İçindekiler

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYINDA DÖNME MATRİSLERİNİN ÜRETİLMESİ

Osman PALANCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2011

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYINDA DÖNME MATRİSLERİNİN ÜRETİLMESİ

Osman PALANCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2011

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYINDA DÖNME MATRİSLERİNİN ÜRETİLMESİ

Osman PALANCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez . . . / . . . / 2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (. . .)(. . . . .) not takdir edilerek oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Danışman)	. . . .
Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN	. . . .
Yrd. Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE	. . . .

ÖZET

LORENTZ UZAYINDA DÖNME MATRİSLERİNİN ÜRETİLMESİ

Osman PALANCI

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Haziran 2011, 67 Sayfa

Bu tezin amacı $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^n$ Öklid Uzayındaki dönme matrislerin üretilmesini gösterdikten sonra $\mathbb{R}^3_1$, $\mathbb{R}^4_1$, $\mathbb{R}^4_2$ ve $\mathbb{R}^n_1$ Lorentz Uzayındaki dönme matrislerinin üretilmesini göstermektir. Tezin ilk bölümünde dönme matrisleri ile ilgili temel kavramlar verildikten sonra ikinci ve üçüncü bölümde $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^n$ Öklid Uzayındaki dönme matrislerinin üretilmesi gösterilmiştir. Daha sonra dördüncü ve beşinci bölümde $\mathbb{R}^3_1$, $\mathbb{R}^4_1$ ve $\mathbb{R}^4_2$ Lorentz Uzayındaki dönme matrislerinin üretilmesi gösterilmiştir. En son olarak da $\mathbb{R}^n_1$ Lorentz Uzayındaki dönme matrislerin üretilmesi yeni bir metodla gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Dönme Matrisleri, Öklid Uzayı,
Lorentz Uzayı.

JÜRİ: Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Danışman)

Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

Yrd. Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE

ABSTRACT

GENERATING OF ROTATION MATRICES IN LORENTZ SPACE

Osman PALANCI

M. Sc. Thesis in Mathematics

Adviser: Asst. Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

June 2011, 67 Pages

The aim of this thesis is to show generating of rotation matrices in $\mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{R}_1^4, \mathbb{R}_2^4$ and $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz Space after showing that the generate of rotation matrices in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^n$ Euclidean Space. In the second and third part of the thesis is shown the generating of rotation matrices in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^n$ Euclidean Space after the basic concepts of rotation matrices in the first part of the thesis. Then in the fourth and fifth part of the thesis is shown the generating of rotation matrices $\mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{R}_1^4$ and $\mathbb{R}_2^4$ Lorentz Space. Finally, the generating of rotation matrices in $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz Space is demonstrated with a new method.

KEY WORDS : Rotation Matrices, Euclidean Space,
Lorentz Space.

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Adviser)

Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN

Asst. Prof. Dr. Gültekin TINAZTEPE

ÖNSÖZ

Dönme matrisleri özellikle bilgisayar programları için çok önemli matrislerdir. Bu yüzden dönme matrisini üretmek matematikçiler için önemli bir problemdir. Dönme matrislerini üretmek için çok farklı method vardır. Bunlar arasında en kullanışlı yol birim kuaterniyonları kullanarak dönme matrisi üretmektir. Ayrıca, Rodrigues formülü de verilen bir dönme ekseni etrafında verilen bir θ açısı kadar dönmeyi ifade eden dönme matrisini üretmekte oldukça kullanışlı bir yöntemdir.

Bu çalışmada önce $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^n$'de dönme matrislerinin nasıl üretileceği gösterilmiştir. Daha sonra $\mathbb{R}^3_1$, $\mathbb{R}^4_1$ ve $\mathbb{R}^4_2$'de dönme matrislerinin nasıl üretileceği belirtilmiştir. Son olarak da, $\mathbb{R}^n_1$'de dönme matrislerinin üretilmesi yeni bir metodla sunulmuştur.

Bu çalışma kapsamında benden yardımlarını asla esirgemeyen, beni sabırla dinleyen, bilgi ve saatlerini benimle paylaşan ve bana kendisiyle çalışma fırsatı sunan değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÖZDEMİR'e, yine bana kendisiyle çalışma fırsatı tanıyan, her fırsatta bana destek olan ve bilgilerini benimle paylaşan hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah Aziz ERGİN'e, ayrıca sonsuz sevgi ve destekleriyle her zaman yanımda olan ve beni ne pahasına olursa olsun destekleyen aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Bu bölümde, Öklid ve Lorentz uzayı ile ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir.

1.1. Öklid Uzayı

$\mathbb{R}$, reel sayılar cismini göstermek üzere, $\mathbb{R}^n = \{(u_1, u_2, \cdots, u_n)\}$ eşitliğiyle belirli $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi,

$$(u_1, u_2, \cdots, u_n) + (v_1, v_2, \cdots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots, u_n + v_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\lambda (u_1, u_2, \cdots, u_n) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \cdots, \lambda u_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere göre, $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üstünde bir vektör uzayı olur.

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayında, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ olmak üzere,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i$$

eşitliğiyle tanımlanan,

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı denir.

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

diyelim.

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \mathbf{u} \to \|\mathbf{u}\|$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre, $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

biçiminde tanımlanan,

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Dolayısıyla, $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır.

Her metrik uzay, bir topolojik uzay olduğundan, $\mathbb{R}^n$ uzayı bir topolojik uzaydır. Belirtilen topolojisiyle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid Uzayı denir (Sabuncuoğlu 2001).

1.1.1. Öklid Uzayında Ortogonal Matrisler

Tanım 1.1 (*Gallier* 2000) *Vektörlerin uzunluğunu koruyan matrise ortogonol matris denir. Yani, her* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ *için,*

$$\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$$

ise A *matrisine ortogonal matris denir.*

Bir ortogonal matrisin kolonları ve satırları $\mathbb{R}^n$ için ortonormal bir tabandır. Ortogonal matrisler tersleri ile karakterize edilir. A bir ortogonal bir matris ise $A^T = A^{-1}$ eştiliği sağlanır. Yani; $A^T A = I$ eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin her iki tarafının determinantı alınırsa,

$$\det A^T \det A = \det I \Longrightarrow (\det A)^2 = 1 \Longrightarrow \det A = \pm 1$$

elde edilir. Buna göre, bir ortogonal matrisin determinantı ya 1 ya da -1'dir.

Tanım 1.2 (*Gallier* 2000) *Determinantı* 1 *olan ortogonal matrislere dönme matrisi denir.*

$\mathbb{R}^n$ uzayında dönme matrislerinin kümesi,

$$\mathbf{SO}(n) = \left\{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : A^T A = I \text{ ve } \det A = 1 \right\}$$

ile gösterilir. Herhangi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için $\mathbf{u}^T A^T A \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ eşitliği sağlanır. Bundan dolayı, $A \in \mathbf{SO}(n)$ ise

$$\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = (A\mathbf{u})^T A\mathbf{v} = \mathbf{u}^T A^T A \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

olduğu görülebilir. Dönme matrisleri açıları, uzunlukları koruyan dönüşümlerdir. $\mathbb{R}^n$ de her dönme matrisi, bir eksen etrafında θ açısı kadar dönmeyi ifade eder.

1.2. Lie Cebiri ve Lie Grubu

Tanım 1.3 (*Ebbinghaus vd* 1991) $\mathbf{V}$*,* $\mathcal{F}$ *cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Bu vektör uzayında,* $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ *kümesinden* $\mathbf{V}$*'ye tanımlanmış bir ikili işlem aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, bu vektör uzayına bu işlemle birlikte,* $\mathcal{F}$ *cismi üzerinde bir cebir denir. Her* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ *ve her* $\lambda \in \mathcal{F}$ *için,*

i) $\mathbf{u}(\mathbf{vw}) = (\mathbf{uv})\mathbf{w}$ (*Birleşme özelliği*)

ii) $\mathbf{u}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{uv}+\mathbf{uw}$ *ve* $(\mathbf{v}+\mathbf{w})\mathbf{u} = \mathbf{vu}+\mathbf{wu}$ (*Dağılma özelliği*)

iii) $\lambda(\mathbf{uv}) = (\lambda\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{u}(\lambda\mathbf{v})$ (*Skalerle çarpma özelliği*)

Tanım 1.4 (*Hacısalihoğlu* 2000) $\mathbf{V}$*,* $\mathcal{F}$ *cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere,*

$$[\cdot,\cdot] = \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

dönüşümü,

i) 2*-lineer*

ii) *Ters simetrik (Yani, her* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ *için,* $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}]$*)*

iii) $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ *için,*

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] = 0$$

koşullarını sağlıyorsa, $[\cdot,\cdot]$ *dönüşümüne* $\mathbf{V}$ *üstünde bir Lie operatörü denir. Bu operatör* $\mathbf{V}$ *vektör uzayında yeni bir çarpma işlemi tanımlar ki, bu işlemle birlikte* $\mathbf{V}$ *uzayı bir cebir oluşturur. Bu cebire de Lie Cebiri denir.*

Tanım 1.5 (*Gallier* 2011) *Aşağıdaki özellikleri sağlayan boştan farklı bir* G *kümesine Lie grubu denir.*

i) G *bir gruptur.*

ii) G *bir diferensiyellenebilir manifolddur.*

iii) G *bir topolojik uzaydır.*

Şimdi Lie Cebiri ve Lie grubunun tanımını verdikten sonra bazı temel tanımları verebiliriz. Reel sayılar cismi üzerindeki, $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi çarpma işlemi altında bir grup oluşturur ve $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ ile gösterilir. Determinantı 1 olan matrisleri içeren $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$'nin alt grubu $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ ile gösterilir. Reel $n\times n$ tipindeki ortogonal matrislerin kümesi çarpma işlemi altında bir grup oluşturur ve $\mathbf{O}(n)$ ile gösterilir. Yine determinantı 1 olan matrisleri içeren $\mathbf{O}(n)$'nin alt grubu $\mathbf{SO}(n)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $\mathbf{SO}(n)$ grubundaki matrislere dönme matrisleri denir.

Tanım 1.6 (*Gallier* 2011) $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ *grubu genel lineer grup ve onun alt grubu* $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ *de özel lineer grup olarak isimlendirilir. Ortogonal matrislerin grubu olan* $\mathbf{O}(n)$ *grubu, ortogonal grup ve onun alt grubu olan* $\mathbf{SO}(n)$*, özel ortogonal grup veya dönme grubu olarak isimlendirilir. İzi* 0 *olan reel* $n\times n$ *tipindeki matrislerin vektör uzayı* $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ *ve reel* $n\times n$ *tipindeki ters simetrik matrislerin vektör uzayı da* $\mathfrak{so}(n)$ *ile gösterilir.*

Exponensiyel dönüşüm Lie cebirinden Lie grubuna giden dönüşümdür.

$$\exp:\mathfrak{so}(n)\to\mathbf{SO}(n)$$

ve

$$\exp:\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})\to\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$$

biçiminde tanımlanır.

Exponensiyel dönüşümün özellikleri Lie grubu çalışmasında önemli bir rol oynar.

$$\exp:\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})\to\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$$

dönüşümü iyi tanımlıdır, ancak her e^A şeklindeki matris pozitif determinanta sahip olduğu için exp örten değildir. Benzer olarak

$$\exp:\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})\to\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$$

dönüşümü iyi tanımlıdır, ancak örten değildir.

$$\exp:\mathfrak{so}(n)\to\mathbf{SO}(n)$$

dönüşümü iyi tanımlı ve örtendir.

$$\exp:\mathfrak{o}(n)\to\mathbf{O}(n)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır, ancak örten değildir. Çünkü $\mathbf{O}(n)$'de determinantı -1 olan matrisler vardır.

$$\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$$

dönüşümü iyi tanımlı ve örten olduğundan $n = 3$ aldığımızda ve A ters simetrik matris olduğunda, e^A için açık bir formül bulmak mümkün olur. Herhangi 3×3 tipinde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

ters simetrik matrisi için $\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ alınırsa biz Rodrigues formülü olarak bilinen

$$e^A = I_3 + \frac{\sin\theta}{\theta} A + \frac{(1 - \cos\theta)}{\theta^2} A^2$$

formülünü elde ederiz (Gallier 2011).

1.3. Lorentz Uzayı

Tanım 1.7 (*O'Neill* 1983) *V bir vektör uzayı, $\mathcal{F}$ bir cisim olmak üzere,*

$$B : V \times V \to \mathcal{F}$$

dönüşümü,

i) $B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

ii) $B(\mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = B(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + B(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

iii) $B(\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}) = \lambda B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

özelliklerini sağlıyorsa, B dönüşümüne bilineer form denir.

$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ ise, B'ye simetrik bilineer form denir. B simetrik bilineer formunda,

Her $\mathbf{u} \neq 0$ için, $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ ise B'ye pozitif tanımlı simetrik bilineer form, Her $\mathbf{u} \neq 0$ için, $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0$ ise B'ye negatif tanımlı simetrik bilineer form,

Her $\mathbf{u} \neq 0$ için, $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ olması $\mathbf{v} = 0$ olmasını gerektiriyorsa, B'ye nondejenere simetrik bilineer form denir. (Yani, tüm vektörlere ortogonal olan tek vektör 0 vektörü ise)

V vektör uzayında tanımlı nondejenere simetrik bilineer forma skaler çarpım denir.

Tanım 1.8 (*O'Neill* 1983) $\mathbb{R}^n$ *Öklid uzayı üzerinde, Öklid iç çarpımı yerine,* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *için,*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_L &= -u_1v_1 - u_2v_2 - \cdots - u_mv_m + u_{m+1}v_{m+1} + u_{m+2}v_{m+2} + \cdots + u_nv_n \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı nondejenere, simetrik bilineer form alınırsa $\mathbb{R}^n$ *uzayına yarı Öklidyen iç çarpım ile birlikte; m indeksine sahip ya da* $(\underbrace{-, -, ..., -}_{m \ tane}, \underbrace{+, +, ..., +}_{n-m \ tane})$ *işaretine sahip n boyutlu yarı Öklidyen uzay denir. Özel olarak, $m = 1$ ve $n = 3$ alınırsa, bu uzay Minkowski 3 uzayı olur. Sadece $m = 1$ alınırsa, Minkowski n uzayı veya Lorentz uzayı elde edilir ve* $\mathbb{R}^n_1$ *ile gösterilir.*

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_L = -u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$ *nondejenere, simetrik bilineer formuna da* $(-, +, +, ..., +)$ *işaretli Lorentz iç çarpımı denir.*

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n_1$ vektörünün normu;

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle|}$$

şeklindedir. O halde $\mathbf{u}$ birim vektör ise; $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \pm 1$'dir.

Tanım 1.9 (*Izumiya vd* 2000) *Lorentz iç çarpımı pozitif tanımlı değildir. Bundan dolayı bu uzaydaki vektörler aşağıdaki biçimde sınıflara ayrılır.* $\mathbb{R}_1^n$ *uzayında herhangi bir vektör* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ *olmak üzere;*

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0 \text{ veya } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ ise } \mathbf{u}\text{'ya spacelike vektör} \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle < 0 \text{ ise } \mathbf{u}\text{'ya timelike vektör} \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \text{ ve } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \text{ ise } \mathbf{u}\text{'ya lightlike veya null vektör} \end{cases}$$

denir.

1.3.1. Lorentz Uzayında Ortogonal Matrisler

Tanım 1.10 (*Özdemir* 2010) *Lorentz uzayında vektörlerin uzunluğunu koruyan matrise pseudo ortogonal matris denir. Yani her* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_1^n$ *için,*

$$\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{u} \rangle_L = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_L$$

ise A *matrisine pseudo ortogonal matris denir.*

Bir pseudo ortogonal matrisin kolonları ve satırları $\mathbb{R}_1^n$ için bir ortonormal tabandır. Pseudo ortogonal matrisler tersleri ile karakterize edilir. A bir pseudo ortogonal matris ise,

$$I^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $I^* A^T I^* = A^{-1}$ eşitliği sağlanır. Yani, $I^* A^T I^* A = I$ eşitliği sağlanır. Pseudo ortogonal bir matrisin determinantı ya 1 ya da -1'dir.

Tanım 1.11 (*Özdemir* 2010) *Determinantı* 1 *olan pseudo ortogonal matrise Lorentz dönme matrisi denir.*

$\mathbb{R}^n_1$'de tüm dönme matrislerinin kümesi

$$\mathbf{SO}(n,1)=\left\{R\in M_{n\times n}(\mathbb{R}):R^TI^*R=I^*\text{ ve }\det R=1\right\}$$

ile gösterilir. Herhangi iki $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n_1$ vektörü için, matris çarpımı ile Lorentz iç çarpımı arasındaki ilişki,

$$\mathbf{u}^TI^*\mathbf{v}=\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L$$

ile verilir. Böylece, $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n_1$ vektörü için, A dönme matrisi ise,

$$\langle A\mathbf{u},A\mathbf{v}\rangle_L=(A\mathbf{u})^T\,I^*A\mathbf{v}=\mathbf{u}^TA^TI^*A\mathbf{v}=\mathbf{u}^TI^*I^*A^TI^*A\mathbf{v}=\mathbf{u}^TI^*\mathbf{v}=\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L$$

olduğu görülür. Minkowski n uzayında dönme matrisleri uzunluğu ve açıları koruyan dönüşümlerdir. Bir dönme matrisi, timelike, spacelike veya null bir vektörü sırasıyla timelike, spacelike veya null bir vektöre dönüştürür. Dönme matrisi, dönme ekseninin spacelike veya timelike olmasına göre ve dönme türünün hiperbolik veya küresel olmasına göre değişir.

1.4. Kuaterniyonlar

Kuaterniyon cebiri,

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=\mathbf{i}*\mathbf{j}*\mathbf{k}=-1$$

koşullarını taşıyan $q=q_1+q_2\mathbf{i}+q_3\mathbf{j}+q_4\mathbf{k}$ $(q_i\in\mathbb{R})$ sayı dörtlülerinin oluşturduğu birleşimli fakat değişmeli olmayan bir bölüm cebiridir. Buradaki "$*$" işareti, kuaterniyon çarpımını göstermektedir. Bu sayı dörtlülerinin oluşturduğu küme $\mathbb{H}$ ile gösterilir. $q=q_1+q_2\mathbf{i}+q_3\mathbf{j}+q_4\mathbf{k}$ kuaterniyonunu, $Sq=q_1$ ve $\mathbf{V}q=q_2\mathbf{i}+q_3\mathbf{j}+q_4\mathbf{k}$ olmak üzere $q=Sq+\mathbf{V}q$ formunda gösterebiliriz. Bazen kuaterniyonları sadece dörtlülerle $q=(q_1,q_2,q_3,q_4)$ biçiminde de gösterebiliriz.

Kuaterniyon çarpımının dağılma özelliği vardır. İki kuaterniyonun çarpımı,

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=\mathbf{i}*\mathbf{j}*\mathbf{k}=-1$$

ifadelerinin kullanılmasıyla kolayca bulunabilir. Bu eşitlikler yardımıyla,

$$\begin{aligned}\mathbf{i}*\mathbf{j}&=\mathbf{k},\ \mathbf{j}*\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \mathbf{k}*\mathbf{i}=\mathbf{j},\\ \mathbf{j}*\mathbf{i}&=-\mathbf{k},\ \mathbf{k}*\mathbf{j}=-\mathbf{i},\ \mathbf{i}*\mathbf{k}=-\mathbf{j}\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Bu çarpımın vektörel çarpıma benzediği açıktır. Şimdi bu eşitlikler yardımıyla iki kuaterniyonu çarpalım.

$p, q \in \mathbb{H}$ olmak üzere, $p = p_1 + p_2\mathbf{i}+p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k}$ ve $q = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ kuaterniyonlarının kuaterniyon çarpımı

$$\begin{aligned}(p_1 + p_2\mathbf{i}+p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k})(q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}) &= p_1q_1 - (p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4) \\ &\quad +\mathbf{i}(p_1q_2 + q_1p_2 + p_3q_4 - q_3p_4) \\ &\quad +\mathbf{j}(p_1q_3 + q_1p_3 + p_4q_2 - q_4p_2) \\ &\quad +\mathbf{k}(p_1q_4 + q_1p_4 + p_2q_3 - q_2p_3)\end{aligned}$$

biçimindedir. Bu çarpımın değişmeli olmadığı aşikardır. Bu çarpımı daha kolay şekilde de ifade etmek mümkündür.

$$\begin{aligned} * &: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \quad (p, q) \to p * q \\ p * q &= SpSq - \langle \mathbf{V}p, \mathbf{V}q\rangle + Sp\mathbf{V}q + Sq\mathbf{V}p + \mathbf{V}p \times \mathbf{V}q\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $\langle, \rangle$ ve $\times$ sırasıyla Öklid iç çarpımı ve Öklidyen vektörel çarpımı göstermektedir. Ayrıca, kuaterniyon çarpımı,

$$p * q = \begin{bmatrix} p_1 & -p_2 & -p_3 & -p_4 \\ p_2 & p_1 & -p_4 & p_3 \\ p_3 & p_4 & p_1 & -p_2 \\ p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir.

Örneğin, $p = (1, 2, 3, 1)$ ve $q = (2, -1, 2, 3)$ kuaterniyonlarının çarpımının $(-5, 10, 1, 12)$ olduğunu görürüz.

$\mathbb{H}$ kuaterniyonlar kümesi, $q \in \mathbb{H}$ ve $q = Sq + \mathbf{V}q$ için, $Sq = 0$ ise, bu durumda q'ya saf kuaterniyon denir. İki saf kuaterniyonun çarpımı, $p = p_2\mathbf{i}+p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k}$ ve $q = q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ olmak üzere;

$$p * q = -\langle \mathbf{V}p, \mathbf{V}q\rangle + \mathbf{V}p \times \mathbf{V}q = -(p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4) + \begin{bmatrix} i & j & k \\ p_2 & p_3 & p_4 \\ q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

$q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = Sq + \mathbf{V}q$ bir kuaterniyon olmak üzere, kuaterniyonun eşleniği $K(q)$ ile gösterilir ve $K(q) = Sq - \mathbf{V}q$ şeklinde tanımlanır. Kuaterniyonların toplamının eşleniği, eşleniklerinin toplamına eşittir. q ve $K(q)$ kuaterniyonlarının sadece vektörel kısımları farklı olduğu için, $q * K(q) = K(q) * q$ eşitliği vardır.

$q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ kuaterniyonunun normu

$$N(q) = \sqrt{K(q) * q} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$$

şeklinde tanımlanır. $N(q) = 1$ olduğu zaman, q'ya birim kuaterniyon denir. Ayrıca, $N(q) \neq 0$ olmak üzere,

$$q_0 = \frac{q}{N(q)}$$

bir birim kuaterniyon belirtir.

Kuaterniyonların kuaterniyon çarpımına göre tersleri vardır ve $q * q^{-1} = q^{-1} * q = 1$ özelliğini sağlarlar ve

$$q^{-1} = \frac{K(q)}{N(q)}$$

dir (Özdemir ve Ergin 2006).

Teorem 1.12 (*Özdemir ve Ergin* 2006) *$\forall q, r, s \in \mathbb{H}$ olmak üzere, kuaterniyonlar aşağıdaki özellikleri sağlarlar:*

i) $q * (r * s) = (q * r) * s$

ii) $q * (r + s) = q * r + q * s$

iii) $K(q * r) = K(r) * K(q)$

iv) $N(q * r) = N(q) N(r)$

v) *$\mathbf{V}q$ vektörünün $\mathbf{V}r$'ye paralel olması için gerek ve yeter şart $q * r = r * q$ olmasıdır.*

1.5. Split Kuaterniyonlar

Tanım 1.13 (*Inoguchi* 1998*, Inoguchi ve Toda* 2004) *Split kuaterniyon cebiri,*

$$\mathbf{i}^2 = -1,\ \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = 1$$

koşullarını taşıyan $q = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ $(q_i \in \mathbb{R})$ *sayı dörtlülerinin oluşturduğu birleşimli fakat değişmeli ve bölümlü olmayan bir cebirdir. Bu sayı dörtlülerinin oluşturduğu küme* $\widehat{\mathbb{H}}$ *ile gösterilir.*

Tanım 1.14 (*Özdemir ve Ergin* 2006) $\widehat{\mathbb{H}}$ *split kuaterniyonlar kümesi ve* $p, q \in \widehat{\mathbb{H}}$ *için,* $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ *ve* $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ *split kuaterniyonların split kuaterniyon çarpımı,*

$$* : \widehat{\mathbb{H}} \to \widehat{\mathbb{H}},\ \ (p, q) \to p * q$$

$$p * q = SpSq + \langle \mathbf{V}p, \mathbf{V}q \rangle_L + Sp\mathbf{V}q + Sq\mathbf{V}p + \mathbf{V}p \times_L \mathbf{V}q$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $\langle , \rangle_L$ *ve* $\times_L$ *sırasıyla Lorentziyen iç çarpımı ve Lorentziyen vektörel çarpımı göstermektedir.*

Split kuaterniyonlar, $\mathbb{R}^4_2$ yani 2 indekse sahip 4 boyutlu yarı Öklidyen uzayı ile özdeşleştirilir. Bunun yanında, split kuaterniyonların vektörel kısmı ise 3 boyutlu Minkowski uzayı ile özdeşleştirilmektedir. Bu durum, split kuaterniyonları kullanarak Lorentziyen iç çarpım ve vektörel çarpımı içeren bir çok vektörel analiz konusunun yorumlanmasını sağlayabilir.

Ayrıca, split kuaterniyon çarpımı, $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ ve $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ olmak üzere,

$$p * q = \begin{bmatrix} p_1 & -p_2 & p_3 & p_4 \\ p_2 & p_1 & p_4 & -p_3 \\ p_3 & p_4 & p_1 & -p_2 \\ p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazılabilir.

Tanım 1.15 (*Özdemir ve Ergin* 2006) $\widehat{\mathbb{H}}$ *split kuaterniyonlar kümesi,* $q \in \widehat{\mathbb{H}}$ *ve* $q = Sq + \mathbf{V}q$ *için,* $Sq = 0$ *ise, bu durumda q'ya saf split kuaterniyon denir.*

İki saf split kuaterniyonun çarpımı, $p = p_2\mathbf{i} + p_3\mathbf{j} + p_4\mathbf{k}$ ve $q = q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ olmak üzere,

$$p * q = \langle \mathbf{V}p, \mathbf{V}q \rangle_L + \mathbf{V}p \times_L \mathbf{V}q = -p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4 + \begin{bmatrix} -i & j & k \\ p_2 & p_3 & p_4 \\ q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.16 (*Özdemir ve Ergin* 2006) *$q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = Sq + \mathbf{V}q$ bir split kuaterniyon olmak üzere, split kuaterniyonun eşleniği $K(q)$ ile gösterilir ve $K(q) = Sq - \mathbf{V}q$ şeklinde tanımlanır.*

Split kuaterniyonların toplamının eşleniği, eşleniklerin toplamına eşittir. q ve $K(q)$ split kuaterniyonlarının sadece vektörel kısımları farklı olduğu için,

$$I(q) = q * K(q) = K(q) * q$$

eşitliği vardır.

Tanım 1.17 (*Özdemir ve Ergin* 2006) *Bir q split kuaterniyonu için,*

$$I(q) = q * K(q) = K(q) * q = q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe göre,

$$\begin{aligned} I(q) &> 0 \text{ ise } q\text{'ya timelike kuaterniyon} \\ I(q) &< 0 \text{ ise } q\text{'ya spacelike kuaterniyon} \\ I(q) &= 0 \text{ ise } q\text{'ya lightlike kuaterniyon} \end{aligned}$$

denir. Açıkça görülmektedir ki; burada $-I(q) = -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$ eşitliği $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ split kuaterniyonunun 4 boyutlu bir vektör olarak $\langle q, q \rangle_{\mathbb{R}_2^4}$ şeklinde, yarı Öklidyen iç çarpıma eşittir.

Tanım 1.18 (*Özdemir ve Ergin* 2006) $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ *split kuaterniyonunun normu*

$$N(q) = \sqrt{|q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2|}$$

şeklinde tanımlanır. $N(q) = 1$ *olduğu zaman, q'ya birim split kuaterniyon denir. Ayrıca,* $N(q) \neq 0$ *olmak üzere,* $q_0 = q/N(q)$ *bir birim split kuaterniyon belirtir.*

Spacelike ve timelike kuaterniyonların split kuaterniyon çarpımına göre tersleri vardır ve $q * q^{-1} = q^{-1} * q = 1$ özelliğini sağlarlar ve $q^{-1} = K(q) / I(q)$'dur. Lightlike kuaterniyonların tersi yoktur.

Teorem 1.19 (*Özdemir ve Ergin* 2006) $\forall q, r, s \in \widehat{\mathbb{H}}$ *olmak üzere, split kuaterniyonlar aşağıdaki özellikleri sağlarlar.*

i) $q * (r * s) = (q * r) * s$

ii) $q * (r + s) = q * r + q * s$

iii) $K(q * r) = K(q) * K(r)$

iv) $I(q * r) = I(q) I(r)$

v) $N(q * r) = N(q) N(r)$

vi) $\mathbf{V}q$ *vektörünün* $\mathbf{V}r$*'ye paralel olması için gerek ve yeter şart* $q * r = r * q$ *olmasıdır.*

Bu teoremin bir sonucu olarak, split kuaterniyon çarpımına göre spacelike kuaterniyonlar bir grup oluşturmadığı fakat timelike kuaterniyonların bir grup oluşturduğu görülebilir. Teorem 1.19'un iv) ifadesi iki spacelike kuaterniyonun split kuaterniyon çarpımının bir timelike kuaterniyon olduğunu göstermektedir. Timelike kuaterniyonların kümesi

$$\mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}} = \{q = (q_1, q_2, q_3, q_4) : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R},\ I(q) > 0\}$$

ile gösterilir. Ayrıca, birim timelike kuaterniyonların kümesi ise $\mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}}_1$ ile gösterilir. $\mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}}_1$ kümesi $\mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}}$ kümesinin bir altgrubudur ve bu küme

$$S_2^3 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}_2^4 : \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}_2^4} = 1\}$$

yarı Öklidyen küresi olarak düşünülebilir.

Timelike bir kuaterniyonun vektörel kısmı timelike, spacelike ya da null vektör olabilir. Bu durum özellikle dönmelerde ve kutupsal formlarda önemlidir. Bunun yanında, spacelike kuaterniyonların vektörel kısmı daima spacelike bir vektördür. $q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 < 0$ olduğunda, $0 < q_1^2 < -q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = \langle \mathbf{V}q, \mathbf{V}q \rangle_L$ olacaktır.

Kompleks sayılarda ve kuaterniyonlarda olduğu gibi split kuaterniyonlar da kutupsal formda ifade edilebilir. Fakat, split kuaterniyonlarda, split kuaterniyonunun spacelike ya da timelike olması, hatta timelike kuaterniyonlarda vektörel kısmın timelike ya da spacelike olması bu kutupsal formu değiştirir. Yani, spacelike kuaterniyonlar için ayrı ayrı kutupsal formlar belirtilecektir.

1. Her $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \widehat{\mathbb{H}}$ spacelike kuaterniyonu,

$$\sinh\theta = \frac{q_1}{N(q)}, \quad \cosh\theta = \frac{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{N(q)} \text{ ve } \overrightarrow{\varepsilon_0} = \frac{q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}}{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}$$

olmak üzere,

$$q = N(q)\left(\sinh\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\cosh\theta\right)$$

formunda yazılabilir. Burada, $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ vektörü $\mathbb{R}_1^3$ uzayında spacelike birim vektördür.

Örneğin, $q = (1, 1, 2, 2)$ spacelike kuaterniyonu,

$$q = \sinh\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{(1,2,2)}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$$

formunda yazılıabilir.

2. Vektörel kısmı spacelike olan her $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \widehat{\mathbb{H}}$ timelike kuaterniyonu,

$$\cosh\theta = \frac{|q_1|}{N(q)}, \quad \sinh\theta = \frac{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{N(q)} \text{ ve } \overrightarrow{\varepsilon_0} = \frac{q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}}{\sqrt{-q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}$$

olmak üzere,

$$q = N(q)\left(\cosh\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sinh\theta\right)$$

formunda yazılabilir. Burada, $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ vektörü $\mathbb{R}_1^3$ uzayında spacelike birim vektördür.

Örneğin, $q = (2, 1, 0, 2)$ spacelike vektör kısmına sahip timelike kuaterniyonu,

$$q = \cosh\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sinh\theta = 2 + \frac{(1,0,2)}{\sqrt{3}}\sqrt{3}$$

olarak yazılabilir.

3. Vektörel kısmı timelike olan her $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \widehat{\mathbb{H}}$ timelike kuaterniyonu,

$$\cos\theta = \frac{q_1}{N(q)}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{q_2^2 - q_3^2 - q_4^2}}{N(q)} \text{ ve } \overrightarrow{\varepsilon_0} = \frac{q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}}{\sqrt{q_2^2 - q_3^2 - q_4^2}}$$

olmak üzere,

$$q = N(q)\left(\cos\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sin\theta\right)$$

formunda yazılabilir. Burada, $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ vektörü $\mathbb{R}_1^3$ uzayında timelike birim vektördür.

Örneğin, $q = (1, 2, 1, 1)$ timelike vektör kısmına sahip timelike kuaterniyonu,

$$q = \sqrt{3}(\cos\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sin\theta) = \sqrt{3}(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{(2,1,1)}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$$

formunda yazılır (Özdemir ve Ergin 2006).

2. 3 Boyutlu Öklid Uzayında Dönme Matrislerinin Üretilmesi

2.1. $\mathbb{R}^3$'de bir dönme matrisinin özdeğerleri

$\mathbb{R}^3$'de bir A dönme matrisinin özdeğerlerini inceleyelim. A dönme matrisinin özdeğerleri λ_1, λ_2 ve λ_3 olsun. Bu durumda, A matrisinin karakteristik polinomu

$$\triangle_A(x) = \det(xI - A) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$$

olur. $x = 0$ yazarsak, $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ elde edilir. Yani, dönme matrisinin özdeğerlerinin çarpımı 1'dir. Bundan dolayı, bir dönme matrisinin özdeğerleri

$$1, e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \text{ ve } e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

değerleridir (Özdemir 2010).

Teorem 2.20 (*Özdemir* 2010) *Bir A dönme matrisinin karakteristik polinomu $P(x) = x^3 - iz(A)x^2 + iz(A)x - 1$ dir.*

İspat. Herhangi bir A dönme matrisinin karakteristik polinomu, $C \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$P(x) = \det(xI - A) = x^3 - iz(A)x^2 + Cx - 1$$

formundadır. Özdeğerlerinden biri 1 olduğundan $P(1) = 0$ olmalıdır. Buradan, $C = iz(A)$ elde edilir. Böylece karakteristik polinom

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - iz(A)x^2 + iz(A)x - 1 \\ P(x) &= (x-1)(x^2 + ((1 - iz(A))x + 1) \end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

2.2. $\mathbb{R}^3$'de bir dönme matrisinin dönme açısının hesaplanması

A bir dönme matrisi olmak üzere,

$$\triangle_A(x) = \det(xI - A) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$$

karakteristik polinomunun kökleri

$$1, e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \text{ ve } e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \triangle_A(x) &= (x-1)\left(x - e^{i\theta}\right)\left(x - e^{-i\theta}\right) \\ &= (x-1)\left(x^2 - \left(e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right)x + 1\right) \end{aligned}$$

eşitliğinde, $\cos\theta = \left(e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right)/2$ olduğu kullanılırsa,

$$\triangle_A(x) = (x-1)\left(x^2 - 2\cos\theta x + 1\right)$$

elde edilir. Bir önceki teoremle karşılaştırılırsa, $1 - iz(A) = -2\cos\theta$ eşitliğinden

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(iz(A) - 1)$$

bulunur (Özdemir 2010).

Örnek 2.21 $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix}$ *dönme matrisinin dönme açısı,*

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}(-7-1-1) - 1\right) = -1$$

eşitliğinden $\theta = \pi$ *olarak bulunur.*

2.3. $\mathbb{R}^3$'de Dönme Matrisi Elde Etme Yöntemleri

2.3.1. 1. Yöntem: Birim Kuaterniyonlar

$\mathbb{R}^3$'de dönmelerin gösterilmesi için bir çok yöntem vardır. Euler açıları, ortonormal matrisler ve kuaterniyonlar bunlardan bazılarıdır, fakat kuaterniyonlar diğer yöntemlere göre dönmeleri göstermede daha kullanışlı bir yöntemdir. Bir ortonormal dönme matrisinin oluşturulması için her kolonun birbirine dik ve birim vektör olması gibi bazı kısıtlamalar ve şartlar vardır. Bu kısıtlamalar, dokuz tane sayı ile ortonormal bir matrisin kurulmasını güçleştirir. Fakat birim kuaterniyon yardımıyla bir dönme matrisi çok kolay bir şekilde kurulabilir. Sadece dört sayı ve bu sayıların oluşturduğu kuaterniyonun birim kuaterniyon olması yeterlidir. Yani, sadece dört sayı bir dönme matrisinin kurulması için yeterlidir ve tek kısıtlamamız da kuaterniyonun normunun 1 olmasıdır. Bu kolaylık, özellikle dönme içeren optimizasyon problemlerinin çözümünde kolaylık sağlamaktadır. Bu şekildeki problemleri altı tane lineer olmayan kısıtlama, ortonormallik koşulu ve ayrıca determinantın 1'e eşit olması problemin çözümünü zorlaştırır. Kuaterniyonların dönmeleri göstermedeki sağladığı kolaylık, özellikle bugün bilgisayar animasyon, fizik, kinematik, bilgisayar programlama ve bir çok alanda kullanılmasını sağlamıştır.

Her birim kuaterniyon, $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayındaki bir dönmeyi belirtir. $\theta = 0°$ derecelik dönme $q = (1, 0, 0, 0)$ birim kuaterniyonu ile gösterilir ve yine bir $\mathbf{u}$ birim vektörü etrafındaki $\theta = 180°$ derecelik bir dönme ise $q = (0, \mathbf{u})$ birim kuaterniyonu ile ifade edilir. En genel haliyle, bir $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ birim kuaterniyonunu kullanarak,

$$R(q_1, q_2, q_3, q_4) = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & -2q_1q_4 + 2q_2q_3 & 2q_1q_3 + 2q_2q_4 \\ 2q_2q_3 + 2q_4q_1 & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2q_3q_4 - 2q_2q_1 \\ 2q_2q_4 - 2q_1q_3 & 2q_2q_1 + 2q_3q_4 & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}$$

dönme matrisi üretilebilir (Hanson ve Ma 1995).

Örneğin, üç boyutlu Öklid uzayında, x ekseni etrafındaki dönme açısı α olan dönme matrisi ve birim kuaterniyonu

$$R_{q_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \longleftrightarrow q_x = (\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}, 0, 0)$$

şeklinde, y ekseni etrafındaki dönme açısı β olan dönme matrisi ve birim kuaterniyonu

$$R_{q_y} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \longleftrightarrow q_y = (\cos\frac{\beta}{2}, 0, \sin\frac{\beta}{2}, 0)$$

şeklinde ve son olarak z ekseni etrafında dönme açısı γ olan dönme matrisi ve birim kuaterniyonu ise

$$R_{q_z} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow q_z = (\cos\frac{\gamma}{2}, 0, 0, \sin\frac{\gamma}{2})$$

biçimindedir.

2.3.2. 2. Yöntem: Rodrigues Formülü

Rodrigues formülü, 3×3 tipinde ters simetrik bir matristen bir dönme matrisinin nasıl elde edebileceğimizi gösterir. Bunun için, exponensiyel dönüşümü kullanırız. Öncelikle exponensiyel dönüşümü tanımlayalım. Her Lie grubu bir Lie cebirle ilişkilendirilebilir. $so(n)$, $\mathbf{SO}(n)$ Lie grubundan elde edilen Lie cebiridir. $so(n)$ kümesi, $n \times n$ tipindeki ters simetrik matrislerden oluşur. Exponensiyel dönüşüm,

$$\exp : so(n) \to \mathbf{SO}(n)$$

biçiminde tanımlanır. Yani 3×3 tipinde ters simetrik bir matris ise,

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

matrisi bir dönme matrisidir. Buradaki A matrisini en genel halde,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde seçebiliriz. Yani, üç farklı değerin pozitif ve negatif değerleri kullanılır. $\mathbf{u} = (a, b, c)$ diyelim. Yani, A ters simetrik matrisini $\mathbf{u}$ vektöründen oluşturalım. Eğer, $\mathbf{u}$ vektörü birim olursa, bu durumda,

$$A^3 = -A$$

olacaktır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} R &= e^{A\theta} = I + \theta A + \frac{\theta^2 A^2}{2!} + \frac{-\theta^3 A^3}{3!} + \frac{-\theta^4 A^2}{4!} + \frac{\theta^5 A}{5!} + \frac{\theta^6 A^2}{6!} + \cdots \\ &= I + A(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots) + A^2(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots) \\ &= I + A(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots) + A^2(1 - (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots)) \end{aligned}$$

eşitliğinde, $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ açılımları da göz önüne alınırsa, Rodrigues formülünü

$$R = e^{A\theta} = I + (\sin\theta)\, A + (1 - \cos\theta)\, A^2$$

biçiminde elde edebiliriz. Buradaki $\mathbf{u}$ vektörü dönme ekseni ve θ açısı da dönme açısıdır (Gallier 2011).

Örnek 2.22 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$ *olsun. Dönme açısı da* $90°$ *olsun. Bu durumda,*

$$A = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A^2 = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

olduğundan, dönme matrisi

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & -3\sqrt{14} + 2 & 2\sqrt{14} + 3 \\ 3\sqrt{14} + 2 & 4 & -\sqrt{14} + 6 \\ -2\sqrt{14} + 3 & \sqrt{14} + 6 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.3.3. 3. Yöntem: Cayley Formülü

Bu kez, $\mathbf{u} = (a, b, c)$ vektöründen elde edilen,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

ters simetrik matrisinden,

$$R = (I - A)(I + A)^{-1}$$

formülü ile bir dönme matrisi elde edeceğiz. Bu formüle Cayley formülü denir (Bükçü 2006). Örneğin, $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ alırsak,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} R &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

3. n boyutlu Öklid Uzayında Dönme Matrislerinin Üretilmesi

Bu bölümde, $n \geq 4$ olmak üzere $n \times n$ tipinde ters simetrik A matrisinin exponensiyeli olan e^A'nın nasıl hesaplanacağını göstermek için Rodrigues-like formülü vereceğiz. Aynı zamanda A matrisinin ayrışımında kullanılan $A_1, ..., A_p$ matrislerinin tekliğini göstereceğiz. Aşağıdaki önteorem $A_1, ..., A_p$ matrislerinin elde edilmesinde oldukça önemli bir rol oynar.

Önteorem 3.23 (*Gallier ve Xu* 2003) *$n \geq 2$ olmak üzere $n \times n$ tipinde ters simetrik A matrisi verilsin.*

$$A = PEP^T$$

olacak şekilde bir P ortogonal matrisi ve bir E blok diagonal matrisi vardır. Buradaki E blok diagonal matrisi

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & \cdots & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ & \cdots & E_m & \\ \cdots & & & 0_{n-2m} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Her E_i bloğu reel 2 boyutlu matris şeklindedir:

$$E_i = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_i \\ \theta_i & 0 \end{bmatrix} = \theta_i \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\theta_i > 0)$$

A matrisinin özdeğerlerinin $\pm i\theta_j$ veya 0 olduğuna dikkat edelim. Bilindiği üzere ters simetrik bir matrisin özdeğerleri tamamen imajiner veya sıfırdır. Şimdi genelleştirilmiş Rodrigues formülünün yanı sıra A_j'lerin tekliğini ve varlığını ispatlayacağız.

Teorem 3.24 (*Gallier ve Xu* 2003) *$n \geq 3$ olmak üzere $n \times n$ tipinde herhangi sıfırdan farklı ters simetrik bir A matrisi verilsin. Eğer,*

$$\{i\theta_1, -i\theta_1, ..., i\theta_p, -i\theta_p\}$$

$\theta_j > 0$ ve her $i\theta_j$ (ve $-i\theta_j$), $k_j \geq 1$ katlılığa sahip olmak üzere A'nın birbirinden farklı özdeğerlerinin kümesi ise, $1 \leq i, j \leq p$ ve $2p \leq n$ olmak üzere

$$A = \theta_1 A_1 + \cdots + \theta_p A_p \tag{3.1}$$

$$A_i A_j = A_j A_i = 0_n \quad (i \neq j) \tag{3.2}$$

$$A_i^3 = -A_i \tag{3.3}$$

olacak şekilde p tane tek $A_1, ..., A_p$ ters simetrik matrisleri vardır. Ayrıca:

$$e^A = e^{\theta_1 A_1 + \cdots + \theta_p A_p} = I_n + \sum_{i=1}^{p} \left(\sin\theta_i A_i + (1 - \cos\theta_i) A_i^2\right)$$

dir ve $\{\theta_1, ..., \theta_p\}$, $-1/4\left(A - A^T\right)^2$ simetrik matrisinin $2m$ tane pozitif özdeğerlerinin birbirden farklı pozitif kareköklerdir. Aynı zamanda $m = k_1 + \cdots + k_p$'dir.

İspat. Önteorem 3.23'den, A matrisi

$$A = PEP^T$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki E matrisleri, $\theta_i > 0$ olmak üzere

$$E_i = \theta_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindeki m tane sıfırdan farklı blokları içeren blok diagonal matristir.

Eğer,

$$\{i\theta_1, -i\theta_1, ..., i\theta_p, -i\theta_p\}$$

A'nın birbirinden farklı özdeğerlerinin kümesi ise, her j için $\theta_j > 0$ olmak üzere, içerisinde θ_j'leri barındıran tüm E_j bloklarına bağlı sıfırdan farklı

$$S_j = \left\{i_1, ..., i_{k_j}\right\}$$

indisler kümesi vardır. Buradaki indisler $\{1, ..., m\}$ kümesinden alınmıştır. F_j matrisi E blok diagonal matrisinin E_k bloklarının sıfırlanması ile elde edilen matris olsun. Burada $k \notin S_j$'dir. F_j matrisi içindeki θ_j'leri ayırırsak

$$F_j = \theta_j G_j$$

elde ederiz ve buradan

$$A_j = PG_jP^T$$

elde edilir. Böylece (3.1), (3.2) ve (3.3) denklemlerinin de sağlandığı açıktır.

A_i ve A_j her i, j için değişmeli olduğundan

$$e^A = e^{\theta_1 A_1 + \cdots + \theta_p A_p} = e^{\theta_1 A_1} \cdots e^{\theta_p A_p}$$

olur. 3×3 tipinde olduğu gibi

$$A_i^3 = -A_i$$

olduğunu kullanırsak

$$e^{\theta_i A_i} = I_n + \sin\theta_i A_i + (1 - \cos\theta_i) A_i^2$$

olduğunu gösterebiliriz.

Gerçekten, $A_i^3 = -A_i$ olması

$$A_i^{4k+j} = A_i^j \text{ ve } A_i^{4k+2+j} = -A_i^j$$

olduğunu gösterir ve böylece,

$$\begin{aligned}
e^{\theta_i A_i} &= I_n + \sum_{k \geq 1} \frac{\theta_i^k A_i^k}{k!} \\
&= I_n + \left(\frac{\theta_i}{1!} - \frac{\theta_i^3}{3!} + \frac{\theta_i^5}{5!} + \cdots \right) A_i \\
&\quad + \left(\frac{\theta_i^2}{2!} - \frac{\theta_i^4}{4!} + \frac{\theta_i^6}{6!} + \cdots \right) A_i^2 \\
&= I_n + \sin\theta_i A_i + (1 - \cos\theta_i) A_i^2
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

$$A_i A_j = A_j A_i = 0_n \quad (i \neq j)$$

olduğu için,

$$\begin{aligned} e^{A} &= \prod_{i=1}^{p} e^{\theta_i A_i} = \prod_{i=1}^{p}\left(I_n + \sin\theta_i A_i + (1-\cos\theta_i)\, A_i^2\right) \\ &= I_n + \sum_{i=1}^{p}\left(\sin\theta_i A_i + (1-\cos\theta_i)\, A_i^2\right) \end{aligned}$$

olur.

$1/4\left(A-A^T\right)^2$ matrisi PE^2P^T şeklindedir. Burada,

$$E_i^2 = \begin{pmatrix} -\theta_i^2 & 0 \\ 0 & -\theta_i^2 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece, $-1/4\left(A-A^T\right)^2$ matrisinin özdeğerleri:

$$(\theta_1^2, \theta_1^2, ..., \theta_m^2, \theta_m^2, \underbrace{0, ..., 0}_{n-2m})$$

dir ve buradan $\{\theta_1, ..., \theta_p\}$, $-1/4\left(A-A^T\right)^2$ simetrik matrisinin özdeğerlerinin pozitif kareköklerididir.

Şimdi A_j'lerin tekliğini gösterelim. Eğer A_j'lerin gerekli özellikleri sağlayan matrisler olduğunu varsayarsak, A_j'lerin özelliklerini kullanarak

$$\begin{gathered} A = \sum_{i=1}^{p}\theta_i A_i \\ A^3 = -\sum_{i=1}^{p}\theta_i^3 A_i \\ A^5 = \sum_{i=1}^{p}\theta_i^5 A_i \\ \vdots \\ A^{2p-1} = (-1)^{p-1}\sum_{i=1}^{p}\theta_i^{2p-1} A_i \end{gathered} \tag{3.4}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemin determinantı:

$$\delta_n = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_p \\ -\theta_1^3 & -\theta_2^3 & \cdots & -\theta_p^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{p-1}\theta_1^{2p-1} & (-1)^{p-1}\theta_2^{2p-1} & \cdots & (-1)^{p-1}\theta_p^{2p-1} \end{bmatrix}$$

dir. Dikkat edelim ki yukarıdaki matris

$$diag(1,-1,1,-1,...,1,(-1)^{p-1})$$

diagonal matrisinin

$$\left(\prod_{i=1}^{p}\theta_i\right)V\left(\theta_1^2,...,\theta_p^2\right)$$

matrisiyle çarpımıdır. Buradaki $V\left(\theta_1^2,...,\theta_p^2\right)$, Vandermonde matrisidir. Bu yüzden, δ_n determinantı hemen hesaplanabilir ve biz

$$\delta_n=(-1)^{p(p-1)/2}\prod_{i=1}^{p}\theta_i\prod_{1\leq i<j\leq p}(\theta_j^2-\theta_i^2)$$

elde ederiz.

θ_i'ler pozitif ve hepsi birbirinden farklı olduğu için, $\delta_n\neq 0$'dır. Böylece, $A_1,...,A_p$ bir tek şekilde A'dan belirlenir ve özdeğerleri sıfırdan farklıdır. ∎

Herhangi $n\times n$ tipinde ters simetrik A matrisi verildiğinde, $\theta_1,...,\theta_p$ ve $A_1,...,A_p$'yi yukarıdaki gibi hesaplayabiliriz.

Bir önceki teoremden $\left\{\theta_1^2,...,\theta_p^2\right\}$, $-1/4\left(A-A^T\right)^2$ simetrik matrisinin birbirden farklı sıfır olmayan özdeğerleridir ve simetrik matrislerin özdeğerlerini hesaplamak için birkaç sayısal metod vardır. O zaman, biz $A_1,...,A_p$'yi Teorem 3.24'ün ispatında kullanılan (3.4) nolu lineer denklem sistemini çözerek bulabiliriz.

Dikkat ediniz ki A_j her biri k_j katlılığa ve $n-2k_j$ tane sıfır katlılığa sahip olan $i,-i$ özdeğerlerine sahiptir. Şimdi yukarıdaki yapıyı $\mathbf{SO}\,(n)$'deki dönmeler için bir önteorem olarak yeniden ifade edebiliriz.

Önteorem 3.25 ($Gallier$ *ve* Xu 2003) *Her* $R \in \mathbf{SO}(n)$ *dönme matrisi için,*

$$R = PDP^T$$

olacak şekilde bir D *blok diagonal matrisi ve* P *ortogonal matrisi vardır. Buradaki* D*,*

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & \cdots & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ & \cdots & D_m & \\ \cdots & & & I_{n-2m} \end{pmatrix}$$

şeklindeki blok diagonal matristir ve buradaki ilk m *tane* D_i *blokları*

$$D_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \quad 0 < \theta_i \leq \pi$$

şeklindedir.

$\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ exponensiyel dönüşümün örtenliğini kullanarak, önteorem 3.23'den, önteorem 3.25'den ve eğer

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_i \\ \theta_i & 0 \end{pmatrix}$$

ise o zaman

$$e^{E_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

olacağından $n \geq 3$ olmak üzere, $\mathbf{SO}(n)$'deki dönmeler için aşağıdaki karakterizasyonu elde ederiz:

Önteorem 3.26 (*Gallier ve Xu* 2003) *Herhangi $n \geq 3$ olmak üzere $R \in \mathbf{SO}(n)$ dönme matrisi verilsin. Eğer*

$$\left\{e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, ..., e^{i\theta_p}, e^{-i\theta_p}\right\}$$

R'nin 1'den farklı özdeğerlerinin kümesi ise $0 < \theta_i \leq \pi$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A &= \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \cdots + \theta_p A_p \\ A_i A_j &= A_j A_i = 0_n \quad (i \neq j) \\ A_i^3 &= -A_i \end{aligned}$$

olacak şekilde p tane $A_1, ..., A_p$ ters simetrik matrisleri vardır. Burada her i, j için $1 \leq i, j \leq p$ ve $2p \leq n$'dir ve ayrıca

$$R = e^{\theta_1 A_1 + \cdots + \theta_p A_p} = I_n + \sum_{i=1}^{p} (\sin \theta_i A_i + (1 - \cos \theta_i) A_i^2)$$

dir.

Önteorem 3.26 gösterir ki,

$$\{\cos \theta_1, ..., \cos \theta_p\}$$

$1/2\left(R + R^T\right)$ simetrik matrisinin 1'den farklı özdeğerlerinin kümesidir. Ancak, $A_1, ..., A_p$ matrisleri kesinlikle tek değildir. Bu $\theta_i = \pi$ olduğunda $\sin \theta_i = 0$ olmasından kaynaklanır. Aynı zamanda R'den $A_1, ..., A_p$ matrislerini elde etmek mümkündür.

4. 3 Boyutlu Lorentz Uzayında Dönme Matrislerinin Üretilmesi

Bu bölümde ilk olarak Lorentz uzayında dönme matrislerini üretmek için gerekli olan temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Daha sonra üç boyutlu Lorentz uzayında dönme matrislerinin nasıl üretildiği gösterilmiştir.

4.1. $\mathbb{R}_1^3$'de bir dönme matrisinin özdeğerleri

$\mathbb{R}_1^3$'de bir A matrisinin özdeğerlerini inceleyelim. A matrisinin özdeğerleri λ_1, λ_2 ve λ_3 olsun. Bu durumda, A matrisinin karakteristik polinomu

$$\triangle_A(x) = \det(xI - A) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$$

olur. $x = 0$ yazarsak, $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ elde edilir. Yani, dönme matrisinin özdeğerlerinin çarpımı 1'dir. Dolayısıyla, özdeğerlerinden biri kesinlikle 1 olmalıdır. Diğer özdeğerleri ise, dönme ekseninin spacelike veya timelike olmasına göre değişir.

Dönme ekseni timelike ise, Lorentz dönme matrisinin özdeğerleri

$$1,\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \text{ ve } e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

değerleridir.

Dönme ekseni spacelike ise, Lorentz dönme matrisinin özdeğerleri

$$1,\ e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta \text{ ve } e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta$$

değerleridir (Özdemir 2010).

Sonuç 4.27 (*Özdemir* 2010)

i) *Eğer dönme ekseni timelike vektör ise, o zaman $\mathbb{R}_1^3$'de Lorentz dönme matrisinin özdeğerleri*

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \ \textit{ve}\ \lambda_3 = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

dir.

ii) *Eğer dönme ekseni spacelike vektör ise, o zaman* $\mathbb{R}^3_1$*'de Lorentz dönme matrisinin özdeğerleri*

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta \ \textit{ve}\ \lambda_3 = e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta$$

dir.

Not 1 (*Özdemir* 2010) $\mathbb{R}^3_1$*'de dönme matrisinin timelike dönme ekseninden başka özdeğerleri kompleks bileşenli null vektörlerdir. Aynı şekilde,* $\mathbb{R}^3_1$*'de dönme matrisinin spacelike dönme ekseninden başka özdeğerleri reel bileşenli null vektörlerdir.*

Teorem 4.28 (*Özdemir* 2010) *Bir* A *Lorentz dönme matrisinin karakteristik polinomu*

$$P(x) = x^3 - iz(A)\,x^2 + iz(A)\,x - 1$$

dir.

İspat. $\mathbb{R}^3_1$'de, herhangi bir A dönme matrisinin karaktersik polinomu, $C \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$P(x) = \det(xI - A) = x^3 - iz(A)\,x^2 + Cx - 1$$

formundadır. Özdeğerlerinden biri 1 olduğundan $P(1) = 0$ olmalıdır. Buradan, $C = iz(A)$ elde edilir. Böylece, karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - iz(A)\,x^2 + iz(A)\,x - 1 \\ &= (x-1)\left(x^2 + (1 - iz(A))\,x + 1\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

Not 2 (*Özdemir* 2010)

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 + (1 - iz(A))\,x + 1\right)$$

olduğundan dolayı,

$$x^2 + (1 - iz(A))\,x + 1$$

denkleminin kökleri diğer özdeğerlerdir.

Bu denklemde, biz diskrimantı

$$\triangle = (1 - iz(A))^2 - 4 = (iz(A))^2 - 2(iz(A)) - 3 = (iz(A)+1)(iz(A)-3)$$

olarak buluruz. Buradan, $\triangle < 0$ *ise* $-1 < iz(A) < 3$ *olur. Yani; Minkowski 3-uzayında bir dönme matrisi verildiğinde izi* -1 *ile* 3 *arasında ise, o zaman özdeğerler kompleks sayıdır ve dönme ekseni timelikedir. Diğer durumda, yani* $\triangle > 0$ *ise* $iz(A) \geq 3$ *veya* $iz(A) \leq -1$ *olur. O zaman özdeğerler reel sayıdır ve dönme ekseni spacelikedır.*

4.2. $\mathbb{R}_1^3$'de bir dönme matrisinin dönme açısının hesaplanması

Teorem 4.29 (*Özdemir* 2010) *A,* $\mathbb{R}_1^3$*'de bir dönme matrisi olsun.*

i) *Eğer dönme ekseni spacelike ise, o zaman bu eksen etrafındaki hiperbolik dönme açısı* θ*'dır ve dönme ekseninin bu eksen etrafındaki hiperbolik dönme açısının kosinüsü* $\cosh\theta = \frac{1}{2}(iz(A) - 1)$ *olarak verilir.*

ii) *Eğer dönme ekseni timelike ise, o zaman bu eksen etrafındaki küresel dönme açısı* θ*'dır ve dönme ekseninin bu eksen etrafındaki küresel dönme açısının kosinüsü* $\cos\theta = \frac{1}{2}(iz(A) - 1)$ *olarak verilir.*

İspat. Eğer dönme ekseni timelike ise, o zaman A'nın karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (\lambda - 1)\left(\lambda - e^{i\theta}\right)\left(\lambda - e^{-i\theta}\right) \\ &= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1\right) \\ &= \lambda^3 - (1 + 2\cos\theta)\lambda^2 + (1 + 2\cos\theta) - 1 \end{aligned}$$

Diğer taraftan, eğer dönme ekseni spacelike ise, o zaman A'nın karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (\lambda - 1)\left(\lambda - e^{\theta}\right)\left(\lambda - e^{-\theta}\right) \\ &= \lambda^3 - (1 + 2\cosh\theta)\lambda^2 + (1 + 2\cosh\theta) - 1 \end{aligned}$$

Böylece, önceki teoremle karşılaştırılırsa, dönme ekseninin karakteri sırasıyla timelike veya spacelike olmasına göre

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(iz(A) - 1) \text{ veya } \cosh\theta = \frac{1}{2}(iz(A) - 1)$$

olarak bulunur. ■

Örnek 4.30 $\mathbb{R}^3_1$*'de,*

$$\begin{bmatrix} 9/4 & -2 & 1/4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -7/4 & 2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

dönme matrisinin özdeğerlerini bulalım.

Bu matrisin izi $9/4 + 1 + 1/4 = 7/2 > 3$ *olduğundan, o zaman* $2\cosh\theta + 1 = 7/2$ *ve buradan* $\cosh\theta = 5/4$ *ve* $\sinh\theta = 3/4$ *olur. Böylece bu matrisin özdeğerleri* $\cosh\theta + \sinh\theta = 2$ *ve* $\cosh\theta - \sinh\theta = 1/2$ *olur.*

Örnek 4.31 $\mathbb{R}^3_1$*'de,*

$$\begin{bmatrix} 15/2 & -5/2 & -7 \\ 11/2 & -5/2 & -5 \\ 5 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

dönme matrisinin özdeğerlerini bulalım.

Bu matrisin izi $15/2 - 5/2 - 5 = 0$ *olduğundan, o zaman* $2\cos\theta + 1 = 0$ *ve* $\cos\theta = -1/2$, $\sin\theta = \sqrt{3}/2$ *olur. Buradan dönme matrisinin* $2\pi/3$ *dönme açısına sahip olduğu görülür. Buradan; diğer özdeğerler* $\cos\theta + i\sin\theta = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ *ve* $\cos\theta - i\sin\theta = -1/2 - i\sqrt{3}/2$ *olur.*

4.3. $\mathbb{R}_1^3$'de Dönme Matrisi Elde Etme Yöntemleri

Bu bölümde $\mathbb{R}_1^3$ uzayında dönme matrislerinin üretilmesinde kullanılan yöntemler verilecektir. İlk olarak Özdemir ve Ergin (2006) tarafından $\mathbb{R}_1^3$'de birim timelike kuaterniyonları kullanarak dönme matrisinin nasıl elde edileceği gösterilecektir. Daha sonra yine $\mathbb{R}_1^3$ uzayında dönme matrislerinin üretilmesinde kullanılan Rodrigues formülü ve Cayley formülü verilecektir.

4.3.1. 1. Yöntem: Timelike Kuaterniyonlar

Teorem 4.32 (*Özdemir ve Ergin* 2006) *q ve r timelike kuaterniyonlar olsun. Bu durumda,*

$$\widehat{R} : \mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}} \to \mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}}, \quad \widehat{R}_q(r) = q * r * q^{-1}$$

şeklinde tanımlanan $\widehat{R}$ dönüşümü, normu ve r timelike kuaterniyonunun skalar kısmını koruyan lineer bir dönüşümdür.

İspat. $\widehat{R}_q(r)$'nun skalar kısmı

$$S(\widehat{R}_q(r)) = S\left(q * r * q^{-1}\right) = S\left(q * q^{-1} * r\right) = S(r)$$

olduğundan $\widehat{R}$ dönüşümü r kuaterniyonunun skalar kısmını değiştirmez. Yine,

$$N(\widehat{R}_q(r)) = N\left(q * r * q^{-1}\right) = N(q)\,N(r)\,N\left(q^{-1}\right) = N(r)$$

olduğundan $\widehat{R}$ normu koruyan bir dönüşümdür. Ayrıca, $r, r' \in \mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}}$ için

$$\begin{aligned} \widehat{R}_q(ar + r') &= q * (ar + r') * q^{-1} = \left(q * ar * q^{-1}\right) + \left(q * r * q^{-1}\right) \\ &= a\left(q * r * q^{-1}\right) + \left(q * r' * q^{-1}\right) = a\widehat{R}_q(r) + \widehat{R}_q(r') \end{aligned}$$

olduğundan $\widehat{R}$ lineer bir dönüşümdür. ■

Bu teoreme göre, $\widehat{R}$ dönüşümü altında r timelike kuaterniyonunun skaler kısmı değişmediğine göre, burada sadece $r = (Sr, \mathbf{V}r)$ timelike kuaterniyonunun vektörel kısmının $\widehat{R}$ dönüşümü altında nasıl değiştiği incelenecektir. Buna göre, $q * \mathbf{V}r * q^{-1}$ split kuaterniyon çarpımı kullanılarak, üç boyutlu Minkowski uzayında dönmeler incelenecektir. $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ timelike kuaterniyonu için, $(q * \mathbf{V}r * q^{-1})_i$ ile bu kuaterniyonun i.inci bileşeni kastedilmek üzere,

$$\left(q * \mathbf{V}r * q^{-1}\right)_i = \sum_{j=1}^{3} \widehat{R}_{ij}(\mathbf{V}r)_j$$

eşitliği kullanılarak, $\widehat{R}$ dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\widehat{R}_q = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 & 2q_1q_4 - 2q_2q_3 & -2q_1q_3 - 2q_2q_4 \\ 2q_2q_3 + 2q_4q_1 & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & -2q_3q_4 - 2q_2q_1 \\ 2q_2q_4 - 2q_1q_3 & 2q_2q_1 - 2q_3q_4 & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matrisin tüm satırları ve sütunları Lorentziyen anlamda ortogonaldir. Burada, q birim timelike kuaterniyon alınırsa, üç boyutlu Minkowski uzayında bir dönme matrisi elde edilir (Özdemir ve Ergin 2006).

Örnek 4.33 $q = (\sqrt{3}/2, 1/2, 0, 0)$ *birim timelike kuaterniyonunu göz önüne alalım. Bu timelike kuaterniyona karşılık gelen dönme matrisi* $\widehat{R}_q$ *matrisinden yararlanarak*

$$\widehat{R}_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada, $q = (\sqrt{3}/2, 1/2, 0, 0)$ *birim timelike kuaterniyonu* $i = (1, 0, 0)$ *timelike ekseni etrafında* $120°$*lik bir açı kadar dönmeyi ifade etmektedir.*

Örnek 4.34 *Yine spacelike vektörlü* $p = (2, 1, 0, 2)$ *timelike kuaterniyonuna karşılık gelen dönme matrisi de*

$$\widehat{R}_p = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -4 \\ 8 & 7 & -4 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada ise, p *timelike kuaterniyonu* $\varepsilon = (1/\sqrt{3}, 0, 2/\sqrt{3})$ *spacelike ekseni etrafındaki* $\cosh\theta = 2$ *ve* $\sinh\theta = \sqrt{3}$ *olan* 2θ*'lık bir açı kadar dönmeyi ifade eder.*

Burada, verilen 3×3 tipindeki bir dönme matrisi için, bu matrise karşılık gelen kuaterniyonlar (q ve $-q$) bulunabilir. Bunun için $q_1 \neq 0$ ise,

$$\begin{aligned} q_1^2 &= \frac{1}{4}(1+\widehat{R}_{11}+\widehat{R}_{22}+\widehat{R}_{33}) \\ q_2 &= \frac{1}{4q_1}(\widehat{R}_{32}-\widehat{R}_{23}) \\ q_3 &= -\frac{1}{4q_1}(\widehat{R}_{13}+\widehat{R}_{31}) \\ q_4 &= \frac{1}{4q_1}(\widehat{R}_{21}+\widehat{R}_{12}) \end{aligned}$$

formülleri kullanılabilir. $q_1 = 0$ ise,

$$q_3 = -\frac{1}{2q_2}\widehat{R}_{12},\ q_4 = -\frac{1}{2q_2}\widehat{R}_{12} \text{ ve } q_2^2 = 1 + q_3^2 + q_4^2$$

formülleri kullanılabilir. $0 < q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2$ olduğundan dolayı, bu formülleri kullanarak $q_1 = 0$ olması durumunda dönme matrisine karşılık gelen timelike kuaterniyonu bulmak mümkündür. Çünkü, $0 < q_2^2 - q_3^2 - q_4^2$ ve $q_2 \neq 0$ olur.

Bunun yanında, bu formüllerden başka bir yöntem de kullanılabilir: $\widehat{R}_q \in$ $\mathbf{SO}(3,1)$ dönme matrisi için verildiğinde, önce bu dönme matrisinde 1 karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik birim vektör $\overrightarrow{\varepsilon}$ bulunur. Bu vektörün causal karakteri aynı zamanda timelike kuaterniyonun vektörel kısmının causal karakterini belirtir. Daha sonra, $\widehat{R}_{qi,i}$ ifadeleri eşlenerek ve $\overrightarrow{\varepsilon}$ vektörünün timelike yada spacelike olmasına göre

$$\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} = 1 \text{ veya } \cosh^2\frac{\theta}{2} - \sinh^2\frac{\theta}{2} = 1$$

özdeşlikleri kullanılarak θ açısı bulunur ve yine $\overrightarrow{\varepsilon}$ dönme ekseninin timelike ya da spacelike olmasına göre q kuaterniyonu

$$\pm(\cos\frac{\theta}{2} + \overrightarrow{\varepsilon}\sin\frac{\theta}{2}) \text{ veya } \pm(\cosh\frac{\theta}{2} + \overrightarrow{\varepsilon}\sinh\frac{\theta}{2})$$

olarak hesaplanabilir (Özdemir ve Ergin 2006).

Örnek 4.35 $A \in \mathbf{SO}(3,1)$ *matrisi*

$$A = \begin{bmatrix} 9/4 & -2 & 1/4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -7/4 & 2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

olsun. $+1$ *karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik birim vektör yani dönme ekseni* $\overrightarrow{\varepsilon} = (2,1,-2)$ *olarak bulunabilir.* $\overrightarrow{\varepsilon}$ *vektörü spacelike bir vektördür. Dolayısıyla A dönme matrisine karşılık gelen birim timelike kuaterniyon çifti* $\pm(\cosh\frac{\theta}{2} + \overrightarrow{\varepsilon}\sinh\frac{\theta}{2})$ *formundadır. Buna göre,*

$$A_{1,1} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = \frac{9}{4} \ \textit{ve}\ q = \pm(\cosh\frac{\theta}{2} + (2,1,-2)\sinh\frac{\theta}{2})$$

olduğu kullanılarak, A dönme matrisine karşılık gelen birim timelike kuaterniyon

$$q = \pm(\frac{3}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{-2}{\sqrt{8}})$$

olarak bulunur.

Örnek 4.36 $B \in \mathbf{SO}(3,1)$ *matrisi*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2}/2 - 1 & -\sqrt{2}/2 - 1 \\ \sqrt{2}/2 + 1 & -1/2 & \sqrt{2} - 1/2 \\ 1 - \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} - 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

olsun. Benzer şekilde, dönme ekseni $\overrightarrow{\varepsilon} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ *olarak bulunur ve bu vektör timelike bir vektördür. Buna göre B dönme matrisine karşılık gelen timelike kuaterniyon çifti* $\pm(\cos\frac{\theta}{2} + \overrightarrow{\varepsilon}\sin\frac{\theta}{2})$ *formundadır. Böylece,*

$$B_{1,1} = 2 \ \textit{ve}\ q = \pm(\cos\frac{\theta}{2} + \overrightarrow{\varepsilon}\sin\frac{\theta}{2})$$

eşitlikleri kullanılarak B dönme matrisine karşılık gelen kuaterniyon çifti elde edilebilir. Burada, $\sin(\theta/2) = \pm\sqrt{2}/2$ *ve* $\cos(\theta/2) = \pm\sqrt{2}/2$ *olduğundan, B dönme matrisi* $\overrightarrow{\varepsilon} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ *timelike eksen etrafında* $90°$*lik dönmeyi ifade etmektedir.*

Teorem 4.37 (*Özdemir ve Ergin* 2006) $\mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}}_1$ *birim timelike kuaterniyonlar kümesi için,* $q = \cosh\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sinh\theta \in \mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}}_1$ *kuaterniyonunun vektörel kısmı spacelike olsun.* $\overrightarrow{\varepsilon}$*, üç boyutlu Minkowski uzayında non-lightlike bir vektör ise,*

$$\widehat{R}_q(\overrightarrow{\varepsilon}) = q * \overrightarrow{\varepsilon} * q^{-1}$$

dönüşümü, $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ spacelike ekseni etrafında 2θ kadar hiperbolik dönmeyi ifade eder.

3 boyutlu Minkowski uzayında, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$ standart spacelike vektörü etrafındaki α açılık dönmeyi,

$$\widehat{R}_{q_j} = \begin{bmatrix} \cosh\alpha & 0 & \sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\alpha & 0 & \cosh\alpha \end{bmatrix}$$

ve $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$ standart spacelike vektörü etrafındaki β açılık dönmeyi

$$\widehat{R}_{q_k} = \begin{bmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta & 0 \\ \sinh\beta & \cosh\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ortonormal matrisleriyle ya da sırasıyla,

$$q_j = (\cosh\frac{\alpha}{2}, 0, -\sinh\frac{\alpha}{2}, 0) \text{ ve } q_k = (\cosh\frac{\beta}{2}, 0, 0, \sinh\frac{\beta}{2})$$

birim timelike kuaterniyonlarıyla ifade etmek mümkündür.

Teorem 4.38 (*Özdemir ve Ergin* 2006) $\mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}}_1$ *birim timelike kuaterniyonlar kümesi için,* $q = \cosh\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sinh\theta \in \mathbb{T}\widehat{\mathbb{H}}_1$ *kuaterniyonunun vektörel kısmı timelike olsun.* $\overrightarrow{\varepsilon}$*, üç boyutlu Minkowski uzayında non-lightlike bir vektör ise,*

$$\widehat{R}_q(\overrightarrow{\varepsilon}) = q * \overrightarrow{\varepsilon} * q^{-1}$$

dönüşümü, $\overrightarrow{\varepsilon_0}$ timelike ekseni etrafında 2θ kadar dönmeyi ifade eder.

4.3.2. 2. Yöntem: Rodrigues Formülü

Rodrigues formülü, dönme ekseni ve bu eksen etrafındaki dönme açısı verildiğinde dönme matrisini bulmak için oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Bu formül A matrisi 3×3 tipinde yarı ters simetrik bir matris olarak verildiğinde e^A'nın hesaplanmasına izin verir. Eğer biz $\mathbb{R}^3_1$'de yarı ters simetrik matrisi $\mathbf{u} = (a, b, c)$ birim vektör olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

olarak alırsak, o zaman $A^3 = -A$ özelliğini kullanarak Rodrigues formülünü

$$R = e^{A\theta} = I + (\sin\theta)\, A + (1 - \cos\theta)\, A^2$$

olarak elde ederiz.

Minkowski 3 uzayında Rodrigues formülü dönme ekseninin spacelike veya timelike olmasına göre değişir. Eğer dönme ekseni spacelike ise o zaman $A^3 = A$'dır, ancak dönme ekseni timelike ise o zaman $A^3 = -A$ olur. Böylece $\mathbb{R}^3_1$'de Rodrigues formülü,

i) Dönme ekseni timelike ise,

$$R = e^{A\theta} = I + (\sin\theta)\, A + (1 - \cos\theta)\, A^2$$

ii) Dönme ekseni spacelike ise,

$$R = e^{A\theta} = I + (\sinh\theta)\, A + (\cosh\theta - 1)\, A^2$$

olarak elde edilir (Kula vd 2005).

Örnek 4.39 **u** *timelike olsun.*

$\mathbf{u} = (3,2,2)$ *ve* $\theta = 60^\circ$ *ise*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

için,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 6 \\ 6 & -5 & 4 \\ -6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \text{ ve } A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} R &= e^{A\theta} = I + A\theta + \frac{\theta^2}{2!}A^2 - \frac{\theta^3}{3!}A - \frac{\theta^4}{4!}A^2 + \frac{\theta^5}{5!}A + \frac{\theta^6}{6!}A^2 - \frac{\theta^7}{7!}A + \cdots \\ &= I + (\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots)A + (1 - (-1 + \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \cdots)A^2 \\ &= I + \sin\theta A + (1 - \cos\theta)\, A^2 \\ &= I + (\sqrt{3}/2)A + (1/2)\, A^2 \\ &= \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3}-3 & \sqrt{3}+3 \\ \sqrt{3}+3 & -3/2 & 3\sqrt{3}/2+2 \\ \sqrt{3}-3 & -3\sqrt{3}/2+2 & -3/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.40 **u** *spacelike olsun.*

$\mathbf{u} = (2,1,2)$ *ve* $\cosh\theta = 2$ *ise*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

için,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ ve } A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} R &= e^{A\theta} = I + A\theta + \frac{\theta^2}{2!}A^2 + \frac{\theta^3}{3!}A + \frac{\theta^4}{4!}A^2 + \frac{\theta^5}{5!}A + \frac{\theta^6}{6!}A^2 + \frac{\theta^7}{7!}A + \cdots \\ &= I + (\theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \cdots)A + (\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \cdots)A^2 \\ &= I + \sinh\theta A + (\cosh\theta - 1)\,A^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\cosh\theta = 2$ *iken* $\sinh\theta = \sqrt{3}$ *olacağından,*

$$\begin{aligned} R &= I + \sqrt{3}A + (2-1)\,A^2 \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 2\sqrt{3}-2 & \sqrt{3}+4 \\ 2\sqrt{3}+2 & 1 & 2\sqrt{3}+2 \\ \sqrt{3}-4 & 2-2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

4.3.3. 3. Yöntem: Cayley Formülü

$\mathbf{u} = (a, b, c)$ birim spacelike vektör ve lightlike vektör olmayan bir vektör olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

yarı ters simetrik matrisi için

$$R = (I - A)(I + A)^{-1}$$

formülü $\mathbf{u}$ dönme ekseni olacak şekilde bir dönme matrisini verir. Bu formül Cayley formülü olarak bilinir (Özkaldı ve Gündoğan 2009).

Örneğin, biz $\mathbf{u} = (3, 2, 2)$ timelike vektörünü alırsak, o zaman $R = (I - A)(I + A)^{-1}$ matrisi

$$R = \begin{bmatrix} 9 & -8 & -4 \\ 4 & -4 & -1 \\ 8 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

olacaktır.

Eğer $\mathbf{u} = (a, b, c)$ vektörünü birim spacelike vektör alırsak, o zaman $-a^2 + b^2 + c^2 = 1$ olur. Buradan $A + I$ matrisinin determinantı 0'dır ve bu yüzden $(A + I)$ matrisinin tersi yoktur ve Cayley formülü kullanılamaz.

Sonuç olarak, $\mathbf{u} = (a, b, c)$ dönme ekseni olmak üzere Cayley formülü ile üretilen dönme matrisi

$$\frac{1}{[\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 1]} \begin{bmatrix} -(a^2 + b^2 + c^2 + 1) & 2c + 2ab & 2ac - 2b \\ 2c - 2ab & a^2 + b^2 - c^2 - 1 & 2bc - 2a \\ -2b - 2ac & 2a + 2bc & a^2 - b^2 + c^2 - 1 \end{bmatrix}$$

olarak üretilir.

5. 4 Boyutlu Lorentz Uzayında Dönme Matrislerinin Üretilmesi

Bu bölümde $\mathbb{R}_1^4$ ve $\mathbb{R}_2^4$ uzayında dönme matrislerinin üretilmesinde kullanılan yöntemler verilecektir. İlk olarak Özdemir tarafından $\mathbb{R}_1^4$'de 4×4 tipinde yarı ters simetrik A matrisi için Rodrigues-like formülünün üretilmesinde kullanılan yöntem verilecek. İkinci olarak da Kula, Karacan ve Yaylı (2005) tarafından $\mathbb{R}_2^4$'de 4×4 tipinde yarı ters simetrik A matrisi verildiğinde e^A'nın nasıl hesaplanacağını gösteren yöntem verilecektir. Böylece 4 boyutlu Lorentz uzayında dönme matrislerinin üretilmesi için iki farklı metod gösterilmiş olacaktır.

5.1. $\mathbb{R}_1^4$ uzayında dönme matrislerinin üretilmesi

Bu bölümde, 4×4 tipinde yarı ters simetrik matrisin exponensiyelini hesaplamak için Rodrigues-like formülü vereceğiz. Bunun için, A matrisi verildiğinde; $\{\theta_1, -\theta_1, i\theta_2, -i\theta_2\}$, A matrisinin biribirinden farklı özdeğerleri olmak üzere

$$\begin{aligned} A &= \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 \\ A_1 A_2 &= A_2 A_1 = 0 \\ A_1^3 &= A_1,\ A_2^3 = -A_2 \end{aligned}$$

olacak şekilde A matrisi ifade edilebilir.

Önteorem 5.41 (*Özdemir* 2010) *$\mathbb{R}_1^4$'de, 4×4 tipinde yarı ters simetrik*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & y & q \\ x & 0 & p & s \\ y & -p & 0 & k \\ q & -s & -k & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{K_1 - K_2 + \sqrt{(K_1 - K_2)^2 + 4K_3^2}} \\ \theta_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{(K_1 - K_2)^2 + 4K_3^2} - (K_1 - K_2)} \end{aligned}$$

olacak şekilde θ_1, $-\theta_1$, $\theta_2 i$ ve $-\theta_2 i$'dir. Burada;

$$\begin{aligned} K_1 &= x^2+y^2+q^2 \\ K_2 &= p^2+k^2+s^2 \\ K_3 &= sy-kx-pq \end{aligned}$$

dir.

İspat. Uzun süren hesaplamalardan ve $\det(\lambda I_4 - A) = 0$ olduğundan, bu matrisin özdeğerlerini

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{K_1-K_2+\sqrt{(K_1-K_2)^2+4K_3^2}} \\ \theta_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{(K_1-K_2)^2+4K_3^2}-(K_1-K_2)} \end{aligned}$$

olacak şekilde θ_1, $-\theta_1$, $\theta_2 i$ ve $-\theta_2 i$ olarak buluruz. Açıktır ki,

$$K_1-K_2 \leq \sqrt{(K_1-K_2)^2+4K_3^2}$$

olduğu için θ_1 ve θ_2 pozitif reel sayılardır. ∎

Örnek 5.42 (*Özdemir* 2010) $\mathbb{R}_1^4$*'de,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerini bulalım.

Bunun için, öncelikle K_1, K_2 ve K_3 değerlerini bulmalıyız.

$$\begin{aligned} K_1 &= x^2+y^2+q^2 = 1^2+3^2+4^2 = 26 \\ K_2 &= p^2+k^2+s^2 = 2^2+1^2+3^2 = 14 \\ K_3 &= sy-kx-pq = 1\cdot 3 - 3\cdot 1 - 2\cdot 4 = -8 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{26-14+\sqrt{(26-14)^2+4\,(-8)^2}}=4 \\
\theta_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{(26-14)^2+4\,(-8)^2}-(26-14)}=2
\end{aligned}$$

olur. Böylece bu matrisin özdeğerlerini 4, -4, $2i$ *ve* $-2i$ *olarak buluruz.*

Önteorem 5.43 (*Özdemir* 2010) $(-,+,+,+)$ *işaretine sahip* 4×4 *tipinde* $A\in\mathbb{R}^4_1$ *yarı ters simetrik matrisi verilsin.*

$$A=I^*PI^*EP^T$$

olacak şekilde bir P *pseudo ortogonal matrisi ve bir* E *blok matrisi vardır. Buradaki* E *blok matrisi,*

$$E=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \text{ veya } E=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve burada

$$E_1=\begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 \\ -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } E_2=\begin{pmatrix} 0 & -\theta_2 \\ \theta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

Örnek 5.44 (*Özdemir* 2010) $\mathbb{R}^4_1$*'de,*

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -28 & -16 & -16 \\ -28 & 0 & 32 & 8 \\ -16 & -32 & 0 & -14 \\ -16 & -8 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

yarı ters simetrik matrisi için $A=I^*PI^*EP^T$ *eşitliğini sağlayan* P *pseduo ortogonal matrisini bulalım.* A *matrisinin özdeğerlerini* 4, -4, $2i$, $-2i$ *olarak bulabiliriz. Yani* $\theta_1=4$ *ve* $\theta_2=2$*'dir. Buradan* E *matrisini*

$$E=\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak buluruz. Şimdi $A = I^* P I^* E P^T$ *eşitliğine göre* P *pseudo ortogonal matrisini*

$$P = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -8 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & 0 \\ -8 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak buluruz. Bu matris $\mathbb{R}_1^4$*'de pseudo ortogonal matristir.*

Not 3 (*Özdemir* 2010) *A yarı ters simetrik matrisi için,* $A = I^* P I^* E P^T$ *eşitliğini sağlayan P pseudo ortogonal matrisini bulmak kolay değildir. P matrisini bulmanın daha kolay yolları araştırılmalıdır.*

Şimdi bu bölümün önemli teoremini ispat edeceğiz. Bu teoremi kullanarak, yarı ters simetrik matrisimizi iki tane yarı ters simetrik matrise ayrıştıracağız. Böylece, $\mathbb{R}_1^4$'de 4×4 tipinde yarı ters simetrik matris için Rodrigues-like formülü elde edeceğiz.

Teorem 5.45 (*Özdemir* 2010) $\mathbb{R}_1^4$*'de null olmayan yarı ters simetrik* 4×4 *tipinde A matrisi verilsin. Eğer* $\{\theta_1, -\theta_1, i\theta_2, -i\theta_2\}$*, A'nın birbirinden farklı özdeğerleri ise, o zaman*

$$\begin{aligned} A &= \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 \\ A_1 A_2 &= A_2 A_1 = 0_4 \\ A_1^3 &= A_1,\ A_2^3 = -A_2 \end{aligned}$$

olacak şekilde iki tane tek yarı ters simetrik A_1 ve A_2 matrisleri vardır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} e^A &= e^{\theta_1 A_1 + \theta_2 A_2} \\ e^A &= I_4 + \left[(\sinh\theta_1) A_1 + (-1 + \cosh\theta_1) A_1^2\right] + \left[(\sin\theta_2) A_2 + (1 - \cos\theta_2) A_2^2\right] \end{aligned}$$

dır.

İspat. Önteorem 5.43'den, A matrisi

$$A = I^* P I^* E P^T$$

olarak yazılabilir. Buradaki E matrisi,

$$E = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_1 & 0 & 0 \\ -\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta_2 \\ 0 & 0 & \theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindeki sıfırdan farklı blokları içeren blok diagonal matristir.

Burada $\{\theta_1, -\theta_1, i\theta_2, -i\theta_2\}$, A'nın birbirinden farklı özdeğerleridir. $F_1 = \theta_1 G_1$ ve $F_2 = \theta_2 G_2$ eşitliklerini sağlayan F_1 ve F_2 matrisini alalım. Burada,

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Bu durumda, $A_1 = I^* P I^* G_1 P^T$ ve $A_2 = I^* P I^* G_2 P^T$ olur. Buradan, $P^T I^* P I^* = I$ özelliğini kullanarak,

$$A_1 A_2 = I^* P I^* G_1 P^T I^* P I^* G_2 P^T = I^* P I^* G_1 G_2 P^T = 0 \text{ ve } A_2 A_1 = 0$$

olduğunu elde ederiz. Aynı zamanda $G_1^3 = G_1$ ve $G_2^3 = -G_2$ eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} A_1^3 &= \left(I^* P I^* G_1 P^T\right)\left(I^* P I^* G_1 P^T\right)\left(I^* P I^* G_1 P^T\right) \\ &= I^* P I^* G_1 G_1 G_1 P^T \\ &= I^* P I^* G_1 P^T \\ &= A_1 \end{aligned}$$

olduğunu ve benzer şekilde de $A_2^3 = -A_2$ olduğunu elde ederiz. A_1 ve A_2 değişmeli olduğu için,

$$e^A = e^{\theta_1 A_1 + \theta_2 A_2} = e^{\theta_1 A_1} e^{\theta_2 A_2}$$

olur. Böylece 3×3 durumunda olduğu gibi $A_1^3 = A_1$ ve $A_2^3 = -A_2$ olduğunu kullanarak

$$e^{\theta_1 A_1} = I_4 + \sinh\theta_1 A_1 + (-1 + \cosh\theta_1) A_1^2$$

ve

$$e^{\theta_2 A_2} = I_4 + \sin\theta_2 A_2 + (1 - \cos\theta_2) A_2^2$$

olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten, $A_1^3 = A_1$ olması

$$j = 1, 2 \text{ ve } k \geq 0 \text{ için } A_1^{2k+j} = A_1^j$$

olduğunu gösterir ve böylece

$$\begin{aligned} e^{\theta_1 A_1} &= I_4 + \sum_{k \geq 1} \frac{\theta_1^k A_1^k}{k!} \\ &= I_4 + \left(\frac{\theta_1}{1!} + \frac{\theta_1^3}{3!} + \frac{\theta_1^5}{5!} + \cdots \right) A_1 + \left(\frac{\theta_1^2}{2!} + \frac{\theta_1^4}{4!} + \frac{\theta_1^6}{6!} + \cdots \right) A_1^2 \\ &= I_4 + \sinh\theta_1 A_1 + (-1 + \cosh\theta_1) A_1^2 \end{aligned}$$

olur.

Benzer olarak, $A_2^3 = -A_2$ olması

$$j = 1, 2 \text{ ve } k \geq 0 \text{ için } A_2^{4k+j} = A_2^j \text{ ve } A_2^{4k+2+j} = -A_2^j$$

olduğunu gösterir ve böylece

$$\begin{aligned} e^{\theta_2 A_2} &= I_4 + \sum_{k \geq 1} \frac{\theta_2^k A_2^k}{k!} \\ &= I_4 + \left(\frac{\theta_2}{1!} - \frac{\theta_2^3}{3!} + \frac{\theta_2^5}{5!} - \cdots \right) A_2 + \left(\frac{\theta_2^2}{2!} - \frac{\theta_2^4}{4!} + \frac{\theta_2^6}{6!} - \cdots \right) A_2^2 \\ &= I_4 + \sin\theta_2 A_2 + (1 - \cos\theta_2) A_2^2 \end{aligned}$$

olur. $A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0_4$ olduğu için,

$$\begin{aligned} e^A &= e^{\theta_1 A_1} e^{\theta_2 A_2} \\ &= \left(I_4 + \sinh\theta_1 A_1 + (-1 + \cosh\theta_1) A_1^2 \right) \left(I_4 + \sin\theta_2 A_2 + (1 - \cos\theta_2) A_2^2 \right) \\ &= I_4^2 + \left(A_1 \sinh\theta_1 + A_1^2 - A_1^2 \cosh\theta_1 \right) + \left(A_2 \sin\theta_2 + A_2^2 - A_2^2 \cos\theta_2 \right) \end{aligned}$$

olur. Şimdi A_1 ve A_2'nin tekliğini göstereceğiz. Eğer A_1 ve A_2 gerekli özellikleri sağlayan matrisler olduğunu varsayarsak

$$\begin{aligned} A &= \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 \\ A^2 &= \theta_1^2 A_1^2 + \theta_2^2 A_2^2 \\ A^3 &= \theta_1^3 A_1^3 + \theta_2^3 A_2^3 = \theta_1^3 A_1 - \theta_2^3 A_2 \end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. Buradan yukarıdaki denklem sistemini çözersek

$$\begin{cases} A = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 \\ A^3 = \theta_1^3 A_1 - \theta_2^3 A_2 \end{cases}$$

olur. Burada $A_1 = \dfrac{1}{\theta_2^2\theta_1 + \theta_1^3}\left(\theta_2^2 A + A^3\right)$ ve $A_2 = \dfrac{1}{\theta_1^2\theta_2 + \theta_2^3}\left(\theta_1^2 A - A^3\right)$ şeklinde buluruz. ■

Örnek 5.46 (*Özdemir* 2010) $\mathbb{R}_1^4$*'de,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -28 & -16 & -16 \\ -28 & 0 & 32 & 8 \\ -16 & -32 & 0 & -14 \\ -16 & -8 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

yarı ters simetrik matrisi için Teorem 5.45*'deki özellikleri sağlayan A_1 ve A_2 matrislerini bulalım. Bu matris için, $\theta_1 = 4$ ve $\theta_2 = 2$ olur. Buradan*
$A_1 = \dfrac{1}{\theta_2^2\theta_1 + \theta_1^3}\left(\theta_2^2 A + A^3\right)$ *ve* $A_2 = \dfrac{1}{\theta_1^2\theta_2 + \theta_2^3}\left(\theta_1^2 A - A^3\right)$ *eşitliklerini kullanarak,*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -4 & 0 \\ -7 & 0 & 8 & 0 \\ -4 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ -8 & -4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

matrislerini elde ederiz. Şimdi

$$e^A = I_4 + \left[(\sinh 4)\, A_1 + (-1 + \cosh 4)\, A_1^2\right] + \left[(\sin 2)\, A_2 + (1 - \cos 2)\, A_2^2\right]$$

formülünü kullanarak $R = e^A$*'yı*

$$\begin{bmatrix} -64a+65b & -32(a-b)-7y & 56(a-b)-4y & -8x \\ 32(a-b)-7y & 16a-15b & 28(-a+b)+8y & 4x \\ -56(a-b)-4y & -28(a-b)-8y & 49a-48b & -7x \\ -8x & -4x & 7x & a \end{bmatrix}$$

olarak hesaplayabiliriz. Burada $a = \cos 2$ *ve* $b = \cosh 4$*'dir. Aynı zamanda*

$$\sqrt{1-a^2} = x \quad ve \quad \sqrt{b^2-1} = y$$

dir. Bu dönme matrisinin özdeğerlerinin $e^4, e^{-4}, e^{2i}, e^{-2i}$ *olduğuna dikkat edelim.*

Yukarıdaki önteoremi kullanarak yarı ters simetirk matrisin özdeğerlerini bulabiliriz.

Not 4 (*Özdemir* 2010)

$$\frac{\left(A - I^*A^TI^*\right)^2}{4}$$

simetrik matrisinin özdeğerleri $\theta_1, \theta_2 > 0$ *olmak üzere* $\left\{\theta_1^2, \theta_1^2, -\theta_2^2, -\theta_2^2\right\}$ *veya* $\left\{\theta_1^2, \theta_1^2, 0, 0\right\}$*'dir.*

İspat.

$$\left(E^T\right)^2 = E^2,\ EI^*E^TI^* = I^*E^TI^*E = -E^2,\ PI^*P^TI^* = I \text{ ve } A = I^*PI^*EP^T$$

eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} AI^*A^TI^* &= \left(I^*PI^*EP^T\right)I^*\left(PE^TI^*P^TI^*\right)I^* = I^*PI^*\left(-E^2\right)P^T = -I^*PI^*E^2P^T \\ I^*A^TI^*A &= I^*\left(PE^TI^*P^TI^*\right)I^*\left(I^*PI^*EP^T\right) = I^*PI^*\left(-E^2\right)P^T = -I^*PI^*E^2P^T \end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz. Buradan,

$$\frac{1}{4}\left(A - I^*A^TI^*\right)^2 = I^*PI^*E^2P^T$$

olur. Böylece $\frac{1}{4}\left(A - I^*A^TI^*\right)^2$ matrisi $I^*PI^*E^2P^T$ şeklindedir. Burada

$$E^2 = \begin{bmatrix} \theta_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta_2^2 \end{bmatrix} \text{ veya } E^2 = \begin{bmatrix} \theta_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Yani $\frac{1}{4}\left(A - I^* A^T I^*\right)^2$ matrisinin özdeğerleri $\left\{\theta_1^2, \theta_1^2, -\theta_2^2, -\theta_2^2\right\}$ veya $\left\{\theta_1^2, \theta_1^2, 0, 0\right\}$'dir. ■

Önteorem 5.47 (*Özdemir* 2010) *Her* $R \in \mathbf{SO}(4,1)$ *dönme matrisi için,*

$$R = I^* P I^* D P^T$$

olacak şekilde bir D *blok diagonal matrisi ve bir* P *pseudo ortogonal matrisi vardır. Burada* D *blok diagonal matrisi*

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \text{ veya } D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve burada

$$D_1 = \begin{pmatrix} \cosh\theta_1 & \sinh\theta_1 \\ \sinh\theta_1 & \cosh\theta_1 \end{pmatrix} \text{ ve } D_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

dir. Dikkat ediniz ki, $D_i = e^{E_i}$ *eşitliklerini kullanarak* D *matrisini elde edebiliriz. Yani,* A *yarı ters simetrik matrisi tarafından üretilen* R *dönme matrisinin özdeğerleri* $e^{\theta_1}, e^{-\theta_1}, e^{i\theta_2}$ *ve* $e^{-i\theta_2}$*'dir. Böylece, yukarıdaki önteoremi kullanarak* $R \in \mathbf{SO}(4,1)$ *dönme matrisinin özdeğerlerini bulabiliriz.*

Örnek 5.48 (*Özdemir* 2010) *Özdeğerleri* $e^{\ln 2}, e^{-\ln 2}, e^{i\pi/2}, e^{-i\pi/2}$ *olan* $R \in \mathbf{SO}(4,1)$ *dönme matrisinin özdeğerlerini bulalım. O zaman,* $\cosh(\ln 2) = 5/4$, $\sinh(\ln 2) = 3/4$, $\cos\pi/2 = 0$ *ve* $\sin\pi/2 = 1$ *olur ve* D *matrisi de*

$$D = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 5/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Şimdi P *pseudo ortogonal matrisini*

$$P = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -8 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & 0 \\ -8 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak alalım. O zaman, $R = I^* P I^* D P^T$ eşitliğini kullanarak R dönme matrisini

$$R = \begin{bmatrix} 325/4 & 181/4 & -67 & -8 \\ -139/4 & -75/4 & 29 & 4 \\ 73 & 41 & -60 & -7 \\ -8 & -4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde ederiz. Bu matrisin özdeğerlerini kontrol edersek, $2, \frac{1}{2}, -i, i$ olduğunu buluruz. Bu da kısacası $e^{\ln 2}, e^{-\ln 2}, e^{i\pi/2}, e^{-i\pi/2}$'dir.

Sonuç 5.49 (*Özdemir* 2010) *Herhangi $R \in \mathbf{SO}(4,1)$ dönme matrisi verildiğinde, Eğer $\left\{e^{-\theta_1}, e^{\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{-i\theta_2}\right\}$, $\theta_1 > 1$ ve $0 < \theta_2 < \pi$ olmak üzere R'nin 1'den farklı özdeğerlerinin kümesi ise,*

$$\begin{aligned} A &= \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 \\ A_1 A_2 &= A_2 A_1 = 0_4 \\ A_1^3 &= A_1,\ A_2^3 = -A_2 \end{aligned}$$

olacak şekilde A_1 ve A_2 yarı ters simetrik matrisleri vardır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} R &= e^A = I_4 + \left[(\sinh\theta_1) A_1 + (-1 + \cosh\theta_1) A_1^2\right] \\ &\quad + \left[(\sin\theta_2) A_2 + (1 - \cos\theta_2) A_2^2\right] \end{aligned} \tag{5.1}$$

dir. Dikkat edelim ki $\{\cosh\theta_1, \cos\theta_2\}$ kümesi, $\frac{1}{2}\left(R + I^* R^T I^*\right)$ ters simetrik matrisinin 1'den farklı özdeğerleridir. Böylece biz $\cosh\theta_1$ ve $\cos\theta_2$'i bulabiliriz. Aynı zamanda aşağıdaki teoremi kullanarak A_1 ve A_2 matrislerini de bulabiliriz.

Teorem 5.50 (*Özdemir* 2010) *R, $\mathbb{R}_1^4$'de bir dönme matrisi olsun. O zaman* (5.1) *eşitliğini sağlayan A_1 ve A_2 matrisleri,*

$$A_1 = \frac{\cos\theta_2\left(R - I^* R^T I^*\right) - \frac{1}{2}(R^2 - I^* \left(R^2\right)^T I^*)}{2\cos\theta_2 \sinh\theta_1 - \sinh 2\theta_1}$$

ve

$$A_2 = \frac{\cosh\theta_1\left(R - I^* R^T I^*\right) - \frac{1}{2}(R^2 - I^* \left(R^2\right)^T I^*)}{2\cosh\theta_1 \sin\theta_2 - \sin 2\theta_2}$$

formüllerini kullanarak bulunabilir. Burada $\left\{e^{-\theta_1}, e^{\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{-i\theta_2}\right\}$ kümesi, R'nin birbirinden farklı özdeğerlerinin kümesidir.

5.2. $\mathbb{R}_2^4$ uzayında dönme matrislerinin üretilmesi

$\mathbb{R}_2^4$ uzayında 4×4 tipindeki yarı ters simetrik matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_6 & a_5 & a_3 \\ a_6 & 0 & a_4 & -a_2 \\ a_5 & a_4 & 0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

olarak göz önüne alalım. Burada

$$A^T = -\varepsilon A \varepsilon, \ \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi bazı önbilgileri verelim.

Önteorem 5.51 (*Kula vd* 2005) (5.2) *matrisinin karakteristik polinomu* $p(\lambda)$ *olsun. O zaman* $p(-\lambda) = p(\lambda)$*'dır.*

İspat.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det\left(A^T - \lambda I\right) \\ &= \det(-\varepsilon A \varepsilon - \lambda I) \\ &= \det(\varepsilon A \varepsilon + \lambda I) \\ &= \det(\varepsilon(A + \lambda I)\varepsilon) \\ &= \det(A + \lambda I) \\ &= p(-\lambda) \end{aligned}$$

olur. ■

Önteorem 5.52 (*Kula vd* 2005) *Eğer A matrisi* (5.2) *matrisi ise o zaman,*

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 \\ b_0 &= (a_1 a_6 - a_3 a_4 - a_2 a_5)^2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$p(\lambda) = \lambda^4 + b_2 \lambda^2 + b_0$$

dır.

Sonuç 5.53 (*Kula vd* 2005) (5.2) *matrisinin özdeğerleri*

i) *Eğer $b_2^2 - 4b_0 > 0$ ve $b_2 > 0$ ise,*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\sqrt{\frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0}}{2}} = i\alpha_1,\ \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0}}{2}} = -i\alpha_1 \\ \lambda_3 &= i\sqrt{\frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0}}{2}} = i\mu_1,\ \lambda_4 = -i\sqrt{\frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0}}{2}} = -i\mu_1 \end{aligned}$$

ii) *Eğer $b_2^2 - 4b_0 > 0$ ve $b_2 < 0$ ise,*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0}}{2}} = \alpha_2,\ \lambda_2 = -\sqrt{\frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0}}{2}} = -\alpha_2 \\ \lambda_3 &= \sqrt{\frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4b_0}}{2}} = \mu_2,\ \lambda_4 = -\sqrt{\frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4b_0}}{2}} = -\mu_2 \end{aligned}$$

iii) *Eğer $b_2^2 - 4b_0 < 0$ ve $b_2 \neq 0$ ise,*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{b_0} - b_2} + \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{b_0} + b_2} = u + iv = z \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{b_0} - b_2} - \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{b_0} + b_2} = -u - iv = -z \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{b_0} - b_2} + \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{b_0} + b_2} = -u + iv = -\overline{z} \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{b_0} - b_2} - \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{b_0} + b_2} = u - iv = \overline{z} \end{aligned}$$

iv) *Eğer $b_2^2 - 4b_0 = 0$ ve $b_2 > 0$ ise,*

$$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{b_2}{2}} = i\mu,\ \lambda_2 = -i\sqrt{\frac{b_2}{2}} = -i\mu$$

Eğer $b_2^2 - 4b_0 = 0$ *ve* $b_2 < 0$ *ise,*

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{-b_2}{2}} = \alpha,\ \ \lambda_2 = -\sqrt{\frac{-b_2}{2}} = -\alpha$$

Teorem 5.54 (*Kula vd* 2005) (5.2) *matrsinin özdeğerleri için,*

i) *Eğer* $b_2^2 - 4b_0 > 0$ *ve* $b_2 > 0$ *ise,*

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\alpha_1^2 \cos\mu_1 - \mu_1^2 \cos\alpha_1}{\alpha_1^2 - \mu_1^2}, \quad b_1 = \frac{\alpha_1^3 \sin\mu_1 - \mu_1^3 \sin\alpha_1}{\alpha_1\mu_1\left(\alpha_1^2 - \mu_1^2\right)} \\ c_1 &= \frac{\cos\mu_1 - \cos\alpha_1}{\alpha_1^2 - \mu_1^2}, \qquad\qquad d_1 = \frac{\alpha_1 \sin\mu_1 - \mu_1 \sin\alpha_1}{\alpha_1\mu_1\left(\alpha_1^2 - \mu_1^2\right)} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$e^A = a_1 I + b_1 A + c_1 A^2 + d_1 A^3$$

dir. Ek olarak eğer $b_0 = 0$ *ise,*

$$a_1 = 1,\ b_1 = 1,\ c_1 = \frac{1 - \cos\mu_1}{\mu_1^2},\ d_1 = \frac{\mu_1 - \sin\mu_1}{\mu_1^3}$$

veya

$$e^A = I + \frac{\sin\mu_1}{\mu_1} A + \frac{1 - \cos\mu_1}{\mu_1} A^2$$

olur.

ii) *Eğer* $b_2^2 - 4b_0 > 0$ *ve* $b_2 < 0$ *ise,*

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\mu_2^2 \cosh\alpha_2 - \alpha_2^2 \cosh\mu_2}{\mu_2^2 - \alpha_2^2}, \quad b_2 = \frac{\alpha_2^3 \sinh\mu_2 - \mu_2^3 \sinh\alpha_2}{\alpha_2\mu_2\left(\alpha_2^2 - \mu_2^2\right)} \\ c_2 &= \frac{\cosh\alpha_2 - \cosh\mu_2}{\alpha_2^2 - \mu_2^2}, \qquad\qquad d_2 = \frac{\mu_2 \sinh\alpha_2 - \alpha_2 \sinh\mu_2}{\alpha_2\mu_2\left(\alpha_2^2 - \mu_2^2\right)} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$e^A = a_2 I + b_2 A + c_2 A^2 + d_2 A^3$$

dir. Ek olarak eğer $b_0 = 0$ *ise,*

$$a_2 = 1,\ b_2 = 1,\ c_2 = \frac{-1 + \cosh\alpha_2}{\alpha_2^2},\ d_2 = \frac{-\alpha_2 + \sinh\alpha_2}{\alpha_2^3}$$

veya

$$e^A = I + \frac{\sinh\alpha_2}{\alpha_2} A + \frac{-1 + \cosh\alpha_2}{\alpha_2} A^2$$

olur.

iii) *Eğer* $b_2^2 - 4b_0 < 0$ *ve* $b_2 \neq 0$ *ise,*

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{1}{2}\left(2uv\cosh u\cos v - \left(u^2 - v^2\right)\sinh u\sin v\right)\\
b_3 &= \frac{1}{2uv\left(u^2+v^2\right)}\left(v\left(-v^2+3u^2\right)\sinh u\cos v + u\left(-u^2+3v^2\right)\cosh u\sin v\right)\\
c_3 &= \frac{1}{2}\left(\sinh u\sin v\right)\\
d_3 &= \frac{1}{2uv\left(u^2+v^2\right)}\left(u\cosh u\sin v - v\sinh u\cos v\right)
\end{aligned}$$

ve ek olarak eğer $b_2 = 0$ *ise*

$$\begin{aligned}
a_3 &= \cosh u\cos u\\
b_3 &= \frac{1}{2u}\left(\sinh u\cos u + \cosh u\sin u\right)\\
c_3 &= \frac{1}{2u^2}\left(\sinh u\sin u\right)\\
d_3 &= \frac{1}{4u^3}\left(\cosh u\sin u - \sinh u\cos u\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$e^A = a_3 I + b_3 A + c_3 A^2 + d_3 A^3$$

dir ve burada I, 4×4 *tipinde birim matristir.*

6. n Boyutlu Lorentz Uzayında Dönme Matrislerinin Üretilmesi

Bu bölümde, $n \geq 4$ olmak üzere $n \times n$ tipinde yarı ters simetrik bir matrisin exponensiyelini hesaplamak için Rodrigues-like formülü vereceğiz. Aynı zamanda A matrisinin ayrışımında kullanılan $A_1, ..., A_p$ yarı ters simetrik matrislerinin tekliğini göstereceğiz. Aşağıdaki önteorem $A_1, ..., A_p$ matrislerinin elde edilmesinde önemli bir rol oynar.

Önteorem 6.55 $(-,+,+,\cdots,+)$ *işaretine sahip* $n \times n$ *tipinde yarı ters simetrik* $A \in \mathbb{R}_1^n$ *matrisi verildiğinde,*

$$A = I^* P I^* E P^T$$

olacak şekilde bir P *pseudo ortogonal matrisi ve bir* E *blok diagonal matrisi vardır. Buradaki* E *matrisi*

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & \cdots & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & \cdots & E_m & & \\ & & & & \\ \cdots & & & & 0_{n-2m} \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve aynı zamanda her E_i *bloğu reel iki boyutlu matris şeklindedir:*

$$E_{2i-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_{2i-1} \\ -\theta_{2i-1} & 0 \end{pmatrix} \quad ve \quad E_{2i} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_{2i} \\ \theta_{2i} & 0 \end{pmatrix} \qquad (i \geq 1)$$

Teorem 6.56 $n \geq 4$ *olmak üzere* $\mathbb{R}_1^n$*'de yarı ters simetrik* A *matrisi verilsin. Eğer*

$$\{\theta_1, -\theta_1, i\theta_2, -i\theta_2, ..., \theta_{2k-1}, -\theta_{2k-1}, i\theta_{2k}, -i\theta_{2k}\}$$

$\theta_j > 0$ *ve her* θ_i *(ve* $-\theta_i$*) ve* $i\theta_j$ *(ve* $-\theta_j$*)* $k_i, k_j \geq 0$ *katlılığa sahip olmak üzere* A*'nın birbirinden farklı özdeğerleri ise,* $1 \leq k \leq p$ *ve* $2p \leq n$ *için*

$$\begin{aligned} A &= \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \cdots + \theta_p A_p \\ A_{2k-1}A_{2k} &= A_{2k}A_{2k-1} = 0_n \\ A_{2k-1}^3 &= A_{2k-1} \quad ve \quad A_{2k}^3 = -A_{2k} \end{aligned}$$

olacak şekilde p tane tek $A_1, ..., A_p$ yarı ters simetrik matrisleri vardır. Ayrıca:

$$\begin{aligned} e^A &= e^{\theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \cdots + \theta_p A_p} \\ &= I_n + \sum_{k=1}^{p-1} \Big(\left[\sinh\theta_{2k-1} A_{2k-1} + (\cosh\theta_{2k-1} - 1)\, A_{2k-1}^2\right] \\ & \quad + \left[\sin\theta_{2k} A_{2k} + (1 - \cos\theta_{2k})\, A_{2k}^2\right] \Big) \end{aligned}$$

dir.

İspat. Önteorem 6.55'den, A matrisi

$$A = I^* P I^* E P^T$$

şeklinde yazılabilir. Burada E matrisi

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta_2 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\theta_{2k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -\theta_{2k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\theta_{2k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \theta_{2k} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde sıfırdan farklı bloklardan oluşan blok diagonal matristir.

$\{\theta_1, -\theta_1, i\theta_2, -i\theta_2, ..., \theta_{2k-1}, -\theta_{2k-1}, i\theta_{2k}, -i\theta_{2k}\}$, A'nın birbirinden farklı özdeğerleridir. $F_1, F_2, ..., F_p$ matrisleri $F_{2k-1} = \theta_{2k-1} G_{2k-1}$ ve $F_{2k} = \theta_{2k} G_{2k}$ eşitliklerini sağlayan matrisler olsunlar. Burada G_{2k-1} ve G_{2k},

$$G_{2k-1} = \begin{pmatrix} H_{2k-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad G_{2k} = \begin{pmatrix} H_{2k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde blok diagonal matrislerdir. Aynı zamanda H_{2k-1} ve H_{2k},

$$H_{2k-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad H_{2k} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde ana köşegenleri 0 olan iki boyutlu reel blok diagonal matrislerdir. Bu durumda $A_{2k-1} = I^*PI^*G_{2k-1}P^T$ ve $A_{2k} = I^*PI^*G_{2k}P^T$ olur. Buradan, $P^TI^*PI^* = I$ özelliğini kullanarak,

$$A_{2k-1}A_{2k} = I^*PI^*G_{2k-1}P^TI^*PI^*G_{2k}P^T = I^*PI^*G_{2k-1}G_{2k}P^T = 0 \text{ ve } A_{2k}A_{2k-1} = 0$$

olduğunu elde ederiz.

Aynı zamanda, $G_{2k-1}^3 = G_{2k-1}$ ve $G_{2k}^3 = -G_{2k}$ eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} A_{2k-1}^3 &= \left(I^*PI^*G_{2k-1}P^T\right)\left(I^*PI^*G_{2k-1}P^T\right)\left(I^*PI^*G_{2k-1}P^T\right) \\ &= I^*PI^*G_{2k-1}G_{2k-1}G_{2k-1}P^T \\ &= I^*PI^*G_{2k-1}I^* \\ &= A_{2k-1} \end{aligned}$$

olur ve benzer şekilde $A_{2k}^3 = -A_{2k}$ olur. A_{2k-1} ve A_{2k} değişmeli olduğu için,

$$e^A = e^{\theta_1A_1+\theta_2A_2+\cdots+\theta_{2k-1}A_{2k-1}+\theta_{2k}A_{2k}} = e^{\theta_1A_1}e^{\theta_2A_2}\cdots e^{\theta_{2k-1}A_{2k-1}}e^{\theta_{2k}A_{2k}}$$

olur. Böylece $n \times n$ durumunda olduğu gibi $A_{2k-1}^3 = A_{2k-1}$ ve $A_{2k}^3 = -A_{2k}$ olduğunu kullanırsak,

$$e^{\theta_{2k-1}A_{2k-1}} = I_n + \sinh\theta_{2k-1}A_{2k-1} + \left(\cosh\theta_{2k-1} - 1\right)A_{2k-1}^2$$

ve

$$e^{\theta_{2k}A_{2k}} = I_n + \sin\theta_{2k}A_{2k} + \left(1 - \cos\theta_{2k}\right)A_{2k}^2$$

olduğunu gösterebiliriz.

Gerçekten, $A_{2k-1}^3 = A_{2k-1}$ olması, her $j = 1, 2$ ve tüm $m \geq 0$ için

$$A_{2k-1}^{2m+j} = A_{2k-1}^j$$

olduğunu gösterir ve böylece,

$$\begin{aligned}
e^{\theta_{2k-1}A_{2k-1}} &= I_n + \sum_{m\geq 1} \frac{\theta_{2k-1}^m A_{2k-1}^m}{m!} \\
&= I_n + \left(\frac{\theta_{2k-1}}{1!} + \frac{\theta_{2k-1}^3}{3!} + \frac{\theta_{2k-1}^5}{5!} + ...\right) A_{2k-1} \\
&\quad + \left(\frac{\theta_{2k-1}^2}{2!} + \frac{\theta_{2k-1}^4}{4!} + \frac{\theta_{2k-1}^6}{6!} + ...\right) A_{2k-1}^2 \\
&= I_n + \sinh\theta_{2k-1} A_{2k-1} + (\cosh\theta_{2k-1} - 1)\, A_{2k-1}^2
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde, $A_{2k}^3 = -A_{2k}$ olması, her $j = 1, 2$ ve tüm $m \geq 0$ için

$$A_{2k}^{4m+j} = A_{2k}^j \text{ ve } A_{2k}^{4m+2+j} = -A_{2k}^j$$

olduğunu gösterir ve böylece,

$$\begin{aligned}
e^{\theta_{2k}A_{2k}} &= I_n + \sum_{m\geq 1} \frac{\theta_{2k}^m A_{2k}^m}{m!} \\
&= I_n + \left(\frac{\theta_{2k}}{1!} - \frac{\theta_{2k}^3}{3!} + \frac{\theta_{2k}^5}{5!} - ...\right) A_{2k} + \left(\frac{\theta_{2k}^2}{2!} - \frac{\theta_{2k}^4}{4!} + \frac{\theta_{2k}^6}{6!} - ...\right) A_{2k}^2 \\
&= I_n + \sin\theta_{2k} A_{2k} + (1 - \cos\theta_{2k})\, A_{2k}^2
\end{aligned}$$

olur.

$A_{2k-1}A_{2k} = A_{2k}A_{2k-1} = 0_n$ olduğu için

$$\begin{aligned}
e^{A} &= e^{\theta_1 A_1} e^{\theta_2 A_2} \cdots e^{\theta_{2k-1}A_{2k-1}} e^{\theta_{2k}A_{2k}} \\
&= \left(I_n + \sinh\theta_{2k-1} A_{2k-1} + (\cosh\theta_{2k-1} - 1)\, A_{2k-1}^2\right) \\
&\quad \left(I_n + \sin\theta_{2k} A_{2k} + (1 - \cos\theta_{2k})\, A_{2k}^2\right) \\
&= I_n^2 + (A_{2k-1}\sinh\theta_{2k-1} + A_{2k-1}^2 - A_{2k-1}^2 \cosh\theta_{2k-1}) \\
&\quad + \left(A_{2k}\sin\theta_{2k} + A_{2k}^2 - A_{2k}^2 \cos\theta_{2k}\right)
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi A_{2k-1} ve A_{2k}'ların tekliğini ispatlayalım. Eğer A_{2k-1} ve A_{2k} matrislerinin gerekli özellikleri sağladığını varsayarsak, $A_1, A_2, ..., A_{2k-1}$ ve A_{2k} matrislerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
A &= \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \cdots + \theta_{2k-1} A_{2k-1} + \theta_{2k} A_{2k} \\
A^2 &= \theta_1^2 A_1^2 + \theta_2^2 A_2^2 + \cdots + \theta_{2k-1}^2 A_{2k-1}^2 + \theta_{2k}^2 A_{2k}^2 \\
A^3 &= \theta_1^3 A_1^3 + \theta_2^3 A_2^3 + \cdots + \theta_{2k-1}^3 A_{2k-1}^3 + \theta_{2k}^2 A_{2k}^3 \\
A^3 &= \theta_1^3 A_1 - \theta_2^3 A_2 + \cdots + \theta_{2k-1}^3 A_{2k-1} - \theta_{2k}^2 A_{2k}
\end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Buradan,

$$\begin{cases} A = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \cdots + \theta_{2k-1} A_{2k-1} + \theta_{2k} A_{2k} \\ A^3 = \theta_1^3 A_1 - \theta_2^3 A_2 + \cdots + \theta_{2k-1}^3 A_{2k-1} - \theta_{2k}^2 A_{2k} \end{cases}$$

denklem sistemini çözersek

$$A_{2k-1} = \frac{1}{\theta_{2k}^2 \theta_{2k-1} + \theta_{2k-1}^3} (\theta_{2k}^2 A + A^3) \quad \text{ve} \quad A_{2k} = \frac{1}{\theta_{2k-1}^2 \theta_{2k} + \theta_{2k}^3} (\theta_{2k-1}^2 A - A^3)$$

olduğunu buluruz. ■

Örnek 6.57 $\mathbb{R}_1^5$*'de,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

yarı ters simetrik matrisi için Teorem 6.56*'daki özellikleri sağlayan* A_1 *ve* A_2 *matrisini bulalım. Bu matris için,* $\theta_1 = 1$ *ve* $\theta_2 = \sqrt{3}$ *olur. Buradan,* $A_1 = \dfrac{\theta_2^2 A + A^3}{\theta_2^2 \theta_1 + \theta_1^3}$ *ve* $A_2 = \dfrac{\theta_1^2 A - A^3}{\theta_1^2 \theta_2 + \theta_2^3}$ *eşitliklerini kullanarak* A_1 *ve* A_2 *matrislerini*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ve \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

şeklinde elde ederiz. Şimdi, $R = e^A$'yı

$$e^A = I_5 + \left[(\sinh 1)\, A_1 + (-1+\cosh 1)\, A_1^2\right] + \left[(\sin\sqrt{3})A_2 + (1-\cos\sqrt{3})A_2^2\right].$$

formülünü kullanarak

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2a+6b-1 & -a+x+1 & -a-x+1 & 2a-3b+y+1 & -2a+3b+y-1 \\ a+x-1 & 2a+1 & -a+x+1 & -a-x+1 & a+x-1 \\ a-x-1 & -a-x+1 & 2a+1 & -a+x+1 & a-x-1 \\ -2a+3b+y-1 & -a+x+1 & -a-x+1 & 2a+1 & -2a+3b+y-1 \\ 2a-3b+y+1 & a-x-1 & a+x-1 & -2a+3b-y-1 & 2a+1 \end{bmatrix}$$

olarak elde ederiz. Burada $a = \cos\sqrt{3}$ ve $b = \cosh 1$'dir. Aynı zamanda

$$\sqrt{3-3a^2} = x \quad ve \ \sqrt{9b^2-9} = y$$

dir. Bu dönme matrisinin özdeğerlerinin $e^1, e^{-1}, e^{\sqrt{3}i}, e^{-\sqrt{3}i}$ olduğuna dikkat edelim.

Not 5

$$\frac{\left(A - I^* A^T I^*\right)^2}{4}$$

simetrik matrisinin özdeğerleri $\theta_i > 0$ olmak üzere

$$\left\{\theta_1^2, \theta_1^2, -\theta_2^2, -\theta_2^2, \cdots, \theta_{2k-1}^2, \theta_{2k-1}^2, -\theta_{2k}^2, -\theta_{2k}^2\right\}$$

veya

$$\left\{\theta_1^2, \theta_1^2, 0, 0, ..., \theta_{2k-1}^2, \theta_{2k-1}^2, 0, 0, .., 0\right\}$$

dir.

İspat.

$$\left(E^T\right)^2 = E^2, \quad EI^*E^TI^* = I^*E^TI^*E = -E^2, \ PI^*P^TI^* = I \text{ ve } A = I^*PI^*EP^T$$

eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} AI^*A^TI^* &= \left(I^*PI^*EP^T\right) I^* \left(PE^TI^*P^TI^*\right) I^* = I^*PI^*\left(-E^2\right)P^T = -I^*PI^*E^2P^T \\ I^*A^TI^*A &= I^*\left(PE^TI^*P^TI^*\right) I^* \left(I^*PI^*EP^T\right) = I^*PI^*\left(-E^2\right)P^T = -I^*PI^*E^2P^T. \end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz. Buradan,

$$\frac{1}{4}\left(A - I^*A^TI^*\right)^2 = I^*PI^*E^2P^T.$$

olduğunu buluruz. Böylece, $\frac{1}{4}\left(A - I^*A^TI^*\right)^2$ matrisi $I^*PI^*E^2P^T$ şeklindedir. Burada E^2 matrisi

$$E^2 = \begin{pmatrix} \theta_1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_2^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta_2^2 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \theta_{2k-1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \theta_{2k-1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\theta_{2k}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\theta_{2k}^2 \end{pmatrix}$$

veya

$$E^2 = \begin{pmatrix} \theta_1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \theta_{2k-1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \theta_{2k-1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Yani, $\frac{1}{4}\left(A - I^*A^TI^*\right)^2$ simetrik matrisinin özdeğerleri

$$\left\{\theta_1^2, \theta_1^2, -\theta_2^2, -\theta_2^2, \cdots, \theta_{2k-1}^2, \theta_{2k-1}^2, -\theta_{2k}^2, -\theta_{2k}^2\right\}$$

veya

$$\left\{\theta_1^2, \theta_1^2, 0, 0, \cdots, \theta_{2k-1}^2, \theta_{2k-1}^2, 0, 0, \cdots, 0\right\}$$

dir. ■

Önteorem 6.58 *Her* $R \in \mathbf{SO}(n,1)$ *dönme matrisi için,*

$$R = I^{*}PI^{*}DP^{T}$$

olacak şekilde bir D *blok diagonal matrisi ve bir* P *psuedo ortogonal matrisi vardır. Burada* D *blok diagonal matrisi*

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & \cdots & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ & \cdots & D_m & \\ & & & \\ \cdots & & & I_{n-2m} \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve ayrıca ilk m *tane* D_i *blokları* $0 < \theta_i < \pi$ *olmak üzere*

$$D_{2i-1} = \begin{pmatrix} \cosh\theta_{2i-1} & \sinh\theta_{2i-1} \\ \sinh\theta_{2i-1} & \cosh\theta_{2i-1} \end{pmatrix} \quad ve \quad D_{2i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{2i} & -\sin\theta_{2i} \\ \sin\theta_{2i} & \cos\theta_{2i} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Eksponensiyel dönüşümün örtenliğini kullanarak, kolaylıkla önteorem 6.55*'den, önteorem* 6.58*'den ve eğer,*

$$E_{2i-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_{2i-1} \\ -\theta_{2i-1} & 0 \end{pmatrix} \quad veya \quad E_{2i} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_{2i} \\ \theta_{2i} & 0 \end{pmatrix} \qquad (i \geq 1)$$

ise o zaman,

$$e^{E_{2i-1}} = \begin{pmatrix} \cosh\theta_{2i-1} & \sinh\theta_{2i-1} \\ \sinh\theta_{2i-1} & \cosh\theta_{2i-1} \end{pmatrix} \quad ve \quad e^{E_{2i}} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{2i} & -\sin\theta_{2i} \\ \sin\theta_{2i} & \cos\theta_{2i} \end{pmatrix}$$

olacağından $\mathbf{SO}(n,1)$*'de dönmeler için* $n \geq 4$ *olmak üzere aşağıdaki karakterizasyonu elde ederiz:*

Önteorem 6.59 $n \geq 4$ *olmak üzere herhangi* $R \in \mathbf{SO}(n,1)$ *dönme matrisi verilsin. Eğer,*

$$\left\{e^{\theta_1}, e^{-\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{-i\theta_2}, ..., e^{\theta_{2k-1}}, e^{-\theta_{2k-1}}, e^{i\theta_{2k}}, e^{-i\theta_{2k}}\right\}$$

$\theta_{2k-1} > 1$ *ve* $0 < \theta_{2k} < \pi$ *olmak üzere* R*'nin* 1*'den farklı özdeğerlerinin kümesi ise,* $1 \leq k \leq p$ *ve* $2p \leq n$ *için,*

$$\begin{aligned} A &= \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \cdots + \theta_p A_p \\ A_{2k-1}A_{2k} &= A_{2k}A_{2k-1} = 0_n \\ A_{2k-1}^3 &= A_{2k-1} \quad ve \quad A_{2k}^3 = -A_{2k} \end{aligned}$$

olacak şekilde $A_1, ..., A_p$ *matrisleri vardır. Ayrıca;*

$$
\begin{aligned}
e^A &= e^{\theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \cdots + \theta_p A_p} \\
&= I_n + \sum_{k=1}^{p-1} \left[\sinh \theta_{2k-1} A_{2k-1} + \left(\cosh \theta_{2k-1} - 1\right) A_{2k-1}^2\right] \\
&\quad + \left[\sin \theta_{2k} A_{2k} + \left(1 - \cos \theta_{2k}\right) A_{2k}^2\right]
\end{aligned}
$$

dir. $\frac{1}{2}\left(R + I^* R^T I^*\right)$ *yarı simetrik matrisinin* 1*'den farklı özdeğerlerinin kümesinin* $\left\{\cosh \theta_{2i-1}, \cos \theta_{2i}\right\}$ *olduğuna dikkat edelim.*

7. SONUÇ

Bu çalışma kapsamında, $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^n$ Öklid Uzayındaki dönme matrislerin üretilmesini gösterilmiştir. Ayrıca $\mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{R}_1^4$ ve $\mathbb{R}_2^4$ Lorentz Uzayındaki dönme matrislerinin üretilmesi gösterilmiştir. En son olarak da $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz Uzayındaki dönme matrislerin üretilmesi yeni bir metodla verilmiştir.

8. KAYNAKLAR

BÜKÇÜ, B. Öklid Uzayında Genel Cayley Dönüşümü ve Dönme Matrisleri, Erciyes Ün. Fen Bil. Enst. Dergisi, 22, 194-202, 2006.

EBBINGHAUS, H.-D., HERMES, H., HIRZEBRUCH, F., KOECHER, M., MAINZER, K., NEUKIRCH, J., PRESTEL, A., REMMERT, R. 1991. Numbers, Springer.

GALLIER, J. H. Geometric Methods and Applications, For Computer Science and Engineering, TAM, Vol. 38, Springer, 2000.

GALLIER, J., XU, D. Computing Exponentials of Skew-Symmetric Matrices and Logarithms of Orthogonal Matrices. International Journal of Robotics and Automation, Vol. 18, No. 1, 2003, pp. 10-20.

GALLIER, J. H. Remarks on the Cayley representation of orthogonal matrices and on making matrices invertible by perturbing the diagonal, June 2006. Posted on arXiv as paper math.NA/0606320.

GALLIER, J. Notes on Differential Geometry and Lie Groups. Book in progress, expected completion, 2011.

HACISALİHOĞLU, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri 1.Cilt, Hacısalihoğlu Yayıncılık, Ankara.

HANSON, A. J., MA, H. 1995. Quaternion frame appoach to streamline visualition. *IEEE Tran. on Visualiz. and Comp. Graphics.* 1,2., 164-175.

HORN, R. A., JOHNSON, C. R. Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1986.

INOGUCHI, J. 1998. Timelike surfaces of constant mean curvature in Minkowski. 3-space. *Tokyo J. Math.*, 21, 1, 141-152.

INOGUCHI, J., TODA, M. 2004. Timelike minimal surfaces via loop groups. *Acta Applicandae Mathematicae*, 83, 3, 313-355.

IZUMIYA, S., PEI, D. H., SANO, T. 2000. The lightcone Gauss map and the lightcone developable of a spacelike curve in Minkowski 3-space Glasgow Mathematical Journal 42: 75–89.

KULA, L., KARACAN, M. K., YAYLI, Y. Formulas for the Exponential of a Semi Skew Symmetric Matrix of order 4, Mathematical and Computational Applications, Vol. 10, No. 1, pp. 99-104, 2005.

KULA, L., YAYLI, Y. Split Quaternions and Rotations in Semi Euclidean Space $\mathbb{E}_2^4$, J. Korean Math. Soc. 44, No. 6, 1313-1327, 2007.

MEBIUS, J. E. Derivation of the Euler-Rodrigues Formula for three-dimensional rotations from the general formula for four-dimensional rotations, 26 Jan 2007.

ÖZDEMİR, M., ERGİN, A. A. 2005. Some geometric applications of split quaternions. *Proc. 16th Int. Conf. Jangjeon Math. Soc.* Antalya, 16, 108-115.

ÖZDEMİR, M., ERGİN, A. A. 2006. Rotations with timelike quaternions in Minkowski 3-space. Journal of Geometry and Physics, 56, 322-336.

ÖZDEMİR, M., ERGİN, A.A. 2008. Timelike Quaternion Frames of non-lightlike curves, Journal Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry, Vol. 49, No. 2, pp. 325-333

ÖZDEMİR, M. 2010. Rodrigueslike formula for a real semi skew symmetric matrix in Minkowski space-time. submitted.

ÖZKALDI, S., GÜNDOĞAN, H. Cayley Formula, Euler Parameters and Rotations in 3-dimensional Lorentzian Space, Adv. appl. Clifford alg. 2009.

POLITI, T. A Formula for the Exponential of a real Skew Symmetric Matrix of order 4, BIT Numerical Mathematics, Vol. 41, No.4, 842-845, 2001.

SABUNCUOĞLU, Arif. 2001. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

WEINER, J. L., WILKENS, G. R. Quaternions and Rotations in $\mathbb{E}^4$, 69-76, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Artvin'de doğdu. İlk-orta ve lise öğrenimimi Antalya'da tamamladı. 2008 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2009 Şubat ayında Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen aynı bölümde yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.