T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DALGACIK(WAVELET) TİPLİ BİR İNTEGRAL DÖNÜŞÜM ÜZERİNE

Aykut Ahmet AYGÜNEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2007

DALGACIK(WAVELET) TİPLİ BİR İNTEGRAL DÖNÜŞÜM ÜZERİNE

Aykut Ahmet AYGÜNEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2007

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DALGACIK(WAVELET) TİPLİ BİR İNTEGRAL DÖNÜŞÜM ÜZERİNE

Aykut Ahmet AYGÜNEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../ .../ 2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İlham ALİYEV (Danışman)

Prof. Dr. Veli KURT

Yard. Doç. Dr. Şerafettin YALTKAYA

ÖZET

DALGACIK(WAVELET) TİPLİ BİR İNTEGRAL DÖNÜŞÜM ÜZERİNE

Aykut Ahmet AYGÜNEŞ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. İlham ALİYEV
Kasım - 2007, 26 Sayfa

Analizin değişik integral dönüşümlerinin (örneğin, Fourier dönüşümü, Laplace donüşümü, v.s.) hem matematikte, hem de bilimin başka dallarında geniş uygulama alanı buldukları iyi bilinmektedir. Son 30-40 yılda, "ayrık dalgacık dönüşümler" ve "integral dalgacık dönüşümler" denilen dönüşümler, matematikte ve uygulamalarında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Bu tez çalışmasında yeni bir dalgacık tipli dönüşüm tanımlanarak, onun için ters belirleme formülü (Calderon tipli reproducing formülü) bulunmuştur.

ANAHTAR KELiMELER: Fourier dönüşümü, Dalgacık tipli dönüşüm, Dalgacık fonksiyonu, Laplace dönüşümü, Calderon Reproducing formülü

JÜRİ:

Prof. Dr. İlham ALİYEV (Danışman)

Prof. Dr. Veli KURT

Yard. Doç. Dr. Şerafettin YALTKAYA

ABSTRACT

A WAVELET-TYPE INTEGRAL TRANSFORM

Aykut Ahmet AYGÜNEŞ

M.Sc. in Mathematics
Advisor : Prof. Dr. İlham ALİYEV
November - 2007, 26 Pages

It is well-known that various integral transforms in Analysis, for instance, Fourier transform, Laplace transform, etc., are frequently used in Mathematics and other branches of naturel sciences. Since three-four decades, "discret wavelet transforms" and "integral wavelet transforms" have played an important role in Mathematics and its applications.

In this work, a new wavelet-type transform is introduced and explicit inversion formula (Calderon-type Reproducing Formula) is established.

KEY WORDS: Fourier Transform,Wavelet-type Transform
Wavelet function, Laplace Transform,
Calderon Reproducing Formula.

COMMITTEE:

Prof. Dr. İlham ALİYEV (Advisor)

Prof. Dr. Veli KURT

Asst. Prof. Dr. Şerafettin YALTKAYA

ÖNSÖZ

Çalışmamız, Giriş dışında, üç esas bölümden ibarettir. İkinci bölümde, gerekli kavramlar, bilgiler ve tanımlamalar (notasyonlar) verilmiştir. Üçüncü bölümde, bir dalgacık tipli dönüşüm tanımlanmış ve bu dalgacık tipli dönüşümün tanımlanmasında önemli rolü olan "dalgacık fonksiyonu" için bir Lemma ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde, bir önceki bölümde tanımlamış olduğumuz dalgacık tipli dönüşüm için L_2 uzayında "Calderon reproducing formülü" yazılarak ispatlanmıştır. Beşinci bölümde ise, "Calderon reproducing formülü", L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ uzaylarında elde edilmiştir.

Wavelet Teorisi'ne katkısı olacağına inandığım bu çalışmada, Fonksiyonlar Teorisinin, Harmonik Analizin ve Fonksiyonel Analizin değişik yöntemleri uygulanmıştır.

Bu tezin oluşmasında bana katkısını esirgemeyen, beni çalışmaya özendiren ve yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. İlham Aliyev'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

ÖNSÖZ iii

İÇİNDEKİLER iv

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ v

1. GİRİŞ 1

2. ÖNBİLGİLER, GEREKLİ KAVRAM VE GÖSTERİMLER 3

3. BİR DALGACIK TİPLİ DÖNÜŞÜM 6

4. $A_t f$ DALGACIK TİPLİ DÖNÜŞÜMÜ İÇİN CALDERON TİPLİ REPRODUCING FORMÜLÜ (L_2 VERSİYONU) 9

5. $A_t f$ DALGACIK TİPLİ DÖNÜŞÜMÜ İÇİN CALDERON REPRODUCING FORMÜLÜNÜN L_p VE $L_\infty \equiv C_0$ VERSİYONU 13

6. SONUÇ 16

7. KAYNAKLAR 17

ÖZGEÇMİŞ 18

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Öklid uzayı
$C_0(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$'de sürekli, $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to\infty} f(x) = 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı
$C^{(n)}$	n. mertebeden türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$Ff = \hat{f}$	f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$F^{-1}f = \overset{\vee}{f}$	f fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü
$f * g$	f ve g fonksiyonlarının girişimi
$\lVert f\rVert_p$	L_p uzayında f fonksiyonunun normu
$L_p(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir, $\lVert f\rVert_p < \infty$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı
S	Schwartz uzayı

Kısaltmalar

h.h.h.	hemen hemen her

1. GİRİŞ

Değişik integral dönüşümlerin Analiz'de ve uygulamalarında önemli bir rol oynadıkları iyi bilinmektedir. Örneğin, Fourier, Laplace, Mellin dönüşümleri; Gauss - Weierstrass ve Abel-Poisson integralleri adı altında bilinen dönüşümler; Riemann-Liouville kesirsel integrali ve başka kesirsel integral operatörler; girişim(convolution) tipli integral operatörler ve çekirdeği belirli özelliklere sahip integral operatörler, hem analizin değişik dallarında hem de integral ve diferensiyel denklemlerde geniş olarak uygulanıyorlar. Özel girişim tipli integral operatörler olan klasik dalgacık (wavelet) dönüşümleri yaklaşık bundan 40 yıl önce A. P. Calderon (1964) tarafından uygulanmaya başlanmıştır ve daha sonra hem matematikçiler hem de mühendisler tarafından geniş uygulama alanları bulmuştur (Bakınız: Frazier vd. 1991 , Holschneider 1995 , Rubin 1996 , Aliev I. A. ve Rubin B. 2005).

Klasik integral wavelet dönüşümü şöyle tanımlanıyor (Bakınız: Frazier 1991 , Rubin 1998 , Rubin 2000):

$u \in L_1(\mathbb{R}^n)$, radyal fonksiyon olup, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)dx = 0$ sağlansın. Böyle u fonksiyonuna "dalgacık (wavelet) fonksiyonu" denir.

$t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ için $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $u_t(x) = \frac{1}{t^n} \cdot u\left(\frac{x}{t}\right)$ olmak üzere,

$$(W_u f)(x,t) = (f * u_t)(x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot u_t(x-y)dy \tag{1.1}$$

girişimine "f fonksiyonunun integral dalgacık (wavelet) dönüşümü" denir. Dalgacık dönüşümleri ile ilgili önemli konulardan biri, uygun "Calderon reproducing formülü"nü (Rubin 2000) bulmaktır. Bu formül, birim operatör için bir integral gösterim vererek, u fonksiyonu üzerine konulmuş bazı koşullar altında

$$f(x) = \frac{1}{c_u} \cdot \int\limits_0^\infty \frac{(W_u f)(x,t)}{t} dt \equiv \int\limits_0^\infty \frac{1}{t} \cdot (f * u_t)(x)dt \tag{1.2}$$

eşitliğinin sağlandığını ifade eder. Burada, $c_u \neq 0$ sayısı u'ya bağlı sabit olup, sağ taraftaki integral

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \rho \to \infty}} \int\limits_\varepsilon^\rho \frac{1}{t}(f * u_t)dt$$

limiti olarak tanımlanır (Limiti, incelenen probleme bağlı olarak, noktasal veya $1 \leq p < \infty$ için L_p anlamındadır).

(1.1) ve (1.2) formülleri kıyaslandığında, (1.2)'deki integralin $(0, \infty)$ aralığında hesaplanan tek katlı integral; diğer taraftan, (1.1)'deki integralin ise $\mathbb{R}^n$ üzerinden hesaplanan integral olduğu görülür. Bazı teorik ve uygulamalı problemlerde wavelet dönüşümünün tek katlı integralle ifade edilmesinin birçok teknik kolaylıklar sağladığı görülmüştür. Örneğin İ. A. Aliev ve B. Rubin'in makalesinde (Aliev ve Rubin 2005), μ ölçümü, $[0, \infty)$ aralığında verilmiş ve bazı şartları sağlayan Borel ölçümü olmak üzere,

$$(\sigma_\mu f)(x,t) = \int\limits_{[0,\infty)} (S_{t\eta} f)(x)\ d\mu(\eta)\ ,\ (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \tag{1.3}$$

şeklinde bir dalgacık tipli dönüşüm tanımlanarak, bu dönüşüm Riesz ve Bessel potansiyellerinin terslerini bulma problemine uygulanmıştır. Burada $S_\tau f$ $(\tau > 0)$ ailesi f'nin doğurduğu bir yarıgrup olup, Gauss-Weierstrass ve Poisson integralleri onun özel halleridir.

Bu çalışmada (1.3) dönüşümüne benzer bir integral dönüşüm tanımlanarak, onun için Calderon tipli "reproducing formülü" elde edilmiştir. Bizim tanımladığımız dönüşümde $S_\tau f$ $(\tau > 0)$ ailesi üzerine yarıgrup olma koşulu konulmamıştır. Bununla beraber, $d\mu(\tau)$ ölçümünü özel seçerek, onun üzerine çok basit olan koşullar konulmuştur. Calderon reproducing formülündeki has olmayan integralin yakınsaklığı, farklı teknikler kullanılarak, $L_2(\mathbb{R}^n)$ ve $L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p < \infty)$ uzaylarında incelenmiştir.

2. ÖNBİLGİLER, GEREKLİ KAVRAM VE GÖSTERİMLER

Her $i = 1, 2, ..., n$ için $x_i \in \mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, ..., x_n)\}$ n boyutlu öklid uzayı olsun. $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, x ve ξ'nin iç çarpımı $x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ olarak tanımlanır. Bu iç çarpım yardımıyla x'in normu tanımlanır: $|x| = \sqrt{x \cdot x}$. $L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir ve

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \ , \ (1 \leq p \leq \infty) \tag{2.1}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar ailesini gösterelim. Burada, $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$ $\mathbb{R}^n$'nin hacim elemanını göstermektedir. $\mathbb{R}^n$'de sürekli ve $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayını $C_0 \equiv C_0(\mathbb{R}^n)$ ile gösterelim. C_0'da norm

$$\|f\|_{C_0} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır. Biz C_0 yerine, L_∞ simgesini kullanacağız. Başka bir ifadeyle, bundan sonra L_∞ simgesi altında C_0 anlaşılacaktır.

$\mathbb{R}^n$'de bir f fonksiyonunun kendisi, tüm türevleri, sonsuzda sıfırlanıyorsa, hatta, tüm türevlerini polinomla çarptığımız zaman da sonsuzda sıfır oluyorsa, bu tip fonksiyonların oluşturduğu uzaya "Schwartz uzayı" denir.

Bir $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun düz ve ters Fourier dönüşümleri, sırasıyla,

$$F(g)(x) \equiv \hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} g(\xi) d\xi \quad , \tag{2.3}$$

$$F^{-1}(g)(x) \equiv \overset{\vee}{g}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} g(\xi) d\xi \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Tanımdan görüleceği üzere, $\overset{\vee}{g}(x) = (2\pi)^{-n} \hat{g}(-x)$'tir.

$\varphi, \psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının girişimi (convolution)

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot \psi(x - y) dy \tag{2.5}$$

formülüyle tanımlanır. Girişim ve Fourier dönüşümü arasındaki önemli ilgiyi aşağıdaki eşitlik göstermektedir (Stein ve Weiss 1971 s.3):

$$(\varphi * \psi)^\wedge(x) = \overset{\wedge}{\varphi}(x) \cdot \overset{\wedge}{\psi}(x). \tag{2.6}$$

Girişimin sağladığı başka önemli bir özellik de Young eşitsizliğidir (Sadosky 1979 s.14-15):

$$\|\varphi * \psi\|_p \leq \|\varphi\|_p \cdot \|\psi\|_1 \ , (1 \leq p \leq \infty) \tag{2.7}$$

İntegral operatörler için bizim üçüncü bölümde kullanacağımız Minkowski eşitsizliğini de burada hatırlatalım (Sadosky 1979 s.14):

$$\left\| \int\limits_Y f(x,y)dy \right\|_p \leq \int\limits_Y \|f(.,y)\|_p \, dy. \tag{2.8}$$

Aşağıdaki bölümlerde kullanacağımız dört önermeyi "Lemma"lar olarak verelim:

Lemma 2.1(Stein 1970 s.62-63 ; Rubin 1996 s.3).

$\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ve $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $(\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n)$ olsun. $\psi(x) = \sup\limits_{y \ : \ |y| \geq |x|} |\varphi(y)|$ pozitif radyal fonksiyonu $L_1(\mathbb{R}^n)$'den ise, bu takdirde, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$ olması halinde

(a) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (f * \varphi_\varepsilon)(x) = f(x)$ eşitliği h.h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için sağlanır.

(b) $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$ için $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|(f * \varphi_\varepsilon) - f\|_p = 0$ olur.

(c) $f \in L_\infty \equiv C_0$ ise, $\varepsilon \to 0$ için $f * \varphi_\varepsilon \rightrightarrows f$ (düzgün) yakınsar.

(d) $f \in L_p$, $1 < p < \infty$ ise, $\rho \to \infty$ için L_p metriğinde $f * \varphi_\rho \to 0$ olur. Ayrıca, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 0$ ve $f \in L_\infty \equiv C_0$ için $f * \varphi_\varepsilon \rightrightarrows 0$, $(\varepsilon \to 0)$ sağlanır.

Lemma 2.2(Plansherel Teoremi)(Rubin 1996 s.6-7).

$f \in L_2 \cap L_1$ olsun. Bu takdirde,

$$\|f^\wedge\|_2 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_2 \tag{2.9}$$

özdeşliği sağlanır.

Lemma 2.3(Stein ve Weiss 1971 s.11).

f ve $\hat{f}$ fonksiyonları $L_1(\mathbb{R}^n)$'den ise, h.h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(x) = \left(\overset{\vee}{f}\right)^\wedge (x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \cdot \overset{\vee}{f}(\xi)d\xi \tag{2.10}$$

eşitliği sağlanır. İlave olarak, f sürekli ise, (2.10) eşitliği her $x \in \mathbb{R}^n$ için sağlanır.

Lemma 2.4(Lebesgue Majorant Yakınsama Teoremi)(Royden 1963 s.76).

$\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonlar dizisi $\mathbb{R}^n$ kümesinde f fonksiyonuna noktasal ve h.h.h.yerde yakınsak olsun. Her n için $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ olacak biçimde integrallenebilir bir φ fonksiyonu var olsun. Bu durumda, f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$'de Lebesgue anlamında integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_n(x) d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu.$$

Lemma 2.5(Fubini Teoremi)(Royden 1963 s.233).

(X, A, μ) ve (Y, B, ν) iki tam ölçüm uzayı ve f, $X \times Y$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\int\limits_X \left(\int\limits_Y f d\nu \right) d\mu = \int\limits_{X\times Y} f \cdot d(\mu \times \upsilon) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f d\mu \right) d\nu$$

dir.

3. BİR DALGACIK TİPLİ DÖNÜŞÜM

Sürekli ve h.h.h. $\xi \in \mathbb{R}^n$ için pozitif olan $a(\xi) \geq 0$ fonksiyonu olsun öyle ki, her $t > 0$ için $e^{-t \cdot a(\xi)}$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü; yani,

$$\varphi(y,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{iy\xi} \cdot e^{-t \cdot a(\xi)} d\xi \quad , (y \in \mathbb{R}^n,\, t > 0) \tag{3.1}$$

fonksiyonu t parametresine göre düzgün olarak $L_1(\mathbb{R}^n)$'den olsun:

$$\|\varphi(y,t)\|_1 \leq c \quad , (\forall t > 0).$$

Örneğin, $a(\xi) = |\xi|^\beta$, $(\beta > 0)$ için $\varphi(.,t) \in L_1$'dir (Fedoryuk 1978 s.1296-1299).

Özel halde, $a(\xi) = |\xi|$ veya $a(\xi) = |\xi|^2$ alınırsa, sırasıyla, Poisson ve Gauss-Weierstrass çekirdekleri elde edilir; hatta, $a(\xi) = |\xi|^\beta$ ve $0 < \beta \leq 2$ alınırsa, $\varphi(y,t)$ fonksiyonu pozitif olur (Koldobsky 2005 s.44-45).

$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ için aşağıdaki girişim tipli integral operatörler ailesini tanımlayalım:

$$(\Phi_t f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y,t) \cdot f(x-y) dy \tag{3.2}$$

$\varphi(y,t) \in L_1$ olduğundan, Minkowski eşitsizliğine göre,

$$\|\Phi_t f\|_p \leq \|\varphi(.,t)\|_1 \cdot \|f\|_p \leq c \cdot \|f\|_p . \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanır ve dolayısıyla, $(\Phi_t f)(x)$ fonksiyonu h.h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için tanımlıdır.

Dalgacık tipli dönüşümü tanımlamak için bir fonksiyona ihtiyacımız olacaktır.

$[0, \infty)$ aralığında türevlenen ve türevi sürekli olan bir $h(t) \geq 0$ fonksiyonu için

$$\int\limits_0^\infty h(t) \frac{dt}{t} < \infty \tag{3.4}$$

sağlansın.

$h(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} h(t)$ olmak üzere, $h(\infty) = 0 = h(0)$ olduğu açıktır. $\lambda(t) = h'(t)$ diyelim. $\lambda \in L_1(0, \infty)$ olduğunu varsayalım. Bu λ için

$$\int\limits_0^\infty \lambda(t) dt = h(\infty) - h(0) = 0 \tag{3.5}$$

olduğu görülür. λ fonksiyonuna dalgacık fonksiyonu diyelim. Bu şekilde tanımlanmış olan λ fonksiyonu yardımıyla dalgacık tipli bir dönüşüm tanımlayalım.

Tanım 3.1:$\{\Phi_t\}_{t>0}$ ailesi (3.2)'deki gibi tanımlanmak üzere,

$$(A_t f)(x) = \int\limits_0^\infty (\Phi_{t\eta} f)(x) \cdot \lambda(\eta) d\eta \quad , (t > 0) \tag{3.6}$$

integral dönüşümüne "f'nin dalgacık tipli dönüşümü" denir.

Her $f \in L_p$, $(1 \leq p \leq \infty)$ ve $t > 0$ için (3.6) dönüşümü iyi tanımlıdır. Gerçekten, (2.8) ve (3.3) eşitsizlikleri göz önüne alınarak, $\lambda \in L_1(o, \infty)$ koşulu kullanılıyorsa, her $t > 0$ için

$$\|A_t f\|_p \leq \int\limits_0^\infty \|\Phi_{t\eta} f\|_p \cdot |\lambda(\eta)| \, d\eta \leq c \cdot \|\lambda\|_1 \cdot \|f\|_p < \infty$$

elde edilir. Burada, $\|\lambda\|_1 = \int\limits_0^\infty |\lambda(t)| \, dt$ 'dir.

Not 3.1. Yukarıda bahsi geçen özelliklere sahip olan λ fonksiyonuna bir örnek verelim. $h(t)$, aşağıdaki şekilde tanımlanmış Lizorkin test fonksiyonu olsun:

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t^2 - \frac{1}{t^2}} & , t \neq 0 \\ 0 & , t = 0 \end{cases}$$

O halde, $\lambda(t) = h^{'}(t)$ fonksiyonu "dalgacık fonksiyonu" olur.

Şimdi, λ herhangi dalgacık fonksiyon olmak üzere, bu λ fonksiyonunun Laplace dönüşümü ile ilgili bir sonraki önermede kullanacağımız önermeyi bir Lemma şeklinde ifade edelim:

Lemma 3.1.$h(t) \geq 0$ fonksiyonu $C^1(0, \infty)$'dan olsun; yani türevi sürekli ve sınırlı olsun. Bundan başka, (3.4) şartı sağlansın. Bu takdirde,

$$\widetilde{\lambda}(\tau) = \int\limits_0^\infty e^{-\tau t} \lambda(t) dt \quad , (\tau > 0)$$

fonksiyonu; yani, λ'nın Laplace dönüşümü için

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\tau} \widetilde{\lambda}(\tau) d\tau = \int\limits_0^\infty \frac{1}{t} h(t) dt \tag{3.7}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Kısmi integralleme uygulanırsa,

$$\widetilde{\lambda}(\tau) = \int\limits_0^\infty e^{-\tau t} \lambda(t) dt = \int\limits_0^\infty e^{-\tau t} h^{'}(t) dt = \tau \int\limits_0^\infty h(t) \cdot e^{-\tau t} dt$$

olur. Buradan, Fubini teoremi yardımıyla,

$$\int_0^\infty \frac{\widetilde{\lambda}(\tau)}{\tau} d\tau = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty h(t) \cdot e^{-\tau t} dt \right) d\tau = \int_0^\infty h(t) \left(\int_0^\infty e^{-\tau t} d\tau \right) dt = \int_0^\infty \frac{1}{t} h(t) dt$$

elde edilir.

4. $A_t f$ DALGACIK TİPLİ DÖNÜŞÜMÜ İÇİN CALDERON TİPLİ REPRODUCING FORMÜLÜ (L_2 VERSİYONU)

Teorem 4.1. $h \in C^1(0,\infty)$ fonksiyonu $h(t) \geq 0$ ve

$$d \equiv \int_0^\infty \frac{h(t)}{t} dt < \infty \tag{4.1}$$

koşullarını sağlasın. Ayrıca, $\lambda(t) = h^{'}(t) \in L_1(0,\infty)$ olsun.

Bu takdirde, $A_t f$ (3.6)'daki gibi tanımlanmak üzere, her $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ için

$$f(x) = \frac{1}{d} \int_0^\infty \frac{1}{t} \cdot (A_t f)(x) dt \tag{4.2}$$

eşitliği sağlanır. Burada eşitlik,

$$f(x) = \frac{1}{d} \cdot \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \rho \to \infty}} \int_\varepsilon^\rho \frac{1}{t} \cdot (A_t f)(x) dt \tag{4.3}$$

anlamında olup, yakınsama $L_2(\mathbb{R}^n)$ metriğindedir.

İspat. Klasik Wavelet dönüşümler için uygulanan metoda benzer bir metod kullanacağız (Bakınız: Frazier vd. 1991 s.8 ; Eryigit ve Aliyev 2004 s.27).

Şimdilik, $f \in S$ (Schwartz uzayı) olsun. Aşağıdaki şekilde bir fonksiyon tanımlayalım.

$$f_{\varepsilon,\rho}(x) = \int_\varepsilon^\rho (A_t f)(x) \frac{dt}{t}. \tag{4.4}$$

Bu fonksiyonun Fourier dönüşümünü hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \hat{f}_{\varepsilon,\rho}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \left(\int_\varepsilon^\rho (A_t f)(x) \frac{dt}{t} \right) dx \\ &\quad \text{(Fubini teoremini kullanıyoruz)} \\ &= \int_\varepsilon^\rho \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \cdot (A_t f)(x) dx \right) \frac{dt}{t} \\ &\quad \text{((3.6)'yı kullanıyoruz)} \\ &= \int_\varepsilon^\rho \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \left(\int_0^\infty (\Phi_{t\eta} f)(x) \cdot \lambda(\eta) d\eta \right) dx \right) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

(Yine Fubini teoremini kullanıyoruz)

$$= \int_{\varepsilon}^{\rho} \left(\int_{0}^{\infty} \lambda(\eta) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \cdot (\Phi_{t\eta} f)(x) dx \right) d\eta \right) \frac{dt}{t}$$

((2.6) ve (3.1)'i kullanıyoruz)

$$= \int_{\varepsilon}^{\rho} \left(\int_{0}^{\infty} \lambda(\eta) \cdot e^{-t\eta \cdot a(y)} \hat{f}(y) d\eta \right) \frac{dt}{t}$$

$$= \hat{f}(y) \int_{0}^{\infty} \lambda(\eta) \left(\int_{\varepsilon}^{\rho} e^{-t\eta \cdot a(y)} \frac{dt}{t} \right) d\eta$$

$$\left(t \to \frac{\tau}{a(y)} \text{ şeklinde değişken değiştiriyoruz} \right)$$

$$= \hat{f}(y) \int_{0}^{\infty} \lambda(\eta) \left(\int_{\varepsilon \cdot a(y)}^{\rho \cdot a(y)} e^{-\tau\eta} \frac{d\tau}{\tau} \right) d\eta$$

$$= \hat{f}(y) \int_{\varepsilon \cdot a(y)}^{\rho \cdot a(y)} \left(\int_{0}^{\infty} e^{-\tau\eta} \cdot \lambda(\eta) d\eta \right) \frac{d\tau}{\tau}$$

$$= \hat{f}(y) \int_{\varepsilon \cdot a(y)}^{\rho \cdot a(y)} \widetilde{\lambda}(\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

Dolayısıyla,

$$\hat{f}_{\varepsilon,\rho}(y) = \hat{f}(y) \int_{\varepsilon \cdot a(y)}^{\rho \cdot a(y)} \widetilde{\lambda}(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \tag{4.5}$$

olup, burada $\widetilde{\lambda}(\tau)$, λ fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür. (4.1) şartını ve Lemma 3.1'i göz önüne alırsak,

$$\int_{0}^{\infty} \widetilde{\lambda}(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \equiv \lim_{\substack{u \to 0 \\ v \to \infty}} \int_{u}^{v} \widetilde{\lambda}(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$$

integralinin yakınsak olduğunu ve değerinin de (3.7)'den dolayı,

$$d = \int_{0}^{\infty} h(t) \frac{dt}{t} < \infty$$

sayısına eşit olduğu görülür. Böylece,

$$d_{\varepsilon,\rho}(y) = \int_{\varepsilon \cdot a(y)}^{\rho \cdot a(y)} \widetilde{\lambda}(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$$

dersek,

$$\hat{f}_{\varepsilon,\rho}(y) = \hat{f}(y) \cdot d_{\varepsilon,\rho}(y) \tag{4.6}$$

yazılabilir. $d_{\varepsilon,\rho}(y)$ ifadesini

$$d_{\varepsilon,\rho}(y) = \int\limits_0^{\rho \cdot a(y)} \tilde{\lambda}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} - \int\limits_0^{\varepsilon \cdot a(y)} \tilde{\lambda}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \tag{4.7}$$

olarak yazılsın.

$\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^t \frac{\tilde{\lambda}(\tau)}{\tau} d\tau = d$ limiti sonlu olduğundan ve $\int\limits_0^t \frac{\tilde{\lambda}(\tau)}{\tau} d\tau$ fonksiyonu her $t \in (0,\infty)$ için sürekli olduğundan,

$$c \equiv \sup_{t>0} \left| \int\limits_0^t \frac{\tilde{\lambda}(\tau)}{\tau} d\tau \right|$$

sonludur. Bunu (4.7)'de göz önüne alırsak, her $y \in \mathbb{R}^n$ ve $0 < \varepsilon < \rho < \infty$ için

$$|d_{\varepsilon,\rho}(y)| \leq c + c = 2c < \infty \tag{4.8}$$

elde edilir.

Şimdi, Plansherel teoreminden (Bakınız: Lemma 2.2),

$$\begin{aligned}
\|f_{\varepsilon,\rho} - d \cdot f\|_2^2 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left\| \hat{f}_{\varepsilon,\rho} - d \cdot \hat{f} \right\|_2^2 \\
&\quad \text{((4.6)'yı kullanıyoruz)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \left\| \hat{f}(y) \cdot d_{\varepsilon,\rho}(y) - d\hat{f}(y) \right\|_2^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \left\| \hat{f}(y) \cdot (d_{\varepsilon,\rho}(y) - d) \right\|_2^2 \\
&\equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(y) \right|^2 |d_{\varepsilon,\rho}(y) - d|^2 \, dy.
\end{aligned}$$

(4.8)'den $|d_{\varepsilon,\rho}(y) - d|^2 \leq (2c + |d|)^2 < \infty$ ve $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \rho\to\infty}} d_{\varepsilon,\rho}(y) = d$ olduğundan, Lebesgue majorant yakınsama teoremine göre (Bakınız: Lemma 2.4),

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \rho\to\infty}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(y) \right|^2 |d_{\varepsilon,\rho}(y) - d|^2 \, dy = 0$$

olur. Dolayısıyla, $\forall f \in S$ için L_2 metriğinde $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \rho\to\infty}} f_{\varepsilon,\rho} = d \cdot f$ sağlandığı görülür.

Şimdi de her $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ için $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \rho\to\infty}} g_{\varepsilon,\rho} = d \cdot g$ (L_2 metriğinde) olduğunu gösterelim.

Schwartz uzayı S, $L_2(\mathbb{R}^n)$'de yoğun olduğundan, $\forall\delta > 0$ için $\|g - f\|_2 < \delta$ olacak biçimde $f = f_\delta \in S$ vardır. O halde, (4.4)'e uygun olarak,

$$g_{\varepsilon,\rho}(x) = \int_{\varepsilon}^{\delta} (A_t g)(x) \frac{dt}{t}$$

alırsak,

$$\begin{aligned} \|g_{\varepsilon,\rho} - d \cdot g\|_2 &\leq \|g_{\varepsilon,\rho} - f_{\varepsilon,\rho}\|_2 + \|f_{\varepsilon,\rho} - d \cdot f\|_2 + \|d \cdot f - d \cdot g\|_2 \\ &= \left\|(g - f)_{\varepsilon,\rho}\right\|_2 + \|f_{\varepsilon,\rho} - d \cdot f\|_2 + |d| \, \|f - g\|_2 \end{aligned}$$

dir.

Dolayısıyla,

$$\|g_{\varepsilon,\rho} - d \cdot g\|_2 \leq \left\|(g - f)_{\varepsilon,\rho}\right\|_2 + \|f_{\varepsilon,\rho} - d \cdot f\|_2 + |d| \, \|f - g\|_2 \tag{4.9}$$

olur. Burada,

$$(g - f)_{\varepsilon,\rho}(x) = \int_{\varepsilon}^{\rho} \left(A_t(g - f)\right)(x) \frac{dt}{t}$$

dir. (4.6)'ya benzer olarak,

$$(g - f)^{\wedge}_{\varepsilon,\rho}(y) = (g - f)^{\wedge}(y) \cdot d_{\varepsilon,\rho}(y)$$

dir.Plansherel teoremine göre,

$$\begin{aligned} \left\|(g - f)_{\varepsilon,\rho}\right\|_2 &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\|(g - f)^{\wedge}_{\varepsilon,\rho}\right\|_2 \\ &\quad \text{((4.6)'yı kullanıyoruz)} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\|(g - f)^{\wedge}(y) \cdot d_{\varepsilon,\rho}(y)\right\|_2 \\ &\quad \text{((4.8)'i kullanıyoruz)} \\ &\leq 2c \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\|(g - f)^{\wedge}\right\|_2 \\ &= 2c \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|g - f\|_2 \end{aligned}$$

dir.

Dolayısıyla,

$$\left\|(g - f)_{\varepsilon,\rho}\right\|_2 \leq 2c \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|g - f\|_2 \tag{4.10}$$

(4.10)'u (4.9)'da göz önüne alırsak,

$$\|g_{\varepsilon,\rho} - d \cdot g\|_2 \leq 2c \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \delta + |d| \cdot \delta + \|f_{\varepsilon,\rho} - d \cdot f\|_2 \tag{4.11}$$

olur. $f \in S$ için $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \rho \to \infty}} \|f_{\varepsilon,\rho} - d \cdot f\|_2 = 0$ olduğunu göz önüne alırsak, (4.11)'den her $g \in L_2$ için

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \rho \to \infty}} \|g_{\varepsilon,\rho} - d \cdot g\|_2 = 0$$

sağlandığı görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. $A_t f$ DALGACIK TİPLİ DÖNÜŞÜMÜ İÇİN CALDERON REPRODUCING FORMÜLÜNÜN L_p , $(1 < p < \infty)$ VE $L_\infty \equiv C_0$ VERSİYONU

Bu bölümde, (4.2) tipli bir formülü $f \in L_p$ ve $f \in L_\infty \equiv C_0$ için elde edeceğiz; fakat, $A_t f$'nin (3.6)'daki tanımında bulunan $\{\Phi_t\}_{t>0}$ ailesi üzerine ek koşullar koyacağız. Daha doğrusu, (3.1)'de $a(\xi)$ yerine $|\xi|^\beta$, $(\beta > 0)$ alacağız. Aşağıda, her yerde L_∞ dendiğinde C_0 anlaşılacaktır.

Teorem 5.1. $h \in C^1(0,\infty)$ fonksiyonu $h(t) \geq 0$ ve

$$d \equiv \int_0^\infty \frac{h(t)}{t} dt < \infty \tag{5.1}$$

koşullarını sağlasın. $x, y \in \mathbb{R}^n$; $t > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere,

$$\varphi(y,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\xi} \cdot e^{-t|\xi|^\beta} d\xi$$

ve

$$\Phi_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y,t) \cdot f(x-y) dy$$

olsun. $\lambda(\eta) = h^{'}(\eta) \in L_1(0,\infty)$ olmak üzere,

$$(A_t f)(x) = \int_0^\infty (\Phi_{t\eta} f)(x) \cdot \lambda(\eta) d\eta \quad , (t > 0) \tag{5.2}$$

dalgacık tipli dönüşümler ailesi tanımlansın.

Bu takdirde, her $f \in L_p$, $(1 < p < \infty)$ için

$$f(x) = \frac{1}{d} \int_0^\infty \frac{1}{t} (A_t f)(x) dt$$

eşitliği sağlanır. Burada eşitlik,

$$f(x) = \frac{1}{d} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \rho \to \infty}} \int_\varepsilon^\rho \frac{1}{t} (A_t f)(x) dt$$

anlamında olup, yakınsama L_p , $(1 < p \leq \infty)$ metriğindedir ($p = \infty$ için yakınsama, düzgün yakınsamadır).

İspat. $G(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \cdot e^{-|\xi|^\beta} d\xi$ diyelim. $e^{-|\xi|^\beta}$ radyal fonksiyon olduğundan, $G(x)$ de radyal bir fonksiyondur. Öte yandan, $0 < \beta < \infty$ olduğundan, $|x| \to \infty$ için $G(x) = o(|x|^{-n-\beta})$ olur. Dolayısıyla, $G \in L_1(\mathbb{R}^n)$ sağlanır (Fedoryuk 1978 s.1296-1299).

$G(x)$ fonksiyonunun tanımını kullanarak ve $\xi \to t^{-\frac{1}{\beta}}\xi$ şeklinde değişken değiştirerek, her $t > 0$ için

$$\varphi(y,t) = t^{-\frac{n}{\beta}} \cdot G\left(t^{-\frac{1}{\beta}} \cdot y\right) \quad , (y \in \mathbb{R}^n)$$

eşitliği kolayca görülür.

Şimdi, $(V_{\varepsilon,\rho}f)(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{\rho} (A_t f)(x)\frac{dt}{t}$ olsun ve $V_{\varepsilon,\rho}f$'nin şeklini değişelim.

$$\begin{aligned}
(V_{\varepsilon,\rho}f)(x) &= \int\limits_{\varepsilon}^{\rho} \left(\int\limits_{0}^{\infty} (\Phi_t f)(x) \cdot \lambda(\eta) d\eta \right) \frac{dt}{t} \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} \lambda(\eta) \left(\int\limits_{\varepsilon}^{\rho} (\Phi_{t\eta} f)(x) \frac{dt}{t} \right) d\eta \\
& \quad \left(t \to \frac{\tau}{\eta} \text{ şeklinde değişken değiştiriyoruz} \right) \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} \lambda(\eta) \left(\int\limits_{\varepsilon\eta}^{\rho\eta} (\Phi_{\tau} f)(x) \frac{d\tau}{\tau} \right) d\eta \\
& \quad \left(\varepsilon\eta < \tau < \rho\eta \iff \frac{\tau}{\rho} < \eta < \frac{\tau}{\varepsilon} \right) \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} \left(\int\limits_{\frac{\tau}{\rho}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \lambda(\eta) d\eta \right) \cdot (\Phi_{\tau} f)(x) \frac{d\tau}{\tau} \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} \left(\int\limits_{\frac{\tau}{\rho}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} h^{'}(\eta) d\eta \right) \cdot (\Phi_{\tau} f)(x) \frac{d\tau}{\tau} \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{\tau} \left[h\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) - h\left(\frac{\tau}{\rho}\right) \right] \cdot (\Phi_{\tau} f)(x) d\tau \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} h\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \cdot (\Phi_{\tau} f)(x) \frac{d\tau}{\tau} - \int\limits_{0}^{\infty} h\left(\frac{\tau}{\rho}\right) \cdot (\Phi_{\tau} f)(x) d\tau \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} \frac{h(s)}{s} \cdot (\Phi_{\varepsilon s} f)(x) ds - \int\limits_{0}^{\infty} \frac{h(s)}{s} \cdot (\Phi_{\rho s} f)(x) ds \\
&\equiv (I_{\varepsilon} f)(x) - (I_{\rho} f)(x).
\end{aligned}$$

Böylece,

$$(V_{\varepsilon,\rho}f)(x) \equiv (I_{\varepsilon}f)(x) - (I_{\rho}f)(x) \tag{5.3}$$

$\rho \to \infty$ için L_p , $(1 < p < \infty)$ metriğinde $I_{\rho}f$'nin sıfıra ve $\varepsilon \to 0$ için ise L_p , $(1 < p < \infty)$ metriğinde $I_{\varepsilon}f$'nin $d \cdot f$'ye yakınsadığını gösterirsek, teorem ispatlanmış olur. Minkowski eşitsizliğinden,

$$\left\|I_{\rho}f\right\|_p \leq \int_0^{\infty} \frac{h(s)}{s} \left\|\Phi_{\rho s}f\right\|_p ds \tag{5.4}$$

yazılabilir. Lemma 2.1-(d)'ye göre, $\lim\limits_{\rho \longrightarrow \infty} \left\|\Phi_{\rho s}f\right\|_p = 0$ 'dır. Öte yandan,

$$\left\|\Phi_{\rho s}f\right\|_p \leq c_1 \cdot \left\|f\right\|_p \text{ ve } \int_0^{\infty} \frac{h(s)}{s} ds < \infty$$

olduğundan, (5.4)'ten Lebesgue majorant yakınsama teoremine göre, $\lim\limits_{\rho \to \infty} \left\|I_{\rho}f\right\|_p = 0$ olur.

Şimdi de, L_p anlamında $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_{\varepsilon}f = f$ olduğunu görelim.
$\int_0^{\infty} \frac{h(s)}{s} ds = d$ olduğundan,

$$\left(I_{\varepsilon}f\right)(x) - d \cdot f(x) = \int_0^{\infty} \frac{h(s)}{s} \left[\left(\Phi_{\varepsilon s}f\right)(x) - f(x)\right] ds.$$

Buradan, $1 \leq p \leq \infty$ $(L_{\infty} \equiv C_0)$ için

$$\left\|I_{\varepsilon}f - d \cdot f\right\|_p \leq \int_0^{\infty} \frac{h(s)}{s} \left\|\Phi_{\varepsilon s}f - f\right\|_p ds \tag{5.5}$$

olur. Ayrıca, $\left\|\Phi_{\varepsilon s}f - f\right\|_p \leq \left\|\Phi_{\varepsilon s}f\right\|_p + \left\|f\right\|_p \leq c_2 \cdot \left\|f\right\|_p$ ve $\int_0^{\infty} \frac{h(s)}{s} ds < \infty$ olduğundan, Lebesgue majorant yakınsama teoreminden, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\|I_{\varepsilon}f - d \cdot f\right\|_p = 0$ olur.

Böylece ispatı bitirmiş oluruz.

Not 5.1. Teorem 5.1'de $\beta = 1$ ve $\beta = 2$ koyarsak, sırasıyla, Poisson ve Gauss-Weierstrass integrallerinin doğurduğu dalgacık tipli dönüşümler elde ederiz. Poisson integrali ve "dalgacık ölçümü" yardımıyla elde edilen dalgacık tipli dönüşüm Eryigit ve Aliev'in makalesinde (Eryigit ve Aliev 2004 s.23-30) incelenmiştir.

6.SONUÇ

Bu tez çalışmasında, (1.3) dönüşümüne benzer bir integral dönüşüm tanımlanarak, onun için Calderon tipli "reproducing formülü" elde edilmiştir. Bu tanımlanan dönüşümde $S_\tau f$ $(\tau > 0)$ ailesi üzerine yarıgrup olma koşulu konulmamıştır. Bununla beraber, $d\mu(\tau)$ ölçümünü özel seçilerek, onun üzerine kontrol edilmesi çok basit olan koşullar konulmuştur. Calderon reproducing formülündeki has olmayan integralin yakınsaklığı, farklı teknikler kullanılarak, $L_2(\mathbb{R}^n)$ ve $L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ uzaylarında incelenmiştir.

Bu yüksek lisans tezinde elde edilen sonuçlar teorik nitelikte olup, bu sonuçların Dalgacık(Wavelet) dönüşümüyle ilgilenen matematikçiler için faydalı olabileceği düşünülmektedir.

7.KAYNAKLAR

ALIEV, I. A. and RUBIN, B. 2005. Wavelet-like transforms for admissible semi-groups; inversion formulas for potentials and Radon transforms, *The Journal of Fourier Analysis and Applications, V. 11, No:3, 333-352*

CALDERON, A. P. 1964. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Math.*, 24, 113-190

ERYIGIT, M. and ALIEV, I. A. 2004. A wavelet-type transform generated by the Poisson semigroup, *Hacettepe J. of Math. and Statistics*, 33, 23-30

FEDORYUK, M. V. 1978. Asimptotics of the Green function of a pseudodifferential parabolic equation, *Diff. uravneniya*, 14, No:7, 1296-1299 (Russian)

FRAZIER, M., JAWERTH, B., and WEISS, G. 1991. Littlewood-Paley theory and the study of function spaces, CBMS Reg. Conf. Ser. in Math., no:79, *Amer. Math. Soc., Providence, R. I.*

HOLSCHNEIDER, M. 1995. Wavelets:an analysis tool, Clarendon Press, Oxford

KOLDOBSKY, A. 2006. Fourier Analysis in convex geometry, *AMS*

ROYDEN, H. L. 1963. Real Analysis,The Macmillan Company, New York

RUBİN, B. 2000. Calderon type reproducing formula, Fractional calculus and Applied Analysis, 3, No:1, 103-106

RUBİN, B. 1996. Fractional integrals and Potentials, Addison Wesley Longman, Essex, U.R.

RUBİN, B. 1998. The Calderon reproducing formula, windowed X-ray transforms and Radon transforms in L_p spaces, *The J. of Fourier Analysis and Appl.*, 4, No:2, 175-197

SADOSKY, C. 1979. Interpolation of Operators and Singular Integrals, An Introduction to Harmonic Analysis, Preposition 3.2

STEIN, E. M. and WEISS, G. 1971. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press; Princeton, W.J.

STEIN, E. M. 1970. Singular integrals and differentiability Properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, W.J.

ÖZGEÇMİŞ

Aykut Ahmet Aygüneş, 1981 yılında Ankara'da doğdu. İlk öğrenimini Ankara'da; orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2000 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2005 yılında mezun oldu. 2005 yılında Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü ,Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen, matematik anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.