta) B_{t\eta}^{(\delta)} f(x) g(\eta) d\eta$$

"ağırlıklı dalgacık tipli dönüşüm" tanımlanarak özellikleri incelenmiştir. Burada, $\rho(\beta) \geq 0$ fonksiyonu $[0,\infty)$'da sürekli, sınırlı ve $\lim_{\beta \to 0^+} \rho(\beta) = 1$ koşulunu sağlayan ve $g$ dalgacık tipli fonksiyon $L_1[0,\infty)$'dan olup, $\int_0^\infty |\ln t| \, |g(t)| \, dt < \infty$ ve $\int_0^\infty g(t)dt = 0$ koşullarını sağlayan fonksiyonlardır. Bu dönüşümde kullanılan integraller ailesinin yarı-grup özelliğine sahip olmaması, sunduğumuz İntegral Dalgacık Dönüşümü tanımını, Aliev-Rubin (2005) makalesindeki tanımdan farklı kılmıştır. Yukarıdaki $(Tf)(x,t)$ dalgacık tipli dönüşüme uygun gelen ters çevirme formülü (Calderón tipli formül)

$$\int_0^\infty (Tf)(x,t)\frac{dt}{t} \equiv \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^\infty (Tf)(x,t)\frac{dt}{t} = cf(x)$$

şeklinde ifade edilerek kanıtlanmıştır.

Değişik dalgacık tipli dönüşümlere uygun gelen Calderón tipli ters dönüşüm formüllerinin Harmonik Analiz ve onun uygulamalarında geniş şekilde kullanıldığı bilinmektedir. Bu nedenle, bizim çalışmamızda elde ettiğimiz Calderón tipli formülün de uygulama alanı bulacağı kanısındayız.

## 6. KAYNAKLAR


ALIEV, I.A. and RUBIN, B. 2002. Parabolic Wavelet Transforms and Lebesgue Spaces of Parabolic Potentials, *Rocky Mountain J. Math.*, 32, 391-408.

ALIEV, I.A. and RUBIN, B. 2005. Wavelet-Like Transforms for Admissible Semi-groups, Inversion Formulas for Potentials and Radon Transforms, Journal of Fourier Analysis and Applications, 11, No 3, 333-352.

ALIEV, I. A. and ERYIGIT, M. 2004. Bessel Potansiyellerinin Dalgacık Dönüşümleri (Wavelet Transforms) Kullanılarak İncelenmesi, *Math. Nachr.*, 242, 27-37.

ALIEV, I.A. 2009. *Bi-parametric Potentials, Relevant Function Spaces and Wavelet-Like Transforms*, Inteagral Equations and Operator Theory.

CHUI, C.K. 1992. An Introduction to Wavelets, Academic Press., New York.

FOLLAND, G. B. 1992. Fourier Analysis and It's Applications, Univ. of Washington, Pasific Grove, California.

FOLLAND, G. B. 1984. Real Analysis, Modern Techniquies and Their Applications. John Wiley and Sons, New York.

HERNÁNDEZ, E. and WEISS, G. 1996. A First Course on Wavelets, CRC Press LLC, New York.

KARAPINAR, G. 2006. Bochner-Riesz İntegrali Yardımıyla Riesz Potansiyellerinin Yaklaşım Özelliklerinin İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Akd. Ünv., FBE.

KUROKAWA, T. 1981. On the Riesz and Bessel Kernels as Approximations of the Identity, Sci. Rep. Kagoshima Univ.

RUBIN, B. 1996. Fractional Integrals and Potentials, Pitman Monographs and Survey in Pure and Applied Mathematics, Longman, Harlow.

SADOSKY, C. 1979. Interpolation of Operators and Singular Integrals. Marcel Dekker, Inc. New York.

SPIEGEL, M.R. 1974. Shaum's Outline Series Theory and Problems of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems, R.P. Ins., New York.

STEIN, E. 1970. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton, N.J.

STEIN, E. 1993. Harmonic Analysis, Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

STEIN, E. and SHAKARCHI, R. 2007. Fourier Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton N.J.

STEIN, E. and SHAKARCHI, R. 2003. Complex Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton N.J.

STEIN, E. and WEISS, G. 1971. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton N.J.

# ÖZGEÇMİŞ

Esra Çevik, 1988 yılında Antalya'da doğdu. İlköğrenimini Antalya'da tamamladı, lise öğrenimine Antalya'da başlayıp Burdur'da tamamladı. 2006 yılında Gazi Üniversitesi Matematik Bölümünde başladığı lisans öğreniminden 2010 yılında Matematikçi olarak mezun oldu ve aynı yıl Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalında lisansüstü öğrenimine başladı.