T975

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

+

# BESSEL POTANSİYELLERİ'NİN DALGACIK DÖNÜŞÜMLERİ (WAVELET TRANSFORMS) KULLANILARAK İNCELENMESİ



Melih ERYİĞİT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2004

# BESSEL POTANSİYELLERİ'NİN DALGACIK DÖNÜŞÜMLERİ (WAVELET TRANSFORMS) KULLANILARAK İNCELENMESİ

Melih ERYİĞİT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi tarafından desteklenmiştir (Proje kodu 2001.01.0121.017)

2004

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# BESSEL POTANSİYELLERİ'NİN DALGACIK DÖNÜŞÜMLERİ (WAVELET TRANSFORMS) KULLANILARAK İNCELENMESİ

Melih ERYİĞİT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 16 /12 / 2004 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından 90 not takdir edilerek oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. İlham ALİYEV
(Danışman)

Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Abdullah A. ERGİN

Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN

Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV

# ÖZET

## BESSEL POTANSİYELLERİ'NİN DALGACIK DÖNÜŞÜMLERİ (WAVELET TRANSFORMS) KULLANILARAK İNCELENMESİ

Melih ERYİĞİT

**Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı**
**Danışman: Doç. Dr. İlham ALİYEV**
**Mayıs-2004, 44 Sayfa**

Analiz ve onun uygulamalarının önemli teknik araçlarından sayılan klasik Bessel potansiyelleri için iyi bilinen problemlerden biri bu potansiyellerin terslerinin belirlenmesidir. Bu probleme bir çok yaklaşım bilinmektedir. Bu çalışmada, yukarıda bahsettiğimiz probleme yeni bir yaklaşım geliştirilmiş ve " Ağırlıklı Dalgacık Dönüşümleri ( Weighted WaveletTransforms)" olarak adlandırdığımız dönüşümler yardımıyla Bessel potansiyellerinin terslerinin açık ifadesi bulunmuştur.



**ANAHTAR KELİMELER:** Bessel potansiyelleri, kesirsel integral ve türev, ağırlıklı dalgacık dönüşümleri, Calderon türetme formülü, Gauss-Weierstrass çekirdeği


**JÜRİ:** Doç. Dr. İlham ALİYEV
Prof. Dr. Veli KURT
Prof. Dr. Abdullah A. ERGİN
Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN
Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV

ABSTRACT

# THE STUDY ON BESSEL POTENTIALS WITH THE AID OF WEIGHTED WAVELET TRANSFORM

Melih ERYİĞİT

Ph.D. Thesis in Mathematics
Adviser: Assoc.Prof.Dr. Ilham ALIYEV
April-2004, 44 pages

The classical Bessel potentials are known as an important technical tool in Analysis and its applications An familar problem concerning the Bessel potentials is to obtain explicit inversion for them. A number of approaches to this problem are known . In this work we develop a new approach to the aforementioned problem and invert Bessel potentials by means of the so–called *weighted wavelet transforms*.

**KEY WORDS:** Bessel potentials, fractional integral and derivative, weighted wavelet transform, Calderon-type reproducing formula, Gauss-Weierstrass kernel

**COMMİTTEE:** Assoc Prof Dr. İlham ALİYEV
Prof. Dr. Veli KURT
Prof Dr. Abdullah A. ERGİN
Prof Dr. Serpil PEHLİVAN
Prof Dr Daniyal M. İSRAFİLOV

# ÖNSÖZ

Bu çalışmada, analizde önemli bir diferansiyel operatör olarak bilinen Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu Bessel potansiyelleri'nin terslerini "Ağırlıklı Dalgacık Dönüşümleri ( Weighted WaveletTransforms)" olarak adlandırdığımız dönüşümler yardımıyla bulduk.

Tez çalışmamız aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir:

Bölüm 2'de, gerekli notasyonlar ve ön bilgiler yer almaktadır. Çalışmamızın esas konularından biri olan Bessel potansiyelleri 3. bölümde tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Teze ait özgün sonuçlar 4. ve 5. bölümlerde tanıtılmıştır. Bessel potansiyelleri ile ilişkili ağırlıklı dalgacık (wavelet) dönüşümleri 4. bölümün esas konusudur. Bu bölümde, tanımladığımız wavelet dönüşümüne uygun olan ters belirleme formülü (Calderón tipli "reproducing" formülü) ispatlanmıştır. $L^2$ ve $L^p$ versiyonları ayrı-ayrı incelenmiştir. (Sadece, $L^p$ normunda değil, hemen hemen her yerde yakınsama problemine de bakılmıştır). Bölüm 4'teki sonuçlar kullanılarak, Bölüm 5'te, Tezin esas Teoremi (Bessel potansiyellerinin terslerinin Wavelet dönüşüm vasıtasıyla belirlenmesi) ifade edilerek kanıtlanmış ve bilinen klasik ters belirleme formülü bizim teoremden sonuç olarak çıkarılmıştır. Tezin esas sonuçları Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü seminerlerinde ve Mersin Üniversitesi - XV. Ulusal Matematik Sempozyumunda sunulmuştur.

Bu tezin asıl problemini ortaya koyan ve karşılaştığım problemlerde sabır ve işbirliği ile en iyi çözümü bulmamı sağlayan danışmanım, Sayın Doç.Dr. İlham ALİYEV'e (Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi) teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

# 1. GİRİŞ

Fourier dönüşümü terimlerinde

$$(\mathcal{J}^{\alpha}f)^{\wedge}(x) = (1+|x|^2)^{-\alpha/2}(f)^{\wedge}(x),\ (x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha > 0)$$

olarak tanımlanan ve çekirdeğinin açık ifadesi,

$$G_{\alpha}(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\alpha/2}}\frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^{\infty} e^{-\pi|x|^2/\delta}e^{-\delta/4\pi}\delta^{(-n+\alpha)/2}\frac{d\delta}{\delta}$$

olmak üzere,

$$(\mathcal{J}^{\alpha}f)(x) = G_{\alpha} * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_{\alpha}(y)f(x-y)dy,\ \alpha > 0$$

biçiminde tanımlanan integral operatörler ailesi Bessel potansiyelleri olarak adlandırılır [Stein, 1970] Bu potansiyeller, $I$–birim operatör ve $\triangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$-Laplace diferansiyel operatörü olmak üzere, $(I - \triangle)$ operatörünün "**kesirsel kuvvetleri**" olarak yorumlanırlar Klasik Bessel potansiyelleri Harmonik Analiz ve uygulamalarında güçlü bir araç olmuştur ve Aronszajin v d (1961,1963), Adams v d. (1967), Stein (1970), Samko v.d. (1993) ve diğer birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Bessel potansiyelleri ile ilgili bir problem de onların tersini belirleyen formüllerin açık ifadelerinin elde edilmesidir. Bu konu üzerinde birçok ilginç sonuç bulunmasına rağmen (Nogin 1982, Rubin 1986,1987), bu problem hala değişik yaklaşımlara açıktır Biz bu çalışmada bahsi geçen probleme değişik bir yaklaşım geliştirmeyi ve uygun Dalgacık Dönüşümleri (Wavelet Transforms) vasıtasıyla Bessel potansiyellerinin tersinin açık ifadelerini elde etmeyi amaçlıyoruz Benzer problem Riesz potansiyalleri için Rubin (1996), Parabolik potansiyeller için Aliyev ve Rubin (1999) tarafından incelenmiş ve tezin konusu olan problem orada açık problem olarak konulmuştur.

Bilindiği gibi, klasik Harmonik Analiz'in esas inceleme konularından biri, $\tau^h\varphi(x) = \varphi(x-h)$, $(x, h \in \mathbb{R}^n)$ şeklinde etki gösteren kayma operatörü ile komutatif operatörlerdir. Hörmander Teoremine göre bu tür operatörlerin girişim tipli operatörler olduğu iyi bilinmektedir (Stein and Weiss (1971)) Klasik *girişim* (convolution) operatörü, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$–sabit tutulmuş " *çekirdek* " olmak üzere,

$$(Gf)(x) = (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)dy,\quad (dy = dy_1 dy_2 \cdots dy_n)$$

olarak tanımlanıyor. Bu operatör $L^p \to L^p$, $(1 \le p \le \infty)$ sınırlı olup çekirdeğin iyi huylarını (diferansiyellenebilirlik gibi) korumaktadır. Girişim tipli operatörlerde çekirdek $L^1(\mathbb{R}^n)$' de olmak zorunda değildir. Genel halde girişim, genelleşmiş fonksiyonlar (tempered distribution) anlamında anlaşılıyor.

$\mathbb{R}^n$'de kaymanın yanısıra en önemli dönüşümlerden biri de $a \in \mathbb{R}^1$ katsayılı "iteleme" (dilation) yani, $x \in \mathbb{R}^n$ noktasına $ax \in \mathbb{R}^n$ noktasını karşı koyan dönüşümdür. Bunu göz önüne alarak, $g$ çekirdeği yerine

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} g(\frac{x}{\varepsilon}), \quad (\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n) \tag{1.1}$$

çekirdekler ailesi alalım ve

$$(G_\varepsilon f)(x) = (g_\varepsilon * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(y) f(x-y)dy, \quad (\varepsilon > 0)$$

operatörler ailesine bakalım. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)dy = c_g$ dersek, her $\varepsilon > 0$ için $\int\limits_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(y)dy = c_g$ olacağını kontrol etmek zor değildir. $(G_\varepsilon f)$ ailesi için iyi bilinen sonuçlardan biri şöyledir:

$$\overset{L^p}{\lim_{\varepsilon \to 0}} G_\varepsilon f \equiv \overset{L^p}{\lim_{\varepsilon \to 0}} g_\varepsilon * f = c_g f, \quad (1 \le p \le \infty). \tag{1.2}$$

Burada $\overset{L^p}{\lim}$, " $L^p$–normunda limit " olarak anlaşılıyor ve $p = \infty$ için $L^\infty$ olarak $\mathbb{R}^n$' de sürekli ve $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı düşünülüyor (Bu uzay, $C_0(\mathbb{R}^n)$ notasyonu ile gösteriliyor ve $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ için $||f|| = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|$ alınıyor). (1.2)'de $c_g \neq 0$ olduğu durumda $\tilde{g}_\varepsilon(x) = \frac{1}{c_g} g_\varepsilon(x)$ dersek, $\overset{L^p}{\lim_{\varepsilon \to 0}} \tilde{g}_\varepsilon * f = f$ olur ve bu prosedür *birimin (birim operatörün) approksimasyonu* olarak adlandırılır ($\tilde{A}_\varepsilon f = \tilde{g}_\varepsilon * f$ şeklinde tanımlanan operatörler ailesine de yaklaşık birim (birim operatör) denir). (1.2) bağıntısının değişik toplanabilirlik metodlarında (örn., Abel, Gauss-Weierstrass v.s.) ve approksimasyon problemlerinde (örn., $L^p$ nin "iyi huylu", her yerde yoğun alt kümelerinin (Schwartz uzayı gibi) bulunması meselelerinde) nasıl kullanıldığı çok eskilerden iyi bilinmektedir (bak: Stein and Weiss 1971).

Şimdi (1.2)'de $c_g = 0$ olursa, her $f \in L^p$ için

$$\overset{L^p}{\lim_{\varepsilon \to 0}} (g_\varepsilon * f) = 0 \tag{3'}$$

olur. İlk bakışta " bir işe yaramayan " $c_g = 0$ durumu nisbeten yakın zaman diliminde (yaklaşık olarak, 1970' lerden itibaren) matematikçilerin ve uygulamacıların ilgi alanı olmuş ve " sürekli (integral) wavelet dönüşümleri " (continuous wavelet transforms) adı altında bilinen dönüşümlerin ve onların geniş uygulamasının ortaya çıkmasına neden olmuştur. Klasik "integral wavelet dönüşümü" şöyle tanımlanıyor: $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve $\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)dx = 0$ olsun ($u^\wedge$, $u$' nun Fourier dönüşümü ise, bu, $u^\wedge(0) = 0$ olmasıyla denktir). Böyle $u$ fonksiyonuna *wavelet (dalgacık)* fonksiyonu denir. Aşağıda tanımlanan,

$$f(x) \to (f * u_\varepsilon)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{1}{\varepsilon^n}u(\frac{x-y}{\varepsilon})dy$$

dönüşümüne de **integral wavelet dönüşümü** denir. Wavelet dönüşümünü önemli yapan etkenlerden biri " **Calderón Reproducing formulü** " adı ile bilinen formüldür. Bu formül aslında wavelet dönüşümü bilinen fonksiyonun kendisini bulmakla ilgilidir. Söz konusu formülün değişik versiyonlarının bazılarını verelim:

**1)** $\int\limits_0^\infty u^\wedge(t)\frac{dt}{t} = 1$ eşitliği sağlanacak şekilde $u \in L^1(\mathbb{R}^1)$ alalım. Bu takdirde her $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ için

$$f = \int\limits_0^\infty f * u_t \frac{dt}{t} = \overset{L^2}{\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \rho\to\infty}}} \int\limits_\varepsilon^\rho (f * u_t)(x)\frac{dt}{t}$$

olur ($\int\limits_0^\infty u^\wedge(t)\frac{dt}{t}$ nin yakınsak olması için gerekli koşul, $u^\wedge(0) = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^\infty u(x)dx = 0$ koşuludur)

**2)** $u, v \in L^1(\mathbb{R}^1)$ ve $\int\limits_0^\infty u^\wedge(t)v^\wedge(t)\frac{dt}{t} = 1$ ise, $f(x) = \int\limits_0^\infty (f * u_t * v_t)(x)\frac{dt}{t}$ eşitliği her $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ için sağlanıyor. Görüldüğü gibi, $u$ ve $v$' nin ikisinin birden "sönen dalgacık" olmak zorunluluğu yoktur. Örneğin, $u$ ve $v$' den biri $\int\limits_0^\infty u^\wedge(t)v^\wedge(t)\frac{dt}{t} = 1$ integralinin yakınsamasını sağlarsa diğerinin "önemli bir rolü olmuyor".

**3)** $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ için de benzer sonuçlar bilinmektedir. Bu takdirde, wavelet fonksiyonunun Fourier dönüşümü üzerine değil, kendisi üzerine koşullar konuluyor

$\mathbb{R}^1$ yerine $\mathbb{R}^n$ alındığında yine uygun Calderón Reproducing formülleri mevcuttur. Bu durumda wavelet fonksiyonu $u(x)$'in radial olduğu varsayılır (yani, $u(x) =$

$\varphi(r)\Big|_{r=|x|}$, $|x| = (x_1^2 + \cdots x_n^2)^{1/2}$). $\mathbb{R}^1$ yerine $\mathbb{R}^n$ alındığında Calderón Reproducing formülünün bir versiyonu şöyledir: $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ olsun ve $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$-radial olsun. Ek olarak,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)dx = 0 \quad \text{ve} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\, u(x)\log|x|\,|dx < \infty$$

sağlansın. Bu takdirde $c_u = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\log\frac{1}{|x|}\,dx$ olmak üzere, $\underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ \rho\to\infty}}{\overset{L^p}{\lim}} \int_{\varepsilon}^{\rho} f * u_t\frac{dt}{t} = c_u f$ sağlanır (Rubin 1998).

4) Nispeten yakın zamanlarda (Rubin 1996) "wavelet fonksiyonları " yerine uygun wavelet ölçümleri konularak, Calderón reproducing formülleri ispatlanmıştır. Bu konuya da kısaca değinelim. $\mu$, sonlu Borel ölçümü olsun. Eğer $\int_{\mathbb{R}^1} d\mu = 0$ ise, $\mu$'ye **dalgacık ölçümü (wavelet measure)** denir. Özel halde, $d\mu = u(x)dx$, $u \in L^1(\mathbb{R}^1)$ ve $\int_{\mathbb{R}^1} u(x)dx = 0$ olursa, $\mu$ bir wavelet ölçümdür. $\mu$ ölçümünün doğurduğu wavelet dönüşümü, doğal olarak şöyle tanımlanır:

$$(f * \mu_t)(x) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - ty)d\mu(y), \quad t > 0$$

Calderón Reproducing formülü ise (uygun koşullar altında) şöyle yazılır:

$$f(x) = \int_0^{\infty} (f * \mu_t)(x)\frac{dt}{t}, \quad x \in \mathbb{R}^1$$

(Yukarıdaki özge integralin $L^p$' de veya h.h.h. yakınsama koşulları bilinmektedir). Benzer çalışmalar, $\mathbb{R}^1$ yerine $\mathbb{R}^n$ alındığında da yapılmıştır (Rubin 1996)

Calderón Reproducing formülüne " uygulamacılar " ve " teorikçiler " tarafından gösterilen ilginin esas nedeni, "kötü fonksiyonu" ($f$'i) "iyi dalgacıkların" ($f*\mu_t$ dalgacıklarının) "toplamı" biçiminde ifade etmektir. 90'lı yılların ortalarından itibaren Analizin ve onun uygulamalarının birçok önemli operatörlerinin (Radon dönüşümü, Riesz potansiyelleri, Kesirsel integraller, Singular intergraller ve onların küresel versiyonları v.s.) wavelet dönüşümü ile ifadesi bulundu. Böylece, bu operatörleri, wavelet dönüşümleri kullanarak inceleme olanağı ortaya çıktı. Örnek olarak, Fourier dönüşümleri terimlerinde

$$[I_\alpha\varphi)]^\wedge(x) = |x|^{-\alpha}\hat{\varphi}(x), \quad 0 < Re\alpha < n \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlanan klasik Riesz potansiyellerinin tersini (Riesz kesirsel türevini) bulma probleminde wavelet dönüşümünün nasıl uygulandığını ayrıntılara girmeden gösterelim $\mu, \mathbb{R}^n$ de radial ve sonlu Borel ölçümü olsun[1]

$$(f * \mu_t)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x - ty)d\mu(y), \quad t > 0 \tag{1.4}$$

$f$' nin $\mu$-wavelet dönüşümü olmak üzere, aşağıdaki formal integrale bakalım:

$$\int\limits_0^\infty (f * \mu_t)(x)\frac{dt}{t^{1+\alpha}} \tag{1.5}$$

Bu integrale Fourier dönüşümü (formal olarak)uygularsak,

$$\Big[\int\limits_0^\infty (f * \mu_t)(x)\frac{dt}{t^{1+\alpha}}\Big]^\wedge(\xi) = f^\wedge(\xi)\int\limits_0^\infty \mu^\wedge(t\xi)\frac{dt}{t^{1+\alpha}} = d_\mu(\alpha)|\xi|^\alpha f^\wedge(\xi)$$

olur Burada $m(r) = \mu^\wedge(r)$ olmak üzere, $d_\mu(\alpha)$ sayısı

$$d_\mu(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{m(r)}{r^{1+\alpha}}dr < \infty$$

olarak tanımlanmaktadır Buradan görülüyor ki, $f$ yerine $I^\alpha\varphi$ konulursa, $(I^\alpha\varphi)^\wedge(\xi) = |\xi|^{-\alpha}\hat{\varphi}(\xi)$ olacağından,

$$\Big[\int\limits_0^\infty (I^\alpha\varphi * \mu_t)(x)\frac{dt}{t^{1+\alpha}}\Big]^\wedge(\xi) = d_\mu(\alpha)|\xi|^{-\alpha}|\xi|^\alpha\hat{\varphi}(\xi) = d_\mu(\alpha)\hat{\varphi}(\xi)$$

ya da $d_\mu(\alpha) \neq 0$ olduğunda,

$$\varphi(x) = \frac{1}{d_\mu(\alpha)}\int\limits_0^\infty (I^\alpha\varphi * \mu_t)(x)\frac{dt}{t^{1+\alpha}} \tag{1.6}$$

elde edilir Formal olarak, $\alpha = 0$ konulursa (1.6) formülü Calderón Reproducing formülüne dönüşür Bu basit gözleme dayanarak, Rubin (1996), Riesz potansiyellerinin, wavelet dönüşümleri terimlerinde tersini (Riesz kesirsel türevini) belirleme

[1] *$\mu$' nun radial olması demek, her ölçülebilir finit $\varphi$ fonksiyonu ve $\mathbb{R}^n$ ' nin her $\sigma$ dönmesi (rotation) için*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\sigma(x))d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)d\mu(x)$$

*eşitliğini sağlaması demektir*

formüllerini bulmuştur. Ortaya çıkan has olmayan integrallerin $L^{p}$' de ve hemen hemen her yerde (h.h.h.) yakınsaması koşulları da, harmonik analizin ince teknikleri kullanılarak bulunmuştur. Ayrıca, $p = 2$ durumunda Plancherel–Parseval eşitliği ($||f^{\wedge}||_{L^2} = c||f||_{L^2}$) kullanılabildiğinden, istenen sonuca ulaşmak nispeten kolay olmaktadır. Buna karşın, genel $L^p$, $p \neq 2$ durumu ve özellikle uygun has olmayan integrallerin h.h.h. yakınsaması problemi çok daha ağır teknik araçların kullanılmasını gerektiriyor (Rubin 1996).

Yukarıda da belirttiğimiz gibi, Harmonik Analizin önemli teknik araçlarından biri olan klasik Bessel potansiyellerinin uygun wavelet dönüşümleri kullanılarak ifade edilmesi ve bu dönüşümler yardımıyla, söz konusu potansiyellerin terslerinin belirlenmesi meselesi açık bir problemdir. Çalışmamızın ana hedefi bu problemi çözmektir.

# 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tüm çalışmamız boyunca kullanılacak bazı bilgi ve notasyonlar toparlanmıştır.

## 2.1. Notasyonlar

Bu çalışma boyunca, aksi belirtilmedikçe aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır:

$\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sırasıyla; tamsayılar, pozitif tamsayılar, reel sayılar ve karmaşık sayılar kümesini gösterecektir.

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \cdots, n\},$

$\mathbb{Z}_+^n = \{\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) : \gamma_j \geq 0, \quad \gamma_j \in \mathbb{Z}, , \quad j = 1, \cdots, n\}$

$x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ olmak üzere,

$x.y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n, \quad |x| = (x_1^2 + \cdots x_n^2)^{1/2}, \quad \partial_i = \partial/\partial x_i, \quad \partial^\gamma = \partial_1^{\gamma_1} \cdots \partial_n^{\gamma_n},$
$x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}, \quad |\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n.$

$|\Omega| = m(\Omega), \Omega$ kümesinin $n$–boyutlu Lebesgue ölçümü,

$L^p(\Omega) = \{f : \|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx)^{1/p} < \infty\}, \quad (1 \leq p \leq \infty),$

$L^\infty(\Omega) = \{f : \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess} \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty\},$

$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \int\limits_K |f(x)|\, dx < \infty;$ sınırlı ve ölçülebilir her $K \subset \mathbb{R}^n$ için$\}$,

$h \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, verilen bir $f$ fonksiyonu için **kayma** $\tau_h f(x) = f(x+h)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ olarak tanımlanır.

$C^k(A),$: $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde k. mertebeye kadar kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar ailesini ve $C^\infty(A) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C^k(A)$ ailesini gösterecektir.

## 2.2. Ölçüm Teorisinden Bazı Bilgiler

$X$, boş olmayan bir küme olsun. Eğer $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ kümeler ailesi, sonlu birleşim ve tümleyene göre kapalı bir aile ise, o zaman $\mathcal{A}$ ailesine $X$ üzerinde bir *cebir* adı verilir; yani, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$ ise, o zaman $\bigcup_1^n E_j \in \mathcal{A}$; ve eğer $E \in \mathcal{A}$ ise, o zaman $E^t \in \mathcal{A}$ olur. $\sigma$**–cebir** sayılabilir birleşime göre kapalı bir cebirdir.

**Not:** Bir $X$ kümesi üzerindeki $\sigma$–cebirler ailesinin kesişimi yine $X$ üzerinde bir $\sigma$–cebirdir. Buna göre, $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}(X)$ in herhangi bir alt kümesi ise, o zaman $\mathcal{E}$ kümesini kapsayan bir ve yalnız bir tane $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ $\sigma$– cebiri vardır. Buradaki $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ ailesi $\mathcal{E}$ tarafından **üretilen** $\sigma$–cebir olarak adlandırılır.

Eğer $X$ bir metrik uzay veya daha genel olarak bir topolojik uzay ise, $X$ içindeki açık kümeler ailesi tarafından üretilen $\sigma$–cebir, **Borel** $\sigma$**–cebiri** olarak adlandırılır ve bu aile $\mathcal{B}_X$ ile gösterilir. Bu yeni ailenin elemanları **Borel kümeleri** olarak adlandırılır.

Boş olmayan bir $X$ kümesi üzerinde $\mathcal{M}$ $\sigma$–cebiri verilsin. $(X, \mathcal{M})$ üzerinde bir **ölçüm** aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur ($\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$):

**(i)** $\mu(\emptyset) = 0$

**(ii)** Eğer $\{E_j\}_1^\infty$ $\mathcal{M}$ içinde ayrık kümelerin bir dizisi ise $\mu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \mu(E_j)$

Eğer $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ölçüm uzayı için $\mu(X) < \infty$ sağlanıyorsa, $\mu$ **sonlu ölçüm** olarak adlandırılır. Diğer yandan $E_j \in \mathcal{M}$ olmak üzere, $X = \bigcup_1^\infty E_j$; $\forall j$ $\mu(E_j) < \infty$ olacak biçimde $E_j$ kümeleri bulunabiliyorsa, $\mu$ ölçümü $\sigma$**–sonlu** olarak adlandırılır

Eğer $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ölçüm uzayı ise, $\mu(E) = 0$ olan $E \in \mathcal{M}$ kümesi **ihmal edilebilir** küme olarak adlandırılır. Eğer $x \in X$ noktaları için verilen bir önerme, ihmal edilebilir bir kümeye ait $x$' ler hariç doğru ise, o zaman bu önerme hemen hemen her yerde (kısaltması: h.h.h.) doğru deriz

Eğer $\mu(E) = 0$ ve $F \subset E$ ise, o zaman $F \in \mathcal{M}$ sağlandığı takdirde monotonluk özelliğinden $\mu(F) = 0$ olur. Fakat genelde $F \in \mathcal{M}$ olması gerekmez. Eğer bir ölçümün tanım kümesi, ihmal edilebilir kümelerin tüm alt kümelerini kapsıyorsa, bu ölçüme

**tam ölçüm** denir.

**Teorem 2.2.1.** (Folland 1999) *$(X, \mathcal{M}, \mu)$ bir ölçüm uzayı, $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}$ ve $\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M}$ ve $F \subset N,\ N \in \mathcal{N}\}$ olsun. O zaman $\overline{\mathcal{M}}$ bir $\sigma$-cebirdir ve $\mu$ ölçümünün $\overline{\mathcal{M}}$ üzerinde bir tam ölçüme bir ve yalnız bir $\overline{\mu}$ genişlemesi vardır.*

**Teorem 2.2.2.** **(Caratheodory)** *Eğer $\mu^*$ $X$ üzerinde bir dış ölçüm ise, ozaman $\mu^*$-ölçülebilir kümeler ailesi $\mathcal{M}$ bir $\sigma$-cebirdir ve $\mu^*$'ın $\mathcal{M}$ üzerine kısıtlaması bir tam ölçümdür*

Eğer bir topolojik uzayın Borel kümeleri üzerinde tanımlı $\mu$ ölçümü her $K$ kompakt kümesi için $\mu(K) < \infty$ özelliğini sağlıyorsa, bu ölçüm **Borel ölçümü** olarak adlandırılır. Bu çalışma boyunca tüm $\mu$ ölçümlerinin Borel ölçümü ($\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *veya* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ üzerinde) olduğu varsayılacaktır.

Eğer bir Borel ölçümü için

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : A \subset O \text{ açık}\} = \sup\{\mu(F) : F \text{ kapalı} \subset A\} \qquad (2.7)$$

sağlanıyorsa, bu ölçüme **düzgün Borel ölçümü** denir.

**Teorem 2.2.3.** (Aliprantsis 1989 s.113) *$\mathbb{R}^n$ üzerindeki tüm Borel ölçümleri düzgündür*

**Teorem 2.2.4.** (Aliprantsis 1989, s.210) *$\mu$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde düzgün Borel ölçümü olsun. Bu durumda aşağıdaki iki özelliği sağlayan bir ve yalnız bir tane kapalı $E \subseteq \mathbb{R}^n$ vardır:*

(1) $\mu(E') = 0$

(2) *Eğer $V$, $E \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde açık bir küme ise, bu durumda $\mu(E \cap V) > 0$*

Teorem (2.2.4.) ile belirlenmiş bu $E$ kümesine $\mu$ **ölçümünün dayanağı** denir.

Bu çalışmada negatif değerler alan ölçümler de göz önünde tutulacaktır. $(X, \mathcal{M})$ ölçülebilir bir uzay olsun. $(X, \mathcal{M})$ üzerinde **yük (signed measure)** aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur $\mu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu$, $\pm\infty$ değerlerinden en fazla birini alabilir,

(iii) $\{E_j\}$' ler $\mathcal{M}$ içinde ayrık kümelerin bir dizisi ise, $\mu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \mu(E_j)$

**Teorem 2.2.5. (Jordan Ayrışım Teoremi)** *Eğer $\mu$ bir yük ise, o zaman öyle bir ve yalnız bir $\mu^+$ ve $\mu^-$ pozitif ölçümleri vardır ki $\mu = \mu^+ - \mu^-$ sağlanır*

Buradaki $\mu^+$ ve $\mu^-$ ölçümlerine sırasıyla, $\mu$' nün **pozitif** ve **negatif varyasyonu** denir ve $\mu = \mu^+ - \mu^-$' ye $\mu$' nün **Jordan ayrışımı** denir. Ayrıca, $\mu$' nün **tam varyasyonu**

$$|\mu| = |\mu|(\mathbb{R}^n) = \mu^+(\mathbb{R}^n) + \mu^-(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} |d\mu| \ \ (\text{veya}) \int_{\mathbb{R}^n} d|\mu|)$$

olarak tanımlanır. Kolayca görülebilir ki bir $E \in \mathcal{M}$ kümesinin $\mu$' ye göre ihmal edilebilir olması için gerek ve yeter koşul, $|\mu|(E) = 0$ olmasıdır. Eğer tüm sonlu ölçümlerin kümesini $\Lambda$ ile gösterirsek aşağıda tanımlanan norm ile birlikte $\Lambda$ bir Banach uzayıdır,

$$\|\mu\| = |\mu| = |\mu|(\mathbb{R}^n) = \mu^+(\mathbb{R}^n) + \mu^-(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} |d\mu|. \tag{2.8}$$

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ ve $(Y, \mathcal{N}, \nu)$, $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$ ölçüm uzayları verildiğinde $X \times Y$ üzerinde $\mu \otimes \nu$ çarpım ölçümü tanımlanır. Çarpım uzayında tanımlı bir fonksiyonun integralini hesaplamada aşağıdaki iki teorem önemli bir yere sahiptir.

**Teorem 2.2.6. (Fubini Teoremi)** *$(X, \mathcal{M}, \mu)$ ve $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ $\sigma$-sonlu ölçüm uzayları, $\mu \times \nu$ ise, $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ üzerinde $\mu$ ve $\nu$ ölçümlerinin çarpımı olsun. Eğer $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu \times \nu$ ölçümüne göre integrallenebilir ise , hemen hemen her $x \in X$*

*için* $\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)$ *ve hemen hemen her* $y \in Y$ *için* $\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)$ *integralleri sonludur ve*

$$\int\limits_{X\times Y} fd(\mu\times\nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y) \quad (2.9)$$

*eşitlikleri sağlanır.*

**Önerme 2.2.7.** *$f(x,y)$, $\mu\times\nu$-ölçülebilir bir fonksiyon olsun, $\int(\int|f(x,y)|d\mu)d\nu$ veya $\int(\int|f(x,y)|d\nu)d\mu$ ardışık integrallerinden herhangi biri sonlu ise, $f(x,y)$ $\mu\times\nu$-integrallenebilirdir ve (2.9) sağlanır.*

## 2.3. $L^p$ Uzayları

Modern analizde önemli bir rol oynayan $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, uzayları

$$\|f\|_p = (\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx)^{1/p} < \infty$$

normu ile birlikte kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonların bir Banach uzayıdır. $p = \infty$ limit değerine karşılık gelen $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayı ise şöyle tanımlanır: Eğer $f$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon ise, $|f|$ fonksiyonunun **esas supremumu** $\|f\|_\infty$ ile gösterilir ve

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}$$

olarak tanımlanır.

**Not.** Çoğu zaman $\|f\|_\infty = \text{ess sup}\,|f(x)|$ olarak yazılır.

Artık $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayını tanımlayabiliriz;

$$L^\infty \equiv L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \text{ ölçülebilir ve } \|f\|_\infty < \infty\}$$

Böylece $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ olması için gerek ve yeter koşul h.h.h. $f = g$ olacak biçimde sınırlı ve ölçülebilir bir $g$ fonksiyonunun bulunmasıdır.

$(X, \mathcal{M})$ ölçülebilir uzay olsun. $E \subset X$ olmak üzere, $E$ kümesinin **karakteristik fonksiyonu** $\chi_E$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x \in E \\ 0, & \text{eğer } x \notin E \end{cases}$$

Eğer $E \in \mathcal{M}$ ise, $\chi_E$ nin ölçülebilir olduğu kolayca görülebilir. $E_k \in \mathcal{M}$ olmak üzere $f(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{E_k}(x)$ fonksiyonu **basit fonksiyon** olarak adlandırılır ($E_k$ ların ölçümleri sonludur). Basit fonksiyonlar sınıfı $1 \leq p < \infty$ için tüm $L^p$ uzaylarında yoğundur.

**Teorem 2.3.1.** *$(X, \mathcal{M}, \mu)$ ölçüm uzayı olsun. Eğer $f : X \to \mathbb{C}$ ölçülebilirse, o zaman $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \cdots \leq |f|$ olacak biçimde $f$ fonksiyonuna noktasal yakınsayan $\{\phi_n\}$- basit fonksiyonlar dizisi vardır.*

Aşağıdaki önerme $L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının önemli bir özelliğidir.

**Önerme 2.3.2.** *Her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ $L^p$ normuna göre süreklidir; yani $|h| \to 0$ için $\|\tau_h f - f\|_p \to 0$.*

$L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı içinde $\{f_k\}$ fonksiyonlarının bir dizisi verilmiş olsun:

(1) Eğer hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ limiti var ve $f(x)$ değerine eşit ise, h.h.h. $f_k(x) \to f(x)$ denir.

(2) Eğer $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0$ ise, $L^p$ normunda $f_k \to f$ denir ve $\overset{L^p}{\lim\limits_{k\to\infty}} f_k = f$ olarak yazılır.

$p = \infty$ için $L^\infty$ normunda yakınsama düzgün yakınsama ile çakışır.

**Teorem 2.3.3. (Lebesgue İntegrali Altında Limite Geçme Teoremi)** *$\{f_n\}$, $L^1$ uzayında,* **(a)** *h.h.h. $f_n \to f$ ve* **(b)** *$g$ pozitif ve $g \in L^1$ olmak üzere her $n$ için h.h.h. $|f_n| \leq g$ özelliklerini sağlayan bir dizi olsun. O zaman, $f \in L^1$ dir ve $\int f = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$ sağlanır.*

**Not:** Karşılıklı olarak, $1 \leq p < \infty$ için noktasal yakınsama norma göre yakınsamayı, norma göre yakınsama da noktasal yakınsamayı gerektirmez. Fakat, norma göre yakınsama var ise, orjinal dizinin öyle bir alt dizisi bulunabilir ki bu dizi h.h.h. yakınsaktır. Ayrıca, h.h.h. $f_k(x) \uparrow f(x)$ (yani hemen hemen her $x$ için $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$) ise, o zaman Beppo Levi teoremine göre

$\|f_k - f\|_p \to 0$ dir. Ayrıca, h.h.h. $f_k(x) \to f(x)$ ve h.h.h. $f_k(x) < F(x)$, $F \in L^p$ ise, o zaman Lebesgue İntegral Altında Limite Geçme Teoremi'nden $\overset{L^p}{\lim_{k\to\infty}} \|f_k - f\| = 0$ olur.

Şimdi, $L^p$ uzaylarının analizdeki uygulamalarında önemli yer tutan eşitsizlikleri verelim:

**Teorem 2.3.4. (Genelleşmiş Hölder Eşitsizliği)** *$f_i \in L_{p_i}$, $1 \le p_i \le \infty$, $i = 1, \ldots, m$ ve $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$ olsun. Bu durumda,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x) f_2(x) \ldots f_m(x)| dx \le \|f_1\|_{L_{p_1}} \ldots \|f_m\|_{L_{p_m}} \tag{2.10}$$

*dir.*

Bu teoremin sonucu olarak, eğer $f \in L^p$ ve $g \in L^q$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise,

$$\int_{R^n} |f(x) g(x)| dx \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Diğer taraftan $\mu \in \Lambda$ ve $\varphi \in L^\infty$ için $|\int \varphi d\mu| \le \|\varphi\|_\infty \|\mu\|$ dur.

**Teorem 2.3.5. (Minkowski İntegral Eşitsizliği)** *$\mu$ ve $\nu$ sırasıyla, $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ üzerinde pozitif $\sigma$−sonlu ölçümler olsunlar ve $f(x,y)$, $\mu \times \nu$−ölçülebilir olsun. Eğer hemen hemen her $y$ için $f(\cdot, y) \in L^p(\mathcal{X}, \mu)$, $(1 \le p \le \infty)$ ve $\int_{\mathcal{Y}} \|f(\cdot, y)\|_{p,\mu} d\nu(y) < \infty$ ise, o zaman hemen hemen her $x$ için $\int_{\mathcal{Y}} f(x,y)\, d\nu(y)$ yakınsaktır ve*

$$\left\| \int_{\mathcal{Y}} f(x,y)\, d\nu(y) \right\|_{p,\mu} \le \int_{\mathcal{Y}} \|f(\cdot, y)\|_{p,\mu}\, d\nu(y) \tag{2.11}$$

*sağlanır.*

**Teorem 2.3.6. (Young Eşitsizliği)** *$p, q, r \in \mathbb{R}$, $1 \le p, q, r \le \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ olsun. Eğer $f \in L^p$ ve $g \in L^r$ ise, o zaman*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right\|_{L^q} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r}. \tag{2.12}$$

Bu bölümü aşağıdaki takdim teoremini vererek bitirelim

**Teorem 2.3.7.** **(F.Riesz Takdim Teoremi)** *$L^p$' nin dual uzayı (yani, $L^p$ üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyoneller uzayı) $(L^p)'$ olmak üzere, $I \in (L^p)'$ $1 < p < \infty$ olması için gerek ve yeter koşul, $\forall f \in L^p$ için $I(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx$ olacak biçimde tek bir $g \in L^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ bulunmasıdır*

## 2.4. Fourier Dönüşümü

Bir $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü $f^\wedge$ notasyonu ile göstereceğiz ve

$$f^\wedge(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix.\xi}\,dx \qquad (2.13)$$

eşitliği ile tanımlayacağız. Daha genel olarak, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tüm sonlu Borel ölçümleri kümesi $\mathcal{M}$ olmak üzere $\mu \in \mathcal{M}$ ölçümünün Fourier dönüşümüni $\mu^\wedge$ notasyonu ile göstereceğiz ve

$$\mu^\wedge(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\,d\mu(x) \qquad (2.14)$$

eşitliği ile tanımlayacağız.

**Önerme 2.4.1.** (Sadosky 1979) *$\mu \in \mathcal{M}$ ve $\mu^\wedge$ onun Fourier dönüşümü olsun. O zaman*

(a) *$\mu^\wedge$ sınırlı bir fonksiyondur ve*

$$\|\mu^\wedge\|_\infty \leq \|\mu\| \quad \text{(bak (2.8))} \qquad (2.15)$$

*dır*

(b) *$\mu^\wedge$ düzgün sürekli bir fonksiyondur.*

(c) *Eğer $\mu \geq 0$ ise, o zaman $\|\mu\|(\mathbb{R}^n) = \mu^\wedge(0) = \|\mu^\wedge\|_\infty$ dır*

Şimdi, Fourier dönüşümü için bazı temel formülleri verelim. Burada listelenecek tüm formüller $e^{a+b} = e^a e^b$ formülü ve uygun değişken değiştirmesi yapılarak ispatlanabilir

$f \in L^1$, $y \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathcal{T}$, $\mathbb{R}^n$' den $\mathbb{R}^n$'e tersinir lineer bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

1. $\tau_y$ kayma operatörü olmak üzere,

$$(\tau_y f)^\wedge(\xi) = e^{iy\,\xi}\hat{f}(\xi), \tag{2.16}$$

2. $\mathcal{T}^{-t}$, $\mathcal{T}$' nin tersinin transpozu olmak üzere,

$$(f \circ \mathcal{T}) = |det(T)|^{-1}\hat{f} \circ \mathcal{T}^{-t}, \tag{2.17}$$

3. $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ olmak üzere,

$$(\tilde{f})^\wedge = \overline{\hat{f}}. \tag{2.18}$$

İyi bir gözlemle (2.17) için şu özel sonuçları elde edebiliriz: Eğer $T$ ortogonal bir dönüşüm ise, yani $TT^t$ birim dönüşüm ise, $det(T) = \mp 1$ olduğundan $f \circ \mathcal{T} = \hat{f} \circ \mathcal{T}$ dır. Eğer $T$ bir genişleme ise, yani $Tx = rx$, ($x \in \mathbb{R}^n$ $r > 0$) ise, bu durumda (2.17)'den $(f(rx))^\wedge = r^{-n}\hat{f}(r^{-1}\xi)$ dır.

Şimdi $f$' in ait olduğu aile ile $\hat{f}$ arasındaki bazı özellikleri verelim.

**Teorem 2.4.2.** (Folland,1999) *$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olsun.*

**a)** *Eğer $f \in C^k$ ve her $\alpha : 0 \leq |\alpha| \leq k$ için $\partial^\alpha f \in L^1$ ise, o zaman*

$$(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f} \tag{2.19}$$

*olur ve ilave olarak,*

$$|x| \to \infty \ \ için, \ \ (1+|\xi|)^k \hat{f}(\xi) \to 0 \tag{2.20}$$

*sağlanır.*

**b)** *Eğer $|\alpha| \leq k$ için $x^\alpha f \in L^1$ ise, o zaman $\hat{f} \in C^k$ ve $\partial^\alpha \hat{f} = [(-ix)^\alpha f]^\wedge$ dır.*

## 2.5. Schwartz Test Fonksiyonları Uzayı

Eğer bir $f$ fonksiyonu sonsuz diferansiyellenebilir ve tüm mertebelerden kısmi türevleri sonsuzda çok hızlı azalıyorsa; yani, her $\alpha$, $\beta \in \mathbb{N}^n$ için

$$\sup_x |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = p_{\alpha,\beta}(f) < \infty$$

sağlanıyorsa, $f$ Schwartz sınıfındandır denir. Schwartz sınıfına ait tüm fonksiyonların kümesi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Burada $\{p_{\alpha,\beta}\}$ ailesi $\mathcal{S}$ üzerinde yarınormların sayılabilir bir sınıfıdır ve bu aile kullanılarak $\mathcal{S}$ üzerinde bir topoloji kurabiliriz: $\{\varphi_k\}$ dizisinin sıfıra yakınsaması için gerek ve yeter koşul, her $\alpha$, $\beta \in \mathbb{N}^n$ için $\lim_{k\to\infty} \sup_x |x^\alpha \partial^\beta \varphi_k(x)| = 0$ olmasıdır. Bu topoloji ile birlikte $\mathcal{S}$ bir Fréchet uzayıdır ve $1 \leq p < \infty$ için tüm $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında yoğundur (Stein 1970).

**Örnekler**

1. $C_c^\infty$ ile kompakt dayanaklı ve $C^\infty$ uzayına ait fonksiyonların kümesini gösterirsek, o zaman $C_c^\infty \subset \mathcal{S}$ olur.

2. $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$ olarak tanımlarsak, $f \in \mathcal{S}$ olur.

3. $g(x) = e^{-\pi|x|^2}\sin(e^{\pi|x|^2})$ ve her $N$ pozitif tamsayısı için $f_N(x) = (1+|x|^2)^{-N}$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ uzayında değildir. Bu iddiayı kabaca şöyle doğrulayabiliriz: $f_N$ fonksiyonu $\infty$' da yeteri hızla azalmaz (azalma hızı bir üstel fonksiyondan daha yavaştır). Bunun yanında $g(x)$ fonksiyonu yeteri kadar hızla azalsa da türevleri hızla azalmaz.

Şimdi $\mathcal{S}$ uzayının bir diğer önemli karekterizasyonunu verelim

**Önerme 2.5.1.** (Folland 1999)

$$f \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow \forall\, N \text{ ve } \alpha \text{ için } (1+|x|)^N \partial^\alpha f \text{ sınırlıdır.} \tag{2.21}$$

$$f \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow \forall\, \alpha \text{ ve } \beta \text{ için } \sup_x |\partial^\beta (x^\alpha f(x))| \text{ sonludur.} \tag{2.22}$$

**Önerme 2.5.2.** *$C_c^\infty$ uzayı $\mathcal{S}$ içinde yoğundur, yani her $f \in \mathcal{S}$ için $\{f_k\} \subset C_0^\infty$ fonksiyon dizisi bulunabilir ki, $\mathcal{S}$'in topolojisinde $f_k \to f$ olur.*

## 2.6. Girişim ve Plancherel Eşitliği

Bu alt bölümde girişim kavramını tanıtarak bazı önemli özelliklerini veriyoruz. $\phi$ ve $f$ fonksiyonlarının *girişimi*

$$\phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(x-y)\, dy \tag{2.23}$$

olarak tanımlanır. Şimdi (2.23) integralinin anlamlı olmasını sağlayan uygun koşulları hatırlayalım.

1. $\phi \in L^1$ ve $f \in L^p$, $(1 \le p \le \infty)$ için (2.23) integrali h.h.h. mutlak yakınsaktır ve

$$\|\phi * f\|_p \le \|\phi\|_1 \|f\|_p \tag{2.24}$$

eşitsizliği sağlanır.

2. Eğer $\phi$ kompakt dayanaklı sürekli bir fonksiyon ve $f \in L^1_{loc}$ ise o zaman (2.23) her $x$ için mutlak yakınsaktır ve $\phi * f$ süreklidir.

3. $\phi \in L^p$ ve $f \in L^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ için, (2.23) integrali her $x$ için mutlak yakınsaktır. Bundan başka

$$\|\phi * f\|_\infty \le \|\phi\|_p \|f\|_{p'} \tag{2.25}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu özelliklere ek olarak, yukarıdaki durumların her birinde girişim değişmelidir. Yani, $\phi * f = f * \phi$ ve

$$\operatorname{supp}(\phi * f) \subset \operatorname{supp}\phi + \operatorname{supp} f \tag{2.26}$$

**Not:** Birçok uygulamada $\phi$ sabit tutulur, çok "iyi" bir fonksiyon olarak seçilir ve girişim $f \to \phi * f$ biçiminde tanımlanan bir operatör olarak dikkate alınır.

**Lemma 2.6.1.** *$\phi \in C_0^\infty$ ve $f \in L^1_{loc}$ ise o zaman $\phi * f \in C^\infty$ ve*

$$\partial^\alpha(\phi * f) = (\partial^\alpha \phi) * f \tag{2.27}$$

*dir*

**Sonuç 2.6.2.** *$f, g \in \mathcal{S}$ ise, o zaman $f * g \in \mathcal{S}$ dır.*

Aşağıdaki formüller girişim ve Fourier dönüşümü arasındaki ilgiyi göstermektedir:

$$(f * g)^{\wedge} = \hat{f}\hat{g}, \quad (f, g \in L^1); \tag{2.28}$$

$$(fg)^{\wedge} = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{f} * \hat{g}, \quad (f, g \in \mathcal{S}). \tag{2.29}$$

**Teorem 2.6.3. (Ters Fourier Dönüşümü)** *$f \in L^1$ olsun. $f_t(x)$ ile,*

$$f_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\, d\xi, \quad (t > 0) \tag{2.30}$$

*Abel toplamlamlarını gösterelim. Bu durumda*

$$\lim_{t\to 0^+} \|f_t - f\|_1 = 0 \tag{2.31}$$

*ve*

$$\lim_{t\to 0^+} f_t(x) = f(x) \ (h.h.h.). \tag{2.32}$$

*eşitlikleri sağlanır.*

Bu teorem göz önüne alınarak, $f$'in ters Fourier dönüşümü

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)\, d\xi$$

şeklinde tanımlanır.

**Sonuç 2.6.4.** *Fourier dönüşümü $\mathcal{S}$' den $\mathcal{S}$ üzerine bire-bir ve örten bir dönüşümdür.*

**Lemma 2.6.5.** (Folland 1999) *$\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,*

$$\int \hat{\mu}\, d\nu = \int \hat{\nu}\, d\mu \tag{2.33}$$

*dır. Özel olarak $f, g \in L^1$ ise,*

$$\int \hat{f}(x) g(x)\, dx = \int \hat{g}(x) f(x)\, dx$$

*dır.*

**Teorem 2.6.6. (Plancherel teoremi, birinci version)** *$u, v \in \mathcal{S}$ ise, o zaman*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\bar{\hat{v}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}\, dx \tag{2.34}$$

*dir. Özel halde, $v = u$ konulursa, $\|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2$ elde edilir.*

Dolayısıyla, Schwartz fonksiyonlarına kısıtlanan Fourier dönüşümü $L^2$ normunda bir izometridir. Bu da , $\mathcal{S}$ $L^{2}$' de yoğun olduğundan, Fourier dönüşümünü $L^{2}$' ye genişletmenin yolunu gösteriyor.

**Teorem 2.6.7.** *Eğer $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^2$ ve $\hat{f} + \hat{\mu} = 0$ ise, o zaman $\mu = -f dx$ dir.*

Bu bölümü $e^{-t|x|^2}$, Gaussian fonksiyonunun Fourier dönüşümünü vererek bitirelim:

**Teorem 2.6.8.** (Stein and Weiss 1971)

$$\frac{1}{(\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^2} e^{-ix\,\xi}\, d\xi = \frac{1}{(t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t} \tag{2.35}$$

## 2.7. Laplace Dönüşümü ve Gamma Fonksiyonu

Genelleştirilmiş integrallerle sonsuz seriler arasındaki benzerliğe bakarak, bir kuvvet serisine karşılık gelen genelleştirilmiş integrali aramak gayet normaldir. Eğer kuvvet serisini

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n \tag{2.36}$$

olarak yazarsak, o zaman bu seriye karşılık gelen genelleştirilmiş integral,

$$\int_0^{\infty} f(t)x^t\, dt \tag{2.37}$$

olur. Küçük bir gösterim farkıyla bu $f(t)$ fonksiyonunun **Laplace dönüşümüdür**. $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü tam olarak, (2.37)' de $x$ yerine $e^{-s}$ koyarak elde edilen

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \tag{2.38}$$

integralidir

Özel olarak, önemli Laplace dönüşümlerinden biri,

$$\int_0^\infty t^k e^{-st}\,dt, \quad (k > -1,\ s > 0) \tag{2.39}$$

dir. Burada $k$ sıfır veya pozitif tamsayı olduğunda,

$$\int_0^\infty t^k e^{-st}\,dt = \frac{k!}{s^{k+1}}, \quad s > 0 \tag{2.40}$$

eşitliği tümevarımla kolayca gösterilebilir. (2.40)' dan, $s = 1$ için

$$k! = \int_0^\infty t^k e^{-t}\,dt \tag{2.41}$$

olur. Bu formül, faktöriyeli genellemenin metodunu vermektedir:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt, \quad Re\, z > 0 \tag{2.42}$$

olmak üzere (2.42) integrali **gamma– fonksiyonu** olarak adlandırılır. Gamma–fonksiyonu Re$z \leq 0$, $z \neq 0, -1, -2, \ldots$, yarı düzlemine, bu integralin analitik devamı ile genişletilir.

Gamma–fonksiyonu için, $(z)_n = z(z+1)\ldots(z+n-1)$ olmak üzere, aşağıdaki formülleri elde edebiliriz (Samko, Kilbas, Marichev 1987):

1. *Genel fark denklemi*

$$\begin{aligned}\Gamma(z+n) &= (z)_n\Gamma(z),\\ \Gamma(z-n) &= \frac{\Gamma(z)}{(z-n)_n} = \frac{(-1)^n}{(1-z)_n}\Gamma(z);\end{aligned} \tag{2.43}$$

2. *Fonksiyonel denklem*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin z\pi,\quad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi} \tag{2.44}$$

3. *Legendre formülü*

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) \tag{2.45}$$

4. *Asimtotik Stirling formülü*

$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}z^{z-1/2}e^{-z}[1+O(1/z)],\quad |arg\ z|<\pi,\ z\to\infty \tag{2.46}$$

ve bunun sonucu olarak;

$$n!=\sqrt{2\pi n}(n/e)^n[1+O(1/n)],\quad n\to\infty \tag{2.47}$$

dir.

Bu bölümü aşağıdaki önermeyle bitiriyoruz.

**Önerme 2.7.1.** *$\alpha>0$ olmak üzere, $f(t)=t^{\frac{\alpha}{2}-1}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha/2}\frac{dt}{t}=s^{-\alpha/2} \tag{2.48}$$

*dir.*

## 2.8. Hardy–Littlewood Maximal Fonksiyonu

$(X,\mu)$, $(Y,\nu)$ ölçüm uzayları ve $T$, $L^p(X,\mu)$' den $Y$ üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar uzayına bir operatör olsun. Eğer $q<\infty$ için,

$$\nu(\{y\in Y:|Tf(y)|>\lambda\})\leq\left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

sağlanıyorsa, $T$ **zayıf** $(p,q)$ **tiplidir** denir. Eğer $T$ $L^p(X,\mu)$' den $L^\infty(Y,\nu)$' ya sınırlı operatör ise, **zayıf** $(p,\infty)$ denir. Eğer $T$, $L^p(X,\mu)$' den $L^q(Y,\nu)$' ya sınırlı ise, $T$ **güçlü** $(p,q)$ **tiplidir** denir (bak. Stein and Weiss 1971, sf. 184).

$T$ güçlü $(p,q)$ ise, o zaman $T$ zayıf $(p,q)$' dur: Bunu görmek için $E_\lambda = \{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}$ olarak tanımlarsak,

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left|\frac{Tf(x)}{\lambda}\right|^q d\nu \leq \frac{\|Tf\|_q^q}{\lambda^q} \leq \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

elde ederiz.

**Teorem 2.8.1.** (Stein and Weiss 1971)

$\{T_t\}$ $L^p(X,\mu)$ *üzerinde tanımlı doğrusal operatörler ailesi ve*

$$T^*f(x) = \sup_t |T_t f(x)|$$

*olsun. Eğer* $T^*$ *zayıf* $(p,q)$ *ise o zaman,*

$$\{f \in L^p(X,\mu) : \lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x) \ h.h.h.\}$$

*kümesi* $L^p(X,\mu)$ *içinde kapalıdır.*

Burada $T^*$, $\{T_t\}$ ailesine ilişkin maximal operatör olarak adlandırılır.

**Not:** $f \in \mathcal{S}$ için $\phi_t * f(x)$ noktasal olarak $f(x)$ yakınsadığı iyi bilinmektedir. Eğer $\sup_{t>0} \phi_t * f(x)$ maksimal operatörünün zayıf $(p,p)$ $(1 \leq p < \infty)$ tipli olduğunu gösterebilirsek, o zaman Teorem 2.8.1.'i kullanarak, $f \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$ için hemen her yerde noktasal yakınsamayı gösterebiliriz.

$B_r = B(0,r)$, merkezi orjinde olan $r$ yarıçaplı bir yuvar olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı lokal integrallenebilen $f$ fonksiyonunun **maksimal fonksiyonu**

$$M_f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(x-y)|dy = \sup_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{|B(x,r)|} |f(y)|dy \qquad (2.49)$$

olarak tanımlanır (Bu fonksiyon $+\infty$ değerini de alabilir.)

Burada $|B_r|$, $B_r$'nin Lebesgue ölçümü ve $B(x,r)$' de $x$ merkezli, $r$ yarıçaplı yuvardır.

**Not:** Eğer $\phi = |B_1|^{-1}\chi_{B_1}$ ve $M_t f(x) = \phi_t * f(x)$ alırsak, o zaman (2.49)'de tanımlanan maksimal fonksiyon, pozitif $f$ için Teorem 2.8.1.' de olduğu gibi, $\{\phi_t\}$ ailesine ilişkin maksimal operatör ile çakışır.

**Önerme 2.8.2.** *$\phi$ pozitif, radial, azalan ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda,*

$$\sup_{t>0} |\phi_t * f(x)| \leq \|\phi\|_1 Mf(x). \tag{2.50}$$

**İspat.** İlk olarak $\phi(x)$'i basit fonksiyon alalım. Bu durumda,

$$\phi(x) = \sum_j a_j \chi_{B_{r_j}}(x), \quad a_j > 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu halde, $\|\phi\|_1 = \sum_j a_j |B_{r_j}|$ olduğundan,

$$\phi * f(x) = \sum_j a_j |B_{r_j}| \frac{1}{|B_{r_j}|} |\chi_{B_{r_j}} * f(x) \leq \|\phi\|_1 Mf(x)$$

dir. Önermenin hipotezlerini sağlayan herhangi bir $\phi$ fonksiyonuna, Teorem 2.3.1 den dolayı monoton artan basit fonksiyonlar dizisiyle yaklaşılabilir. Ayrıca, her $t > 0$ için $\phi_t$ başka bir pozitif, radial, azalan ve integrallenebilen bir fonksiyon olduğundan ve aynı eşitsizliği sağlayacağından, istenilen sonuç elde edilir.

■

Bu bölümü, aşağıdaki iyi bilinen sonucu vererek bitiriyoruz.

**Teorem 2.8.3.** (Sadosky sf. 1999) *$M$ operatörü zayıf $(1,1)$ ve güçlü $(p,p)$, $(1 < p \leq \infty)$ dir.*

## 2.9. Gauss–Weierstrass İntegrali ve Yarıgrup Özelliği

$e^{-4\pi^2\alpha|y|^2}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$W(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} exp(-|x|^2/4t), \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \tag{2.51}$$

**Gauss–Weierstrass çekirdeği** olarak adlandırılır. Bu çekirdeğin aşağıdaki özellikleri vardır:

$$[W(.,t)]^{\wedge}(\xi) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} W(x,t)dx = e^{-t|\xi|^2}, \tag{2.52}$$

$$\forall\, t > 0 \text{ için } \int\limits_{\mathbb{R}^n} W(x,t)dx = 1; \int\limits_{\mathbb{R}^n} W(y,t)W(x-y,\tau)dy = W(x,t+\tau), \tag{2.53}$$

$$W(\sqrt{\lambda}x, \lambda t) = \lambda^{-n/2} W(x,t) \tag{2.54}$$

Özel olarak, (2.54)'de $t = 1$ konursa;

$$W(\sqrt{\lambda}x, \lambda) = \lambda^{-n/2} W(x,1)$$

eşitliği elde edilir.

**İspat.** (2.33)' nin bir sonucu olarak,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi t \cdot x} e^{-4\pi^2 \alpha |x|^2}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) W(x-t,\alpha)\, dx \;\forall \alpha > 0 \tag{2.55}$$

eşitliğini söyleyebiliriz. Bu eşitliğin sağında $t = 0$ ve $f(x) = e^{-ix\xi}$ alırsak, (2.52) ispatlanmış olur. (2.53) için uygun değişken değiştirilmesi ile $\int\limits_{\mathbb{R}^n} W(x,\alpha)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} W(x,1)\, dx$ eşitliğinin sağlandığını görebiliriz. Böylece, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4} dx = 2\sqrt{\pi}$ olmasından dolayı (2.53)'de soldaki ilk eşitlik kolayca görülür ($n$ boyutlu integral, böyle n tane integralin çarpımı olarak yazılabilir). (2.53)'ün ikinci eşitliği de, (2.55)' de sol tarafta $f(x) = W(x,t)$ alarak ispatlanabilir. Son eşitlik de Gauss–Weierstrass çekirdeğinin tanımından direkt olarak görülebilir. ■

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ fonksiyonu için Gauss-Weierstrass yarıgurubu $G_t f$ ile gösterilir ve

$$(G_t f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-z) W(z,t) dz,\; t > 0;\; (G_0 f)(x) = f(x) \tag{2.56}$$

olarak tanımlanır.

**Önerme 2.9.1.** *$M_f(x)$ Hardy–Littlewood maximal fonksiyonu olmak üzere,*

$$\text{(i)} \quad \|G_t f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}, \ 1 \leq p \leq \infty \tag{2.57}$$

$$\text{(ii)} \quad \sup_{t>0} |(G_t f)(x)| \leq M_f(x) \tag{2.58}$$

**İspat.** (2.53)'den Gauss–Weierstrass çekirdeğinin integralinin 1' e eşit olduğunu biliyoruz. Bu sonucu (2.24)' de göz önüne alırsak önermenin ilk kısmı ispatlanmış olur. Önermenin ikinci kısmının ispatı için Gauss–Weierstrass çekirdeğinin,

$$W(t, \alpha) = (4\pi\alpha)^{-(n/2)} e^{-|t|^2} / 4\alpha,$$

Önerme 2.8.2.'nin hipotezlerini sağladığını görmek yeterlidir. ■

# 3. BESSEL POTANSİYELLERİ

## 3.1. Bessel Potansiyelleri'nin Tanımı ve Bazı Özellikleri

Bu bölümdeki bilgileri, [Stein, sf.130] kaynağından yararlanarak sunuyoruz.

Klasik Bessel potansiyelleri, Fourier dönüşümü terimlerinde

$$(\mathcal{J}^{\alpha} f)^{\wedge}(x) = (1+|x|^2)^{-\alpha/2}(f)^{\wedge}(x), \; (x \in \mathbb{R}^n, \; \alpha > 0) \tag{3.1}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu potansiyellerin açık integral gösterimleri de bilinmektedir:

$$\mathcal{J}^{\alpha} f)(x) = G_{\alpha} * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_{\alpha}(y) f(x-y) dy \tag{3.2}$$

Burada,

$$G_{\alpha}(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\alpha/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^{\infty} e^{-\pi|x|^2/\delta} e^{-\delta/4\pi} \delta^{(-n+\alpha)/2} \frac{d\delta}{\delta} \tag{3.3}$$

dir. Bu potansiyeller, matematik literatürde $I$–birim operatör ve $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$- Laplace differansiyel operatörü olmak üzere, $(I - \Delta)$ operatörünün "*Kesirsel Kuvvetleri*" anlamındadır.

**Önerme 3.1.1.**

(1) *Her* $\alpha > 0$ *için* $G_{\alpha}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ve* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{\alpha}(x)\,dx = 1$ *' dir.*

(2) *Bessel potansiyelleri,* $(\mathcal{J}^{\alpha} f)(x) = G_{\alpha} * f(x)$, *her* $\alpha > 0$ *için güçlü* $(p,p)$ *tiplidir; yani* $\|(\mathcal{J}^{\alpha} f)\|_p \le \|f\|_p$.

**İspat.** Fubini teoreminden,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{\alpha}(x)\,dx &= \frac{1}{(4\pi)^{\alpha/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} e^{-\pi|x|^2/\delta} e^{-\delta/4\pi} \delta^{(-n+\alpha)/2} \frac{d\delta}{\delta} dx \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\alpha/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^{\infty} e^{-\delta/4\pi} \delta^{(-n+\alpha)/2} \frac{d\delta}{\delta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2/\delta}\, dx \\
& \qquad \text{((2.48) 'den yararlanıyoruz)} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\alpha/2}} \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^{\infty} e^{-\delta/4\pi} \delta^{(-n+\alpha)/2} \frac{d\delta}{\delta} \delta^{n/2} = 1
\end{aligned}$$

dır. İkinci sonuç, İntegral için Minkowski eşitsizliği uygulanarak elde edilir:

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{J}^{\alpha}f)\|_p &= \|G_\alpha(y)f(x-y)\,dy\|_{p,dx} \le \int_{\mathbb{R}^n} \|G_\alpha(y)f(x-y)\|_{p,dx}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |G_\alpha(y)|\|f\|_p dy = \|f\|_p \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(y)dy = \|f\|_p \end{aligned}$$

■

Son olarak, Bessel potansiyelinin çekirdeğinin Fourier dönüşümünün $G_\alpha^\wedge(x) = (1+|x|^2)^{-\alpha/2}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki önermeye ihtiyacımız olacaktır

**Önerme 3.1.2.**

(1) $\alpha > 0$ *için*

$$(1+|x|^2)^{-\alpha/2} = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty e^{-\delta(1+|x|^2)}\delta^{\alpha/2}\frac{d\delta}{\delta}. \tag{3.4}$$

(2) $\delta > 0$ *için*

$$(e^{-\delta|\xi|^2})^\wedge(x) = \frac{(2\pi)^n}{(4\pi\delta)^{n/2}}e^{-|x|^2/4\delta}. \tag{3.5}$$

(3)

$$G_\alpha(y) = c_\alpha \int_0^\infty e^{-t-|y|^2/4t}t^{\frac{\alpha-n}{2}-1}dt, \qquad c_\alpha = [(4\pi)^{n/2}\Gamma(\alpha/2)]^{-1}. \tag{3.6}$$

**İspat.** Önerme 2.7.1.'de $s$ olarak $(1+|x|^2)$ alırsak, birinci özellik gösterilmiş olur. İkinci özellik, denklem (2.35)'de Gaussianın Fourier dönüşümü olarak verilmişti. (3.3) eşitliğinde $\delta = 4\pi t$ konursa, (3.6) eşitliği elde edilmiş olur. ■

Bu hazırlıktan sonra aşağıdaki önermeyi ispatlayabiliriz.

**Önerme 3.1.3.**
*Her $\alpha > 0$ için, $G_\alpha$ çekirdeğinin Fourier dönüşümü*

$$G_\alpha^\wedge(x) = (1+|x|^2)^{-\alpha/2} \tag{3.7}$$

*dir.*

**İspat.** Önerme 2.6 5.'den, her $\varphi \in \mathcal{S}$ için

$$\int f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx = \int \hat{f}(x)\varphi\,dx \tag{3.8}$$

dir. O halde, $f(x) = e^{-(1+|x|^2)\delta}$ alırsak

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(1+|x|^2)\delta}\hat{\varphi}(x)\,dx &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\delta)^{n/2}} e^{-|x|^2/4\delta} e^{-\delta}\varphi(x)\,dx \\ &= \pi^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/4\delta} e^{-\delta}\delta^{-n/2}\varphi(x)dx\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanını$\delta^{\alpha/2}\frac{d\delta}{\delta}$ ile çarparak integrallersek Fubini teoreminden,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x)\Big[\int_0^\infty e^{-(1+|x|^2)\delta}\delta^{\alpha/2}\frac{d\delta}{\delta}\Big]\,dx = \pi^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\Big[\int_0^\infty e^{-|x|^2/4\delta}e^{-\delta}\delta^{-n/2}\delta^{\alpha/2}\frac{d\delta}{\delta}\Big]\,dx$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı için (3.4) ve sağ tarafı için (3 6) göz önünde tutulursa,

$$\Gamma(\alpha/2)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x)(1+|x|^2)^{-\alpha/2}\,dx = \pi^{n/2}c_\alpha^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha\varphi(x)dx$$

bulunur. Son olarak (3.8) formülünden istenilen sonuç elde edilir. ■

# 4. DALGACIK (WAVELET) DÖNÜŞÜMÜ VE CALDERÓN TÜRETME FORMÜLÜ

## 4.1. Bessel Potansiyellerine İlişkin Ağırlıklı Dalgacık Dönüşümü

Çalışmamızın Giriş kısmında integral dalgacık (wavelet) dönüşümleri hakkında kısa bilgi vermiştik. Şimdi, problemimize uygun Wavelet tipli Dönüşümü ve Calderón Türetme formülünü bulmak istiyoruz. Bulacağımız bu dönüşüm, Bessel Potansiyelleri'nin terslerinin belirlenmesinde önemli rol oynayacaktır.

$\mu$, $\mathbb{R}^1$ üzerinde $\mu(\mathbb{R}^1) = 0$ ve $\operatorname{supp} \mu \in [0, \infty)$ özelliklerine sahip bir sonlu Borel ölçümü (yük) olsun. Bu "dalgacık ölçümü" ve (2.51)'de tanımladığımız Gauss–Weierstrass çekirdeğini kullanarak, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ üzerinde aşağıdaki "dalgacık ölçümü" kuralım:

$$dm(x,t) = W(x,t)dxd\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

(Bundan böyle, $W(x,t)$ fonksiyonu $t \leq 0$ için sıfır olarak genişletilecektir). Açıktır ki, $m$ sonludur ve (2.53)'den

$$m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} d\mu(t) \int\limits_{\mathbb{R}^n} W(x,t)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1} d\mu(t) = 0 \tag{4.1}$$

dır.

**Tanım 4.1.1.** *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ve $\eta > 0$ olsun. $f$ fonksiyonunun $(V_\mu f)(x,\eta)$* **ağırlıklı dalgacık dönüşümünü,**

$$(V_\mu f)(x,\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1} f(x - \sqrt{\eta}y)e^{-s\eta}W(y,s)dyd\mu(s) \tag{4.2}$$

*eşitliği ile tanımlıyoruz.*

**Not:** "Ağırlıklı" sözcüğünü kullanmamızın nedeni (4.2) ifadesinde bulunan $e^{-s\eta}$ çarpanıdır.

(2.53) ve (2.54) denklemleri kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
(V_\mu f)(x,\eta) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n\times[0,\infty)} f(x-\sqrt{s\eta}y)e^{-s\eta}W(y,1)dyd\mu(s) \\
&= \mu(\{0\})f(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^n\times(0,\infty)} f(x-\sqrt{s\eta}y)e^{-s\eta}W(y,1)dyd\mu(s) \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

eşitliği kolayca görülebilir.

**Not:**

$$
(V_\mu f)(x,\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-\sqrt{\eta}y)\Big(\int\limits_{[0,\infty)} e^{-s\eta}W(y,s)d\mu(s)\Big)dy
$$

olduğunu gördük. Burada parantez içindeki ifade $e^{-s\eta}$ çarpanı olmadan, alışılmış dalgacık fonksiyonu oluyor. Gerçekten,

$$
w(y) = \int\limits_{[0,\infty)} W(y,s)d\mu(s)
$$

alırsak

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n} w(y)dy \overset{(4.1)}{=} 0
$$

ve

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-\sqrt{\eta}y)w(y)dy = \frac{1}{(\sqrt{\eta})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)w(\frac{x-y}{\sqrt{\eta}})dy \qquad (4.4)
$$

olur. Bu (4.4) formülü ise klasik "integral dalgacık dönüşümü" dür.

## 4.2. Bessel Potansiyellerinin Ağırlıklı Dalgacık Dönüşümü İle İfadesi

Fourier dönüşümü dilinde (3.1) ile tanımlanan Bessel potansiyelleri $J^\alpha f$, $(\alpha > 0)$, girişim şeklinde ifade edilebilir [Stein, 1970]:

$$
(J^\alpha f)(x) = (G_\alpha * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(y)f(x-y)dy \qquad (4.5)
$$

Burada $G_\alpha$ çekirdeği,

$$
G_\alpha(y) = c_\alpha\int\limits_0^\infty e^{-t-|y|^2/4t}t^{\frac{\alpha-n}{2}-1}dt, \qquad c_\alpha = [(4\pi)^{n/2}\Gamma(\alpha/2)]^{-1}
$$

dir. $W(y,t)$ Gauss–Weierstrass çekirdeği olmak üzere basit bir hesaplamayla,

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} e^{-t} t^{\frac{\alpha}{2}-1} W(y,t) f(x-y)\, dy dt \tag{4.6}$$

olduğu görülebilir.

Aşağıdaki önerme Bessel potansiyellerinin "dalgacık–tipli" gösterimlerini vermektedir. Bu önermede $\int\limits_a^b \varphi(t) d\mu(t) = \int\limits_{[a,b)} \varphi(t) d\mu(t)$ olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca, $\mu(a) = 0$ olduğunda, $\int\limits_a^b \varphi(t)\, d\mu(t) = \int\limits_{(a,b)} \varphi(t)\, d\mu(t)$ kabul edeceğiz.

**Önerme 4.2.1.** *$V_\mu f$ (4.2)'de tanımlandığı gibi olsun ve $\mu$ $[0,\infty)$ kümesinde*

$$\mu(0) = 0, \qquad \int\limits_0^\infty \frac{d|\mu|(\tau)}{\tau^{\alpha/2}} < \infty \qquad ve \qquad c_{\alpha,\mu} \overset{def}{=} \int\limits_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau^{\alpha/2}} \neq 0 \tag{4.7}$$

*koşullarını sağlasın. O zaman $(J^\alpha f)(x)$ potansiyeli mutlak yakınsak olduğunda (mesela, $f \in L^p$, $1 \le p \le \infty$ için)*

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2) c_{\alpha,\mu}} \int\limits_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{2}-1} (V_\mu f)(x,\eta)\, d\eta \tag{4.8}$$

*dir.*

**İspat.** Basit bir hesaplamayla,

$$\int\limits_0^\infty \eta^{-\frac{\alpha}{2}-1} (V_\mu f)(x,\eta) d\eta = \int\limits_{\mathbb{R}^n \times [0,\infty)} W(y,1) dy d\mu(\tau) \int\limits_0^\infty e^{-\tau\eta} f(x - \sqrt{\tau\eta} y) \eta^{\frac{\alpha}{2}-1} d\eta$$

$(\eta = s/\tau, d\eta = ds/\tau,$ değişken değiştirmesi yapıyoruz)

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} W(y,1) e^{-s} s^{\alpha/2-1} f(x - \sqrt{s} y) dy ds \int\limits_0^\infty \tau^{-\alpha/2} d\mu(\tau)$$

$(y = z/\sqrt{s}, dy = s^{-n/2} dz$ değişken değiştirmesi yapıyoruz ve (2.51)'yi kullanıyoruz)

$$= c_{\alpha,\mu} \int\limits_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} e^{-s} s^{\alpha/2-1} W(z,s) f(x-z) dz ds = c_{\alpha,\mu} \Gamma(\alpha/2) (J^\alpha f)(x)$$

dir. Buradan da $(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{c_{\alpha,\mu}\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_0^\infty \eta^{-\alpha/2-1} (V_\mu f)(x,\eta)\, d\eta$ elde edilir. ■

## 4.3. Ağırlıklı Dalgacık (Wavelet) Dönüşümüne Uygun Calderón Türetme (Reproducing) Formülü: $L^2$ Versiyonu

Şu ana kadar, problemimize uygun dalgacık (wavelet) dönüşümünü bulduk. Fakat daha önce de belirttiğimiz gibi dalgacık dönüşümünü önemli yapan etkenlerden biri Calderón türetme (reproducing) formülüdür. Bu formülü $L^2$ ve $L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ durumları için ayrı ayrı ele alacağız. Bu formülü elde ederken koşullarımız, $L^2$ halinde $\mu$ ölçümünün Laplace dönüşümü üzerinde ve $L^p$ genel durumunda ise $\mu$ ölçümü üzerinde verilecektir.

**Teorem 4.3.1.** *$\mu$ bir dalgacık ölçüm, $\tilde{\mu}(t) = \int\limits_0^\infty e^{-st} d\mu(s)$ fonksiyonu $\mu$ ölçümünün Laplace dönüşümü ve $\tilde{c_\mu} = \int\limits_0^\infty \tilde{\mu}(t) \frac{dt}{t}$ integrali sonlu olsun. O halde,*

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \rho \to \infty}}^{(L^2)} \int_\varepsilon^\rho (V_\mu f)(x, \eta) \frac{d\eta}{\eta} = \tilde{c_\mu} f(x), \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

*dir.*

**İspat.** İlk olarak, $f \in L^1 \bigcap L^2$ alalım. $f_{\varepsilon,\rho}(x)$ ile

$$f_{\varepsilon,\rho}(x) = \int_\varepsilon^\rho (V_\mu f)(x, \eta) \frac{d\eta}{\eta}$$

gösterirsek, Fubini teoreminden,

$$f^\wedge_{\varepsilon,\rho}(y) = \int_\varepsilon^\rho \frac{d\eta}{\eta} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} dx \int_{\mathbb{R}^n \times [0,\infty)} e^{-s\eta} W(z, 1) f(x - \sqrt{s\eta} z) dz d\mu(s)$$

( $x$ yerine $x + \sqrt{s\eta} z$ koyuyoruz ve (2.53)'yi kullanıyoruz )

$$= f^\wedge(y) \int_\varepsilon^\rho \frac{d\eta}{\eta} \int_0^\infty e^{-s\eta(1+|y|^2)} d\mu(s) = f^\wedge(y) k_{\varepsilon,\rho}(y)$$

elde edilir. Burada,

$$k_{\varepsilon,\rho}(y) = \int_{\varepsilon(1+|y|^2)}^{\rho(1+|y|^2)} \tilde{\mu}(\eta) \frac{d\eta}{\eta}$$

dır. Teoremin ifadesinde tanımladığımız $\tilde{c}_\mu$ sonlu olduğundan, $\int\limits_0^t \tilde{\mu}(\eta)\frac{d\eta}{\eta}$ fonksiyonu $[0,\infty]$ üzerinde süreklidir ve bu nedenle $c \stackrel{def}{=} \sup\limits_{t>0} |\int\limits_0^t \tilde{\mu}(\eta)\frac{d\eta}{\eta}|$ sonludur. Böylece,

$$|k_{\varepsilon,\rho}(y)| = \left| \int\limits_0^{\rho(1+|y|^2)} \tilde{\mu}(\eta)\frac{d\eta}{\eta} - \int\limits_0^{\varepsilon(1+|y|^2)} \tilde{\mu}(\eta)\frac{d\eta}{\eta} \right| \leq 2c. \tag{4.9}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi Plancherel formülü ve Lebesgue İntegrali Altında Limite Geçme Teoreminden $\varepsilon \to 0$, $\rho \to \infty$ için:

$$\begin{aligned} \|f_{\varepsilon,\rho} - \tilde{c}_\mu f\|_{L^2} &= (2\pi)^{-n/2}\|f^\wedge_{\varepsilon,\rho} - \tilde{c}_\mu f^\wedge\|_{L^2} \\ &= (2\pi)^{-n/2}\|f^\wedge(k_{\varepsilon,\rho} - \tilde{c}_\mu)\|_{L^2} \to 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Genel durumda yani, herhangi bir $g \in L_2$ fonksiyonu için lemmanın hükmü şöyle ispatlanabilir: $f \in L_{1,\nu} \cap L_2$ için tanımlanan

$$(A_{\varepsilon,\rho}f)(x) \equiv f_{\varepsilon,\rho}(x) = \int\limits_\varepsilon^\rho \left(V_{\mu,\nu}f\right)(x,\eta)\frac{d\eta}{\eta},\ (0 < \varepsilon < \rho < \infty)$$

doğrusal operatörü güçlü $(2,2)$ tiplidir. Gerçekten, Minkowski eşitsizliğinden

$$\|A_{\varepsilon,\rho}f)\|_2 \leq \int\limits_\varepsilon^\rho \left\|\left(V_{\mu,\nu}f\right)(\cdot,\eta)\right\|_2 \frac{d\eta}{\eta} \leq \|f\|_2\|\mu\| \ln\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4.10}$$

bulunur. Burada $\|\mu\| = \int\limits_{[0,\infty)} d|\mu|(t) < \infty$ dur. Aslında, $A_{\varepsilon,\rho}$ operatörlerinin normları $\varepsilon$ ve $\rho$'dan bağımsızdır. Gerçekten, Plancherel teoremi ve (4.9)'dan her $f \in L_{1,\nu} \cap L_2$ için

$$\begin{aligned} \|A_{\varepsilon,\rho}f\|_2 &= \|f_{\varepsilon,\rho}\|_2 = c(n,\nu)\|f^\wedge_{\varepsilon,\rho}\|_2 = c(n,\nu)\|f^\wedge k_{\varepsilon,\rho}\|_2 \\ &\leq 2c.c(n,\nu)\|f^\wedge\|_2 = 2c\|f\|_2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

dir. Şimdi $g \in L_2$ olsun. Her $\delta > 0$ için $\|g - f\|_2 < \delta$ olacak biçimde $f \in L_{1,\nu} \cap L_2$ alabiliriz. Bu halde, (4.11)'i göz önünde tutarak,

$$\begin{aligned} &\|g_{\varepsilon,\rho} - \tilde{c}_\mu g\|_2 \leq \|g_{\varepsilon,\rho} - f_{\varepsilon,\rho}\|_2 + \|f_{\varepsilon,\rho} - \tilde{c}_\mu f\|_2 + \|\tilde{c}_\mu f - \tilde{c}_\mu g\|_2 \\ &= \|(g - f)_{\varepsilon,\rho}\|_2 + |\tilde{c}_\mu|\|f - g\|_2 + \|f_{\varepsilon,\rho} - \tilde{c}_\mu f\|_2 \\ &\leq (2c + |\tilde{c}_\mu|)\|f - g\|_2 + \|f_{\varepsilon,\rho} - \tilde{c}_\mu f\|_2 \leq (2c + |\tilde{c}_\mu|)\delta + \|f_{\varepsilon,\rho} - \tilde{c}_\mu f\|_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan sonrası açıktır. ■

## 4.4. Calderón Türetme (Reproducing) Formülünün $L^p$ Versiyonu

Bundan sonraki amacımız, Teorem 4.3.1 'i $L^p$– fonksiyonları için genişletmektir.

Önce aşağıdaki yardımcı lemmaları verelim.

**Lemma 4.4.1.** [Rubin , p 189] $\mathbb{R}^1$ *üzerinde tanımlı* $\mu$ *Borel ölçümü için* $\operatorname{supp}\mu \subset [0,\infty)$, $|\mu|(\mathbb{R}^1) < \infty$, $\mu(\mathbb{R}^1) = 0$ *ve* $\int_{[0,\infty)} |\log t|\; d|\mu|(t) < \infty$ *özellikleri sağlansın. Bu halde,*

$$k(s) = \frac{1}{s} \int_{(0,s)} d\mu(t)$$

*olmak üzere,* $k(s) \in L_1(0,\infty)$ *ve* $\int_0^\infty k(s)\, ds = \int_{(0,\infty)} \log \frac{1}{s}\, d\mu(s)$ *dir.*

**Lemma 4.4.2.** [Rubin 1999, sf.8] $\lambda > 0$ *ve* $\mu$ $\mathbb{R}^1$ *üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip sonlu bir Borel ölçümü olsun,*

a) $\operatorname{supp}\mu \subset [0,\infty)$,

b) $\int_{[0,\infty)} s^j\, d\mu(s) = 0,\; j = 0,1\cdots,[\lambda]$ ($\lambda$*'nın tamdeğeri*),

c) *en az bir* $\gamma > \lambda$ *için* $\int_{[0,\infty)} s^\gamma\, d|\mu|(s) < \infty$

*Eğer* $\mu$ *ölçümünün Rieman-Liouville kesirsel integralini*

$$\left(I^{\lambda+1}\mu\right)(s) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{[0,s)} (s-t)^\lambda\, d\mu(t)$$

*ile gösterirsek, o zaman*

$$\left(I^{\lambda+1}\mu\right)(s) = \begin{cases} O(s^\lambda), & s \to 0 \\ O(s^{-\delta}), & s \to \infty; \quad \delta = \min\{\gamma-\lambda, 1+[\lambda]-\lambda\} \in (0,1] \end{cases}$$

*olur. Bundan başka,*

$$\int_0^\infty \left(I^{\lambda+1}\mu\right)(s)\, \frac{ds}{s} = \begin{cases} \Gamma(-\lambda) \int_{[0,\infty)} s^\lambda\, d\mu(s), & \text{eğer } \lambda \notin \mathbb{N} \\ \frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda!} \int_{[0,\infty)} s^\lambda \log s\, d\mu(s), & \text{eğer } \lambda \in \mathbb{N} \end{cases}$$

*özellikleri sağlanır.*

**Teorem 4.4.3.** *$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$ ($L^\infty \equiv \dot{C}$ $|x| \to \infty$ için sonlu limiti olan fonksiyonlar sınıfı) olsun Eğer*

$$supp\, \mu \subset [0,\infty), \quad \mu\{[0,\infty)\} = 0, \quad \int_0^\infty |\log t| d|\mu|(t) < \infty \tag{4.12}$$

*ve*

$$c_\mu \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \log \frac{1}{t} d\mu(t) \tag{4.13}$$

*ise, o zaman*

$$\int_0^\infty (V_\mu f)(x,\eta)\frac{d\eta}{\eta} \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty (V_\mu f)(x,\eta)\frac{d\eta}{\eta} = c_\mu f(x) \tag{4.14}$$

*dır. Burada limit, $L^p$–normunda $(1 \le p < \infty)$ veya hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için noktasal limit olarak anlaşılmaktadır. $p = \infty$ olması durumunda limit, sup–norm anlamındadır.*

**İspat.**

$$I_\varepsilon(f;\mu)(x) = \int_\varepsilon^\infty (V_\mu f)(x,\eta)\frac{d\eta}{\eta}, \ \varepsilon > 0 \tag{4.15}$$

ve $\delta = \delta(t)$ $t = 0$ noktasında toplanmış birim kütle (Dirac fonksiyonu) olmak üzere $\mu'(t) = \mu(t) - \mu(\{0\})\delta$ olsun. (4.12)'den , $\mu(\{0\}) = 0$ dır. Bundan ve (4.3)'den dolayı

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(f;\mu)(x) &= \int_\varepsilon^\infty \frac{d\eta}{\eta} \int_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} e^{-t\eta} W(y,t) f(x - \sqrt{\eta} y) dy d\mu(t) \\ &= \int_0^\infty d\mu'(t) \int_\varepsilon^\infty \frac{d\eta}{\eta} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t\eta} W(y,t) f(x - \sqrt{\eta} y) dy \end{aligned}$$

( $y = z/\sqrt{\eta}$, $\eta = s/t$ koyarak (2.54)'ü kullanıyoruz)

$$= \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_0^{s/\varepsilon} d\mu'(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-s} W(z,s) f(x-z) dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} W(z,s) f(x-z) e^{-s} \left[\frac{1}{s} \int_0^{s/\varepsilon} d\mu'(t)\right] dz ds$$

$$\overset{def}{=} \int_{\mathbb{R}^n\times(0,\infty)} f(x-z)K_\varepsilon(z,s)dzds \tag{4.16}$$

burada,

$$k_\varepsilon(z,s) = e^{-s}W(z,s)k_\varepsilon(s), \tag{4.17}$$

$$k_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}k(\frac{s}{\varepsilon}), \quad k(s) = \frac{1}{s}\int_0^s d\mu'(t) \equiv \frac{1}{s}\mu((0,s)) \tag{4.18}$$

dir. Şimdi (4.16)'de $\varepsilon \to 0$ için limite geçelim. Bunun için (4.16)'da $s = \varepsilon\tau$, $ds = \varepsilon d\tau$; $z = \sqrt{\varepsilon}y$, $dz = \varepsilon^{n/2}dy$ değişken değiştirmelerini yaparsak ve (2.54)'ü göz önünde tutarsak,

$$I_\varepsilon(f,\mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n\times(0,\infty)} f(x-\sqrt{\varepsilon}y)W(y,\tau)e^{-\varepsilon\tau}k(\tau)dyd\tau \tag{4.19}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.12) varsayımları altında, $k(\tau) \in L^1(0,\infty)$ olduğu iyi bilinmektedir (Lemma 4.4.1.). Böylece $c'_\mu = \int_0^\infty k(\tau)d\tau$ dersek, (2.53) ve (4.19)'den

$$\begin{aligned} \|I_\varepsilon(f,\mu) - c'_\mu f\|_{L^p} &\leq \int_{\mathbb{R}^n\times(0,\infty)} |k(\tau)|e^{-\varepsilon\tau}W(y,\tau)\|f(x-\sqrt{\varepsilon}y) - f(x)\|_{L^p}\, dyd\tau \\ &+\|f\|_{L^p}\int_{\mathbb{R}^n\times(0,\infty)} |k(\tau)|W(y,\tau)|e^{-\varepsilon\tau}-1|dyd\tau \end{aligned} \tag{4.20}$$

elde ederiz. Lebesgue integral altında limite geçme teoreminden , (4.20)'ün sağ tarafı $\varepsilon \to 0$ için sıfıra gider. Böylece aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$\overset{(L^p)}{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_\varepsilon^\infty (V_\mu f)(x,\eta)\frac{d\eta}{\eta} = c'_\mu f(x), \ 1 \leq p \leq \infty$$

($L^\infty$, sup–norm ile birlikte $\overset{\bullet}{C}$ sınıfı olarak yorumlanır ).

Şimdi (4.14)'de hemen hemen her yerde noktasal yakınsamayı ispatlayalım; (4.19)'den

$$|I_\varepsilon(f,\mu)(x)| \overset{(2.54)}{\leq} \int_0^\infty |k(\tau)|e^{-\varepsilon\tau}d\tau \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-z)|W(z,\varepsilon\tau)dz$$

$$\leq \sup_{s>0}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-z)|W(z,s)dz \int_0^\infty |k(\tau)|e^{-\varepsilon\tau}d\tau \overset{(2.58)}{\leq} c_1 M_f(x)$$

olur. Burada, $M_f(x)$ $f$'in Hardy–Littlewood maksimal fonksiyonu ve

$$c_1 = \int_0^\infty |k(\tau)| d\tau$$

dir. Böylece $\sup_{\varepsilon>0} |I_\varepsilon(f,\mu)(x)| \leq c_1 M_f(x)$ olur ve buradan, $measA$, $A$ kümesinin ölçümü olmak üzere, $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\begin{aligned} meas\{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{\varepsilon>0} |I_\varepsilon(f,\mu)(x)| > t\} &\leq c_1 meas\{x \in \mathbb{R}^n : M_f(x) > t\} \\ &\leq (c_2 \|f\|_{L^p} t^{-1})^p \end{aligned} \tag{4.21}$$

olduğu görülür.

$\varepsilon \to 0$ iken her $f \in \overset{\bullet}{C} (\mathbb{R}^n)$ için ( bu fonksiyonların kümesi $L^p$, $1 \leq p < \infty$ da yoğundur) h.h.h. $I_\varepsilon(f,\mu)(x) \to c'_\mu f(x)$ olduğundan, (4.21) tahminini ve Teorem 2.8.1.'i kullanarak, her $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$ için $\varepsilon \to 0$ iken h.h.h. $I_\varepsilon(f,\mu)(x) \to c'_\mu f(x)$ olduğunu elde ederiz. Teoremin ispatını tamamlamak için geriye

$$c'_\mu = \int_0^\infty k(\tau) d\tau = \int_0^\infty \log \frac{1}{\tau} d\mu(\tau) = c_\mu \qquad \text{(bak (4.13))}$$

olduğunu göstermek kaldı. Bu iyi bilinen gerçeği (Lemma 4.4.1.) kısaca burada ispatlayalım. $\int_0^\infty d\mu(s) = 0$ olduğundan $\int_0^\tau d\mu(s) = -\int_\tau^\infty d\mu(s)$'dir. Bu eşitlikten ve Fubini teoreminden,

$$\begin{aligned} c'_\mu &\equiv \int_0^\infty \left( \frac{1}{\tau} \int_0^\tau d\mu(s) \right) d\tau = \int_0^1 \left( \frac{1}{\tau} \int_0^\tau d\mu(s) \right) d\tau - \int_1^\infty \left( \frac{1}{\tau} \int_\tau^\infty d\mu(s) \right) d\tau \\ &= \int_0^1 \left( \int_s^1 \frac{d\tau}{\tau} \right) d\mu(s) - \int_1^\infty \left( \int_1^s \frac{d\tau}{\tau} \right) d\mu(s) = \int_0^\infty \log \frac{1}{s} d\mu(s) \equiv c_\mu \end{aligned}$$

olur. ■

## 5. AĞIRLIKLI DALGACIK DÖNÜŞÜMLERİ KULLANILARAK BESSEL POTANSİYELLERİNİN TERSLERİNİN BULUNMASI

$J^\alpha$ $(\alpha > 0)$ potansiyellerinin tersleri formal olarak (4.8)'de $\alpha$ yerine $-\alpha$ konulmasıyla elde edilebilir. Şimdi bu gözlemden yola çıkarak Bessel potansiyellerinin terslerini belirleyelim.

**Teorem 5.1.1.** *$\mu$ dayanağı $[0,\infty)$ olan bir Borel ölçümü olsun. Ayrıca $\mu$ ölçümü için,*

$$\text{(i)} \quad \int_0^\infty t^j d\mu(t) = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, [\alpha/2] \quad (\alpha/2\text{'nin tamdeğeri }), \tag{5.1}$$

$$\text{(ii)} \quad \text{en az bir } \beta > \alpha/2 \text{ için } \int_0^\infty t^\beta d|\mu|(t) < \infty \tag{5.2}$$

*özellikleri sağlansın. Bu durumda $\varphi = J^\alpha f$, $f \in L^p$, $1 \le p \le \infty$ $(L^\infty \equiv \dot{C})$ ise, o zaman*

$$\int_0^\infty (V_\mu\varphi)(x,\eta)\frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}} \overset{tanım}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty (V_\mu\varphi)(x,\eta)\frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}} = d_{\alpha,\mu} f(x) \tag{5.3}$$

*eşitliği sağlanır. Burada $d_{\alpha,\mu}$ katsayısı,*

$$d_{\alpha,\mu} = \begin{cases} \Gamma(-\alpha/2)\int\limits_0^\infty t^{\alpha/2}d\mu(t) & \text{eğer } \alpha/2 \notin \mathbb{N} \\ \frac{(-1)^{1+\alpha/2}}{(\alpha/2)!}\int\limits_0^\infty t^{\alpha/2}\log t\, d\mu(t) & \text{eğer } \alpha/2 \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{5.4}$$

*formülü ile belirlenir. (5.3)'de limit $1 \le p < \infty$ için $L^p$-normunda ve noktasal olarak alınıyor ( h.h.h.). $p = \infty$ olması halinde limit sup-norm alınır.*

**İspat.** (4.2) ve (4.6) göz önünde tutularak,

$$(V_\mu J^\alpha f)(x,\eta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int\limits_{\mathbb{R}^n\times(0,\infty)}\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n\times(0,\infty)} e^{-\tau}\tau^{\alpha/2-1}W(z,\tau)f(x-\sqrt{\eta}y-z)dzd\tau\Big]\times$$
$$\times e^{-t\eta}W(y,t)dy\,d\mu(t)$$

olduğu görülür. Fubini teoremini uygularsak,

$$(V_\mu J^\alpha f)(x,\eta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int\limits_{(0,\infty)} e^{-t\eta}d\mu(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n} W(y,t)dy\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n\times(0,\infty)} e^{-\tau}\tau^{\alpha/2-1}W(z,\tau)f(x-\sqrt{\eta}y-z)dzd\tau$$

$\left(y = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\xi, \quad dy = (\frac{1}{\sqrt{\eta}})^n d\xi \qquad \text{değişken değiştirmesini yapıyoruz}\right)$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_{(0,\infty)} e^{-t\eta} d\mu(t) \int\limits_{\mathbb{R}^n} W(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\xi, t)(\frac{1}{\sqrt{\eta}})^n d\xi \int\limits_{(0,\infty)} e^{-\tau}\tau^{\alpha/2-1} d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} W(z,\tau) f(x-\xi-z)dz$$

elde ederiz. Şimdi, (2.54)'den

$$W(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\xi, t)(\frac{1}{\sqrt{\eta}})^n = W(\xi, \eta t)$$

olduğunu göz önünde tutarak $z$ yerine $z-\xi$ koyarsak,

$$(V_\mu J^\alpha f)(x,\eta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_{(0,\infty)} e^{-t\eta} d\mu(t) \int\limits_{\mathbb{R}^n} W(\xi, \eta t) d\xi \int\limits_{(0,\infty)} e^{-\tau}\tau^{\alpha/2-1} d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} W(z-\xi, \tau) f(x-z)dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_{(0,\infty)} e^{-t\eta} d\mu(t) \int\limits_{(0,\infty)} e^{-\tau}\tau^{\alpha/2-1} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-z)dz \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} W(z-\xi, \tau) W(\xi, \eta t) d\xi$$

$$\stackrel{2.53}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_{(0,\infty)} e^{-t\eta} d\mu(t) \int\limits_{(0,\infty)} e^{-\tau}\tau^{\alpha/2-1} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-z) W(z, \tau+\eta t) dz$$

bulunur. Bu eşitlikde $\tau$ yerine $\tau - \eta t$ koyarsak,

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_{(0,\infty)} d\mu(t) \int\limits_{(0,\infty)} e^{-\tau}(\tau-\eta t)_+^{\alpha/2-1} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-z) W(z,\tau) dz$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$(\tau - \eta\tau)_+^{\frac{\alpha}{2}-1} = \begin{cases} (\tau-\eta\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} & , \text{ if } \tau > \eta\tau, \\ 0 & , \text{ if } \tau \le \eta\tau \end{cases}$$

dir. Böylece,

$$(G_\tau f)(x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-z) W(z,\tau) dz$$

gösterimini kullanarak,

$$(V_\mu J^\alpha f)(x,\eta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_{(0,\infty)} e^{-\tau}(G_\tau f)(x)d\tau \int\limits_0^{\tau/\eta} (\tau - \eta t)_+^{\alpha/2-1} d\mu(t)$$

olduğunu buluruz Bu durumda

$$\int\limits_\varepsilon^\infty (V_\mu J^\alpha f)(x,\eta) \frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_{(0,\infty)} e^{-\tau}(G_\tau f)(x)d\tau \int\limits_0^{\tau/\varepsilon} d\mu(t) \int\limits_0^\infty (\tau - \eta t)_+^{\alpha/2-1} \frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_{(0,\infty)} e^{-\tau}(G_\tau f)(x)d\tau \int\limits_0^{\tau/\varepsilon} t^{\alpha/2-1} d\mu(t) \int\limits_\varepsilon^{\tau/t} (\frac{\tau}{t} - \eta t)_+^{\alpha/2-1} \frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}}$$

olur. Şimdi, aşağıdaki (5.5) formülünde (Gradshteyn (1994) 3.238(3) numaralı formül) $u = 0,\ \nu = 1,\ \theta = \alpha/2,\ a = \varepsilon,\ b = \eta/\tau$ koyarsak

$$\int\limits_a^b \frac{(b-t)^{\theta-1}(t-a)^{\nu-1}}{|t-u|^{\theta+\nu}} dt = \frac{\Gamma(\theta)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\theta+\nu)} \frac{(b-a)^{\theta+\nu-1}}{|a-u|^\theta |b-u|^\nu}, \quad u \notin [a,b] \qquad (5.5)$$

$$\int\limits_\varepsilon^{\tau/t} (\frac{\tau}{t} - \eta t)_+^{\alpha/2-1} \frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}} = \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma(1+\alpha/2)} \frac{(\tau/t - \varepsilon)^{\alpha/2}}{\varepsilon^{\alpha/2}\tau/t}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği kullanarak,

$$\psi_\varepsilon(\tau) = \frac{1}{\varepsilon}\lambda_\alpha(\frac{\tau}{\varepsilon}),\ \lambda_\alpha(s) = \frac{1}{s}\left(I^{\alpha/2+1}\mu\right)(s)$$

olmak üzere (burada $\left(I^{\alpha/2+1}\mu\right)(s)$ $\mu$ ölçümünün Riemann–Liouville kesirsel integralidir ( Lemma 4.4.2.)),

$$\int\limits_\varepsilon^\infty (V_{\mu,\nu} J^\alpha f)(x,\eta) \frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}} = \int\limits_0^\infty e^{-\tau} G_\tau f(x) \psi_\varepsilon(\tau) d\tau \qquad (5.6)$$

elde ederiz. (5.1) ve (5.2) özelliklerinden , $\lambda_\alpha(s) \in L_1(0,\infty)$ ve $\int\limits_0^\infty \lambda_\alpha(s)ds = d_{\alpha,\mu}$ olur. Burada $d_{\alpha,\mu}$ (5.4)'de tanımlandığı gibidir

Böylece Teorem 4.4.3.' de olduğu gibi

$$\left\| \int_{\varepsilon}^{\infty} (V_{\mu,\nu} J^{\alpha} f)(x,\eta) \frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}} - d_{\alpha,\mu} f(x) \right\|_{p,\nu} = \left\| \int_{0}^{\infty} e^{-\tau} G_{\tau} f(x) \psi_{\varepsilon}(\tau) d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{0}^{\infty} f(x) \lambda_{\alpha}(\tau) d\tau \right\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu} \int_{0}^{\infty} |e^{-\tau\varepsilon} - 1| |\lambda_{\alpha}(\tau)| d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} \|G_{\tau\varepsilon} f(x) - f(x)\|_{p,\nu} |\lambda_{\alpha}(\tau)| d\tau$$

eşitsizliğini elde ederiz. İspat'ın geri kalanı Teorem 4.4.3. ile aynıdır. ■

**Sonuç.** Eğer Teorem 5.1.1.'in ön koşullarını sağlayan bir $\mu$ ölçümü bulabilirsek (5.3) formülünü uygulayarak $J^{\alpha} f$ Bessel potansiyellerinin terslerini bulabiliriz. Aşağıdaki örnekte istenen koşulları sağlayan bir $\mu$ ölçümünü veriyoruz.

**Örnek.** $\delta_k = \delta_k(t)$ $t = k$ noktasındaki Dirac fonksiyonu olmak üzere, $\mu$ ölçümünü

$$\mu = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k \delta_k, \ (l > \alpha/2)$$

olarak tanımlayalım. (4.2) formülünden $f$ fonksiyonunun dalgacık dönüşümü

$$\begin{aligned} (V_{\mu} f)(x,\eta) &= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k e^{-k\eta} \int_{\mathbb{R}^n} W(y,1) f(x - \sqrt{k\eta} y) dy \\ &= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k e^{-k\eta} (G_{k\eta} f)(x), \end{aligned}$$

olur. (Burada $(G_t f)(x)$ $f$ fonksiyonunun Gauss–Weierstrass integralidir (2.56)) Bundan başka (5.3) formülü verilen $\mu$ ölçümü için,

$$\int_{0}^{\infty} (V_{\mu} f)(x,\eta) \frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}} = \int_{0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k e^{-k\eta} (G_{k\eta} f)(x) \frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}}.$$

olarak elde edilir. Geriye $\mu$ ölçümünün (5.1) ve (5.2) koşullarını sağladığını göstermek kaldı. Bunun için,

$$\int_{0}^{\infty} t^{\theta} d\mu(\theta) \equiv A_l(\theta) = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k k^{\theta}, \ \theta > 0$$

fonksiyonu $\theta = 1, 2, 3, \cdots, l-1$ noktalarında sıfır olduğundan ( bu noktalar dışında sıfırdan farklıdır; Samko, Kilbas, Marichev (1993) ), $\mu$ ölçümü (5.1) ve (5.2) koşullarını sağlar. Son olarak 5.3 formülündeki $d_{\alpha,\mu}$ katsayısının sıfırdan farklı olduğunu göstereceğiz. Bunun için (5.4) formülü ile verilen $d_{\alpha,\mu}$ katsayısının aşağıdaki eşitini kullanacağız. $d_{\alpha,\mu}$ katsayısının bu yeni gösterimi Rubin (1999, sf.9) kaynağında verilmiştir:

$$d_{\alpha,\mu} = \int_0^\infty \frac{dv}{v^{\frac{\alpha}{2}+1}} \int_0^\infty e^{-vt} d\mu(t). \tag{5.7}$$

Şimdi,

$$\int_0^\infty e^{-vt} d\mu(t) = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^j e^{-vj} = (1 - e^{-v})^l,$$

eştliğini (5.7) formülünde kullanırsak

$$d_{\alpha,\mu} = \int_0^\infty v^{-\frac{\alpha}{2}-1} (1 - e^{-v})^l dv \neq 0$$

istediğimiz sonucu elde ederiz.

## KAYNAKLAR


ADAMS, R., ARONSZAJN, N., and SMITH, K.T. 1973. Theory of Bessel potentials, II., Ann Inst. Fourier. Grenoble, 17, No 2, 1-135.

ALIEV, I.A., and RUBIN, B. 2002 Parabolic wavelet transforms and Lebesgue of parabolic potentials, Rocky Mountain Journal of Math ,**32**, No 2, 391-408.

ALIPRANTIS, C. D., and BURKINSHAW, O. 1989 Principles of Real Analysis, Acedemic Press, New York, 295 pp.

ARONSZAJN, N., and SMITH, K.T.1961. Theory of Bessel potentials,I, Ann Inst. Fourier. Grenoble, **11** (961), 385–475.

ARONSZAJN, N, MULLA, F.,and SZEPTYCKI, P. 1963. On spaces of potentials connected with $L_p$ classes, Ann Inst. Fourier. Grenoble, **13**, No 2, 211–306.

DUOANDIKOETXEA J. Fourier Analysis, AMS, USD, 222 pp.

FOLLAND B. G. 1999. Real Analysis, Modern Techniques and Their Applica tions, second edition, Wiley-Interscience Publication, New York, 386 pp.

GRADSHTEYN, I.S., and RYZHIK, I.M.1994 Table of integrals, series, and products, fifth edition, Academic Press, 1204 pp.

NOGIN, V.A 1982. On inversion of Bessel potentials, Differential Equations, **18**, No 8, 1407–1411.

RUBIN, B. 1986. Description and inversion of Bessel potentials by using hy persingular integrals with weighted differences, Differential Equa tions,**22**, No 10, 1246–1256.

RUBIN, B. 1987. Inversion of potentials on $\mathbb{R}^n$ with the aid of Gauss–Weierstrass integrals, Math. Notes, **41**, No 1–2, 22–27.

RUBIN, B 1996. Fractional integrals and potentials, Addison Wesley Longman, Essex, U K., 408 pp.

RUBIN, B.1998. The Calderón reproducing formula, windowed X–Ray trans forms and Radon transforms in $L^p$–spaces, The J. of Fourier Anal. and Appl., **4**, No 2, 175–197.

RUBIN, B. 1999. Fractional integrals and wavelet transforms associated with Blaschke–Levy representations on the sphere, Israel J. of Math.,**114**, 1–27.


RUBIN, B 1999 Fractional integrals and wavelet transforms associated with Blaschke–Levy representations on the sphere, Israel J. of Math.,**114**, 1–27.


SADOSKY C. 1979. Interpolation of Operators and Singular Integrals, Marcel Dekker Inc., New York, 375 pp

SAMKO, S.G., KILBAS, A.A. and MARICHEV, O.I.1993. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications, Gordon and Breach, London, 688 pp

STRICHARTZ R., 1994. A guide to distribution theory and Fourier transforms, CRC Press Inc, USD, 213 pp.

TRIMÉCHE K., 1997. Generalized wavelets and Hypergroups, Gordon and Breach, Amsterdam, 320 pp

STEIN, E.M. 1970. Singular integrals and differentiability properties of func tions, Princeton Univ. Press, Princeton, N J., 286 pp

STEIN, E.M. and WEISS G.1971 Introduction to Fourier analysis on Euclid ean spaces,Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 296 pp