

ANDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

+

TÜRBOMAKİNALARDA AKIŞ ANALİZİ İLE İLGİLİ
BİR ARAŞTIRMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mak.Müh.Mehmet Ali GÜNAY

T155/1-1

Tezin Enstitüye verildiği tarih: 14 Eylül 1987

Tezin Savunulduğu Tarih : 25 Eylül 1987

Tez Danışmanı : Yard.Doç.Dr. Hüseyin ŞALVARLI

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Z.Kazım TELLİ

Yard.Doç.Dr. Mustafa N. BAYHAN

EYLÜL-1987

Ö N S Ö Z

Çalışmalarım esnasında gösterdiği kolaylıklar ve yardımlardan dolayı danışmanlık hizmeti süresince sabır ve metanetinden dolayı Sayın Yard.Doç.Dr. Hüseyin Şalvarlı bey'e en derin saygı ve şükranlarımı sunarım.

Tezin yazımı ve tamamlanması esnasında gayretlerinden dolayı Büro-Hız'ın değerli çalışanlarına teşekkürü bir borç bilirim.

ISPARTA-1987

M.Ali GÜNAY

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SEMBOLLER.....	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
TABLO LİSTESİ	x
TÜRKÇE ÖZET.....	xi
YABANCI DİLDE ÖZET.....	xii
BÖLÜM 1: GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2: TÜRBOMAKİNALAR HAKKINDA GENEL BİLGİ.....	2
2.1. Türbomakinaların Tanımı ve Sınıflandırılması.....	2
2.2. Türbomakinaların Geçmişten Günümüze Gelişimi.....	6
2.3. Türbomakinaların Termodinamiği ve Akışkanlar Mekaniği.....	10
2.3.1. Benzerlik Kanunları ve Boyut Analizi.....	16
2.3.1.1. Sıkıştırılamaz Akışa Boyut Analizinin Uygulanması.....	16
2.3.1.2. Sıkıştırılabilir Akışa Boyut Analizinin Uygulanması.....	19
2.3.1.3. Performans Karakteristikleri..	22
BÖLÜM 3: TÜRBOMAKİNALARDA İÇ-AKIŞ HESAP METODLARI.....	24
3.1. İç-Akış Analizinin Temel İlkeleri.	24
3.2. Türbomakinalarda Akış Bölgesinin Karakteristikleri.....	25
3.3. İç-Akış Analizinde Kullanılan Kabuller.....	27

	<u>Sayfa</u>
3.4. İç-Akış Analizi Metotlarının Sınıflandırılması.....	29
3.4.1. Ortalama Akım Çizgisi Metodu	29
3.4.2. Basit Radyal Denge Metodu.....	30
3.4.3. Akım Çizgisi Eğriliği Metodu.....	30
3.4.4. Sonlu Farklar Metodu.....	30
3.4.5. Sonlu Elemanlar Metodu.....	31
BÖLÜM 4: TÜRBOMAKİNALARDA İKİ-BOYUTLU AKIŞ.....	33
4.1. Akış Hesabında Kullanılan Bazı Temel Tanımlar ve Kavramlar.....	33
4.2. Genel Denklemler.....	36
4.3. Herhangi Bir Türbomakina İçin Sıkıştırılabilir Akışın Hesaplanması.	41
4.4. Bağıl Akım Yüzeylerindeki Akışın İncelenmesi.....	46
4.4.1. S_2 -Yüzeyi Üzerindeki Akışın Hesabı.	47
BÖLÜM 5: ÇÖZÜM METODU.....	61
5.1. Galerkin Formülü.....	61
5.2. Sonlu Elemanlar Metodunun Uygulanması.	63
5.2.1. Akış Bölgesinin Sonlu Sayıda Elemanlara Ayrılması.....	63
5.2.2. Eleman Matrislerinin Elde Edilmesi..	65
5.2.3. Sistem Direngenlik Matrisinin Elde Edilmesi.....	69
5.2.4. Sınır Şartlarının Uygulanması.....	70
5.2.5. Sistem Kararlılık Analizi.....	72
5.2.6. Eleman Uç Noktalarında Diğer Akış Büyüklüklerinin Elde Edilmesi.....	74

	<u>Sayfa</u>
5.2.6.1. Hız Bileşenlerinin Hesaplanması.....	77
5.2.6.2. Termodinamik Özelliklerin Bulunması.....	79
5.3. İterasyon Yöntemi.....	81
BÖLÜM 6: SINIR TABAKA ANALİZİ.....	83
6.1. Sınır Tabaka Analizinin Oluşumu ve Önemi.....	83
6.2. Sınır-Tabakanın Özellikleri.....	85
6.3. Rotorda Oluşan Sınır Tabaka.....	87
6.3.1. Rotor Çıkışındaki Oluşan Sınır Tabaka.....	89
6.4. Sınır Tabakaya Kanat Açıklığının Etkisi.....	90
6.5. Sınır Tabaka Hesap Metotları.....	90
6.5.1. Sınır Tabaka Denklemine Analiz Eden Bazı Araştırmacıların Yaptığı Kabuller.....	92
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	95
KAYNAKLAR.....	98
TABLolar	
ŞEKİLLER	
EKLER.....	
ÖZGEÇMİŞ.....	

SEMBOLLER

a	Ses Hızı, m/s
A	Alan, m ²
b	Kanat Blokaj Katsayısı
c _p	Özgül Isı, kj/kg-K
{f},{F}	Kuvvet Vektörü
h	Özgül Antalpi
H	Toplam Antalpi
I	Rotalpi
J	Koordinat dönüşümü için Jacobion Matris
K	Direngenlik (Stiffness) Matrisi
\dot{m}	Kütlesel Debi, kg/s
M	Mach Sayısı
\vec{n}	Dış yüzey vektörü
N	Şekil fonksiyonu
p	Basınç, N/m ²
r	Radyal Koordinat, m
R	Universal Gaz Sabiti, J/kg-K
S	Entropi
T	Sıcaklık, K
u	İç Enerji
U	Çevresel hız, m/s
V	Mutlak hız, m/s
ω	Açısal Hız, l/s
w	Bağıl Hız, m/sn
w _i	Ağırlık Fonksiyonu
z	Eksenel Koordinat

α	Mutlak Akış Açısı
α'	Kanat Açısı
β	Bağıl Kanat Açısı
ν, λ	Bağıl Yüzey Açılıarı
ν, ξ	Alan Koordinatları
γ	Adyabatik üssü
ρ	Yoğunluk, kg/m^3
ψ	Akım fonksiyonu, kg/s
$\bar{\psi}$	Boyutsuz Akım Fonksiyonu
$\tilde{\psi}$	Ortalama Akım Fonksiyonu
θ	Teğetsel Koordinat, radyan
Ω	Çözüm Bölgesi

İndisler

R	Bağıl Koordinat sistemine göre
A	Mutlak Koordinat Sistemine göre
r	Radyal Bileşen
z	Eksenel Bileşen
θ	Teğetsel Bileşen
e	Eleman
o	Durgunluk değeri
i, p	Herhangi bir nokta
1	Üst akım, giriş
2	Alt akım, çıkış

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1. Kontrol hacminde transfer edilen ışın ve ısının gösterimi.....	11
Şekil 2.2. Genel bir türbomakina için kontrol hacmi.	14
Şekil 2.3. Boyutsuz parametrelerin diagramda gösterilmesi.....	22
Şekil 2.4. Tipik bir santrifüj pompa karakteristiği.....	23
Şekil 3.1. Tipik bir türbomakinanın dizaynının akış şeması.....	100
Şekil 3.2. Eksenel bir kompresörde akışın durumu....	101
Şekil 3.3. Kanal Kontrol yüzeyi.....	102
Şekil 3.4.a. S_1 Akım yüzeyi ve ilgili semboller.....	103
Şekil 3.4.b. S_2 Akım yüzeyi ve ilgili semboller.....	103
Şekil 3.5. Karışık akışlı bir çarkın sonlu farklar metodunun uygulanması.....	104
Şekil 3.6. İki kademeli fanın gerçek ve hesaplanmış akım çizgileri.....	105
Şekil 3.7. Üç-boyutlu akış için sonlu hacimler metodunun yapısı.....	105
Şekil 4.1. Mutlak ve Bağıl koordinat sistemleri....	106

	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.2. Bağlı Akım yüzeyleri.....	107
Şekil 4.3. S_2 Akım yüzeyindeki kuvvetler ve koordinat sistemi.....	108
Şekil 4.4. Akım yüzeyinin yerel geometrisi.....	109
Şekil 5.1. Düzeltilmiş ve Gerçek elemanlar.....	110
Şekil 5.2. $n=3$ için Gauss-Legendre noktalarının durumu.....	110
Şekil 5.3. Denklem (5.15) in tek-boyutta gösterilmesi.....	111
Şekil 5.4. Sekant Direngenlik Şeması.....	111
Şekil 5.5. Sabit Direngenlik Şeması.....	112
Şekil 5.6. Akım çizgilerinin gösterimi.....	112
Şekil 6.1. İkincil Akış ve sınır tabaka oluşumu.	113
Şekil 6.2.a. Çapraz hız bileşeninin oluşumu.....	113
Şekil 6.2.b. Bağlı hareketten dolayı hız profilleri.....	114
Şekil 6.3. Hız Profilleri.....	114
Şekil 6.4. Bağlı ve mutlak çıkış hızlarının birbiriyle bağlantısı.....	115

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 2.1. Türbomakinaların 1. Tip Sınıflandırılması.....	116
Tablo 2.2. Türbomakinaların 2. Tip Sınıflandırılması.....	117
Tablo 3.1. Akış Hesabında Kullanılan Denklemler...	118
Tablo 5.1. Isoparametrik Eleman İçin Şekil Fonksiyonu.....	119
Tablo 5.2. Gaus-Legendre İntegrasyon noktalarının koordinatları ve ağırlıkları.....	120

Ö Z E T

TURBOMAKİNALARDA AKIŞ ANALİZİ İLE İLGİLİ

BİR ARAŞTIRMA

Mehmet Ali GÜNAY

Anahtar kelimeler: İç-akış analizi, sıkıştırılabilir akış, sonlu elemanlar.

Mevcut çalışmada Türbomakinalardaki zamana bağlı, viskoziteli, sıkıştırılabilir akışın analizi yapılmıştır.

Akış, türbomakinanın göbek kısmıyla kanat ucu arasındaki akış-yüzeyinde incelenmiştir. Bu inceleme herhangi bir türbomakinaya (örneğin, aksenal akışlı, radyal akışlı, karışık akışlı) göre yapılmıştır.

Akış yüzeyi üzerindeki hareket denklemi iki-boyutlu kısmî diferansiyel denklem olup, akış fonksiyonuna göre elde edilmiştir. Akışın hareket denklemi, akış fonksiyonuna göre kısmen doğrusal olduğundan, ilk aşamada doğrusal olmayan terimler dikkate alınmadan elde edilen iki-boyutlu Laplace denkleminin çözümü hedeflenmiştir ve buna göre iteratif bir çözüm metodunun modeli kurulmuştur.

Hareket denklemi Galerkin'in ağırlıklı kalıntı yaklaşımına dayanan sonlu elemanlar yöntemi ile basit doğrusal denklem sistemine dönüştürülmüştür. Bu doğrusal denklemlerin çözümüyle çözüm bölgesinin termodinamik özelliklerinin bulunması hedeflenmiştir.

Diğer taraftan türbomakinalarda akış analiz metodlarına genel bir yaklaşım yapılmıştır.

SUMMARY

AN INVESTIGATION ON FLOW ANALYSIS METHOD FOR TURBOMACHINERY

Mehmet Ali GÜNAY

Key words: Through flow analysis, Compressible flow, Finite element.

In this study, unsteady, viscous and compressible flow in turbomachines is analyzed.

The flow is mainly analyzed surface between hub and shroud. This study is carried out for any arbitrary turbomachine (Such as radial flow, axial flow or mixed flow). The equation of motion on the surfaces between hub and shroud is two dimensional partial differential equation and it is obtained in terms of the stream function. Since, the equation of motion for the flow is partially linear according to stream function. In order to solve flow equation, at the first attempt, two dimensional Laplace equation is obtained without taking the nonlinear terms into consideration. Hence, a model of iterative solution is set up. The equation of motion is changed into some simple system of linear equations by means of Galerkin's weighted residual approach which depends on Finite element technique.

It is desired to obtain the thermodynamical properties of flow domain by using these linear equations.

BÖLÜM 1 GİRİŞ

Türbomakinalardaki akış oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. Akış, üç-boyutlu, genelde sıkıştırılabilir, girdaplı, ve daimi değildir.

Türbomakinalardaki akışın çözümü alışılmış analitik metotlarda mümkün olmamaktadır. Ancak bir takım kabullerle, akışı basit yapıya indirgeyerek, akış için sayısal çözümler yapılabilmektedir.

Akış analizi sonucu elde edilen denklem akım fonksiyonuna bağlı iki-boyutlu kısmi diferansiyel denklemdir. Denklemi analitik olarak çözmek imkansızdır. Çözüm için çeşitli sayısal çözüm yöntemleri (örneğin, sonlu farklar, sonlu elemanlar metodu gibi) geliştirilmiştir. Sayısal bilgisayarların gelişmesiyle çözüm metotları probleme daha yaklaşıp çözümler sağlamıştır. Bütün çözüm metodlarında temel aynı olup bazı kabuller ve yaklaşımlarda (örneğin kayıp modeli, sınır tabaka analizi gibi) farklılık göstermektedir. Diğer taraftan programlar bilgisayar hafızasını ve zamanını ekonomik olarak kullanmada farklılık gösterir.

Son yıllarda akış probleminin çözümünde sonlu elemanlar yöntemi yaygın olarak kullanılmaktadır. 1974'den bu yana yapılan çalışmaların çoğunluğu sonlu elemanlar metodu kullanılmaktadır. Sonlu elemanlar metodu diğer sayısal metodlara göre daha iyi sonuçlar vermektedir.

BÖLÜM 2 TÜRBOMAKİNALAR HAKKINDA GENEL BİLGİ

2.1. Türbomakinaların Tanımı ve Sınıflandırılması

Uygulamada enerji dönüşüm makinaları diye adlandırılan grubun büyük bir bölümünü, akışkandaki mevcut enerjiyi veya potansiyel enerjiyi faydalı işe çeviren, tersine dışardan aldığı enerjiyi akışkana transfer eden ve türbomakinalar diye bilinen makinaları kapsar.

Genel anlamda enerji dönüşüm makinaları içinde direk enerji dönüşümünü sağlayan yakıt-hücreleri (fuel-cells), Elektro-Hidrodinamik enerji dönüşüm makinaları ve dinamik enerji dönüşüm makinaları (Buhar türbinleri, gaz türbinleri, su türbinleri, pompalar, kompresörler) yer alır. Dinamik enerji dönüşüm makinaları türbomakinalardır.

Türbomakinaların sınıflandırılması:

Genel olarak akışkan ile mil arasında enerjinin transfer yönüne göre türbomakinalar iki ana grupta toplanır.

a) Güç üreten makinalar

Akışkanda mevcut enerjinin faydalı mil işine dönüşümünü sağlayan makinalardır. Bu tip makinalarda dış yük olarak elektrik jeneratörü veya taşıt tekerleği olabilir. Bu gruba giren makinalar arasında gaz türbinleri , buhar tür-

binleri, içten yanmalı motorlar sayılabilir.

b) Güç tüketen makinalar

Enerji üreten makinalara göre çalışma prensipleri ters yönde olup makina miline verilen enerjinin akışkana transfer edilerek, akışkanın termodinamik özelliklerinin değişmesini sağlarlar. Örneğin akışkan basıncının, hızının veya sıcaklığının artırılarak ortamın enerjisinin artırılması gibi. Bu grupta içinde pompalar, kompresörler, fanlar, bloverler, helikopter rotoru, gibi makinalar yer alır.

Gazların basıncını arttırmada kullanılan güç tüketen makinalara kompresör denir. Kullanılan gazlar, hava, CO₂, buhar olabilir. Sıvıların enerjisini artıran makinalarda pompalardır.

Türbomakinaları enerji dönüşümünü yapan mekanizmaya göre;

1) Rotodinamik tip türbomakinalar

11) Volümetrik tip türbomakinalar

diye tekrar iki guruba ayırabiliriz.

1) Rotodinamik tip türbomakinalar:

Akışkan hüzmesindeki mevcut iç enerji önce kinetik enerjiye dönüştürülerek döner kanatlarda enerjinin faydalı mekanik enerjiye dönüşümü sağlanır. (Kompresörlerde bu durumun tersi söz konusudur) Akışkanda sağlanan hız uygulama yerine göre, örneğin fanlar için 1-2 m/s den gaz veya buhar

türbinlerinde 800 ÷ 900 m/s' ye kadar değişim gösterirler.

11) Volümetrik tip türbomakinalar:

Bu makinalara pozitif yerdeğiştirme makinalarıda denilmektedir. İlke olarak akışkanda mevcut iç enerjinin piston-silindir mekanizmasında hacim genişlemesi oluşturularak mekanik enerjiye dönüşümü sağlanır.

Bu iki tip makina gurubu dizayn yönünden karşılaştırılırsa;

a) Rotodinamik makinalarda akışkandaki mevcut enerjiyi mekanik enerjiye dönüştürme de "rotor" diye adlandırılan ve üzerinde kanatlar taşıyan tek bir hareketli parça mevcuttur. Volümetrik makinalarda ise gidip gelme ve dönme hareketi söz konusudur (örneğin içten yanmalı motorlar). Bu yüzden rotodinamik makinalar daha basit yapıya sahiptir.

b) Rotodinamik makinalar oldukça geniş açısal hız alanında yapılabilirler (örneğin, 300 d/d ile dönen helikopter rotorundan 20.000 d/d açısal hızla dönen küçük bir gaz türbini yapılabildiği gibi). Rotodinamik makinaların boyutları kullanma amaçlarına göre değiştirilebilir. Diş hekimlerinin diş oyma cihazında kullanılan minyatür bloverden uçaklarda kullanılan jet motorlarına kadar değişik ölçülerde yapılabilirler. Yüksek debiler oldukça büyük boyutlar ve yüksek hızların bileşimiyle rotodinamik makinaların

büyük ve küçük güç üretenlerini yapmak mümkündür.

Genel olarak rotodinamik makinalarda birim mil gücüne veya akışkan birim kütesine düşen ağırlık azdır. Volumetrik makinalar hareketli parça sayısı çokluğundan dolayı düşük hızlarda çalışır. Basınçlar rotodinamik makinalara nazaran oldukça yüksektir. Kütleli debiler azdır. Dizaynındaki karmaşıklık nedeniyle daha ağır ve hantal makinalardır. Birim mil gücü için rotodinamik makinalara göre daha fazla hacim kaplarlar.

Rotodinamik tip türbomakinaları akışkanın akış yönüne göre de guruplara ayırmak mümkündür.

1) Aksenal akışlı:

Akışkanın ana akış yönü mil eksenini doğrultusundadır.

II) Radyal akışlı:

Akışkanın ana akış yönü mil eksenine dik doğrultusundadır.

III) Karışık akışlı:

Akışkanın akış yönü hem radyal hem aksenal doğrultusundadır.

Yukarıda verilen bilgilerin özeti Tablo 2.1'deki gösterilebilir. Öteyandan türbomakinaların değişik sınıflandırma şekilleri olabilir. Tipik bir örnek Tablo 22'de belirtilmiştir.

2.2 Türbomakinaların geçmişten günümüze gelişimi.

Türbomakinaların tarihi oldukça eski yıllara dayanmaktadır. Ancak önceki türbomakinalar çok düşük verimli makinalardır. Birbirini izleyen asırlar su çarkları ve çeşitli amaçlar için (örneğin su temininde) değişik makineleri tahrik etmede kullanılmıştır. Modern manada türbomakinaların geliştirilmesi 18.Y.Y'ları dayanır. İsviçreli matematikçi Leonhard Euler, Newton prensibini türbomakinalara uygulayarak Euler denklemleri diye bilinen denklemlerle konuya bilimsel yaklaşım yapmıştır.

Sonraki yıllarda 1884'de Charles Parson mühendislik dünyasında büyük yankılar yapan ilk buhar türbinini geliştirdi. Parson'un türbini 10 HP ve 18.000 d/d da çalışan kademeli aksenel akışlı buhar türbiniydi. Daha sonra Fransa'da August Rateu 1894'de Laval türbini üzerinde denemeler yaparak 1900'larda basınç kademeli aksiyon türbinini geliştirdi. 1896'da Charles G.Curtis, Laval türbinine benzer iki kademedede hız-kademeli buhar türbini geliştirmiştir.

1920'lerde ara buharla ısıtmanın geliştirilmesi, 1925'lerde kızdırıcıların geliştirilmesiyle yüksek verimli ve güçlü buhar türbinlerinin gelişmesine yolaçmıştır.

Buhar türbinlerinin hızla gelişmesine rağmen gaz türbinleri pek geliştirilememiştir. Bunun sebebi yeterince verimli kompresörlerin geliştirilememesiydi. Yıllarca gaz türbini için gerekli sıkıştırma elde edilememiş, özellikle gaz türbinlerinin gerekli sıcaklıkta çalışması için oldukça faz-

la iş gerekmektedir. Böylece bu fonksiyonu gerçekleştirecek yüksek verimli kompresörlerin geliştirilememesi gaz türbinlerinin gelişmesine mani olmuştur.

Sonraki yıllarda ilk gaz türbininin geliştirilmesini Charles Lemale başlatmıştır. Charles Lemala'nın geliştirdiği gaz türbini Brayton veya Joul çevrimine göre çalışıyordu. Verimide yaklaşık %35 civarındaydı. 1920'lere doğru yüksek verimde kompresörlerin geliştirilmesine başlandı. Kompresörlerin verimlerinin artırılmasıyla bir taraftan uçak motorları geliştirilmiştir.

İlk geliştirilen türbinlerde hesaplar bir-boyutlu akışı esas alarak yapılmış ve Euler denklemleri kullanılmıştır ve Euler denklemleri kullanılarak geliştirilen buhar türbinleri başarılı sonuçlar vermiştir. Buhar türbinlerinde akış yönünde basınç azalması olduğundan yani negatif basınç gradyeninden dolayı akışa saptırıcı etkilerin miktarı azaldığından aşırı verim düşmesi olmuyordu. Örneğin buhar türbinlerindeki sınır tabaka bölgesinde ayrılma olayı olmamakta ve yıp fazla oluşmamaktadır. Kompresörlerde tersine akış yönünde basıncın artması, pozitif basınç gradyentinin oluşması ciddi kayıplar doğurmaktadır. Ciddi bir sınır tabaka analizini gerektirmektedir.

İki-boyutlu potansiyel akış teorisinin gelişmesiyle, türbomakinalardaki akışı daha gerçekçi analiz etme imkanı doğmuştur. Akışı kontrol edici çalışmalar yapılmıştır. Örneğin akışa etki eden kayıpları kontrol edici dizaynlar geliştiri-

rildi, Sınır tabaka kontrolü, akış parametrelerinin dağılımının belirlenmesi, bu gibi akışa ters yönde etki eden ve verim düşmesine neden olan sorunlar kontrol edilince yüksek verimde ve performansta kompresörlerin dizaynı geliştirilmiştir.

1930'lu yıllarda türbomakinalardaki akış analizi daha da geliştirilerek üç-boyutlu akış teorisi uygulanmıştır. Yapılan araştırmalar türbomakinaların aerodinamik yapısında geliştirmiştir. Bu analizler kısmen gerçekçi sayılabilir. Bu analizlere göre akışkanın kanatlar arasındaki radyal hızının, makinanın simetrik yapı arzemesi ve radyal dengede olmasından makina gücüne etki etmediği belirlendi. Diğer taraftan aksenal hızın rotor çapıyla bağıntısının olmadığı, tersine çevresel hızın çapla orantılı olduğu makina gücüne etkisi belirlendi. Kanatlar vorteksleri ve çalkantıları engelleyici şekilde dizayn edilmiştir. Bütün yukarıda bahsettiklerimiz önemli özellikler 1930' da Whittle tarafından geliştirilen jet motorunda kullanılmıştır.

Modern manada gaz türbin 1936-39 yıllarında Aurel Stadola ve Adolp Meyer tarafından geliştirilmiştir. Bütün bu gelişmelere rağmen yapılan analizler yinede makinadaki gerçek akışı temsil edememekteydi. Çünkü türbomakinalardaki gerçek akış tamamen üç-boyutlu olduğundan analizi çok zordu. Lorenz ilk kez sonsuz kanat ve sonsuz kalınlıkta kanatta akış analizi yapmıştır. Daha sonra 1946'da Dreyfus teoriyi daha da geliştirdi. 1955' de Schlichting kanat düzenini dizayn etmek için kanatta oluşan vorteksleri, spiral şeklinde oluşan

akışı ve sınır tabakayı inceleyerek kanat profili geliştirmiştir.

Buraya kadar bütün bahsettiklerimiz türbomakinalarda meydana gelen gerçek akışa iyi bir yaklaşım olmayıp sadece bir kanatta meydana gelen akışın incelenmesinden başka birşey değildir. 1952' de Wu' gerçek makinada türbomakinalarda akış analizini yapmıştır. Günümüzün şartlarına göre Wu' nun çalışması klasik bir çalışma sayılabilir. Wu' nun teorisi üç-boyutta oluşan akışı bir takım kabuller yaparak iki-boyutlu akışa indirgemektedir. Wu akışı birbirine dik iki akım yüzeyinde inceleyerek çözmeye muvaffak olmuştur. Bu yüzeyler kanattan kanada tanımlanan S_1 akış yüzeyi, diğeri S_1 yüzeyine dik olarak makina kanatları arasında akışı incelemek için makina meridyenel düzleminde, göbekte kanat ucu arasında S_2 akım yüzeyini tanımladı. Akışı bu iki akım yüzeyi üzerinde kabul ederek iteratif bir çözüm geliştirmiştir.

Akışı karakterize eden denklem akım fonksiyona bağlı iki boyuttaki kısmi diferansiyel denklemdir. Bu denklemi çözmek için çeşitli sonlu farklar çözümleri geliştirilmiştir. Sayısal bilgisayarların gelişmesiyle problemin çözümü daha da gelişti. Konuyla ilgili bir çok bilgisayar programları geliştirilmiştir. Geliştirilen programlar sadece hızlı çözüm açısından farklılık göstermektedir. Bütün çözüm metodlarında temel aynı olup bazı kabuller ve yaklaşımlar (örneğin, sınır tabaka hesabı, kayıp modeli gibi) farklılık göstermektedirler. Diğer taraftan programlar bilgisayar hafıza-

sını ve zamanını ekonomik kullanmakta farklılık göstermektedirler.

Son yıllarda sonlu elemanlar metodunun akış problemlerine etkin olarak uygulanmasıyla her yönden önceki çalışmalara göre önemli gelişmeler oldu. 1974'ten bu yana yapılan çoğu akış analizleri sonlu elemanlar metodu kullanılarak yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar sonlu fark çözümüne göre daha yaklaşık ve iyidir. Sonlu elemanlar metodunun en avantajlı tarafı türbomakinalardaki akış geometrisi çok karmaşık bir yapıda olduğundan, ve sonlu elemanlar metodunun da her türlü karışık geometriye uygulanmasından dolayı elde edilen sonuçlar oldukça iyidir. Sonlu farkların her türlü geometriye uygulanma özelliği yoktur.

2.3. Türbomakinaların termodinamiği ve akışkanlar mekaniği

Türbomakinaların hesabında kullanılan başlıca temel denklemleri (6)

- 1- Süreklilik denklemi
- 2- Termodinamiğin I. kanunu
- 3- Newton'un ikinci hareket kanunu
- 4- Termodinamiğin II. kanunu

şeklinde sıralayabiliriz. Denklemler türbomakinaların güç, verim ifadelerini elde etmede kullanılırlar.

1. Süreklilik denklemi: Herhangi bir kontrol hacmine giren akışkan miktarı çıkan akışkan miktarına eşittir. ve

$$m = \rho_1 U_1 A_1 = \rho_2 U_2 A_2 \quad 2.1$$

genel haliyle belirlidir. Şayet akış sıkıştırılamaz ise ρ 'lar dikkate alınmaz.

2. Termodinamiğin I. kanunu:

Bir çevrim esnasında sisteme verilen ısı sistem tarafından yapılan iş ve sistemin iç enerjisindeki değişimine eşittir ve

$$\oint (dQ-dw) = 0 \quad 2.2$$

ifadesiyle belirlidir. $\oint dQ$ sisteme verilen ısıyı ve $\oint dW$ sistem tarafından yapılan işi göstermektedir.

Hergangi bir proste 1 ve 2 sırayla sistemin giriş ve çıkış şartlarını belirtmek üzere sistemin iç enerjisindeki değişimi

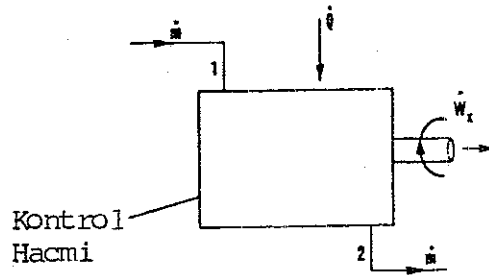
$$E_2 - E_1 = \int_1^2 (dQ - dw) \quad 2.3$$

ifadesi belirler. Denklem 2.3. difarensiyel olarak

$$dE = dQ - dW \quad 2.4$$

şeklinde yazılabilir.

Daimi akış enerji denklemi:



Şekil 2.1. Kontrol hacminde transfer edilen işin ve ısının gösterimi

Termodinamiğin I. kanunu Şekil 2.1'deki kontrol hacmindeki akışkanın daimi akışına uygulanırsa sözkonusu denklem elde edilir.

\dot{m} Kütleli debiyi

Q Sisteme verilen ısıyı

W_x Sistemden elde edilen işi

göstermek üzere daimi akış enerji denklemi

$$Q - W_x = \dot{m} \left[(h_2 - h_1) + \frac{1}{2} (U_2^2 - U_1^2) + g (Z_2 - Z_1) \right] \quad 2.5$$

gibidir. Denklemde 2.5'teki h , özgül entalpi, $\frac{1}{2} U^2$ birim kütlenin kinetik enerjisini, gz birim potansiyel enerjiyi göstermektedir. Denklem 2.5 her türlü türbomakinaya uygulanabilir. Örneğin çoğu türbomakinalardaki akış prosesi adyabatiktir. Bu yüzden $Q=0$ 'dır. Türbinler için $W_x > 0$ 'dır ve böylece Türbin işi

$$W_x = \dot{W} = \dot{m} (h_1 - h_2) \quad 2.6$$

denklemlerle verilir. Kompresörlerde $W_x < 0$ olduğundan kompresör işi

$$\dot{W}_c = -\dot{W}_x = \dot{m} (h_2 - h_1) \quad 2.7$$

şeklindedir.

3. Newtonun ikinci hareket kanunu:

m , kütlesine sahip bir sistemin birim zamanda hareket

miktarının değişimi bu sisteme aynı zaman süresinde tesir eden kuvvetlerin cebrik toplamına eşittir. Bu tanım vektörel olarak

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = M \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) \quad 2.8$$

denklemiyle ifade edilir. Bir kontrol hacmine üniform hızda giren ve çıkan akışkan kütlesi için denklem

$$\Sigma F = \dot{m} (V_2 - V_1) \quad 2.9$$

şeklinde yazılır. Denklem türbomakinalardaki güç ifadesininde etmede kullanılır.

Euler hareket denklemi:

$$\frac{1}{\rho} dp + u du + q dz = 0 \quad 2.10$$

ifadesiyle belirlidir. Newton'un ikinci hareket kanunundan türetilir. Denklem türetilirken kayma gerilmeleri ve şaft işi sürtünmeler dikkate alınmamıştır. Denklem 2.10 bir kontrol hacmindeki akışa akış yönünde uygulanırsa

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho} dp + u du + \frac{1}{2} (U_2^2 - U_1^2) + q(z_2 - z_1) \quad 2.11$$

ifadesiyle bilinen Bernouilli denklemi elde edilir. Bernouilli denkleminin bu hali geneldir. Akışın adyabatik, sıkıştırılabilir, izoterm durumuna göre değişik şekiller alabilir.

Momentumun momenti:

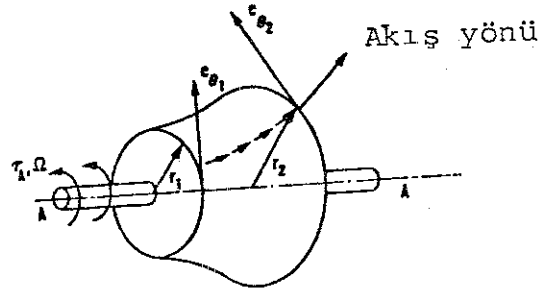
Türbomakinalara Newton'un hareket denklemi uygulanarak güç, ifadesi elde edilir Şekil 2.2 deki gibi türbomakinanın rotorunu içine alan kontrol hacmine uygulanırsa moment ifadesi

$$T = \dot{m} (r_2 U_2 - r_1 U_1) \quad 2.12$$

şeklinde olur. ω açısal hızı göstermek üzere makina gücü

$$N = T \omega = \dot{m} (u_1 v_1 - u_2 v_2) \quad 2.13$$

şeklinde tanımlanabilir.



Şekil 2.2. Genel bir türbomakina için kontrol hacmi

Termodinamiğin II. Kanunu:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad 2.14$$

denklemleriyle bilinir. dQ sisteme T mutlak sıcaklığında transfer edilen ısıyı göstermektedir. Denklem 2.14'deki dQ/T oranı entropi olarak bilinir. Sistemin özelliğidir, tersinmezliğin derecesini gösterir. Entropi ifadesini kullanarak türbomakinalardaki akış hesaplamalarında kullanılacak olan

antropi ile entalpi arasında bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı Gibbs denklemi olarak bilinir.

Türbomakinalardaki verimin tanımı:

Türbinler akışkandaki mevcut enerjiyi bir shaft ve kavrama vasıtasıyla yararlı mekanik işe çevirmek için dizayn edilmişlerdir. η_0 ile gösterilen ve çevirimin verimi diye adlandırdığımız faktör makinanın en önemli bir performansıdır. η_0 'ın tanımı;

$$\eta_0 = \frac{\text{Türbin shaftından (Kavramasından) alınan güç}}{\text{Akışkanın sahip olduğu maksimum güç}}$$

şeklindedir. Türbin rotoruyla türbin shaftı arasında olan kayıplar bir miktar enerjinin sürtünmelere harcanarak ısıya dönüştüğü göz önüne alınır, akışkanın enerjisinin tümünü işe çevirmek mümkün değildir. Bu yüzden bazı verim ifadelerini tanımlamak yerinde olacaktır. Türbinler için adyabatik veya hidrolik verim

$$\eta_t \ (\eta_h) = \frac{\text{Türbin rotorundan birim zamanda alınan mekanik iş}}{\text{Birim zamandaki akışkanın maksimum enerji potansiyeli}}$$

verim ifadesiyle tanımlanabilir.

Mekanik verim (η_m), toplam verimin hidrolik veya adyabatik verime oranı olup

$$\eta_m = \eta_0 / \eta_h$$

ifadesiyle belirlidir.

Su türbinleri için verim ifadesi

$$\eta = \frac{\Delta W_x}{\Delta W_{x_{\max}}} = \frac{\Delta W_x}{q(H_1 - H_2)}$$

şeklindedir. ΔW_x türbin milinden elde edilen işi $(H_2 - H_1)$ akışkanın mevcut maksimum potansiyel enerjisini gösterir.

Pompa ve Kompresörler için verim ifadesi:

$$\eta_c = \frac{\text{Akışkana verilen yararlı enerji}}{\text{Kompresör rotoruna verilen iş}}$$

ifadesi kompresör veya pompa adyabatik verimini, ve

$$\eta_0 = \frac{\text{Akışkana verilen yararlı enerji}}{\text{Kompresör shaftının kavramasına verilen enerji}}$$

ifadesi de kompresör veya pompa toplam verimini tanımlamaktadır. Böylece mekanik verim (η_m),

$$\eta_m = \eta_0 / \eta_c \text{ veya } \eta_0 / \eta_h$$

şeklinde tanımlanabilir.

2.3.1 Benzerlik kanunları ve boyut analizi

2.3.1.1. Sıkıştırılmaz akışa boyut analizinin uygulaması

Türbomakinelerin genel karakteristikleri bir takım boyutsuz parametreler yardımıyla ifade edilerek karşılaştırılabilir.

Bu işlem boyut analizi kullanılarak gerçekleştirilir. Benzerlik kanunları yardımıyla gerçek bir makinanın performanslarını model üzerinde yapılan deneysel testlerle elde etmek mümkündür. Benzerlik kanunları yardımıyla, aynı zamanda bir makinanın değişik çalışma şartlarında performanslarını elde etmeye yarar. İki makinanın benzer olabilmesi için geometrik benzerlik (boyut benzerliği), kinematik benzerlik (hız benzerliği), dinamik benzerlik (Kuvvet benzerliği) şartlarını sağlaması gerekir. Bir türbomakinanın çalışması sırasında önemli değişkenleri

D Makina çark çapı

n Makina devir sayısı

H Makinanın bir tarafından diğer tarafına olan yük farkı

g Yerçekimi ivmesi

ρ Akışkanın yoğunluğu

η Akışkanın viskozitesi

N Akışkan ve çark arasında transfer edilen güç

şeklinde sıralayabiliriz.

Yukardaki değişkenleri kullanarak boyut analizi yardımıyla

$$\frac{gH}{(ND)^2} = f\left(\frac{Q}{ND^3}, \frac{\rho ND^2}{\mu}, \frac{L_1}{D}, \frac{L_2}{D}\right) \quad 2.16$$

boyutsuz parametreleri elde edilir. Geometrik olarak benzer makinalarda L_1/D , L_2/D oranları sabittir. ve genelde ihmal

edilir. Diğer taraftan türbomakinalar üzerinde yapılan deneyler viskozitenin etkisinin diğer etkiler yanında önemli olmadığını ortaya koymuştur. Böylece viskozite terimleri de ihmal edilebilir. Diğer değişkenler arasında verilen bir homolog seri için bir tek akış şartları kümesi ile ilgilenerek

$$K_{\eta} = \frac{\eta N^{1/2}}{\rho^{1/2} (gH)^{5/4}} \quad 2.17$$

boyutsuz ifadesi elde edilir. Türbomakinaların çalışma şartlarında g'nin ve ρ 'nun önemli bir değişim göstermediği göz önüne alınırsa (2.17)bağıntısında ρ ve g ihmal edilir (5) Böylece "Özgül Hız" diye bilinen ve η_s ile gösterilen ifade elde edilir.

Bu ifade örneğin su türbinleri için,

$$\eta_s = \frac{\eta N^{1/2}}{H^{5/4}} \quad 2.18$$

pompalar için,

$$\eta_s = \frac{\eta Q^{1/2}}{H^{3/4}} \quad 2.19$$

şeklindedir. Özgül hız açısal veya çizgisel bir hız değildir. Türbomakinaların, özellikle pompa ve su türbinlerinin dizaynında şekil faktörü rolünü oynar. Makinanın geometrik şekli-

ni sınıflandırır. Özgül hız kavramı teorik özgül türbin kavramından ortaya çıkmıştır. Özgül türbin gerçek türbin gibi aynı homolog serinin üyesidir. Fakat maksimum verimde birim yük altında (örneğin, $1m$), birim güçte ($1 Kw$ veya $1 Hp$) oluşan devir sayısı olarak da tanımlanabilir.

2.3.1.2. Sıkıştırılabilir akışa boyut analizinin uygulanması:

Boyut analizinin sıkıştırılabilir akışa uygulanması sıkıştırılamaz akışa göre biraz zordur. Elde edilen fonksiyonel bağıntılar oldukça karışıktır. Sıkıştırılabilir akışta ele alınan gaz ideal gazdır, ve akışkanın özelliklerinin yanısıra girişteki sesin durma hızı (a_{01}), adyabatik üssü γ değişken olarak alınır. (6)

Boyut analizinde kullanılan başlıca değişkenler

Δh_{01}	Durma entalpisi
μ	Gazın viskozitesi
n	Makina devir sayısı
D	Çark çapı
\dot{m}	Kütlesel debi
ρ_{01}	Girişteki durma noktası yoğunluğu
a_{01}	Girişteki hızın durma hızı
γ	Adyabatik üssü
η	Makina verimi
P	Makina gücü

şeklinde sıralanabilir. Bunları fonksiyon olarak

$$\Delta h_{0s}, \eta, p = f(\mu, n, D, \dot{m}, \rho_{01}, a_{01}, \gamma) \quad 2.20$$

şeklinde yazabiliriz. Bu değişkenler kullanılarak

$$\frac{\Delta h_{0s}}{n^2 D^2}, \eta, \frac{p}{\rho_{01} n^3 D^5} = f\left\{ \frac{\dot{m}}{\rho_{01} n D^3}, \frac{\rho_{01} n D^2}{\mu}, \frac{nD}{a_{01}}, \gamma \right\} \quad 2.21$$

boyutsuz parametreleri elde edilir.

Yukardaki ifade bu şekliyle pek kullanışlı değildir. Bu yüzden bazı dönüşümlerle kullanışlı hale getirilebilir. Adyabatik hal için durma entalpisi, ideal gaz denklemi, termodinamik proses denklemleri kullanılarak;

$$\text{Akış katsayısı} = \frac{\dot{m} \sqrt{(R T_{01})}}{D^2 p_{01} \sqrt{\gamma}} \quad 2.22$$

$$\text{Güç katsayısı} = \frac{p}{\rho_{01} n^3 D^3} \quad 2.23$$

ifadeleri elde edilir. Elde edilen bu yeni ifadeleri Denklem - 2.21'de yerine koyarak

$$\frac{p_{02}}{p_{01}}, \eta, \frac{\Delta T.}{T_{01}} = f\left\{ \frac{\dot{m} \sqrt{R T_{01}}}{D^2 p_{01}}, \frac{nD}{\sqrt{R T_{01}}}, Re, \gamma \right\} \quad 2.24$$

denklemini elde edilir. Pratikte kullanılan gaz tekil gaz olduğundan μ adyabatik üssü, makinanın D,R boyutları, Re sayısı ihmal edilir. Bu takdirde denklem

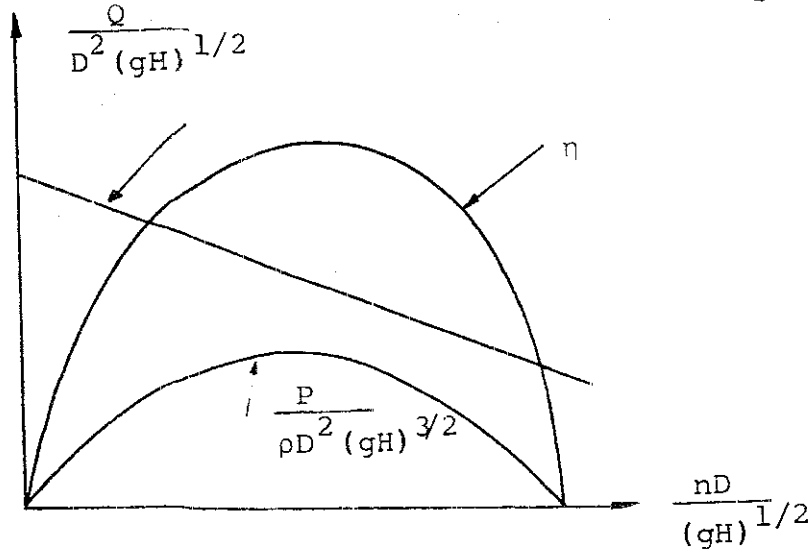
$$\frac{P_{02}}{P_{01}}, \eta, \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = f \left\{ \frac{\dot{m} \sqrt{T_{01}}}{P_{01}}, \frac{N}{\sqrt{T_{01}}} \right\} \quad 2.25$$

halini alır. Yukarıdaki parametreler kullanılarak sıkıştırılmaz akış için bir türbomakinanın (örneğin; kompresör, fan.. vs) performans eğrisi elde edilir.

2.3.1.3 Performans karakteristikleri:

Türbomakinalara ait devir sayısı, yük, debi, güç, verim gibi büyüklükler arasında elde edilen eğriler karakteristik eğriler adını alırlar. Bu eğriler makinanın çalışma şartlarını belirler, ve en uygun makinayı seçme imkânını sağlarlar. Be eğriler genelde değişkenin birini sabit tutarak diğerlerinin buna göre değişimini gösterir. Örneğin bir türbini her zaman maksimum verimle çalıştırmak mümkün değildir. Bu yüzden verimin maksimumdan az olduğu şartlarda türbinin performansını incelemek önemli olacaktır. Düşüğü sabit tutarak dağıtıcı kanat açısının konumu için P güç çıkışı, η verimi ve Q debisi, n hızına karşı bağımsız değişken olarak işaretlenebilir.

Bununla beraber, Şekil 2.3 de gösterildiği gibi boyutsuz parametreleri diyagramda belirtmek daha yararlıdır.



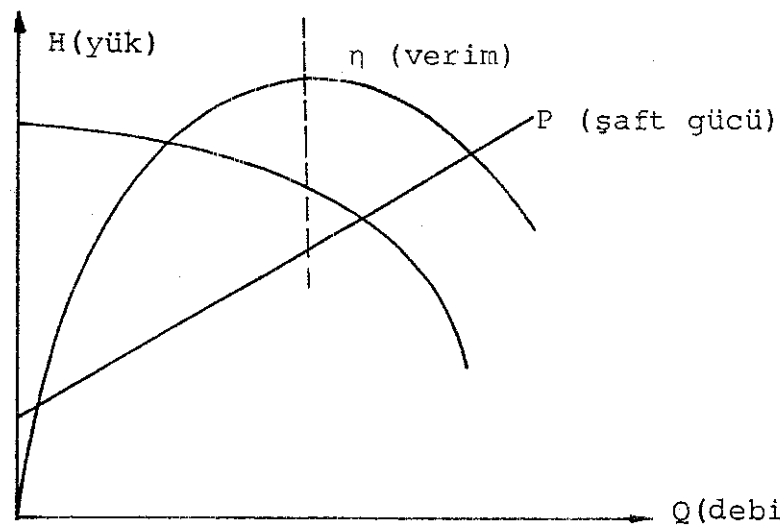
Şekil 2.3. Boyutsuz parametrelerin diyağramda gösterilmesi

Böylece bir eğri küresi hem deney şartlarına hemde herhangi bir düşü altında çalışan aynı homolog serideki herhangi-

bir makınaya uygulanabilir. Genelde şekildeki boyutsuz ifadeleri ρ ve q, D terimleri ihmal edilir. Geriye sırasıyla birim güç ($\frac{P}{H^{3/2}}$), birim akış ($Q/H^{1/2}$), birim hız ($N/H^{1/2}$) diye adlandırdığımız terimler kalır. Bunların sayısal değerleri, makina birim düşü (örneğin, 1 metre) altında sabit verimde çalıştırılırsa sırasıyla güce, hacimsel debiye ve elde edilen hıza karşılır gelir.

Bu karakteristikler diğer türbomakinalarda uygulanabilir. Eğrileri elde ederken ele alacağımız değişkenler önemlidir. Örneğin türbinlerde güç dikkate alınırken, pompalarda debi önemli bir değişken olarak alınmaktadır.

Pompalar normal olarak sabit hızda çalışırlar. Bu yüzden pompalarda H yükünün, Q debisi ile değişimi, verimle pompa gücünün debi ile değişimleri araştırılır. Pompalar için elde edilen performans eğrileri pompa tipine göre (örneğin, santrifüj, eksenel veya karışık akışlı pompalar için) değişir. Şekil 2.4 da tipik bir santrifüj pompa karakteristiği görülmektedir.



Şekil 2.4. Tipik bir santrifüj pompa karakteristiği

BÖLÜM 3: TÜRBOMAKİNALARDA İÇ AKIŞ HESAP METOTLARI

İç-Akış analizi türbomakinanın içinde meydana gelen akışın yapısı, akışkanın makina içinden geçerken nasıl bir yörünge izlediği ve akışkanın termodinamik özelliklerinin değişimi hakkında bilgi verir. (1)

Türbomakinaların yapısının gelişmesi bilgisayarların gelişmesiyle mümkün olmuştur. Modern anlamda akış analizi 1950'li yıllara dayanır. Türbomakinalarda akışın karakteristiğinin iyi anlaşılmasıyla analiz metotlarının hassasiyeti artmıştır. Etkin sayısal yöntemlerin geliştirilmesiyle daha iyi makina modelleri geliştirilmiştir.

Modern akış analizi metodlarının geliştirilmesine rağmen teorik hesap sonucu pratikle fazla yakınlık göstermemektedir. Bunun nedeni teorik hesaplarda yapılan modellemede bir çok sınırlayıcı unsurlar (örneğin, Akış ayrılması, rotor ile stator arasında oluşan akış, köşe akışları, akış tıkanması, şok dalgaları gibi akışı bozucu etkiler) vardır. Türbomakina içindeki meydana gelen akış oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir.

3.1. İç-Akış Analizinin Temel İlkeleri:

Komple bir türbomakina dizaynının akış şeması Şekil 3.1. de gösterilmiştir. Başlangıç aşamasında makinanın konstrüksiyonu deneysel esaslara ve sistem gereksinimlerine

göre yapılır. Sonuçta teorik hesap sonucu, ortaya çıkan model üzerinde deneyler yaparak makinanın gerçek yapısı elde edilmeye çalışılır. İyi makina dizayn etmek için, makina içinde oluşan akışı iyi bilmek gerekir. Ancak türbomakinalarda akışın iyi bilinmesi oldukça zordur. Makina modellenmesinde en önemli kısım Şekil 3.1 de kalın çizgilerle çevrelenmiş dizayn faktörleridir. Konu ile ilgili araştırmacılar en çok bu faktörler üzerinde çalışmalarını yoğunlaştırmaktadırlar.

3.2. Türbomakinalarda Akış Bölgesinin Karakteristikleri;

Türbomakinalarda meydana gelen gerçek akış Viskoz, genelde sıkıştırılabilir ve daimi olmayan bir akıştır. Akışın olduğu bölgede (kanatlarda), akış tamamen üç-boyutlu ve oldukça karmaşık bir yapı gösterir.

Daha öncede belirtildiği gibi akış şeklinin belirlenmesi veya tahmin edilmesi oldukça zordur. Başlangıçta çok iyi bir mühendislik yaklaşımı yapmak gerekir. Makina içinde oluşan akış hakkında bilgi vermesi bakımından aksenel akışlı bir kompresördeki akış Şekil 3.2. de gösterilmiştir.

Şekil 3.2 sadece akışın geometrisinde meydana gelen saptırıcıları göstermektedir. Bunun yanısıra akış bölgesine akışkanların dinamiği ve fiziksel ilkeleri uygulamakta zordur. Direk olarak bu ilkelerin uygulanması hatalı olur. Şekilden de görüleceği gibi akış bölgesinde ikincil akışlar ve

sonuçta bu akışların kötü etkileri görülmektedir. Bütün bunları dikkate alarak akış bölgesinde iyi bir akış analizi yapmak gerekir.

Diğer önemli bir nokta; makinanın sabit kısımlarında ve dönen kısımlarında akışı incelemek için hareketli ve sabit koordinat sistemlerinin tanımlanması gerekir. Dönen kısımlardaki akışı bağıl olarak, sabit kanatlardaki akışta da mutlak olarak ele almak gerekir. Rotorda meydana gelen dönme etkileri dikkate alınmaz.

Hareketli yüzeylerle dönen yüzeylerin birbirine çok yakın olması akışı bozucu bir etkiye sahiptir. Bu yakınlık hareketli yüzeyle, sabit yüzey arasındaki akışta meydana gelen sınır tabaka analizini zorlaştırır.

Yukarda bahsettiklerimiz etkilerin bertaraf edilerek, akışkanın enerjisinin makina miline maksimum verimde transfer edilmesi gerekir. Bu yüzden akış bölgesine iyi bir mühendislik yaklaşımı yapmak gerekir. Fiziksel ve matematiksel bağıntılarla bölgedeki akışı modelize etmek ve kontrol etmek hedeflenmelidir. Türbomakinaların akışını hesaplama yöntemleri oldukça eskidir. Bu çalışmalara örnek olarak, Lorenz'in, Bouersfeld'in, Stadola'nın çalışmaları verilebilir. Bazı araştırmacıların yapmış olduğu çalışmalar Tablo- 3.1 de verilmiştir. Tablodan da görüleceği gibi araştırmacılar akışı ya diferansiyel denklem şeklinde veya integral denklemi şeklinde ifade etmişlerdir. Bazılarında hem diferansiyel hem de integral formda ifade etmişlerdir.

Genelde türbomakinalardaki akış analizi metotları makinanın gövdesini göbekten kanat ucuna iki kısma ayırarak, bu bölgede kontrol yüzeyi seçerek, bölgeyi alt bölgelere ayırarak akışı analiz etmeyi hedefler. Seçilen kontrol yüzeyi genelde dönme eksenine dik; bazan konik, bazen de eğrisel bir yüzey olabilmektedir. Kontrol yüzeyi Şekil-3.3 de görüldüğü gibi meridyenel düzlemedir. Seçilen kontrol yüzeyi kanat girişi veya çıkışıyla uyum göstermektedir. Yani paralel olarak yerleştirilir. Hatta bazan da incelenmesi gereken akış bölgelerinden düzlem geçirilir. İç-Akış analizinin en hassas tarafı bu kontrol yüzeylerinin seçimidir. Kontrol yüzeyi kavramı bazı kaynaklarda hesap yüzeyi, kanal çözüm yüzeyi olarak geçmektedir.

3.3. İç-Akış Analizinde Kullanılan Kabuller.

İç-Akış analizinde bir kaç önemli kabul vardır. Bunlardan birincisi kanatlarda oluşan akışı, yani akışkanın kanada girişini ve çıkışını bağıl olarak ele almak ve akışı bağıl olarak daimi kabul etmek gerekir. Bazı araştırmacılar girişteki hız profilini de üniform olarak kabul ederler.

Akışın bu şekilde kabul edilmesi, akım tübü, akım yüzeyi ve akım çizgileri yardımıyla akışkan parçacıklarının yörüngelerini belirleme imkanı verir. Bu kabülü yapmanın diğer bir avantajıda akışta meydana gelen bazı etkileride devre dışı bırakmak içindir. Bu etkiler makinanın aerodinamik yapısından dolayı meydana gelen etkilerdir.

İç-Akış analizini kullanan bütün araştırmacılar S_1 ve

S_2 akış yüzeylerini kullanırlar. (Şekil. 3.4.) S_1 ve S_2 akış yüzeyleri İç-Akış analizinin temel yapısını teşkil eder. Araştırmacılar akış yüzeyleri kavramını Wu'nun 1952' de geliştirdiği akış teorisine atfederler. S_1 akış yüzeyi Şekil- 3.4.a'da görüldüğü gibi kanattan kanada, yani akış doğrultusuna dik olacak şekilde her hangi iki kanadın ortasından geçer (2). Bu akış yüzeyleri dönen yüzey değildir ama tüm akış bölgesini kanattan kanada akım tüblerine bölen ikinci tip bir kontrol yüzeyidir. S_2 akış yüzeyi Şekil 3.4.b.de görüldüğü gibi türbomakinanın göbek kısmından kanat ucuna makina rotorunu iki parçaya ayıracak şekilde yerleştirilmiştir. S_2 Akış yüzeyi türbomakinanın meridyenel düzlemi üzerindedir ve ikinci bir kontrol yüzeyi oluşturur. Akışkanın termodinamik ve fiziksel özellikleri S_2 düzlemine göre hesaplanır. Elde edilen sonuçların S_1 yüzeyi üzerinde sağlaması yapılır. Bu akış yüzeylerini tanımlamakla Üç-boyutlu akışı, iki-boyutlu akışa indirgeyerek hesapta kolaylık sağlamış oluruz.

İç-Akış analizinde akış, bazı soğutmalı türbinler hariç, akış adyabatik, yani akış yüzeyleri arasında hiç bir ısı transferi olmadığı kabul edilir. İç-Akış analizinde, akış hakkında çok karşılaştığımız terimler simetrik olmayan akış, çevresel ortalama akış gibi terimlerdir. Bu terimler türbomakinalardaki akışı tanımlamak içindir. Bu terimler makina şartlarına göre tanımlanır. Akışın simetrik olmadığı, akış bölgesinde verilen aksel ve radyal koordinatlar yönünde hız bileşenleri veya akışkan özellikleri çevre boyunca değişme göstermediğinden dolaydır.

Çevresel ortalama akış, S_2^- akış yüzeyi üzerinde meydana gelir.

3.4. İç-Akış Analizi Metodlarının Sınıflandırılması:

Bu konuda yapılan gelişmeleri izlemek zordur. Çünkü probleme biribirinden farklı pekçok yaklaşım yapılmıştır. Aslında geliştirilen bütün metodların temel ilkeleri aynıdır. Ancak teferruatları farklıdır. Bütün metodlar akışı üç-boyutlu kabul etmektedir, ve daha önce belirttiğimiz gibi S_1 ve S_2 akış yüzeylerinin seçimi, akışın matematik modelinde, kayıp modelini kabul etmek, kayma faktörünü belirlemede farklılık gösterirler. Yani araştırmacıların yaptıkları kabuller değişiktir.

Genel olarak İç-Akış analizi metodlarını altı ana grupta toplayabiliriz.

- I)- Ortalama-Akım çizgisi metodu
- II)- Basit radyal denge metodu
- III)- Akım çizgisi eğriliği metodu
- IV)- Sonlu farklar metodu
- V)- Sonlu elemanlar Metodu
- VI)- Sonlu hacim metodu.

3.4.1. Ortalama akım çizgisi metodu:

Akış bölgesinde, akışı temsil eden ortalama bir akım çizgisi tanımlanır. Akışkanın özellikleri bu akım çizgisi üzerinde elde edilir. Bu metod çok sayıda yapılan deneyler sonucu ortaya çıkmıştır. Metod daha çok ampirik formüllere dayanır. Akışkan özellikleri ve hız değerleri tanımladığımız

bu akım çizgisinin belirli yerlerinde incelenir. Yani bölgesel kısmi bir akış analizi yapılmaktadır.

3.4.2. Basit Radyal Denge Metodu:

Bu metoda göre, akış türbomakinanın dönme eksenine dik olacak şekilde tanımlanmış kontrol yüzeylerinde incelenir. Türbomakinanın meridyonel düzleminde meydana gelen akış incelenir. Radyal hız bileşenler ve radyal yöndeki etkiler dikkate alınmaz. Akışla ilgili fiziksel bağıntılar ve ampirik deney verileriyle hız dağılımları ve akışkan özellikleri elde edilir.

3.4.4 Akım Çizgisi Eğriliği Metodu:

Bu metodda probleme direk bir yaklaşım yapılır. Akış düzlemi üzerinde bazı akım çizgilerinin izdüşümleri üzerinde hesaplar yapılır. Bu düzlem yine türbomakinanın meridyonel düzlemi üzerindedir. Çözüm iteratif olarak yapılır. Başlangıçta bir grup akım çizgisi takımı seçilir. Ardışık iterasyonlarla bu seçim işlemine devam edilir. Her iterasyon bir öncekine göre daha iyi bir yaklaşım verir. Aynı zamanda iterasyon yapılırken elde edilen verilerin fiziksel bağıntıları ve ampirik ifadeleri sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Son kabul edilen akım çizgisi akımı verilen akış debisi için açısal hızı ve giriş şartlarını belirler.

3.4.4. Sonlu Farklar Metodu:

Sonlu farklar metodu Şekil- 35' de görüldüğü gibi akış bölgesi birbirine dik çizgilerle ağ şeklinde küçük

elamanlara ayrılır. Yine bundan önceki metodda olduğu gibi her elaman için fiziksel bağıntıların ve ampirik ifadelerin sağlanması her eleman için yapılır. Bu elamanlar üzerinde denklemler çözülerek her noktada hızlar ve akışkan özellikleri bulunur. Bu ağ şeklindeki yapı aynı zamanda akım çizgilerinin akış modelini de belirlemek içindir. Akış bölgesinin çok karmaşık bir geometride olması sonlu farklar metodunun uygulanmasında hassas yaklaşıma engel olur.

3.4.5 Sonlu Hacimler Metodu :

Bu metodda akış bölgesi çok sayıda küçük hacimsal elamanlara bölünür. Akış kanalı Şekil 3.7'de görüldüğü gibi sonlu sayıda hacimsal elamanlara ayrılır. Hesap için gerekli denklemler fiziksel bağıntılar ve ampirik formüller her bir elaman için integral dönüşüm denklemlerine elde etmek için kullanılır. Elde edilen denklemler çözülür. Hacimsal elemanların termodinamik özellikleri ve hız dağılımları iteratif olarak elde edilir.

3.4.6 Sonlu Elemanlar Metodu:

Akış bölgesi sonlu sayıda elemanlara ayrılarak akışkan özellikleri ve hızlar bu elemanlar üzerinde incelenir. Akış bölgesinin geometrisine uyum gösterir. Sonlu elemanlar metodu en karmaşık akış problemlerinde bile iyi sonuçlar vermektedir. Sonlu elemanlar metodunun akış problemlerinde etkin olarak kullanılması 1970'li yıllara rastlar. Hirsch ve Warzee (1974) tarafından sonlu elemanların akış problemleri için bilgisayar kodu geliştirildi.

Şekil 36' da görüldüğü gibi her türlü türbomakinaya geometrik yapısı nasıl olursa olsun rahatlıkla uygulanabilmektedir. Pek çok avantajından dolayı mevcut çalışmamızda sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Sonlu elemanlar çözümüyle elde edilen sonuçlar, deneysel sonuçlarla birbirine oldukça yakındır. Son yıllarda türbomakinalar üzerine çalışan araştırmacıların çoğu sonlu elemanlar metodunu kullanmaktadırlar. Sonlu elemanlar metodu ile hesaplanan bazı karakteristikleri Cambridge, Ansaldo ve Hannover türbinleri üzerinde görmek mümkündür. Teorik hesap sonucu elde edilen değerler deneysel sonuçlarla yakınlık gösterir. Bunu Ek-1' deki diagramlardan (1) gözlemek mümkündür.

BÖLÜM 4: TURBOMAKİNALARDA İKİ-BOYUTLU AKIŞ

Bu bölüm temel akışkanın akışını karakterize eden temel denklemlerden oluşur. Genel denklemler bir türbomakinadaki daimi akış şartlarına basitleştirilmiştir. Problemin çözümünde süreklilik denklemi hareket denklemi kullanılarak akış denklemi akış fonksiyonu cinsinden ifade edilmiştir. Denklemün çözümünde bazı değerler bulunacak, bazıları da sistem geometrisinden bellidir.

Üç boyutlu akışın akış modelini ve akışkan özelliklerini (örneğin, ρ , h , s , v_r , v_θ , v_2 gibi değerler) bulmak için.

1. Süreklilik Denklemi
2. Hareket Denklemi
3. Enerji Denklemi
4. Durum Denklemi

denklemleri kullanılacaktır.

4.1. Akış Hesabında Kullanılan Bazı Temel Tanımlar ve Kavramlar

Daimi akış: Bir akışkanın akışını karakterize eden \vec{v} hızı, ρ yoğunluğu ve p basıncı gibi akış parametreleri ve fiziksel özelliklerinin akış bölgesinin her noktasında zamanla değişmediği akıştır. Bunun tersi daimi olmayan akıştır.

İdeal akış: Viskozitesi olmayan sıkıştırılamaz bir akışkanın akışı idealdir. Sıkıştırılamaz akışkanın sıkıştırılabilme ölçüsü ihmal edilebilecek düzeydedir. Bu yüzden sürtünmesiz akış μ dinamik viskozite değerinin çok düşük veya sıfır olduğu akıştır denilebilir. Viskozite olmadığından ideal akışta hız gradyeni oluşmaz, dolayısıyla kayma gerilmeleri sıfır değerindedir.

Akım çizgisi: Sürekli bir çizgi olup akışkan parçacıklarının izlediği yörünge ve yönü belirler. Akım çizgisi üzerinde her noktanın hızı akım çizgisine teğettir. Akım çizgisinin matematiksel ifadesi tek-boyut için

$$\vec{v} \times d\vec{s} = 0 \quad (4.1)$$

denklemlerle belirlidir. İki-boyutlu akış için

$$u dy - v dx = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde dir. Simetrik olmayan akış için

$$v_x dr - v_r dx = 0 \quad (4.3)$$

\vec{S} vektörü akışkanın konumuyla ilgili olup her noktada akım çizgisine teğettir. u ve v sırayla akışkanın x ve y -yönündeki hızlarıdır. v_r akışkanın aksenal ve radyal yöndeki hız bileşenini gösterir.

Akım fonksiyonu (Ψ): Akışkanın akışının matematiksel ifadesidir. İki-boyutlu akış için,

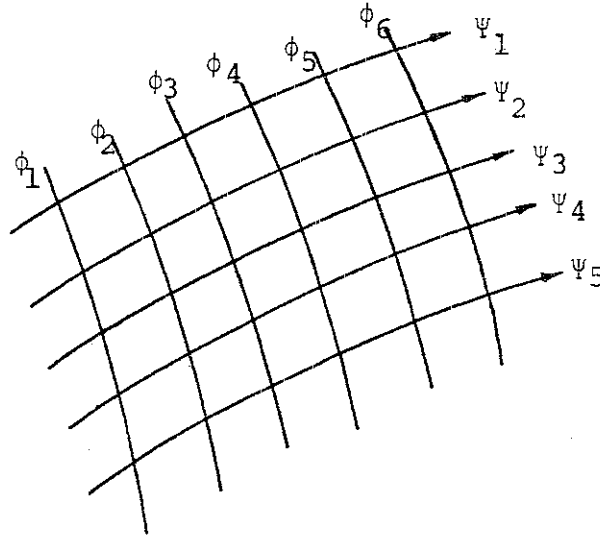
$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.4)$$

ve simetrik olmayan akış için,

$$v_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.5)$$

şeklindedir.

Hız potansiyeli (ϕ): Hız potansiyeli de akışın matematiksel bir ifadesidir. ϕ 'nın sabit olduğu akım çizgileriyle, ϕ 'nın akım çizgilerine dik doğrultuda sabit çizgiler Şekil 'deki gibi akış ağı oluştururlar.



Akım Çizgilerinin Yapısı

iki-boyutlu akış için

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4.6)$$

simetrik olmayan akış için

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (4.7)$$

şeklindedir.

Ψ her iki akış şekli için, akışın döngülü (rotasyonel) veya döngüsüz (irrotasyonel) durumunu belirler. Hız potansiyeli sadece döngüsüz akışlar için kullanılır.

Döngüsüz (irrotasyonel) AKIŞ:

Hiç bir akışkan parçacığı dönme hareketi yapmıyorsa akış irrotasyoneldir. Yani akışkan parçacıklarının açısal hızlarının ortalaması sıfırdır. Irrotasyonel akışın matematiksel ifadesi vektörel olarak

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad (4.8)$$

iki-boyutlu akış için,

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.9)$$

simetrik akış için;

$$\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial r} = 0 \quad (4.10)$$

şeklinde ifade edilebilir.

4.2. Genel Denklemler

Sıkıştırılabilir akış için süreklilik denklemi ve hareket denklemi vektörel olarak mutlak koordinat sistemine göre sırayla

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz) \quad (4.12)$$

denklemleriyle ifade edilebilir (7). Denklem-4.11 ve Denklem-4.12 yerçekimine zıt yönde tanımlanan z koordinat sistemine göre elde edilmiştir. \vec{f} ifadesi akışı saptırıcı sürtünme kuvvettir ve $\frac{1}{\rho} \nabla T$ ifadesi yerine kullanılmıştır. T gerilme tansörüdür. \vec{v} akışkanın mutlak hızını ρ akışkanın yoğunluğunu p basıncını göstermektedir.

Türbomakinalarda akışı bağıl koordinat sisteminde ifade etmek daha kolay ve avantajlıdır. Bağıl koordinat sistemi türbomakinanın rotoruyla birlikte makina mil eksenini etrafında $\vec{\omega}$ açısal hızıyla dönmektedir.

Mutlak ve bağıl koordinat sistemi arasındaki bağıntı Şekil 4.1'de gösterilmiştir. Şekile göre mutlak koordinat sisteminin orijini O, bağıl koordinat sisteminin orijini OR noktasıdır.

\vec{r} ve \vec{r}_R birbirlerine göre sırayla mutlak ve bağıl yer değiştirme vektörleridir.

\vec{a} ; mutlak koordinat sisteminin O orijinine göre bağıl koordinat sistemindeki OR orijininin durum vektörüdür.

Mutlak ve bağıl hızlar sırasıyla

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.13)$$

$$w = \frac{d\vec{r}_R}{dt} \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bağıl koordinat sistemi $\vec{\omega}$ açısal hızıyla dönmektedir. Buna göre bağıl hız vektörünün dt zamanında aldığı yol,

$$\vec{\omega} \cdot dt \times \vec{r}_R$$

değerindedir ve Şekil 4.1'den

$$\vec{r} + d\vec{r} = \vec{r} + d\vec{r}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}_R dt \quad (4.15)$$

eşitliği bağıl ve mutlak koordinat sistemleri arasında yazılarak,

$$d\vec{r} = d\vec{r}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}_R dt \quad (4.16)$$

değerini mutlak ve bağıl koordinat sisteminde elde etmek için Denklem-4.16'daki $d\vec{r}$ değeri Denklem-4.13'de yerine konulursa

$$v = \frac{d\vec{r}_R}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_R \quad (4.17)$$

\vec{v} mutlak hızı, açısal hız ve bağıl yerdeğiştirme vektörü cinsinden ifade edilebilir. Yine Şekil 4.1'den

$$\vec{r}_R = \vec{r} - \vec{a} \quad (4.18)$$

vektörel eşitliği yazılarak, ve bu eşitliğin her iki tarafı $\vec{\omega}$ açısal hızıyla çarpılırsa

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_R = \vec{\omega} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \vec{a} \quad (4.19)$$

denklemini elde ederiz. Çarpma işlemi vektörelidir.

Denklem-4.19 düzenlenirse

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_R = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (4.20)$$

denklemini elde edilir. Çünkü \vec{a} vektörüyle, $\vec{\omega}$ vektörü birbirine paralel olup

$$\vec{\omega} \times \vec{a} = 0$$

vektörel çarpımları sıfırdır. Denklem-4.14, Denklem-4.20 kullanılarak Denklem-4.17'deki mutlak hız ifadesi

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (4.21)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu ifade denklemden de görüldüğü gibi bağıl hızla mutlak hız arasındaki bağıntıyı göstermektedir.

Mutlak ivmede mutlak hız cinsinden,

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

şeklinde ifade edilir. Ve bu denklem hızlar cinsinden Denklem 4.21'de kullanılarak

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{\omega} \times \vec{r})}{\partial t} + (\vec{w} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \nabla (\vec{w} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (4.22)$$

denklemini elde edilir. Denklem-4.22 $\vec{\omega}$ açısal hızının zamana göre değişmediği dikkate alınır,

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla \vec{w} + \vec{w} \cdot \nabla (\vec{\omega} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \nabla \vec{w} \\ + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \nabla (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

şeklinde düzenlenir. Aşağıdaki vektör özdeşlikleri

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \nabla (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \vec{\omega} \times \vec{w} \\ (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \nabla \vec{w} &= \vec{\omega} \times \vec{w} \\ (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \nabla (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Denklem-4.23'de yerlerine konursa

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla \vec{w} + 2\vec{\omega} \times \vec{w} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (4.25)$$

akışkanın hareket denklemi elde edilir.

Burada;

$2\vec{\omega} \times \vec{w}$ terimi Coriolis ivmesini

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ terimi bağı koordinat sisteminin $\vec{\omega}$ açısal hızıyla dönmesinden dolayı oluşan akışkan parçacıklarının merkezci ivmesini gösterir.

Sonuç olarak akışkanın genel bağıl olarak akışı için

Süreklilik denklemi;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{w}) = 0 \quad (4.26)$$

denklemiyle, Hareket denklemi

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla \vec{w} = -2\vec{\omega} \times \vec{w} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz) \quad (4.27)$$

denklemiyle ifade edilir. Ayrıca vektör özdeşliğinden;

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\nabla \left(\frac{\omega R^2}{2} \right) \quad (4.28)$$

ifadesini kullanarak akışkanın hareket denklemi yeniden

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla \vec{w} = 2 \vec{\omega} \times \vec{w} + \nabla \left(\frac{\omega^2 R^2}{2} \right) - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{F} - (gz) \quad (4.29)$$

şeklinde düzenlenir. Denklem-4.29 ve 4.28'deki R değeri $|\vec{r}_R|$ yerine alınmıştır. Elde ettiğimiz bu hareket denklemi ve süreklilik denklemi sonraki bölümlerde çözüm için kullanılacaktır.

4.3. Herhangi Bir Türbomakina İçin Sıkıştırılabilir Akışın Hesaplanması

Herhangi bir türbo makinadaki akışın hesabında aşağıdaki kabulleri yapmak zorundayız.

- i) Akış kanatlara göre bağıl daimi akıştır.
- ii) Mutlak akış girdapsızdır (irrotational)
- iii) Akış sabit antropide olmaktadır
- iv) Durma noktası sıcaklığı girişte ünifordur
- v) Akışkan sadece hız ve basınç gradiyentinden dolayı kuvvete ve kanat kuvvetlerine maruzdur (7,8,9).

Türbomakinadaki akışkanın ideal gaz kanununa uyduğunu kabul ederek,

$$du = c_v dT \quad (4.30)$$

$$dh = c_p dT \quad (4.31)$$

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (4.32)$$

gaz denklemlerini yazabiliriz.

$$Tds = du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (4.33)$$

denklemini (Gibbs denklemi) kullanılarak ideal gaz denklemini entropi ve iç enerji cinsinden yazabiliriz. Çünkü entalpi ile iç enerji arasında

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad (4.34)$$

bağıntısı vardır. Denklem-4.33 ile 4.34 denklemini kullanarak, Gibbs denklemi

$$Tds = dh - dp/\rho \quad (4.35)$$

denklemine dönüştürülür. Denklem-4.35 vektörel formda

$$\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla h = T \cdot \nabla s \quad (4.36)$$

şeklinde yazılır.

Denklem 4.36'yı Denklem-4.29'da yerine koyarak, bağıl koordinat sistemine göre hareket denklemi,

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla \vec{w} + \nabla \left(h - \frac{\omega^2 R^2}{2} + gz \right) = -2\vec{\omega} \times \vec{w} + T \nabla s + \vec{f} \quad (4.37)$$

şeklinde yazılırsa, Denklem-4.36

$$\vec{w} \cdot \nabla \vec{w} = \nabla \left(\frac{w^2}{2} \right) - \vec{w} \times \nabla \vec{w}$$

vektör özdeşliğini kullanarak daha uygun bir şekilde

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \nabla \left(h + \frac{w^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2} + gz \right) = \vec{w} \times \nabla \times \vec{w} + 2\vec{w} \times \omega + TVS + \vec{f} \quad (4.38)$$

denklemiyle ifade edilebilir.

Denklem-4.38 verilen eşitliğin sağ tarafındaki parantez içindeki terimlerin toplamı Rotalpi diye bilinen ifadenin tanımıdır. I rotalpisi

$$I = h + \frac{w^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2}$$

şeklinde tanımlanır. Rotalpi tanımını ve

$$\nabla \times \vec{w} + 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$$

eşitliğini kullanarak Denklem-4.28'i

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \nabla I = \vec{w} \times (\nabla \times \vec{v}) + TVS + \vec{f} \quad (4.39)$$

bağıll akış için hareket denkleminin genel şeklini elde ederiz. Mutlak akış için Denklem-4.39

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla H_A = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + TVS + \vec{f} \quad (4.40)$$

şeklinde yazılabilir. Denklemdeki H_A mutlak veya toplam antalpiyi göstermektedir. H_A antalpisi,

$$H_A = h + \frac{v^2}{2} + gz \quad (4.41)$$

şeklindedir. Adyabatik akışta ortaya çıkan entropi akışkan parçacığının izlediği akım çizgisi boyunca sürtünme kuvvetlerine karşı yaptığı işe eşittir. Bu tanımı

$$T(\vec{w} \cdot \nabla S) = -\vec{w} \cdot \vec{f} \quad (4.42)$$

denklemleriyle ifade edebiliriz.

Hareket denklemleriyle bağıl hız vektörünün skaler çarpımı

$$\vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{w} \cdot \nabla I = \vec{w} \cdot \vec{w}_x (\nabla \times \vec{v}) + T \vec{w} \cdot \nabla S + \vec{w} \cdot \vec{f} \quad (4.43)$$

denklemini verir. Başlangıçta akışı daimi ve adyabatik kabul etmiştik. Bu kabulleri dikkate alarak Denklem-4.43'deki bazı terimleri ihmal ederiz.

$$\vec{w} \cdot \nabla I = 0 \quad (4.44)$$

Denklem-4.44 I rotalpi değerinin bağıl akım çizgisi boyunca sabit olduğundan sıfıra eşittir. Ayrıca bağıl daimi akış kabul etmekle kanatlardaki akışta meydana gelen çalkantı etkilerini ihmal etmiş oluruz.

Daimi, adyabatik mutlak akışta Denklem-4.44,

$$\vec{v} \cdot \nabla H_A = 0 \quad (4.45)$$

şeklini alır. Bu denklemde mutlak bir akım ipciği boyunca toplam entalpinin sabit olduğunu gösterir.

Denklem-4.21'deki mutlak hız eşitliğiyle

$$v_r = w_r \quad (4.46)$$

$$v_\theta = v_\theta + \omega r \quad (4.47)$$

$$v_z = w_z \quad (4.48)$$

mutlak ve bağıl hızlar arasında bağıntıları vardır.

Rotalpi ifadesi

$$I = h + \frac{w^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2} \quad (4.49)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denkleme $v^2/2$ terimi bir kez eklenir ve çıkarılırsa rotalpi ile antalpi arasında bağıl sisteme göre

$$I = H_A - \omega(rv_\theta) \quad (4.50)$$

bağıntısı elde edilir. Mutlak sistemde antalpi ile rotalpi birbirlerine eşittirler.

Denklem-4.38'deki ifadeyi dikkate alarak aşağıdaki yorum yapılabilir.

i) Şayet kanatlar birbirine yakın olarak yerleştirilmişlerse, kanat çıkışındaki vorteksler yok edilirse (veya bu etkiler ihmal edilirse) bu durumda akışkan özellikleri, kanatta bağıl olarak alınan noktada zamanla değişmediği kabul edilebilir.

ii) Eğer rotor sabit rehber kanatlara yakınsa rotor kanatlar arasındaki akış teorik olarak girdaplı (rotational) akış kabul edilebilir.

iii) Rotor kanatları sabit rehber kanatlardan uzakta akışkan rotora çevresel ve radyal yönde üniform rotalpide girer. Şu halde mutlak akış hem girdapsız (irrotational) hem de bağıl daimi akış olarak telakki edilebilir.

4.4. Bağıl Akım Yüzeylerindeki Akışın İncelenmesi

Üç-boyutlu daimi akışı çözmek için, akışı iki bağıl akım yüzeyi üzerinde inceleyerek, bu yüzeylerin matematiksel kombinasyonu ile üç-boyutlu akışı iki-boyutlu iki ayrı cins akışa indirgemiş oluruz. Tanımladığımız bu akım yüzeyleri Şekil 4.2'de gösterilmiştir. Bunlardan birincisi (S_1) kanattan kanada, diğer S_2 akım yüzeyi, S_1 akım yüzeyine dik olarak meridyenel düzlemde makina göbek kısmıyla kanat ucu üzerinde tanımlanır (9).

Bu düzlemleri tanımlamakla üç-boyutlu akışı iki-boyutlu akışa dönüştürerek çözümde büyük kolaylık elde ederiz. Akışı önce S_2 akım yüzeyi üzerinde çözüp, S_2 yüzeyine göre elde ettiğimiz değerleri S_1 akım yüzeyindeki değerleri sağlayıp sağlamadığını kontrol ederiz. Bu işlem iteratif olarak gerçekleştirilir.

4.4.1. S_2 -Yüzeyi Üzerindeki Akışın Hesabı

Denklem-4.39'la verilen üç-boyutlu akışı S_1 ve S_2 bağlı akım yüzeylerinde gerçekleşen iki tip iki-boyutlu akışın kombinasyonu şeklinde belirlemiştik. Koordinatlardan biri veya boyutlardan biri keyfi olarak seçebileceğimiz yüzey karakteristiğine göre yok edilebilir.

Çalışmamız karışık akışlı bir türbomakinaya göredir. Gerekli denklemleri S_2 yüzeyine (rotor göbeğiyle kanat ucu arasında akışın olduğu düzlem) göre elde edeceğiz. Elde edeceğimiz bu denklemler aksenal, radyal veya karışık akışlı herhangi bir türbomakinaya uygulanabilir (9).

Herhangi bir türbomakinada, daimi akış için hareket denklemi,

$$\vec{w} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla I - T \nabla S - \vec{f} \quad (4.51)$$

şeklindedir. Veya biraz daha açık şekliyle,

$$\vec{w} \times (\nabla \times \vec{w}) + 2\vec{w} \times \vec{\omega} = \nabla I - T \nabla S - \vec{f} \quad (4.52)$$

denklemiyle de tanımlanabilir.

Denklem-4.38 ve 4.39'u kullanarak Denklem-4.51'in sol tarafı silindirik koordinatlarda

$$\vec{w} \times (\nabla \times \vec{w}) = \vec{i}_r \left\{ \frac{w_\theta}{r} \left| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r w_\theta}{r} \right) - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right| - w_z \left| \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right| \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{i}_{\theta} \left\{ \frac{w_r}{r} \left| \frac{\partial(rw_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right| - \frac{w_z}{r} \left| \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rw_{\theta})}{\partial z} \right| \right\} \\
& + \dot{i}_z \left\{ w_r \left| \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right| - \frac{w_{\theta}}{r} \left| \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rw_{\theta})}{\partial z} \right| \right\} \quad (4.53)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Denklem-4.52'nin silindirik koordinatlardaki açık şekli radyal bileşeni,

$$\begin{aligned}
& \frac{w_{\theta}}{r} \left| \frac{\partial(rw_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right| - w_z \left| \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right| + 2\omega w_{\theta} \\
& = \frac{\partial I}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} - f_r \quad (4.54)
\end{aligned}$$

denklemleriyle, Teğetsel bileşeni;

$$\begin{aligned}
& \frac{w_r}{r} \left| \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{\partial(rw_{\theta})}{\partial r} \right| - \frac{w_z}{r} \left| \frac{\partial(rw_{\theta})}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \right| - 2\omega w_r \\
& = \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} - T \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} - f_{\theta} \quad (4.55)
\end{aligned}$$

denklemleriyle, Aksenal bileşeni de

$$\begin{aligned}
& w_r \left| \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right| - \frac{w_{\theta}}{r} \left| \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rw_{\theta})}{\partial z} \right| \\
& = \frac{\partial I}{\partial z} - T \frac{\partial s}{\partial z} - f_z \quad (4.56)
\end{aligned}$$

denklemleriyle ifade edilir.

Süreklilik denklemi silindirik koordinatlarda,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r w_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z) = 0 \quad (4.57)$$

şeklinde yazılabilir. Adyabatik daimi bağıl akış için enerji denklemi silindirik koordinatlarda,

$$w_r \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + w_z \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad (4.58)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Akım yüzeyi genel olarak matematiksel fonksiyon şeklinde,

$$s = s(r, \theta, z) = \text{sabit}$$

gibi ifade edilebilir. Akım yüzeyiyle ilgili aşağıdaki türevleri oluşturmak daha sonra elde edeceğimiz potansiyel akım fonksiyonu için gerekecektir.

$$ds = 0 = \frac{\partial s}{\partial r} dr + \frac{\partial s}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial s}{\partial z} dz \quad (5.59)$$

Akım yüzeyinin normal vektörü

$$\vec{n} = \vec{i}_r n_r + \vec{i}_\theta n_\theta + \vec{i}_z n_z \quad (4.60)$$

şeklindedir. Ayrıca normal vektörün $\vec{n} \times \nabla s = 0$ özelliği dikkate alınır, Denklem 4.59,

$$\frac{n_z}{\frac{\partial s}{\partial z}} = \frac{n_\theta}{\frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta}} = \frac{n_r}{\frac{\partial s}{\partial r}} \quad (4.61)$$

şeklinde birim vektörler cinsinden yazılabilir. Çünkü bağıl hız vektörü \vec{w} , akım yüzeyiyle çakışık durumdadır. Yüzey

normalı ile bağıl hız vektörünün skaler çarpımı sıfırdır.

Yani

$$n_r w_r + n_\theta w_\theta + n_z w_z = 0 \quad (4.62)$$

denklemlerle de belirtildiği gibi birbirine dik iki vektörün skaler çarpımı sıfırdır.

Denklem-4.61, Denklem 4.59'da yerine konursa 4.61 bağıntısını,

$$n_r dr + n_\theta r d\theta + n_z dz = 0 \quad (4.63)$$

şeklinde de yazabiliriz.

S_2 -yüzeyi üzerinde herhangi bir akış özelliği,

$$q = q(r, \theta(r, z), z)$$

şeklinde ifade edilebilir. S_2 -yüzeyi boyunca q 'nin değişimi z değişkeni sabit tutarak,

$$dq = \frac{\partial q}{\partial r} dr + \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} dr \quad (4.64)$$

denklemleri elde edilir. Diğer taraftan z 'nin sabit olduğu durumda Denklem-4.63,

$$n_r dr + n_\theta r d\theta = 0 \quad (4.65)$$

şeklini alır. Denklem-4.64 ve 4.65'i kullanarak

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{n_r}{n_\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (4.66)$$

bağıntısı elde edilir. $\bar{\partial}/\partial r$ özel bir kısmî türevdir. Verilen sabit bir z değeri için S_2 yüzeyinde q 'nun r ile değişimini göstermektedir.

$\partial q/\partial r$ ise verilen θ ve z değeri için q 'nun r -yönündeki değişimidir.

Benzer olarak z için türevler,

$$dq = \frac{\partial q}{\partial z} dz + \frac{\partial q}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} dz \quad (4.67)$$

ve

$$\bar{\partial} q = \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{n_z}{n_\theta} \cdot \frac{\partial q}{\partial \theta} \quad (4.68)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca daimi akış için S_2 yüzeyi üzerinde herhangi bir q özelliği için

$$\frac{Dq}{Dt} = \vec{w} \cdot \nabla q = w_r \frac{\partial q}{\partial r} + w_z \frac{\partial q}{\partial z} \quad (4.69)$$

ifadesi yazılabilir. Denklem-4.54, (4.55) ve (4.56) denklemleriyle verilen hareket denklemlerini S_2 yüzeyi üstünde gösterelim.

Denklem-4.66 ve (4.68), Denklem-4.54 yerine konarak,

$$\begin{aligned} & \frac{w_\theta}{r} \bar{\partial} (rv_\theta) - w_z \left| \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right| + \frac{1}{r} \frac{n_r}{n_\theta} \left| \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} - \omega r \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right| \\ & = \frac{\bar{\partial} I}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{n_r}{n_\theta} \frac{\partial I}{\partial \theta} - T \frac{\bar{\partial} s}{\partial r} - T \frac{1}{r} \frac{n_r}{n_\theta} \frac{\partial s}{\partial \theta} - f_r \end{aligned} \quad (4.70)$$

denklemini bulunur. Denklem-4.49'un θ 'ya göre diferansiyelini alırsak

$$\frac{\partial I}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} - \omega r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \quad (4.71)$$

bağıntısı elde edilir. Denklem-4.70'in sağ tarafı Denklem 4.71'de kullanılarak yeniden,

$$\frac{\partial I}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{n_r}{n_{\theta}} \left| \frac{\partial h}{\partial \theta} - T \frac{\partial s}{\partial \theta} \right| + \frac{1}{r} \frac{n_r}{n_{\theta}} \left| \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} - \omega r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right| - f_r$$

şeklinde düzenlenir.

\vec{B} , S_2 yüzeyinden akan akışkanın uyguladığı kanat kuvveti olarak tanımlanırsa, \vec{B} kuvvetinin radyal bileşenini

$$B_r = - \frac{1}{r} \frac{n_r}{n_{\theta}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} = - \frac{1}{r} \frac{n_r}{n_{\theta}} \left| \frac{\partial h}{\partial \theta} - T \frac{\partial s}{\partial \theta} \right| \quad (4.72)$$

denkleminle ifade edebiliriz. Yukardaki kanat kuvvetinin tanımından r-yönündeki hareket denklemi (Denklem-4.70) S_2 yüzeyi üzerinde

$$\frac{w_{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_{\theta}) - w_z \left| \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right| = \frac{\partial I}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} - B_r - f_r \quad (4.73)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer olarak yine S_2 yüzeyi üzerinde bu kez θ ve z yönlerindeki hareket denklemlerini sırasıyla

$$\frac{w_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_{\theta}) + \frac{w_z}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rv_{\theta}) = B_{\theta} + f_{\theta} \quad (4.74)$$

ve

$$w_r \left| \frac{\bar{\partial}^v r}{\partial z} - \frac{\bar{\partial}^v z}{\partial r} \right| + \frac{w_\theta}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rv_\theta) = \frac{\bar{\partial} I}{\partial z} - T \frac{\bar{\partial} s}{\partial z} - B_z - f_z \quad (4.75)$$

ifade edebiliriz. Denklem-4.66 ve (4.58)'i kullanarak da süreklilik denklemini (Denklem-4.57) aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (\rho r w_r) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (\rho w_z) \\ &= - \frac{1}{rn_\theta} \rho \left[n_r \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_r) + n_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_\theta) + n_z \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w_z) \right] \end{aligned} \quad (4.76)$$

Denklem-2.76'yı biraz daha düzenlersek

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r w_r) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (\rho w_z) = -\rho c(r, z) \quad (4.77)$$

şeklını alır.

Denklem-4.77'deki $C(r, z)$ ile bağıntılı olarak b integral faktörü

$$\frac{D(\ln b)}{Dt} = \vec{w} \cdot \nabla (\ln b) = -C(r, z) \quad (4.78)$$

şeklinde tanımlanır. Yukardaki bağıntıyı açık şekliyle,

$$w_r \frac{\bar{\partial} (\ln b)}{\partial r} + w_z \frac{\bar{\partial} (\ln b)}{\partial z} = -C(r, z) \quad (4.79)$$

denkleminle ifade edebiliriz. Denklem-4.79'u kullanarak, Denklem-4.77 ile verilen süreklilik denklemini b integral faktörünü kullanarak,

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial r} (\rho r b w_r) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (\rho r b w_z) = 0 \quad (4.80)$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem-4.80 b katsayısının akım yüzeyinin yerel açısal kalınlığıyla orantılı olduğunu gösterir ve ilk yaklaşım olarak akım yüzeyinin kalınlığı olarak kanat boşluğunun genişliğiyle orantılı olarak alınır. Şu halde b integral faktörü yaklaşık olarak

$$b = \frac{\text{Çevresel kanat boşluğu genişliği}}{\text{Kanat hatvesi}}$$

ile tanımlanır. Kanat olmayan bölgedeki akış için b birim miktar olarak alınır.

Ψ Akım fonksiyonunu b katsayısının fonksiyonu olarak

$$\frac{\bar{\partial} \Psi}{\partial r} = \rho r b w_z \quad (4.81)$$

ve

$$\frac{\bar{\partial} \Psi}{\partial z} = -\rho r b w_r \quad (4.82)$$

süreklilik denklemini sağlayacak şekilde (4.81) ve (4.82) denklemleriyle ifade edilirler.

Denklem-4.81 ve Denklem-4.82 ile tanımlanan akım fonksiyonlarını Denklem-4.73 ve (4.75) ile verilen hareket denkleminde yerine koyarsak ana denklemler sırayla radyal ve aksenal yönde,

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r b} \frac{\bar{\partial} \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho r b} \frac{\bar{\partial} \Psi}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{1}{w_z} \left(\frac{\bar{\partial} I}{\partial r} - T \frac{\bar{\partial} s}{\partial r} - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) - B_r - f_r \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\partial}}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho_{rb}} \frac{\bar{\partial} \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_{rb}} \frac{\bar{\partial} \Psi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{w_r} \left(\frac{\bar{\partial} I}{\partial z} - T \frac{\bar{\partial} s}{\partial z} - \frac{w_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rv_\theta) \right) - B_z - f_z \quad (4.84) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilirler. Yukardaki temel denklemler genel hal için uygulanamaz. Örneğin radyal denge denklemi radyal geometriye uygulanamaz. Çünkü bu durumda w_z aksenal hızı sıfır olacaktır. O halde Denklem-4.84'de verilen momentum ifadesinin aksenal bileşeni kullanılabilir. Fakat tam yaklaşım elde edilemez. Denklemler Şekil 4.3'te görüldüğü gibi S_2 akım yüzeyi üzerinde \vec{f} sürtünme kuvveti, \vec{w} bağıl hızı \vec{B} kanat kuvveti arasında ilgili denklemin $\vec{B} \times \vec{w}$ vektörel çarpımının avantajlarını gözönüne alarak uygulanmıştır. İki vektörün çarpım eşitliğinden

$$\begin{aligned} \vec{B} \times \vec{w} &= \vec{i}_r (B_\theta w_z - B_z w_\theta) + \vec{i}_\theta (B_z w_r - B_r w_z) \\ &+ \vec{i}_z (B_r w_\theta - B_\theta w_r) \quad (4.85) \end{aligned}$$

denklemleri yazılır.

Denklem-4.85 ile Denklem-4.75'in skaler çarpımı

$$\begin{aligned} B_\theta w^2 \left| \frac{\bar{\partial} v_z}{\partial z} - \frac{\bar{\partial} v_z}{\partial r} \right| &= - \frac{w^2}{r} \left| B_z \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rv_\theta) - B_r \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rv_\theta) \right| \\ &+ w_\theta \left| B_z \frac{\bar{\partial} I}{\partial r} - B_r \frac{\bar{\partial} I}{\partial z} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -B_{\theta} \left| w_z \frac{\partial I}{\partial r} - w_r \frac{\partial I}{\partial z} \right| \\
& -T w_{\theta} \left| B_z \frac{\partial s}{\partial r} - B_r \frac{\partial s}{\partial z} \right| \\
& + T B_{\theta} \left| w_z \frac{\partial s}{\partial r} - w_r \frac{\partial s}{\partial z} \right|
\end{aligned} \tag{4.86}$$

ifadesine eşittir.

Denklem 4.86'yı λ ve ν açılarını tanımlayarak basit bir şekilde yazabiliriz. λ ve ν açıları akım yüzeyinin geometrisiyle bağıntılıdır. Açılar Şekil 4.5'te gösterildiği gibi

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{n_r}{n_{\theta}} = \frac{B_r}{B_{\theta}} \tag{4.87}$$

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{n_z}{n_{\theta}} = \frac{B_z}{B_{\theta}} \tag{4.88}$$

denklemleriyle tanımlanmıştır. Yukardaki bağıntılar, \vec{B} kanat kuvveti \vec{w} bağıl hızına diktir ve akım yüzeyiyle çakışık durumdadır. \vec{B} kanat kuvvetiyle \vec{w} bağıl hızının skalar çarpımı sıfırdır. Çünkü birbirine dik vektörlerdir. Yani

$$w_r B_r + w_{\theta} B_{\theta} + w_z B_z = 0 \tag{4.89}$$

denkleminde olduğu gibidir. Denklem-4.87 ve (4.88), Denklem-4.89'da yerine konularak üç koordinat boyunca hızlar arasındaki

$$w_r \operatorname{tg} \lambda + w_{\theta} + w_z \operatorname{tg} \nu = 0 \tag{4.90}$$

bağıntısı elde edilir.

Denklem-4.90 akım yüzeyinden geçen akışkanın, akış geometrisi hakkında bilgi verir.

Daimi, adyabatik akış için enerji denkleminde rotalpi değişimi

$$\frac{DI}{Dt} = 0$$

olur. Ve rotalpi herhangi bir akım çizgisi boyunca değişmeden sabit kalır. Rotalpi aynı zamanda Ψ akım fonksiyonunun da fonksiyonudur $|I=I(\Psi)|$. Rotalpi fonksiyonunun kısmî türevlerini sırayla r ve z yönünde

$$\frac{\partial I}{\partial r} = \frac{dI}{d\Psi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (4.91)$$

ve

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \frac{dI}{d\Psi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (4.92)$$

denklemlerinde verildiği gibi oluşturalım.

Denklem-4.87, (4.88), (4.81), (4.82), (4.91) ve Denklem-4.92 kullanılarak elde etmek istediğimiz Ψ akım fonksiyonunun diferansiyelini

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\rho r b} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\rho r b} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \\ & = \rho r b \frac{dI}{d\Psi} - \frac{T}{w^2} \left| \frac{\partial s}{\partial r} (w_z - w \tan \nu) - \frac{\partial s}{\partial z} (w_r - w_\theta \tan \lambda) \right| \\ & + \frac{1}{r} \left| \tan \nu \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \tan \lambda \frac{\partial}{\partial z} (r v_\theta) \right| \end{aligned} \quad (4.93)$$

şeklinde elde ederiz.

Denklem-4.93'ü izotropik akış için yeniden

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r b} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho r b} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)$$

$$= \rho r b \frac{dI}{d\Psi} + \frac{1}{r} \left[\text{tg} \nu \frac{\partial}{\partial r} (r v_{\theta}) - \text{tg} \lambda \frac{\partial}{\partial z} (r v_{\theta}) \right] \quad (4.94)$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Bu denklem akış modelinin Ψ akım fonksiyonunu belirlemek için kullanılır. Görüldüğü gibi denklemde kuvvet terimleri görülmemektedir. Kuvvetlerin büyüklüğü ihmal edilecek kadar küçüktür.

Sistemde simetrik olmayan (aksisimetrik) bir akış vardır. Yani $(\partial/\partial\theta = 0$. Akış aksisimetrik olduğuna göre mutlak akış için hareket denklemi

$$\frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{\theta}) - v_z \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial H_A}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} - f_r \quad (4.95)$$

$$- \frac{v_r}{r} (r v_{\theta}) - \frac{v_z}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r v_{\theta}) = -f_{\theta} \quad (4.96)$$

$$v_r \left| \frac{v_r}{z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right| + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r v_{\theta}) = \frac{\partial H_A}{\partial z} - T \frac{\partial s}{\partial z} - f_z \quad (4.97)$$

sırasıyla, r, θ, z yönünde gibi yazılabilir. Bu hareket denklemlerini $\vec{i}_{\theta} \times \vec{v}$ yönünde skaler çarpımını alarak v_m meridyenel hızı

$$v_m^2 = v_r^2 + v_z^2$$

ile tanımlar, yukardaki denklemlerde yerine koyarsak hareket denklemini meridyenel hıza bağlı olarak,

$$\begin{aligned}
v_m^2 \left| \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right| &= - \frac{v_\theta}{r} \left| v_r \frac{\partial}{\partial z} (rv_\theta) - v_z \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right| \\
+ v_r \left| v_r \frac{\partial H_A}{\partial z} - v_z \frac{\partial H_A}{\partial r} \right| &- T \left| v_r \frac{\partial s}{\partial z} - v_z \frac{\partial s}{\partial r} \right| \quad (4.98)
\end{aligned}$$

denkleminde olduğu gibi ifade edebiliriz.

Akım fonksiyonu, süreklilik denklemini aşağıdaki

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \rho r v_z \quad (4.99)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\rho r v_r \quad (4.100)$$

denklemleriyle sağlar. Daimi, adyabatik akış için enerji denklemini

$$\frac{DH_A}{Dt} = 0$$

gibidir. Bu ifade mutlak bir akım çizgisi üzerindeki entalpi değerinin sabit kaldığını gösterir. H_A toplam entalpi sadece Ψ akım fonksiyonuyla değişir ($H_A = H_A(\Psi)$).

Denklem 4.99, (4.100) ve yukarıdaki tanımları dikkate alarak Denklem-4.98'de yerine konarak,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \\
&= \frac{dH_A}{d\Psi} - \frac{T}{v_m^2} \left| v_z \frac{\partial s}{\partial r} - v_r \frac{\partial s}{\partial z} \right| \\
&+ \frac{v_\theta}{rv_m^2} \left| v_z \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - v_r \frac{\partial}{\partial z} (rv_\theta) \right| \quad (4.101)
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. İzotropik akış için Denklem -4.101 deki entropi değişimini ihtiva eden terimleri ihmal edebiliriz. ($\frac{\partial s}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial s}{\partial z} = 0$ vs).

Böylece denklem yeni haliyle,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \\ & = \frac{dH_A}{d\Psi} + \frac{v_\theta}{rv_m} \left(v_z \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - v_r \frac{\partial}{\partial z} (rv_\theta) \right) \end{aligned} \quad (4.102)$$

akım fonksiyonuna bağlı olarak yazılabilir.

Denklem-4.102 herhangi bir türbomakinadaki akış için kullanılır. Makina aksenal, radyal karışık akışlı olabilir.

Akış izotropik olduğundan herhangi bir noktadaki akışkanın termodinamik özellikleri,

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{Sabit} \quad (4.103)$$

ve

$$\frac{T}{\rho^{k-1}} = \text{Sabit} \quad (4.104)$$

ideal gaz denklemleriyle elde edilir. Ses hızı ise,

$$a^2 = \frac{k p}{\rho} = k R T \quad (4.105)$$

denklemleriyle elde edilir.

BÖLÜM 5: ÇÖZÜM METODU

Bu bölümde bundan önceki bölümde elde ettiğimiz akış yüzeyi üzerinde elde ettiğimiz hareket denklemi iki-boyutlu kısmî diferansiyel denklemdi. Bu diferansiyel denklemi akım fonksiyonu cinsinden ifade etmiştik. Bu denklemi alışılmış analitik metodlarla çözmek imkansızdır. Bundan dolayı iteratif çözüm metodları kullanılacaktır. Çalışmamızda önceden de bahsedildiği gibi iyi sonuç verdiği için sonlu elemanlar metodu kullanılacaktır. Sonlu elemanlar analizinin akış problemleri için geliştirilen Galerkin'in ağırlıklı kalıntı yaklaşımı çözümde kullanılacaktır (10,11,12).

5.1. Galerkin Formülü

Denklem-4.94'ü Galerkin'in ağırlıklı kalıntı yaklaşımıyla integrasyonu elde edilebilir. Denklem-4.94 Ω akış bölgesinde

$$\frac{\partial}{\partial r}(k \Psi_{,r}) + \frac{\partial}{\partial z}(k \Psi_{,z}) + R = 0 \quad (5.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada k

$$k = \frac{1}{\rho r b} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanmıştır. R ise Denklem-4.94'deki eşitliğin sağ tarafındaki terimleri temsil etmektedir.

Sistemin sınır şartları iki tiptir. Birincisi sisteme etkiyen kuvvetlerden dolayı olan sınır şartları, ikincisi hızlardan dolayı olan sınır şartlarıdır.

Hız sınır şartları S_1 yüzeyi üzerinde

$$\dot{\Psi} - \Psi = 0 \quad (5.3)$$

şeklinde yazılır. Denklemdeki $\dot{\Psi}$ terimi Ψ fonksiyonunun S_1 yüzeyi üzerinde bilinen değeridir.

Akış bölgesindeki kuvvetlerden dolayı natural sınır şartı

$$W_T - k(\Psi_{,r} n_r + \Psi_{,z} n_z) = 0 \quad (5.4)$$

S_2 yüzeyi üzerinde yazılır. Buradaki n_r ve n_z , \vec{n} yüzey dış normalinin doğrultu kosinüsleridir. W_T , S_2 akış yüzeyine teğet hız bileşenidir ve

$$W_T = W_z n_r - W_r n_z \quad (5.5)$$

ifadesiyle tanımlanmıştır. Mevcut bütün sınır şartlarının akım fonksiyonu denklemini sağlaması gerekir. Bunlara ilaveten keyfî olarak tanımlayacağımız $\tilde{\Psi}$ ağırlık fonksiyonunu da sağlaması gerekir. Bunun için en iyi yaklaşım $\delta\tilde{\Psi}$ 'yi oluşturmaktadır. Bu işlem Galerkin metodu gereğidir.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial r} (k \tilde{\Psi}_{,r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \tilde{\Psi}_{,z}) + R \right| \delta\tilde{\Psi} d\Omega \\ & + \int_{S_2} |W_T - k(\tilde{\Psi}_{,r} n_r + \tilde{\Psi}_{,z} n_z)| \delta\tilde{\Psi} dS = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Burada $d\Omega = dr \cdot dz$ (S_2 yüzeyi için), Ω akış bölgesini göstermektedir ve S toplam sistem sınırlarını belirler ($S = S_1 + S_2$).

Denklem-5.6'daki ilk terime Green-Gauss teoremi uygulanırsa

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r} (k \tilde{\Psi}_r) dr dz \delta \tilde{\Psi} = - \int_{\Omega} \delta \tilde{\Psi}_{,r} (k \tilde{\Psi}_{,r}) dr dz + \int_S \delta \tilde{\Psi} (k \tilde{\Psi}_{,r}) n_r dS \quad (5.7)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} (k \tilde{\Psi}_z) dr dz \delta \tilde{\Psi} = - \int_{\Omega} \delta \tilde{\Psi}_{,z} (k \tilde{\Psi}_{,z}) dr dz + \int_S \delta \tilde{\Psi} (k \tilde{\Psi}_{,z}) n_z dS \quad (5.8)$$

denklemleri elde edilir. Galerkin formülünün tanımından $\delta \tilde{\Psi} = 0$ (S_1 yüzeyi üzerinde) olmalıdır. Bunun yanında Denklem-5.7 ve (5.8) ile verilen integral ifadeleri tüm yüzey yerine S_2 üzerinde sağlanması yeterlidir. Yani sınır şartlarının integral denklemini sağlaması gerekir.

Bu ifadeler

$$- \int_{\Omega} \delta \tilde{\Psi}_{,r} (k \tilde{\Psi}_{,r}) + \delta \tilde{\Psi}_{,z} (k \tilde{\Psi}_{,z}) - R \delta \tilde{\Psi} | dr dz + \int_{S_2} \delta \tilde{\Psi} W_T dS = 0 \quad (5.9)$$

denklemleriyle temsil edilebilir.

5.2. Sonlu Elemanlar Metodunun Uygulanması

Burada Denklem-5.9'un çözümleri araştırılacaktır.

Çözüm için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Akış bölgesi sonlu sayıda elemana ayrılır
(Discretization)
2. Eleman matrislerinin elde edilmesi
3. Elde edilen bu matrislerin birleştirilerek sistem matrisinin oluşturulması
4. Sınır şartlarının sisteme uygulanması
5. Sistem denklemlerinin çözümü
6. Çözüm sonucu elde edilen değerler aranan akış özellikleridir.

5.2.1. Akış Bölgesinin Sonlu Sayıda Elemanlara Ayrılması

Akış bölgesi sonlu sayıda elemana bölünür. Bu elemanlar sekiz nodlu (uç) dikdörtgen izoparametrik elemanlardır. Aslında bu elemanların gerçek şekli tam dikdörtgen değildir. Bunun sebebi akış bölgesinin geometrik yapısının düzgün olmadığıdır. Şekil 3.1b'de görüldüğü gibi akış bölgesinden aldığımız eleman eğrisel kenarlara sahiptir. Bu eleman yerine Şekil 5.1a'daki düzeltilmiş kare şeklindeki eleman alınır. Bu eleman üzerine $\xi-\eta$ eksen takımı yerleştirilir. Bu eleman için interpolasyon fonksiyonları Tablo 5.1'de verilmiştir.

Yeni tanımladığımız ($\xi-\eta$) eksen takımıyla ($r-z$) koordinat sistemi arasında,

$$r = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) r_i \quad (5.10)$$

$$z = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) z_i \quad (5.11)$$

bağıntıları vardır. r_i ve z_i gerçek elemana göre, $(\xi-\eta)$ düzeltilmiş elemana göre koordinat sistemidir.

5.2.2. Eleman Matrislerinin Elde Edilmesi

Sonlu elemanlar metodunda her bir eleman için

$$\tilde{\Psi} = \sum_{i=1}^8 \Psi_i N_i = \underline{N}^T \underline{\Psi} \quad (5.12)$$

bağıntısı vardır. Burada N şekil fonksiyonu, Ψ_i bilinmeyen akım fonksiyonunun düğüm noktasındaki değerleridir.

$$\tilde{\Psi}_{,r} = \underline{N}_{,r}^T \underline{\Psi} \quad ,$$

$$\tilde{\Psi}_{,z} = \underline{N}_{,z}^T \underline{\Psi} \quad ,$$

$$\delta \tilde{\Psi} = \underline{N}^T \delta \Psi \quad ,$$

$$\delta \tilde{\Psi}_{,r} = \underline{N}_{,r}^T \delta \Psi \quad , \quad \text{vs}$$

Yukardaki bağıntılar kullanılarak, Denklem-5.9

$$- \int_{\Omega} \frac{\delta \Psi^T}{\underline{N}_{,r}^T \underline{N}_{,r} + \underline{N}_{,z}^T \underline{N}_{,z}} \underline{\Psi} \, drdz$$

$$- \int_{\Omega} \delta \Psi^T \underline{N}_R \, drdz + \int_{S_2} \delta \Psi^T \underline{N}_W \, dS = 0 \quad (5.13)$$

şeklinde yazılabilir. Ağırlık fonksiyonu keyfi olarak seçilmiştir ve $\delta\psi^T S_1$ yüzeyi için sıfırdır.

Denklem-5.13

$$\int_{\Omega} k \left(\underline{N}_r \underline{N}_r^T + \underline{N}_z \underline{N}_z^T \right) \psi \, dr \, dz$$

$$= \int_{\Omega} \underline{N} R \, dr \, dz + \int_{S_2} \underline{N} W_T \, dS \quad (5.14)$$

şeklinde indirgenir. Veya daha kısa haliyle

$$[K] \{\psi\} = \{F\} \quad (5.15)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Denklemdaki

$|k|$ Elemanın direngenlik matrisini

$|F|$ Kuvvet vektörünü

$\{\psi\}$ Elemanın uç noktalarındaki aradığımız akışkan özelliklerini gösterir. Denklem-5.15 tüm sistem içindir. Denklem oluşturulması için önce tek bir eleman için

$$K_e \psi_e = F_e \quad (5.16)$$

denklemini yazılır. Bütün elemanlar için elde edilen bu denklemler özel bir matris toplamıyla sistem denklemini elde edilir.

Denklem-5.16'daki K_e

$$\underline{K}_e = \int_{\Omega_e} k \left(\underline{N}_r \underline{N}_r^T + \underline{N}_z \underline{N}_z^T \right) \, dr \, dz \quad (5.17)$$

şeklindedir. (r-2) koordinat sistemini (ξ-η) koordinat sistemine

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = |J|^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

bağıntısıyla, yani alan koordinatları diye bilinen koordinat sistemine dönüştürülür. Denklem 5.18'de izoparametrik dönüşüm formülü olarak bilinir.

Bu ifade

$$dr \cdot dz = \det |J| d\xi d\eta \quad (5.19)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Denklemdeki J Jacobion matrisi göstermektedir.

Denklem-5.19'daki (dr dz) ifadesi Denklem-5.17'de yerine konursa K_e ,

$$K_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5.20)$$

ifadesine dönüştürülür. Bu denklem için nümerik integrasyon metotları kullanılacaktır. Çünkü kapalı şekilde integral alma işlemi genellikle mümkün olmamaktadır. Denklem-5.20'deki integral nümerik metotlarla elde edilir. Çözüm için Gauss-Legendre nümerik integrasyon metodu kullanılacaktır.

Metod;

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j B(\xi_i, \eta_j) \quad (5.21)$$

şeklindedir. Denklemdaki ξ_i ve η_j integrali alınan noktaların koordinatlarını, W_i ve W_j bu noktaların ağırlıklıklarını göstermektedir. n elemandaki nokta sayısıdır. Noktalar Tablo 5.2'de görülmektedir.

Böylece şekil fonksiyonları ve şekil fonksiyonlarının türevleri Gauss-Legendre'in integrasyon noktalarında hesaplanması gerekecektir (Şekil 5.2).

Yakınsaklık için gerekli minimum integrasyon derecesi birdir. Bu da elemanın alanını hesaplar. Dördüncü mertebe şekil fonksiyonu için minimum integrasyon sayısı ikidir.

Göbekten kanat ucuna olan tipik bir akış için S_2 yüzeyi üzerinde $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$ alınır. S_2 üzerinde W_t sıfır değerini alır. Bu sınır şartlarını dikkate alarak toplam kuvvet vektörü

$$\{F\} = \int_{\Omega} \underline{NR} \, dr \, dz \quad (5.22)$$

şeklinde yazılabilir. Bu genel veya toplam kuvvet vektörü olarak bilinir. Tek bir eleman için

$$F_e = \int_{\Omega_e} \underline{NR} \, dr \, dz \quad (5.23)$$

şeklindedir. Denklem-5.23 içinde aynı nümerik integrasyon tekniği kullanılır ve Direngenlik matrisini elde etmek için kullanılır. Direngenlik matrisi için

$$\underline{F}_e = \sum_{i=1}^n W_i N_i R(\xi_i, \eta_i) d\xi d\eta \quad (5.24)$$

şekli kullanılır.

5.2.3. Sistem Direngenlik Matrisinin Elde Edilmesi

Her bir eleman için direngenlik matrisi ve kuvvet vektörü teşkil edildikten sonra sistem direngenlik matrisi (System Stiffness Matrices) ve kuvvet vektörü (System load vector) elde edilir. Bu işlem bir tür özel matris toplama işlemidir. Yani eleman için elde edilen matrisi sistem matrisi için birbirine monte etme işlemidir.

Bu matris toplama işlemi

$$\frac{K}{n \times n} = \sum_{e=1}^m \underline{K}_e \quad (5.25)$$

direngenlik matrisini

$$\frac{F}{n \times 1} = \sum_{e=1}^m F_e \quad (5.26)$$

kuvvet vektörünü ifade eder. Burada m sistemdeki eleman sayısını, n ele aldığımız elemanın uç nokta sayısını göstermektedir.

Toplam direngenlik matrisinin boyutu yukarıdaki denklemlerden de anlaşıldığı gibi n x n boyutlu kare matrisdir. Direngenlik matrisinin boyutu ele aldığımız eleman sayısına göre değişir. Sistemin yapısı büyüdükçe, geometrisi karmaşık oldukça eleman sayısı artacaktır.

Sonlu elemanlar metodunda en önemli ve can alıcı nokta direngenlik matrisini oluşturma işlemidir. Bu yüzden ele aldığımız elemanın köşe noktalarının numaralama işlemi uygun biçimde yapılmalıdır.

Bu işlemin önemi bilgisayar hafızasını ekonomik kullanmak içindir. Direngenlik matrisinin en iyi elde etme şekli matrisin birinci diyagonal boyunca bant oluşturacak şekilde numaralama işlemi yapılır. Yani diyagonal bandın dışındaki elemanlar sıfır olacak şekilde olmalıdır. Veya üçgen matris oluşturmakta bilgisayar hafızası için uygun yerleştirme sayılır. Sistem çözümü bilgisayara iyi uyarlanırsa bilgisayar zamanı ekonomik olarak kullanılacaktır.

5.2.4. Sınır Şartlarının Uygulanması

Daha önceki bölümlerde de bahsettiğimiz gibi akış bölgesinin girişinde ve çıkışında $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$ alınmalıdır. Akışın giriş şartları kesinlikle bilinmektedir. Akım fonksiyonu değerlerinin dağılımı girişte kolayca elde edilebilir. Elde ettiğimiz bu sınır değeri fazladan sınır şartıdır. Bu da sistem çözümü için avantajdır.

Örneğin tamamen aksenal akışlı herhangi bir türbo makina için akım fonksiyonu dağılım değerleri aşağıdaki gibi olacaktır.

Akış aksenal olarak kanatlara girdiğinden girişteki radyal hız bileşenleri sıfır olacaktır. Akım fonksiyonunun

tanımından giriş noktasında $\psi = \psi(r)$ ve $d\psi = \rho b W_2 r dr$ olacaktır. Eğer girişteki W_2 değeri üniform bir dağılıma sahip olursa $d\psi$ 'nin integrasyonu sınır şartlarında çözülerek

$$\psi(r) - \psi_i = \frac{r^2 - r_i^2}{2} \rho b W_2 \quad (5.27)$$

ve

$$\psi_o - \psi_i = \frac{r_o^2 - r_i^2}{2} \rho b W_2 = \frac{\dot{m}}{2\pi} \quad (5.28)$$

denklemleriyle elde edilir. Buradaki (i) ve (o) indisleri akışkanın kanada giriş ve çıkış şartlarını temsil etmektedir.

$$\bar{\psi} = \psi \frac{2(r_o^2 - r_i^2)}{\dot{m}} \quad (5.29)$$

Denklemleriyle tanımladığımız boyutsuz akım fonksiyonuyla sınır şartlarını belirleyebiliriz. Akış bölgesine girişte ve çıkışta boyutsuz $\bar{\psi}$ değeri

$$\bar{\psi}_2 = 1 \quad (5.30)$$

$$\bar{\psi}_o = 2 \quad (5.31)$$

değerlerini alır. Denklem-3.27 boyutsuz akım fonksiyonu için yeniden

$$\bar{\psi} = 1 + \frac{r^2 - r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad (5.32)$$

şeklinde tanımlanır. Boyutsuz akım fonksiyonuna göre sınır şartları sırayla akış bölgesine giriş ve çıkış için Denklem 5.30

ve (5.31) de verilmiştir. Şayet ele aldığımız türbomakinaya akışkan aksenal olarak giriyorsa, Denklem -5.32 sınır şartlarını elde etmek için kullanılabilir. Aksi takdirde Denklem-5.32 akış bölgesinin giriş şartlarına göre değiştirilmelidir.

Elde ettiğimiz sınır şartları aşağıdaki gibi sistem denklemlerine yerleştirilir. Şayet Ψ^* ele aldığımız sistemin herhangi bir i noktası için Ψ 'nin değeri biliniyorsa,

a) $\{F\}'$ $|K|$ 'nin i 'nci sütunıyla Ψ^* 'ın çarpımından çıkarılarak değiştirilir.

b) $|K|$ 'nin 1 'nci satır ve sütun elemanları 1 'e eşitlenir.

c) $|K_{ii}|$ 1 'e eşitlenir. Yani direngelik matrisinin diyagonal elemanları 1 'lerden oluşur.

d) $F_i = \Psi^*$ şeklinde alınır.

5.2.5 Sistem Kararlılık Analizi

Ele aldığımız sistemde akışı karakterize eden Denklem-5.15 lineer olmayan bir denklemdir. Denklem hem sağ tarafı, hem sol tarafı bilinmeyen Ψ akım fonksiyonuna bağlıdır. Denklem, Ψ 'ye göre lineer değildir. Şekil-5.3, Denklem 5.15'in bir boyuttaki durumunu gösterir (12).

Bu denklem iteratif olarak çözülecektir. $|K|$ sistem direngenlik matrisini çözüme uygun şekilde (bant matris ve simetrik şekilde) uyarlamıştı. Lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan eliminasyon işlemleriyle bu denklem çözülebilir.

Çözüm metodu için Sekant direngenlik matrisi en basit iterasyon metodu olup,

$$|K_n| \{\Psi_{n+1}\} = \{F_n\} \quad (5.33)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki K_n ve F_n değerleri n 'nci iterasyon sonucu $\{\Psi_n\}$ değerlerinden elde edilen sonuçlardır. Denklem-5.33'ün geometrik yorumu Şekil 5.4'de gösterilmiştir.

Akım fonksiyonunun ardışık iterasyon sonucu değişimini $\Delta \Psi_{n+1}$ ile gösterirsek $\Delta \Psi_{n+1}$,

$$\{\Delta \Psi_{n+1}\} = \{\Psi_{n+1}\} - \{\Psi_n\} \quad (5.34)$$

şeklindedir.

Denklem-5.34'den $\{\Psi_{n+1}\}$ değerini çeker, Denklem-5.33 de yerine koyarsak Denklem-5.33,

$$|K_n| \{\Delta \Psi_{n+1}\} = \{F_n\} - |K_n| \{\Psi_n\} \quad (5.35)$$

şeklinde yazılabilir. Her iterasyon sonucu Denklem 5.33 veya Denklem-5.35 kullanılarak aranan çözüme kararlı bir şekilde yaklaşmış oluruz.

Birkaç iterasyon sonunda aynı direngenlik matrisini kullanmak gerektiğinde yukardaki metod değiştirilir. Yeni tanımlayacağımız metoda sabit direngenlik denir ve aşağıdaki

$$|K_0| \{\Delta\Psi_{n+1}\} = \{F_n\} - |K_n| \{\Psi_n\} \quad (5.36)$$

denkleminle ifade edilir. Denklem-5.36'nın geometrik yorumu Şekil 5.5'te gösterilmiştir.

Bütün bu işlemlere rağmen denklemi lineerleştirme oldukça zordur. ν faktörünü kullanarak

$$\{\Psi_{n+1}\} = \{\Psi_n\} + \nu\{\Delta\Psi_{n+1}\} \quad (5.37)$$

denklemini tanımlayarak lineerleştirme işlemine devam edilir. Yakınsaklık kontrolü maksimum bağıl değişime göre olup

$$\lambda = \text{maksimum}_i \left| \frac{\Psi_{n+1}^i - \Psi_n^i}{\Psi_{n+1}^i} \right| \quad (5.38)$$

şeklinde tanımlanır. Denklemdaki i indisi ele aldığımız elemandaki uç noktaların sayısını göstermektedir.

5.2.6. Eleman Uç Noktalarında Diğer Akış Büyüklüklerinin Elde Edilmesi

Akış bölgesinin özelliklerini kullanarak sistem değişkenleri elde edilir. Bu özellikler termodinamik ve akışkanlar mekaniği prensiplerinin uygulanmasıdır. Akış

değişkenlerinin elde edilmesi akış bölgesinin özelliklerini kullanarak aşağıdaki gibi yapılır.

i) Türbomakinanın girişi boyunca (rv_θ) başlangıç döngü değeri bağıl akım çizgisi boyunca sabittir.

ii) H_A Toplam entalpi

$$H_A = C_p T + \frac{V^2}{2} C_p T_{OA}$$

değeri mutlak akım çizgisi boyunca sabittir.

iii) I Rotalpi

$$I = C_p T_{OR} - \frac{(\omega r)^2}{2}$$

türbomakina rotorundaki bağıl bir akım çizgisi boyunca sabittir ve T_{OR} ,

$$T_{OR} = T - \frac{W^2}{2C_p}$$

değerine eşittir. Bu üç özelliği çözüm bölgesinin diğer kısımları için de kullanarak Şekil 5.6'da da görüleceği gibi (i+1)'nci noktadan elde edilecek özellik bir önceki i'nci iterasyon değerini kullanarak elde edilir. Örneğin Şekil 5.6'daki (i+1)'nci kesitteki 3 noktasının özelliği elde edilirse, (3) noktasından geçen akım çizgisindeki değer 3 noktasıyla z noktası arasında bir değer olacaktır. Çünkü (3) noktasıyla (z) noktası aynı akım çizgisi üzerindedirler. Bu noktalar için aranan değerler birbirine eşittir.

Sonlu elemanlar yaklaşımını kullanarak yukarıda bahsedilen ifadeler

$$\Psi_2 = \Psi_3 = N_1 \Psi_1 + N_8 \Psi_8 + N_4 \Psi_4 \quad (5.39)$$

denklemleriyle tanımlanır. Dikkat edilecek önemli bir nokta z daima şekil fonksiyonu için önceden tanımladığımız $(\xi-\eta)$ koordinat sisteminde $\xi = -1$ şeklinde olmalıdır. Bu koordinat sistemine göre şekil fonksiyonları

$$N_4 = \frac{1}{2} \eta(1+\eta) \quad (5.40)$$

$$N_8 = 1-\eta^2 \quad (5.41)$$

$$N_1 = -\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^2 \quad (5.42)$$

şeklinde alınabilir. Yukarıdaki denklemler Denklem-5.39'da yerine konursa ikinci derece η 'ye bağlı

$$\eta_z^2 \left(\frac{\Psi_4}{2} - \Psi_8 + \frac{\Psi_1}{2} \right) + \eta_z \left(\frac{\Psi_4}{2} - \frac{\Psi_1}{2} \right) + \Psi_8 - \Psi_3 = 0 \quad (5.43)$$

denklemini elde edilir. Denklem-5.43'ün iki kökü vardır. Daha iyi bir sonlu elemanlar yaklaşımı için z noktası incelediğimiz eleman üzerinde olmalı ve z 'nin koordinatları alan koordinatlarında $(-1, 1)$ aralığında olmalı $(-1 \leq \eta_z \leq 1)$.

Denklem-5.40, (5.41) ve (5.42) ile verilen şekil fonksiyonları z noktasının η koordinat sistemine göre oluşturulur. Yani z noktasını üzerinde bulunduran kesit üzerindeki

noktalar için (1,8,4 noktaları) tanımlanır, z noktasındaki herhangi bir P özelliği

$$P_z = N_1 P_1 + N_8 P_8 + N_4 P_4 \quad (5.44)$$

denklemleriyle elde edilir. z noktası için bulduğumuz herhangi bir P özelliği (3) noktası içinde aynı değerdedir. Çünkü her iki noktada aynı akım çizgisi üzerindedirler.

5.2.6.1. Hız Bileşenlerinin Hesaplanması

Akım fonksiyonunun tanımından

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \rho r b w_z$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\rho r b w_r$$

denklemlerini önceki bölümde elde etmiştik. Sistem denklemlerinin çözümünden sonra, denklemlerden biri, aksenal ve radyal hız bileşenini elde etmek için kullanılır.

Akım fonksiyonunun türevleri sonlu elemanlar yaklaşımından elde edilir.

$$\Psi = \sum \Psi_i \cdot N_i(r, z)$$

ifadesi önceki bölümlerden bilinmektedir. Bu ifadenin türevlerini

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \sum \Psi_i \frac{\partial N_i}{\partial r} \quad (5.46)$$

ve

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \sum \psi_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \quad (5.47)$$

şeklinde oluşturabiliriz. w_r ve w_z radyal ve aksenal bağıl hız bileşenleri Denklem-5.46 ve (5.47) kullanılarak elde edilir.

Çevresel hız bileşeninin bulunması diğerlerine göre biraz zordur. Bu yüzden değişik çözüm bölgeleri yardımıyla eleman üzerindeki uç noktaların yerleştirilmesine dikkat edilmelidir. Eğer dikkate aldığımız eleman uç noktası sistemin girişinde ise her uçtaki v_θ değerini elde etmek için (rv_θ) değerinin daima sabit olduğu gözönüne alınır. Eğer ele aldığımız uç nokta makinanın rotoru veya statoru üzerinde ise çevresel hız, Denklem-4.80'deki geometrik özelliği kullanarak elde edilir. Bu özellik

$$w_r \operatorname{tg} \lambda + w_\theta + w_z \operatorname{tg} \nu = 0$$

denklemleriyle tanımlanmıştır. Bu denklemden w_θ ,

$$w_\theta = -w_z \operatorname{tg} \nu - w_r \operatorname{tg} \lambda \quad (5.48)$$

şeklinde çekilerek bilinen değerlerden elde edilir. Kanat girişinde ve çıkışında seçilen uçlar, kanat ve akış açılarını düzeltmek için kullanılır.

5.2.6.2. Termodinamik Özelliklerin Bulunması

Herhangi bir noktadaki akışkanın yoğunluğu, sıcaklığı, enerji denklemiyle hesaplanır. İdeal gaz için tek-boyuttaki adyabatik akışının enerji denklemi

$$H_A = C_p T_{0A} = h + \frac{v^2}{2} = C_p T + \frac{v^2}{2} = \text{sabit}$$

mutlak koordinat sistemine göre yazılır. Denklem dönen koordinatlara göre

$$I = h + \frac{w^2}{2} - \frac{(\omega r)^2}{2} = H_R - \frac{(\omega r)^2}{2} = \text{sabit}$$

şeklindedir. Bu iki denklem arasında

$$I = H_A - \omega r v_\theta$$

bağıntısı vardır. Bölüm 5.2.6'da da belirttiğimiz gibi, mutlak entalpi ve rotalpi değerlerini kullanarak, dikkate aldığımız her nokta için bulunabilir. Mutlak koordinat sisteminde de gösterilebilir. Mutlak ve bağıl entalpi ve rotalpiler her iki koordinat sistemine göre aynıdır.

Bir-boyuttaki enerji denklemini kullanarak termodinamik özelliklerden herhangi birini (mesela sıcaklık veya yoğunluğu) aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

İşlemi makina rotoru üzerinde bir noktaya göre yapalım.

i) I Rotalpisi bilinen bir değerdir. Dolayısıyla, toplam bağıl entalpi (H_R) hesaplanabilir.

ii) Bağıl durma noktası sıcaklığı, T_{OR}

$$H_R = C_p T_{OR} \quad (5.49)$$

denkleminde elde edilir.

iii) İdeal bir gazın tersinir adyabatik akışı için durma noktası yoğunluğu

$$\rho_{OR} = \rho_{1R} \left| \frac{T_{OR}}{T_{1R}} \right|^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (5.50)$$

denkleminde elde edilir.

Denkleminde 5.50'deki

ρ_{OR} : Bağıl durma noktası yoğunluğunu

ρ_{1R} : Üst akımdaki bağıl durma noktası yoğunluğunu

T_{1R} : Üst akımdaki bağıl durma noktası sıcaklığını ifade eder.

iv) w' bağıl hızı,

$$w'^2 = w_\theta^2 + w_r^2 + w_z^2 \quad (5.51)$$

denkleminde elde edilir.

v) ρ statik yoğunluğu, T sıcaklığıyla

$$\rho = \rho_{OR} \left| 1 - \frac{w'^2}{2C_p T_{OR}} \right|^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (5.52)$$

ve

$$T = T_{OR} - \frac{w^2}{2C_p} \quad (5.53)$$

denklemlerinden hesaplanır. Eğer hesaplamak istediğimiz nokta kanat girişinde veya stator üzerinde ise yukardaki hesaplamalar mutlak sisteme göre yapılmalıdır.

5.3. İterasyon Yöntemi

Daha önce de belirttiğimiz gibi sistemdeki akışı karakterize eden denklem lineer olmayan diferansiyel denklemdir. Denklemdaki bütün değişkenler birbirine bağlıdır. Denklem analitik çözümü mümkün değildir. Bulmak istediğimiz değerleri iteratif hesapla bulabiliriz. Bu işlemi aşağıdaki bahsedeceğimiz şekilde yapabiliriz.

i) İlk iterasyonda kuvvet vektörü ve yoğunluk terimleri direnç matrisinde yerleştirilir. Her nokta için akım fonksiyonunun başlangıç değerleri kabul edilir. Akım fonksiyonunun başlangıç değerleri denklemin sağ tarafını sıfır kabul edersek, yeni denklem bilinen Lablace denklemidir. Bu denklemin çözüm kümesi başlangıç değerleri olarak alınır. Bütün noktadaki yoğunluklar ilk iterasyonda aynı ve giriş yoğunluğuna eşittir.

ii) Lablace denkleminin çözümü akım fonksiyonu için her noktada yaklaşık bir sonuç verir. Hız bileşenleri, entalpi, rotalpi, yoğunluk, Lablace çözümüyle elde edilen akım fonksiyonunun çözümünden elde edilir.

iii) Aradığımız bütün değişkenler için yeni bir kuvvet vektörü ve direngenlik matrisi oluşturmak gerekir. Bu işlem akım fonksiyonunun her yeni değeri için tekrarlanır. Belli bir hassasiyete ulaşıncaya kadar iterasyona devam edilir.

BÖLÜM 6 SINIR TABAKA ANALİZİ

6.1. Sınır Tabakanın Oluşumu ve Önemi:

Türbomakinaların performansına etki eden en önemli faktörlerden biride sınır tabaka yapısıdır. Sınır tabaka yapısına etki ederek makinanın performansının iyileştirilmesi gerekir. Çünkü sınır tabaka makinada bozucu unsur rolünü oynar.

Türbomakinalarda sınır tabaka oluşmasına ikincil akışlar neden olmaktadır. Bu ikincil akışları iki türlü dik-kate almak mümkündür. En klasik yol hem açısal sapmayı düzeltmek, -hemde ikincil akış için ortak bir düzeltme katsayısı tanımlamaktır. Böylece ikincil akışların yaptığı kayıplar hesaplanabilir. Aksi halde ikincil akışlardan dolayı kayıplar (Örneğin kanat profili kaybı) türbomakinanın toplam verimine etki edecektir. Diğer kayıp modeli türbomakinanın girişi ve çıkışı boyunca sınır tabaka etkilerini ele almaktır. Türbomakinalarda sınır tabaka gerçekte üç-boyutta oluşur.

Sınır tabaka hesabını yaptığımızda ortaya integral denklemleri çıkmaktadır. Bu denklemler ortalama çap boyunca integre edilir. Böylece sınır tabaka kalınlığı elde edilir. Hesap metodunda ikincil akışlar değişik açılardan ele alınır ve ortalama çap boyunca değerlendirilir.

Türbomakinalarda oluşan sınır tabaka aşağıdaki etkilerin sonucu olarak meydana gelir.

- I)- İki kanat arasında akışın sapması
- II)- Rotor kanatlarıyla statör cidarları arasında bağlı hareketin oluşması
- III)- Rotor ile statör arasındaki açıklığın çok küçük olmasından dolayı

Bu üç faktörün yanısıra türbomakinaların geometrik yapısı da sınır tabaka oluşumuna etki eder. Örneğin kanat profilinin yapısı, başlangıç sınır tabaka kalınlığı, kanatların kendi etrafında dönmesi, gibi faktörler sınır tabaka etkisinde önemli rol oynarlar. Sonuç olarak sınır tabaka etkileri akışkanın akışından dolayı oluşan enerji transferini yukarıda bahsettiğimiz bölgelerde azalır, enerji transfer edilmeden kayıplara dönüşür. Bu yüzden ciddi bir sınır tabaka analizinin yapılması zorunlu olmaktadır. Aksi takdirde türbomakinanın performansını iyileştirmek mümkün değildir.

İyi bir sınır tabaka analizi için aşağıdaki hususları dikkate almak gerekir.

I)- Hem ikincil akışların oluşmasına hem de verim düşmesine neden olan tıkanma (bloke) faktörünü ele almak

II)- Sınır tabakadan dolayı meydana gelen kanat kuvvetlerindeki azalma (yani akışkanın kanada uyguladığı kuvvetin azalması), makina gücüne, dolayısıyla makina toplam verimine etki edecektir.

Kuvvet azalması türbomakinanın kademe sayısı arttıkça azalmaktadır. Kademe sayısı arttıkça sınır tabaka kalınlığı azalarak sabit bir değere erişmekte dolayısıyla kuvvet azalması düşmektedir. Bu yüzden optimal kademe sayısını hesaplamak gerekir.

Sınır tabaka bölgesindeki hız profillerini belirleyerek akışkanın hareketinin radyal yönde değişimini çeper bölgelerinde elde etmek gerekir. Ayrıca sınır tabaka bölgesinde statik basınç değişimi kabul ederek basınç dağılımının belirlenmesi gerekir.

6.2. Sınır Tabakanın Özellikleri:

1)- Üç-boyutlu karakter göstermesi:

Kanatlarda akışın yön değiştirmesi çaprazlamasına basınç gradiyentinin yükselmesine neden olur. Denge halinde bile, yön değiştirmenin artması türbomakinada santrifüj kuvvetlerin oluşmasına neden olmaktadır. Basınç gradiyenti bütün sınır tabaka yapısını etkiler. Örneğin basıncın artmasıyla hız azalacağından santrifüj kuvvette azalmış olur. Çaprazlamasına basınç kuvvetlerinin meydana gelmesi, sınır tabakanın yer değiştirmesine, kuvvet azalmasına ve kanat bölgesi dışında yer alan akım çizgilerinin yapısına önemli ölçüde etki eder. Basınç gradiyenti santrifüj kuvveti belli bir değerde tutmak ve denge denklemini sağlaması için

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{C^2}{r}$$

6.1

şeklinde ifade edilebilir. Denklemde t basınç gradiyentinin doğrultusunu göstermektedir. C_t , t yönündeki hız bileşenini göstermektedir. r akım çizgisinin eğrilik yarıçapını göstermektedir. Hız azalması r eğrilik yarıçapının azaltılmakla düzeltilebilir. Bunun nedeni çaprazlama oluşan basınç gradiyenti tarafından, basma tarafına olduğundan dolayıdır.

Bu durum sınır tabakanın oluştuğu bölgede çaprazlamasına hız bileşenlerinin oluştuğunu gösterir. Burada oluşan ikincil akış modeli Şekil- 6.1 de gösterilmiştir. İkincil akışlar kanat çıkış düzleminde kendini gösterir. Kanat giriş düzleminde ise akıştaki viskoz etkiler kendini gösterir. Yani girişte çaprazlamasına girdaplı akış (Potansiyel olmayan) meydana gelmektedir. Kanat açıklığı boyunca akışın yön değiştirmesinin yanı sıra, akışın dengesinde bozulmaktadır. Akış boyunca girdapların artması girişteki hız gradiyenti ve akışın dönme miktarıyla orantılıdır.

Bu etki ana akıma göre sınır tabaka bölgesinde hızın azalmasına sebep olmaktadır. Yani sirkülasyonun ve kuvvetin cidarda artmasına neden olmaktadır. Şekil- 6.1 aynı zamanda eksenal yönde ölçülen çıkış açısını göstermektedir. Cidarda açı değeri azalmıştır. Ve cidazda akışın dönüşü oldukça fazladır. Kanat girişinde iki-boyutlu sınır tabaka oluşmakta; bu sınır tabaka kanat boyunca devam etmektedir. Bazan hız bileşenleri üç-boyutta oluşmakta ve sınır tabaka da üç-boyutta oluşmaktadır. Ana akım boyunca hız bileşenlerini muhafaza etmek Şekil- 6.2 de gösterilen hız profillerini oluş-

turmakla mümkündür. Üç- boyutlu hız profilinin en önemli parametresi akım çizgilerinin çeperle oluşturduğu açıdır. Diğer önemli faktör, akım çizgisini belli bir hız profilinde tutmaktır. Bu durum ϵ_w açısını tanımlayarak

$$\tan \epsilon_w = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{W}{u} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{(\tau_w)_t}{(\tau_w)_m} \quad 6.2$$

ifadesiyle tanımlayabiliriz. Denklemdaki $(\tau_w)_t$ ve $(\tau_w)_m$ sırasıyla çaprazlamasına ve ana akım yönündeki kayma gerilmelerini göstermektedir. ϵ_w açısı ana akım yönüyle bileşke kayma gerilmelerinin arasındaki açıdır, U ana akım hızını, W akışa dik düzlemdeki hız bileşenini göstermektedir.

Üç-boyutlu sınır tabakayı çözmek için birçok deneysel ve teorik çalışmalar yapılmıştır. Bütün çalışmalar iki-boyutlu türbülanslı sınır tabaka için çalkantı profilini ve cidarlarda sınır tabakanın nasıl oluştuğunu elde etmek içindir. Bu çalışmalarda araştırmacılar sınır tabakayı değişik açılardan ele almışlardır. Araştırmacılar akışkan kanada girerken oluşan sınır tabakaya türbomakinanın rotoruyla, stator arasındaki bağıl hareketinin etkisini incelemiştir. En çok üzerinde durulan nokta kanat çıkış bölgesidir.

6.3 Rotorda Oluşan Sınır Tabaka:

Akışkanın rotora girmeden oluşturduğu sınır tabaka yapısını, rotor girişinde oluşan sınır tabakayla aynı olduğu kabul edilir. Rotor kanatlarında oluşan ikincil akışlar bir hız profili oluştururlar.

Bu hız profili bütün kanatlarda oluşur. Çaprazlamasına oluşan hız gradiyenti kanatların emme tarafına doğrudur. Böylece esas hız bileşenine dik doğrultudaki bileşenler emme tarafına yönelirler. Yani kanatlardaki akışın yön değiştirmesi fazla ise akış kesitine zıt yönde oluşurlar. Eğer akışın yön değiştirme miktarı az ise herhangi bir andaki $(W_{dış})_{bl} \cdot W_{dış}$ yönüne çok yakındır. Şekil.(6.3). Sınır tabaka dışındaki hız azalması daha küçüktür. Şekil 6.3'deki α dış mutlak çıkış açısı sınır tabaka bölgesinde normal değerinden büyük olmaktadır.

Sonuç olarak rotor çıkışında akış karakteristiğinden aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

1)- $\alpha_{dış}$ mutlak çıkış açısı cidara yaklaştıkça büyür, ve böylece kanatlar arasındaki hız, kuvvet düşmesine neden olur.

11)- ΔC_z çevresel hız değişimi sınır tabaka bölgesinin dışında büyük değerler alır. Sonuçta kanatlarda oluşan $r = 2 n r \Delta C_z$ sirkülasyon değeri cidardan uzaklaştıkça büyür.

111)- Birim kütle başına enerji girdisi sınır tabaka bölgesinde artar.

1V)- Sınır tabaka bölgesinde hücum açısı büyük değerdedir. Genelde hücum açıları sınır tabaka bölgesinde kanat geometrisine, kanat kesitine iyi bir uyum göstermezler. Geliş açısı iyi ayarlanırsa hücum açısıyla uyum sağlar. Aksi halde bölgesel olarak sınır tabaka ayrılması olur. Sınır tabaka kayıplarına ilaveten toplam basınç düşmesi veya bu böl-

gelerde enerji kaybına sebep olur.

6.3.1 Rotor Çıkışında Oluşan Sınır Tabaka:

Şekil- 6.4' den görüleceği gibi bağıl sistemden mutlak sisteme geçildiğinde hızların bileşimi çıkıştaki sınır tabaka bölgesinde aynı değeri almaktadır. Mutlak hız profili hemen hemen sabit olmakta ve çeperde sıfırdan farklı olmaktadır. Bu rotor girişindeki yapıyla tamamen terstir. Burada bağıl hız, mutlak hızla yer değiştirmiştir. Şekil- 6.4 aksenal ve çevresel hız profillerini ve sınır tabaka bölgesindeki bağıl hareketten dolayı enerji artmasını göstermektedir. Şekil normal sınır tabaka profiliyle, enerji verilmiş sınır tabaka hız profilini göstermektedir.

Gözlenmesi beklenen diğer bir husus özellikle çeperde sıfır olmayan hız değerinde, kayma gerilmesi olmadığı durumunda aksenal yönde azalma olur. Aynı zamanda cidar sürtünme kayıplarında azalır. Rotor ile stator arasındaki aksenal boşluk bu durumda önemli olur. Yani sınır tabaka bölgesindeki akışın enerjisi rotor çıkışında artırılır, ve yer değiştirme kalınlığı azaltılır.

Sonuç olarak cidara yakın bölgelerde önemli miktarda enerji elde edilebilir. Bu miktar sınır tabaka bölgesinin dışında çok daha büyüktür. Fakat bu enerji normalde faydalı işe çevrilememektedir. Pratik olarak kanatlar bu enerji dönüşümünü gerçekleştiremezler. Toplam basıncın artmasına ve bir miktarında ısıya dönüştüğü gözlenir.

farklılık gösterir. Bu kabul sınır tabaka bölgesindeki kuvvetin azalma yönünü ve büyüklüğünü tesbit etmede yararlıdır.

Navier-Stokes denklemlerini çap boyunca ve sınır tabaka bölgesinde integre ederek aşağıdaki denklemler elde edilir. Bütün değişkenler ortalama çapa göreler.

$$\frac{d}{dx} C_{xe}^2 \bar{\theta} + C_{xe} \delta_x^* \frac{d\bar{w}}{dx} = \frac{\bar{w}}{\rho} + \frac{\bar{F}}{\rho} \quad (6.3)$$

Denklem-6.3'deki C_{xe} değeri sınır tabaka bölgesindeki hızın kartezyen koordinatlarda ifadesi olup

$$C_{xe}^2 \theta = \int_0^{\delta} (\bar{c}_e - \bar{c}) c_x dy = \int_0^{\delta} (\bar{w}_e - \bar{w}) c_x dy \quad (6.4)$$

$$C_{xe} \delta_x^* = \int_0^{\delta} (C_{xe} - c_x) dy \quad (6.5)$$

şeklinde tanımlıdır. \bar{F} terimi

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 \quad (6.6)$$

$$\bar{F}_1 = \bar{l}_t \frac{1}{9} \int_0^{\delta} (\Delta P_e - \Delta P) dy \quad (6.7)$$

$$\bar{F}_2 = -\bar{l}_x \int_0^{\delta} \frac{d}{dx} (P_e - P) dy \quad (6.8)$$

$$F_3 = -\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (c_e^1 c_{xe}^1 - \bar{c}^1 c_x^1) dy \quad (6.9)$$

terimlerinden oluşur.

$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ sınır tabaka boyunca oluşan kuvvetlerdir. Bu kuvvetler sınır tabaka bölgesindeki kuvvetlerle sınır tabaka bölgesine etkiyen kanat kuvvetlerinin toplamıdır. C^1, c^1 hız bileşenlerinin simetrik yapıya yaklaşma miktarıdır. Bu katsayılar ikincil akışlardan dolayı tanımlanır. Genelde kabuller \bar{F} kuvvet azalmasını telafi edecek şekilde yapılır.

6.5.1. Sınır Tabaka Denklemine Analiz Eden Bazı Araştırmacıların Yaptığı Kabuller

Railly ve Toward: Denklem-6.3'deki \bar{F} kuvvet terimini sıfır alarak, kontrolsüz bir sınır tabaka yapısını kabul etmektedirler. Kanatların birbirine etkisini dikkate alınarak kayma gerilmeleri yerine kayma gerilme faktörü tanımlamışlardır. Bu faktör Reynolds sayısı ve sınır tabaka kalınlığına bağlıdır. Metoda göre akış modeli çaprazlamasına olmaktadır. Denklem-6.3 yapılan bu kabullerle,

$$\frac{d}{dx} u_e^2 \theta_2 = -C_{xe}^2 (\theta_x + \delta_x^*) \frac{d}{dx} \frac{tg^\alpha}{\rho \cos \alpha} + \frac{\tau t}{\rho \cos \alpha} \quad (6.10)$$

şeklini alır. θ_2 kabul edilen akış modeline göre momentum kalınlığını göstermektedir. Denklem sağındaki ilk terim akışın yön değiştirme şiddetine bağlı olarak alınan basınç gradiyentini temsil eder. İkinci terim yeni akış modelindeki kayma gerilmesini ifade eder.

Stratfort'un analizinde ikincil akışlar üzerinde durmadan, sınır tabakadan dolayı oluşan blokaj (akışın tıkanması) üzerinde durulmaktadır. Stratfort sınır tabakada akış açısının değişmediğini kabul ederek, aksenal yöndeki F_x kuvvet azalmasını sıfır kabul ederek Denklem-6.3'ü çözmeye çalışmıştır.

Buna göre Denklem-8

$$\frac{F_2}{\rho} = \frac{F_t}{\rho \cos \alpha} = C_x^2 (\theta_x + \delta_x) \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dx} \quad (6.11)$$

şeklinde olmaktadır.

Marsh ve Horlock'un analizinde kanat sayısını artırarak momentum denklemini çözmüşlerdir. Pratik olarak çaprazlamasına akış oluşmadığını varsayarak sınır tabakadan dolayı kuvvet azalmasını hesaplamışlardır. Akışı aynı özelliğe sahip iki akış şeklinde düşünmüşlerdir. Buna göre Denklem-8

$$\frac{F_2}{\rho} = C_x^2 (\theta_x + \delta_x^*) \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dx} \quad (6.12)$$

$$F_x = -F_z \cdot \operatorname{tg} \beta$$

şeklinde olmaktadır.

Sonuç olarak makinanın performansı bakımından ikincil akışlar, kaçaklar, blokaj (akış tıkanması) önemli rol oynamaktadır. Bu etkileri sınır tabaka yapısına etki ederek

optimal şartlarda makina dizayn edilebilir. Bu saptırıcı unsurları doğrudan faydalı işe ve neticede makine toplam verimine etkimektedirler. Bu etkileri devre dışı bırakarak yüksek performansta türbomakina dizayn edilmesi hedeflenmelidir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Türbomakinalarda gerçek bir akış analizi yapmak, yüksek performansta makina dizayn etmek bakımından oldukça önemlidir. Gerçek anlamda akış analizi ise öncelikle türbomakina içinde akış olayının nasıl gerçekleştiğini iyi bilmekle mümkün olmaktadır. Akış hakkında yeterli bilgi sahibi olunduğu takdirde, bu akışın matematik modelini kurarak, akışı teorik olarak iyi karakterize etmek gerekir. Bu ise akış bölgesine en iyi uyarlanan bir metotla mümkün olur. Belkide konunun en can alıcı noktası bu uyarlanma işlemidir denilebilir. Bunun için birçok sayısal metotlar geliştirilmiştir. Bu sayısal metotların en yaygını sonlu farklar ve sonlu Elemanlar metodudur. Son yapılan araştırmaların çoğunluğu sonlu elemanlar metodunu kullanmaktadırlar. Bunun nedeni metodun esnekliği ve her türlü akış geometrisine mükemmel uyarlanabilmesidir. (13). Aslında akış problemlerinde sonlu elemanlar metodunun kullanımı en avantajlı metoddur ve gerçek sonuçlar vermektedir. Modern anlamda bir akış analizi yaparak makina dizayn edilmesi için bahsettiğimiz şartların mutlaka yerine getirilmesi gerekir. Ancak bu kadar ciddi bir analiz türbomakinanın durumuna bağlıdır. Yani türbomakinanın kullanma alanına, fonksiyonuna maliyetine göre bu işlem değişir. Örneğin bir pompa dizayn etmede bahsettiğimiz şekilde ciddi bir akış analizine ihtiyaç duyulmaz. Çünkü pompa beklediğimiz fonksiyonu makul verim

sınırlarında gerçekleştiriyorsa mesele yoktur. Ama daha ciddi bir analizle pompanın performansları daha da iyileştirilebilir. Türkiye'de de gözlenen olay budur. Yapılan imalatlar bir-boyutlu akış teorisine göre ilk dizayn boyutları belirlenmekte, daha sonra bu model, deney standında birtakım testlere tabi tutulduktan sonra son şekli verilmektedir. Türkiye'deki bütün pompa imalatçıları da bu tip bir imalat yapmaktadırlar. Su türbinleri içinde hemen hemen aynı şeyleri söylemek mümkündür. Çünkü bu makinaların da verimi yüksektir. Beklenen fonksiyonu yerine getirmektedir. Bu imalat olayını sıkıştırılamaz akışkanla çalışan türbomakinalar için genellemek doğru olabilir.

Sıkıştırılabilir akışkanla çalışan türbomakinalar, özellikle buhar ve gaz türbinleri, kompresörlerde akış analizi önemli olmaktadır. Zaten araştırmacıların en yoğun çalıştığı makinalar da bu makinalardır. Akışın sıkıştırılabilir ve bu makinaların çalışma şartları çok değişiktir. Bu tür makinaların dizaynında basit analizlerin kullanılması imkansızdır. Akış olayı bu makinalarda bütünü farklıdır. Geliştirilen bütün modern akış analizleri bu makinalar için geliştirilmiştir. Günümüzde araştırmacıların en çok ilgilendiği konulardan biridir. Bu çalışmaların amacı bir yandan savunma sanayiinin zorunluluğu, diğer taraftan enerji sorunudur.

Uçak tahrikinde gaz türbini, jet motoru ve kompresör gruplarında yüksek performansta dizayn zorunluluğu vardır.

Diğer taraftan yeni enerji kaynaklarının bulunmasıyla, bu enerjilerin değerlendirilmesi için buhar ve gaz türbinlerinin geliştirilmesi gerekir. Türkiye'deki kömür potansiyeli, doğal gaz gözönüne alınırsa bu tip türbomakinelerin geliştirilmesi yararlı olacaktır.

Bütün bu bahsettiğimiz nedenlerden dolayı türbomakinelerde ciddi bir analizi yaparak yüksek performansta makina dizaynı hedeflenmelidir. Özellikle bilgisayarlar yardımıyla tasarımlar hedeflenmelidir.

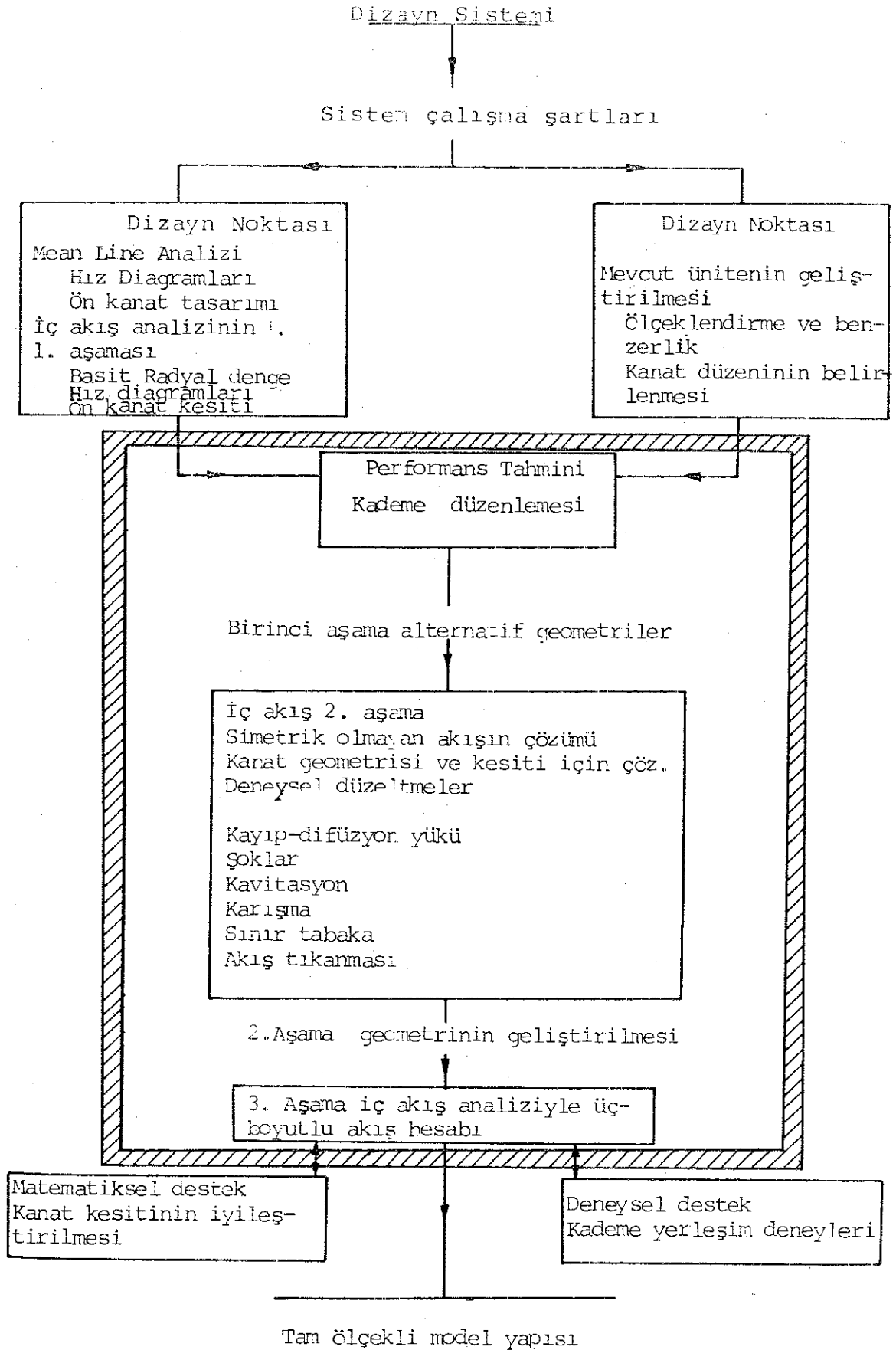
Mevcut çalışmamızda akışın matematik modeli üzerinde durulmuştur. Konuyu daha ileri bir aşamaya götüreceklerine, akışın matematik modelinin bilgisayara uyarlanması tavsiye edilebilir.

KAYNAKLAR

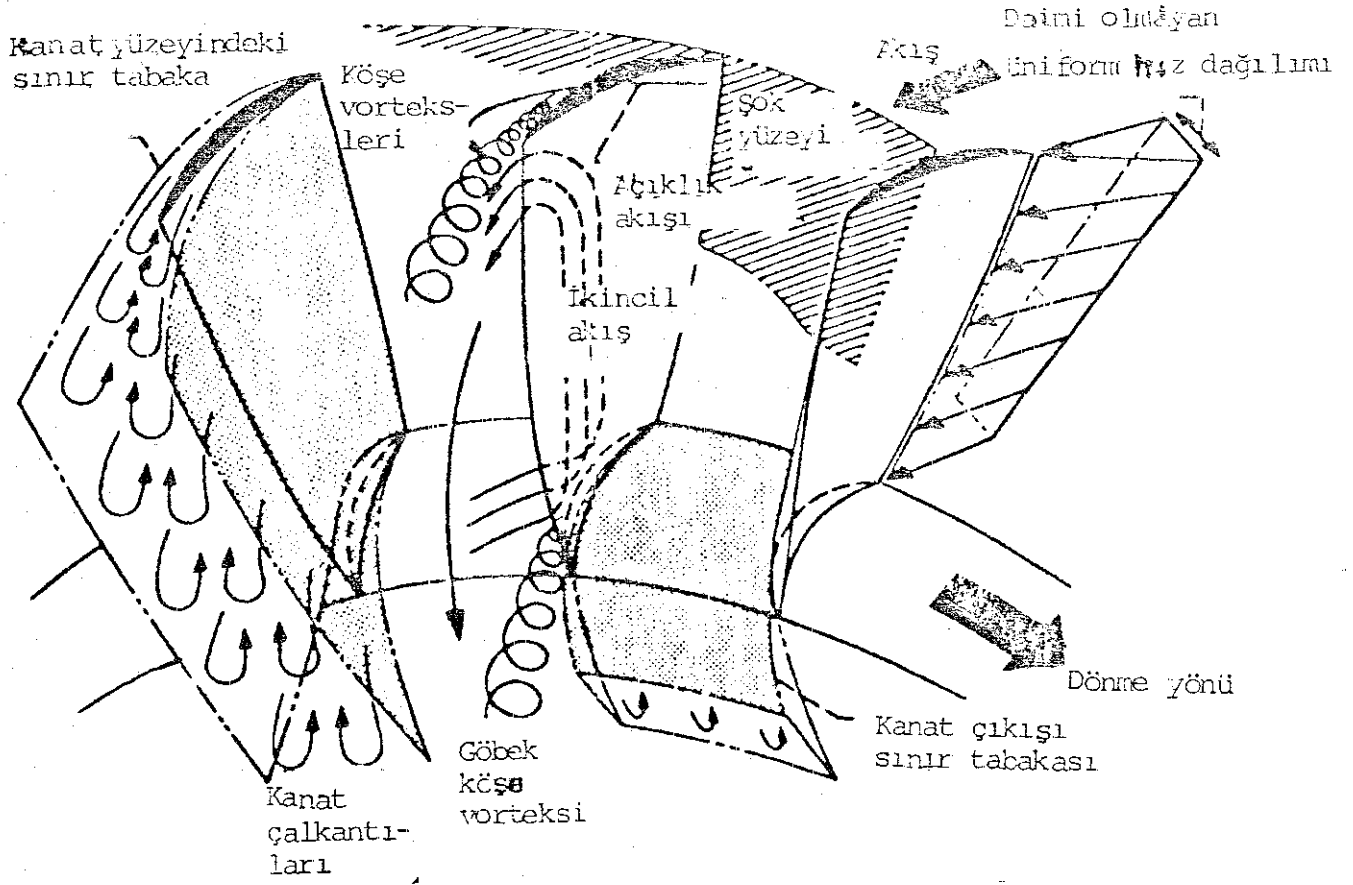
- (1) AGARD ADVISORY REPORT No: 175.
- (2) NACA TN 2604.
- (3) Ch HIRSCH, "End-Well Boundary Layers in Axial Compressor", ASME Paper no. 74-GT-72.
- (4) J.H. HORLOCK, J.F. LOUIS, P.M.E. PARCEVAL, B. LAKSHMINARAYANA, "Wall Stall in Compressor Cascades", Trans ASME, Ses.D, 88, 637, 1966.
- (5) ŞALVARLI Hüseyin, "Hidrolik Makinalar ders notları Isparta Mühendislik Fakültesi Yayınları.
- (6) DIXON S.L. Fluid Mechanics, Thermodynamics of Turbomachinery Pergamon Press. LONDON.
- (7) NALBANTOĞLU, C., "Through Flow Calculations in Turbomachinery", M.S. Thesis, METU, 1981.
- (8) UÇER, A.Ş. ve DURMAZ, T., "A Quasi-Three-Dimensional Finite Element Solution for Steady Compressible Flow Through Turbomachines", Journal of Engineering for Power, Vol.105, July 1983.
- (9) Wu, C.H, "A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial, Radial and Mixed Flow Types", U.S. NACA-TN-2604, 1952.
- (10) Huebner, H.K., "The Finite Element Method for Engineer", John Willey and Sons, 1975.
- (11) Zienkiewicz, O.C. "The Finite Element Method", McGraw-Hill Book Company, 1977.

- (12) Hirsh, Ch. and Varzee, G., "Finite Element Method for Through Calculations in Turbomachines", ASME Paper 76 FE 12, 1976.
- (13) GÜNAY, M. Ali "Sonlu Elemanlar Metodunun Mühendisliğe Uygulanması", Seminer, Isparta Mühendislik Fakültesi, 1987.

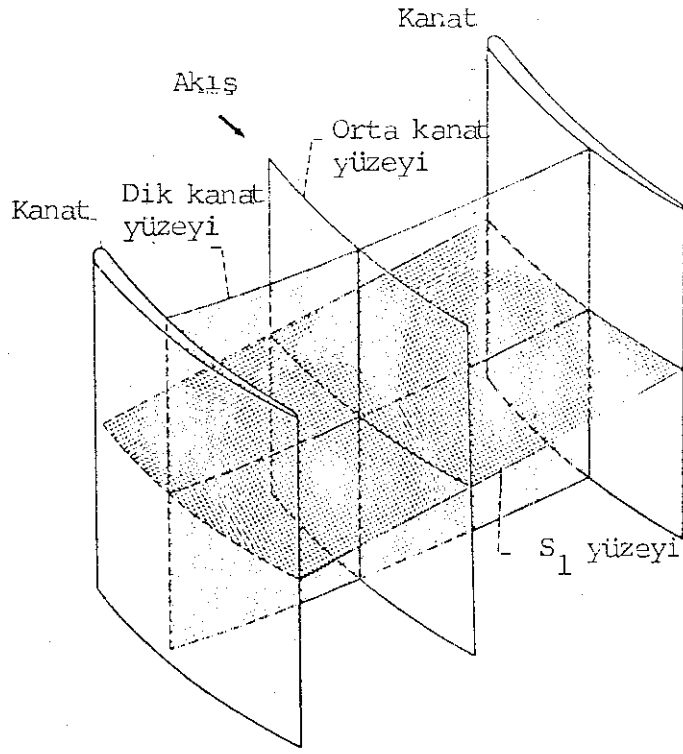
E K L E R



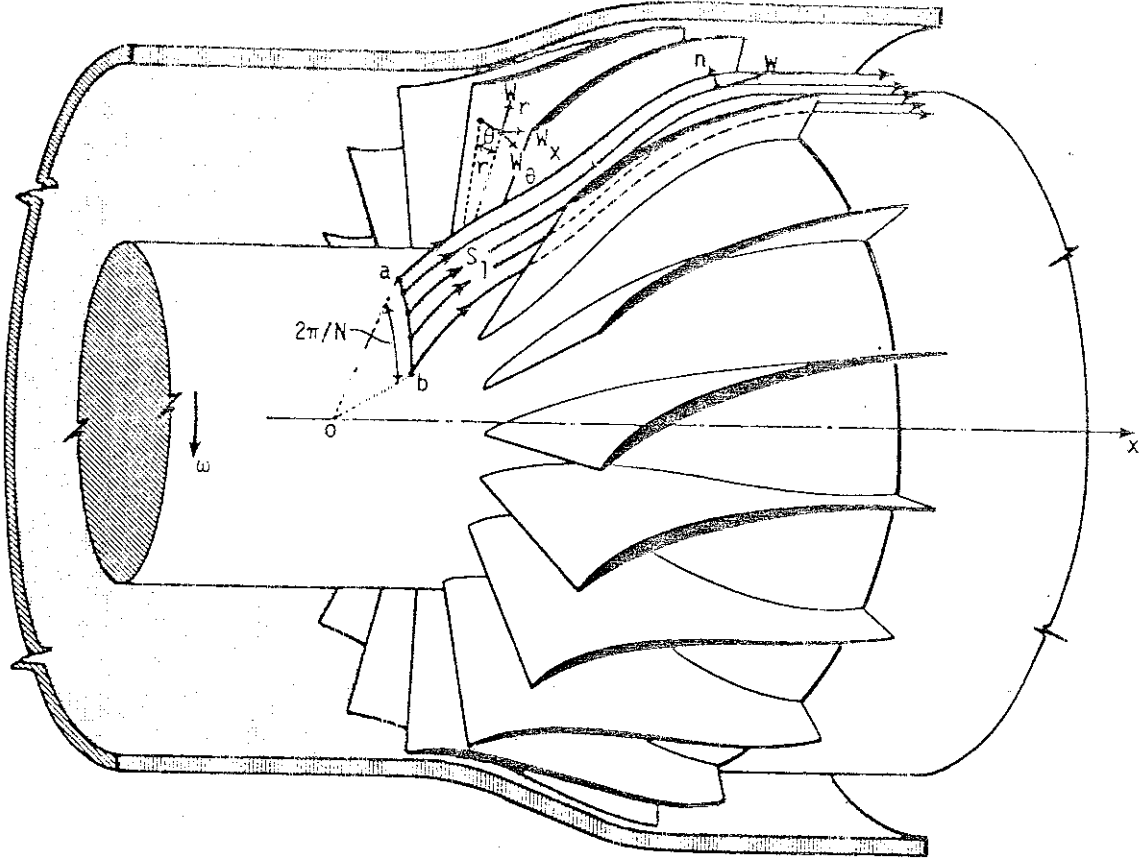
Şekil 3.1. Bir Türbomakinanın dizaynının akış şeması



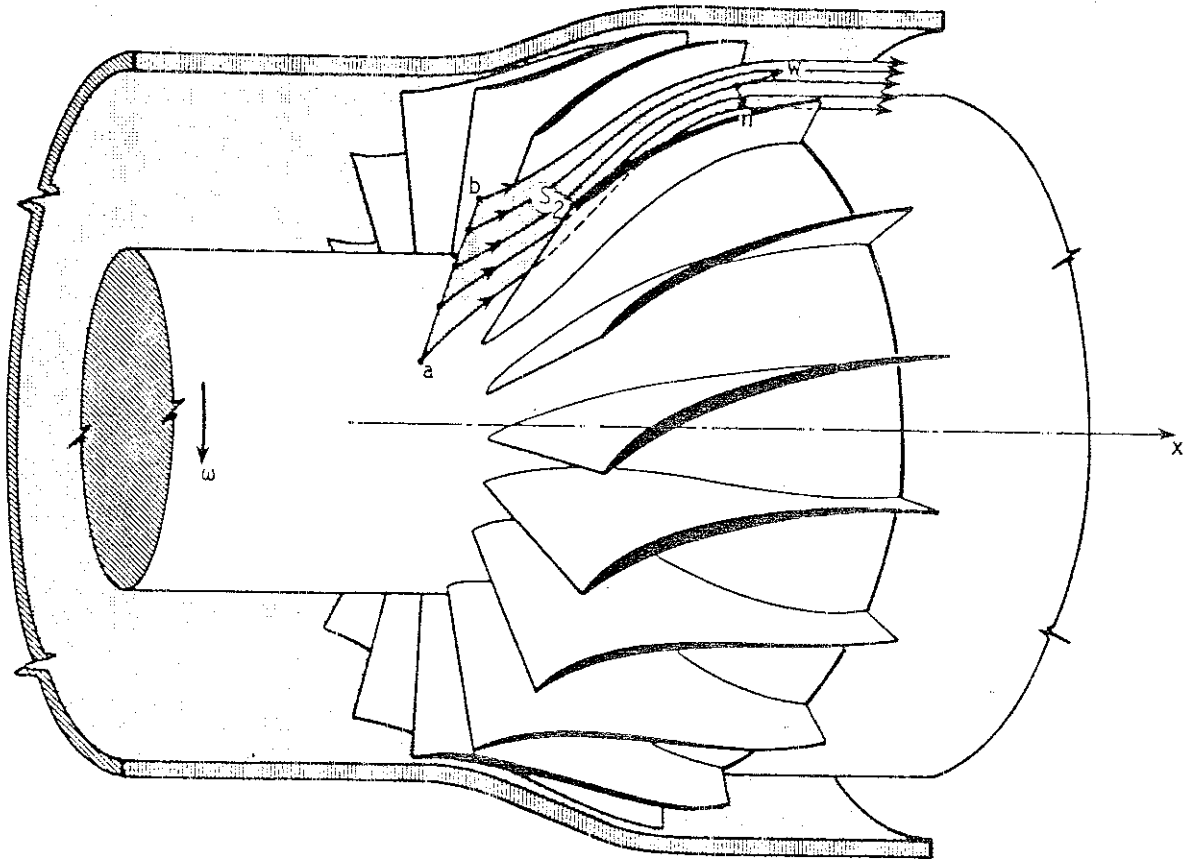
Şekil 3.2. Aksenal bir kompresörde akışın durumu



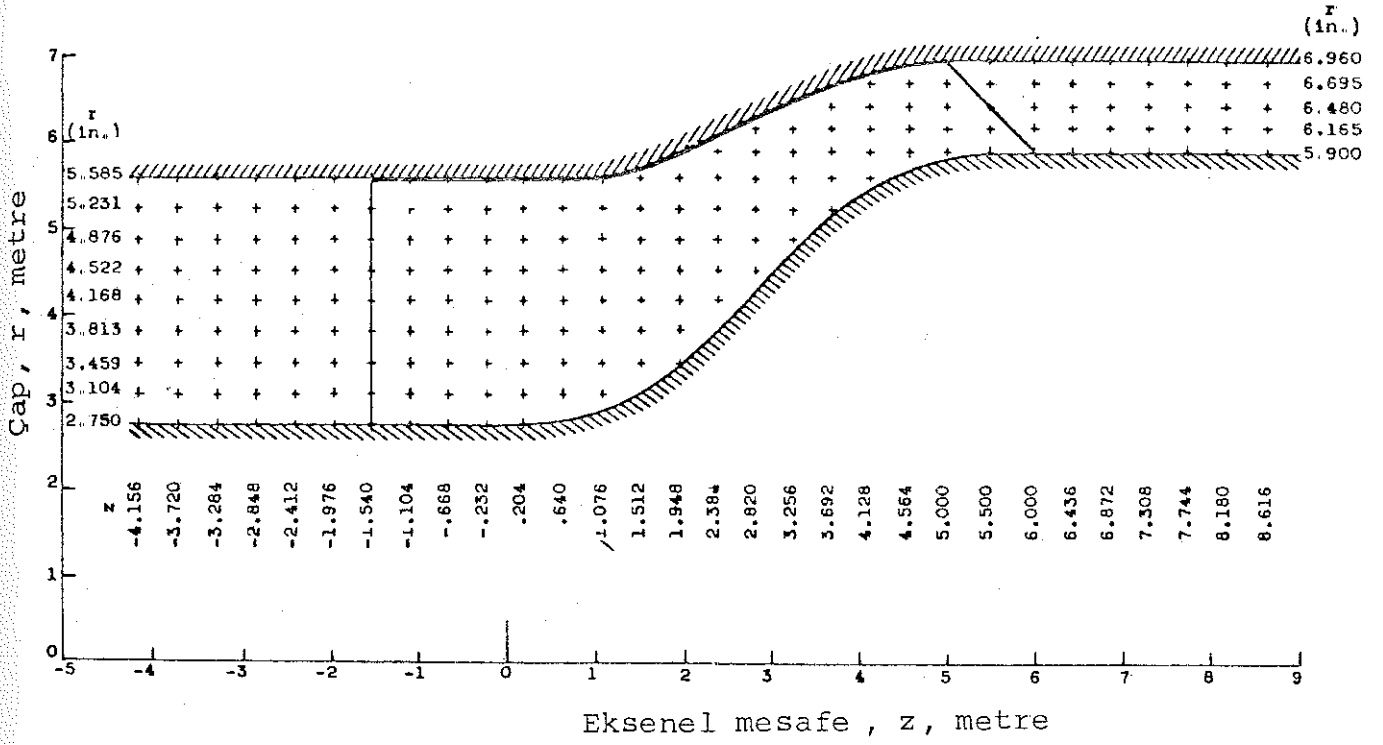
Şekil 3. 3. Kanal Kontrol Yüzeyi



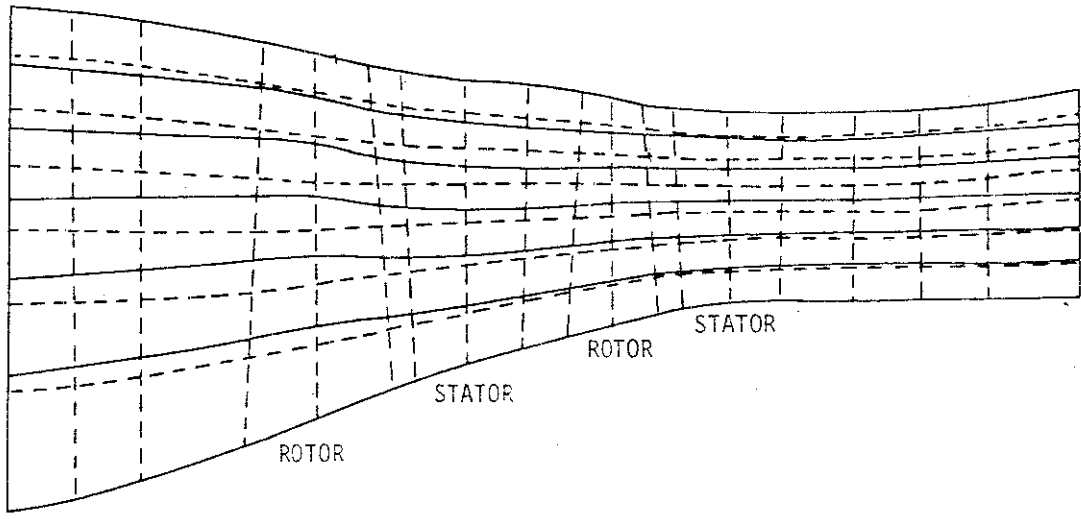
Şekil 3.4.a. S_1 Akım yüzeyi ve ilgili semboller



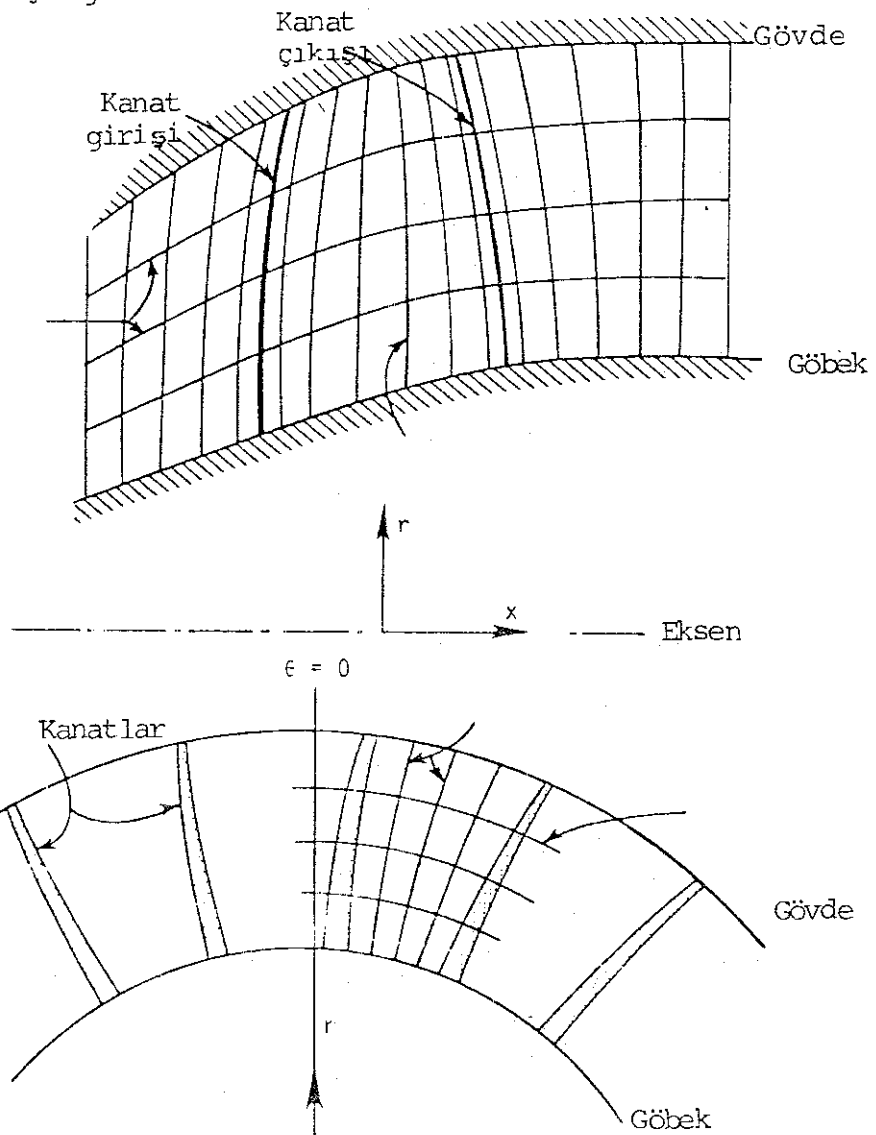
Şekil 3.4.b. S_2 Akım yüzeyi ve ilgili semboller



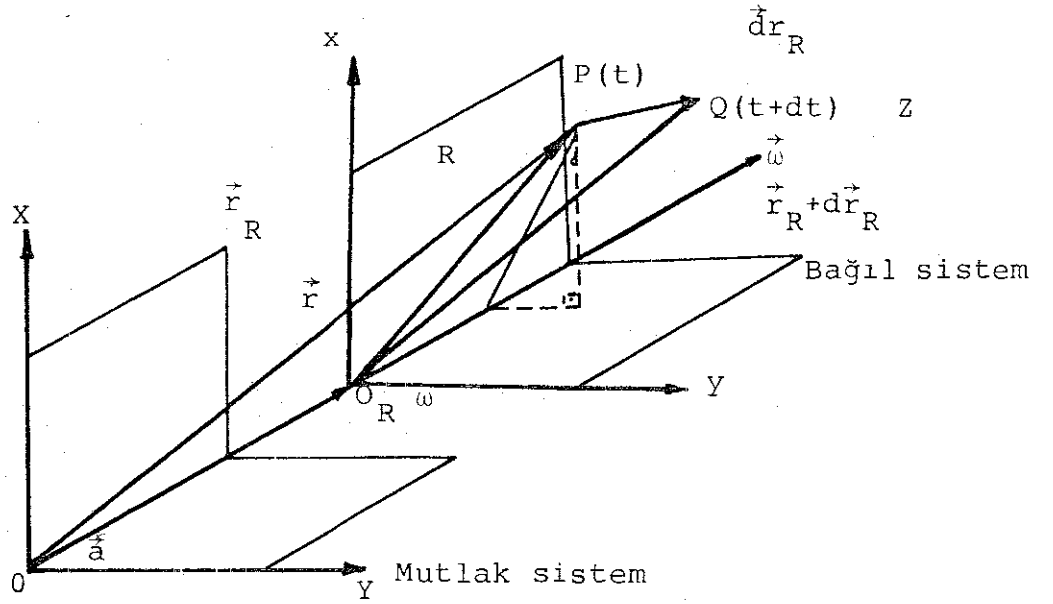
Şekil 3.5. Karışık akışlı bir çarkın sonlu farklar metodunun uygulaması



Şekil 3.6. İki kademeli fanın gerçek ve hesaplanmış akım çizgileri



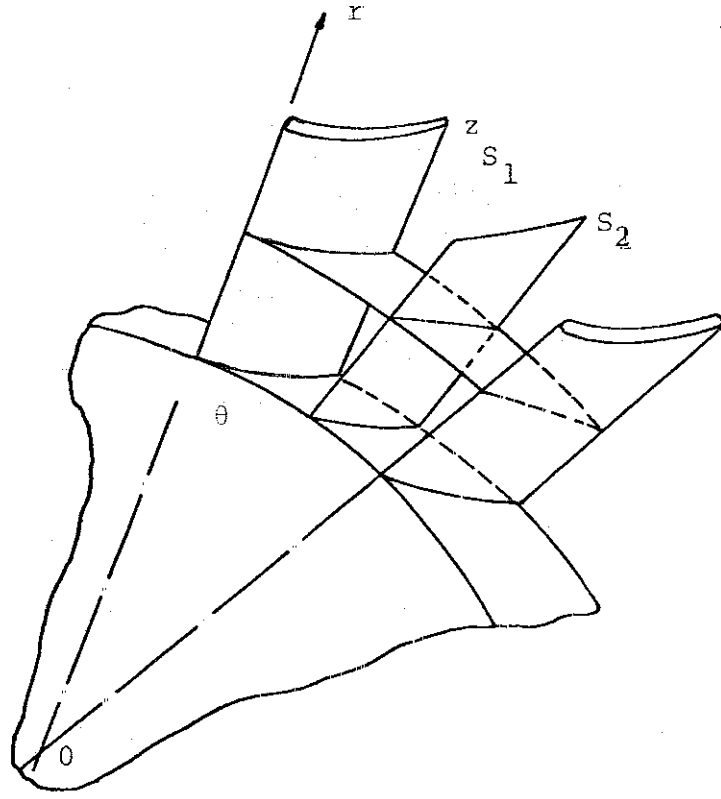
Şekil 3.7. Üç-boyutlu akış için sonlu hacimler metodunun yapısı



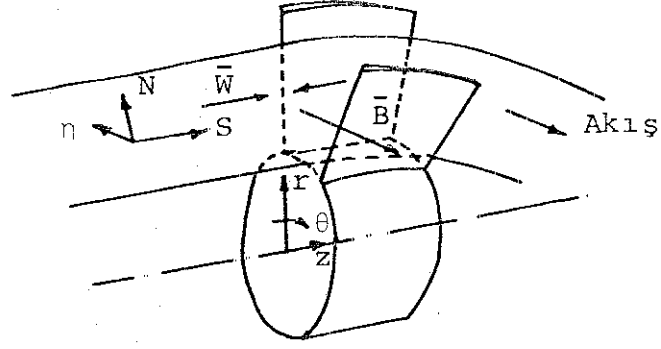
(X, Y, Z) : Mutlak koordinat sistemi

(x, y, z) : Bağıl koordinat sistemi

Şekil 4.1. Mutlak ve Bağıl koordinat sistemleri

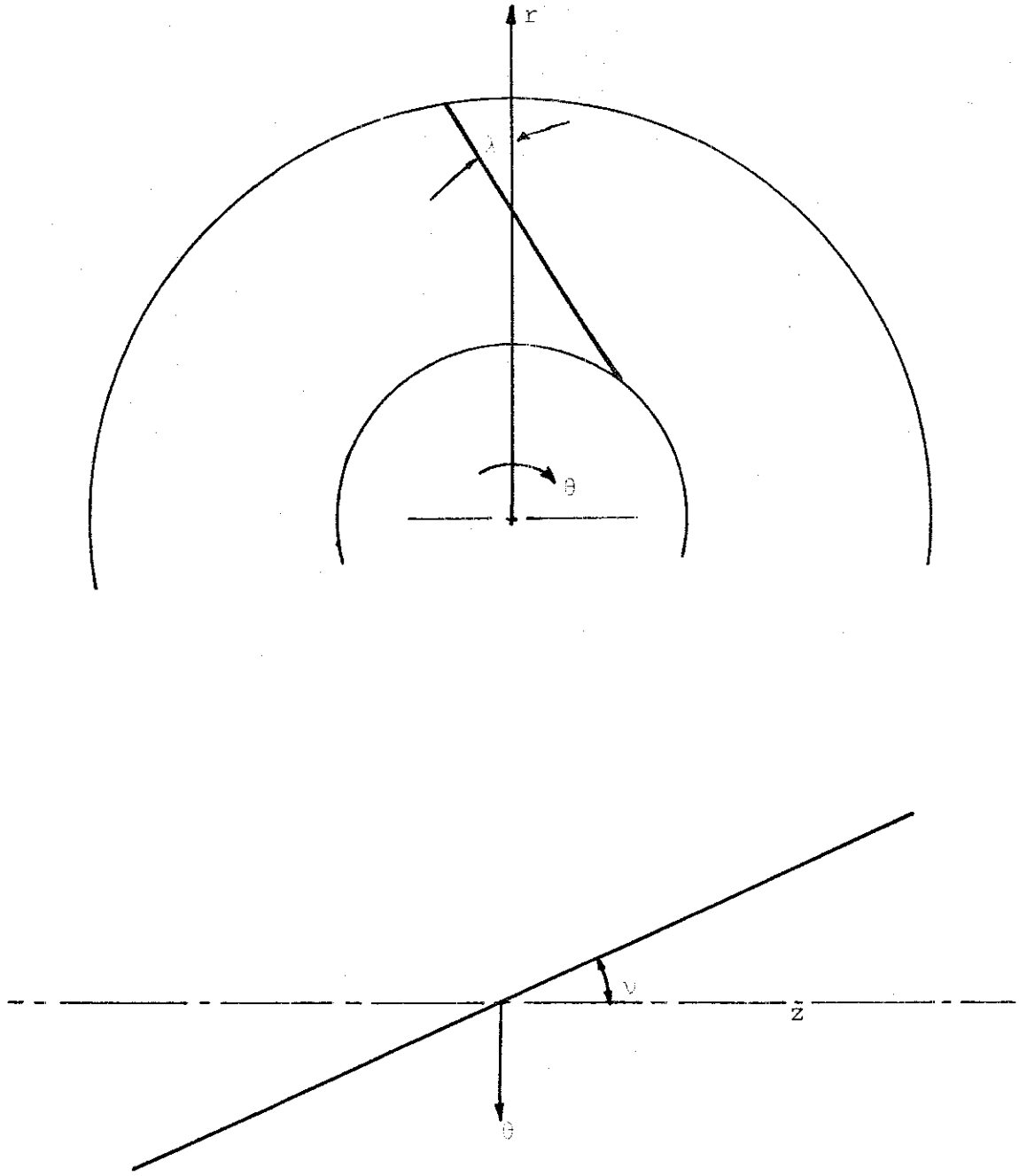


Sekil 4.2. Bağıl Akım yüzeyleri

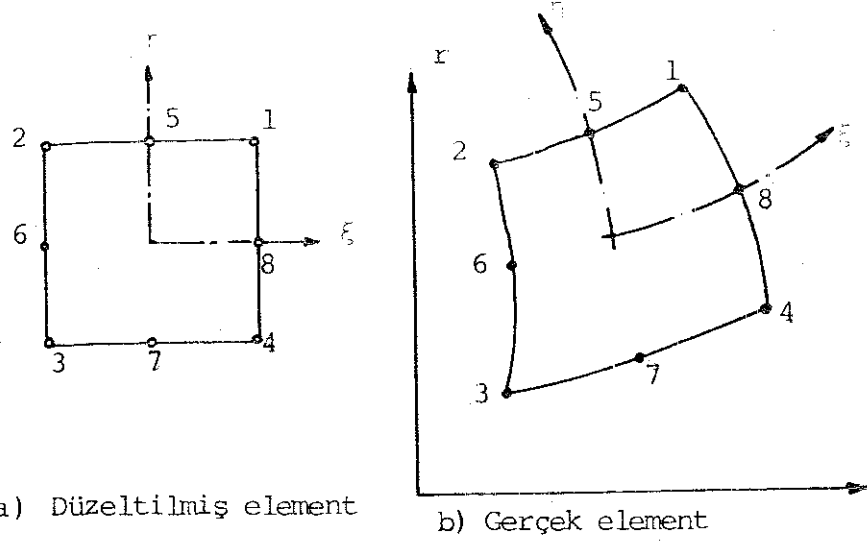


- \vec{f} = Sürtünme kuvvet
 \vec{B} = Kanat kuvveti
 \vec{w} = Bağıl hız vektörü

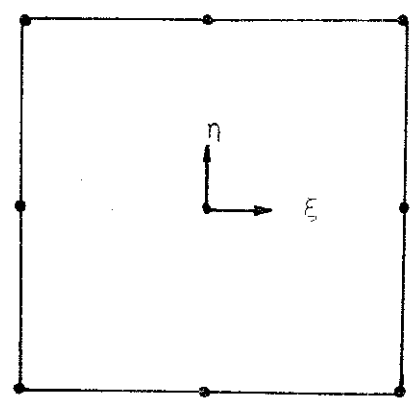
Şekil 4.3. S_2 Akım yüzeyindeki kuvvetler ve koordinat sistemi



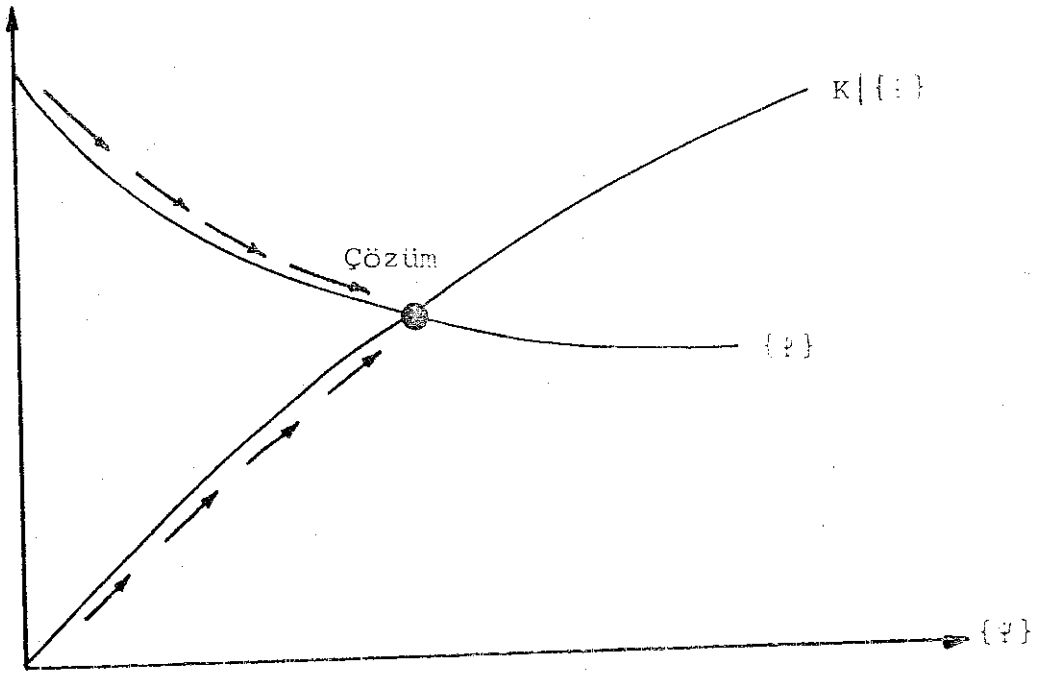
Şekil 4.4. Akım yüzeyinin yerel Geometrisi



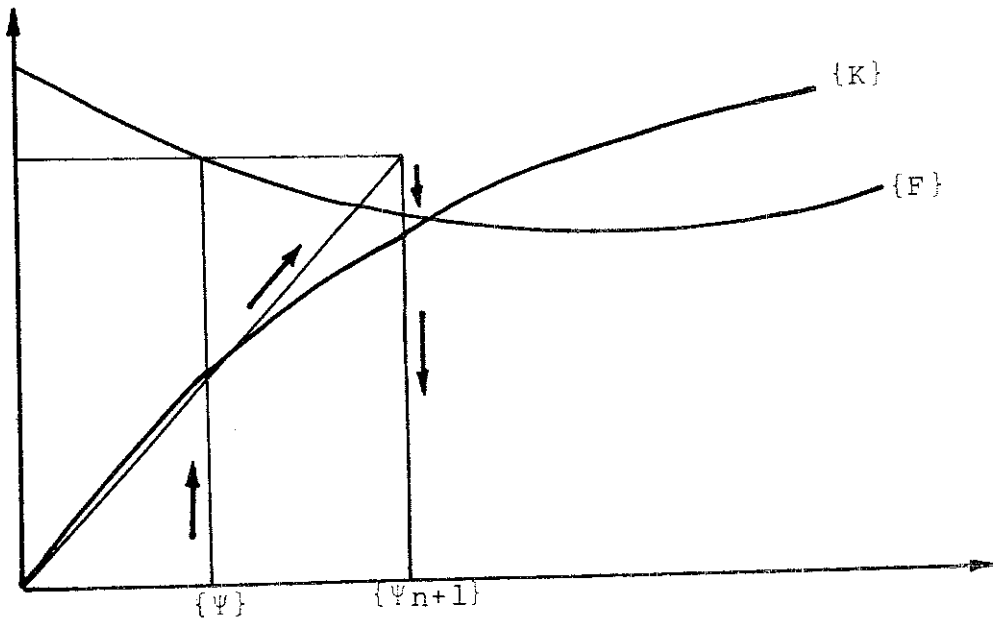
Şekil 5.1. Düzeltilmiş ve Gerçek Elemanlar



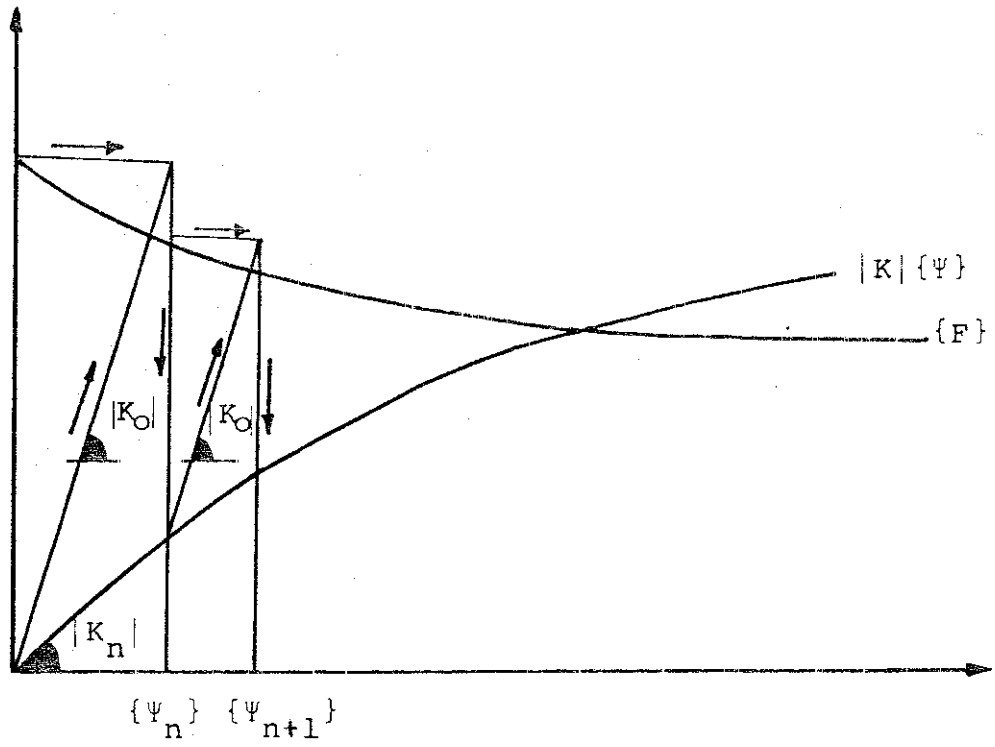
Şekil 5.2. $n=3$ için Gauss-Legendre noktalarının durumu



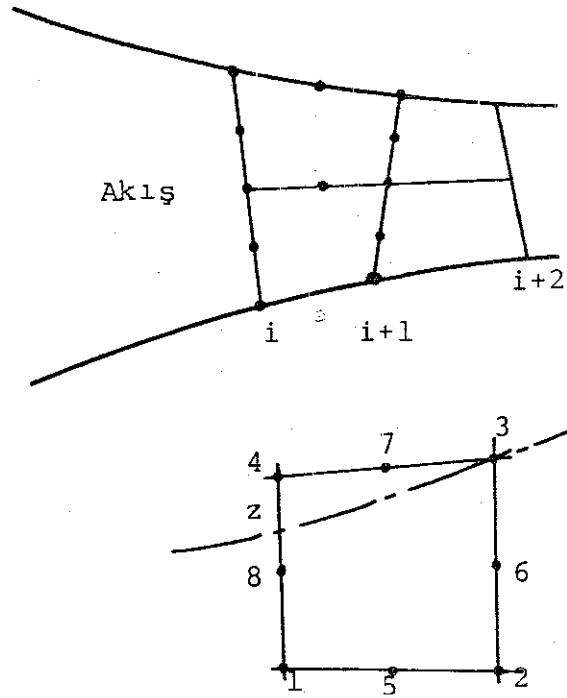
Şekil 5.3. Denklem (5.15)in tek-boyutta gösterilmesi



Şekil 5.4. Sekant Direngelik Şeması

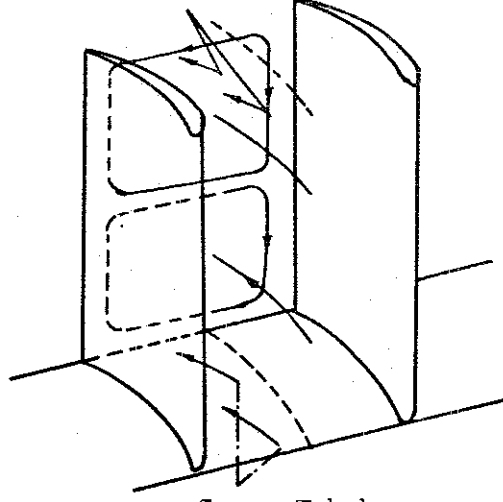


Şekil 5.5. Sabit Direngelik Şeması



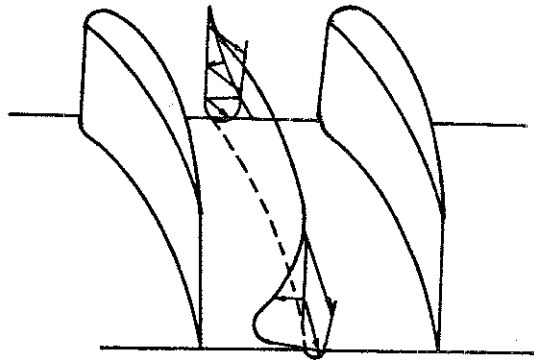
Şekil 5.6. Akım çizgilerinin gösterimi

Sınır Tabaka

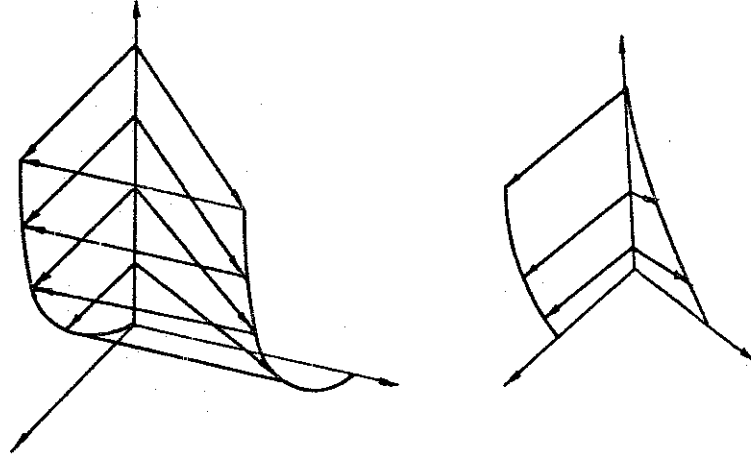


Sınır Tabaka

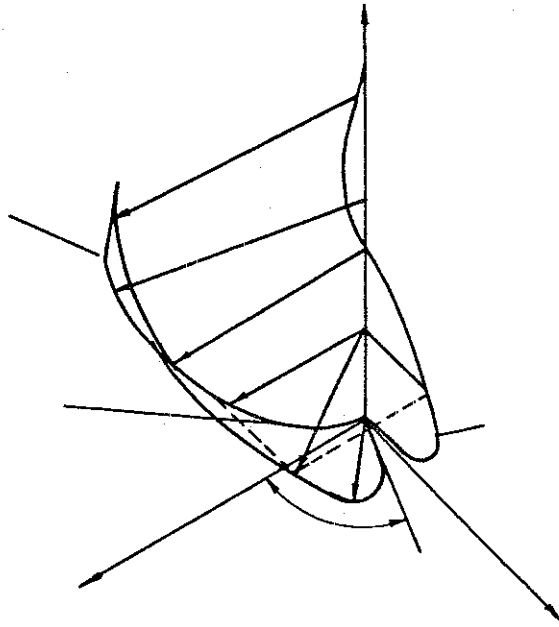
Şekil 6.1. İkincil Akış ve Sınır Tabaka Oluşumu



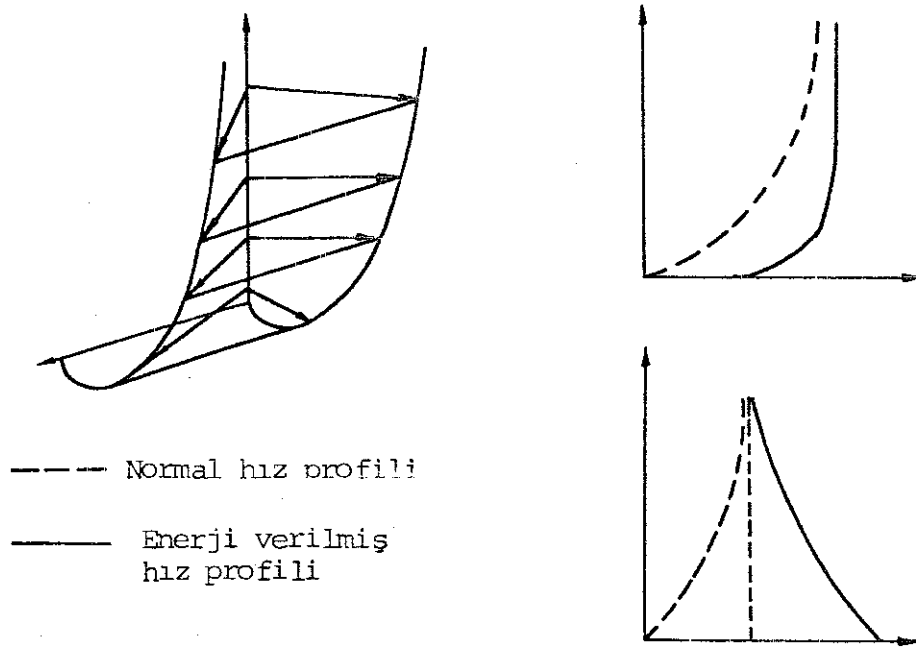
Şekil 6.2.a. Çapraz hız bileşeninin oluşumu



Şekil 6.2b. Bağıl hareketten dolayı hız profilleri



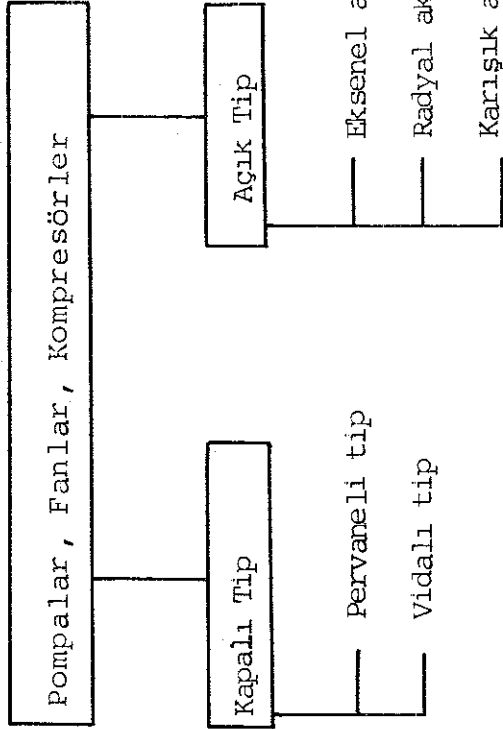
Şekil 6. 3 . Hız Profilleri



Şekil 6.4. Bağıl ve mutlak çıkış hızlarının birbirleriyle bağlantısı

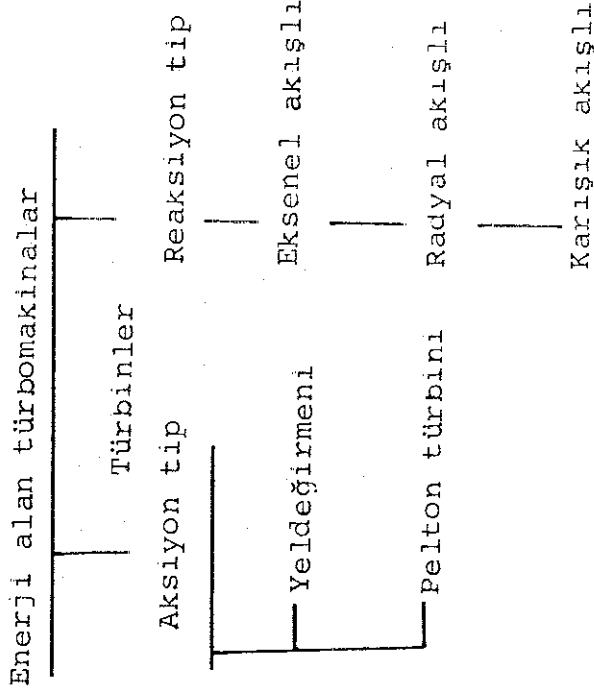
Tablo 2.2. Türbomakinelerin 2. Tip Sınıflandırılması

Akışkana Enerji Veren Türbomakineler

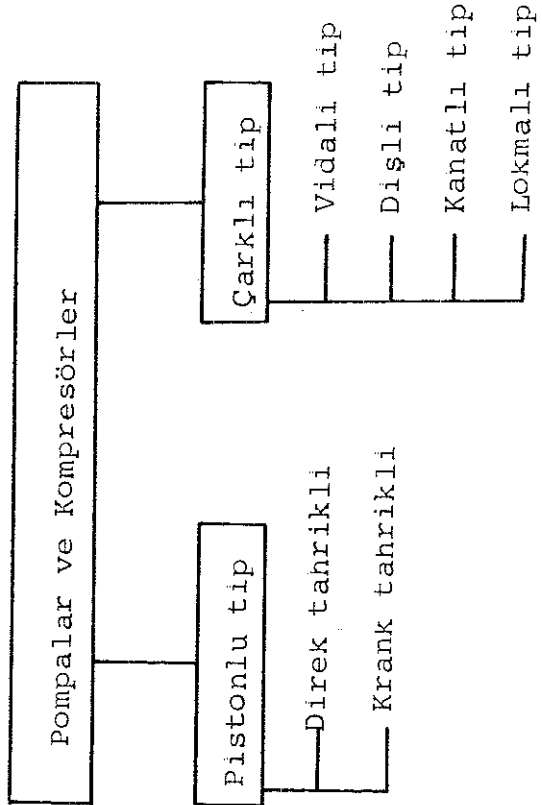


Hem enerji alan hem veren türbomakineler

Hidrolik kavrama
Tork konverter



Rotodinamik Tipler



Volümetrik tipler

Tablo 3.1. Akış Hesabında Kullanılan Denklemler

Fiziksel İlke	Denklem Şekli	Kaynak
Doğrusal Momentum Dönüşümü	Diferansiyel Denklem (Üç bileşenli) Akış elemanı için integral denklemi	Wu ve Wolfenstein (1950) Wu (1952a) Denton ve Singh (1979) Farn ve Whirlow (1977)
Momentumun Momenti İlkesi (Euler Türbin denklemi)	Akış elemanına göre integral denklemi Akım tübü	Wu (1952a) Denton ve Singh(1979) Wennerstrom (1974) Hearsey (1975)
Kütlenin Sakımı İlkesi	Diferansiyel Denklem Akış elemanı için integral denklemi Akım tübü Kontrol yüzeyi	Wu (1952a) Marsh (1976) Denton ve Singh(1979) Farn ve Whirlow (1977) Wu ve Wolfenstein (1950) Hearsey (1975)
Termodinamiğin Birinci kanunu	Diferansiyel Denklem Sonlu hacim için integral denklemi	Wu (1952a) Denton ve Singh (1979) Farn ve Whirlow (1977) Wu ve Wolfenstein (1950) Hearsey (1975)
Termodinamiğin ikinci kanunu	Diferansiyel Denklem	Wu ve Wolfenstein (1950) Wu (1980)

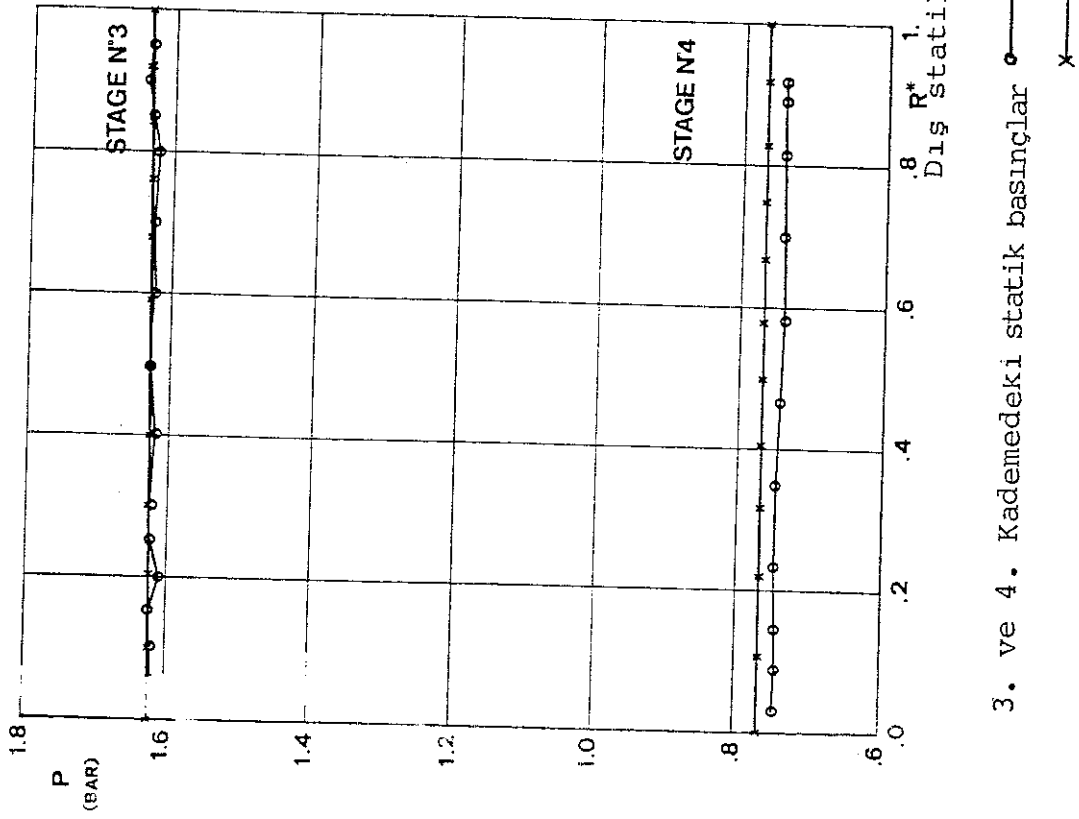
Tablo 5.1. Isoparametrik Eleman için Şekil Fonksiyonu

Uç sayısı	Uç koordinatlar	Şekil fonksiyonu : N_i
1	+1; +1	$N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_5+N_8)$
2	-; 11	$N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}(N_5+N_6)$
3	-1; -1	$N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_6+N_7)$
4	+1; -1	$N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}(N_7+N_8)$
5	0; +1	$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$
6	-1; 0	$N_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$
7	0; -1	$N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$
8	+1; 0	$N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$

Tablo 5.2. Gauss-Legendre integrasyon noktalarının koordinatları ve ağırlıkları

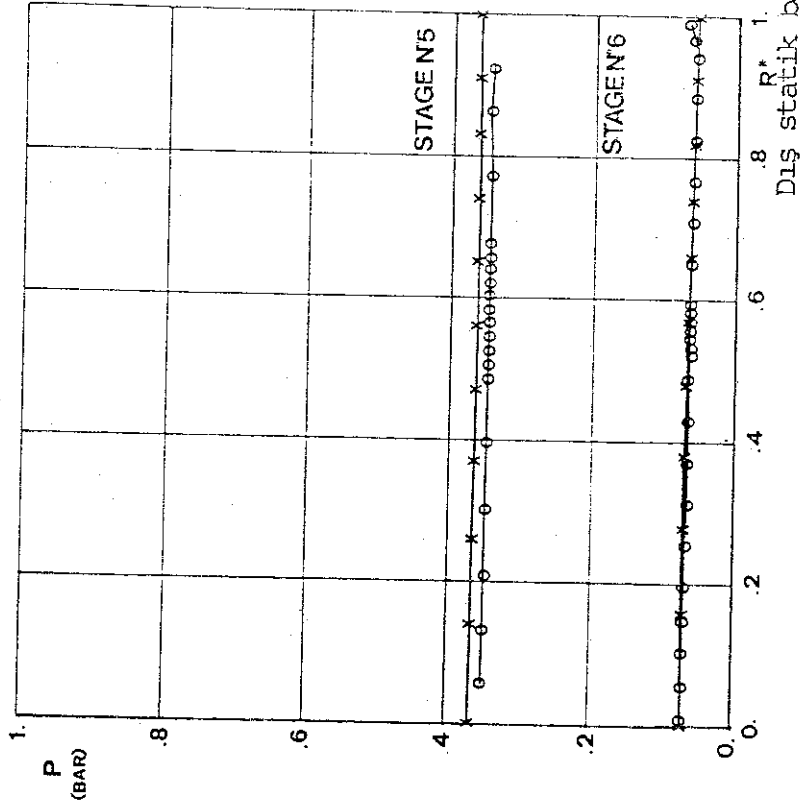
n	η_i or ξ_i	w_i
2	-0.57735 20691 89626	1.0
	+0.57735 02691 89626	1.0
3	-0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
	0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88888
	+0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55555

ANSALDO TURBINE



3. ve 4. Kademedeki statik basınçlar \circ Deneysel \times Teorik

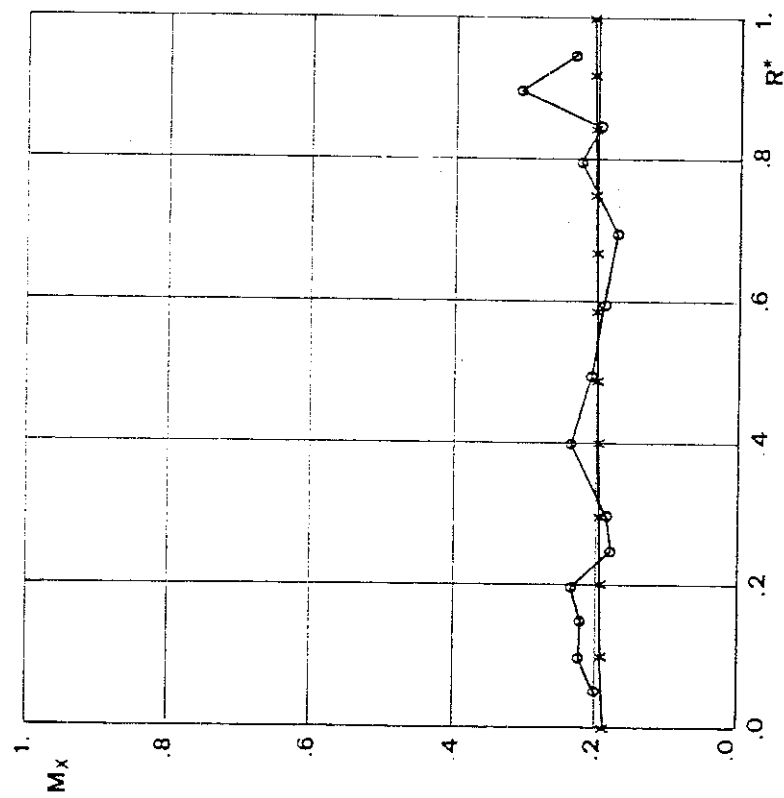
ANSALDO TURBINE



5. ve 6. Kademedeki statik basınçlar

ANSALDO TURBINE

AXIAL MACH NUMBER

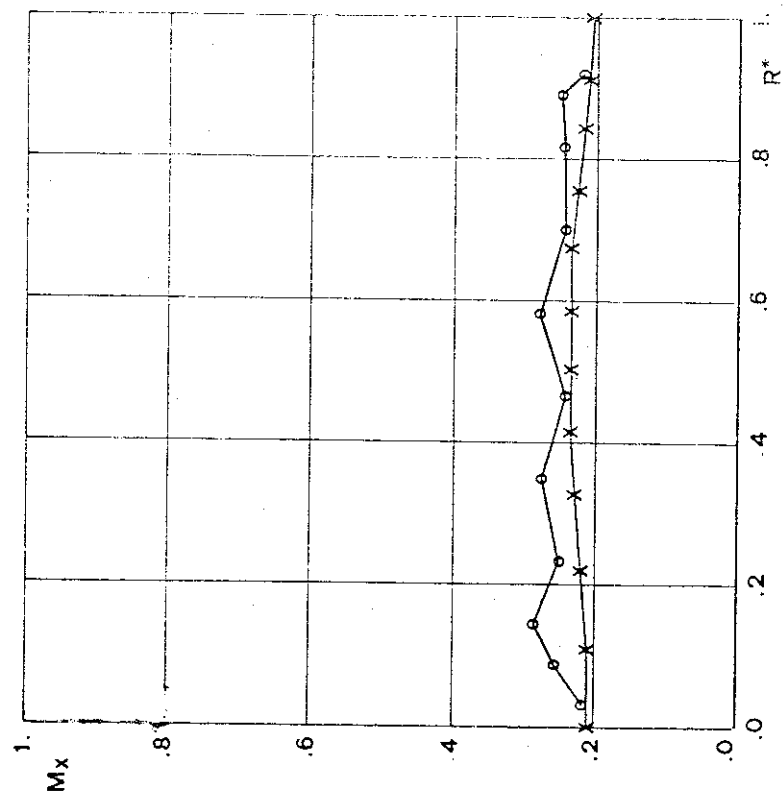


3. Kademedeki Mach sayısl

○ Doney
x Teory

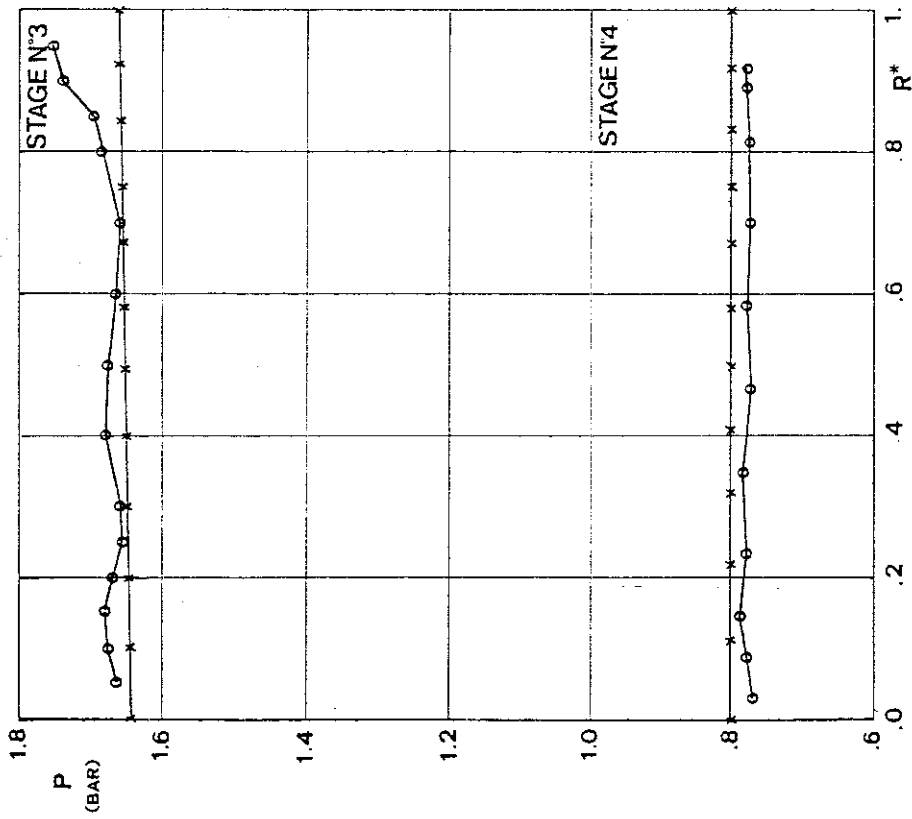
ANSALDO TURBINE

AXIAL MACH NUMBER



4. Kademedeki Mach sayısl

ANSALDO TURBINE

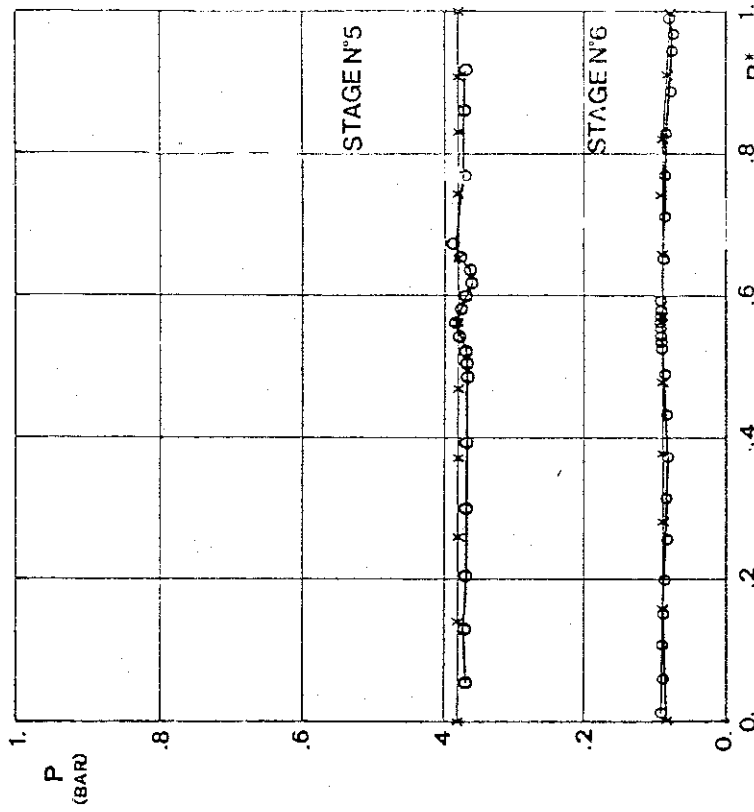


Toplam dış basınç

○ Deneysel
x Teorik

3. ve 4. Kademedeki toplam basınçlar

ANSALDO TURBINE

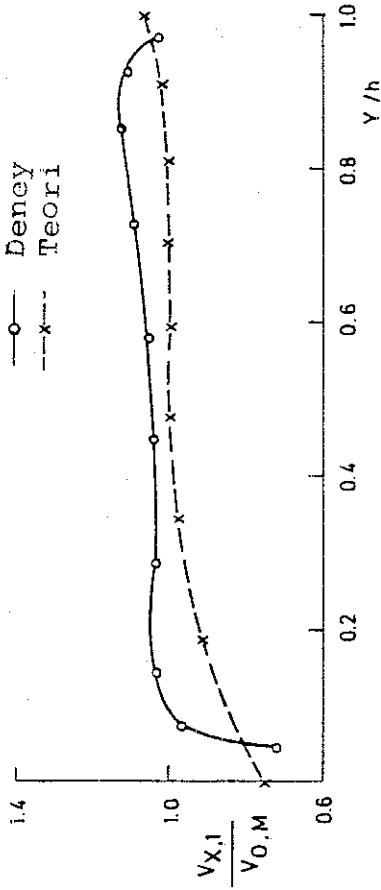


Toplam dış basınç

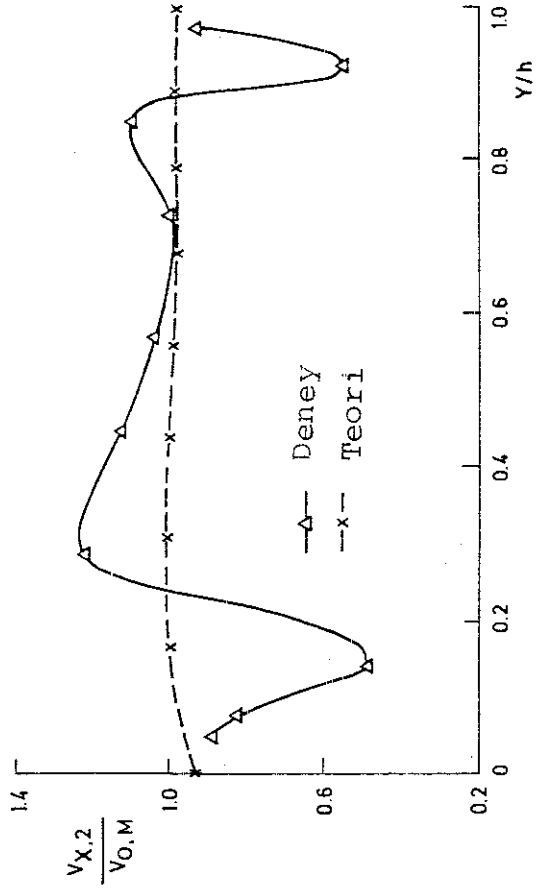
○ Deneysel
x Teorik

5. ve 6. Kademedeki toplam basınçlar

HANNOVER TURBINE

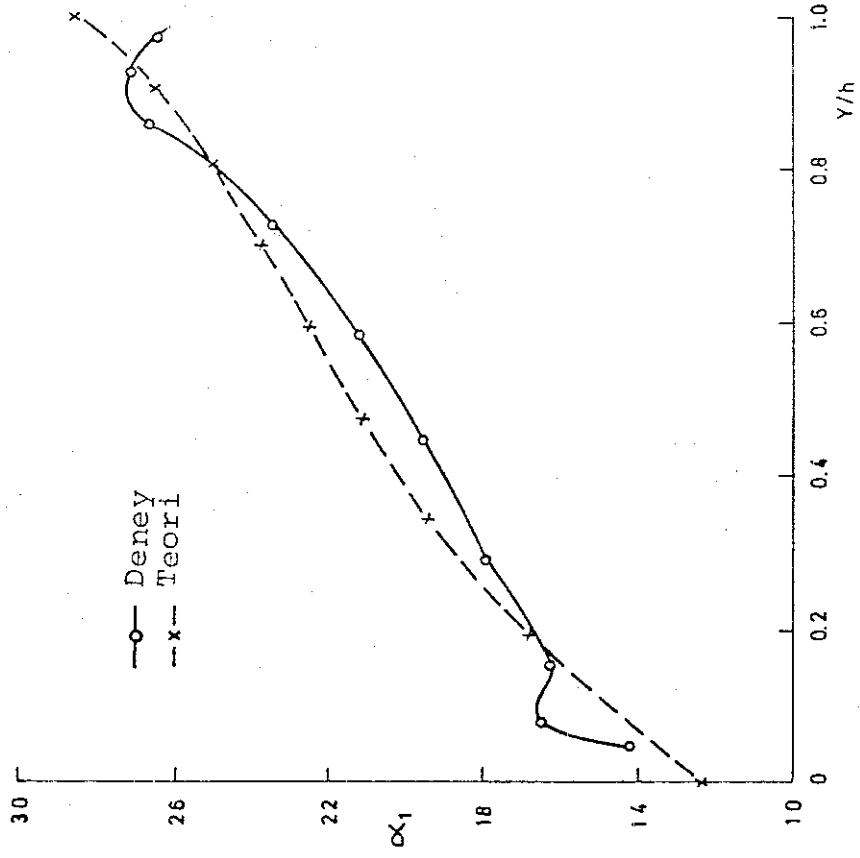


HANNOVER TURBINE

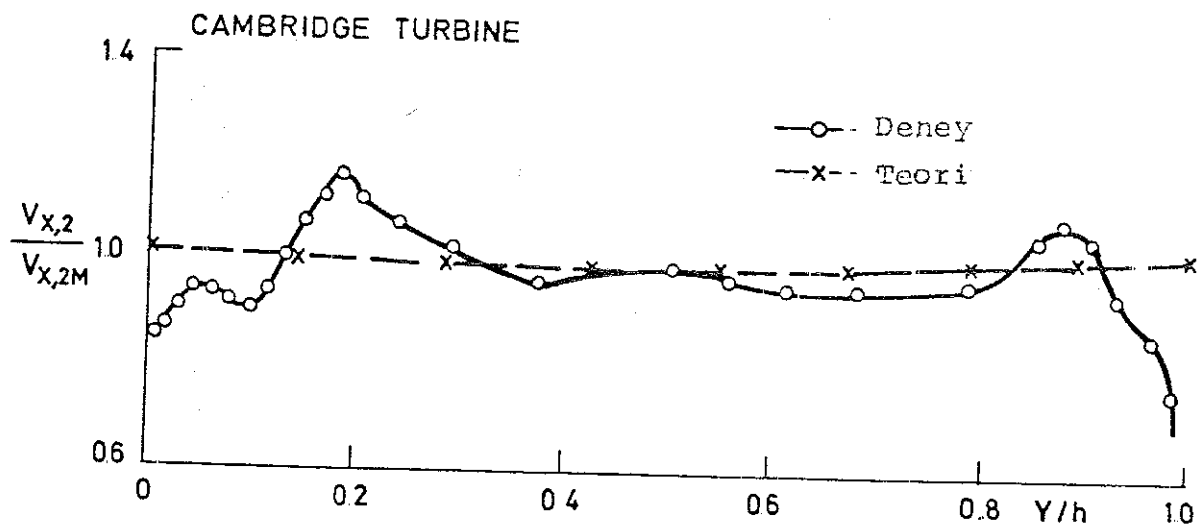
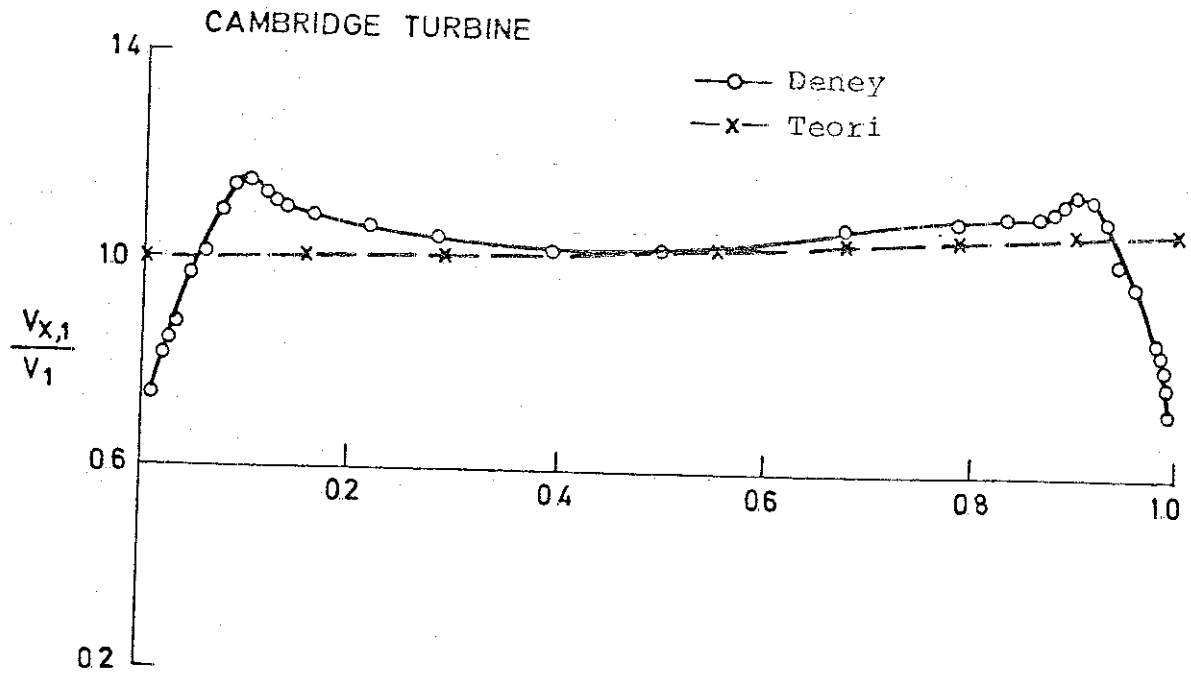


Eksenel hız profilleri

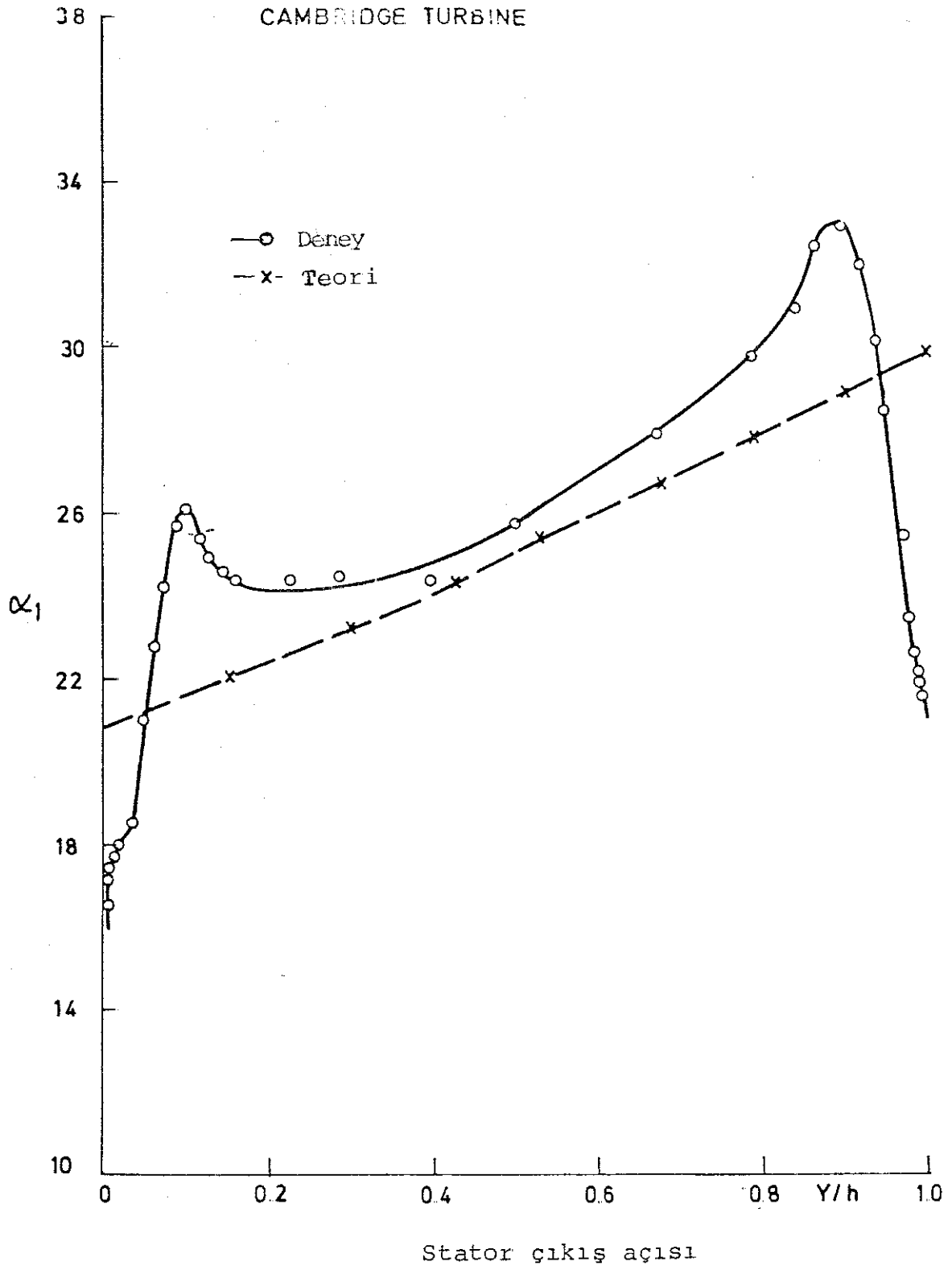
HANNOVER TURBINE



Lüle çıkış açıları



Rotor ve statordan sonraki aksenal hız profilleri



Ö Z G E Ç M İ Ş

1962- Kahramanmaraşta doğdum. İlk ve Orta tahsili-
mi aynı vilayette tamamladım. 1980 yılında Isparta Mühen-
dislik fakültesi makina mühendisliğine girdim. 1984 yılın-
da mezun oldum. 1985 Yılında Isparta mühendislik fakültesi
fen bilimleri enstitüsünde yüksek Lisans öğrenimine başla-
dım. Aynı zamanda fen bilimleri enstitüsü araştırma görev-
liliğine atandım. Halen Atütürk Üniversitesi mühendislik
fakültesi Makina Mühendisliği bölümü araştırma görevlisi-
yim.