T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ TAKSİKAB UZAKLIK FORMÜLLERİ

Kader ULUĞ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAYIS 2022

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ TAKSİKAB UZAKLIK FORMÜLLERİ

Kader ULUĞ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAYIS 2022

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ TAKSİKAB UZAKLIK FORMÜLLERİ

Kader ULUĞ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 16/05/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU (Danışman)
Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ TAKSİKAB UZAKLIK FORMÜLLERİ

Kader ULUĞ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Mayıs 2022; 58 sayfa

Üç bölümden oluşan bu tezde, Öklid geometrisinde iyi bilinen uzaklık formüllerinin genelleştirilmiş taksikab geometrisindeki karşılıkları verilmiş, buna ek olarak Öklid geometrisinde iyi bilinen Pisagor teoreminin genelleştirilmiş taksikab düzlem geometrisindeki bir karşılığı belirlenmiştir. Birinci bölümde, Öklid düzlem geometrisi metrik yaklaşımla aksiyomatik olarak tanımlanmış ve Öklidyen olmayan geometriler sınıfında yer alan bir metrik geometri örneği olan genelleştirilmiş taksikab düzlem geometri tanıtılmıştır. İkinci bölümde, Öklid geometrisinde iki temel nesne arasındaki uzaklık formülleri, daha açık olarak düzlemde bir nokta ve bir doğru, iki doğru, uzayda bir nokta ve bir doğru, bir nokta ve bir düzlem, bir doğru ve bir düzlem, iki düzlem, paralel iki doğru, aykırı iki doğru, n boyutlu uzayda bir nokta ve bir hiperdüzlem, bir nokta ve bir doğru, aykırı iki doğru arasındaki Öklid uzaklıkları ve Pisagor teoremi derlenmiştir. Üçüncü bölümde, ikinci bölümde verilen tüm formüllerin genelleştirilmiş taksikab geometrideki karşılıkları belirlenmiştir. Pisagor teoreminin genelleştirilmiş taksikab karşılığı ek bir parametreye bağlı olarak elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Genelleştirilmiş taksikab metriği, Öklid geometrisi, Pisagor teoremi, Uzaklık formülleri

JÜRİ: Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

GENERALIZED TAXICAB DISTANCE FORMULAE

Kader ULUĞ

MSc Thesis in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

May 2022; 58 pages

In this thesis, which consists of three parts, the analogues of the distance formulas which are well known in Euclidean geometry, are given for the generalized taxicab geometry, in addition, an analogue of the well-known Pythagorean theorem in Euclidean geometry is given for the generalized taxicab plane geometry. In the first chapter, Euclidean plane geometry is defined axiomatically with the metric approach and the generalized taxicab plane geometry, which is an example of metric geometry in the class of non-Euclidean geometries, is introduced. In the second part, the distance formulas between two basic elements in Euclidean geometry, more precisely a point and a line and two parallel lines in the plane; a point and a line, a point and a plane, a line and a plane, two parallel planes, two parallel lines and two skew lines in the three dimensional space; a point and a hyperplane, a point and a line, two skew lines in n-dimensional space, and the Pythagorean theorem are compiled. In the third part, the generalized taxicab geometry equivalents of all the formulas given in the second part are determined and an analogue of the Pythagorean theorem is obtained depending on an additional parameter, in the generalized taxicab plane geometry.

KEYWORDS: Distance formulae, Euclidean geometry, Generalized taxicab metric, Pythagoras theorem

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Assoc. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Bu tezde, geometride iyi bilinen Öklid uzaklık formüllerinin genelleştirilmiş taksikab karşılıkları incelenmiştir. Önce iki, üç ve n boyutlu uzayda Öklid uzaklık formülleri verilmiş, daha sonra aynı temel nesneler arasındaki genelleştirilmiş taksikab uzaklık formülleri belirlenmiştir. Ek olarak, Öklid düzleminde iyi bilinen Pisagor teoreminin genelleştirilmiş taksikab düzlemdeki karşılığı belirlenmiştir.

Tez konumun belirlenmesinde, hazırlanmasında ve düzenlenmesinde yardım ve fedakarlığını esirgemeyen, çalışmalarımda bana yol gösteren değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Harun Barış ÇOLAKOĞLU'na teşekkür ediyorum.

Bu çalışmamı, hayatım boyunca beni destekleyerek cesaretlendiren, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Genelleştirilmiş Taksikab Uzaklık Formülleri" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

16/05/2022

Kader ULUĞ

SİMGELER

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^-$	: Negatif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_E^2$	: Öklid düzlemi
$\mathbb{R}_E^3$	: 3 boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}_{T_g}^2$	: Genelleştirilmiş taksikab düzlemi
$\mathbb{R}_{T_g}^3$	: 3 boyutlu genelleştirilmiş taksikab uzayı
d_E	: Öklid metriği
d_{T_g}	: Genelleştirilmiş taksikab metriği

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Son yıllarda metrikler ve özellikleri matematiğin dışında, veri madenciliği, makine öğrenmesi, şekil tanıma vb. gibi bir çok uygulama alanlarında önemli rol oynamaktadır. Özellikle l_p-metriği ve onun özel halleri olan taksikab, Öklid ve maksimum metrikleri bu uygulamalarda sıklıkla kullanılmaktadır. Bu tezde, (Çolakoğlu 2019a) çalışması temel kaynak alınarak, genelleştirilmiş veya ağırlıklı taksi metriğinin -bu ağırlıkların görece önemli farklı kriter veya boyut yansıtabileceği göz önünde bulundurarak- bazı uzaklık özellikleri belirlenmiştir. Bu özellikler iki, üç ve n boyutlu uzaylarda iki temel nesne arasındaki genelleştirilmiş taksikab uzaklığının belirlenmesi şeklinde değerlendirilebileceği gibi bu metrikler yardımıyla kurulan, bir aksiyomatik yapıya sahip ve Öklidyen olmayan geometriler sınıfında yer alan bir metrik geometrinin uzaklık özellikleri şeklinde de değerlendirilebilecek şekilde göz önüne alınmıştır.

Geometride aksiyomatik yaklaşım Öklid (MÖ 330-275) ile başlar. Daha öncesinde benzer çeşitli çalışmalar yapılmış olsa da bu şekilde organize edilmiş ve günümüze ulaşabilen tek ve en ünlü çalışma ona aittir. Öklid'in yazdığı 13 ciltlik Elemanlar adlı kitabın başında ilk modern aksiyomatik yapı gözlenmektedir. Öklid, eserinin girişinde 5 aksiyom, 5 postulat ve 23 tanım vermiş, devamındaki teoremlerini bunlara dayandırarak sistematik bir şekilde kanıtlamıştır. Günümüzde modern aksiyomatik sistemle, "tanımsız terimler", bu terimlerin birbiriyle ilişkilerini belirleyen "tanımsız bağıntılar", ispatlanmadan doğru kabul edilen "aksiyomlar" ve bu terim, bağıntı, aksiyom ve geçerli bir mantık sistemi kullanılarak elde edilen "teoremler"den oluşan *tutarlı* ve *bağımsız* matematiksel yapı kastedilir. Öklid'den sonra, Öklid geometrisi ve aynı yapıdaki diğer geometriler -yani genel olarak Öklidyen geometriler- için bu şekilde bir aksiyomatik yapı oluşturma çabaları oldukça uzun sürmüştür. Öklidyen geometrinin en meşhur aksiyomatik sistemleri David Hilbert'in (Hilbert 1902) sentetik sistemi, George David Birkhoff'un (Birkhoff 1932) metrik sistemi ve Eugene F. Krause'nin (Krause 1987) verdiği, bunların bir modifikasyonu olan ve aşağıda ayrıntıları verilmiş olan sistemdir. Öklidyen geometri için alınacak olan bu aksiyom sistemlerine ait aksiyomlardan en az birini sağlamayan geometriler Öklidyen olmayan geometri olarak tanımlanır (Çolakoğlu 2009).

Öklidyen geometri için Eugene F. Krause'nin verdiği 13 aksiyomluk sistem aşağıdaki gibidir:

$\mathbb{P}$: noktalar kümesini,

$\mathbb{L}$: $\mathbb{P}$ nin bazı alt kümelerinin bir ailesi olan doğrular kümesini,

d : uzaklık fonksiyonunu,

m : açı ölçüm fonksiyonunu

göstermek üzere aşağıdaki 13 aksiyomu sağlayan $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ yapısına *Öklidyen geometri* denir:

$[\mathbf{E1}]$ Verilen iki noktayı içeren bir tek doğru vardır.

$[\mathbf{E2}]$ Her doğru en az iki nokta içerir. $\mathbb{P}$ kümesi doğrusal olmayan en az üç nokta içerir.

$[\mathbf{E3}]$ d, her sıralı (A, B) nokta çiftine bir tek negatif olmayan $d(A, B)$ sayısını eşler. $d(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

$[\mathbf{E4}]$ $d(A, B) = d(B, A)$ dır.

$[\mathbf{E5}]$ $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ dir.

$[\mathbf{E6}]$ Verilen her l doğrusu için öyle birebir ve örten $f_l : l \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır ki, l üzerindeki her A ve B noktaları için

$$|f_l(A) - f_l(B)| = d(A, B)$$

sağlanır.

$[\mathbf{E7}]$ Verilen her bir l doğrusu için $\mathbb{P}$ nin, yarı-düzlem şeklinde adlandırılan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan H_1 ve H_2 gibi iki alt kümesi vardır:

i) H_1 ve H_2 konvekstir.

ii) $H_1 \cup H_2 = \mathbb{P} - l$ dir. ($\mathbb{P} - l$, $\mathbb{P}$ den l nin atılmışı demektir).

iii) $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise $AB \cap l \neq \varnothing$ dir.

$[\mathbf{E8}]$ m, her bir açıyı 0 ile 180 arasında değişen bir reel sayıya eşler.

[**E9**] Bir H yarı-düzleminin kenarı üzerinde bir $[AB$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir r reel sayısı verildiğinde $P \in H$ ve $m\angle PAB = r$ olacak şekilde bir tek $[AP$ ışını vardır.

[**E10**] Eğer D noktası $\angle ABC$ açısının iç bölgesinde ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$$

sağlanır.

[**E11**] Eğer B noktası, A ile C arasında ve $D \notin AC$ ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = 180$$

sağlanır.

[**E12**] İki üçgenin köşe noktaları arasında birebir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açısına eş ise bu üçgenler eştir.

[**E13**] l doğrusu ve dışında bir P noktası verilsin. Bu durumda P noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır.

Metrik yaklaşımla Öklid düzlemi aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir:

Noktalar kümesi:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Doğrular kümesi:

$$\begin{aligned} L_E &= l_a \cup l_{m,b} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a,\ a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b,\ b, m \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Üzerinde bulunma bağıntısı:

$$(x, y) \circ l_a \Leftrightarrow x = a \quad ve \quad (x, y) \circ l_{m,b} \Leftrightarrow y = mx + b$$

Uzaklık fonksiyonu: $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları için

$$d_E(P_1, P_2) = \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]^{1/2}$$

Açı ölçme fonksiyonu: Herhangi bir $\angle ABC$ açısı için

$$m_E(\angle ABC) = \left(\frac{180}{\pi}\right)\cos^{-1}\left(\frac{\langle A-B, C-B\rangle}{\|A-B\|\,\|C-B\|}\right)$$

şeklinde tanımlanmak üzere $[\mathbb{R}^2, L_E, d_E, m_E]$ sistemine Öklid düzlemi denir. Bu yapı yukarıdaki 13 aksiyomu sağlar ve bir Öklidyen geometri modelidir. Her $[\mathbb{P}, L, d, m]$ Öklidyen geometri modeli $[\mathbb{R}^2, L_E, d_E, m_E]$ sistemine izomorftur. Bu yaklaşımda metrik değiştirilerek yeni geometriler elde edilebilmektedir (Milmann ve Parker 1991).

Taksikab metriği, Minkowski metriği veya l_p metriği olarak bilinen

$$d_p(P_1, P_2) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{1/p}$$

metriğinin $p = 1$ için özel halidir. Taksikab geometri ilk olarak Karl Menger (Menger 1952) tarafından takdim edilmiştir ve Krause tarafından geliştirilmiştir. Taksikab düzlem, $[\mathbb{R}^2, L_E, d_E, m_E]$ sisteminde Öklid metriği yerine taksikab metrik alınarak elde edilir. Dolayısıyla Öklid düzlemiyle hemen hemen aynı yapıya sahiptir. Nokta ve doğrular aynıdır ve açılar da aynı yolla ölçülür, fakat uzaklık fonksiyonu farklıdır. Taksikab uzaklık fonksiyonu d_T ile gösterilir. $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T]$ veya $[\mathbb{R}^2, L_E, d_T, m_E]$ sistemi taksikab düzlem olarak tanımlanır.

Genelleştirilmiş taksikab metriği ise L. J. Wallen (Wallen 1995) tarafından tanıtılmıştır. Düzlemde genelleştirilmiş taksikab metriği aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 1.1. $P_1 = (x_1, y_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2)$*,* $\mathbb{R}^2$ *de iki nokta ve* λ_1, λ_2 *pozitif reel sayılar olmak üzere* ***genelleştirilmiş taksikab uzaklık fonksiyonu*** $d_{T_g} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$*;*

$$d_{T_g}(P_1, P_2) = \lambda_1 |x_1 - x_2| + \lambda_2 |y_1 - y_2|$$

şeklinde tanımlanır ve $d_{T_g}(P_1, P_2)$ *negatif olmayan reel sayısına da* P_1 *ve* P_2 *noktaları arasındaki* ***genelleştirilmiş taksikab uzaklık*** *denir.*

Burada λ_1 ve λ_2 katsayılarının önceden belirlenmiş ve sabitlenmiş olduğunu düşüneceğiz. Aksi takdirde d_{T_g} fonksiyonu iyi tanımlı olmayacaktır. Burada d_{T_g} gösterimini $d_{T_g(\lambda_1, \lambda_2)}$ şeklinde kullanarak fonksiyonu iyi tanımlı kılmak da mümkündür. Ancak yazımda kolaylık sağlamak ve literatüre uymak için fonksiyonu d_{T_g} şeklinde göstermeye devam edeceğiz.

Bu metrik; 3 boyutlu uzaydaki $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları için $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ katsayıları pozitif reel sayılar olmak üzere $d_{T_g} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$;

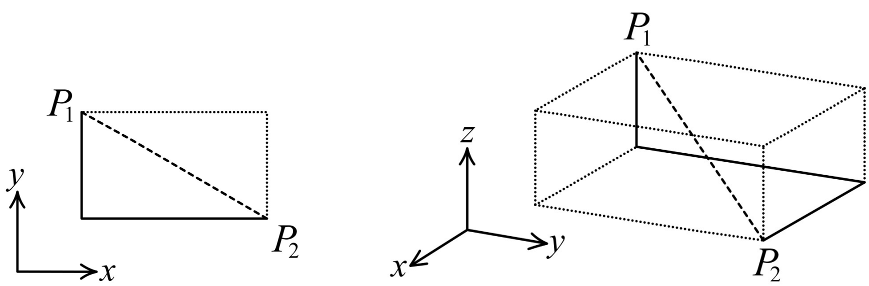
$$d_{T_g}(P_1, P_2) = \lambda_1 |x_1 - x_2| + \lambda_2 |y_1 - y_2| + \lambda_3 |z_1 - z_2|$$

şeklinde, n boyutlu uzaydaki $P_1 = (x_1, x_2, ...x_n), P_2 = (y_1, y_2, ...y_n) \in \mathbb{R}^n$ noktaları için de λ_1, λ_2,..., λ_n katsayıları pozitif reel sayılar olmak üzere $d_{T_g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$;

$$d_{T_g}(P_1, P_2) = \lambda_1 |x_1 - y_1| + \lambda_2 |x_2 - y_2| + \cdots + \lambda_n |x_n - y_n|$$

şeklinde tanımlanır.

Geometrik olarak P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Öklid uzaklığı bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının uzunluğu iken, genelleştirilmiş taksikab uzaklık, bu noktaları Şekil 1.1'deki gibi, koordinat eksenlerine paralel olarak birleştiren doğru parçalarının ağırlıklı uzunluklarının toplamıdır.



Şekil 1.1. İki nokta arasındaki uzaklıklar

Aşağıdaki iki teoremde, d_{T_g} fonksiyonunun düzlemde bir metrik belirttiği ve her doğrunun cetvele sahip olduğu gösterilmiştir:

Teorem 1.2. d_{T_g} *uzaklık fonksiyonu bir metriktir.*

İspat d_{T_g} fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığını göstereceğiz. Yani fonksiyonun pozitif tanımlı olduğunu, simetrik olduğunu ve üçgen eşitsizliğini sağladığını göstereceğiz.

i) Her $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ için $\lambda_1 |x_1 - y_1| \geq 0$ ve $\lambda_2 |x_2 - y_2| \geq 0$ olduğundan $d_{T_g}(P_1, P_2) = \lambda_1 |x_1 - y_1| + \lambda_2 |x_2 - y_2| \geq 0$ dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} d_{T_g}(P_1, P_2) &= \lambda_1 |x_1 - x_2| + \lambda_2 |y_1 - y_2| = 0 \\ &\Rightarrow |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 = y_2 \\ &\Rightarrow P_1 = P_2 \end{aligned}$$

dir.

ii) Her $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} d_{T_g}(P_1, P_2) &= \lambda_1 |x_1 - x_2| + \lambda_2 |y_1 - y_2| \\ &= \lambda_1 |x_2 - x_1| + \lambda_2 |y_2 - y_1| \\ &= d_{T_g}(P_2, P_1) \end{aligned}$$

dir.

iii) Her $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} d_{T_g}(P_1, P_3) &= \lambda_1 |x_1 - x_3| + \lambda_2 |y_1 - y_3| \\ &= \lambda_1 |x_1 - x_3 + x_2 - x_2| + \lambda_2 |y_1 - y_3 + y_2 - y_2| \\ &\leq \lambda_1 |x_1 - x_2| + \lambda_1 |x_2 - x_3| + \lambda_2 |y_1 - y_2| + \lambda_2 |y_2 - y_3| \\ &\leq d_{T_g}(P_1, P_2) + d_{T_g}(P_2, P_3) \end{aligned}$$

dir.

O halde d_{T_g} genelleştirilmiş taksikab uzaklık fonksiyonu bir metriktir. □

Sıradaki teoremde, genelleştirilmiş taksikab düzlemde her doğrunun bir cetvele sahip olduğu gösterilmiştir:

Teorem 1.3. $\left[\mathbb{R}^2, L_E, d_{T_g}, m_E\right]$ *sisteminde* $f_1 : l_a \to \mathbb{R}$, $f_1(a, y) = \lambda_2 y$ *ve* $f_2 : l_{m,b} \to \mathbb{R}$, $f_2(x, y) = x(\lambda_1 + \lambda_2 |m|)$ *fonksiyonları sırasıyla dikey ve dikey olmayan doğrular için cetveldir.*

İspat Önce f_1 ve f_2 fonksiyonlarının bire-bir ve örten olduklarını gösterelim:

$a, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için $P_1 = (a, y_1), P_2 = (a, y_2) \in l_a$ alalım. Eğer $f_1(a, y_1) = f_1(a, y_2)$ ise $y_1 = y_2$ ve dolayısıyla $P_1 = P_2$ dir. Yani f_1 fonksiyonu birebirdir. Ayrıca, her $t \in \mathbb{R}$ için $f_1(a, y) = t$ olacak şekilde $y \in \mathbb{R}$ -dolayısıyla $(a, y) \in l_a$- vardır. O halde f_1 fonksiyonu örtendir.

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 = mx_1 + b$ ve $y_2 = mx_2 + b$ için $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in l_{m,b}$ alalım. Eğer $f_2(x_1, y_1) = f_2(x_2, y_2)$ ise, $x_1 = x_2$ ve dolayısıyla $y_1 = y_2$ dir. Yani, $P = Q$ dur ve f_2 fonksiyonu birebirdir. Ayrıca, her $t \in \mathbb{R}$ için $f_2(x, y) = t$ olacak şekilde $x = [t/(\lambda_1 + \lambda_2 |m|)] \in \mathbb{R}$ ve $y = (mx + b) \in \mathbb{R}$ -dolayısıyla $(x, y) \in l_{m,b}$- vardır. O halde f_2 fonksiyonu örtendir.

Son olarak; her $P_1, P_2 \in l_a$ için $|f_1(P_1) - f_1(P_2)| = d_{T_g}(P_1, P_2)$ ve her $P_1, P_2 \in l_{m,b}$ için $|f_2(P_1) - f_2(P_2)| = d_{T_g}(P_1, P_2)$ eşitliklerinin sağlandığını gösterelim:

$P_1 = (a, y_1), P_2 = (a, y_2) \in l_a$ olsun. Buna göre,

$$|f_1(P_1) - f_1(P_2)| = \lambda_2 |y_1 - y_2| = d_{T_g}(P_1, P_2)$$

dir. O halde $f_1 : l_a \to \mathbb{R}$, $f_1(a, y) = \lambda_2 y$ fonksiyonu dikey doğrular için cetveldir.

$P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in l_{m,b}$ olsun. $P_1 = P_2$ iken

$$|f_2(P_1) - f_2(P_2)| = 0 = d_{T_g}(P_1, P_2)$$

dir. $P_1 \neq P_2$ iken $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ve

$$\begin{aligned} |f_2(P_1) - f_2(P_2)| &= |x_1 - x_2| \, |\lambda_1 + \lambda_2 |m|| \\ &= |x_1 - x_2| \, (\lambda_1 + \lambda_2 \frac{|y_1 - y_2|}{|x_1 - x_2|}) \\ &= \lambda_1 |x_1 - x_2| + \lambda_2 |y_1 - y_2| \\ &= d_{T_g}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $f_2 : l_{m,b} \to \mathbb{R}$, $f_2(x, y) = x(\lambda_1 + \lambda_2 |m|)$ fonksiyonu da dikey olmayan doğrular için cetveldir. □

Buna göre $\left[\mathbb{R}^2, L_E, d_{T_g}\right]$ veya $\left[\mathbb{R}^2, L_E, d_{T_g}, m_E\right]$ sistemi bir metrik geometri modelidir. Taksikab düzleme benzer şekilde, bu düzlem de Öklidyen geometri aksiyomlarından sadece KAK aksiyomunu sağlamaz. Bu aksiyomun sağlanmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir. Yani, genelleştirilmiş taksikab düzlem geometri, Öklidyen olmayan geometriler sınıfındadır. n-boyutlu genelleştirilmiş taksikab uzay $\left[\mathbb{R}^n, L_E, d_{T_g}\right]$ veya $\left[\mathbb{R}^n, L_E, d_{T_g}, m_E\right]$ de benzer şekilde oluşturulur.

Örnek 1.4. *Şekil 1.2'de $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, $C = (-1,1)$ dir. Buna göre,*

$$d_{T_g}(C,A) = d_{T_g}(B,A) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \textit{ve} \quad d_{T_g}(B,C) = 2\lambda_1$$

dir. Şimdi $D = (2,0)$, $E = (2, \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2})$ ve $F = (2 + \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1}, 0)$ olsun. Buna göre,

$$d_{T_g}(D,E) = d_{T_g}(D,F) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \textit{ve} \quad d_{T_g}(E,F) = 2(\lambda_1 + \lambda_2)$$

olur. Ayrıca,

$$d_{T_g}(B,C) = d_{T_g}(E,F)$$

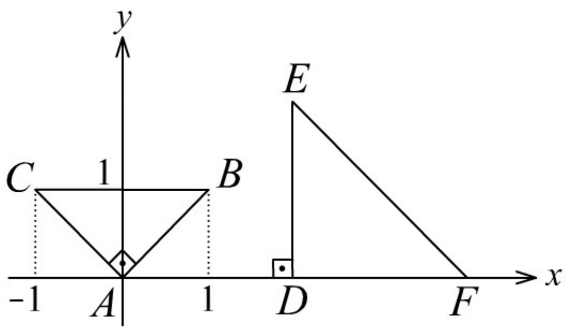
olması için $\lambda_2 = 0$ olmalıdır. Ancak $\lambda_2 > 0$ olacak şekilde tanımlanmıştır. Burada dikkat edilirse, CAB ve EDF üçgenleri için

$$d_{T_g}(C,A) = d_{T_g}(E,D) = d_{T_g}(B,A) = d_{T_g}(F,D) = \lambda_1 + \lambda_2$$

ve

$$m_E(\angle CAB) = m_E(\angle EDF) = 90°$$

dir. Ancak CAB ve EDF üçgenleri eş değildir. O halde genelleştirilmiş taksikab düzleminde KAK aksiyomunu sağlamaz.



Şekil 1.2. Genelleştirilmiş taksikab düzlemde KAK aksiyomu

Bu tezde, genelleştirilmiş taksikab geometride belirleyeceğimiz formüllerin önce Öklid geometrisindeki orijinal hallerini ifade ve ispat edeceğiz. Bu formüller iki temel nesne, daha açık olarak düzlemde bir nokta ve bir doğru, iki doğru, uzayda bir nokta ve bir doğru, bir nokta ve bir düzlem, bir doğru ve bir düzlem, iki düzlem, paralel iki doğru, aykırı iki doğru, n boyutlu uzayda bir nokta ve bir hiperdüzlem, bir nokta ve bir doğru, aykırı iki doğru arasındaki arasındaki uzaklıklarıdır. Ek olarak, Öklid düzleminde Pisagor teoremini ifade ve ispat edeceğiz. Daha sonra, aynı formüllerin genelleştirilmiş taksikab geometrideki karşılıklarınu vereceğiz.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, önce Öklid geometrisinde iki temel nesne arasında bilinen uzaklık formülleri (Özdemir 2021) kaynağından yararlanılarak verilmiştir.

2.1. Öklid Geometrisinde Uzaklık Formülleri

Öklid geometrisindeki uzaklıklar formüllerini önce düzlemde, sonra üç boyutlu uzayda ve son olarak n boyutlu uzayda vereceğiz:

2.1.1. Öklid düzleminde uzaklık formülleri

Bu kısımda bir noktanın bir doğruya olan uzaklığı, iki doğru arasındaki uzaklık formülleri ve Pisagor teoremi ispatlarıyla verilecektir.

1) Bir noktanın bir doğruya olan Öklid uzaklığı

Teorem 2.5. *Düzlemde bir $A = (x_0, y_0)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı*

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dir.

İspat Eğer A noktası doğru üzerindeyse eşitliğin sağladığı açıktır. A noktası doğrunun dışında olsun.
i) Eğer doğru y-eksenine paralel ise, $b = 0$ dır ve doğrunun denklemi $ax + c = 0$ dır. Bu durumda doğru üzerindeki noktaların apsisleri $-\frac{c}{a}$ dır. A noktasının bu doğruya olan uzaklığı

$$\left| x_0 - \left(-\frac{c}{a} \right) \right| = \frac{|ax_0 + c|}{|a|}$$

dır. O halde denklem sağlar.

ii) Eğer doğru x-eksenine paralel ise, $a = 0$ dır ve doğrunun denklemi $by + c = 0$ dır. Bu durumda doğru üzerindeki noktaların ordinatları $-\frac{c}{b}$ dir. A noktasının bu doğruya olan uzaklığı

$$\left| y_0 - \left(-\frac{c}{b} \right) \right| = \frac{|by_0 + c|}{|b|}$$

dir. O halde denklem sağlar.

iii) Eğer doğru koordinat eksenlerine paralel değil ise $a \neq 0 \neq b$ dir ve doğrunun denklemi $ax + by + c = 0$ dır (Şekil 2.1). Bu doğrunun eğimi $m = \tan\alpha = -\frac{a}{b}$ dir. $A = (x_0, y_0)$ noktasının bu doğruya uzaklığını ℓ ile gösterelim. A noktasından geçen ve y-eksenine paralel doğru doğruyu bir noktada keser. Bu noktaya B noktası diyelim. Buna göre,

$$\ell = |AB| \, . \, |\cos\alpha|$$

dır. B noktasının apsisi x_0, ordinatı ise nokta doğru üzerinde olduğundan $\dfrac{-ax_0 - c}{b}$ dir. O halde,

$$|AB| = \left| y_0 - \frac{-ax_0 - c}{b} \right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|}$$

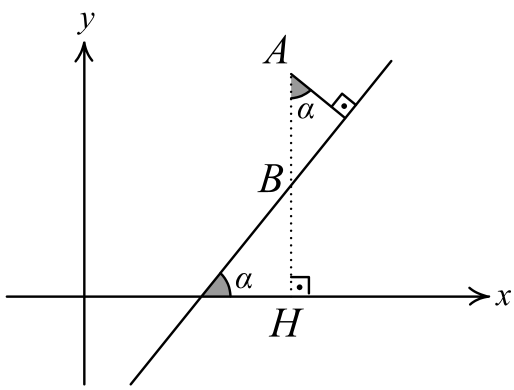
dir.

$$|\cos\alpha| = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \ell &= |AB| \, . \, |\cos\alpha| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|} \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

olarak bulunur. □



Şekil 2.1. Bir noktanın bir doğruya olan Öklid uzaklığı

2) İki doğru arasındaki Öklid uzaklığı

Düzlemde farklı iki doğru ya paraleldir ya da bir tek noktada kesişirler. Kesişen doğrular arasındaki uzaklık 0 dır. Doğrular paralel ise doğrulardan birinin üzerindeki bir noktanın diğer doğruya olan uzaklığı iki doğru arasındaki uzaklığı belirler.

Teorem 2.6. *Düzlemde bir paralel* $ax + by + c_1 = 0$ *ve* $ax + by + c_2 = 0$ *doğruları arasındaki uzaklık*

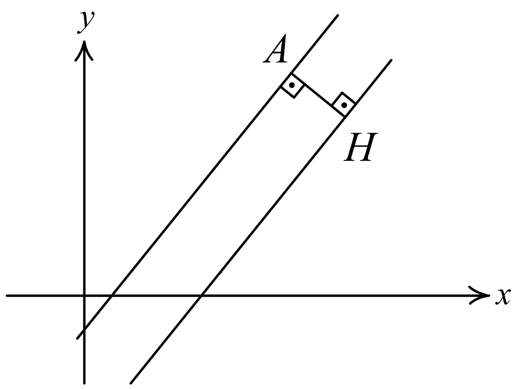
$$\frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dir.

İspat $A = (x_0, y_0)$ noktası $ax + by + c_1 = 0$ doğrusu üzerinde bir nokta olsun (Şekil 2.2). O halde $ax_0 + by_0 + c_1 = 0$ dır. Bu A noktasının $ax + by + c_2 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı iki doğru arasındaki uzaklığa eşittir. Bu uzaklık

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

şeklinde bulunur.



□

Şekil 2.2. Paralel iki doğru arasındaki Öklid uzaklığı

2.1.2. Öklid düzleminde Pisagor teoremi

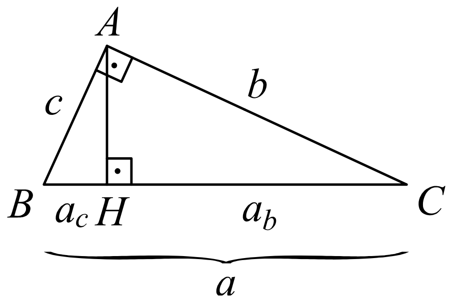
Teorem 2.7. *Bir* ABC *üçgeninin kenar uzunlukları* $d_E(B, C) = a$, $d_E(A, C) = b$ *ve* $d_E(A, B) = c$ *dir.* ABC *üçgeninin* A *köşesine ait açısının dik olması için gerek ve yeter koşul*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

olmasıdır.

İspat $(:\Rightarrow)$ ABC üçgeninin A köşesine ait açı dik olsun. A noktasından BC doğrusuna bir dik inelim ve bu dikmenin ayağına H diyelim. $d_E(B, H) = a_c$ ve $d_E(C, H) = a_b$

olsun (Şekil 2.3). AHB, CHA ve CAB üçgenlerinin benzerliklerinden $b^2 = a_b.a$ ve $c^2 = a_c.a$ elde edilir. Taraf tarafa toplanırsa istenilen $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısı elde edilir.



Şekil 2.3. Pisagor teoremi

($\Leftarrow$:) Kabul edelim ki ABC üçgeninin kenarları arasında $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısı olsun. Şimdi, A' açısı dik olan ve $d_E(A', C') = b$ ve $d_E(A', B') = c$ özelliğinde bir $A'B'C'$ üçgeni göz önüne alalım. Pisagor teoremi gereğince $d_E(B', C') = \sqrt{b^2 + c^2} = a$ dır. Buna göre, ABC ve $A'B'C'$ üçgenleri KKK eşlik teoremi gereğince eştir. O halde A açısı diktir. $\square$

2.1.3. Üç boyutlu Öklid uzayında uzaklık formülleri

Üç boyutlu uzayda temel nesneler arasındaki uzaklıklar, bir noktanın bir düzleme olan uzaklığı, iki düzlem arasındaki uzaklık, bir doğrunun bir düzleme olan uzaklığı, bir noktanın bir doğruya olan uzaklığı, aynı düzlemde iki doğru arasındaki uzaklık ve aykırı iki doğru arasındaki uzaklık olarak sıralanabilir. Bu formülleri belirlemeden önce, bu formülleri belirlemede kullanılan Öklid iç çarpımı, vektörel çarpım ve karma çarpımla ilgili temel bilgileri verelim:

Öklid İç Çarpımı

$\mathbb{R}^3$ te $\boldsymbol{x} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\boldsymbol{y} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörlerinin Öklid iç çarpımı

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$, $\langle \boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle \pm \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$ ve $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$ dir.

Teorem 2.8. *$\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$, $\mathbb{R}^3$ te iki vektör olsun. Bu vektörlerin arasındaki açının ölçüsü θ ise*

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|}$$

olmasıdır.

İspat $\mathbb{R}^3$ te aralarındaki açısının ölçüsü θ olan $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ vektörlerini alalım. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ vektörleri bir üçgen oluşturur (Şekil 2.4). Bu üçgenin kenar uzunlukları $\|\boldsymbol{x}\|$,$\|\boldsymbol{y}\|$ ve $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ dir. Bu üçgende kosinüs teoreminden

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2\,\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta$$

yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\,\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2
\end{aligned}$$

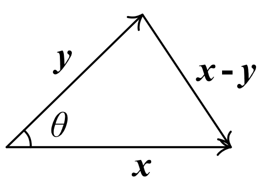
dir. O halde

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2\,\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta &= \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\,\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\
\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle
\end{aligned}$$

buradan da

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|}$$

eşitliği elde edilir.



□

Şekil 2.4. İki vektörün oluşturduğu üçgen

Buna göre, iki vektörün birbirine dik olması için gerek ve yeter koşul bu iki vektörün iç çarpımlarının 0 olmasıdır.

Teorem 2.9. *$\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$, $\mathbb{R}^3$ te iki vektör olsun. $\boldsymbol{x}$ vektörünün $\boldsymbol{y}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü ve bu vektörün uzunluğu aşağıdaki formüllerle hesaplanr:*

$$\boldsymbol{x}_{iz d\boldsymbol{y}} = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle}\boldsymbol{y} \qquad \textit{ve} \qquad \|\boldsymbol{x}_{iz d\boldsymbol{y}}\| = \frac{|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle|}{\|\boldsymbol{y}\|}$$

olmasıdır.

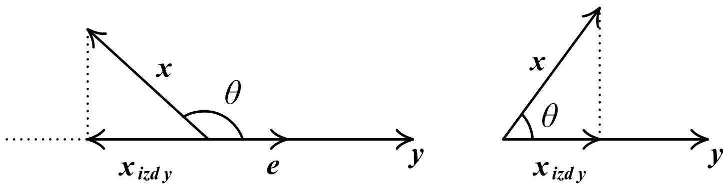
İspat e, $\boldsymbol{y}$ vektörüyle aynı yönde birim vektör, $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü de θ olsun (Şekil 2.5).

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}_{iz d\boldsymbol{y}}\| &= \|\boldsymbol{x}\| \, |\cos\theta| \\ &= \|\boldsymbol{x}\| \left| \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|} \right| = \frac{|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle|}{\|\boldsymbol{y}\|} \end{aligned}$$

dir. $\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{\|\boldsymbol{y}\|}$ değeri ise, $\boldsymbol{x}_{iz d\boldsymbol{y}}$ vektörünün $\boldsymbol{y}$ vektörüne göre (pozitif yön) yönlü uzunluğudur. $\theta < 90°$ ise pozitif, $\theta > 90°$ ise negatiftir. O halde bu değer $\boldsymbol{e}$ vektörü ile çarpılırsa $\boldsymbol{x}_{iz d\boldsymbol{y}}$ vektörü elde edilir:

$$\boldsymbol{x}_{iz d\boldsymbol{y}} = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{\|\boldsymbol{y}\|}\boldsymbol{e} = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{\|\boldsymbol{y}\|}\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|} = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{\|\boldsymbol{y}\|^2}\boldsymbol{y} = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle}\boldsymbol{y}$$

elde edilir.



□

Şekil 2.5. Bir vektörün bir vektör üzerine dik izdüşümü

Teorem 2.10. *$\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$, $\mathbb{R}^3$ te iki vektör olsun. Bu vektörlerin arasındaki açının ölçüsü θ ise, $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı*

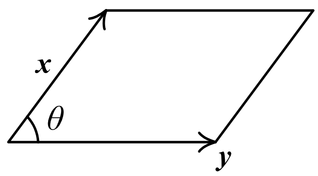
$$\sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle^2}$$

dir.

İspat Bu iki vektörün oluşturduğu paralelkenarın (Şekil 2.6) alanı

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\sin\theta &= \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\sqrt{1-\left(\frac{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}\right)^2} \\
&= \sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2\,\|\boldsymbol{y}\|^2-\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle^2} \\
&= \sqrt{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\,\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle-\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle^2}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Üçgenin alanı için bu değer 2'ye bölünür.



□

Şekil 2.6. İki vektörün oluşturduğu paralelkenar

Vektörel Çarpım

$\mathbb{R}^3$ te $\boldsymbol{x}=(x_1,y_1,z_1)$ ve $\boldsymbol{y}=(x_2,y_2,z_2)$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\
&= (y_1z_2-y_2z_1,\, x_2z_1-x_1z_2,\, x_1y_2-x_2y_1)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. İki vektörün vektörel çarpımı yine bir vektördür.

Teorem 2.11. $\mathbb{R}^3$ *te verilen iki vektörün vektörel çarpımı bu iki vektöre dik olan yeni bir vektör verir.*

İspat $\boldsymbol{x}=(x_1,y_1,z_1)$ ve $\boldsymbol{y}=(x_2,y_2,z_2)$, $\mathbb{R}^3$ te verilen iki vektör olsun. Bu iki vektörün vektörel çarpımı $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=(y_1z_2-y_2z_1,x_2z_1-x_1z_2,x_1y_2-x_2y_1)$ dir. $\langle \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle &= x_1y_1z_2-x_1y_2z_1+y_1x_2z_1-y_1x_1z_2+z_1x_1y_2-z_1x_2y_1=0 \\
\langle \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle &= x_2y_1z_2-x_2y_2z_1+y_2x_2z_1-y_2x_1z_2+z_2x_1y_2-z_2x_2y_1=0
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. O halde $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ vektörü hem $\boldsymbol{x}$ e hem de $\boldsymbol{y}$ ye diktir. $\square$

Teorem 2.12. *$\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$, $\mathbb{R}^3$ te iki vektör olsun. Bu vektörlerin arasındaki açının ölçüsü θ ise, $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı*

$$\|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \sin\theta$$

dir.

İspat $\|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\|^2 = \langle \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \rangle$ dir. Lagrange özdeşliğinden

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 \cos^2\theta \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 \sin^2\theta
\end{aligned}$$

dir. O halde $\|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \sin\theta$ dır. Bu son eşitliğin $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı olduğu açıktır. $\square$

Karma Çarpım

$\mathbb{R}^3$ te $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ vektörüyle $\boldsymbol{z}$ vektörünün iç çarpımına $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ vektörlerinin karma çarpımı denir ve $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$ ile gösterilir.

Teorem 2.13. *$\mathbb{R}^3$ te herhangi üç vektör $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ için*

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}] = \langle \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

dir.

İspat $\boldsymbol{x} = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{y} = (x_2, y_2, z_2)$, $\boldsymbol{z} = (x_3, y_3, z_3)$, $\mathbb{R}^3$ te verilen üç vektör olsun.

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle &= \langle (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1), (x_3, y_3, z_3) \rangle \\
&= (x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1, y_3 x_2 z_1 - y_3 x_1 z_2, z_3 x_1 y_2 - z_3 x_2 y_1) \\
&= \det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})
\end{aligned}$$

dir. $\square$

Teorem 2.14. $\mathbb{R}^3$ *te herhangi üç vektör* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ *için*

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}] = [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}]$$

veya

$$\langle \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z} \rangle$$

dir.

İspat Tanıma göre

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle &= [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}] \\
&= \det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \\
&= -\det(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\
&= \det(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) \\
&= \langle \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z} \rangle
\end{aligned}$$

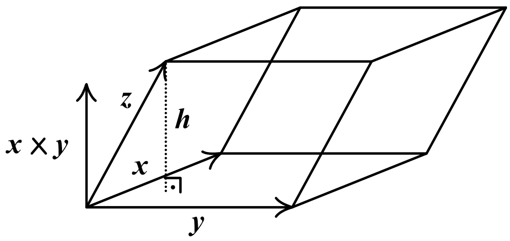
elde edilir. □

Teorem 2.15. $\mathbb{R}^3$ *te* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ *vektörlerinin karma çarpımı bu üç vektörle oluşturulan paralelyüzlünün hacmine eşittir.*

İspat $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlüyü göz önüne alalım (Şekil 2.7). $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ vektörlerinin oluşturduğu paralelkenar paralelyüzlünün tabanı olsun. Tabanın alanı $\|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\|$ dir ve $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ vektörü paralelyüzlünün tabanına diktir. Paralelyüzün yüksekliği h olsun. O halde paralelyüzlünün hacmi $\|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\|\, h$ olur. $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ vektörü ile $\boldsymbol{z}$ vektörü arasındaki açı θ ise

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle &= \|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\|\, \|z\| \cos\theta \\
&= \|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\|\, h
\end{aligned}$$

bulunur. $\langle \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$ olduğundan $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}] = \|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\|\, h$ elde edilir ki bu da paralelyüzlünün hacmine eşittir.



□

Şekil 2.7. Üç vektörün oluşturduğu paralelyüzlü

1) Bir noktanın bir düzleme olan Öklid uzaklığı

Teorem 2.16. $\mathbb{R}^3$ *te bir* $P = (x_0, y_0, z_0)$ *noktasının* $Ax + By + Cz + D = 0$ *düzlemine olan uzaklığı*

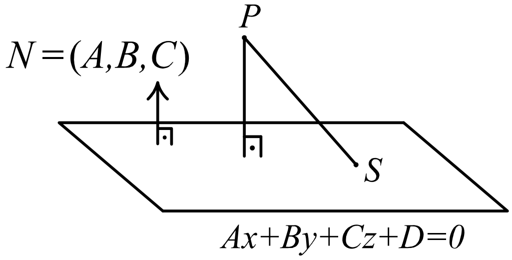
$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

dir.

İspat $S(x_1, y_1, z_1)$ düzlem üzerinde bir nokta olsun. O halde $Ax_1+By_1+Cz_1 = -D$ dir. P noktasının $Ax+By+Cz+D = 0$ düzlemine olan uzaklığı, SP vektörünün düzlemin doğrultmanı olan $N = (A, B, C)$ vektörüne dik izdüşüm vektörünün uzunluğuna eşittir (Şekil 2.8). Bu uzaklığa ℓ dersek

$$\begin{aligned}
\ell &= \frac{|\langle N, SP\rangle|}{\|N\|} = \frac{|(A, B, C), (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\
&= \frac{|(A\,(x_0 - x_1) + B\,(y_0 - y_1) + C\,(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\
&= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\
&= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}
\end{aligned}$$

bulunur.



□

Şekil 2.8. Bir noktanın bir düzleme olan Öklid uzaklığı

2) İki düzlem arasındaki Öklid uzaklığı

Uzayda farklı iki düzlem ya bir doğru boyunca kesişir ve aralarındaki uzaklık 0 dır ya da paraleldir. Paralel iki düzlemden biri üzerinde alınan bir noktanın diğer düzleme olan uzaklığı sabittir.

Teorem 2.17. $\mathbb{R}^3$ *te bir* $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ *ve* $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ *paralel düzlemleri arasındaki uzaklık*

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

dir.

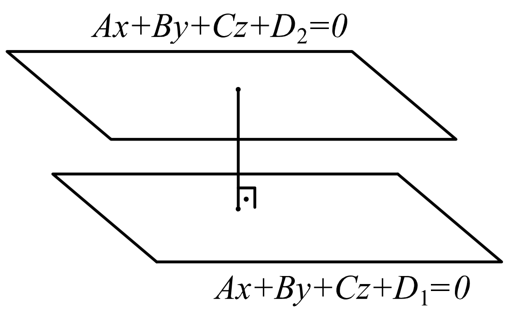
İspat $Ax+By+Cz+D_1 = 0$ düzlemini w_1 ile, $Ax+By+Cz+D_2 = 0$ düzlemini de w_2 ile gösterelim. w_2 düzleminin üzerinde bir $P = (x_1, y_1, z_1)$ noktası alalım (Şekil 2.9). Bu noktanın w_1 düzlemine olan uzaklığı

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

dir. P noktası w_2 düzlemi üzerinde olduğundan $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D_2$ dir. O halde yukarıdaki uzaklıktan

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

formülü elde edilir. □



Şekil 2.9. Paralel iki düzlem arasındaki Öklid uzaklığı

3) Bir doğrunun bir düzleme olan Öklid uzaklığı

Eğer doğru düzlemi kesiyorsa aralarındaki uzaklık 0 olur. Eğer doğru düzlemi kesmiyorsa o halde paraleldir. Doğru üzerinde alınan bir noktanın düzleme olan uzaklığı bulunarak doğrunun düzleme olan uzaklığı belirlenir.

4) Bir noktanın bir doğruya olan Öklid uzaklığı

Teorem 2.18. $\mathbb{R}^3$ *te bir* $A = (x_0, y_0, z_0)$ *noktasının,* $P = (x_1, y_1, z_1)$ *noktasından geçen ve doğrultusu* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *olan doğruya olan uzaklığı* $\rho_1 = x_0 - x_1$*,* $\rho_2 = y_0 - y_1$*,* $\rho_3 = z_0 - z_1$ *olmak üzere,*

$$\frac{\sqrt{(u_1\rho_2 - u_2\rho_1)^2 + (u_2\rho_3 - u_3\rho_2)^2 + (u_3\rho_1 - u_1\rho_3)^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

dir.

İspat A noktasının doğruya olan uzaklığına ℓ diyelim (Şekil 2.10). AP vektörüyle $\boldsymbol{u}$ vektörü arasındaki açı θ ise

$$\ell = \|AP\| \sin\theta$$

dir.

$$\|AP \times \boldsymbol{u}\| = \|AP\| \, \|\boldsymbol{u}\| \sin\theta$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\ell = \frac{\|AP \times \boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|}$$

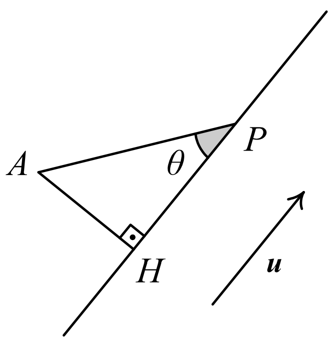
elde edilir. Eğer $A = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ise doğru

$$d: \ \alpha(t) = (x_1, y_1, z_1) + t(u_1, u_2, u_3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer $\rho_1 = x_0 - x_1$, $\rho_2 = y_0 - y_1$, $\rho_3 = z_0 - z_1$ ise

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{\|AP \times \boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} = \frac{\|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \times (u_1, u_2, u_3)\|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(u_1\rho_2 - u_2\rho_1)^2 + (u_2\rho_3 - u_3\rho_2)^2 + (u_3\rho_1 - u_1\rho_3)^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \end{aligned}$$

elde edilir.



□

Şekil 2.10. Uzayda bir noktanın bir doğruya olan Öklid uzaklığı

5) Aynı düzlemde bulunan iki doğru arasındaki Öklid uzaklığı

Aynı düzlemde bulunan iki doğru ya kesişirler ya da paraleldir. Kesişirlerse aralarındaki uzaklık 0 dır. Paralel doğrular ise, birinin üzerindeki bir noktanın diğerine uzaklığı sabittir. O halde son teoremin direkt sonucu olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.19. $\mathbb{R}^3$ *te paralel*

$$\begin{aligned} d_1 &: \alpha_1(t) = (x_1, y_1, z_1) + t(u_1, u_2, u_3) \\ d_2 &: \alpha_2(t) = (x_2, y_2, z_2) + t(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

doğruları arasındaki uzaklık $\rho_1 = (x_1 - x_2)$, $\rho_2 = (y_1 - y_2)$, $\rho_3 = (z_1 - z_2)$ *olmak üzere*

$$\frac{\sqrt{(u_1\rho_2 - u_2\rho_1)^2 + (u_2\rho_3 - u_3\rho_2)^2 + (u_3\rho_1 - u_1\rho_3)^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

dir.

6) Aykırı iki doğru arasındaki Öklid uzaklığı

$\mathbb{R}^3$ te $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve doğrultu vektörü $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ olan doğru ile $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktasından geçen ve doğrultu vektörü $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ olan doğru aykırı durumda ise $\boldsymbol{u}$ $\boldsymbol{v}$ ve A_1A_2 vektörleri aynı düzlemde olamayacağından $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, A_1A_2) \neq 0$ dir.

Teorem 2.20. $\mathbb{R}^3$ *te sırasıyla,* $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *ve* $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *noktalarından geçen, doğrultmanları* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *ve* $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *olan ve aykırı durumda olan*

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= (x_1, y_1, z_1) + t(u_1, u_2, u_3) \\ \beta_2(s) &= (x_2, y_2, z_2) + s(v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

doğruları arasındaki uzaklık $\delta_{(a,b)} = u_a v_b - u_b v_a$ *olmak üzere*

$$\frac{\left|(x_1 - x_2)\delta_{(2,3)} + (y_1 - y_2)\delta_{(3,1)} + (z_1 - z_2)\delta_{(1,2)}\right|}{\sqrt{\delta_{(2,3)}^2 + \delta_{(3,1)}^2 + \delta_{(1,2)}^2}}$$

dir.

İspat Doğrulara sırasıyla d_1 ve d_2 diyelim. d_1 e paralel olan ve d_2 yi kesen bir d_1' doğrusu göz önüne alalım (Şekil 2.11). d_1' ve d_2 doğrusu bir w düzlemi belirtir. Ayrıca, $\boldsymbol{u}$, d_1' doğrusunun da doğrultmanıdır. O halde, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ vektörü w düzleminin normalidir ve d_1, w düzlemine paraleldir. Buna göre, d_1 üzerindeki noktaların w düzlemine uzaklıkları sabittir ve bu uzaklık d_1 üzerindeki bir noktanın w düzlemine uzaklığına eşittir. d_1 doğrusunun w düzlemine dik izdüşümü olan doğruyu d_1'' ile gösterelim. Bu doğrunun d_2 doğrusu ile kesişimi N noktası ve d_1 üzerinde dik izdüşümü N olan nokta da M olsun. Görüldüğü üzere MN hem d_1 hem de d_2 doğrularına diktir, yani doğrultmanı $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ vektörüdür ve bu özellikteki tek doğru parçasıdır. Ayrıca

$$\min_{X \in d_1, Y \in d_2} |XY| = |MN| = d_E(M, w)$$

dir. A_1 noktasının d_1'' doğrusu üzerine dik izdüşümü A_1' olsun. O halde $A_1A_1' \perp A_1'A_2$ olur (Şekil 2.11). $A_2A_1A_1'$ dik üçgeninde dar açı $m(A_2A_1A_1') = \theta$ ise

$$|MN| = \|A_1A_1'\| = \|A_1A_2\| \cos\theta$$

dir. Ayrıca

$$|\langle A_1A_2, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\rangle| = \|A_1A_2\| \, \|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| \cos\theta$$

olduğundan

$$|MN| = \frac{\langle A_1A_2, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\rangle}{\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|} = \frac{|\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, A_1A_2)|}{\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|}$$

elde edilir. Burada aynı formül, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ ve A_1A_2 vektörüyle oluşturulan paralelyüzlünün hacmi $|\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, A_1A_2)|$ ve taban alanı $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|$ olduğundan $V = (T.A).h$ formülünde yerine yazılarak

$$h = \frac{V}{T.A} = \frac{|\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, A_1A_2)|}{\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|}$$

şeklinde de elde edilebilir. Eğer denklem açık yazılmak istenirse

$$\begin{aligned}&|\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, A_1A_2)| \\ &= |(x_1 - x_2)(u_2v_3 - u_3v_2) + (y_1 - y_2)(u_3v_1 - u_1v_3) + (z_1 - z_2)(u_1v_2 - u_2v_1)|\end{aligned}$$

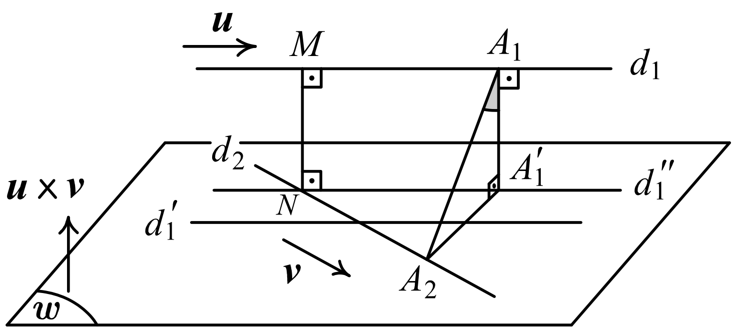
ve

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

elde edilir. Bu da, $\delta_{(a,b)} = u_a v_b - u_b v_a$ tanımlayarak

$$\frac{\left|(x_1 - x_2)\delta_{(2,3)} + (y_1 - y_2)\delta_{(3,1)} + (z_1 - z_2)\delta_{(1,2)}\right|}{\sqrt{\delta^2_{(2,3)} + \delta^2_{(3,1)} + \delta^2_{(1,2)}}}$$

şeklinde ifade edilebilir.



□

Şekil 2.11. Uzayda aykırı iki doğru arasındaki Öklid uzaklığı

2.1.4. n boyutlu Öklid uzayında uzaklık formülleri

1) Bir noktanın bir hiperdüzleme olan Öklid uzaklığı

Teorem 2.21. *$\mathbb{R}^n$ de bir $P = (x_{1(0)}, x_{2(0)}, ..., x_{n(0)})$ noktasının $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n + B = 0$ hiperdüzlemine olan uzaklığı*

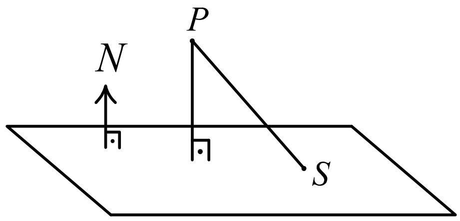
$$\frac{\left|A_1x_{1(0)} + A_2x_{2(0)} + ... + A_nx_{n(0)} + B\right|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + ... + A_n^2}}$$

dir.

İspat $S(x_{1(1)}, x_{2(1)}, ..., x_{n(1)})$ hiperdüzlem üzerinde bir nokta olsun. O halde $A_1x_{1(1)} + A_2x_{2(1)} + ... + A_nx_{n(1)} = -B$ dir. P noktasının $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n + B = 0$ hiperdüzlemine olan uzaklığı, SP vektörünün düzlemin doğrultmanı olan $N = (A_1, A_2, ..., A_n)$ vektörüne dik izdüşüm vektörünün uzunluğuna eşittir (Şekil 2.12). Bu uzaklığa ℓ dersek

$$\begin{aligned}
\ell &= \frac{|\langle N, SP\rangle|}{\|N\|} \\
&= \frac{\left|\left\langle (A_1, A_2, ..., A_n), (x_{1(0)} - x_{1(1)}, x_{2(0)} - x_{2(1)}, ..., x_{n(0)} - x_{n(1)})\right\rangle\right|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + ... + A_n^2}} \\
&= \frac{\left|A_1x_{1(0)} + A_2x_{2(0)} + ... + A_nx_{n(0)} - (A_1x_{1(1)} + A_2x_{2(1)} + ... + A_nx_{n(1)})\right|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + ... + A_n^2}} \\
&= \frac{\left|A_1x_{1(0)} + A_2x_{2(0)} + ... + A_nx_{n(0)} + B\right|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + ... + A_n^2}}
\end{aligned}$$

bulunur.



□

Şekil 2.12. Bir noktanın bir hiperdüzleme Öklid uzaklığı

2) Bir noktanın bir doğruya olan Öklid uzaklığı

Teorem 2.22. $\mathbb{R}^n$ *de bir* A *noktasının,* P *noktasından geçen ve doğrultusu* $\boldsymbol{u}$ *vektörü olan doğruya olan uzaklığı*

$$\frac{\sqrt{\|AP\|^2 \|\boldsymbol{u}\|^2 - \langle AP, \boldsymbol{u}\rangle^2}}{\|\boldsymbol{u}\|}$$

dir.

İspat A noktasının doğruya olan uzaklığına ℓ diyelim (Şekil 2.13). AP vektörüyle $\boldsymbol{u}$ vektörü arasındaki açı θ ise

$$\ell = \|AP\| \sin\theta$$

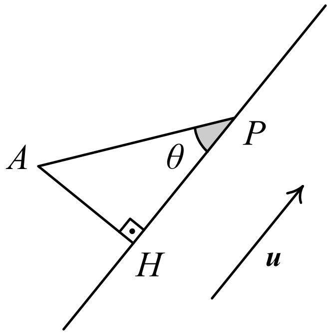
dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{\langle AP, \boldsymbol{u}\rangle^2}{\|AP\|^2 \|\boldsymbol{u}\|^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\|AP\|^2 \|\boldsymbol{u}\|^2 - \langle AP, \boldsymbol{u}\rangle^2}}{\|AP\| \, \|\boldsymbol{u}\|} \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\ell = \frac{\sqrt{\|AP\|^2 \|\boldsymbol{u}\|^2 - \langle AP, \boldsymbol{u}\rangle^2}}{\|\boldsymbol{u}\|}$$

bulunur.



□

Şekil 2.13. n-boyutlu uzayda bir noktanın bir doğruya Öklid uzaklığı

3) Paralel iki doğru arasındaki Öklid uzaklığı

$\mathbb{R}^n$ de paralel iki doğru arasındaki uzaklık doğrulardan biri üzerinde bulunan bir noktanın diğer doğruya olan uzaklığına eşittir. O halde son teoremin direkt sonucu olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.23. *$\mathbb{R}^n$ de $A_1(x_{1(1)}, x_{2(1)}, ..., x_{n(1)})$ ve $A_2(x_{1(2)}, x_{2(2)}, ..., x_{n(2)})$ noktalarından geçen paralel*

$$\begin{aligned} d_1 &: \alpha_1(t) = (x_{1(1)}, x_{2(1)}, ..., x_{n(1)}) + t(u_1, u_2, ..., u_n) \\ d_2 &: \alpha_2(t) = (x_{1(2)}, x_{2(2)}, ..., x_{n(2)}) + t(u_1, u_2, ..., u_n) \end{aligned}$$

doğruları arasındaki uzaklık

$$\frac{\sqrt{\|A_1A_2\|^2 \|\boldsymbol{u}\|^2 - \langle A_1A_2, \boldsymbol{u}\rangle^2}}{\|\boldsymbol{u}\|}$$

dir.

4) Aykırı iki doğru arasındaki Öklid uzaklığı

Teorem 2.24. *$\mathbb{R}^n$ de sırasıyla $X_1 = (x_{1(1)}, x_{2(1)}, ..., x_{n(1)})$ ve $X_2 = (x_{1(2)}, x_{2(2)}, ..., x_{n(2)})$ noktalarından geçen, doğrultmanları $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ olan ve aykırı durumda olan*

$$\begin{aligned} d_1 &: \beta_1(t) = (x_{1(1)}, x_{2(1)}, ..., x_{n(1)}) + t(u_1, u_2, ..., u_n) \\ d_2 &: \beta_2(s) = (x_{1(2)}, x_{2(2)}, ..., x_{n(2)}) + s(v_1, v_2, ..., v_n) \end{aligned}$$

doğruları arasındaki uzaklık; $\boldsymbol{x}_1$ *ve* $\boldsymbol{x}_2$ *,* X_1 *ve* X_2 *ye karşılık gelen yer vektörleri ve*
$A = \|\boldsymbol{u}\|^2$, $B = 2(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_1\rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_2\rangle)$, $C = 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$,
$D = 2(\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_2\rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_1\rangle)$, $E = \|\boldsymbol{v}\|^2$ *ve* $F = \|\boldsymbol{x}_1\|^2 - 2\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\rangle + \|\boldsymbol{x}_2\|^2$
olmak üzere

$$\sqrt{\frac{BDE + B^2F + D^2C + A(E^2 - 4CF)}{B^2 - 4AC}}$$

dir.

İspat Verilen doğruları

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= \boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{u} \\ \beta_2(s) &= \boldsymbol{x}_2 + s\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

şeklinde vektör fonksiyonları olarak göz önüne alalım. Bu durumda bu iki doğru arasındaki uzaklık

$$d = \min \|\beta_1(t) - \beta_2(s)\|$$

veya

$$d^2 = \min \|\beta_1(t) - \beta_2(s)\|^2$$

olur. $\|\beta_1(t) - \beta_2(s)\|^2$ ifadesi açılırsa

$$\begin{aligned} \|\beta_1(t) - \beta_2(s)\|^2 &= \|\boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}_2 - s\boldsymbol{v}\|^2 \\ &= \langle \boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}_2 - s\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_1 + t\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}_2 - s\boldsymbol{v}\rangle \end{aligned}$$

ve böylece
$A = \|\boldsymbol{u}\|^2$, $B = 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$, $C = \|\boldsymbol{v}\|^2$, $D = 2(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_1\rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_2\rangle)$,
$E = 2(\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_2\rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_1\rangle)$ ve $F = \|\boldsymbol{x}_1\|^2 - 2\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\rangle + \|\boldsymbol{x}_2\|^2$
için

$$d^2 = f(t, s) = At^2 - Bst + Cs^2 + Dt + Es + F$$

iki değişkenli fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyonun minimum ve maksimum değerleri için

$$\begin{aligned} f_t &= 2At - Bs + D \\ f_s &= 2Cs - Bt + E \end{aligned}$$

türevlerini 0 a eşitleyelim.

$$\begin{aligned} t &= \frac{Bs - D}{2A} \\ s &= \frac{Bt - E}{2C} \end{aligned}$$

değerlerinde

$$f_{tt} = 2A > 0 \text{ ve } f_{ss} = 2C > 0$$

olduğundan minimum değer vardır.

$$\frac{Bs - D}{2A} = \frac{2Cs + E}{B}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} s &= \frac{2AE + BD}{B^2 - 4AC} \\ t &= \frac{B\left(\frac{2AE+BD}{B^2-4AC}\right) - D}{2A} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerler yerine yazılırsa

$$d^2 = \frac{BDE + B^2F + D^2C + A(E^2 - 4CF)}{B^2 - 4AC}$$

ve böylece

$$d = \sqrt{\frac{BDE + B^2F + D^2C + A(E^2 - 4CF)}{B^2 - 4AC}}$$

elde edilir. □

2.2. Genelleştirilmiş Taksikab Geometride Uzaklık Formülleri

Öklid geometrisinde uzaklıkla ilgili kavram veya özelliklerin genelleştirilmiş taksikab geometrideki karşılıkları, bu kavram ve özellikler içindeki Öklidyen uzaklık terimi yerine genelleştirilmiş taksikab uzaklık terimi konularak, Öklid metriği yerine genelleştirilmiş taksikab metriği kullanılarak veya Öklid düzlemi yerine genelleştirilmiş taksikab düzlem kullanılarak elde edilir. Örneğin Öklid geometrisinde A ve B nokta kümeleri arasındaki uzaklık

$$d_E(A,B) = \min_{X\in A, Y\in B}\{d_E(X,Y)\}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu tanım önceki kısımda bulduğumuz formüller için geçerlidir. Bu kavramın genelleştirilmiş taksikab geometrideki karşılığı basitçe

$$d_{T_g}(A,B) = \min_{X\in A, Y\in B}\{d_{T_g}(X,Y)\}$$

şeklinde olacaktır. Bu kısımda bulacağımız formüller için de bu tanım geçerli olacaktır. Şimdi, önceki kısımda elde edilen formüllerin gelleştirilmiş taksikab geometrideki karşılıkları (Çolakoğlu 2018a, 2019a) kaynaklarından yararlanılarak elde edilecektir. Formüllere geçmeden önce genelleştirilmiş taksikab geometrinin izometrilerini ifade edelim: Genelleştirilmiş taksikab uzaklıklar ötelemeler altında invaryanttır; yani

$$d_{T_g}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_{T_g}((x_1+u,y_1+v),(x_2+u,y_2+v))$$

dir. Bununla birlikte, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ iken gt-uzaklıklar π radyanlık dönme ve eksenlere paralel doğrulara göre yansımalar altında değişmez kalır. Eğer $\lambda_1 = \lambda_2$ ise, taksikab geometrinin izometrileri aynı zamanda gt-izometrilerdir (Ekmekçi vd. 2015, Çolakoğlu 2018b). Yani, $\pi/2, 3\pi/2$ radyanlık dönmeler ve I. ve II. açıortay doğrularına paralel olan doğrulara göre yansımalar da uzaklıkları korur.

2.2.1. Genelleştirilmiş taksikab düzlemde uzaklık formülleri

Genelleştirilmiş taksikab uzaklık formüllerine geçmeden önce genelleştirilmiş taksikab geometride çember, küre ve teğet kavramlarını vereceğiz. Bu kavramlar formüllerin bulunmasında kullanılacaktır.

Tanım 2.25. $\mathbb{R}^2$ *de sabit bir noktadan, sabit genelleştirilmiş taksikab uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine* ***genelleştirilmiş taksikab çember*** *veya kısaca* ***gt-çember*** *denir. Sabit noktaya, gt-çemberin* ***merkezi****; sabit gt-uzaklığa da gt-çemberin* ***yarıçapı*** *denir.*

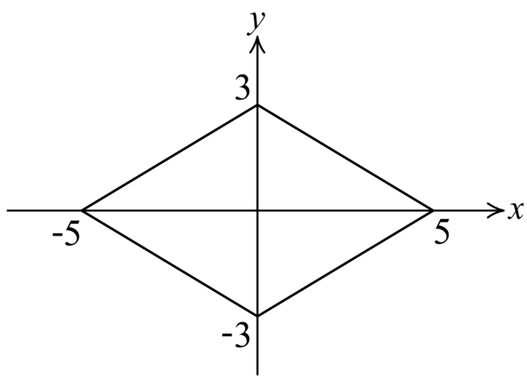
Analitik düzlemde merkezi $M = (a, b)$ ve yarıçapı $r \geq 0$ olan gt-çember

$$\{X \in \mathbb{R}^2 : d_{T_g}(M, X) = r\}$$

veya

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 |x - a| + \lambda_2 |y - b| = r\}$$

kümesidir. Kolayca görülebileceği üzere, $r = 0$ için gt-çember M noktasından ibarettir. $r > 0$ için birim gt-çember köşeleri $(1/\lambda_1, 0)$, $(-1/\lambda_1, 0)$, $(0, 1/\lambda_2)$, $(0, -1/\lambda_2)$ olan Şekil 2.14'teki gibi köşegenleri eksenlere paralel olan bir eşkenar dörtgendir.



Şekil 2.14. $\lambda_1 = \frac{1}{5}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ için birim gt-çemberi

Tanım 2.26. $\mathbb{R}^3$ *te sabit bir noktadan, sabit gt-uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine* ***gt-küre*** *denir. Sabit noktaya, gt-kürenin* ***merkezi****; sabit gt-uzaklığa da gt-kürenin* ***yarıçapı*** *denir.*

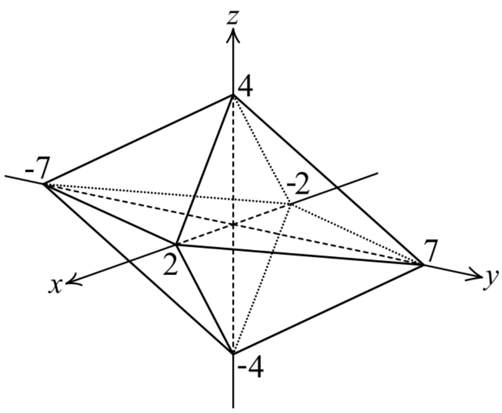
Analitik uzayda merkezi $M = (a, b, c)$ ve yarıçapı $r \geq 0$ olan gt-küre

$$\{X \in \mathbb{R}^3 : d_{T_g}(M, X) = r\}$$

veya

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1 |x-a| + \lambda_2 |y-b| + \lambda_3 |z-c| = r\}$$

kümesidir. Kolayca görülebileceği üzere, $r = 0$ için gt-küre M noktasından ibarettir. $r > 0$ için birim gt-küre köşeleri $(1/\lambda_1, 0, 0)$, $(-1/\lambda_1, 0, 0)$, $(0, 1/\lambda_2, 0)$, $(0, -1/\lambda_2, 0)$, $(0, 0, 1/\lambda_3)$, $(0, 0, -1/\lambda_3)$ olan Şekil 2.15'teki gibi köşegenleri eksenlere paralel olan, bir noktaya göre simetrik sekizyüzlüdür.

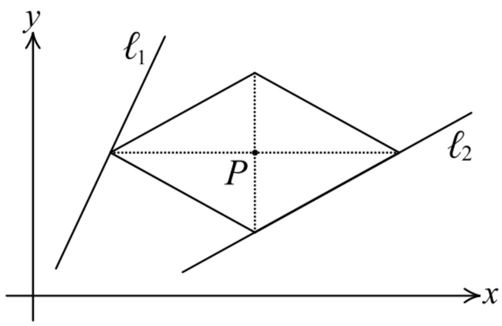


Şekil 2.15. $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{1}{7},\ \lambda_3 = \frac{1}{4}$ için birim gt-küresi

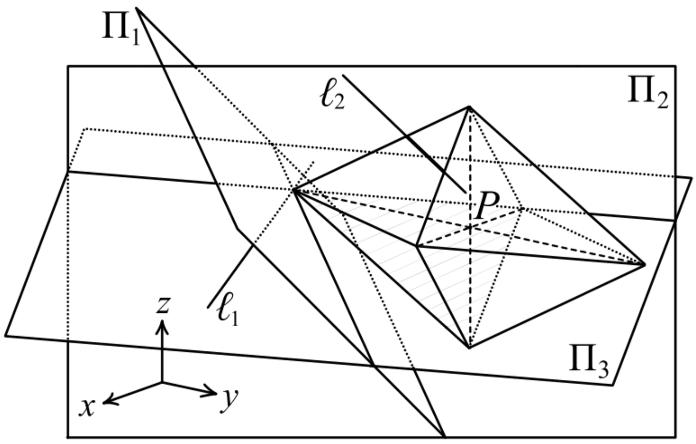
Tanım 2.27. $\mathbb{R}^2$ *de* P *merkezli ve* r *yarıçaplı bir gt-çemberi verilsin. Eğer* P *noktasının verilen bir doğruya gt-uzaklığı* r *ise o doğru gt-çembere teğettir denir. Benzer şekilde,* $\mathbb{R}^3$ *te* P *merkezli ve* r *yarıçaplı bir gt-küresi verilsin. Eğer* P *noktasının verilen bir doğruya veya bir düzleme olan gt-uzaklığı* r *ise o doğru veya düzlem gt-küreye teğettir denir.*

Şekil 2.16'da l_1 ve l_2 doğrularının P noktasına gt-uzaklıkları P merkezli gt-çemberin yarıçapına eşittir. Bu sebeple l_1 ve l_2 doğruları P merkezli gt-çembere teğettirler. Özel olarak, l_1 doğrusu gt-çembere bir köşede teğet iken, l_2 doğrusu aynı gt-çembere bir kenar boyunca teğettir. Bir gt-çemberin bir köşesinde sonsuz çoklukta teğet doğruları olacağı açıktır. Fakat bir kenarı boyunca teğet olan yalnız bir tek teğet doğrusu vardır.

Şekil 2.17'de ise l_1 ve l_2 doğruları ile Π_1, Π_2, Π_3 düzlemlerinin P noktasına gt-uzaklıkları P merkezli gt-kürenin yarıçapına eşittir. Bu sebeple bu doğru ve düzlemler gt-küreye teğettirler. Özel olarak, l_1 doğrusu gt-küreye bir köşede teğet iken, l_2 doğrusu aynı gt-küreye bir doğru parçası boyunca teğettir. Π_1 düzlemi gt-küreye bir köşede teğet iken, Π_2 düzlemi bir ayrıt boyunca, Π_3 düzlemi ise bir yüz boyunca gt-küreye teğettir. Bir gt-kürenin bir köşesinde sonsuz çoklukta teğet doğruları ve teğet düzlemleri olacağı açıktır. Ancak gt-küre üzerindeki bir doğru parçası boyunca veya bir ayrıt boyunca teğet olan bir tek doğru vardır. Ek olarak, bir ayrıt boyunca sonsuz çoklukta teğet düzlemi varken bir yüz boyunca teğet olan bir tek düzlem vardır.



Şekil 2.16. Bir gt-çembere teğet olan doğrular



Şekil 2.17. Bir gt-küreye teğet olan doğru ve düzlemler

1) Bir noktanın bir doğruya olan gt-uzaklığı

Teorem 2.28. *Genelleştirilmiş taksikab düzlemde bir* $P = (x_0, y_0)$ *noktasının* $ax + by + c = 0$ *doğrusuna olan gt-uzaklığı*

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a/\lambda_1|\,, |b/\lambda_2|\}}$$

dir .

İspat Bu uzaklığı bulmak için izlenilebilecek bir prosedür, merkezi P noktası olan ve genişleyen bir gt-taksi çemberinin yarıçapını, bu gt-çember doğruya değene kadar büyütmektir. Gt-çember doğruya değdiği anda yarıçap, P noktasının l doğrusuna olan en kısa gt-uzaklığını verir. P merkezli bir gt-çemberin, merkezinden geçen ve eksenlere paralel olan doğrular boyunca genişlediği dikkate alınırsa, gt-çemberin l doğrusuna bu doğrular üzerinde değeceği görülür (Şekil 2.18). Buna göre, l doğrusuyla $x = x_0$ ve $y = y_0$ doğrularının kesişim noktaları sırasıyla Q_1 ve Q_2 ise

$$\min_{X \in l}\{d_{T_g}(P, X)\} = \min\{d_{T_g}(P, Q_1), d_{T_g}(P, Q_2)\}$$

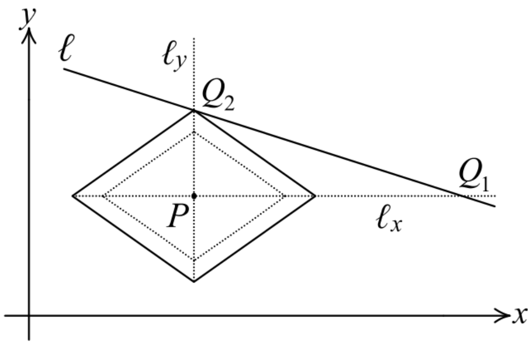
dir. Buna göre,

$$d_{T_g}(P,l) = \begin{cases} \min\left\{\left|\frac{ax_0+by_0+c}{b/\lambda_2}\right|, \left|\frac{ax_0+by_0+c}{a/\lambda_1}\right|\right\} & , \ a \neq b \neq 0 \text{ ise} \\ \left|\frac{by_0+c}{b/\lambda_2}\right| & , \ a = 0 \text{ ve } b \neq 0 \text{ ise} \\ \left|\frac{ax_0+c}{a/\lambda_1}\right| & , \ b = 0 \text{ ve } a \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğundan

$$d_{T_g}(P,l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a/\lambda_1|, |b/\lambda_2|\}}$$

elde edilir. □



Şekil 2.18. Bir P noktasının bir l doğrusuna gt-uzaklığı

2) İki doğru arasındaki gt-uzaklık

Düzlemde farklı iki doğru ya paraleldir ya da bir tek noktada kesişirler. Kesişen doğrular arasındaki gt-uzaklık 0 dır. Doğrular paralel ise doğrulardan birinin üzerindeki bir noktanın diğer doğruya olan gt-uzaklığı iki doğru arasındaki gt-uzaklığı belirler.

Teorem 2.29. *Genelleştirilmiş taksikab düzlemde paralel* $ax+by+c_1=0$ *ve* $ax+by+c_2=0$ *doğruları arasındaki gt-uzaklık*

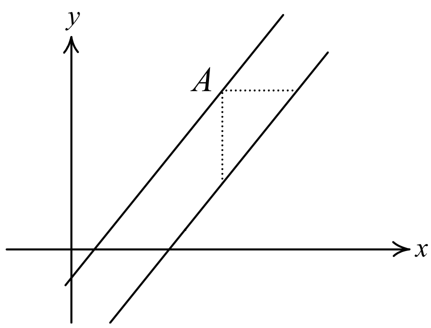
$$\frac{|c_1-c_2|}{\max\{|a/\lambda_1|,|b/\lambda_2|\}}$$

dir.

İspat $A=(x_0,y_0)$ noktası $ax+by+c_1=0$ doğrusu üzerinde bir nokta olsun (Şekil 2.19). O halde $ax_0+by_0+c_1=0$ dır. Bu A noktasının $ax+by+c_2=0$ doğrusuna olan gt-uzaklığı iki doğru arasındaki gt-uzaklığa eşittir. Bu uzaklık

$$\frac{|ax_0+by_0+c_2|}{\max\{|a/\lambda_1|,|b/\lambda_2|\}}=\frac{|-c_1+c_2|}{\max\{|a/\lambda_1|,|b/\lambda_2|\}}=\frac{|c_1-c_2|}{\max\{|a/\lambda_1|,|b/\lambda_2|\}}$$

şeklinde bulunur.



□

Şekil 2.19. Paralel iki doğru arasındaki gt-uzaklık

2.2.2. Genelleştirilmiş taksikab düzlemde Pisagor teoremi

Aşağıdaki teorem (Ekmekçi vd.) kaynağından alınmıştır. Bu teorem iki nokta arasındaki Öklid uzaklığı ile genelleştirilmiş taksikab uzaklığı arasındaki ilişkiyi, bu noktalardan geçen doğrunun eğimi yardımıyla belirlemektedir.

Teorem 2.30. P_1 *ve* P_2, $\mathbb{R}^2$ *de dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta,* m *de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise,*

$$\mu(m)=\frac{\sqrt{1+m^2}}{\lambda_1+\lambda_2|m|}$$

olmak üzere

$$d_E(P_1,P_2)=\mu(m)d_{T_g}(P_1,P_2)$$

dir. P_1 ve P_2 dikey bir doğru üzerinde bulunan iki nokta ise,

$$d_E(P_1, P_2) = (1/\lambda_2)\, d_T(P_1, P_2)$$

dir.

İspat $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$, $\mathbb{R}^2$ de iki nokta olsun. Eğer P_1 ve P_2 dikey bir doğru üzerinde değilse, $x_1 \neq x_2$ ve

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

dir. O halde,

$$d_E(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| \sqrt{1 + m^2} \quad \text{ve} \quad d_{T_g}(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| \left(\lambda_1 + \lambda_2 |m|\right)$$

dir. Bu iki eşitlik taraf tarafa oranlanırsa aranan eşitlik elde edilir. Eğer P_1 ve P_2 dikey bir doğru üzerinde ise, $x_1 = x_2$ dir. Bu durumda

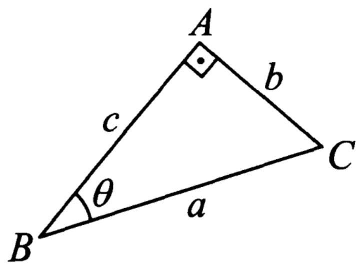
$$d_E(P_1, P_2) = |y_2 - y_1| \quad \text{ve} \quad d_{T_g}(P_1, P_2) = \lambda_2 |y_2 - y_1|$$

olur. Böylece

$$d_E(P_1, P_2) = (1/\lambda_2)\, d_{T_g}(P_1, P_2)$$

elde edilir. □

Aksi belirtilmedikçe bundan sonra ABC üçgeni A açısı dik ve köşeleri saat yönünün tersine harflendirilmiş olarak kabul edilecektir (Şekil 2.20).



Şekil 2.20. ABC dik üçgeni

Şimdi (Çolakoğlu 2018a) kaynağından yararlanarak, bu üçgenin kenarlarının Öklid uzunlukları $\mathbf{a} = d_E(B, C)$, $\mathbf{b} = d_E(A, C)$, $\mathbf{c} = d_E(A, B)$ şeklinde ve genelleştirilmiş taksikab uzunlukları da $a = d_{T_g}(B, C)$, $b = d_{T_g}(A, C)$, $c = d_{T_g}(A, B)$ şeklinde alınarak, Pisagor teoreminin bir genelleştirilmiş taksikab karşılığını sadece bir paramatreye (dik kenarlardan birinin eğimine) bağlı olarak veriyoruz:

Teorem 2.31. *A açısı dik olan bir ABC dik üçgeninin AB kenarının eğimi $m \in \mathbb{R}$ olsun. Buna göre, $\mu_1(m) = \lambda_1 + \lambda_2 |m|$ ve $\mu_2(m) = \lambda_1 |m| + \lambda_2$ olmak üzere*

$$\mu_1(m)\mu_2(m)a = \lambda_1 |m\mu_1(m)b + \mu_2(m)c| + \lambda_2 |m\mu_2(m)c - \mu_2(m)c|$$

Eğer AB kenarı y-eksenine paralel ise

$$a = b + c$$

dir.

İspat BC kenarının eğimi m_1 ve CBA yönlü açısının ölçüsü θ olsun. O halde

$$\tan\theta = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{\mu_1(m)b}{\mu_2(m)c} = \frac{m - m_1}{1 + mm_1}$$

elde edilir. Bu denklemi m_1 için çözersek

$$m_1 = \frac{|m\mu_2(m)c - \mu_1(m)b|}{|m\mu_1(m)b + \mu_2(m)c|}$$

elde ederiz. Teorem 2.30 kullanılarak $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ ye uygulanırsa

$$\left(\frac{1 + m_1^2}{\mu_1^2(m_1)}\right) a^2 = (1 + m^2)\left(\frac{\mu_1^2(m)b^2 + \mu_2^2(m)c^2}{\mu_1^2(m)\mu_2^2(m)}\right)$$

elde edilir. m_1 değerini bu son denklemde yerine yazarsak denklemin sol yanı

$$\frac{(1 + m^2)\left(\mu_1^2(m)b^2 + \mu_2^2(m)c^2\right)}{\lambda_1 |m\mu_1(m)b + \mu_2(m)c| + \lambda_2 |m\mu_2(m)c - \mu_2(m)c|}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi de her iki yanın karekökünü alırsak

$$\mu_1(m)\mu_2(m)a = \lambda_1 |m\mu_1(m)b + \mu_2(m)c| + \lambda_2 |m\mu_2(m)c - \mu_2(m)c|$$

elde edilir. Eğer AB kenarı y-eksenine paralel ise

$$m_1 = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}} = \frac{\lambda_1 c}{\lambda_2 b}$$

dir. Bu durumda yine, Teorem 2.30'un Pisagor teoremine uygulanmasıyla

$$\left(\frac{1+m_1^2}{\mu_1^2(m_1)}\right)a^2 = \left(\frac{\lambda_2^2 b^2 + \lambda_1^2 c^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\right)$$

elde edilir. m_1 in bu denkleme yazılmasıyla denklemin sol yanı

$$\left(\frac{\lambda_2^2 b^2 + \lambda_1^2 c^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2(b+c)^2}\right)a^2$$

olur. Yine son denklemde her iki tarafın karekökü alınırsa

$$a = b + c$$

elde edilir. $m_1 \to \infty$ için limit durumunda bu denklemin sağladığı da görülür. $\square$

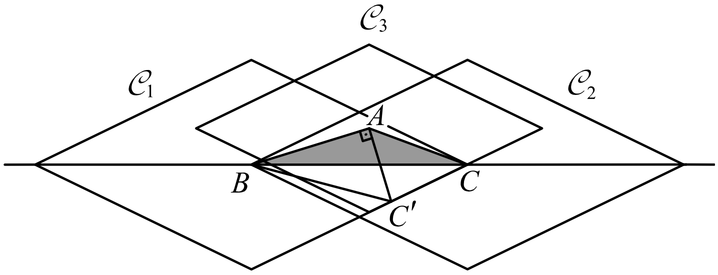
NOT: Eğer A açısı dik olan ABC üçgeni saat yönünde harflendirilirse, b ve c nin rolleri değişir ve AB nin y eksenine paralel olmama durumunda aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\mu_1(m)\mu_2(m)a = \lambda_1\left|m\mu_1(m)c + \mu_2(m)b\right| + \lambda_2\left|m\mu_2(m)b - \mu_1(m)c\right|.$$

AB nin y-eksenine paralel olma durumu ise değişmez.

Aşağıdaki örnek, Pisagor teoreminin karşıtının geçerli olmadığını göstermektedir. Yani bu eşitliği sağlayan fakat dik olmayan üçgenler vardır.

Örnek. Genelleştirilmiş taksikab düzleminde ABC saat yönünün tersine harflendirilmiş, BC kenarı x-eksenine paralel, A açısı geniş, $d_{T_g}(B,C) = a$, $d_{T_g}(A,C) = b$, $d_{T_g}(A,B) = c$ gt-uzunluklu ve AB kenarının eğimi m olan bir üçgen olsun (Şekil 2.21). Ayrıca $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$, a yarıçaplı, sırasıyla B ve C merkezli gt-çemberleri, $\mathcal{C}_3$ de b yarıçaplı ve A merkezli gt-çemberi olsun. Şimdi $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_3$ gt-çemberleri üzerinde öyle bir C' noktası seçelim ki BAC' açısı dik olsun. Bu durumda $d_{T_g}(B,C') = a$ ve $d_{T_g}(A,C') = b$ olur. İlk teoremi ABC' dik üçgenine uygularsak karşılık denklemi hiç dik açısı olmayan ABC üçgeni için elde etmiş oluruz. O halde bu denklemin sağlanması üçgenin dik üçgen olduğu anlamına gelmeyecektir.



Şekil 2.21. Gt-Pisagor teoreminin karşıtının geçersizliği

Aşağıdaki teorem, genelleştirilmiş taksikab düzlemde hiçbir kenarı y-eksenine paralel olmayan bir üçgenin bir dik açıya sahip olması için gerekli ve yeterli koşulu verir:

Teorem 2.32. *ABC hiçbir kenarı y-eksenine paralel olmayan ve genelleştirilmiş taksikab kenar uzunlukları $d_{T_g}(B,C) = a$, $d_{T_g}(A,C) = b$, $d_{T_g}(A,B) = c$ olan bir üçgen olsun. Ayrıca AB ve BC kenarlarının eğimleri sırasıyla m ve m_1 olsun. Buna göre A açısının dik açı olması için gerek ve yeter koşul*

$$\mu^2(m_1)a^2 = \mu^2(-1/m)b^2 + \mu^2(m)c^2$$

olmasıdır.

İspat Eğer yukarıdaki eşitlik sağlarsa Teorem 2.30'dan $\mathbf{a} = d_E(B,C)$, $\mathbf{b} = d_E(A,C)$, $\mathbf{c} = d_E(A,B)$ olmak üzere,

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$$

elde edilir. Pisagor teoreominin karşıtı geçerli olduğu için A açısı dik olur. Karşıt olarak, A açısının dik açı olduğunu kabul edelim. Bu durumda bu eşitlikten, yine Teorem 2.30 yardımıyla istenilen formül elde edilir. □

Eğer BC kenarı y-eksenine paralel ise

$$\lambda_2^2 a^2 = \mu^2(-1/m)b^2 + \mu^2(m)c^2$$

eşitliği, eğer AB kenarı y-eksenine paralel ise

$$\mu^2(m_1)a^2 = \lambda_1^2 b^2 + \lambda_2^2 c^2$$

denklemi, ve son olarak eğer AC kenarı y-eksenine paralel ise

$$\mu^2(m_1)a^2 = \lambda_2^2 b^2 + \lambda_1^2 c^2$$

denklemi elde edilir.

2.2.3. Üç boyutlu genelleştirilmiş taksikab uzayda uzaklık formülleri

1) Bir noktanın bir düzleme olan gt-uzaklığı

Teorem 2.33. *$\mathbb{R}^3$ te bir $P=(x_0,y_0,z_0)$ noktasının $Ax+By+Cz+D=0$ düzlemine olan uzaklığı*

$$\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\max\{|A/\lambda_1|,|B/\lambda_2|,|C/\lambda_3|\}}$$

dir.

İspat $Ax+By+Cz+D=0$ düzlemini Π ile gösterelim. Açıkça P noktasının Π düzlemine olan gt-uzaklığı, P merkezli genişleyen bir gt-kürenin Π düzlemine değdiği andaki yarıçapına eşittir. Bu durumda gt-kürenin en az bir köşesi Π düzlemi üzerinde olur ki, bu köşe aynı zamanda P den geçen ve koordinat eksenlerine paralel olan doğruların biri üzerindedir. Başka bir ifadeyle ℓ_x, ℓ_y ve ℓ_z P noktasından geçen ve sırasıyla x, y ve z eksenlerine paralel olan doğrular ise, Π düzlemi $\Pi\cap\ell_x=Q_1=(x_{Q_1},y_0,z_0)$, $\Pi\cap\ell_y=Q_2=(x_0,y_{Q_2},z_0)$, $\Pi\cap\ell_z=Q_3=(x_0,y_0,z_{Q_3})$ şeklinde tanımlanan noktalardan birinde gt-küreye teğettir (Şekil 2.22) . Böylece

$$d_{T_g}(P,\Pi)=\min\left\{d_{T_g}(P,Q_1),d_{T_g}(P,Q_2),d_{T_g}(P,Q_3)\right\}$$

dir. $A\neq 0$, $B\neq 0$ ve $C\neq 0$ iken Q_1, Q_2, Q_3 noktaları mevcuttur ve

$$\begin{aligned}
d_{T_g}(P,Q_1) &= \lambda_1|x_0-x_{Q_1}|\\
&= \lambda_1\left|x_0-\frac{-By_0-Cz_0-D}{A}\right|\\
&= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|A/\lambda_1|}
\end{aligned}$$

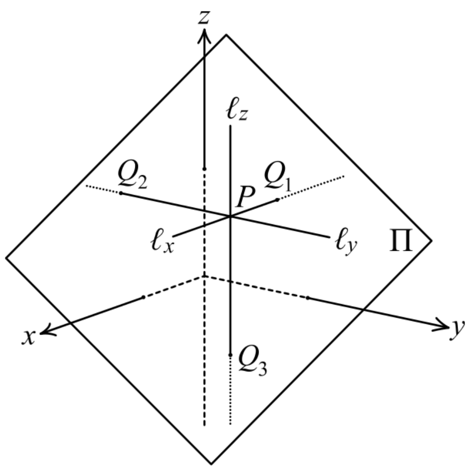
ve benzer olarak

$$\begin{aligned}
d_{T_g}(P,Q_2) &= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|B/\lambda_2|}\\
d_{T_g}(P,Q_3) &= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|C/\lambda_3|}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
d_{T_g}(P,\Pi) &= \min\left\{\begin{array}{c}\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|A/\lambda_1|},\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|B/\lambda_2|},\\ \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|C/\lambda_3|}\end{array}\right\}\\
&= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\max\{|A/\lambda_1|,|B/\lambda_2|,|C/\lambda_3|\}}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer tüm durumlar sadece Q_1, Q_2, Q_3 noktalarının varlığını etkiler. Ancak sonuç aynı kalır.



$\square$

Şekil 2.22. Bir noktanın bir düzleme olan gt-uzaklığı

Dikkat edilirse, bir noktanın bir düzleme en yakın olduğu noktanın geometrik yeri de değişmiştir. Genelleştirilmiş taksikab anlamda en yakın nokta sonsuz çoklukta olabilir. Bu noktaların geometrik yeri, merkezi bu nokta olan genişleyen bir kürenin düzleme değdiği noktalardır.

2) İki düzlem arasındaki gt-uzaklığı

Uzayda farklı iki düzlem ya bir doğru boyunca kesişir ve aralarındaki uzaklık 0 dır ya da paraleldir. Paralel iki düzlemden biri üzerinde alınan bir noktanın diğer düzleme olan uzaklığı sabittir.

Teorem 2.34. $\mathbb{R}^3$ *te bir* $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ *ve* $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ *paralel düzlemleri arasındaki uzaklık*

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\max\{|A/\lambda_1|, |B/\lambda_2|, |C/\lambda_3|\}}$$

dir.

İspat $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ düzlemini Π_1 ile, $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ düzlemini de Π_2 ile gösterelim. Π_2 düzleminin üzerinde bir $P = (x_1, y_1, z_1)$ noktası alalım. Bu noktanın Π_1 düzlemine olan uzaklığı

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1|}{\max\{|A/\lambda_1|, |B/\lambda_2|, |C/\lambda_3|\}}$$

dir. P noktası w_2 düzlemi üzerinde olduğundan $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D_2$ dir. O halde

$$d_{T_g}(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\max\{|A/\lambda_1|, |B/\lambda_2|, |C/\lambda_3|\}}$$

elde edilir. □

3) Bir doğrunun bir düzleme olan gt-uzaklığı

Eğer doğru düzlemi kesiyorsa aralarındaki uzaklık 0 olur. Eğer doğru düzlemi kesmiyorsa o halde paraleldir. Doğru üzerinde alınan bir noktanın düzleme olan gt-uzaklığı bulunarak doğrunun düzleme olan gt-uzaklığı belirlenir.

4) Bir noktanın bir doğruya olan gt-uzaklığı

Teorem 2.35. $\mathbb{R}^3$ *te bir* $A = (x_0, y_0, z_0)$ *noktasının,* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *noktasından geçen ve doğrultusu* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *olan doğruya olan gt-uzaklığı,* $\rho_1 = (x_0 - x_1)$*,* $\rho_2 = (y_0 - y_1)$*,* $\rho_1 = (z_0 - z_1)$ *olmak üzere*

$$\min_{\substack{i,j,k\in\{1,2,3\} \\ i\neq j\neq k\neq i}} \left\{ \lambda_i \left| \rho_i - \frac{u_i}{u_k}\rho_k \right| + \lambda_j \left| \rho_j - \frac{u_j}{u_k}\rho_k \right| \right\}$$

dir.

İspat P_1 den geçen ve doğrultusu $\mathbf{u}$ vektörü olan doğruyu ℓ ile gösterelim. Açıkça P noktasının ℓ doğrusuna olan gt-uzaklığı

$$d_{T_g}(P, \ell) = \min\left\{ d_{T_g}(P, X) : X \in \ell \right\}$$

dir. Bu uzaklık da merkezi P noktası olan ve ℓ doğrusuna teğet olan gt-kürenin yarıçapına eşittir. Dikkat edilirse, kürenin bir kenarı üzerindeki en az bir nokta ℓ doğrusu üzerindedir. Bu nokta aynı zaman da P noktasından geçen ve koordinat eksenlerine dik olan düzlemlerden biri üzerindedir. Başka bir ifadeyle, eğer Π_x, Π_y ve Π_z, P noktasından geçen sırasıyla x,y ve z eksenlerine dik olan düzlemleri gösterirse

$$R_1 = \ell \cap \Pi_x, \quad R_2 = \ell \cap \Pi_y \ \text{ ve } \ R_3 = \ell \cap \Pi_z,$$

şeklinde elde edilen noktalardan en az biri mevcuttur. Bu noktalar $R_1 = (x_0, y_{R_1}, z_{R_1})$, $R_2 = (x_{R_2}, y_0, z_{R_2})$, $R_3 = (x_{R_3}, y_{R_3}, z_0)$ şeklinde ifade edilebilir ve ℓ doğrusu gt-küreye bu noktalarından birinde teğettir (Şekil 2.23). O halde

$$d_{T_g}(P,\ell) = \min\{d_{T_g}(P,R_1), d_{T_g}(P,R_2), d_{T_g}(P,R_3)\}.$$

dir. $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ ve $u_3 \neq 0$ durumunda R_1, R_2 ve R_3 noktalarının tümü mevcuttur ve $\rho_1 = (x_0 - x_1)$, $\rho_2 = (y_0 - y_1)$ ve $\rho_3 = (z_0 - z_1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
d_{T_g}(P,R_1) &= \lambda_2 \left|y_0 - y_{R_1}\right| + \lambda_3 \left|z_0 - z_{R_1}\right| \\
&= \lambda_2 \left|y_0 - \frac{u_1 y_1 + u_2(x_0 - x_1)}{u_1}\right| + \lambda_3 \left|z_0 - \frac{u_1 z_1 + u_3(x_0 - x_1)}{u_1}\right| \\
&= \lambda_2 \left|(y_0 - y_1) - \frac{u_2}{u_1}(x_0 - x_1)\right| + \lambda_3 \left|(z_0 - z_1) - \frac{u_3}{u_1}(x_0 - x_1)\right| \\
&= \lambda_2 \left|\rho_2 - \frac{u_2}{u_1}\rho_1\right| + \lambda_3 \left|\rho_3 - \frac{u_3}{u_1}\rho_1\right|
\end{aligned}$$

dir. Benzer olarak

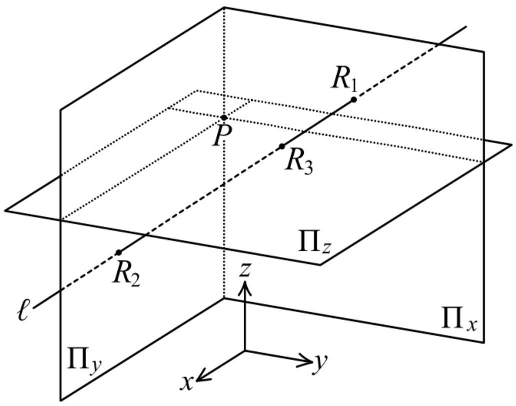
$$d_{T_g}(P,R_2) = \lambda_1 \left|\rho_1 - \frac{u_1}{u_2}\rho_2\right| + \lambda_3 \left|\rho_3 - \frac{u_3}{u_2}\rho_2\right|,$$

$$d_{T_g}(P,R_3) = \lambda_1 \left|\rho_1 - \frac{u_1}{u_3}\rho_3\right| + \lambda_2 \left|\rho_2 - \frac{u_2}{u_3}\rho_3\right|.$$

elde edilir. Böylece

$$d_{T_g}(P,\ell) = \min_{\substack{i,j,k \in \{1,2,3\} \\ i \neq j \neq k \neq i}} \left\{ \lambda_i \left|\rho_i - \frac{u_i}{u_k}\rho_k\right| + \lambda_j \left|\rho_j - \frac{u_j}{u_k}\rho_k\right| \right\}.$$

elde edilir. Diğer tüm durumlar sadece R_1, R_2, R_3, noktalarının varlığını etkiler fakat sonucu etkilemez.



□

Şekil 2.23. Bir noktanın bir doğruya olan gt-uzaklığı

Dikkat edilirse, yine bir noktanın bir doğruya en yakın olduğu noktanın geometrik yeri de değişmiştir. Genelleştirilmiş taksikab anlamda en yakın nokta sonsuz çoklukta olabililir. Bu noktaların geometrik yeri, merkezi bu nokta olan genişleyen bir kürenin doğruya değdiği noktalardır.

5) Paralel iki doğru arasındaki gt-uzaklığı

Aynı düzlemde bulunan iki doğru ya kesişirler ya da paraleldir. Kesişirlerse aralarındaki uzaklık 0 dır. Paralel doğrular ise, birinin üzerindeki bir noktanın diğerine uzaklığı sabittir. O halde son teoremin direkt sonucu olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.36. $\mathbb{R}^3$ *te paralel*

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= (x_1, y_1, z_1) + t(u_1, u_2, u_3) \\ \alpha_2(t) &= (x_2, y_2, z_2) + t(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

doğruları arasındaki uzaklık $\rho_1 = (x_1 - x_2)$*,* $\rho_2 = (y_1 - y_2)$*,* $\rho_3 = (z_1 - z_2)$ *olmak üzere*

$$\min_{\substack{i,j,k \in \{1,2,3\} \\ i \neq j \neq k \neq i}} \left\{ \lambda_i \left| \rho_i - \frac{u_i}{u_k} \rho_k \right| + \lambda_j \left| \rho_j - \frac{u_j}{u_k} \rho_k \right| \right\}$$

dir.

6) Aykırı iki doğru arasındaki gt-uzaklığı

$\mathbb{R}^3$ te $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve doğrultu vektörü $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ olan doğru ile $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktasından geçen ve doğrultu vektörü $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ olan doğru aykırı durumda ise $\boldsymbol{u}$ $\boldsymbol{v}$ ve P_1P_2 vektörleri aynı düzlemde olamayacağından $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, P_1P_2) \neq 0$ dir.

Teorem 2.37. $\mathbb{R}^3$ *te sırasıyla,* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *noktalarından geçen, doğrultmanları* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *ve* $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *olan ve aykırı durumda olan*

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= (x_1, y_1, z_1) + t(u_1, u_2, u_3) \\ \beta_2(s) &= (x_2, y_2, z_2) + s(v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

doğruları arasındaki uzaklık $\delta_{(a,b)} = u_a v_b - u_b v_a$ *olmak üzere*

$$\frac{\left|(x_1 - x_2)\delta_{(2,3)} + (y_1 - y_2)\delta_{(3,1)} + (z_1 - z_2)\delta_{(1,2)}\right|}{\max\left\{\left|\delta_{(2,3)}/\lambda_1\right|, \left|\delta_{(3,1)}/\lambda_2\right|, \left|\delta_{(1,2)}/\lambda_3\right|\right\}}$$

dir.

İspat Doğrulara sırasıyla ℓ_1 ve ℓ_2 diyelim. Eğer ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları aykırı doğrular ise ℓ_2 doğrusundan geçen ve ℓ_1 doğrusuna paralel olan bir tek Π düzlemi vardır. Bu düzlemi, ℓ_2 yi herhangi bir noktada kesen ve ℓ_1 e paralel olan bir doğru ile ℓ_2 doğrusu tek türlü belirler (Şekil 2.24). O halde

$$d_{T_g}(\ell_1, \Pi) = d_{T_g}(P_1, \Pi).$$

dir. ℓ_2 doğrusu, Π düzleminin teğet olduğu ve merkezleri ℓ_1 doğrusu üzerinde olan gt-kürelerin birine teğettir ve bu gt-küre merkezleri ℓ_1 doğrusu üzerinde ve ℓ_2 doğrusuna teğet olan gt-küreler arasında yarıçapı en küçük olan gt-küredir (Şekil 2.24). Bu sebeple ℓ_1 doğrusu üzerindeki $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ noktası için

$$d_{T_g}(\ell_1, \ell_2) = d_{T_g}(P_1, \Pi)$$

dir. Bu durumda Π düzlemi üzerindeki $X = (x, y, z)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları için

$$\langle P_2X, (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) \rangle = 0$$

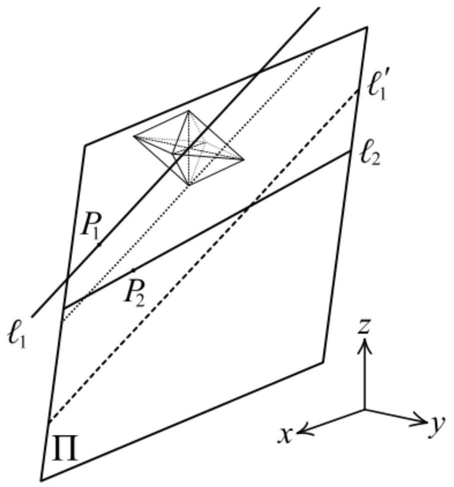
dir ve Π düzleminin denklemi $\delta_{(a,b)} = u_a v_b - u_b v_a$ olmak üzere

$$(x - x_2)\delta_{(2,3)} + (y - y_2)\delta_{(3,1)} + (z - z_2)\delta_{(1,2)} = 0$$

şeklide elde edilir. Böylece doğrular arasındaki uzaklık da

$$d_{T_g}(\ell_1, \ell_2) = d_{T_g}(P_1, \Pi) = \frac{\left|(x_1 - x_2)\delta_{(2,3)} + (y_1 - y_2)\delta_{(3,1)} + (z_1 - z_2)\delta_{(1,2)}\right|}{\max\left\{\left|\delta_{(2,3)}/\lambda_1\right|, \left|\delta_{(3,1)}/\lambda_2\right|, \left|\delta_{(1,2)}/\lambda_3\right|\right\}}.$$

şeklinde elde edilmiş olur.



□

Şekil 2.24. Aykırı iki doğru arasındaki gt-uzaklık

NOT: İki aykırı doğru arasındaki gt-uzaklığı ötelemeler yardımıyla elde etmek de mümkündür. ℓ_1 ve ℓ_2 aykırı doğrularını göz önüne alalım. Bunlardan birini bu doğrulara paralel olmayan bir koordinat ekseni boyunca diğerini kesecek şekilde öteleyebiliriz. Eğer ℓ_1 ve ℓ_2, koordinat eksenlerine paralel değilse bu işlemi herhangi bir koordinat ekseni boyunca yapabiliriz. Dikkat edilirse ℓ_1 ve ℓ_2 aykırı doğruları arasındaki en kısa gt-uzaklık bu ötelemelerin ağırlıklı ifadelerinin en küçüğüne eşittir. Başka bir ifadeyle, X_1, Y_1, Z_1 noktaları ℓ_1 doğrusu üzerinde ve X_2, Y_2, Z_2 noktaları ℓ_2 doğrusu üzerinde olmak üzere, (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) ve (Z_1, Z_2) nokta çiftleri sırasıyla x, y ve z eksenleri boyunca ötelemeler sonucunda çakışan noktalar ise

$$d_{T_g}(\ell_1, \ell_2) = \min\{d_{T_g}(X_1, X_2), d_{T_g}(Y_1, Y_2), d_{T_g}(Z_1, Z_2)\}.$$

dir. (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) ve (Z_1, Z_2) nokta çiftlerinin gt-uzaklıkları en küçük olan çifti genelleştirilmiş taksikab anlamda iki doğrunun birbirine en yakın noktalarını da belirler. Eğer ℓ_1 ve ℓ_2 koordinat eksenlerine paralel değillerse ve bu nokta çiftleri arasındaki gt-uzaklıklar farklı ise birbirine genelleştirilmiş taksikab anlamda en yakın olan yalnızca bir tane çift nokta vardır.

Örnek. $\mathbb{R}^3$ te, $\ell_1 : \beta_1(t_1) = (0, 2, 2) + t_1(1, 2, 1)$ ve $\ell_2 : \beta_2(t_2) = (-2, 1, 4) + t_2(-1, 0, 3)$ aykırı doğruları arasındaki genelleştirilmiş taksikab uzaklığı bulalım. Denklemde yerine yazılırsa $\delta_{(2,3)} = 6$, $\delta_{(3,1)} = -4$, $\delta_{(1,2)} = 2$ ve

$$d_{T_g}(\ell_1, \ell_2) = \frac{4}{\max\{6/\lambda_1, 4/\lambda_2, 2/\lambda_3\}} = \min\left\{\tfrac{2}{3}\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_3\right\}.$$

bulunur. Aslında ℓ_2 doğrusundan geçen ve ℓ_1 doğrusuna paralel olan düzlemin denklemi

$$6x - 4y + 2z + 8 = 0,$$

dir. Buradan da

$$d_{T_g}(\ell_1, \ell_2) = d_{T_g}(P_1, \Pi) = \frac{4}{\max\{6/\lambda_1, 4/\lambda_2, 2/\lambda_3\}} = \min\left\{\tfrac{2}{3}\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_3\right\}.$$

bulunur. Aynı sonuca yukarıdaki not dikkate alınarak da ulaşılabilir. Koordinat eksenleri boyunca aşağıdaki ötelemeyi göz önüne alalım:

$T_x : (x, y, z) \to (x+c_1, y, z)$, $T_y : (x, y, z) \to (x, y+c_2, z)$, $T_z : (x, y, z) \to (x, y, z+c_3)$, Bu öteleme ℓ_2 doğrusunun görüntüsünü ℓ_1 doğrusu ile kesiştirsin. O halde $c_1 = \frac{2}{3}$, $c_2 = -1$ ve $c_3 = 2$ elde edilir. Böylece

$$d_{T_g}(\ell_1, \ell_2) = \min\{\lambda_1 |c_1|, \lambda_2 |c_2|, \lambda_3 |c_3|\} = \min\left\{\tfrac{2}{3}\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_3\right\}.$$

bulunur. Burada, yukarıdaki notta belirtilen (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) ve (Z_1, Z_2) nokta çiftlerini de t_1 ve t_2 değerlerini kullanarak aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\begin{aligned} X_1 &= (-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}), X_2 = (-\tfrac{7}{6}, 1, \tfrac{3}{2}) \\ Y_1 &= (-1, 0, 1), Y_2 = (-1, 1, 1), \\ Z_1 &= (-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}), Z_2 = (-\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Örneğin $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ise genelleştirilmiş taksikab anlamda en yakın nokta çifti (X_1, X_2) olacaktır.

2.2.4. n boyutlu genelleştirilmiş taksikab uzayda uzaklık formülleri

n boyutlu genelleştirilmiş taksikab uzayda birim gt-hiperküre

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i| = 1,$$

şeklinde bir denkleme sahiptir. Bu uzaydaki gt-hiperküreler için teğet kavramı önceki boyutlara benzer şekilde tanımlanır. Yani, bir P merkezli ve r yarıçaplı bir gt-hiperküre için, P noktasına olan gt-uzaklığı r olan doğru ve hiperdüzlemler bu gt-hiperküreye teğettir. Şimdi 3 boyuta benzer yaklaşımlarla n-boyut için uzaklık formüllerini elde edelim:

1) Bir noktanın bir düzleme olan gt-uzaklığı

Teorem 2.38. $\mathbb{R}^n$ *de,* $P = (x_{1(0)}, ..., x_{n(0)})$ *noktasının* $A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n + B = 0$ *hiperdüzlemine olan genelleştirilmiş taksikab uzaklığı*

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} A_i x_{i(0)} + B\right|}{\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \{|A_i/\lambda_i|\}}.$$

dir.

İspat $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n + B = 0$ hiperdüzlemini Π ile gösterelim. P noktasının Π hiperdüzlemine olan gt-uzaklığı

$$d_{T_g}(P,\Pi) = \min\left\{d_{(\lambda_1,..,\lambda_n)}(P,X) : X \in \Pi\right\}.$$

dir. Bu uzaklık, P merkezli ve Π hiperdüzlemine teğet olan gt-hiperkürenin yarıçapına eşittir. O halde, bu gt-hiperkürenin en az bir köşesi Π düzlemi üzerindedir. Bu nokta aynı zamanda P noktasından geçen ve koordinat eksenlerine paralel olan doğrulardan biri üzerindedir. Böylece, eğer ℓ_{x_i}, P noktasından geçen ve $i \in \{1,...,n\}$ için x_i-eksenine paralel olan doğruyu gösterirse,

$$Q_i = \Pi \cap \ell_{x_i},$$

şeklinde tanımlanan $Q_i = (x_{1(0)},...,x_{i-1(0)},x_{i(Q_i)},x_{i+1(0)},...,x_{n(0)})$ noktaları için

$$d_{T_g}(P,\Pi) = \min_{i\in\{1,...,n\}}\{d_{T_g}(P,Q_i)\}.$$

dir. Ek olarak, $i \in \{1,...,n\}$ için $A_i \neq 0$ olduğu durumda her Q_i noktası mevcuttur ve

$$\begin{aligned} d_{T_g}(P,Q_i) &= \lambda_i \left|x_{i(0)} - x_{i(Q_i)}\right| \\ &= \lambda_i \left|x_{i(0)} - \frac{-A_1x_{1(0)} - \cdots - A_{i-1}x_{i-1(0)} - A_{i+1}x_{i+1(0)} - \cdots - A_nx_{n(0)} - B}{A_i}\right| \\ &= \frac{\left|A_1x_{1(0)} + \cdots + A_nx_{n(0)} + B\right|}{|A_i/\lambda_i|}. \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$d_{T_g}(P,\Pi) = \min_{i\in\{1,...,n\}}\left\{\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} A_ix_{i(0)} + B\right|}{|A_i/\lambda_i|}\right\} = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} A_ix_{i(0)} + B\right|}{\max_{i\in\{1,...,n\}}\{|A_i/\lambda_i|\}}.$$

dir. Diğer tüm durumlar sadece Q_i ler varlığını etkiler ancak sonuç değişmez. $\square$

2) Bir noktanın bir doğruya olan gt-uzaklığı

Teorem 2.39. *$\mathbb{R}^n$ de, $P = (x_{1(0)},...,x_{n(0)})$ noktasının, $P_1 = \left(x_{1(1)},...,x_{n(1)}\right)$ noktasından geçen ve doğrultusu $\mathbf{u} = (u_1,...,u_n)$ olan doğruya genelleştirilmiş taksikab uzaklığı*

$$\min_{i\in\{1,...,n\}}\left\{\sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{i\}} \lambda_j \left|\left(x_{j(0)} - x_{j(1)}\right) - \frac{u_j}{u_i}\left(x_{i(0)} - x_{i(1)}\right)\right|\right\}.$$

dir.

İspat P_1 noktasından geçen ve doğrultusu u olan doğruyu ℓ ile gösterelim. P noktasının ℓ doğrusuna olan gt-uzaklığı

$$d_{T_g}(P,\ell) = \min\left\{d_{T_g}(P,X) : X \in \ell\right\},$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaklık, P merkezli ve r yarıçaplı gt-hiperkürenin ℓ doğrusuna teğet olduğu andaki yarıçapına eşittir. Ek olarak, gt-hiperkürenin bir kenarı üzerindeki en az bir nokta ℓ doğrusu üzerindedir. Bu nokta aynı zamanda P noktasından geçen ve koordinat eksenlerine dik olan hiperdüzlemlerden biri üzerindedir. Başka bir ifadeyle, eğer $\Pi_{\Pi_{x_i}}$, P noktasından geçen $i \in \{1,...,n\}$ için x_i-eksenlerine dik olan düzlemleri gösterirse

$$R_i = \ell \cap \Pi_{x_i}$$

şeklinde elde edilen noktalardan en az biri mevcuttur. Bu noktalar

$$R_i = (x_{1(R_i)},...,x_{i-1(R_i)},x_{i(0)},x_{i+1(R_i)},...,x_{n(R_i)})$$

şeklinde ifade edilebilir ve ℓ doğrusu gt-hiperküreye bu noktalarından birinde teğettir. O halde

$$d_{T_g}(P,\ell) = \min_{i\in\{1,...,n\}}\{d_{T_g}(P,R_i)\}.$$

elde edilir. $i \in \{1,...,n\}$ için $u_i \neq 0$ durumunda R_i noktaları mevcuttur ve aşağıdaki eştilikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
d_{T_g}(P,R_i) &= \sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{i\}} \lambda_j \left|x_{j(0)} - x_{j(R_i)}\right| \\
&= \sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{i\}} \lambda_j \left|x_{j(0)} - \left(x_{j(1)} + \frac{u_j(x_{i(0)} - x_{i(1)})}{u_i}\right)\right| \\
&= \sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{i\}} \lambda_j \left|(x_{j(0)} - x_{j(1)}) - \frac{u_j}{u_i}(x_{i(0)} - x_{i(1)})\right|.
\end{aligned}$$

Böylece

$$d_{T_g}(P,\ell) = \min_{i\in\{1,...,n\}}\left\{\sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{i\}} \lambda_j \left|(x_{j(0)} - x_{j(1)}) - \frac{u_j}{u_i}(x_{i(0)} - x_{i(1)})\right|\right\}.$$

formülü elde edilir. Diğer durumlar sadece R_i noktalarının varlığını etkiler, fakat sonucu değiştirmez. $\square$

$n > 3$ için iki vektörün vektörel çarpımı tanımlı olmadığı için n boyutlu genelleştirilmiş taksikab uzayda aykırı doğrular için 3 boyutta izlediğimiz yolu izleyemeyiz. Fakat 3 boyutlu uzayda aykırı iki doğru arasındaki gt-uzaklık için verilen nottaki düşünceleri n boyuta genellemek mümkündür. n boyutlu uzayda denklemleri

$$\begin{aligned}\ell_1 &: \gamma_1(t_1) = \left(x_{1(1)},...,x_{n(1)}\right) + t_1(u_1,...,u_n)\\ \ell_2 &: \gamma_2(t_2) = \left(x_{1(2)},...,x_{n(2)}\right) + t_2(v_1,...,v_n)\end{aligned}$$

şeklinde verilen aykırı iki doğru alaım ve ℓ_2 doğrusunun

$$T : (x_1,...,x_n) \to (x_1 + c_1,...,x_n + c_n).$$

ötelemesi altındaki görüntüsünü ℓ_2' ile gösterelim. Burada T ötelemesi, n koordinat ekseni boyunca öteleme boyu x_i koordinat ekseni için $|c_i|$ olan ötelemelerin birleşimi gibi düşünülebilir. Eğer ℓ_1 ve ℓ_2' doğruları kesişirse aşağıdaki iki değişkenli lineer denklem sisteminin bir tek çözümü vardır:

$$\begin{bmatrix} t_1u_1 - t_2v_1 \\ \vdots \\ t_1u_n - t_2v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1(2)} - x_{1(1)} + c_1 \\ \vdots \\ x_{n(2)} - x_{n(1)} + c_n \end{bmatrix}.$$

Eğer iki c_i değeri 0 a eşitse denklem sisteminin bir tek çözümünün olacağı açıktır. O halde, eksenlere paralel olmayan ℓ_1 ve ℓ_2 doğrularından birini $(n-2)$ eksen boyunca ötelersek diğeri ile kesiştirebiliriz. O halde ℓ_1 and ℓ_2 doğruları arasındaki gt-uzaklık mümkün olan tüm $(n-2)$ eksen seçimiyle elde edilen ağırlıklı gt-uzaklıkların minimumudur. Aşağıda bu düşüncenin sonucu olan teoremi ifade ediyoruz:

3) Aykırı iki doğru arasındaki gt-uzaklığı

Teorem 2.40. *$\mathbb{R}^n$ de sırasıyla $X_1 = (x_{1(1)}, x_{2(1)}, ..., x_{n(1)})$ ve $X_1 = (x_{1(2)}, x_{2(2)}, ..., x_{n(2)})$ noktalarından geçen, doğrultmanları $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ olan ve aykırı durumda olan*

$$\begin{aligned}\beta_1(t) &= (x_{1(1)}, x_{2(1)}, ..., x_{n(1)}) + t(u_1, u_2, ..., u_n)\\ \beta_2(s) &= (x_{1(2)}, x_{2(2)}, ..., x_{n(2)}) + s(v_1, v_2, ..., v_n)\end{aligned}$$

doğruları arasındaki genelleştirilmiş taksikab uzaklık, $a,b \in \{1,...,n\}$ *ve* $a \neq b$ *için* $\delta_{(a,b)} = u_a v_b - u_b v_a$ *olmak üzere*

$$\min_{\substack{i,j\in\{1,...,n\}\\ i\neq j}} \left\{ \sum_{k\in\{1,...,n\}\backslash\{i,j\}} \left| \frac{\left(x_{k(1)}-x_{k(2)}\right)\delta_{(i,j)}+\left(x_{i(1)}-x_{i(2)}\right)\delta_{(j,k)}+(x_{j(1)}-x_{j(2)})\delta_{(k,i)}}{\delta_{(i,j)}/\lambda_k} \right| \right\}$$

dir.

İspat Doğruları sırasıyla ℓ_1 ve ℓ_2 şeklinde isimlendirelim. $i,j \in \{1,...,n\}$ için $c_i = c_j = 0$ olacak şekilde verilen $T : (x_1,...,x_n) \to (x_1+c_1,...,x_n+c_n)$ ötelemesini göz önüne alalım. Bu öteleme x_i ve x_j eksenleri hariç $(n-2)$ koordinat eksenleri boyunca ötelemelerin birleşimidir. O halde

$$\begin{aligned} t_1 u_i - t_2 v_i &= x_{i(2)} - x_{i(1)} \\ t_1 u_j - t_2 v_j &= x_{j(2)} - x_{j(1)}. \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek

$$t_1 = \frac{v_j\left(x_{i(2)} - x_{i(1)}\right) - v_i(x_{j(2)} - x_{j(1)})}{(u_i v_j - u_j v_i)} \text{ ve } t_2 = \frac{u_j(x_{i(2)} - x_{i(1)}) - u_i(x_{j(2)} - x_{j(1)})}{(u_i v_j - u_j v_i)}$$

elde edilir. Böylece $a,b \in \{1,...,n\}$ ve $a \neq b$ için $\delta_{(a,b)} = u_a v_b - u_b v_a$ olmak üzere, $k \in \{1,...,n\}\backslash\{i,j\}$ için

$$\lambda_k |c_k| = \left| \frac{\left(x_{k(1)} - x_{k(2)}\right)\delta_{(i,j)} + \left(x_{i(1)} - x_{i(2)}\right)\delta_{(j,k)} + (x_{j(1)} - x_{j(2)})\delta_{(k,i)}}{\delta_{(i,j)}/\lambda_k} \right|$$

elde edilir. Bu durumda, ℓ_1 ve ℓ_2 aykırı doğruları arasındaki gt-uzaklık

$$d_{T_g}(\ell_1,\ell_2) = \min_{\substack{i,j\in\{1,...,n\}\\ i\neq j}} \left\{ \sum_{k\in\{1,...,n\}\backslash\{i,j\}} \left| \frac{\left(x_{k(1)}-x_{k(2)}\right)\delta_{(i,j)}+\left(x_{i(1)}-x_{i(2)}\right)\delta_{(j,k)}+(x_{j(1)}-x_{j(2)})\delta_{(k,i)}}{\delta_{(i,j)}/\lambda_k} \right| \right\}.$$

şeklinde elde edilir. □

Bu denklemlerin $n = 3$ için 3 boyutlu genelleştirilmiş taksikab uzayda verilen formüllere denk olduğu görülebilir. Ayrıca genelleştirilmiş taksikab geometride elde ettiğimiz tüm formüller $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ durumunda taksikab geometri için de geçerlidir (Bkz. Akça 2004).

3. MATERYAL VE METOT

Bu tezde matematiksel yöntemler ve kanıtlar kullanılarak, Öklid geometrisinde temel nesneler arasındaki bilinen Öklid formüllerinin genelleştirilmiş taksikab geometrisindeki karşılıkları belirlenmiştir. Bununla birlikte genelleştirilmiş taksikab düzlemde Pisagor teoreminin bir parametreye bağlı bir karşılığı verilmiştir. Tez içinde Öklid ve genelleştirilmiş taksikab geometirinin temel kavramları, tanım ve teoremleri materyal ve metot olarak kullanılmıştır. Bu tezin oluşmasındaki en önemli materyaller bu konuda daha önce yapılmış çalışmalardır. Bunların da en önemlileri (Akça ve Kaya 2004), (Çolakoğlu 2018a, 2018b, 2019a, 2019b), (Ekmekçi vd. 2014) ve (Özdemir 2021) kaynaklarıdır. Uygulanan yöntemler ve ulaşılan sonuçlar doğrudan ispat, dolaylı ispat, olmayana ergi gibi matematiksel yöntemlerdir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Tez içinde elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak aşağıdaki gibi sıralanabilir:

A) Düzlemde Uzaklıklar:

Aşadağıdaki formüllerde tüm λ_i ler pozitif reel sayılardır.

1) Düzlemde $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklid ve gt-uzaklıklar

$$\begin{aligned} d_E(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ d_{T_g}(P_1, P_2) &= \lambda_1 |x_1 - x_2| + \lambda_2 |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

dir.

2) Düzlemde bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının $l : ax + by + c = 0$ doğrusuna olan Öklid ve gt-uzaklıkları

$$\begin{aligned} d_E(P, l) &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ d_{T_g}(P, l) &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a/\lambda_1|, |b/\lambda_2|\}} \end{aligned}$$

dir.

3) Düzlemde paralel $l_1 : ax + by + c_1 = 0$ ve $l_2 : ax + by + c_2 = 0$ doğruları arasındaki Öklid ve gt-uzaklıklar

$$\begin{aligned} d_E(l_1, l_2) &= \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ d_{T_g}(l_1, l_2) &= \frac{|c_1 - c_2|}{\max\{|a/\lambda_1|, |b/\lambda_2|\}} \end{aligned}$$

dir.

B) Üç Boyutlu Uzayda Uzaklıklar:

1) Üç boyutlu uzayda $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki Öklid ve gt-uzaklıklar

$$\begin{aligned} d_E(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ d_{T_g}(P_1, P_2) &= \lambda_1 |x_1 - x_2| + \lambda_2 |y_1 - y_2| + \lambda_3 |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

dir.

2) Üç boyutlu uzayda bir $P = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemine olan Öklid ve gt-uzaklıkları

$$\begin{aligned} d_E(P, \Pi) &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ d_{T_g}(P, \Pi) &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\max\{|A/\lambda_1|, |B/\lambda_2|, |C/\lambda_2|\}} \end{aligned}$$

dir.

3) Üç boyutlu uzayda paralel $\Pi_1 : Ax+By+Cz+D_1 = 0$ ve $\Pi_2 : Ax+By+Cz+D_2 = 0$ paralel düzlemleri arasındaki Öklid ve gt-uzaklıklar

$$\begin{aligned} d_E(\Pi_1, \Pi_2) &= \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ d_{T_g}(\Pi_1, \Pi_2) &= \frac{|D_1 - D_2|}{\max\{|A/\lambda_1|, |B/\lambda_2|, |C/\lambda_3|\}} \end{aligned}$$

dir.

4) Üç boyutlu uzayda $P = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ olan l doğrusuna Öklid ve gt-uzaklıkları, $\rho_1 = x_0 - x_1$, $\rho_2 = y_0 - y_1$, $\rho_3 = z_0 - z_1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} d_E(P, l) &= \frac{\sqrt{(u_1\rho_2 - u_2\rho_1)^2 + (u_2\rho_3 - u_3\rho_2)^2 + (u_3\rho_1 - u_1\rho_3)^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \\ d_{T_g}(P, l) &= \min_{\substack{i,j,k \in \{1,2,3\} \\ i \neq j \neq k \neq i}} \left\{ \lambda_i \left| \rho_i - \frac{u_i}{u_k}\rho_k \right| + \lambda_j \left| \rho_j - \frac{u_j}{u_k}\rho_k \right| \right\} \end{aligned}$$

dir.

5) Üç boyutlu uzayda $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktalarından geçen, doğrultmanları $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ olan ve aykırı durumda olan

$$\begin{aligned} l_1 &: \beta_1(t) = (x_1, y_1, z_1) + t(u_1, u_2, u_3) \\ l_2 &: \beta_2(s) = (x_2, y_2, z_2) + s(v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

doğruları arasındaki Öklid ve gt-uzaklıklar, $\delta_{(a,b)} = u_a v_b - u_b v_a$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_E(l_1, l_2) &= \frac{\left|(x_1 - x_2)\delta_{(2,3)} + (y_1 - y_2)\delta_{(3,1)} + (z_1 - z_2)\delta_{(1,2)}\right|}{\sqrt{\delta^2_{(2,3)} + \delta^2_{(3,1)} + \delta^2_{(1,2)}}} \\ d_{T_g}(l_1, l_2) &= \frac{\left|(x_1 - x_2)\delta_{(2,3)} + (y_1 - y_2)\delta_{(3,1)} + (z_1 - z_2)\delta_{(1,2)}\right|}{\max\left\{\left|\delta_{(2,3)}/\lambda_1\right|, \left|\delta_{(3,1)}/\lambda_2\right|, \left|\delta_{(1,2)}/\lambda_3\right|\right\}} \end{aligned}$$

dir.

C) n Boyutlu Uzayda Uzaklıklar:

1) n-boyutlu uzayda $P_1 = (x_{1(1)}, x_{2(1)}, ..., x_{n(1)})$ ve $P_2 = (x_{1(2)}, x_{2(2)}, ..., x_{n(2)})$ noktaları arasındaki Öklid ve gt-uzaklıklar

$$\begin{aligned} d_E(P_1, P_2) &= \sqrt{\left(x_{1(1)} - x_{1(2)}\right)^2 + \cdots + \left(x_{n(1)} - x_{n(2)}\right)^2} \\ d_{T_g}(P_1, P_2) &= \lambda_1 \left|x_{1(1)} - x_{1(2)}\right| + \cdots + \lambda_n \left|x_{n(1)} - x_{n(2)}\right| \end{aligned}$$

dir.

2) n-boyutlu uzayda bir $P = (x_{1(0)}, x_{2(0)}, ..., x_{n(0)})$ noktasının $\Pi : A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n + B = 0$ hiperdüzlemine olan Öklid ve gt-uzaklıkları

$$\begin{aligned} d_E(P, \Pi) &= \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} A_i x_{i(0)} + B\right|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + ... + A_n^2}} \\ d_{T_g}(P, \Pi) &= \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} A_i x_{i(0)} + B\right|}{\max\limits_{i\in\{1,...,n\}} \{|A_i/\lambda_i|\}} \end{aligned}$$

dir.

3) n-boyutlu uzayda bir $P = (x_{1(0)}, ..., x_{n(0)})$ noktasının, $P_1 = \left(x_{1(1)}, ..., x_{n(1)}\right)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$ olan l doğrusuna olan Öklid ve gt-uzaklıkları

$$\begin{aligned} d_E(P,l) &= \frac{\sqrt{\|PP_1\|^2 \|\boldsymbol{u}\|^2 - \langle PP_1, \boldsymbol{u}\rangle^2}}{\|\boldsymbol{u}\|} \\ d_{T_g}(P,l) &= \min_{i\in\{1,...,n\}} \left\{ \sum_{j\in\{1,...,n\}\setminus\{i\}} \lambda_j \left| (x_{j(0)} - x_{j(1)}) - \frac{u_j}{u_i}(x_{i(0)} - x_{i(1)}) \right| \right\} \end{aligned}$$

dir.

4) n-boyutlu uzayda $X_1 = (x_{1(1)}, x_{2(1)}, ..., x_{n(1)})$ ve $X_1 = (x_{1(2)}, x_{2(2)}, ..., x_{n(2)})$ noktalarından geçen, doğrultmanları $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ olan ve aykırı durumda olan

$$\begin{aligned} l_1 &: \beta_1(t) = (x_{1(1)}, x_{2(1)}, ..., x_{n(1)}) + t(u_1, u_2, ..., u_n) \\ l_2 &: \beta_2(s) = (x_{1(2)}, x_{2(2)}, ..., x_{n(2)}) + s(v_1, v_2, ..., v_n) \end{aligned}$$

doğruları arasındaki Öklid ve gt-uzaklıklar; $\boldsymbol{x}_1$ ve $\boldsymbol{x}_2$, X_1 ve X_2 ye karşılık gelen yer vektörleri ve

$A = \|\boldsymbol{u}\|^2$, $B = 2(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_1\rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_2\rangle)$, $C = 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$,

$D = 2(\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_2\rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_1\rangle)$, $E = \|\boldsymbol{v}\|^2$ ve $F = \|\boldsymbol{x}_1\|^2 - 2\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\rangle + \|\boldsymbol{x}_2\|^2$

$a, b \in \{1, ..., n\}$ ve $a \neq b$ için $\delta_{(a,b)} = u_a v_b - u_b v_a$

olmak üzere

$$\begin{aligned} d_E(l_1,l_2) &= \sqrt{\frac{BDE + B^2F + D^2C + A(E^2 - 4CF)}{B^2 - 4AC}} \\ d_{T_g}(l_1,l_2) &= \min_{\substack{i,j\in\{1,...,n\} \\ i\neq j}} \left\{ \sum_{k\in\{1,...,n\}\setminus\{i,j\}} \left| \frac{\left(x_{k(1)}-x_{k(2)}\right)\delta_{(i,j)}+\left(x_{i(1)}-x_{i(2)}\right)\delta_{(j,k)}+(x_{j(1)}-x_{j(2)})\delta_{(k,i)}}{\delta_{(i,j)}/\lambda_k} \right| \right\} \end{aligned}$$

dir.

Bu sonuçlara ek olarak, genelleştirilmiş taksikab düzlemde Pisagor teoreminin bir karşılığı aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

Gt-Pisagor Teoremi: A açısı dik olan ve saat yönünün tersine harflendirilmiş bir ABC dik üçgeninde $d_{T_g}(B,C) = a$, $d_{T_g}(A,C) = b$, $d_{T_g}(A,B) = c$ ve AB kenarının eğimi $m \in \mathbb{R}$ olsun. Buna göre, $\mu_1(m) = \lambda_1 + \lambda_2 |m|$ ve $\mu_2(m) = \lambda_1 |m| + \lambda_2$ olmak üzere

$$\mu_1(m)\mu_2(m)a = \lambda_1 |m\mu_1(m)b + \mu_2(m)c| + \lambda_2 |m\mu_2(m)c - \mu_2(m)c|$$

Eğer AB kenarı y-eksenine paralel ise

$$a = b + c$$

dir.

Ayrıca elde edilen yukarıdaki tüm formüllerde $\lambda_i = 1$ alınarak, taksikab uzaklık formülleri de elde edilebilir.

5. SONUÇLAR

Bu tezde Öklid geometrisinde iyi bilinen uzaklık formüllerinin, daha açık olarak düzlemde bir nokta ve bir doğru, iki doğru; uzayda bir nokta ve bir doğru, bir nokta ve bir düzlem, bir doğru ve bir düzlem, iki düzlem, paralel iki doğru ve aykırı iki doğru; n boyutlu uzayda bir nokta ve bir hiperdüzlem, bir nokta ve bir doğru, aykırı iki doğru arasındaki Öklid uzaklıklarının genelleştirilmiş taksikab geometrisindeki karşılıkları verilmiş, buna ek olarak Öklid geometrisinde iyi bilinen Pisagor teoreminin genelleştirilmiş taksikab düzlem geometrisindeki bir karşılığı ek bir parametreye bağlı olarak belirlenmiştir.

Son yıllarda metrikler ve özellikleri matematiğin dışında, veri madenciliği, makine öğrenmesi, şekil tanıma vb. gibi bir çok uygulama alanlarında önemli rol oynamaktadır. Özellikle l_p-metriği ve onun özel halleri olan taksikab, Öklid ve maksimum metrikleri bu uygulamalarda sıklıkla kullanılmaktadır. Bu tezde, (Çolakoğlu 2019a) çalışması temel kaynak alınarak, genelleştirilmiş veya ağırlıklı taksi metriğinin -bu ağırlıkların görece önemli farklı kriter veya boyut yansıtabileceği göz önünde bulundurarak- bazı uzaklık özellikleri belirlenmiştir. Bu özellikler iki, üç ve n boyutlu uzaylarda iki temel nesne arasındaki genelleştirilmiş taksikab uzaklığının belirlenmesi şeklinde değerlendirilebileceği gibi bu metrikler yardımıyla kurulan, bir aksiyomatik yapıya sahip ve Öklidyen olmayan geometriler sınıfında yer alan bir metrik geometrinin uzaklık özellikleri şeklinde de değerlendirilebilecek şekilde göz önüne alınmıştır. Ek olarak, burada elde edilen tüm formüller genelleştirilmiş taksikab geometrinin bir özel durumu olan taksikab geometri için de geçerlidir.

Bu çalışmadan yararlanılarak genelleştirilmiş taksikab düzlemde veya üç boyutlu uzayında alan kavramı için yeni formüllerin geliştirilebileceği, düzgün çokgenlerin çalışılabileceği düşünülmektedir.

6. KAYNAKLAR

Akça Z., Kaya, R. 2004. On the distance formulae in three dimensional taxicab space. *Hadronic Journal*, 27: 521-532.

Birkhoff, G.D. 1932. A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *The Annals of Mathematics*, 33 (2): 329-345.

Hilbert, D. 1902. (Çeviri: E. J. Townsend) The Foundations of Geometry. Open Court, La Salle, Illinois.

Çolakoğlu, H.B. 2019a. On the distance formulae in the generalized taxicab geometry. *Turk. J. Math.*, 43: 1578-1594.

Çolakoğlu, H.B. 2019b On generalized taxicab metric in three dimensional space. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 68: 1359-1369.

Çolakoğlu, H.B. 2018a. On the Pythagorean theorem in the generalized taxicab plane. 16 th Inter. Geom. Symp., ss. 118, 4-7 July, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa.

Çolakoğlu, H.B. 2018b. The generalized taxicab group. *Int. Elect. J. Geom.*, 11: 83-89.

Çolakoğlu, H.B. 2009. Taksi, maksimum, Çin dama ve alfa düzlemlerinin bazı özellikleri ve genelleştirilmesi. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.

Ekmekçi, S., Bayar, A., Altıntaş, A.K. 2015. On the group of isometries of the generalized taxicab plane. *Inter. J. of Contemp. Math. Sciences*, 10: 159-166.

Krause, E.F. 1987. Taxicab Geometry. Dover Publications, New York.

Menger, K. 1952. You Will Like Geometry. Guildbook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science and Industry, Chicago, IL.

Milmann, R.S., Parker, G.D. 1991. Geometry; A Metric Approach with Models. Springer.

Özdemir, M. 2021. Analitik Geometri. Altın Nokta Yayınevi, İzmir.

Wallen, L.J. 1995. Kepler, the taxicab metric, and beyond: An isoperimetric primer. *The College Mathematics Journal*, 26: 178-190.

ÖZGEÇMİŞ

Kader ULUĞ

kaderulug7@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2018-2022	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Antalya
Lisans 2014-2018	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya