T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

ZAYIF TEKİLLİĞE SAHİP BAZI İNTEGRAL OPERATÖRLERİN LEBESGUE UZAYLARINDA DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

Slava ISMAILOVA

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AĞUSTOS 2022

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

ZAYIF TEKİLLİĞE SAHİP BAZI İNTEGRAL OPERATÖRLERİN LEBESGUE UZAYLARINDA DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

Slava ISMAILOVA

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AĞUSTOS 2022

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAYIF TEKİLLİĞE SAHİP BAZI İNTEGRAL OPERATÖRLERİN LEBESGUE UZAYLARINDA DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

Slava ISMAILOVA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 03/08/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İlham ALİYEV (Danışman)
Doç. Dr. Sinem SEZER EVCAN
Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

ZAYIF TEKİLLİĞE SAHİP BAZI İNTEGRAL OPERATÖRLERİN LEBESGUE UZAYLARINDA DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

Slava ISMAILOVA

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof.Dr. İlham ALİYEV

Ağustos 2022, 37 sayfa

Bu tezde, klasik Riesz ve Bessel potansiyellerini genelleştiren integral operatörler tanımlanmış ve Lebesgue uzaylarındaki davranışları incelenmiştir. Bu operatörler, Sobolev uzaylarının, Bessel potansiyelleri uzaylarının ve bunların çeşitli genellemelerinin incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Öncelikle, "operatörlerin makul demeti" kavramı tanıtılmış ve "makul demet" oluşturan operatörler ailesine çeşitli örnekler verilmiştir. Daha sonra, klasik Riesz ve Bessel potansiyellerinin tek boyutlu integral gösterimleri "makul demetler" yardımıyla ifade edilmiştir. Bu integral temsillerden esinlenerek, klasik Riesz potansiyellerini genelleyen yeni bir integral operatörler ailesi tanıtılmış ve bu aile için ünlü Hardy-Littlewood-Sobolev eşitsizliğinin benzeri kanıtlanmıştır. Tezin bir diğer önemli sonucu da, hem Bessel ve hem de Flett potansiyellerini genelleştiren, iki parametreye bağlı potansiyel tipi operatörlerin Lebesgue uzaylarında araştırılmasıdır.

ANAHTAR KELİMELER: Bessel Potansiyelleri, Gauss-Weierstrass yarıgrubu, Hardy-Littlewood-Sobolev eşitsizliği, İki parametreye bağlı potansiyeller, Poisson Yarıgrubu, Riesz Potansiyelleri.

JÜRİ: Prof.Dr. İlham ALİYEV
Doç.Dr. Sinem SEZER EVCAN
Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE BEHAVIOR OF SOME INTEGRAL OPERATORS WITH WEAK SINGULARITY IN LEBESGUE SPACES

Slava ISMAILOVA

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. İlham ALİYEV
August 2022, 37 pages

In this thesis, the integral operators that generalize classical Riesz and Bessel potentials are defined and their behavior in Lebesgue spaces is investigated. These operators play an important role in the examination of Sobolev spaces, Bessel potential spaces and their various generalizations. First of all, the concept of "admissible bundle of operators" is introduced, and various examples are given to the families of operators that make up a "admissible bundle". Then, one-dimensional integral representations of classical Riesz and Bessel potentials are given with the help of "admissible bundles". Inspired by these integral representations, a new family of integral operators generalizing classical Riesz potentials is introduced and analogous of the famous Hardy-Littlewood-Sobolev inequality is proved for this family of operators. Another important result of the thesis is to investigate of bi-parametric potential-type operators which generalize both Bessel and Flett potentials, in Lebesgue spaces.

KEYWORDS: Bessel Potentials, Gauss-Weierstrass semi-group, Hardy-Littlewood-Sobolev inequality, Bi-parametric potentials, Poisson semi-group, Riesz Potentials.

COMMITTEE: Prof.Dr. İlham ALİYEV
Assoc.Prof.Dr. Sinem SEZER EVCAN
Asst.Prof.Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Bu çalışma süresince, benden ilgi ve desteğini esirgemeyen, tecrübeleriyle bana her koşulda yol gösteren danışman hocam sayın Prof. Dr. İlham ALİYEV'e minnetimi ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, her daim desteklerini hissettiğim çok kıymetli hocalarıma ve Araş. Gör. Çağla SEKİN'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Son olarak, maddi-manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, her konuda arkamda olduklarını bildiğim annem ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Zayıf Tekilliğe Sahip Bazı İntegral Operatörlerin Lebesgue Uzaylarında Davranışının İncelenmesi" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

03/08/2022

Slava ISMAILOVA

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_0$	: Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_0^n$	: $\mathbb{Z}_0 \times \cdots \times \mathbb{Z}_0$
$\mathbb{N}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n bouytlu Euclid Uzayı, $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\lvert x\rvert$	: $x \in \mathbb{R}^n$ vektörünün Euclid normu
$x \cdot y$	: x ve y vektörlerinin iç çarpımı
E	: Birim operatör
Δ	: Laplace Bessel Diferansiyel Operatörü
S	: Schwartz Test Fonksiyonları Uzayı
$C_0 = C_0(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$'de sürekli olup, $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to\infty} f(x) = 0$ sağlayan fonksiyonlar uzayı
$L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir ve p-inci kuvveti integrallenen fonksiyonlar uzayı
$f^\wedge = Ff$	: f fonksiyonunun Fourier Dönüşümü
$f^\vee = F^{-1}f$	: f fonksiyonunun ters Fourier Dönüşümü
$f * g$	: f ile g fonksiyonlarının girişimi (konvolusyonu; convolution)
$\{\mathcal{B}_t f\}_{t>0}$	: Riesz-Bochner integral operatörler ailesi
$\{W_t f\}_{t>0}$	: Klasik Gauss-Weierstrass integral operatörler ailesi
$\{P_t f\}_{t>0}$	: Klasik Poisson integral operatörler ailesi
$\{M_t f\}_{t>0}$	: Metaharmonik integral operatörler ailesi
$\left\{B_t^{(\beta)} g\right\}_{t>0}$	: g fonksiyonunun doğurduğu β-yarıgrup
$I^\alpha g$	: $g \in S$ fonksiyonunun α mertebeli Riesz potansiyeli
$J^\alpha g$	: $g \in S$ fonksiyonunun α mertebeli Bessel potansiyeli
$\mathcal{F}^\alpha g$	: $g \in S$ fonksiyonunun α mertebeli Flett potansiyeli
$J_\beta^\alpha g$	: $g \in S$ fonksiyonunun iki paramtreye bağlı potansiyeli

Kısaltmalar:

h.h.h.	: Hemen hemen her

1. GİRİŞ

Harmonik Analizde ve onun çeşitli uygulamalarında, singüler integral operatörler (bir boyutlu uzayda Hilbert dönüşümü ve çok boyutlu uzayda Calderon-Zigmund singüler integral operatörü) ile çekirdeğinde zayıf tekillik (zayıf singülarite) bulunan integral operatörler çok önemli rol oynarlar (Stein 1970; Samko vd. 1993; Rubin 1996).

Zayıf singüler integral operatörlerin en ünlü örnekleri klasik Riesz ve Bessel potansiyelleridir.

Klasik Riesz potansiyeli, Fourier dönüşümü terimlerinde, φ Schwartz test fonksiyonu olmak üzere,

$$(I^{\alpha}\varphi)^{\wedge}(x) = |x|^{-\alpha}\,\varphi^{\wedge}(x), \,(x \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < n)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ için $|x| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$ olup, $\varphi^{\wedge}$ ile φ fonksiyonunun Fourier dönüşümü gösterilmiştir.

φ fonksiyonunun α mertebeden Riesz potansiyeli operatörü olarak bilinen $I^{\alpha}\varphi$ operatörü, $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ Laplace diferansiyel operatörü olmak üzere, $(-\Delta)$ operatörünün α mertebeden negatif "kesirsel kuvvetinin" φ fonksiyonuna etkisi olarak yorumlanır.

Yine klasik Bessel potansiyeli, Fourier dönüşümü terimlerinde,

$$(J^{\alpha}\varphi)^{\wedge}(x) = (1 + |x|)^{-\alpha/2}\,\varphi^{\wedge}(x), \,(x \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < \infty)$$

şeklinde tanımlanmış olup, E birim operatör ve Δ Laplace operatörü olmak üzere, $(E - \Delta)$ operatörünün α mertebeden negatif "kesirsel kuvveti" olarak yorumlanır.

Bahsi geçen bu iki integral operatör, L_p, $(1 \leq p \leq \infty)$ uzayları olarak bilinen Lebesgue uzaylarının önemli alt uzayları olan Sobolev uzaylarının, Bessel potansiyelleri uzaylarının ve onların çeşitli genellemelerinin incelenmesinde müstesna rol oynuyorlar. Bu tez çalışmasının kaynaklar kısmında verilmiş Adams vd. 1967; Aliev ve Eryigit 2002; Aliev ve Rubin 2005; Aliev 2009; Aronszajn ve Smith 1961; Aronszajn vd. 1963; Flett 1971; Johnson 1973; Muckenhoupt ve Wheeden 1974; Perez 1990; Rubin 1986; Rubin 1987; Samko 1976; Sezer ve Aliev 2010; Sobolev 1938 makaleleri ve Aliev vd. 2008; Hao 2016; Rubin 1996; Samko vd. 1993; Samko 2002; Stein 1970 kitapları bu konudaki kaynakların az bir kısmıdır. Riesz potansiyellerinin, uygun α, p ve q değerleri için L_p uzayından L_q uzayına sınırlı etki etmesi ile ilgili iyi bilinen Hardy-Littlewood-Sobolev teoreminin ve onun ağırlıklı uzaylardaki versiyonlarının çeşitli ispatları vardır (örneğin, bu konuda Muckenhoupt ve Wheeden 1974; Perez 1990; Sobolev 1938; Stein 1970 kaynaklarına bakılabilir).

Bu tez çalışmasında, birbiriyle bağlantılı olan iki konu ele alınmıştır. Birinci konu, klasik Riesz potansiyellerinin bir genelleşmesi ile ilintilidir. İkinci konu ise, klasik Bessel potansiyellerinin ileri bir genelleşmesi üzerinedir.

Riesz potansiyellerinin genelleşmesini elde etmek için, integral operatörlerin "makul demeti" kavramı verilmiş ve bu kavram yardımıyla da, Riesz potansiyellerini genelleyen, zayıf singülariteye sahip integral operatörler ailesi tanımlanmış ve onlar için Hardy-Littlewood-Sobolev Teoreminin bir benzeri kanıtlanmıştır.

Bu "makul demet" yerine, klasik Poisson integrali, Gauss-Weierstrass integrali, Riesz-Bochner integrali veya beta-yarıgrup denilen integraller ailesinden herhangi biri alındığında, bizim tanımladığımız integral operatörler ailesi klasik Riesz potansiyelleri ailesine dönüşüyor.

Tez çalışmamızın ikinci esas konusu ise, yukarıda da bahsedildiği üzere, klasik Bessel potansiyellerinin ileri genellemesi olan, iki parametreye bağlı potansiyel tipli integral operatörler ailesinin L_p uzayından L_q uzayına sınırlı etki etmesini sağlayan koşulların ortaya çıkarılması ile ilgilidir.

Bu tez çalışması, Giriş ve Kaynaklar bölümleri hariç, üç bölümden oluşmaktadır.

Kaynak Taraması başlığı altındaki ikinci bölüm, kendi içinde birkaç alt bölüme ayrılmıştır: "Bazı gerekli gösterimler (notasyonlar) ve ön bilgiler" alt bölümünde, başlıktan da anlaşılacağı üzere, okuyucunun, tez dışında başka kaynağa başvurmadan tez çalışmasını rahat okuyabilmesi için gereken tüm gösterimler, kavramlar, tanımlar ve ön bilgiler verilmiştir.

"L_p uzaylarında etki eden operatörlerin "makul demeti" (admissible bunch) ve "makul yarıgrubu" (admissible semi-group) kavramları" alt bölümünde, Bulgular bölümünde kullanılacak olan "makul demet" ve " makul yarıgrup" kavramları tanıtılmış ve 2.3 alt bölümünde bu kavramlara önemli örnekler verilmiştir.

Bochner-Riesz integrali, Gauss-Weierstrass integrali, metaharmonik yarıgrup; modifiye edilmiş Gauss-Weierstrass; modifiye edilmiş Poisson, modifiye edilmiş metaharmonik yarıgrupları ve beta-yarıgrup (β-yarıgrup) denilen integraller ailesi makul demet kavramına önemli örneklerdir.

Tez çalışmasının üçüncü, "Materyal ve Metot" bölümünde, Riesz, Bessel, Flett ve iki parametreye bağlı potansiyeller tanıtılmış ve onların "makul demetler" yardımıyla ifadeleri verilmiştir.

Orijinal tanımları çok katlı (n katlı) intgeraller yardımıyla ifade edilen Riesz, Bessel ve Flett potansiyelleri, "makul demetler" kullanılarak, tek katlı integral biçiminde yazılabilir ve bu da onların bazı özelliklerini incelemede kolaylık sağlar.

Tez çalışmasının "Bulgular ve Tartışma" kısmı iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde "makul demetin" doğurduğu zayıf tekilliğe sahip integral operatörler için Hardy-Littlewood-Sobolev tipli eşitsizlik kanıtlanmıştır. Makul demetin özel seçimiyle, buradan klasik Riesz potansiyelleri için Hardy-Littlewood-Sobolev eşitsizliği elde edilir ki, bu da tez çalışmasının önemli bulgularından biridir.

Tez çalışmasının diğer önemli bulgularından biri de "Bulgular ve Tartışma" Bölümünün ikinci alt bölümünde verilmiş olup, iki parametreye bağlı potansiyel tipli integral operatörlerin L_p uzaylarında davranışları ile ilgilidir. Bu sonuçlar da yeni olup, operatörlerin tanımında kullanılan β parametresinin özel seçimleri ile (yani, $\beta = 1$ veya $\beta = 2$ koyarak) sırasıyla, klasik Flett ve Bessel potansiyellerinin L_p uzaylarında davranışları ile ilgili sonuçlar elde edilmiş olur.

Tez çalışması teorik nitelikte olup, elde edilen sonuçlar, Fonksiyonel uzaylar, Harmonik Analiz, integral dönüşümler ve özel olarak, Riesz ve Bessel potansiyelleri ile ilgili alanlarda çalışma yapan araştırmacılar için ek bir kaynak rolünü oynayabilir.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Bazı Gerekli Gösterimler (Notasyonlar) ve Ön Bilgiler

Bu tez çalışmasında, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, n-boyutlu Euclid (Öklid) uzayını $\mathbb{R}^n$ ile göstereceğiz:

$$\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, \cdots, x_n);\, x_k \in \mathbb{R},\, k = 1, 2, \cdots, n\}.$$

$x \in \mathbb{R}^n$ vektörünün normu, $|x|$ ile gösterilecektir:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

$x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinin skaler (iç) çarpımı $x \cdot y$ ile gösterilecektir:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Normun tanımından, $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ olur.

$\mathbb{R}^n$ uzayında ölçülebilir olup, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, mutlak değerinin p. kuvvetinin Lebesgue integrali sonlu olan fonksiyonlar uzayını $L_p \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz:

$$L_p = \{f : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx < \infty\},\, 1 \leq p \leq \infty.$$

Burada, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ ve $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$'dir.

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi olmak üzere, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun L_p-normu şöyle gösterilecektir:

$$\|f\|_p \overset{\text{tanım}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty.$$

L_p uzayının bir Banach uzayı olduğu iyi bilinmektedir.

$p = \infty$ durumunda, $\|f\|_\infty$ gösterimi,

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

sayısı için kullanılacaktır. Burada,

$$ess \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \inf\{a \in [0, \infty) : \text{hemen hemen her } x \in \mathbb{R}^n \text{ için } |f(x)| \leq a\}.$$

Schwartz test fonksiyonları uzayı için $S \equiv S(\mathbb{R}^n)$ gösterimi kullanılacaktır.

$\mathbb{Z}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$ ve $\mathbb{Z}_0^n = \mathbb{Z}_0 \times \cdots \times \mathbb{Z}_0$ olmak üzere, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_0^n$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_0^n$ ve $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$x^\alpha \overset{\text{tanım}}{=} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \text{ ve } \partial^\beta f(x) \overset{\text{tanım}}{=} \frac{\partial^{\beta_1 + \cdots + \beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}} f(x)$$

tanımlarsak, Schwartz uzayı öyle f fonksiyonlarından oluşuyor ki, her $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_0^n$ multi-indisleri için,

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha \left| \partial^\beta f(x) \right| < \infty$$

sağlanır. Örneğin, her $\alpha \in \mathbb{Z}_0^n$, $\lambda > 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ için,

$$f(x) = x^\alpha e^{-\lambda |x|^{2k}} \in S$$

olur.

Her $p \in [1, \infty)$ için, S uzayının $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olduğu iyi bilinir. Yani, $f \in L_p$ verildiğinde, her $\varepsilon > 0$ için öyle $g = g_\varepsilon \in S$ vardır ki, $\|f - g\|_p < \varepsilon$ sağlanır.

Bir $h \in S$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü,

$$(Fh)(x) = h^\wedge(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) e^{-i2\pi x \cdot y} dy$$

ve ters Fourier dönüşümü,

$$\left(F^{-1} h\right)(x) = h^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) e^{i2\pi x \cdot y} dy$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$'dir.

Bazı kaynaklarda,

$$h^\wedge(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) e^{-ix \cdot y} dy, \; h^\vee(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h(y) e^{ix \cdot y} dy$$

veya

$$h^\wedge(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} h(y) e^{-ix \cdot y} dy, \; h^\vee(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} h(y) e^{ix \cdot y} dy$$

gösterimleri de kullanılıyor.

$u, v \in S$ fonksiyonlarının konvolusyonu (girişimi)

$$(u * v)(x) \overset{\text{tanım}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) v(x - y) dy$$

formülüyle tanımlanır. İki fonksiyonun konvolusyonu, fonksiyonlardan biri L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ uzayında ve diğeri de, $1 \leq q \leq \infty$ olmak üzere, L_q uzayında olduğunda yine tanımlanabilir. Dahası, örneğin, $u \in L_p$ ve $v \in L_q$ olması durumunda,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)dy$$

integrali hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ (h.h.h.$x \in \mathbb{R}^n$) için mutlak yakınsak olup, $q \leq r \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ olmak üzere,

$$\|u * v\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

eşitsizliği sağlanır (Grafakos 2008). Young konvolusyon eşitsizliği olarak bilinen bu eşitsizlik şöyle yorumlanabilir:

Verilmiş bir $v \in L_q$ fonksiyonu için,

$$Au = u * v, (u \in L_p, 1 \leq p \leq \infty)$$

integral operatörü tanımlanırsa, A operatörü, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ olmak üzere, L_p uzayından L_r uzayına sınırlı etki eden bir lineer operatördür. ($r = \infty$ için $\frac{1}{r} = 0$ kabul ediliyor).

İki fonksiyonun "konvolusyon çarpımı" yerine "noktasal çarpımı" alınırsa, Young eşitsizliği yerine, Hölder eşitsizliği denilen eşitsizlik yazılabilir:

$1 \leq p, q \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O halde, $u \in L_p, v \in L_q$ olması durumunda, $uv \in L_1$ olup, $\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$ eşitsizliği sağlanır (Grafakos 2008). "Açık" yazılırsa, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)v(x)|\, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^q\, dx\right)^{1/q}.$$

Not: a) $p = \infty$ için, $\|u\|_\infty = ess \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)|$ olarak tanımlanır;

b) $p = q = 2$ durumunda ortaya çıkan eşitsizlik Cauchy-Schwartz eşitsizliği olarak bilinir.

Lebesgue anlamında ölçülebilir bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue ölçümünü $m(\Omega)$ ile göstereceğiz. Örneğin, ölçülebilir bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ve bir $\lambda > 0$ sayısı için $|f(x)| > \lambda$ eşitsizliğini sağlayan $x \in \mathbb{R}^n$ noktaları kümesinin ölçümünü,

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}$$

olmak üzere, $m(\Omega)$ ile veya

$$m\{x : |f(x)| > \lambda\}$$

ile göstereceğiz.

$h \in L_p$ fonksiyonuna ait klasik Hardy-Litttlewood maksimal fonksiyonu (maksimal operatörü)

$$(Mh)(x) \overset{\text{tanım}}{=} \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r)} \int_{B_r} |h(x-y)|\, dy$$

formülüyle tanımlanır. Burada,

$$B_r = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < r\},$$

orijin merkezli ve r yarıçaplı yuvar olup, $m(B_r)$ de onun Lebesgue ölçümüdür ("hacmidir").

M operatörünün L_p, $(1 \leq p \leq \infty)$ uzaylarında davranışı ile ilgili aşağıdaki Teorem analizde çok önem arz etmektedir.

Teorem 2.1 (Hardy-Littlewood; Stein 1970, syf. 5)**.** *1) $h \in L_p$, $(1 \leq p \leq \infty)$ ise, h.h.h.$x \in \mathbb{R}^n$ için $(Mh)(x)$ fonksiyonu sonlu değer alır.*

2) $1 < p \leq \infty$ ise, öyle $C = C(p,n) > 0$ sabiti vardır ki, her $h \in L_p$ için

$$\|Mh\|_p \leq C\,\|h\|_p$$

eşitsizliği sağlanır. Yani, sub-lineer M operetörü L_p'den L_p'ye sınırlı etki eder.

3) $p = 1$ durumunda, her $h \in L_1$ ve her $\lambda > 0$ için

$$m\{x \in \mathbb{R}^n : (Mh)(x) > \lambda\} \leq \frac{A}{\lambda}\,\|h\|_1$$

sağlanacak biçimde $A = A(n)$ sabiti vardır (örneğin, $A = 5^n$ alınabilir).

Not: $1 < p \leq \infty$ durumunda, Hardy-Littlewood maksimal operatörünün L_p'den L_p'ye sınırlı operatör olduğu gerçeğini matematik literatüründe, "M maksimal operatörü, $1 < p \leq \infty$ için (p,p)-güçlü operatördür" şeklinde de ifade ederler. Diğer yandan, $p = 1$ durumunda ise, M operatörünün "$(1,1)$-zayıf tipli operatör" olduğu ifade edilir. Daha genel olarak, L_p uzayında tanımlı ve sub-lineer bir T operatörü için öyle $A > 0$ sabiti varsa ki, her $h \in L_p$ ve her $\lambda > 0$ için,

$$m\{x \in \mathbb{R}^n : |(Th)(x)| > \lambda\} \leq \left(\frac{A\,\|h\|_p}{\lambda}\right)^q \qquad (*)$$

sağlansın, o halde, T operatörü "(p,q)-zayıf tiplidir" veya, "zayıf (p,q)-tiplidir" denir. (p,q)-güçlü tipli olan operatör hem de (p,q)-zayıf tipli olur. Gerçekten, her $h \in L_p$ için $\|Th\|_q \leq A \|h\|_p$ sağlanırsa, $\Omega = \{x : (Th)(x) > \lambda\}$ dersek, $A \|h\|_p \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(Th)(x)|^q \, dx\right)^{1/q} \geq \left(\int_{\Omega} |(Th)(x)|^q \, dx\right)^{1/q} \geq \lambda (m(\Omega))^{1/q}$ olur ki, bu da yukarıdaki (*) eşitsizliğidir.

2.2. L_p Uzaylarında Etki Eden Operatörlerin "Makul Demeti" (Admissible Bunch) ve "Makul Yarıgrubu" (Admissible Semi-Group) Kavramları

Burada tanımlayacağımız "Operatörler ailesinin δ-tipli makul demeti" ve "Operatörler ailesinin δ-tipli makul yarıgrubu" kavramları, tezin ileriki bölümlerinde kullanılacaktır.

Tanım 2.2 (Aliev, Gadjiev, Aral, 2006)**.** *$L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p < \infty)$ uzayında sınırlı etki eden $\{A_t\}_{t>0}$ operatörler ailesi, aşağıdaki özelliklere sahip ise, bu aileye δ-tipli "makul demet" diyeceğiz:*

a) Bir $\delta > 0$ sabiti için öyle $c = c(\delta) > 0$ sayısı vardır ki, her $g \in L_p$ ve her $t > 0$ için

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{ess \sup} |(A_t g)(x)| \leq c t^{-\delta} \|g\|_p ; \tag{2.1}$$

b) Öyle $c > 0$ sayısı vardır ki, her $g \in L_p$ için,

$$\sup_{t>0} \|A_t g\|_p \leq c \|g\|_p ; \tag{2.2}$$

c) $(A^* g)(x) = \sup\limits_{t>0} |(A_t g)(x)|$, $(g \in L_p)$ şeklinde tanımlanmış A^* "maksimal operatörü" zayıf (p,p)-tipli olsun, yani, her $g \in L_p$ ve her $\lambda > 0$ için,

$$m\{x \in \mathbb{R}^n : |(A^* g)(x)| > \lambda\} \leq \left(\frac{c \|g\|_p}{\lambda}\right)^p . \tag{2.3}$$

(Burada, ölçülebilir $E \subset \mathbb{R}^n$ için $m(E)$ ile E'nin Lebesgue ölçümü gösterilir.)

d) Her $g \in L_p$, $(1 \leq p < \infty)$ için $\lim\limits_{t \to 0} \|A_t g - g\|_p = 0$ ve her $g \in C_0 \cap L_p$ için $(A_t g)$ ailesi g'ye düzgün yakınsasın.

(L_p-normundaki yakınsama, $L_p - \lim\limits_{t \to 0} A_t g = g$ şeklinde de gösterilir).

Ayrıca, eğer (a) koşulu her $\delta > 0$ sayısı için sağlanırsa, o halde $\{A_t\}_{t>0}$ ailesine sonsuz tipli "makul demet" diyeceğiz.

Tanım 2.3 (Aliev ve Rubin 2005). *L_p , ($1 \leq p < \infty$) uzayında sınırlı etki eden $\{A_t\}_{t>0}$ operatörler ailesi (a)-(d) koşullarının yanısıra, aşağıdaki yarıgrup özelliğine de sahip ise, bu operatörler ailesine δ-tipli "makul yarıgrup" diyeceğiz:*

Her $t, s \geq 0$ için $A_tA_s = A_{t+s}$, yani, her $t, s \geq 0$ ve her $g \in L_p$ için $A_t(A_sg) = A_{t+s}g$.

Burada, E birim operatör olmak üzere, $A_0 = E$ kabul edilir. Yukarıdaki d) koşulu, bu tanımlamayı destekliyor.

Not: Yukarıdaki tanımlardan anlaşılacağı üzere, "makul demet" kavramı, "makul yarıgrup" kavramından daha geniş bir kavram olup, $\{A_t\}_{t>0}$ lineer operatörler ailesi, (a)-(d) koşullarını sağlarsa, "δ tipli makul demet" ve ek olarak,

e) Her $t, s \geq 0$ için

$$A_tA_s = A_{t+s} \tag{2.4}$$

koşulunu sağlarsa, "δ tipli makul yarıgrup" diye adlandırılır.

2.3. Birkaç Önemli "Makul Demet" ve "Makul Yarıgrup" Örneği

2.3.1. Riesz-Bochner çekirdeği ve Riesz-Bochner integraller ailesi

Sabit tutulmuş $\nu > 0$ parametresi verilsin. Aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$b(x) = b^\nu(x) = \left\{ \begin{array}{cc} (1-|x|^2)^\nu, & |x| \leq 1 \text{ ise} \\ 0, & |x| > 1 \text{ ise} \end{array} \right\}.$$

Burada, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Yukarıdaki $b = b(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü $\beta = \beta(x)$ ile gösterelim:

$$\beta(x) = b^\wedge(x) = \int_{\mathbb{R}^n} b(y)e^{-2\pi i x\cdot y}dy.$$

Burada, $x \cdot y = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$ ve $dy = dy_1 dy_2 \cdots dy_n$.

Bir radyal fonksiyonun Fourier dönüşümü olarak, $\beta = \beta(x)$ fonksiyonu radial bir fonksiyon olup, açık ifadesi aşağıdaki şekildedir (Stein ve Weiss 1971, syf. 171):

$$\beta(x) = \frac{1}{\pi^\nu}\Gamma(1+\nu)\,|x|^{-\left(\frac{n}{2}+\nu\right)}\, J_{\frac{n}{2}+\nu}(2\pi\,|x|).$$

Burada, $\lambda = \frac{n}{2} + \nu$ olmak üzere, $J_\lambda(t)$, $(0 < t < \infty)$ fonksiyonu, birinci tip Bessel fonksiyonu olup, açık ifadesi şu biçimdedir:

$$J_\lambda(t) = \frac{(t/2)^\lambda}{\Gamma\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} e^{its}(1-s^2)^{\frac{2\lambda-1}{2}} ds.$$

İyi bilindiği üzere, $\lim\limits_{t\to 0^+}(J_\lambda(t)/t^\lambda)$ limiti sonlu olup, $t \to \infty$ için $\sqrt{t}J_\lambda(t)$ ifadesi sınırlıdır (Stein ve Weiss 1971, syf. 158).

Tanım 2.4. *Riesz-Bochner çekirdeği ve bir $f \in L_p$ fonksiyonuna ait Riesz-Bochner integraller ailesi, sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlanırlar:*

$$\beta_t(x) = t^{-n}\beta\left(\frac{1}{t}x\right), \ (x \in \mathbb{R}^n, t > 0);$$

$$(\mathcal{B}_t f)(x) = (\mathcal{B}_t^{(\nu)} f)(x) = (\beta_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \beta_t(y) f(x-y) dy.$$

Burada, $f \in L_p$, $(1 \le p < \infty)$.

$\{\mathcal{B}_t f\}_{t>0}$ integraller ailesinin aşağıdaki özellikleri vardır (Stein ve Weiss 1971, syf. 172):

(a)

$$ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(\mathcal{B}_t f)(x)| \le c_1 t^{-n/p} \|f\|_p, \ (1 \le p < \infty);$$

burada, $c_1 = \|\beta\|_q$.

(b) $\sup\limits_{t>0} \|\mathcal{B}_t f\|_p \le c_2 \|f\|_p$ (burada, $c_2 = \|\beta\|_1$);

(c) $\sup\limits_{t>0} |(\mathcal{B}_t f)(x)| \le c_3 (Mf)(x)$, $(1 \le p \le \infty)$. (Burada, $(Mf)(x)$ özellikleri Teorem 2.1'de verilen Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur).

(d) Her $f \in L_p$, $(1 \le p < \infty)$ için

$$L_p - \lim_{t\to 0}(\mathcal{B}_t f)(x) = f(x)$$

olup, $f \in C_0 \cap L_p$ için yakınsama düzgündür (ayrıca, h.h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için $(\mathcal{B}_t f)(x)$ ailesi, $t \to 0$ için $f(x)$ değerine yakınsıyor).

Not: Bochner-Riesz integralleri ailesinin (c) özelliğine göre, $\{\mathcal{B}_t f\}_{t>0}$ ailesi üstten Hardy-Littlewood maksimal operatörü olan Mf ile bastırıldığından ve Mf operatörü de zayıf (p,p)-tipli olduğundan, dolayısıyla, $(A^*f)(x) = \sup\limits_{t>0} |(\mathcal{B}_t f)(x)|$ şeklinde tanımlanan A^* "maksimal operatörü" de zayıf (p,p)-tipli olur.

Diğer yandan, $\{\mathcal{B}_t f\}_{t>0}$ ailesinin (a) özelliği Tanım 2.2 dikkate alınırsa, $\{\mathcal{B}_t f\}_{t>0}$ ailesinin $\delta = \frac{n}{p}$ tipli "makul demet" olduğu söylenebilir. $\{\mathcal{B}_t f\}_{t>0}$ ailesi için $\mathcal{B}_t(\mathcal{B}_s) = \mathcal{B}_{t+s}$ özelliği bulunmadığından, bu aile bir "makul yarıgrup" değildir.

2.3.2. Gauss-Weierstrass Çekirdeği ve Gauss-Weierstrass integraller ailesi (yarıgrubu)

İntegral operatörlerin "makul yarıgrubu"na en ünlü örneklerden biri aşağıdaki klasik Gauss-Weierstrass integraller ailesidir:

$$(W_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} w_t(y) f(x-y) dy, \, (0 < t < \infty).$$

Burada, $w_t(y) = \frac{1}{t^n} w\left(\frac{1}{t} y\right)$ ve $w(y) = F^{-1}(e^{-|x|^2})(y)$ olup, F^{-1} Ters Fourier dönüşümüdür.

Not: Burada, önemli bir hatırlatma yapalım. Riesz-Bochner çekirdeğini tanımlarken, (Stein ve Weiss 1971) kaynağına dayanarak, Fourier ve ters Fourier dönüşümlerinin

$$(Ff)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi x \cdot y} f(y) dy \;\text{ ve } (F^{-1} f)(x) = (Ff)(-x)$$

tanımları kullanılmıştı.

Bundan sonra, Fourier ve ters Fourier dönüşümlerinin aşağıdaki tanımlarını kullanacağız:

$$(Ff)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} f(y) dy \text{ ve } (F^{-1} f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} (Ff)(-x).$$

Gauss-Weierstrass integralleri ailesinin, Tanım 2.3'deki "makul yarıgrup" koşullarını sağladığı ve $\delta = \frac{n}{2p}$ tipli "makul yarıgrup" olduğu iyi bilinmektedir (Rubin 1996, syf. 223).

2.3.3. Poisson çekirdeği ve Poisson integralleri ailesi (yarıgrubu)

$L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \le p \le \infty)$ uzaylarında etki eden integral operatörlerin "makul yarıgrubu" olan bir diğer ünlü örnek aşağıdaki klasik Poisson integralleri ailesidir:

$$(P_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p_t(y) f(x-y) dy, \, (0 < t < \infty, x \in \mathbb{R}^n).$$

Burada, $p_t(y) = F^{-1}_{x \to y}(e^{-t|x|}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|x|} e^{ix \cdot y} dx$ olarak tanımlanmıştır. Poisson çekirdekleri ailesi olarak bilinen $\{p_t(y)\}_{t>0}$ ailesinin açık ifadesi aşağıdaki gibidir (Stein ve Weiss 1971; Rubin 1996, syf. 217):

$$p_t(y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \cdot \frac{t}{(|y|^2 + t^2)^{(n+1)/2}}.$$

$f \in L_p$, $(1 \leq p \leq \infty)$ olmak üzere, $\{P_t f\}$ integraller ailesinin sağladığı özellikler, örneğin, (Rubin 1996, syf. 217-218) kaynağında bulunabilir. Bu özelliklerden anlaşılacağı üzere, $\{P_t f\}_{t>0}$ ailesi, $\delta = \frac{n}{p}$ tipli "makul yarıgrup" oluşturmaktadır.

2.3.4. L$_p$ uzayında etki eden integral operatörler ailesinin "makul yarıgrubuna" bir ilginç örnek: Metaharmonik yarıgrup

L_p uzayında etki eden integral operatörler ailesinin "makul yarıgrubuna" bir ilginç örnek de *metaharmonik yarıgrup* ismiyle bilinen aşağıdaki integral operatörler ailesidir (Rubin 1996, syf. 257-258):

$$(M_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} m_t(y) f(x-y) dy, (0 < t < \infty, x \in \mathbb{R}^n).$$

Burada, $m_t(y) = F^{-1}_{x \to y}(e^{-t\sqrt{1+|x|^2}})$ olup, $v = \frac{n+1}{2}$ ve $K_v(\cdot)$ fonksiyonu v mertebeden McDonald fonksiyonu (Rubin 1996, syf. 257) olmak üzere,

$$m_t(y) = \frac{2t}{(2\pi)^v} \cdot \frac{K_v(\sqrt{|y|^2 + t^2})}{(\sqrt{|y|^2 + t^2})^v}, (t > 0, y \in \mathbb{R}^n)$$

şeklindedir.

$f \in L_p$, $(1 \leq p \leq \infty)$ olmak üzere, $\{M_t f\}_{t>0}$ ailesinin, (Rubin 1996, syf. 257-258) kaynağında verilmiş özelliklerinden anlaşılacağı üzere, bu aile $\delta = \infty$ tipli "makul yarıgrup" oluşturmaktadır.

2.3.5. Modifiye edilmiş makul yarıgrup örnekleri

$\{W_t\}_{t>0}$, $\{P_t\}_{t>0}$ ve $\{M_t\}_{t>0}$ yukarıda tanımladığımız Gauss-Weierstrass, Poisson ve Metaharmonik yarıgruplar olsun. Bu yarıgruplar yardımıyla oluşturulan ve sırasıyla "modifiye edilmiş Gauss-Weierstrass yarıgrubu", "modifiye edilmiş Poisson yarıgrubu" ve "modifiye edilmiş Metaharmonik yarıgrup" diye adlandırılan

$$\{e^{-t}W_t\}_{t>0}, \{e^{-t}P_t\}_{t>0}, \text{ ve } \{e^{-t}M_t\}_{t>0}$$

integral operatörler ailelerini ele alalım. Bunlar da $\delta = \infty$ tipli makul yarıgrup oluştururlar. Gerçekten, U_t ile W_t, P_t ve M_t'den herhangi birini gösterirsek ve $A_t = e^{-t}U_t$ dersek, her $f \in L_p$, $(1 \leq p \leq \infty)$ ve her $s, t \in (0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} A_s(A_t f) &= e^{-s}U_s(e^{-t}U_t f) = e^{-s}e^{-t}U_s(U_t f) \\ &= e^{-(s+t)}U_{s+t}f = A_{s+t}f, \end{aligned}$$

yani, her $s, t \in (0, \infty)$ için

$$A_s A_t = A_{s+t}$$

olur. Dolayısıyla, $A_t = e^{-t}U_t$ bir yarıgruptur ve $U_t = W_t, U_t = P_t, U_t = M_t$ için $\{A_t\}_{t>0}$ yarıgrubu, $\delta = \infty$ tipli "makul yarıgrup" tur.

2.3.6. Beta-yarıgrup

Aşağıda vereceğimiz ve β-yarıgrup diye adlandırdığımız integraller ailesi, Gauss-Weierstrass ve Poisson yarıgruplarının ikisini de genelleştiren bir "makul yarıgruptur".

Tanım 2.5 (Aliev vd. 2008, syf. 11-13; Aliev 2009, syf. 154)**.** $f \in L_p$ *,* $(1 \leq p \leq \infty)$ *olmak üzere, aşağıdaki integraller ailesini tanımlayalım:*

$$(B_t^{(\beta)}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} w_t^{(\beta)}(y)f(x-y)dy, \ (0 < t < \infty, x \in \mathbb{R}^n).$$

Burada, $\beta \in (0, \infty)$ sabit tutulmuş bir parametre olmak üzere,

$$w_t^{(\beta)}(y) = F_{x \to y}^{-1}(e^{-t|x|^\beta})$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$w_t^{(\beta)}(y)$ çekirdeği, $\beta = 1$ için Poisson çekirdeği ve $\beta = 2$ için Gauss-Weierstrass çekirdeği olur:

$$\begin{aligned} w_t^{(1)}(y) &= \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \cdot \frac{t}{(|y|^2 + t^2)^{(n+1)/2}}; \\ w_t^{(2)}(y) &= (4\pi t)^{-n/2}e^{-|y|^2/4t}. \end{aligned}$$

$\beta \neq 1$ ve $\beta \neq 2$ için $w_t^{(\beta)}(y)$ çekirdeğinin açık (analitik) ifadesi bilinmiyor. Lakin hem $w_t^{(\beta)}(y)$ çekirdeğinin, hem de $\{B_t^{(\beta)}f\}_{t>0}$ ailesinin birçok önemli özellikleri biliniyor. Bu özellikleri bir Önteorem şeklinde ifade edelim.

Önteorem 2.6 (Aliev vd. 2008, syf. 11-13; Aliev 2009, syf. 154-156). $0 < t < \infty, 0 < \beta < \infty, y \in \mathbb{R}^n$ *olsun.* $w_t^{(\beta)}(y)$ *çekirdek fonksiyonu yukarıdaki gibi tanımlansın. O halde,*

1) $w_t^{(\beta)}(y)$ *fonksiyonu* y *değişkeninin radyal fonksiyonudur (yani,* $|y| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$ *normuna bağlıdır) ve her* $\lambda > 0$ *için*

$$w_{\lambda t}^{(\beta)}(\lambda^{1/\beta} y) = \lambda^{-n/\beta} w_t^{(\beta)}(y)$$

şeklinde "anizotropik homojenlik" özelliği sağlanır;

2) $0 < \beta \leq 2$ *için* $w_t^{(\beta)}(y)$ *pozitiftir;*

3) Eğer $\beta > 0$ *sayısı çift tam sayı ise,* $w_t^{(\beta)}(y)$ *fonksiyonu* y *değişkeninin sonsuz diferansiyellenen ve* $|y| \to \infty$ *için hızla sıfıra giden bir fonksiyonudur (yani, Schwartz test fonksiyonları uzayındandır). Eğer* $\beta > 0$ *çift tam sayı değil ise, her sabit tutulmuş* $t > 0$ *ve* $|y| \to \infty$ *için*

$$w_t^{(\beta)}(y) = O(|y|^{-n-\beta})$$

sağlanır. Dolayısıyla, her $\beta > 0$ *ve her* $1 \leq p \leq \infty$ *için* $w_t^{(\beta)} \in L_p$ *olur.*

4) Her $t > 0$ *ve* $\beta > 0$ *için*

$$\int_{\mathbb{R}^n} w_t^{(\beta)}(y) dy = 1;$$

5) $1 \leq p \leq \infty$ *ve* $f \in L_p$ *için*

$$\left\| B_t^{(\beta)} f \right\|_p \leq c_\beta \left\| f \right\|_p .$$

Burada,

$$c_\beta = \int_{\mathbb{R}^n} \left| w_t^{(\beta)}(y) \right| dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left| w_1^{(\beta)}(y) \right| dy < \infty$$

olup, $0 < \beta \leq 2$ *için* $c_\beta = 1$*'dir.*

6) $\sup\limits_{t>0} \left| \left(B_t^{(\beta)} f \right)(x) \right| \leq c(Mf)(x)$. *Burada* M, *klasik Hardy-Littlewood maksimal operatörü olup,* $f \in L_p$ *için aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| \, dy;$$

$B_r(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ *merkezli ve* r *yarıçaplı yuvar ve* $|B_r(x)|$ *de bu yuvarın Lebesgue ölçümü-dür ("hacmidir").*

7) $f \in L_p$, $(1 \leq p < \infty)$ *için*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \left(B_t^{(\beta)} f \right)(x) \right| \leq c t^{-\frac{n}{\beta p}} \left\| f \right\|_p .$$

8) (yarıgrup özelliği): her $t, s > 0$ *için*

$$B_t^{(\beta)} B_s^{(\beta)} = B_{t+s}^{(\beta)}.$$

9) $f \in L_p$*,* $1 \le p \le \infty$ *(*$L_\infty \equiv C_0$*) olsun. O halde,* $\lim\limits_{t\to 0^+} \left(B_t^{(\beta)} f\right)(x) = f(x)$ *sağlanır. Burada, limit* L_p*-normunda veya h.h.h.*$x \in \mathbb{R}^n$ *için noktasal limit olarak anlaşılır.* $f \in C_0$ *ise, limit* $\sup$*-norma göre limittir (yani, yakınsama düzgün yakınsamadır).*

Not: a) $\{B_t^{(\beta)} f\}_{t>0}$ ailesinin tanım ve özelliklerinden anlaşılacağı üzere, bu aile $\delta = \frac{n}{\beta p}$ tipli "makul yarıgrup" olup, $\beta = 2$ için Gauss-Weierstrass ve $\beta = 1$ için Poisson yarıgrubuna dönüşür.

b) $\mathcal{A}_t = e^{-t} B_t^{(\beta)}$, $(0 < t < \infty)$ tanımlarsak, $\mathcal{A}_0 = E$ olmak üzere, $\{\mathcal{A}_t\}_{t\ge 0}$ yine bir yarıgrup olup, $\beta = \infty$ tipli "makul yarıgrup" oluşturur.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Riesz, Bessel, Flett ve İki Parametreye Bağlı Potansiyeller ve Onların "Makul Demetler" Yardımıyla İfadeleri

Klasik Harmonik Analizin önemli teknik araçlarından biri Riesz potansiyelleridir. $S = S(\mathbb{R}^n)$ Schwartz uzayı olmak üzere, $g \in S$ fonksiyonunun α mertebeli Riesz potansiyeli şöyle tanımlanır (Stein 1970):

$$(I^\alpha g)(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,\ 0 < \alpha < n,\ \gamma_n(\alpha) = \frac{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\alpha/2)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}.$$

Burada, $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$ olarak tanımlanmıştır. Normalleştirici katsayı olan $\gamma_n(\alpha)$ sayısı öyle seçilmiştir ki,

$$(I^\alpha g)^\wedge(x) = |x|^{-\alpha} g^\wedge(x)$$

eşitliği sağlanır.

Her pozitif k tamsayısı ve $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ Laplace operatörü için sağlanan

$$(-\Delta)^k g(x) = \left(|y|^{2k} g^\wedge(y)\right)^\vee(x)$$

eşitliği dikkate alınırsa,

$$(I^\alpha g)(x) = \left(|y|^{-\alpha} g^\wedge(y)\right)^\vee(x)$$

eşitliğinden, formal olarak

$$(I^\alpha g)(x) = (-\Delta)^{-\alpha/2} g(x)$$

yazılabilir. Dolayısıyla, g fonksiyonunun $\alpha > 0$ mertebeden Riesz potansiyeli $(-\Delta)$ operatörünün $(-\alpha/2)$ mertebeden negatif "kesirsel kuvvetinin" g fonksiyonuna etkisi olarak yorumlanabilir.

Riesz potansiyelinin, Poisson ve Gauss-Weierstrass yarıgrupları ile aşağıdaki ifadeleri iyi bilinmektedir:

$$(I^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (P_t g)(x) dt, \text{ (Stein ve Weiss 1960)} \tag{3.1}$$

$$(I^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} (W_t g)(x) dt, \text{ (Johnson 1973)} \tag{3.2}$$

Riesz potansiyellerinin, yukarıda, 2.3.1 alt bölümünde tanımladığımız Riesz-Bochner "makul demeti" ile ilişkili tek boyutlu bir integral gösterimi daha vardır. Bu integral gösterim, (3.1) ve (3.2) formülleri gibi yaygın olmasa da, Riesz potansiyelleri teorisi açısından ilginçtir. Söz konusu formülü bir teorem şeklinde ifade edelim.

Teorem 3.7 (Karapınar 2006). *$(\mathcal{B}_t g)(x) \equiv (\mathcal{B}_t^{(\nu)} g)(x)$, $g \in L_p$ fonksiyonunun doğurduğu Riesz-Bochner "makul demeti" olsun. Eğer, $\nu > \frac{n-1}{2}$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $(1 \leq p < \infty)$ ise,*

$$(I^\alpha g)(x) = \frac{1}{c_\nu(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (\mathcal{B}_t g)(x) dt \tag{3.3}$$

eşitliği sağlanır.

Buradaki $c_\nu(\alpha)$ "normalleştirici" katsayısı aşağıdaki gibidir:

$$c_\nu(\alpha) = \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s^2)^\nu ds = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\nu+1\right)}.$$

İlgilenenler, (3.3) formülünün kanıtını (Karapınar 2006, syf. 15-19) kaynağından bulabilirler.

Riesz potansiyelleri için, yukarıdaki (3.1) ve (3.2) formüllerinin ikisini de genelleştiren bir integral gösterim daha vardır. Bunu da bir teorem vasıtasıyla ifade edelim.

Teorem 3.8 (Sezer ve Aliev 2010). *$0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ ve $g \in L_p$ olsun. Ayrıca, $\beta > 0$ olmak üzere, $\{B_t^{(\beta)} g\}_{t>0}$ integraller ailesi g fonksiyonunun doğurduğu β-yarıgrup olsun. Bu taktirde,*

$$(I^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} (B_t^{(\beta)} g)(x) dt \tag{3.4}$$

eşitliği sağlanır.

Açıkça görüldüğü üzere, $\beta = 1$ ve $\beta = 2$ için (3.4) formülü, sırasıyla, (3.1) ve (3.2) formüllerine dönüşür.

İlgilenenler, (3.4) formülünün kanıtını (Sezer ve Aliyev 2010) kaynağında bulabilirler. Hatırlatalım ki, (Sezer, Aliyev-2010) kaynağında, (3.4) formülü kullanılarak,

$$I^\alpha(L_p) = \{f : f = I^\alpha g, g \in L_p(\mathbb{R}^n)\}, \; \left(1 < p < \frac{n}{\alpha}\right)$$

şeklinde tanımlanan ve *Riesz Potansiyelleri Uzayı* diye adlandırılan $I^\alpha(L_p)$ uzayının yeni bir karakterizasyonu bulunmuştur.

Klasik Harmonik Analizin, Riesz potansiyelleri gibi önemli olan başka bir teknik aracı Bessel potansiyelleri denilen integral operatörlerdir. $S = S(\mathbb{R}^n)$ Schwartz uzayı olmak üzere, $g \in S$ fonksiyonunun $\alpha > 0$ mertebeli Bessel potansiyeli şöyle tanımlanıyor (Stein 1970, syf. 130; Samko vd. 1993, syf. 540):

$$(J^\alpha g)(x) = \frac{1}{\beta_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(y) g(x-y) dy. \tag{3.5}$$

Burada,

$$G_\alpha(y) = \int_0^\infty s^{\frac{\alpha-n}{2}-1} e^{-s-|y|^2/4s} ds, \; (y \in \mathbb{R}^n)$$

olup, "normalleştirici"

$$\beta_n(\alpha) = 2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

katsayısı öyle seçilmiştir ki,

$$(J^\alpha g)(x) = ((1+|y|^2)^{-\alpha/2} g^\wedge(y))^\vee(x)$$

sağlanır. Yani, konvolusyon (girişim) tipli $(J^\alpha g)(x)$ integral operatörünün Fourier çarpanı (Fourier multiplier) $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$'dir.

g fonksiyonunun α mertebeden Bessel potansiyeli, E birim operatör olmak üzere, $(E - \Delta)$ diferansiyel operatörünün $(-\alpha/2)$ mertebeden negatif "kesirsel kuvvetinin" g fonksiyonuna etkisi olarak yorumlanır.

$\wedge = (-\Delta)^{1/2}$ olmak üzere, $(E + \wedge)$ operatörünün $(-\alpha)$ mertebeden negatif kuvvetleri olarak yorumlanan, başka ifadeyle, Fourier çarpanları terimlerinde

$$(\mathcal{F}^\alpha g)^\wedge(x) = (1+|x|)^{-\alpha} g^\wedge(x), \; (\alpha > 0, x \in \mathbb{R}^n)$$

şeklinde tanımlanan ve Flett potansiyelleri diye adlandırılan $(\mathcal{F}^\alpha g)(x)$ integral operatörlerinin açık ifadesi aşağıdaki gibidir (Flett 1971; Samko vd. 1993; Aliyev vd. 2006):

$$(\mathcal{F}^\alpha g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(y) g(x-y) dy; \tag{3.6}$$

$$\Phi_\alpha(y) = \frac{1}{\lambda_n(\alpha)} |y|^{\alpha-n} \int_0^\infty \frac{t^\alpha e^{-t|y|}}{(1+t^2)^{(n+1)/2}} dt,$$

$\lambda_n(\alpha) = \pi^{(n+1)/2} \Gamma(\alpha) / \Gamma((n+1)/2)$.

(3.5) formülüyle tanımlanan Bessel potansiyeli operatörünün ve (3.6) formülüyle tanımlanan Flett potansiyeli operatörünün Gauss-Weierstrass ve Poisson "makul yarıgrupları" vasıtasıyla bir boyutlu integral şeklinde ifadeleri vardır: $g \in L_p$ ise,

$$(J^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} (W_t g)(x) dt; \text{ (Flett 1971)} \tag{3.7}$$

$$(\mathcal{F}^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} (P_t g)(x) dt. \text{ (Flett 1971)} \tag{3.8}$$

Bunların yanısıra, Bessel potansiyellerinin, 2.3.4 alt bölümünde tanımlanmış olan metaharmonik yarıgrup yardımıyla tek boyutlu integral ifadesi de vardır:

$$(J^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (M_t g)(x) dt, \text{ (Lizorkin 1964).}$$

Yukarıda tanımını verdiğimiz ve β-yarıgrup (beta-yarıgrup) diye adlandırılan $\{B_t^{(\beta)} g\}_{t>0}$ integraller ailesi yardımıyla, (Aliyev 2009) makalesinde, Bessel ve Flett potansiyellerinin ikisini de genelleştiren ve iki parametreye bağlı potansiyeller (bi-parametric potentials) diye adlandırılan integral operatörler ailesi tanımlanmıştır. Bu tanımı verelim:

Tanım 3.9 (Aliev 2009). *$\alpha > 0, \beta > 0, 1 \le p \le \infty$ ve $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere,*

$$(J_\beta^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} (B_t^{(\beta)} g)(x) dt \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanan $(J_\beta^\alpha g)(x)$ integral operatörüne iki parametreye bağlı potansiyel operatör denir.

$$(J_\beta^\alpha g)^\wedge(x) = (1 + |x|^\beta)^{-\alpha/\beta} g^\wedge(x), \text{ (Aliyev 2009, syf. 158)}$$

formülü dikkate alınırsa, $(J_\beta^\alpha g)$ operatörü $(E + (-\Delta)^{\beta/2})$ operatörünün $(-\alpha/\beta)$ mertebeden negatif "kesirsel kuvveti" olarak yorumlanabilir. Yine (3.9) formülünden ve $\{B_t^{(\beta)}\}_{t>0}$ yarıgrubunun tanımından kolayca görülebileceği üzere, $(J_\beta^\alpha g)$ operatörü, $\beta = 2$ için Bessel potansiyeline ve $\beta = 1$ için de Flett potansiyeline dönüşür. Hatırlatalım ki, (Aliev 2009) makalesinde iki parametreye bağlı potansiyel operatörler kullanılarak, Bessel potansiyelleri uzayının yeni bir karakterizasyonu verilmiştir.

Riesz potansiyellerinin (3.1)-(3.4) gösterimlerinden esinlenerek, bir sonraki Bulgular ve Tartışma bölümünde Riesz potansiyellerini genelleyen integral operatörler ailesi tanımlanacak ve bu aile için Hardy-Littlewood-Sobolev tipli eşitsizlik kanıtlanacaktır. Yine, Bulgular ve Tartışma kısmında Bessel ve Flett potansiyellerini genelleyen ve (3.9) formülüyle tanımlanan J_β^α opratörlerinin L_p uzayından L_q uzayına sınırlı etki etmesini sağlayan koşullar bulunacaktır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Makul Demetin Doğurduğu İntegral Operatörler için Hardy-Littlewood-Sobolev Tipli Eşitsizlik

Bu bölümde, yukarıda verdiğimiz "makul demet" kavramını kullanarak, integral operatörler ailesi tanımlayacağız. Makul demetin özel seçimleri ile klasik Riesz potansiyelleri elde edilecektir. Dolayısıyla, bizim tanımlayacağımız integral operatörler, klasik Riesz potansiyellerinin bir genelleşmesi olacaktır. Riesz potansiyelleri için iyi bilinen Hardy-Littlewood-Sobolev eşitsizliğinin bir benzeri, burada tanımlayacağımız integral operatörler için kanıtlanacaktır. Burada önemli bir hatırlatma yapalım: Bölüm 2.2'de verilen "makul demet" kavramında dört koşul vardı. Aşağıda verdiğimiz integral operatörler ailesini tanımlamak için "makul demetin" yalnız iki koşulu yeterli olacaktır.

Tanım 4.10. *$\{S_t\}_{t>0}$ operatörler ailesi, $L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \le p < \infty)$ uzayında verilmiş δ-tipli makul demet olsun. Yani, $\delta > 0$ verilmiş bir parametre olmak üzere,*

(a)

$$\sup_{t>0} \|S_t f\|_p \le c\,\|f\|_p\,; \tag{4.1}$$

(b)

$$ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(S_t f)(x)| \le c t^{-\delta}\,\|f\|_p \tag{4.2}$$

eşitsizlikleri sağlansın. O halde,

$$\left(A^\theta f\right)(x) = \int_0^\infty t^{\theta-1}(S_t f)(x)dt,\ (\theta > 0) \tag{4.3}$$

integraller ailesine, $\{S_t\}_t$ makul demetinin doğurduğu potansiyel tipli integral operatörler ailesi denir.

Not: $\{S_t\}_{t>0}$ makul demetinin özel seçimlerini kullanarak, (4.3) ailesinden, θ parametresine bağlı çarpan farkıyla, klasik Riesz potansiyellerini elde edebiliriz: $I^\alpha f$, f'nin Riesz potansiyeli olmak üzere,

1) $S_t = \mathcal{B}_t \equiv \mathcal{B}_t^{(\nu)}$ (Riesz-Bochner), $\delta = \frac{n}{p}, \theta = \alpha$ için,

$$A^\alpha f = c_\nu(\alpha) I^\alpha f,\ c_\nu(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\nu+1\right)};$$

2) $S_t = P_t$ (Poisson), $\delta = \frac{n}{p}, \theta = \alpha$ için,

$$A^{\alpha} f = \Gamma(\alpha) I^{\alpha} f;$$

3) $S_t = W_t$ (Gauss-Weierstrass), $\delta = \frac{n}{2p}, \theta = \frac{\alpha}{2}$ için,

$$A^{\alpha/2} f = \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) I^{\alpha} f;$$

4) $S_t = B_t$ (β-yarıgrup), $\delta = \frac{n}{\beta p}, \theta = \frac{\alpha}{\beta}$ için,

$$A^{\frac{\alpha}{\beta}} f = \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) I^{\alpha} f$$

elde edilir.

Şimdi, (4.3) formülüyle tanımlanmış $A^{\theta} f$ integraller ailesi için Hardy-Littlewood-Sobolev tipli eşitsizliği ifade edelim ve kanıtlayalım.

Teorem 4.11. *$\{S_t\}_{t>0}$ δ-tipli makul demeti, (4.1) ve (4.2) koşullarını sağlasın ve $f \in L_p$ olmak üzere, $A^{\theta} f$ integral operatörleri ailesi (4.3)'deki gibi tanımlansın:*

$$(A^{\theta} f)(x) = \int_0^{\infty} t^{\theta-1} (S_t f)(x) dt, \ (0 < \theta < \delta)$$

O halde, $1 < p < \infty$ olmak üzere,

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\theta}{\delta}\right) \tag{4.4}$$

eşitliğini sağlayan her $q > p$ için öyle $C = C(p, q, \delta) > 0$ sabiti vardır ki,

$$\left\|A^{\theta} f\right\|_q \leq C \left\|f\right\|_p \tag{4.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca, $1 \leq p < q < \infty$ ve q sayısı da (4.4) eşitliğini sağlamak üzere, A^{θ} operatörü zayıf (p, q) tipli olur, yani, her $\lambda > 0$ için

$$m\{x : \left|(A^{\theta} f)(x)\right| > \lambda\} \leq C\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^q \tag{4.6}$$

sağlanır.

Not 2: (4.4) eşitliği şöyle de yazılabilir:

$$\theta = \delta p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), (1 \leq p < q < \infty).$$

İspat Biz önce, $1 \leq p < q < \infty$ olmak üzere, $\theta = \delta p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ koşulunu sağlayan θ için A^θ operatörünün zayıf (p, q) tipli olduğunu kanıtlayacağız. Daha sonra, Marcinkiewicz interpolasyon teoremi kullanılarak, $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\theta}{\delta}\right)$ durumunda A^θ operatörünün güçlü (p, q) tipli olduğu sonucu elde edilir.

$$\begin{aligned}(A^\theta f)(x) &= \int_0^\infty t^{\theta-1}(S_t f)(x)dt \\ &= \int_0^\mu t^{\theta-1}(S_t f)(x)dt + \int_\mu^\infty t^{\theta-1}(S_t f)(x)dt \qquad (4.7)\end{aligned}$$

yazalım. (Stein 1970) kaynağındaki Hardy-Littlewood-Sobolev teoreminin ispatındaki bazı teknikleri kullanacağız (kıyaslama için bakınız: Stein 1970, syf. 119-121).

(4.7)'ye göre, $\lambda > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}m\{x : \left|(A^\theta f)(x)\right| > 2\lambda\} \leq m\{x : &\left|\int_0^\mu t^{\theta-1}(S_t f)(x)dt\right| > \lambda\} \\ + m\{x : &\left|\int_\mu^\infty t^{\theta-1}(S_t f)(x)dt\right| > \lambda\}. \qquad (4.8)\end{aligned}$$

$g(x) = \int_0^\mu t^{\theta-1}(S_t f)(x)dt$ dersek, (4.8)'deki ilk toplanan için

$$m\{x : |g(x)| > \lambda\} = m\{x : |g(x)|^p > \lambda^p\}$$

olur. Önce Chebyshev ve sonra da Minkowski eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned}m\{x : |g(x)| > \lambda\} &= m\{x : |g(x)|^p > \lambda^p\} \leq \frac{1}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \, dx \\ = \frac{1}{\lambda^p}\|g\|_p^p &= \frac{1}{\lambda^p}\left\|\int_0^\mu t^{\theta-1}(S_t f)(x)dt\right\|_p^p \leq \frac{1}{\lambda^p}\left(\int_0^\mu t^{\theta-1}\|S_t f\|_p \, dt\right)^p \\ &\overset{(4.1)}{\leq} \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right)^p\left(\int_0^\mu t^{\theta-1}dt\right)^p = \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right)^p\left(\frac{\mu^\theta}{\theta}\right)^p. \qquad (4.9)\end{aligned}$$

Şimdi de, (4.8)'deki ikinci toplanana bakalım.

$$\begin{aligned}\left|\int_\mu^\infty t^{\theta-1}(S_t f)(x)dt\right| \overset{(4.2)}{\leq} c\|f\|_p\int_\mu^\infty t^{\theta-1}t^\delta dt &= c\|f\|_p\int_\mu^\infty t^{\theta-\delta-1}dt \\ &= c\|f\|_p \cdot \frac{1}{\theta-\delta}(-\mu^{\theta-\delta}) \\ &= c\|f\|_p \cdot \frac{1}{\delta-\theta}\mu^{\theta-\delta} \\ &= b\|f\|_p \mu^{\theta-\delta}; \qquad (4.10)\end{aligned}$$

burada, $b = \frac{c}{\delta-\theta} > 0$.

(4.7) eşitliğindeki $\mu > 0$ parametresinin seçimi bizim elimizdedir. Biz, μ parametresini öyle seçelim ki, $b\left\|f\right\|_p \mu^{\theta-\delta} = \lambda$ olsun. Yani,

$$\mu = \left(\frac{\lambda}{b\left\|f\right\|_p}\right)^{\frac{1}{\theta-\delta}} = b^{\frac{1}{\delta-\theta}}\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\delta-\theta}} \tag{4.11}$$

alalım. O halde, μ'nun bu değeri için (4.10)'a göre,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\int_\mu^\infty t^{\theta-1}(S_t f)(x)dt\right| \le \lambda$$

olur ve dolayısıyla,

$$m\{x : \left|\int_\mu^\infty t^{\theta-1}(S_t f)(x)dt\right| > \lambda\} = 0$$

olur. Bunu ve (4.9)'u (4.8)'de dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} m\{x \quad : \quad \left|(A^\theta f)(x)\right| > 2\lambda\} &\le \left(\frac{c\left\|f\right\|_p}{\lambda}\right)^p \left(\frac{\mu^\theta}{\theta}\right)^p \\ &= c^p\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^p \frac{1}{\theta^p} b^{\frac{\theta}{\delta-\theta}}\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^{\frac{\theta p}{\delta-\theta}} \\ &= \left(\frac{c}{\theta}\right)^p b^{\frac{\theta}{\delta-\theta}}\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^{p+\frac{\theta p}{\delta-\theta}} = B\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^{p+\frac{\theta p}{\delta-\theta}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Burada, $B = \left(\frac{c}{\theta}\right)^p b^{\frac{\theta}{\delta-\theta}} = \left(\frac{c}{\theta}\right)^p \left(\frac{c}{\delta-\theta}\right)^{\frac{\theta}{\delta-\theta}}$.

Teoremin koşulundan,

$$p + \frac{\theta p}{\delta-\theta} = q$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, her $\lambda > 0$ için,

$$m\{x : \left|(A^\theta f)(x)\right| > 2\lambda\} \le B\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^q,$$

veyahutta, her $\lambda > 0$ için,

$$m\{x : \left|(A^\theta f)(x)\right| > \lambda\} \le 2^q B\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^q \tag{4.13}$$

olur. Yani, A^θ operatörü zayıf (p,q) tiplidir. Marcinkiewicz interpolasyon teoremi uygulanırsa, $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\theta}{\delta}\right)$ için, A^θ operatörünün güçlü (p,q) tipli olduğu çıkar.

Teorem ispatlandı. $\square$

Not 3: $\theta = \delta p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ eşitliği kullanılırsa, (4.13)'teki B katsayısı şu şekle düşer:

$$B = \left(\frac{cq}{\delta p}\right)^{\frac{q}{p}-1+p} \cdot \left(\frac{q}{p} - 1\right)^{-p}.$$

Buradaki $c > 0$ ve $\delta > 0$ sayıları Tanım 4.10'daki (4.1) ve (4.2) ifadelerindeki sabitlerdir.

Not 4: Teoremin ifadesindeki $\{S_t\}_{t>0}$ makul demeti yerine, Not 1'deki demetlerden herhangi birini alırsak, klasik Riesz potansiyelleri için Hardy-Littlewood-Sobolev teoremi elde edilmiş olur.

Örneğin, $S_t = B_t \equiv B_t^{(\beta)}$ (β-yarıgrup), $\delta = \frac{n}{\beta p}$ ve $\theta = \frac{\alpha}{\beta}$ alırsak,

$$A^{\frac{\alpha}{\beta}} f = \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) I^\alpha f$$

olacağından, Teoreme göre, $1 < p < q < \infty$ ve

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\theta}{\delta}\right) = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{n}{\beta p}}\right) = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{p\alpha}{n}\right) = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n},$$

yani, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ için I^α operatörü (Riesz potansiyeli) L_p uzayından L_q uzayına sınırlı etki eder (başka ifadeyle, güçlü (p, q) tiplidir). Bu da, klasik Riesz potansiyeli için iyi bilinen Hardy-Littlewood-Sobolev teoremidir.

4.2. İki Parametreye Bağlı Potansiyel Tipli Operatörlerin L_p Uzaylarında Davranışının İncelenmesi

Tez çalışmasının bu bölümünde, yukarıda, Tanım 3.9'da bahsi geçen ve (Aliev 2009) makalesinde tanımlanmış olan iki parametreye bağlı potansiyel tipli operatörlerin (bi-parametric potential-type operators) $L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ uzaylarında davranışını inceleyeceğiz.

Yukarıda, 3.1 numaralı alt bölümde verdiğimiz iki parametreye bağlı potansiyel tipli operatörlerin tanımını tekrar hatırlatalım (Aliev 2009):

$0 < \beta < \infty, 0 < \alpha < \infty, 1 \leq p \leq \infty$ ve $g \in L_p$ olmak üzere,

$$(J_\beta^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} (B_t^{(\beta)} g)(x) dt \tag{4.14}$$

integral operatörüne, β ve α parametrelerine bağlı potansiyel tipli operatör denir.

Bu integral operatörler, $\beta = 2$ için klasik Bessel potansiyellerine ve $\beta = 1$ için Flett potansiyellerine dönüşür.

g fonksiyonu Schwartz uzayından ise,

$$(J_\beta^\alpha g)^\wedge(y) = (1 + |y|^\beta)^{-\alpha/\beta} \cdot g^\wedge(y), (y \in \mathbb{R}^n)$$

olduğu görülebilir (Aliev 2009, syf. 157).

Bu eşitlik dikkate alınarak, E birim operatör ve Δ Laplace diferansiyel operatörü olmak üzere, J_β^α integral operatörler ailesi, $(E + (-\Delta)^{\beta/2})$ operatörlerinin $(-\alpha/\beta)$ mertebeden negatif "kesirsel kuvvetleri" olarak yorumlanabilir (Aliev 2009):

$$J_\beta^\alpha g = (E + (-\Delta)^{\beta/2})^{-\alpha/\beta} g, (g \in S).$$

J_β^α, $(\alpha > 0, \beta > 0)$ integraller ailesinin L_p uzaylarındaki davranışını bir teoremle ifade edelim.

Teorem 4.12. $0 < \alpha < \infty; 0 < \beta \leq 2$ *olup,* J_β^α *integral operatörler ailesi (4.14)'deki gibi tanımlansın. O halde,*

(a) Her $g \in L_p$ *,* $(1 \leq p \leq \infty)$ *için*

$$\left\| J_\beta^\alpha g \right\|_p \leq \|g\|_p \tag{4.15}$$

sağlanır.

(b) $1 < p < q < \infty$ *ve* $\alpha = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ *için* g *fonksiyonundan bağımsız öyle* $A_1 > 0$ *vardır ki, her* $g \in L_p$ *için,*

$$\left\| J_\beta^\alpha g \right\|_q \leq A_1 \|g\|_p \tag{4.16}$$

sağlanır. Yani, J_β^α *operatörü güçlü* (p, q) *tipli operatördür.*

(c) $p = 1$ *ve* $\alpha = n\left(1 - \frac{1}{q}\right)$ *ise,* $g \in L_1$ *fonksiyonundan bağımsız öyle* $A_2 > 0$ *sabiti vardır ki, her* $\lambda > 0$ *için*

$$m\{x \in \mathbb{R}^n : \left|(J_\beta^\alpha g)(x)\right| > \lambda\} \leq \left(\frac{A_2 \|g\|_1}{\lambda}\right)^q \tag{4.17}$$

sağlanır. Yani, J_β^α *operatörü,* $p = 1$ *ve* $q = \frac{n}{n-\alpha}$ *için zayıf* $(1, q)$ *tiplidir.*

(d) $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *ve* $\alpha > n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ *ise, öyle* $A_3 > 0$ *sabiti vardır ki, her* $g \in L_p$ *için*

$$\left\| J_\beta^\alpha g \right\|_q \leq A_3 \|g\|_p \tag{4.18}$$

sağlanır.

(e) $p \geq 1, \alpha = \frac{n}{p}$ *ve* $q = \infty$ *ise, öyle* $g \in L_p$ *vardır ki,* $\left\|J_\beta^\alpha g\right\|_\infty = \infty$ *olur. Yani, her* $g \in L_p$ *için*

$$\left\|J_\beta^\alpha g\right\|_\infty \leq A_4 \left\|g\right\|_p$$

eşitsizliğini sağlayan A_4 *sabiti yoktur.*

İspat Önteorem 2.6'daki bilgilerden yararlanacağız.

(a) $0 < \beta \leq 2$ olduğundan, $B_t^{(\beta)}$ yarıgrubunun çekirdeği pozitif olur ve Önteorem 2.6-5)'e göre $\left\|B_t^{(\beta)} g\right\|_p \leq \|g\|_p$ sağlanır. O halde, Minkowski eşitsizliğine ve Γ (gamma) fonksiyonunun tanımına göre,

$$\begin{aligned}\left\|J_\beta^\alpha g\right\|_p &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} \left\|B_t^{(\beta)} g\right\|_p dt \\ &\leq \|g\|_p \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} dt = \|g\|_p\end{aligned}$$

sağlanır.

(b) Şimdi, $1 < p < q < \infty$ ve $\alpha = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ olsun. $0 < \beta \leq 2$ olduğundan, yukarıda da söylediğimiz gibi, $B_t^{(\beta)}$ yarıgrubunun çekirdeği pozitiftir: $w_t^{(\beta)}(y) > 0$. O halde, her $g \in L_p$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left|(B_t^{(\beta)} g)(x)\right| \leq B_t^{(\beta)}(|g|)(x)$$

sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned}\left|(J_\beta^\alpha g)(x)\right| &\leq J_\beta^\alpha(|g|)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^1 t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} B_t^{(\beta)}(|g|)(x) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_1^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} B_t^{(\beta)}(|g|)(x) dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} B_t^{(\beta)}(|g|)(x) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_1^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} B_t^{(\beta)}(|g|)(x) dt \\ &\equiv A_0^\alpha(|g|)(x) + A_1^\alpha(|g|)(x) \qquad (4.19)\end{aligned}$$

Buradan, q sayısı $\alpha = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ eşitliğini sağlayan sayı, yani $q = \frac{np}{n-\alpha p}$ olmak üzere,

$$\left\|J_\beta^\alpha g\right\|_q \leq \left\|A_0^\alpha(|g|)\right\|_q + \left\|A_1^\alpha(|g|)\right\|_q \qquad (4.20)$$

yazılabilir.

(4.19)'daki A_0^α integral operatörü, (3.4) formülüne göre, $|g| \in L_p$ fonksiyonunun α mertebeden Riesz potansiyelidir. O halde, Hardy-Littlewood-Sobolev teoremine göre, bir $c_1 > 0$ sabiti için

$$\left\|A_0^\alpha(|g|)\right\|_q \leq c_1 \|g\|_p \qquad (4.21)$$

olur.

Diğer yandan, Minkowski eşitsizliğine göre,

$$\|A_1^\alpha(|g|)\|_q \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_1^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} \left\| B_t^{(\beta)}(|g|) \right\|_q dt \tag{4.22}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left\| B_t^{(\beta)}(|g|) \right\|_q &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (B_t^{(\beta)}(|g|)(x))^q dx \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (B_t^{(\beta)}(|g|)(x))^{q-p} \cdot (B_t^{(\beta)}(|g|)(x))^p dx \right)^{1/q} \\
&\leq \text{(burada, Önteorem 2.6-7)'yi kullanıyoruz)} \\
&\leq (c \cdot t^{-\frac{n}{\beta p}} \|g\|_p)^{\frac{q-p}{q}} \left\| (B_t^{(\beta)}(|g|) \right\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&\leq \text{(burada, Önteorem 2.6-5)'yi kullanıyoruz)} \\
&\leq c^{1-\frac{p}{q}} \cdot t^{-\frac{n}{\beta p}\left(1-\frac{p}{q}\right)} \|g\|_p^{1-\frac{p}{q}} \|g\|_p^{\frac{p}{q}} \\
&= c^{1-\frac{p}{q}} \cdot t^{-\frac{1}{\beta} \cdot n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|g\|_p
\end{aligned}$$

olur. Sonuncu eşitlik (4.22)'de kullanılırsa ve $n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = \alpha$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\|A_1^\alpha(|g|)\|_q &\leq \frac{c^{1-\frac{p}{q}}}{\Gamma(\alpha/\beta)} \left(\int_1^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1-\frac{1}{\beta}\cdot n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} e^{-t} dt \right) \|g\|_p \\
&= \frac{c^{1-\frac{p}{q}}}{\Gamma(\alpha/\beta)} \left(\int_1^\infty t^{-1} e^{-t} dt \right) \|g\|_p \leq \frac{c^{1-\frac{p}{q}}}{\Gamma(\alpha/\beta)} \left(\int_1^\infty e^{-t} dt \right) \|g\|_p \\
&= \frac{c^{1-\frac{p}{q}}}{e\Gamma(\alpha/\beta)} \|g\|_p = c_2 \|g\|_p
\end{aligned} \tag{4.23}$$

olur. Burada, $c_2 = \frac{c^{1-\frac{p}{q}}}{e\Gamma(\alpha/\beta)}$.

Şimdi, (4.21) ve (4.23) eşitsizlikleri (4.20)'de dikkate alınırsa ve $c_1 + c_2 = c_3$ denirse, her $g \in L_p$ için

$$\left\| J_\beta^\alpha g \right\|_q \leq c_3 \|g\|_p$$

eşitsizliğinin sağlandığını söyleyebiliriz.

(c) Şimdi, $g \in L_1$ ve $q = \frac{n}{n-\alpha}$ olsun. Yukarıdaki (4.19) eşitsizliğine göre,

$$\left|(J_\beta^\alpha g)(x)\right| \leq A_0^\alpha(|g|)(x) + A_1^\alpha(|g|)(x).$$

Buradan, her $\lambda > 0$ için,

$$\begin{aligned}
\{x &\in \mathbb{R}^n : \left|(J_\beta^\alpha g)(x)\right| > 2\lambda\} \\
&\subset \{x \in \mathbb{R}^n : A_0^\alpha(|g|)(x) > \lambda\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : A_1^\alpha(|g|)(x) > \lambda\}.
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
m\{x \;\; &\in \;\; \mathbb{R}^n : \left|(J^\alpha_\beta g)(x)\right| > 2\lambda\} \\
&\leq \;\; m\{x \in \mathbb{R}^n : A^\alpha_0(|g|)(x) > \lambda\} + m\{x \in \mathbb{R}^n : A^\alpha_1(|g|)(x) > \lambda\} \quad (4.24)
\end{aligned}
$$

olur.

$A^\alpha_0(|g|)$ operatörü $g \in L_1$ fonksiyonunun α mertebeden Riesz potansiyeli olduğundan, Hardy-Littlewood-Sobolev teoremine göre, öyle $c_4 > 0$ sabiti vardır ki, her $\lambda > 0$ için,

$$
m\{x \in \mathbb{R}^n : A^\alpha_0(|g|)(x) > \lambda\} \leq \left(\frac{c_4 \left\|g\right\|_1}{\lambda}\right)^q, \; \left(q = \frac{n}{n-\alpha}\right) \quad (4.25)
$$

sağlanır.

Diğer yandan, Chebyshev eşitsizliğine ve (4.23) eşitsizliğine göre, $p = 1$ ve $q = \frac{n}{n-\alpha}$ için

$$
\begin{aligned}
m\{x \in \mathbb{R}^n : A^\alpha_1(|g|)(x) > \lambda\} &= m\{x \in \mathbb{R}^n : |A^\alpha_1(|g|)(x)|^q > \lambda^q\} \\
&\leq \frac{1}{\lambda^q} \int_{\mathbb{R}^n} (A^\alpha_1(|g|)(x))^q \, dx = \frac{1}{\lambda^q} \left\|A^\alpha_1(|g|)\right\|^q_q \\
&\overset{(4.23)}{\leq} \frac{1}{\lambda^q} (c_2 \left\|g\right\|_1)^q = \left(\frac{c_2 \left\|g\right\|_1}{\lambda}\right)^q \quad (4.26)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.25) ve (4.26) eşitsizlikleri (4.24)'de dikkate alınırsa (4.17) elde edilmiş olur.

(d) Şimdi de, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ve $\alpha > n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ olsun. Bir $A_3 > 0$ sabiti ve her $g \in L_p$ için

$$
\left\|J^\alpha_\beta g\right\|_q \leq A_3 \left\|f\right\|_p
$$

kanıtlamak istiyoruz.

Öncelikle, girişim için Young eşitsizliğini anımsatalım: $1 \leq p, q, r \leq \infty$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$ ise, $u \in L_r$ ve $v \in L_p$ için

$$
\left\|u * v\right\|_q \leq \left\|u\right\|_r \left\|v\right\|_p .
$$

Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$
\left\|J^\alpha_\beta g\right\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} \left\|B^{(\beta)}_t g\right\|_q dt \quad (4.27)
$$

olur.

$$
(B^{(\beta)}_t g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} w^{(\beta)}_t(y) g(x-y) dy \equiv (w^{(\beta)}_t * g)(x)
$$

olduğundan, Young eşitsizliğine göre, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}-1$ olmak üzere,

$$\left\|B_t^{(\beta)}g\right\|_q \leq \left\|w_t^{(\beta)}\right\|_r \cdot \|g\|_p \tag{4.28}$$

ve $0<\beta\leq 2$ için $w_t^{(\beta)}(y)>0$ olduğundan,

$$\left\|w_t^{(\beta)}\right\|_r^r = \int_{\mathbb{R}^n}\left(w_t^{(\beta)}(y)\right)^r dy \tag{4.29}$$

yazabiliriz.

$w_t^{(\beta)}(y)$ çekirdek fonksiyonunun aşağıdaki anizotropik homojenlik özelliğini kullanacağız (Önteorem 2.6):

$$w_t^{(\beta)}(t^{\frac{1}{\beta}}y)=t^{-n/\beta}w_1(y),\,(t>0, y\in\mathbb{R}^n). \tag{4.30}$$

(4.29) eşitliğinde $y=t^{1/\beta}z$, $(dy=t^{n/\beta}dz)$ şeklinde değişken değiştirerek (4.30) özelliğini kullanırsak,

$$\left\|w_t^{(\beta)}\right\|_r^r = \int_{\mathbb{R}^n} t^{\frac{n}{\beta}}\cdot t^{-\frac{n}{\beta}r}\left(w_1^{(\beta)}(z)\right)^r dz = t^{\frac{n}{\beta}(1-r)}\int_{\mathbb{R}^n}\left(w_1^{(\beta)}(z)\right)^r dz \tag{4.31}$$

olur. Önteorem 2.6'daki

$$w_1^{(\beta)}(y)=O(|y|^{-n-\beta}),\,(\,|y|\to\infty)$$

asimptotik eşitliğini kullanırsak, $\int_{\mathbb{R}^n}\left(w_1^{(\beta)}(z)\right)^r dz$ integralinin yakınsak olduğu görülür. Dolayısıyla, (4.31)'e göre, bir $c_1>0$ için

$$\left\|w_t^{(\beta)}\right\|_r^r \leq c_1 t^{\frac{n}{\beta}(1-r)}$$

ve buradan da, $c_2=c_1^{\frac{1}{r}}$ dersek,

$$\left\|w_t^{(\beta)}\right\|_r \leq c_2 t^{\frac{n}{\beta}\left(\frac{1}{r}-1\right)} = c_2 t^{\frac{n}{\beta}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}$$

olur. Böylece, (4.28)'e göre,

$$\left\|B_t^{(\beta)}g\right\|_q \leq c_2 t^{\frac{n}{\beta}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\|g\|_p\,.$$

Sonuncu eşitsizliği (4.27)'te kullanırsak,

$$\left\|J_\beta^\alpha g\right\| \leq c_2\|g\|_p \frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha}{\beta}-1+\frac{n}{\beta}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}dt$$

olur. Sağdaki integralin yakınsak olması için, $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{n}{\beta}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)>0$ olmalı, yani, $\alpha>n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ olmalıdır ki, bu da teoremin koşullarından biridir.

(e) (Stein 1970, syf. 119) kaynağında Riesz potansiyellerinin, $p=\frac{n}{\alpha}$ için L_p'den L_∞'a sınırlı etki etmediğini göstermek için kurulan fonksiyon örneği burada da işe yarıyor. $0<\varepsilon<1$ olmak üzere,

$$g(x)=\left\{\begin{array}{cc} |x|^{-\alpha}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-\frac{\alpha}{n}(1+\varepsilon)}, & |x|\leq\frac{1}{2} \\ 0, & |x|>\frac{1}{2}\end{array}\right\} \tag{4.32}$$

fonksiyonunun $p=\frac{n}{\alpha}$ için L_p uzayından olduğu açıktır. Gerçekten,

$$\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|^p\,dx=\int_{|x|\leq\frac{1}{2}}|x|^{-n}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-(1+\varepsilon)}dx<\infty.$$

Bu fonksiyon için $\left\|J_\beta^\alpha g\right\|_\infty=\infty$ olduğunu göstermek istiyoruz. Aşağıda görüleceği üzere, bunu kanıtlamak, Riesz potansiyellerindeki gibi kolay değildir.

g, (4.32)'deki fonksiyon olmak üzere,

$$\left\|J_\beta^\alpha g\right\|_\infty=ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\left(J_\beta^\alpha g\right)(x)\right|\geq\left|\left(J_\beta^\alpha g\right)(0)\right|$$

olup,

$$\left(J_\beta^\alpha g\right)(0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha/\beta)}\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}(B_t^{(\beta)}g)(0)dt \tag{4.33}$$

eşitliği sağlanır. $\frac{\alpha}{n}(1+\varepsilon)=\gamma$ diyelim. $\alpha<n$ olduğundan, $\varepsilon>0$ sayısı o kadar küçük alınabilir ki, $\gamma<1$ olur.

$$(B_t^{(\beta)}g)(0)=\int_{\mathbb{R}^n}w_t^{(\beta)}(y)g(-y)dy=\int_{|y|\leq\frac{1}{2}}w_t^{(\beta)}(y)\,|y|^{-\alpha}\left(\ln\frac{1}{|y|}\right)^{-\gamma}dy.$$

$w_t^{(\beta)}(y)$ çekirdeğinin anizotropik homojenlik özelliği kullanılırsa,

$$(B_t^{(\beta)}g)(0)=\int_{|y|\leq\frac{1}{2}}t^{-\frac{n}{\beta}}w_1^{(\beta)}\left(t^{-\frac{1}{\beta}}y\right)|y|^{-\alpha}\left(\ln\frac{1}{|y|}\right)^{-\gamma}dy$$

olur. Burada, $y=t^{\frac{1}{\beta}}z$, $(dy=t^{\frac{n}{\beta}}dz)$ şeklinde değişken değiştirirsek,

$$\begin{aligned}(B_t^{(\beta)}g)(0) &= \int_{|z|\leq\frac{1}{2}t^{-1/\beta}}w_1^{(\beta)}(z)\,|z|^{-\alpha}\,t^{-\frac{\alpha}{\beta}}\left(\ln\frac{1}{|z|\,t^{\frac{1}{\beta}}}\right)^{-\gamma}dz \\ &= t^{-\frac{\alpha}{\beta}}\int_{|z|\leq\frac{1}{2}t^{-1/\beta}}w_1^{(\beta)}(z)\,|z|^{-\alpha}\left(\ln\frac{1}{|z|\,t^{\frac{1}{\beta}}}\right)^{-\gamma}dz\end{aligned}$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(J^{\alpha}_{\beta}g\right)(0) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}t^{-\frac{\alpha}{\beta}}A(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}\frac{1}{t}A(t)dt \qquad (4.34)\end{aligned}$$

olur. Burada,

$$A(t)=\int_{|z|\leq\frac{1}{2}t^{-1/\beta}} w_1^{(\beta)}(z)\,|z|^{-\alpha}\left(\ln\left(\frac{1}{|z|\,t^{\frac{1}{\beta}}}\right)\right)^{-\gamma}dz$$

$0<\beta\leq 2$ olduğundan, $w_1^{(\beta)}(z)>0$ ve dolayısıyla, her $t>0$ için $A(t)>0$ olur. O halde, (4.34)'e göre

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(J^{\alpha}_{\beta}g\right)(0)>\int_0^{1/2}e^{-t}\frac{1}{t}A(t)dt>\frac{1}{\sqrt{e}}\int_0^{1/2}\frac{1}{t}A(t)dt,$$

$\int_0^{1/2}\frac{1}{t}A(t)dt=\infty$ olduğunu göstermek istiyoruz. $w_1^{(\beta)}(z)>0$ fonksiyonu bir radial fonksiyondur. Yazılışın kolaylığı için $w_1^{(\beta)}(z)$ yerine $w(|z|)$ notasyonunu kullanacağız.

Böylece,

$$\begin{aligned}A(t) &= \int_{|z|<\frac{1}{2}t^{-1/\beta}} w(|z|)\,|z|^{-\alpha}\left(\ln\left(\frac{1}{|z|\,t^{\frac{1}{\beta}}}\right)\right)^{-\gamma}dz \\ &= c_1\int_0^{\frac{1}{2}t^{-1/\beta}} w(r)r^{n-\alpha-1}\left(\ln\left(\frac{1}{rt^{\frac{1}{\beta}}}\right)\right)^{-\gamma}dr\end{aligned}$$

Sonuncu integralde

$$r=st^{-1/\beta},\ (dr=t^{-1/\beta}ds)$$

şeklinde değişken değiştirmesi yaparsak,

$$\begin{aligned}A(t) &= c_1\int_0^{\frac{1}{2}} w(st^{-1/\beta})s^{n-\alpha-1}t^{-\frac{n-\alpha-1}{\beta}}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-\gamma}t^{-1/\beta}ds \\ &= c_1t^{-\frac{n-\alpha}{\beta}}\int_0^{\frac{1}{2}} w(st^{-1/\beta})s^{n-\alpha-1}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-\gamma}ds. \qquad (4.35)\end{aligned}$$

$w(0)=w_1^{(\beta)}(0)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|x|^\beta}dx=2a$ diyelim. $\delta>0$ sayısını o kadar küçük alalım ki, $0<\tau\leq\delta$ olan her τ için $w(\tau)\geq a$ olsun. Böyle seçilmiş δ sayısı için (4.35)'e göre,

$$\begin{aligned} A(t) &\geq c_1 t^{-\frac{n-\alpha}{\beta}} \int_0^{\delta t^{1/\beta}} w(st^{-1/\beta}) s^{n-\alpha-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-\gamma} ds \\ &\geq c_1 a t^{-\frac{n-\alpha}{\beta}} \int_0^{\delta t^{1/\beta}} s^{n-\alpha-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-\gamma} ds \\ &\geq c_1 a t^{-\frac{n-\alpha}{\beta}} \int_{\frac{1}{2}\delta t^{1/\beta}}^{\delta t^{1/\beta}} s^{n-\alpha-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-\gamma} ds \\ &\geq c_1 a t^{-\frac{n-\alpha}{\beta}} \left(\ln \left(\frac{2}{\delta t^{1/\beta}}\right)\right)^{-\gamma} \int_{\frac{1}{2}\delta t^{1/\beta}}^{\delta t^{1/\beta}} s^{n-\alpha-1} ds \\ &= c_1 a t^{-\frac{n-\alpha}{\beta}} \left(\ln \left(\frac{2}{\delta t^{1/\beta}}\right)\right)^{-\gamma} \left(\delta t^{\frac{1}{\beta}}\right)^{n-\alpha} \left(1 - \frac{1}{2^{n-\alpha}}\right) \\ &= c_2 \left(\ln \frac{2}{\delta t^{1/\beta}}\right)^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Burada, $c_2 = c_1 a \delta^{n-\alpha} \left(1 - \frac{1}{2^{n-\alpha}}\right)$.

Böylece,

$$A(t) \geq c_2 \left(\ln \left(\frac{2}{\delta t^{1/\beta}}\right)\right)^{-\gamma}.$$

Buradan,

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{t} A(t) dt \geq c_2 \int_0^{1/2} \frac{1}{t} \left(\ln \left(\frac{2}{\delta t^{1/\beta}}\right)\right)^{-\gamma} dt. \tag{4.36}$$

$\frac{2}{\delta t^{1/\beta}} = r$ dersek, $t = \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\beta} r^{-\beta}$, ($dt = -\beta r^{-\beta-1} dr$) olup, $\gamma = \frac{\alpha}{n}(1+\varepsilon) < 1$ olduğundan,

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{t} \left(\ln \left(\frac{2}{\delta t^{1/\beta}}\right)\right)^{-\gamma} dt = c_3 \int_{\frac{1}{\delta} 2^{1+\frac{1}{\beta}}}^{\infty} \frac{1}{r} (\ln r)^{-\gamma} dr = \infty$$

olur.

O halde,

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{t} A(t) dt = \infty$$

ve dolayısıyla,

$$(J_\beta^\alpha g)(0) = \infty$$

elde edilir. □

Böylece, Teoremin ispatı tamamlanmış oldu.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, Harmonik Analizin önemli teknik araçlarından sayılan ve Sobolev uzaylarının, Bessel potansiyelleri uzaylarının ve onların çeşitli genellemelerinin incelenmesinde müstesna rol oynayan klasik Riesz ve klasik Bessel potansiyel operatörlerini genelleştiren integral operatörler tanımlanmış ve onların Lebesgue uzaylarında davranışları incelenmiştir. Bunun için, öncelikle "operatörlerin makul demeti" ve "operatörlerin makul yarıgrubu" kavramları tanıtılarak, bunların önemli örnekleri hatırlatılmıştır. Daha sonra, klasik Riesz potansiyellerinin ve klasik Bessel potansiyellerinin, "makul demetler" yardımıyla tek boyutlu integral gösterimleri verilmiştir.

Makul demetler yardımıyla Riesz potansiyellerinin tek boyutlu integral gösteriminden esinlenerek, Riez potansiyellerini genelleştiren yeni bir integral operatörler ailesi tanımlanmış ve bu aile için, ünlü Hardy-Littlewood-Sobolev teoreminin bir benzeri kanıtlanmıştır. Makul demet yardımıyla tanımlanmış integral operatör, makul demetin özel seçimleri ile klasik Riesz potansiyeline dönüşür ve sonuç olarak, Riesz potansiyeli için iyi bilinen klasik Hardy-Littlewood-Sobolev eşitsizliği elde edilir.

Tez çalışmasında elde edilen bir diğer önemli sonuç, klasik Bessel ve Flett potansiyellerinin ikisini de genelleyen ve iki parametreye bağlı potansiyeller (bi-parametric potentials) diye adlandırılan integral operatörler ailesinin, uygun $p \geq 1$ ve $q \geq 1$ değerleri için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı etki etmesini sağlayan yeterli koşulların bulunmasıyla ilgilidir. Klasik Bessel potansiyelleri Harmonik Analizde önemli yere sahip olduğundan ve iki parametreye bağlı potansiyeller de, parametrelerden birinin özel seçimiyle Bessel potansiyeli operatörüne dönüştüğünden, bu tez çalışmasında iki parametreye bağlı potansiyellerin Lebesgue uzaylarında davranışı ile ilgili elde edilen sonuçların da Harmonik Analiz açısından faydalı olduğunu düşünüyoruz.

Tez çalışması teorik nitelikte olup, elde edilen sonuçlar, Fonksiyonel uzaylar, Harmonik Analiz ve integral dönüşümler alanında çalışan araştırmacılar için faydalı bir kaynak rolünü oynayabilir.

6. KAYNAKLAR

Adams, R., Aronszajn, N. and Smith, K.T. 1967. Theory of Bessel Potentials. *II, Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 17(2): 1-135.

Aliev, I.A. and Eryigit, M. 2002. Inversion of Bessel potentials with the aid of weighted wavelet transforms. *Math. Nachr*, 242: 27-37.

Aliev, I.A. and Rubin, B. 2005. Wavelet-like transforms for admissible semi-groups; Inversion formulas for potentials and Radon transforms. *J. Fourier Anal.Appl*, 11: 333-352.

Aliev, I.A., Gadjiev, A.D. and Aral, A. 2006. On approximation properties of family of linear operators at critical value of parameter. *Journal of Approximation Theory*, 138: 242-253.

Aliev, I.A., Rubin, B., Sezer, S. and Uyhan, S.B. 2008. Composite wavelet transforms: applications and perspectives. *in: Gestur Olafsson, et al. (Eds.), Radon Transforms, Geometry and Wavelets, In: Contemp. Math.*, vol. 464, Amer. Math. Soc. pp. 1-27.

Aliev, I.A. 2009. Bi-parametric potentials, relevant function spaces and wavelet-like transforms. *Integral Equations Operator Theory,* 65: 151-167.

Aronszajn, N. and Smith, K.T. 1961. Theory of Bessel Potentials. *I, Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 11: 385-475.

Aronszajn, N., Mulla, F. and Szeptycki, P. 1963. On Spaces of Potentials Connected with L_p Classes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 13(2): 211-306.

Flett, T.M. 1971. Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces, Proc. London Math. Soc. 22(3): 385-451.

Grafakos, L. 2008. *Classical Fourier Analysis.* Springer Science+Business Media, LLC, 233 Spring Street, New York, USA.

Hao, C. 2016. *Lectures on Introduction to Harmonic Analysis*. AMSS, University of Chinese Academy of Sciences.

Johnson, R. 1973. Temperatures, Riesz potentials and Lipschitz spaces of Herz. *Proc. London Math. Soc,* 27(2): 290-316.

Karapınar, G. 2006. *Bochner-Riesz integrali yardımıyla riesz potansiyellerinin yaklaşım özelliklerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, ANTALYA.

Muckenhoupt, B. and Wheeden, R. L. 1974. Weighted Norm Inequality for Fractional Integrals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 192: 261-274.

Perez, C. 1990. Two Weighted Norm Inequalities for Riesz Potentials and Uniform L_p -Weighted Sobolev Inequalities. *Indiana University Mathematics Journal*, 39: 31-44.

Rubin, B. 1986. A method of characterization and inversion of Bessel and Riesz potentials. *Sov. Math. (IZ-VUZ)*, 30(5): 78-89.

Rubin, B. 1987. Inversion of potentials on $\mathbb{R}^n$ with the aid of Gauss–Weierstrass integrals. *Math. Notes*, 41(1–2): 22-27.

Rubin, B. 1996. Fractional Integrals and Potentials. *Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math.*, vol. 82, Longman, Harlow.

Samko, S.G. 1976. On spaces of Riesz potentials. *Math. USSR Izv.,* 10(5): 1089-1117.

Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications. *Gordon and Breach Science Publishers.*

Samko, S.G. 2002. Hypersingular Integrals and Their Applications. *Internat. Ser. Monogr. Math., vol. 5, Taylor & Francis*.

Sezer, S. and Aliev, I.A. 2010. A new characterization of the Riesz potential spaces with the aid of a composite wavelet transform. *J. Math. Anal. Appl.,* 372:549-558.

Sobolev, S. L. 1938. On a theorem of functional analysis. *Mat. Sb. (N.S.),* 4: 471–479.

Stein, E.M.1960. and Weiss, G. On the theory of harmonic functions of several variables: I. The theory of H^p spaces. *Acta. Math.* 103(1-2): 25-62.

Stein, E. 1970. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

Stein, E.M. and Weiss, G. 1971. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press.

ÖZGEÇMİŞ

Slava ISMAILOVA

20195127017@ogr.akdeniz.edu.tr

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans: 2019-2022	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans: 2012-2016	M.V. Lomonosov adlı Moskova Devlet Üniversitesi Uygulamalı Matematik ve Bilişim Lisans Eğitimi