T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

TORNHEIM TİPLİ SERİLER ÜZERİNE

Emre ÇAY

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2020

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

TORNHEIM TİPLİ SERİLER ÜZERİNE

Emre ÇAY

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2020

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TORNHEIM TİPLİ SERİLER ÜZERİNE

Emre ÇAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2020

ÖZET

TORNHEIM TİPLİ SERİLER ÜZERİNE

Emre ÇAY

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Mümün CAN
(İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Levent KARGIN)

HAZİRAN 2020, 37 sayfa

Bu çalışmada, Tornheim tipli

$$T\left(s_1, s_2, s_3;\, x, y, z;\, c\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(mx+ny+(mc+n)z)}}{m^{s_1} n^{s_2} \left(mc+n\right)^{s_3}}$$

serisi tanımlanmış ve bu seri için bazı fonksiyonel eşitlikler elde edilmiştir. Bu fonksiyonel eşitliklerin özel durumları Tornheim ve alterne Tornheim serileri için literatürde yer alan sonuçların bir çoğunu vermektedir. Ayrıca, elde edilen fonksiyonel eşitliklerin uygulamaları olarak bazı sonsuz seriler için formüller verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bernoulli polinomu, Fourier serisi, Riemann zeta fonksiyonu, Tornheim serisi.

JÜRİ: Doç. Dr. Mümün CAN
Doç. Dr. Bayram ÇEKİM
Dr. Öğr. Üyesi Ayhan DİL

ABSTRACT

ON TORNHEIM TYPE SERIES

Emre ÇAY

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mümün CAN

(Secondary Supervisor: Asst. Prof. Dr. Levent KARGIN)

June 2020, 37 pages

In this work, Tornheim type series

$$T\left(s_1,s_2,s_3;\,x,y,z;\,c\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(mx+ny+(mc+n)z)}}{m^{s_1}n^{s_2}\left(mc+n\right)^{s_3}}$$

is defined and some functional equations are obtained for this series. The special cases of these functional equations give many of the results in the literature for the Tornheim and alternating Tornheim series. In addition, formulas for some infinite series are given as applications of the obtained functional equations.

KEYWORDS: Bernoulli polynomial, Fourier series, Riemann zeta function, Tornheim series.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Mümün CAN
Assoc. Prof. Dr. Bayram ÇEKİM
Asst. Prof. Dr. Ayhan DİL

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Ön Bilgiler ve Bulgular olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Bulgular bölümünde kullanılacak olan bazı temel kavramların tanımları ve bazı önemli sonuçları Ön Bilgiler bölümünde verilmiştir.

Bulgular bölümünde ise, Tornheim tipli

$$T\left(s_1, s_2, s_3;\, x, y, z;\, c\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(mx+ny+(mc+n)z)}}{m^{s_1} n^{s_2} \left(mc+n\right)^{s_3}}$$

serisi tanımlanmış ve bu seri için bazı fonksiyonel eşitlikler elde edilmiştir. Bu fonksiyonel eşitliklerin özel durumları Tornheim ve alterne Tornheim serileri için literatürde bulunan sonuçların bir çoğunu vermektedir. Ayrıca, elde edilen fonksiyonel eşitliklerin uygulamaları olarak bazı sonsuz seriler için formüller verilmiştir.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, hiçbir konuda desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Mümün CAN'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\eta(s;a)$	: Alterne Hurwitz zeta fonksiyonu
$\eta(s)$	: Alterne Riemann zeta (Dirichlet eta) fonksiyonu
$\lfloor x \rfloor$	: Bir x reel sayısının tam değeri
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathcal{L}(s,z;x)$	: Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu
$\zeta(s;a)$	: Hurwitz zeta fonksiyonu
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$L(s;x)$	: Lerch zeta fonksiyonu
$\mathcal{B}_n(x)$	: n. Bernoulli fonksiyonu
$B_n(x)$	: n. Bernoulli polinomu
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathrm{Re}\,(z)$	: $z = x + iy \in \mathbb{C}$ kompleks sayısının reel kısmı
$\zeta(s)$	: Riemann zeta fonksiyonu
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi

1. GİRİŞ

$r, s, t \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,(r+t) > 1$, $\mathrm{Re}\,(s+t) > 1$ ve $\mathrm{Re}\,(r+s+t) > 2$ için

$$T\,(r,s,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^r n^s \,(m+n)^t}$$

şeklinde tanımlanan sonsuz seri, Tornheim (1950)'ın bu ilginç seri ile ilgili sistematik ve kapsamlı çalışmasından sonra Tornheim serisi olarak adlandırılmıştır. Tornheim'dan bağımsız olarak Mordell (1958) de bu seri üzerinde araştırmalar yapmıştır.

Tornheim double zeta fonksiyonu olarak da adlandırılan bu seri $s \in \mathbb{C}$ için

$$\zeta\,(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}\,(s) > 1$$

olarak tanımlanan Riemann zeta fonksiyonunun bir genellemesidir.

$T\,(r,s,t)$ Tornheim serisinin bazı temel özellikleri:

(1) $T(r,s,t)$ serisi sonlu $\iff$ $\mathrm{Re}\,(r+t) > 1$, $\mathrm{Re}\,(s+t) > 1$ ve $\mathrm{Re}\,(r+s+t) > 2$,

(2) $T(r,s,t) = T(s,r,t)$,

(3) $T(r,s,0) = \zeta(r)\zeta(s)$,

(4) $T(r,0,t) + T(t,0,r) = \zeta(r)\zeta(t) - \zeta(r+t)$ (yansıma formülü),

(5) $T(r,s-1,t+1) + T(r-1,s,t+1) = T(r,s,t)$

şeklindedir.

$s = 0$ (veya $r = 0$) için $T\,(r,0,t)$ serisi

$$\begin{aligned} T\,(r,0,t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^r \,(m+n)^t} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{m^r n^t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^r n^t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}^{(r)}}{n^t} \end{aligned}$$

şeklini alır. Burada, $H_n^{(r)}$ sembolü n. genelleştirilmiş harmonik sayıyı göstermektedir ve

$$\begin{aligned} H_n^{(r)} &= 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{n^r}, \ n \geq 1, \\ H_0^{(r)} &= 0, \end{aligned}$$

(Riemann zeta fonksiyonunun n. kısmi toplamı) olarak tanımlanır. $T(r,0,t)$ serisine harmonik zeta fonksiyonu veya Euler toplamı denir. Euler (1776)'in $T(1,0,t)$ için verdiği meşhur bağıntı

$$2T(1,0,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}}{n^t} = t\zeta(t+1) - \sum_{j=2}^{t-1} \zeta(t+1-j)\zeta(j)\,,\ t \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$$

şeklindedir (Nielsen 1965). Euler toplamı ve genellemeleri ile ilgili çalışmalar çok geniş bir literatür oluşturur (Adamchik 1997; Borwein, Borwein ve Girgensohn 1995; Boyadzhiev 2002; Dil ve Boyadzhiev 2015; Dil, Mezo ve Cenkci 2017; Sofo 2018; Xu 2017; Xu 2018; Xu ve Li 2017; Yang ve Wang 2017; Wang ve Yanhong 2018).

Tornheim, $(s+t+u)$ değeri tek sayı iken $T(s,t,u)$ değerlerinin $\zeta(j)$ nin rasyonel katsayılı bir polinomu olarak ifade edilebileceğini ve bunun $T(2r,2r,2r)$ ve $T(2r-1,2r,2r+1)$ için de doğru olduğunu göstermiş ancak katsayıları vermemiştir. Mordell bir rasyonel k_r sayısı için $T(2r,2r,2r) = k_r\pi^{6r}$ olduğunu ispatlamıştır.

Subbarao ve Sitaramachandrarao (1985) $p,q,r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & T(2p,2q,2r) + T(2q,2r,2p) + T(2r,2p,2q) \\ &= \frac{2}{(2p)!(2q)!} \sum_{j=0}^{maks(p,q)} \left\{ p\binom{2q}{j} + q\binom{2p}{j} \right\} (2p+2n-2j-1)!(2j)! \\ &\quad \times \zeta(2j)\zeta(2p+2q+2r-2j) \\ &= \frac{(2\pi)^{2p+2q+2r}(-1)^{p+q+r}}{(2p)!(2q)!} \sum_{j=0}^{maks(p,q)} \left\{ q\binom{2p}{j} + p\binom{2q}{j} \right\} \\ &\quad \times \frac{(2p+2q+2j)!}{(2p+2q+2r-2j)!} B_{2j}B_{2p+2q+2r-2j} \end{aligned} \tag{1.1}$$

olduğunu göstermişlerdir. Burada $B_n = B_n(0)$ sembolü n. Bernoulli sayısını göstermektedir (bkz. Tanım 2.1). Özel halde,

$$T(2r,2r,2r) = \frac{4}{3}\sum_{j=0}^{r} \binom{4r-2j-1}{2r-1} \zeta(2j)\zeta(6r-2j)$$

olur.

Huard, Williams ve Nan-Yue (1996) $N \geq 3$ tek tamsayı, $1 \leq r+s \leq N-1$, $r \leq N-2$ ve $s \leq N-2$ özelliklerini sağlayan r ve s pozitif tamsayıları için

$$E_{N(r,s)} = (-1)^r \sum_{i=0}^{\lfloor (N-r-s-1)/2 \rfloor} \binom{N-2i-s-1}{r-1} \zeta(2i)\zeta(N-2i)$$

$$+(-1)^r \sum_{i=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \binom{N-2i-s-1}{N-r-s-1} \zeta(2i)\zeta(N-2i)$$

olmak üzere $T(r,s,N-r-s)$ değerinin

$$T(r,s,N-r-s) = E_{N(r,s)} + E_{N(s,r)} \tag{1.2}$$

şeklinde $\zeta(2i)\zeta(N-2i)$ çarpımlarının bir rasyonel doğrusal kombinasyonu şeklinde ifade edilebileceğini göstermişlerdir. Bunun yanı sıra

$$T(r,r,r) = \frac{4}{1+2(-1)^r} \sum_{j=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \binom{2r-2j-1}{r-1} \zeta(2j)\zeta(3r-2j) \tag{1.3}$$

sonucuna ulaşmışlardır.

Nakamura (2006) ve Tsumura (2007) Tornheim serisi için iki farklı fonksiyonel eşitlik elde etmişler ardından bu fonksiyonel eşitliklerin birbirine denk oldukları Matsumoto, Nakamura, Ochiai ve Tsumura (2008) tarafından gösterilmiştir. Nakamura'nın biçimsel olarak daha sade olan fonksiyonel eşitliği

$$\begin{aligned} &T(a,b,s) + (-1)^b T(b,s,a) + (-1)^a T(s,b,a) \\ &= \frac{2}{a!b!} \sum_{k=0}^{\lfloor maks(\frac{a}{2},\frac{b}{2}) \rfloor} \left\{ a\binom{b}{2k} + b\binom{a}{2k} \right\} (a+b-2k-1)!(2k)! \\ &\quad \times \zeta(2k)\zeta(a+b+s-2k) \end{aligned} \tag{1.4}$$

şeklindedir.

Tornheim serisi üzerine yapılan çalışmalar kapsamında, alterne Tornheim serileri olarak adlandırılan

$$R(s,t,u) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m^s n^t (m+n)^u} \quad \text{ve} \quad S(s,t,u) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m^s n^t (m+n)^u}$$

serilerinin de özellikleri araştırılmıştır (Basu 2011; Li 2015; Tsumura 2002; Tsumura 2004b; Tsumura 2009; Zhou, Cai ve Bradley 2008; Nakamura 2008).

Nakamura (2008)

$$T(s_1,s_2,s_3;\, x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(mx+ny+(m+n)z)}}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3}}$$

şeklinde tanımladığı $T\left(s_1, s_2, s_3;\ x, y, z\right)$ fonksiyonunun tekil noktalarının yeri ile ilgili olan Teorem 2.3'ü ve

$$\begin{aligned} &T(a,b,s;1,1,y)+(-1)^bT(b,s,a;1,y,1)+(-1)^aT(s,a,b;y,1,1)\\ &=\frac{2}{a!b!}\sum_{k=0}^{\left\lfloor maks\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)\right\rfloor}\left\{a\binom{b}{2k}+b\binom{a}{2k}\right\}(a+b-2k-1)!(2k)!\\ &\quad\times\zeta(2k)L(a+b+s-2k;y) \end{aligned}$$

fonksiyonel eşitliğini vermiş ve bu eşitlik yardımıyla $R\left(s,t,u\right)$ ve $S\left(s,t,u\right)$ serileri için bazı (bilinen) bağıntılar elde etmiştir.

Bu tez çalışmasında $T\left(s_1, s_2, s_3;\ x, y, z;\ c\right)$ fonksiyonu

$$T\left(s_1, s_2, s_3;\ x, y, z;\ c\right) := \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(mx+ny+(mc+n)z)}}{m^{s_1}n^{s_2}\left(mc+n\right)^{s_3}}$$

şeklinde tanımlanmış ve bu fonksiyon için (1.1) – (1.4) özelliklerinin benzerleri araştırılmıştır. Elde edilen bağıntıların bazı özel durumları aşağıda verilmiştir:

$s_1 = 1,\ s_2 = s_3 = 2,\ x = y = z = 0$ ve $c = 3$ için

$$\begin{aligned} T(1,2,2;0,0,0;3) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn^2(3m+n)^2}\\ &= \frac{125}{81}\zeta\left(5\right)-\frac{19\pi^2}{486}\zeta\left(3\right)+\frac{L(4;1/3)-L(4;2/3)}{24\pi i}\\ &\quad-\frac{1}{162}\left[\zeta\left(2;1/3\right)+\zeta\left(2;2/3\right)\right]\left[\zeta\left(3;1/3\right)+\zeta\left(3;2/3\right)\right] \end{aligned}$$

$s_1 = 3,\ s_2 = 0,\ s_3 = 2,\ x = y = z = 0$ ve $c = 3$ için

$$\begin{aligned} &T(3,0,2;0,0,0;3) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^3(3n+m)^2}\\ &= -\frac{59039}{118098}\zeta(5)-\frac{4\pi^2}{729}\zeta(3)+\frac{1}{486}\left\{\zeta(3;1/3)+\zeta(3;2/3)\right\}\left\{\zeta(2;1/3)+\zeta(2;2/3)\right\}, \end{aligned}$$

$s_1 = 4,\ s_2 = 2,\ s_3 = 1,\ x = 1/2,\ y = z = 0$ ve $c = 3$ için

$$\begin{aligned} T(4,2,1;1/2,0,0;3) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^4n^2(3m+n)}\\ &= -\frac{81}{2}\zeta(7)-\frac{3\pi^2}{4}\zeta(5)-\frac{7\pi^4}{2160}\zeta(3)+\frac{7}{54}\eta(7)-\frac{\pi^2}{18}\eta(5)\\ &\quad+\frac{1}{2}\left\{\eta(6;1/3)+\eta(6;2/3)\right\}\left\{\eta(1;1/3)+\eta(1;2/3)\right\}, \end{aligned}$$

$s_1 = 2, s_2 = 1, s_3 = 2,\ x = y = 1/2, z = 0$ ve $c = 3$ için

$$\begin{aligned} T(2,1,2;1/2,1/2,0;3) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m^2n(3n+m)^2} \\ &= \frac{27}{2}\eta(5) + \frac{19\pi^2}{324}\eta(3) + \frac{1}{27}\left\{\eta(4;1/3)+\eta(4;2/3)\right\}\left\{\eta(1;1/3)+\eta(1;2/3)\right\} \\ &\quad + \frac{1}{54}\left\{\eta(3;1/3)-\eta(3;2/3)\right\}\left\{\eta(2;1/3)-\eta(2;2/3)\right\} \end{aligned}$$

dür.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tez boyunca sıkça kullanılan bazı temel kavramların tanımı ve önemli sonuçları verilecektir. Diğer özel kavramların tanımı ve sonuçları, tez boyunca konu içerisinde uygun yerlerde açıklanacaktır.

Tanım 2.1. *n. Bernoulli polinomu $B_n(x)$*

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

$B_n(x)$'in tanımında $x=0$ alınırsa $B_n(0)=B_n$, n. Bernoulli sayısı elde edilir ve $B_0=1$, $B_1=-1/2$, $B_2=1/6,\ldots$ ve her $n\geq 1$ için $B_{2n+1}=B_{2n-1}(1/2)=0$ dır (Apostol 1976). $B_n(x)$ Bernoulli polinomunun B_n Bernoulli sayıları cinsinden ifadesi

$$B_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_jx^{n-j}$$

dir.

$\mathcal{B}_n(x)$ ile gösterilen n. Bernoulli fonksiyonu

$$\mathcal{B}_n(x)=B_n(x-\lfloor x\rfloor)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\lfloor x\rfloor$, x'in tam değeridir. Bernoulli fonksiyonu periyodu 1 olan bir fonksiyondur ve

$$\mathcal{B}_p(x)=-\frac{p!}{(2\pi i)^p}\sum_{n\neq 0}\frac{e^{2\pi inx}}{n^p} \tag{2.1}$$

Fourier açılımına sahiptir. Burada $p>1$ iken $x\in\mathbb{R}$, $p=1$ iken $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ ve $\sum\limits_{n\neq 0}=\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}$ anlamındadır. Bernoulli polinomlarında olduğu gibi $\mathcal{B}_n(x)$ Bernoulli fonksiyonu da, herhangi bir x için,

$$c^{p-1}\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_p\left(x+\frac{\mu}{c}\right)=\mathcal{B}_p(cx). \tag{2.2}$$

Raabe bağıntısını sağlar. Bernoulli polinomu ve fonksiyonu ile ilgili daha ayrıntılı bilgi Apostol (1976) da bulunabilir.

Tanım 2.2. *Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu*

$$\mathcal{L}(s;z;x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{(m+z)^{s}}$$

şeklinde ve Lerch zeta fonksiyonu, $\mathcal{L}(s;1;x)=e^{-2\pi ix}L(s;x)$,

$$L(s;x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{m^{s}}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada, $x=0$ (veya $x\in\mathbb{Z}$) iken

$$\mathcal{L}(s;z;0)=\zeta\left(s,z\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+z)^{s}}$$

$\zeta\left(s,z\right)$ Hurwitz zeta fonksiyonuna ve

$$L(s;0)=\zeta\left(s\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s}}$$

$\zeta\left(s\right)$ Riemann zeta fonksiyonuna dönüşür.

Bundan başka, $x=1/2$ iken

$$\mathcal{L}(s;z;1/2)=\eta\left(s,z\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}}{(m+z)^{s}}$$

$\eta\left(s,z\right)$ alterne Hurwitz zeta fonksiyonuna ve

$$L(s;1/2)=-\eta\left(s\right)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^{s}}$$

$\eta\left(s\right)$ alterne Riemann zeta fonksiyonuna dönüşür. Riemann zeta ve alterne Riemann zeta fonksiyonlarının çift tamsayılardaki değerleri

$$\zeta\left(2n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n-1}\left(2\pi\right)^{2n}}{2\left(2n\right)!}B_{2n},\ n\geq 0$$

ve

$$\eta\left(2n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n}\left(2\pi\right)^{2n}}{2\left(2n\right)!}\mathcal{B}_{2n}\left(\frac{1}{2}\right),\ n\geq 0$$

şeklinde Bernoulli sayıları cinsinden ifade edilir.

Teorem 2.3. *(Nakamura 2008, Theorem 2.1)* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *olsun.* $T(s_1, s_2, s_3;\, \alpha, \beta, \gamma)$ *fonksiyonu* $\mathbb{C}^3$ *e meromorfik olarak devam ettirilebilir ve tüm tekil noktaları* $\mathbb{C}^3$ *ün aşağıdaki denklemlerle tanımlanan alt kümelerinde yer alır.*

$$\alpha + \gamma \equiv 1,\ \beta + \gamma \not\equiv 1 \mod 1 \text{ ise } s_1 + s_3 = 1 - k,$$

$$\alpha + \gamma \not\equiv 1,\ \beta + \gamma \equiv 1 \mod 1 \text{ ise } s_2 + s_3 = 1 - k,$$

$$\alpha + \gamma \not\equiv 1,\ \beta + \gamma \not\equiv 1 \mod 1 \text{ ise tekil nokta yoktur.}$$

Tanım 2.4. $c \in \mathbb{N}$ *ve* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *için* $T(s_1, s_2, s_3;\, x, y, z;\, c)$ *fonksiyonu*

$$T(s_1, s_2, s_3;\, x, y, z;\, c) := \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(mx+ny+(mc+n)z)}}{m^{s_1} n^{s_2} (mc+n)^{s_3}} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Özel halde $T(s_1, s_2, s_3;\, x, y, z; 1) = T(s_1, s_2, s_3;\, x, y, z)$ dir. $T(s_1, s_2, s_3;\, x, y, z; c)$ serisi $T(s_1, s_2, s_3;\, x, y, z)$ nin bir kısıtlanışı olarak ele alınabileceğinden, Teorem 2.3 $T(s_1, s_2, s_3;\, x, y, z;\, c)$ için de geçerlidir.

Aşağıdaki teorem $T(s_1, s_2, s_3;\, x, y, z; c)$ serisi için fonksiyonel eşitlikler elde edilirken kullanılacaktır.

Teorem 2.5. *(Can 2020, Theorem 3)* $X, Y \in \mathbb{R}$ *ve* $p, q \geq 1$ *için*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_p(X+Y)\,\mathcal{B}_q(Y) = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \frac{q}{p+q-j} \mathcal{B}_{p+q-j}(Y)\,\mathcal{B}_j(X) + \frac{(-1)^{q-1}}{\binom{p+q}{q}} \mathcal{B}_{p+q}(X) \\ + \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \frac{p}{p+q-j} (-1)^j \mathcal{B}_{p+q-j}(X+Y)\,\mathcal{B}_j(X) \end{aligned} \tag{2.4}$$

dir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Önerme 3.1. $X, Y \in \mathbb{R}$, $p, q \geq 2$ *için*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{f(-mX+nY)}{(-m)^p(m+n)^q}+\frac{f((m+n)X+nY)}{(-m)^q(m+n)^p}+\frac{f(mX+(m+n)Y)}{m^pn^q}\right)$$
$$=\frac{\mathcal{B}_p(X+Y)\mathcal{B}_q(Y)}{A_pA_q}-\frac{(-1)^q}{A_{p+q}}\mathcal{B}_{p+q}(X) \tag{3.1}$$

eşitliği sağlanır. Burada $A_p = -p!/(2\pi i)^p$ *ve* $f(x) = f_{p+q}(x) = e^{2\pi ix} + (-1)^{p+q}e^{-2\pi ix}$ *dir.*

İspat $\mathcal{B}_p(x)$'in (2.1) ile verilen Fourier açılımından

$$\frac{\mathcal{B}_p(X+Y)\mathcal{B}_q(Y)}{A_pA_q}=\sum_{n\neq 0}\sum_{m\neq 0}\frac{e^{2\pi i[nX+(m+n)Y]}}{n^pm^q}$$
$$=\sum_{\substack{n,m\neq 0\\ n+m=0}}\frac{e^{2\pi i[nX+(m+n)Y]}}{n^pm^q}+\sum_{\substack{n,m\neq 0\\ n+m\neq 0}}\frac{e^{2\pi i[nX+(m+n)Y]}}{n^pm^q} \tag{3.2}$$

olarak yazılabilir. (3.2)'deki $m+n=0$ üzerinden olan seri

$$\sum_{\substack{n,m\neq 0\\ n+m=0}}\frac{e^{2\pi i[nX+(m+n)Y]}}{n^pm^q}=(-1)^q\sum_{\substack{n\neq 0\\ n=-\infty}}^{\infty}\frac{e^{2\pi inX}}{n^{p+q}}=-\frac{(2\pi i)^{p+q}}{(p+q)!}(-1)^q\mathcal{B}_{p+q}(X)$$
$$=\frac{(-1)^q}{A_{p+q}}\mathcal{B}_{p+q}(X)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\frac{\mathcal{B}_p(X+Y)\mathcal{B}_q(Y)}{A_pA_q}-\frac{(-1)^q}{A_{p+q}}\mathcal{B}_{p+q}(X)=\sum_{\substack{n,m\neq 0\\ n+m\neq 0}}\frac{e^{2\pi i[nX+(m+n)Y]}}{n^pm^q}$$

elde edilir. Şimdi sağ taraftaki seride $m+n=r$ alınır ve $n=r-m$ için tekrar yazılırsa

$$\sum_{\substack{n,m\neq 0\\ n+m\neq 0}}\frac{e^{2\pi i[nX+(m+n)Y]}}{n^pm^q}=\sum_{\substack{r,m\neq 0\\ r-m\neq 0}}\frac{e^{2\pi i[(r-m)X+rY]}}{(r-m)^pm^q}$$

olur. Burada m, $-\infty$ dan ∞ a olduğundan m yerine $-m$ yazılabilir ve

$$(-1)^q\sum_{\substack{r,m\neq 0\\ r-m\neq 0}}\frac{e^{2\pi i[(r+m)X+rY]}}{(r+m)^pm^q}$$
$$=\left(\sum_{r,m>0}+\sum_{\substack{r>0,m<0\\ r>-m}}+\sum_{\substack{r>0,m<0\\ r<-m}}+\sum_{r,m<0}+\sum_{\substack{r<0,m>0\\ -r>m}}+\sum_{\substack{r<0,m>0\\ -r<m}}\right)\frac{e^{2\pi i[(r+m)X+rY]}}{(r+m)^pm^q}(-1)^q$$

$$= (b_1) + (b_2) + (b_3) + (b_4) + (b_5) + (b_6)$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada (b_1) ve (b_4)

$$(b_1) = (-1)^q \sum_{r,m>0} \frac{e^{2\pi i[(r+m)X+rY]}}{(r+m)^p m^q},$$

$$(b_4) = (-1)^q \sum_{r,m<0} \frac{e^{2\pi i[(r+m)X+rY]}}{(r+m)^p m^q} = (-1)^p \sum_{r,m>0} \frac{e^{2\pi i[-(r+m)X-rY]}}{(r+m)^p m^q}$$

dır. (b_2)'de $r > m$ olduğundan $r = m + k$ dönüşümü yapılıp toplam tekrar yazılırsa

$$(b_2) = (-1)^q \sum_{\substack{r>0,m<0\\ r>-m}} \frac{e^{2\pi i[(r+m)X+rY]}}{(r+m)^p m^q} = \sum_{\substack{r,m>0\\ r>m}} \frac{e^{2\pi i[(r-m)X+rY]}}{(r-m)^p m^q}$$

$$= \sum_{m,k>0} \frac{e^{2\pi i[kX+(m+k)Y]}}{k^p m^q}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$(b_3) = (-1)^q \sum_{\substack{r>0,m<0\\ r<-m}} \frac{e^{2\pi i[(r+m)X+rY]}}{(r+m)^p m^q} = \sum_{\substack{r,m>0\\ r<m}} \frac{e^{2\pi i[(r-m)X+rY]}}{(r-m)^p m^q}$$

$$= (-1)^p \sum_{r,k>0} \frac{e^{2\pi i(-kX+rY)}}{k^p (r+k)^q},$$

$$(b_5) = (-1)^q \sum_{\substack{r<0,m>0\\ -r>m}} \frac{e^{2\pi i[(r+m)X+rY]}}{(r+m)^p m^q} = (-1)^q \sum_{\substack{r,m>0\\ r>m}} \frac{e^{2\pi i[(m-r)X-rY]}}{(m-r)^p m^q}$$

$$= (-1)^{p+q} \sum_{m,k>0} \frac{e^{2\pi i[-kX-(m+k)Y]}}{k^p m^q}$$

ve

$$(b_6) = (-1)^q \sum_{\substack{r<0,m>0\\ -r<m}} \frac{e^{2\pi i[(r+m)X+rY]}}{(r+m)^p m^q} = (-1)^q \sum_{\substack{r,m>0\\ r<m}} \frac{e^{2\pi i[(m-r)X-rY]}}{(m-r)^p m^q}$$

$$= (-1)^q \sum_{r,k>0} \frac{e^{2\pi i(kX-rY)}}{k^p (r+k)^q}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Buradan,

$$\sum_{\substack{n,m\neq 0\\ n+m\neq 0}} \frac{e^{2\pi i[nX+(m+n)Y]}}{n^p m^q} = (-1)^q \sum_{n,m>0} \frac{e^{2\pi i[(n+m)X+nY]} + (-1)^{p+q} e^{2\pi i[-(n+m)X-nY]}}{(n+m)^p m^q}$$

$$+(-1)^p \sum_{n,m>0} \frac{e^{2\pi i(-mX+nY)} + (-1)^{p+q} e^{2\pi i(mX-nY)}}{m^p(n+m)^q}$$
$$+\sum_{n,m>0} \frac{e^{2\pi i[mX+(n+m)Y]} + (-1)^{p+q} e^{2\pi i[-mX-(n+m)Y]}}{m^p(n+m)^q}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^p f(nY-mX)}{m^p(m+n)^q} + \frac{(-1)^q f((m+n)X+nY)}{m^q(m+n)^p}\right)$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(mX+(m+n)Y)}{m^p n^q}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 3.2. *Tekil noktaları hariç her* $p, q, c \in \mathbb{N}$ *ve* $s \in \mathbb{C}$ *için*

$$\frac{1}{c^{p+q}} T(p,q,s;xc,0,z;1) + (-1)^p T(s,p,q;z,-x,0;c) + (-1)^q T(s,q,p;z,0,x;c)$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi i[(mc+j)x+(n+m)z]}}{(mc+j)^p(nc-j)^q(n+m)^s}$$
$$= C(p,q,s;x,z;c) \tag{3.3}$$

dir. Burada

$$C(p,q,s;x,z;c) = \sum_{j=0}^{p}\binom{p+q-j-1}{q-1}\frac{\mathcal{B}_j(x)L(p+q+s-j;z)}{c^{p+q-j}A_j}$$
$$+\sum_{j=0}^{q}\binom{p+q-j-1}{p-1}(-1)^j\frac{\mathcal{B}_j(x)L(p+q+s-j;cx+z)}{c^{p+q-j}A_j} \tag{3.4}$$

ve $A_r = -r!/(2\pi i)^r$ *dır.*

İspat (2.4) ve (3.1) bağıntılarında $X = x$, $Y = \frac{\mu+y}{c}$ yazılır ve $\mu = 0$ dan $c-1$ e toplam alınırsa,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^p\frac{e^{2\pi i(-mx+\frac{ny}{c})}}{m^p(n+m)^q} + (-1)^q\frac{e^{2\pi i\left(mx-\frac{ny}{c}\right)}}{m^p(n+m)^q}\right]\sum_{\mu=0}^{c-1}e^{2\pi i n\frac{\mu}{c}}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^q\frac{e^{2\pi i[(m+n)x+\frac{ny}{c}]}}{m^q(n+m)^p} + (-1)^p\frac{e^{2\pi i[-(m+n)x-\frac{ny}{c}]}}{m^q(n+m)^p}\right]\sum_{\mu=0}^{c-1}e^{2\pi i n\frac{\mu}{c}}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e^{2\pi i[mx+(m+n)\left(\frac{y}{c}\right)]}}{m^p n^q} + (-1)^{p+q}\frac{e^{2\pi i[-mx-(m+n)\frac{y}{c}]}}{m^p n^q}\right]\sum_{\mu=0}^{c-1}e^{-2\pi i(m+n)\frac{\mu}{c}}$$
$$= \frac{(2\pi i)^{p+q}}{p!q!}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\frac{q\mathcal{B}_j(x)}{p+q-j}\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_{p+q-j}\left(\frac{y}{c}+\frac{\mu}{c}\right)$$

$$+\frac{(2\pi i)^{p+q}}{p!q!}\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}p\frac{(-1)^j\mathcal{B}_j(x)}{p+q-j}\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_{p+q-j}\left(\frac{cx+y}{c}+\frac{\mu}{c}\right) \tag{3.5}$$

olur. (3.5) eşitliğinin sol tarafını LHS ve sağ tarafını RHS ile gösterelim.

$$\sum_{\mu=0}^{c-1}e^{2\pi i n\frac{\mu}{c}}=\begin{cases}c, & c\mid n\\ 0, & c\nmid n\end{cases}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}LHS=&\,c\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^p\frac{e^{2\pi i(-mx+ny)}}{m^p(nc+m)^q}+(-1)^q\frac{e^{2\pi i(mx-ny)}}{m^p(nc+m)^q}\right]\\&+c\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^q\frac{e^{2\pi i[(m+nc)x+ny]}}{m^q(nc+m)^p}+(-1)^p\frac{e^{2\pi i[-(m+nc)x-ny]}}{m^q(nc+m)^p}\right]\\&+c\sum_{\substack{m=1\\ c\nmid n,c\nmid m\\ c|(m+n)}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e^{2\pi i[mx+(m+n)\left(\frac{y}{c}\right)]}}{m^pn^q}+(-1)^{p+q}\frac{e^{2\pi i[-mx-(m+n)\frac{y}{c}]}}{m^pn^q}\right]\\&+c\sum_{\substack{m=1\\ c|n,c|m}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e^{2\pi i[mx+(m+n)\left(\frac{y}{c}\right)]}}{m^pn^q}+(-1)^{p+q}\frac{e^{2\pi i[-mx-(m+n)\frac{y}{c}]}}{m^pn^q}\right]\end{aligned}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Burada $c\nmid n$, $c\nmid m$ ve $c|\,(m+n)$ koşulu için $m\to mc+j$ ve $n\to nc-j$ dönüşümleri, $c|n$ ve $c|m$ koşulu için $m\to mc$ ve $n\to nc$ dönüşümleri yapılırsa

$$\begin{aligned}LHS=&\,c\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^p\frac{e^{2\pi i(-mx+ny)}}{m^p(nc+m)^q}+(-1)^q\frac{e^{2\pi i(mx-ny)}}{m^p(nc+m)^q}\right]\\&+c\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^q\frac{e^{2\pi i[(m+nc)x+ny]}}{m^q(nc+m)^p}+(-1)^p\frac{e^{2\pi i[-(m+nc)x-ny]}}{m^q(nc+m)^p}\right]\\&+c\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi i[(mc+j)x+(m+n)y]}}{(mc+j)^p(nc-j)^q}+\frac{1}{c^{p+q}}\frac{e^{2\pi i[mcx+(m+n)y]}}{m^pn^q}\right]\\&+c(-1)^{p+q}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi i[-(mc+j)x-(m+n)y]}}{(mc+j)^p(nc-j)^q}+\frac{1}{c^{p+q}}\frac{e^{2\pi i[-mcx-(m+n)y]}}{m^pn^q}\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi RHS de düzenleme yapalım. (2.2) ile verilen Raabe bağıntısı kullanılırsa

$$RHS=\frac{(2\pi i)^{p+q}}{p!q!}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\frac{q}{p+q-j}\frac{\mathcal{B}_j(x)\mathcal{B}_{p+q-j}(y)}{c^{p+q-j-1}}$$

$$+\frac{(2\pi i)^{p+q}}{p!q!}\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}\frac{p(-1)^j}{p+q-j}\frac{\mathcal{B}_j(x)\mathcal{B}_{p+q-j}(cx+y)}{c^{p+q-j-1}}$$

elde edilir. İlk toplam $\binom{p+q-j}{q}$, ikinci toplam $\binom{p+q-j}{q}$ ile çarpılıp bölünür, $\mathcal{B}_{p+q-j}(y)$ ve $\mathcal{B}_{p+q-j}(cx+y)$ fonksiyonlarının (2.1) Fourier açılımları yazılırsa

$$RHS=\sum_{j=0}^{p}\binom{p+q-j-1}{q-1}\frac{\mathcal{B}_j(x)}{c^{p+q-j-1}A_j}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+q-j}e^{-2\pi iky}+e^{2\pi iky}}{k^{p+q-j}}$$
$$+\sum_{j=0}^{q}\binom{p+q-j-1}{p-1}\frac{(-1)^j\mathcal{B}_j(x)}{c^{p+q-j-1}A_j}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+q-j}e^{-2\pi ik(cx+y)}+e^{2\pi ik(cx+y)}}{k^{p+q-j}}$$

elde edilir.

Ardından bulunan bu ifadeler

$$\sum_{l=1}^{\infty}e^{2\pi il(z-y)}l^{-s}$$

ile çarpılıp 0 dan 1 e y ye göre integrallenir ve

$$\int_0^1 e^{2\pi iy(n-l)}dy=\begin{cases}1, & n=l,\\ 0, & n\neq l\end{cases}$$

olduğu göz önünde tutulursa, LHS kısmı

$$c\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^pe^{2\pi i(-mx+nz)}}{m^p(nc+m)^qn^s}+\frac{(-1)^qe^{2\pi i[(m+nc)x+nz]}}{m^q(nc+m)^pn^s}+\frac{1}{c^{p+q}}\frac{e^{2\pi i[mcx+(n+m)z]}}{m^pn^q(n+m)^s}\right]$$
$$+c\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi i[(mc+j)x+(n+m)z]}}{(mc+j)^p(nc-j)^q(n+m)^s}$$
$$=c(-1^p)T(s,p,q;z,-x,0;c)+c(-1)^qT(s,q,p;z,0,x;c)+\frac{c}{c^{p+q}}T(p,q,s;xc,0,z;1)$$
$$+c\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi i[(mc+j)x+(n+m)z]}}{(mc+j)^p(nc-j)^q(n+m)^s}$$

ve RHS kısmı

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p+q-j-1}{q-1}\frac{\mathcal{B}_j(x)}{c^{p+q-j-1}A_j}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi ikz}}{k^{p+q+s-j}}$$
$$+\sum_{j=0}^{q}\binom{p+q-j-1}{p-1}\frac{(-1)^j\mathcal{B}_j(x)}{c^{p+q-j-1}A_j}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi ik(cx+z)}}{k^{p+q+s-j}}$$
$$=\sum_{j=0}^{p}\binom{p+q-j-1}{q-1}\frac{\mathcal{B}_j(x)L(p+q+s-j;z)}{c^{p+q-j-1}A_j}$$

$$+\sum_{j=0}^{q}\binom{p+q-j-1}{p-1}(-1)^j\frac{\mathcal{B}_j(x)L(p+q+s-j;cx+z)}{c^{p+q-j-1}A_j}$$
$$=cC(p,q,s;x,z;c)$$

şeklini alır. Bu son iki ifade eşit olduğundan istenen elde edilir. □

Teorem 3.3. *Tekil noktaları hariç her* $p,q,c\in\mathbb{N}$ *ve* $s\in\mathbb{C}$ *için*

$$\frac{(-1)^q}{c^{s+q}}T(s,q,p;cx,0,z;1)+(-1)^pT(p,s,q;-z,x,0;c)+T(p,q,s;z,0,x,c)$$
$$+(-1)^q\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi i[(nc+j)x+(n+m)z]}}{(nc+j)^s(mc-j)^q(n+m)^p}$$
$$=D(p,q,s;x,z;c) \tag{3.6}$$

dir. Burada

$$D(p,q,s;x,z;c)=\sum_{j=0}^{p}\binom{p+q-j-1}{q-1}\frac{c^{p-j}}{A_j}\mathcal{B}_j(z)L(p+q+s-j;x)$$
$$+c^{p-1}\sum_{j=0}^{q}\binom{p+q-j-1}{p-1}\frac{(-1)^j}{A_j}$$
$$\times\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_j\left(\frac{\mu+z}{c}\right)L\left(p+q+s-j;\frac{\mu+z}{c}+x\right) \tag{3.7}$$

ve $A_r=-r!/(2\pi i)^r$ *dır.*

İspat (2.4) ve (3.1) bağıntılarında $X=\frac{\mu+z}{c}$, $Y=y$ yazılır ve $\mu=0$ dan $(c-1)$ e toplam alınırsa

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^p\frac{e^{2\pi i\left[-\frac{mz}{c}+ny\right]}}{m^p(n+m)^q}+(-1)^q\frac{e^{2\pi i\left[\frac{mz}{c}-ny\right]}}{m^p(n+m)^q}\right]\sum_{\mu=0}^{c-1}e^{2\pi im\frac{\mu}{c}}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e^{2\pi i\left[\frac{mz}{c}+(n+m)y\right]}}{m^pn^q}+(-1)^{p+q}\frac{e^{2\pi i\left[-\frac{mz}{c}-(n+m)y\right]}}{m^pn^q}\right]\sum_{\mu=0}^{c-1}e^{2\pi im\frac{\mu}{c}}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^q\frac{e^{2\pi i\left[(n+m)\frac{z}{c}+ny\right]}}{m^q(n+m)^p}+(-1)^p\frac{e^{2\pi i\left[-(n+m)\frac{z}{c}-ny\right]}}{m^q(n+m)^p}\right]\sum_{\mu=0}^{c-1}e^{2\pi i(m+n)\frac{\mu}{c}}$$
$$=\frac{(2\pi i)^{p+q}}{p!q!}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\frac{q}{p+q-j}\mathcal{B}_{p+q-j}(y)\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_j\left(\frac{z}{c}+\frac{\mu}{c}\right)$$
$$+\frac{(2\pi i)^{p+q}}{p!q!}\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}\frac{p}{p+q-j}(-1)^j\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_{p+q-j}\left(\frac{\mu+z}{c}+y\right)\mathcal{B}_j\left(\frac{\mu+z}{c}\right)$$

olur. Teorem 3.2 nin ispatındakine benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c^{p-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{p}\frac{e^{2\pi i[-mz+ny]}}{m^{p}(n+mc)^{q}}+(-1)^{q}\frac{e^{2\pi i[mz-ny]}}{m^{p}(n+mc)^{q}}\right]\\
&\quad+\frac{1}{c^{p-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e^{2\pi i[mz+(n+mc)y]}}{m^{p}n^{q}}+(-1)^{p+q}\frac{e^{2\pi i[-mz-(n+mc)y]}}{m^{p}n^{q}}\right]\\
&\quad+\frac{(-1)^{q}}{c^{p-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi i[(m+n)z+(nc+j)y]}}{(mc-j)^{q}(n+m)^{p}}+\frac{e^{2\pi i[(m+n)z+ncy]}}{(mc)^{q}(nc+mc)^{p}}\right]\\
&\quad+\frac{(-1)^{p}}{c^{p-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi i[-(m+n)z-(nc+j)y]}}{(mc-j)^{q}(n+m)^{p}}+\frac{e^{2\pi i[-(m+n)z-ncy]}}{(mc)^{q}(nc+mc)^{p}}\right]\\
&=\frac{(2\pi i)^{p+q}}{p!q!}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\frac{q}{p+q-j}\mathcal{B}_{p+q-j}\left(y\right)\frac{\mathcal{B}_{j}\left(z\right)}{c^{j-1}}\\
&\quad+\frac{(2\pi i)^{p+q}}{p!q!}\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}\frac{p(-1)^{j}}{p+q-j}\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_{p+q-j}\left(\frac{\mu+z}{c}+y\right)\mathcal{B}_{j}\left(\frac{\mu+z}{c}\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ifade $\sum_{l=1}^{\infty}e^{2\pi il(x-y)}l^{-s}$ ile çarpılıp 0 dan 1 e y ye göre integrallenirse, sol taraf

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c^{p-1}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{p}e^{2\pi i[-mz+lx]}}{m^{p}(n+mc)^{q}l^{s}}\int_{0}^{1}e^{2\pi iy(n-l)}dy+\frac{e^{2\pi i[mz+lx]}}{m^{p}n^{q}l^{s}}\int_{0}^{1}e^{2\pi iy((n+mc)-l)}dy\right]\\
&\quad+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{c-1}\left[\frac{(-1)^{q}e^{2\pi i[(m+n)z+lx]}}{(mc-j)^{q}(n+m)^{p}l^{s}}\int_{0}^{1}e^{2\pi iy[(nc+j)-l]}dy\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{e^{2\pi i[(m+n)z+lx]}}{(mc)^{q}(n+m)^{p}l^{s}}\int_{0}^{1}e^{2\pi iy[nc-l]}dy\right]\\
&=\frac{1}{c^{p-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{p}e^{2\pi i[-mz+nx]}}{m^{p}(n+mc)^{q}n^{s}}+\frac{e^{2\pi i[mz+(n+mc)x]}}{m^{p}n^{q}(n+mc)^{s}}+\frac{(-1)^{q}}{c^{q+s}}\frac{e^{2\pi i[-(m+n)z+ncx]}}{m^{q}(n+m)^{p}n^{s}}\right]\\
&\quad+\frac{(-1)^{q}}{c^{p-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi i[(m+n)z+(nc+j)x]}}{(mc-j)^{q}(n+m)^{p}(nc+j)^{s}}\\
&=\frac{(-1)^{p}}{c^{p-1}}T(p,s,q;-z,x,0;c)+\frac{1}{c^{p-1}}T(p,q,s;z,0,x;c)\\
&\quad+\frac{(-1)^{q}}{c^{p-1}}\left[\frac{1}{c^{q+s}}T(s,q,p;cx,0,-z;1)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi i[(m+n)z+(nc+j)x]}}{(mc-j)^{q}(n+m)^{p}(nc+j)^{s}}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sağ taraf ise, $\mathcal{B}_{p+q-j}\left(y\right)$ ve $\mathcal{B}_{p+q-j}\left(\frac{\mu+z}{c}+y\right)$ fonksiyonlarının Fourier açılımı da kullanılarak

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p+q-j-1}{q-1}\frac{\mathcal{B}_{j}\left(z\right)}{c^{j-1}A_{j}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi ilx}}{k^{p+q-j}l^{s}}\int_{0}^{1}e^{2\pi iy(k-l)}dy$$

$$+\sum_{j=0}^{q}\binom{p+q-j-1}{p-1}\frac{(-1)^j}{A_j}\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_j\left(\frac{\mu+z}{c}\right)\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\left[k\left(\frac{\mu+z}{c}\right)+lx\right]}}{k^{p+q-j}l^s}\int_0^1 e^{2\pi iy(k-l)}dy$$
$$=\sum_{j=0}^{p}\binom{p+q-j-1}{q-1}\frac{\mathcal{B}_j(z)}{c^{j-1}A_j}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi ikx}}{k^{p+q+s-j}}$$
$$+\sum_{j=0}^{q}\binom{p+q-j-1}{p-1}\frac{(-1)^j}{A_j}\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_j\left(\frac{\mu+z}{c}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\left[k\left(\frac{\mu+z}{c}+x\right)\right]}}{k^{p+q+s-j}}$$
$$=\sum_{j=0}^{p}\binom{p+q-j-1}{q-1}\frac{\mathcal{B}_j(z)}{c^{j-1}A_j}L(p+q+s-j;x)$$
$$+\sum_{j=0}^{q}\binom{p+q-j-1}{p-1}\frac{(-1)^j}{A_j}\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_j\left(\frac{\mu+z}{c}\right)L(p+q+s-j;\frac{\mu+z}{c}+x)$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar. □

Teorem 3.4. *Tekil noktaları hariç her $u, v, r, c \in \mathbb{N}$ için*

$$T(r,u,v;z,-x,0;c)-(-1)^{r+u+v}T(r,u,v;-z,x,0;c)$$
$$=(-1)^uC(u,v,r;x,z;c)-(-1)^{u+v}D(r,v,u;z,x;c) \tag{3.8}$$

dir. Burada $C(u,v,r;x,z;c)$ ve $D(r,v,u;z,x;c)$, sırasıyla (3.4) ve (3.7)'de tanımlandığı gibidir.

İspat (3.3) ifadesinde $(p,q,s)\to(u,v,r)$ dönüşümü yapılır ve $(-1)^u$ ile çarpılırsa

$$\frac{(-1)^u}{c^{u+v}}T(u,v,r;cx,0,z;1)+T(r,u,v;z,-x,0;c)+(-1)^{u+v}T(r,v,u;z,0,x;c)$$
$$+(-1)^u\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi i[(mc+j)x+(n+m)z]}}{(mc+j)^u(nc-j)^v(n+m)^r}$$
$$=(-1)^uC(u,v,r;x,z;c) \tag{3.9}$$

ve (3.6) ifadesinde $(p,q,s)\to(r,v,u)$ dönüşümü yapılır ve $(-1)^{u+v}$ ile çarpılırsa

$$\frac{(-1)^u}{c^{u+v}}T(u,v,r;cx,0,z;1)+(-1)^{r+u+v}T(r,u,v;-z,x,0;c)$$
$$+(-1)^{u+v}T(r,v,u;z,0,x;c)+(-1)^u\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi i[(mc+j)x+(n+m)z]}}{(mc+j)^u(nc-j)^v(n+m)^r}$$
$$=(-1)^{u+v}D(r,v,u;x,z;c) \tag{3.10}$$

ifadeleri elde edilir. (3.9) ve (3.10) taraf tarafa birbirinden çıkartılırsa

$$\begin{aligned}&T(r,u,v;z,-x,0;c)-(-1)^{r+u+v}T(r,u,v;-z,x,0;c)\\&=(-1)^{u}C(u,v,r;x,z;c)-(-1)^{u+v}D(r,v,u;z,x;c)\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Lemma 3.5. *$p,q,c\in\mathbb{N}$ ve $p,q\geq 2$ için $T(p,0,q;x,y,0;c)$ fonksiyonu*

$$\begin{aligned}&T(p,0,q;x,y,0;c)+T(q,0,p;x,cx-y,0;c)\\&=\frac{1}{c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c}\mathcal{L}(p;j/c;cx-y)\mathcal{L}(q;j/c;y)e^{2\pi ijx}-L(p+q;x)\end{aligned}$$

(p ve q ya göre) yansıma formülünü sağlar.

İspat

$$T(p,0,q;x,y,0;c)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}e^{2\pi iny}}{m^{p}(nc+m)^{q}}$$

ifadesinde $m=l'$ ve $nc+m=k'$ dönüşümleri yapılırsa $0<nc=k'-l'$ olacağından $k'=kc+j$ ve $l'=lc+j$ formunda yazılır ve $n=k-l$ olur. Benzer şekilde

$$T(q,0,p;x,cx-y,0;c)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}e^{2\pi in(cx-y)}}{m^{q}(nc+m)^{p}}$$

ifadesinde $m=k'$ ve $nc+m=l'$ dönüşümleri yapılırsa $0<nc=l'-k'$ olacağından $k'=kc+j$ ve $l'=lc+j$ formunda yazılır ve $n=l-k$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}&T(p,0,q;x,y,0;c)+T(q,0,p;x,cx-y,0;c)\\&=\sum_{j=1}^{c}\left[\sum_{k>l\geq 0}\sum\frac{e^{2\pi ix(lc+j)}e^{2\pi iy(k-l)}}{(lc+j)^{p}(kc+j)^{q}}+\sum_{l>k\geq 0}\sum\frac{e^{2\pi ix(kc+j)}e^{2\pi i(cx-y)(l-k)}}{(lc+j)^{p}(kc+j)^{q}}\right]\\&=\sum_{j=1}^{c}\left[\sum_{k>l\geq 0}\sum\frac{e^{2\pi il(cx-y)}e^{2\pi iky}}{(lc+j)^{p}(kc+j)^{q}}e^{2\pi ijx}+\sum_{l>k\geq 0}\sum\frac{e^{2\pi il(cx-y)}e^{2\pi iky}}{(lc+j)^{p}(kc+j)^{q}}e^{2\pi ijx}\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeye

$$\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=l=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi il(cx-y)}e^{2\pi iky}}{(lc+j)^{p}(kc+j)^{q}}e^{2\pi ijx}$$

ifadesi eklenip çıkartılırsa

$$T(p,0,q;x,y,0;c)+T(p,0,q;x,cx-y,0;c)$$

$$= \sum_{j=1}^{c}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi il(cx-y)}e^{2\pi iky}}{(lc+j)^p(kc+j)^q}e^{2\pi ijx}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi ix(kc+j)}}{(kc+j)^{p+q}}\right]$$
$$= \frac{1}{c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi iky}}{(k+j/c)^q}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi il(cx-y)}}{(l+j/c)^p}e^{2\pi ijx}-\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi ix(kc+j)}}{(kc+j)^{p+q}}$$

elde edilir. $\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi ix(kc+j)}}{(kc+j)^{p+q}}$ ifadesinde $m=kc+j$ dönüşümü yapılırsa

$$T(p,0,q;x,y,0;c)+T(p,0,q;x,cx-y,0;c)$$
$$= \frac{1}{c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi iky}}{(k+j/c)^q}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi il(cx-y)}}{(l+j/c)^p}e^{2\pi ijx}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi ixm}}{m^{p+q}}$$
$$= \frac{1}{c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c}\mathcal{L}(p;j/c;cx-y)\mathcal{L}(q;j/c;y)e^{2\pi ijx}-L(p+q;x)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Özel halde,

$$T(p,0,q;0,0,0;c)+T(q,0,p;0,0,0;c)=\frac{1}{c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c}\zeta(p;j/c)\zeta(q;j/c)-\zeta(p+q),$$

$$T(p,0,q;0,1/2,0;c)+T(q,0,p;0,1/2,0;c)=\frac{1}{c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c}\eta(p;j/c)\eta(q;j/c)-\zeta(p+q),$$

$$T(p,0,p;0,0,0;c)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^p(nc+m)^p}=\frac{1}{2c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c}\zeta(p;j/c)\zeta(p;j/c)-\zeta(2p),$$

$$T\left(p,0,p;0,1/2,0;c\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m^p(nc+m)^p}=\frac{1}{2c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c}\eta(p;j/c)\eta(p;j/c)-\zeta(2p)$$

olduğu görülür.

Önerme 3.6. $c\in\mathbb{N}$ *ve* $p,q\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ *için*

$$c^{p+q}\left\{T(p,0,q;x,y,0;c)-(-1)^{p+q}T(p,0,q;-x,-y,0;c)\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{c-1}e^{2\pi ijx}\mathcal{L}(p;j/c;cx-y)\left\{\mathcal{L}(q;j/c;y)+(-1)^q\mathcal{L}(q;1-j/c;-y)e^{-2\pi iy}\right\}$$
$$+L(p;cx-y)\left\{L(q;y)+(-1)^qL(q;-y)\right\}$$
$$-c^{p+q}L(p+q;x)-(-1)^qc^{p+q}C(p,q,0;x,-y;c) \tag{3.11}$$

dir.

İspat (3.3)'de $s=0$ ve $z=-y$ alınır ve $(-1)^q$ ile çarpılırsa ifade

$$\begin{aligned}
&(-1)^q C(p,q,0;x,-y;c)-(-1)^{p+q}T(p,0,q;-x,-y,0;c)-T(q,0,p;x,cx-y,0;c)\\
&=\frac{(-1)^q}{c^{p+q}}L(p;cx-y)L(q;-y)+(-1)^q\sum_{j=1}^{c-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi im(cx-y)}}{(mc+j)^p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i(n+1)y}}{[(n+1)c-j]^q}e^{2\pi ijx}\\
&=\frac{(-1)^q}{c^{p+q}}L(p;cx-y)L(q;-y)+\frac{(-1)^q}{c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi im(cx-y)}}{(m+j/c)^p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-2\pi iny}e^{2\pi ijx}}{[n+(1-j/c)]^q}e^{-2\pi iy}\\
&=\frac{(-1)^q}{c^{p+q}}L(p;cx-y)L(q;-y)\\
&\quad+\frac{(-1)^q}{c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c-1}\mathcal{L}(p;j/c;cx-y)\mathcal{L}(q;1-j/c;-y)e^{2\pi ijx}e^{-2\pi iy}
\end{aligned}$$

şeklini alır. $T(q,0,p;x,cx-y,0;c)$ fonksiyonu Lemma 3.5'de yalnız bırakılıp yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&(-1)^q C(p,q,0;x,-y;c)\\
&=(-1)^{p+q}T(p,0,q;-x,-y,0;c)+T(p,0,q;x,y,0;c)-L(p+q;x)\\
&\quad+\frac{1}{c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c}\mathcal{L}(p;j/c;cx-y)\mathcal{L}(q;j/c;y)e^{2\pi ijx}+\frac{(-1)^q}{c^{p+q}}L(p;cx-y)L(q;-y)\\
&\quad+\frac{(-1)^q}{c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c-1}\mathcal{L}(p;j/c;cx-y)\mathcal{L}(q;1-j/c;-y)e^{2\pi ijx}e^{-2\pi iy}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\sum_{j=1}^{c}\mathcal{L}(p;j/c;cx-y)\mathcal{L}(q;j/c;y)e^{2\pi ijx}$ ifadesi

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{c}\mathcal{L}(p;j/c;cx-y)\mathcal{L}(q;j/c;y)e^{2\pi ijx}\\
&\quad=\sum_{j=1}^{c-1}\mathcal{L}(p;j/c;cx-y)\mathcal{L}(q;j/c;y)e^{2\pi ijx}+L(p;cx-y)L(q;y)
\end{aligned}$$

şeklinde tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned}
&(-1)^q C(p,q,0;x,-y;c)\\
&=(-1)^{p+q}T(p,0,q;-x,-y,0;c)+T(p,0,q;x,y,0;c)\\
&\quad+\frac{1}{c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c-1}e^{2\pi ijx}\mathcal{L}(p;j/c;cx-y)\left\{\mathcal{L}(q;j/c;y)-(-1)^q\mathcal{L}(q;1-j/c;-y)e^{-2\pi iy}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{c^{p+q}}L(p;cx-y)\left\{L(q;y)+(-1)^qL(q;-y)\right\}-L(p+q;x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan ifade c^{p+q} ile çarpılır ve düzenlenirse ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 3.7. *$q \geq 1$, $r \geq 2$ tamsayılar ve $x, z \in \mathbb{R}$ olsun. $q = 1$ iken $z \notin \mathbb{Z}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^q}{cA_q}\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_q\left(\frac{\mu+z}{c}\right)L\left(r;\frac{\mu+z}{c}+x\right)\\
&=\frac{1}{c^{q+r}}\sum_{l=1}^{c-1}\left\{\mathcal{L}(q;l/c;-z)-(-1)^q\mathcal{L}(q;1-l/c;z)e^{2\pi iz}\right\}\mathcal{L}(p;l/c;cx+z)e^{2\pi ilx}\\
&\quad+\frac{1}{c^{q+r}}\left\{L(q;-z)+(-1)^qL(q;z)\right\}L(r;cx+z) \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

dir.

İspat (1) (2.1) ve $L(p,x)$ açılımından

$$\begin{aligned}
\frac{1}{cA_q}\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_q\left(\frac{\mu+z}{c}\right)L\left(r;\frac{\mu+z}{c}+x\right)&=\frac{1}{c}\sum_{\mu=0}^{c-1}\sum_{n\neq0}\frac{e^{2\pi in\left(\frac{\mu+z}{c}\right)}}{n^q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi im\left(\frac{\mu+z}{c}+x\right)}}{m^r}\\
&=\frac{1}{c}\sum_{n\neq0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m+n)\frac{z}{c}}e^{2\pi imx}}{n^qm^r}\sum_{\mu=0}^{c-1}e^{2\pi i(m+n)\frac{\mu}{c}}
\end{aligned}$$

olur.

$$\sum_{\mu=0}^{c-1}e^{2\pi in\frac{\mu}{c}}=\begin{cases}c, & c\mid n\\ 0, & c\nmid n\end{cases}$$

olduğundan ifadenin sağ tarafı (RHS)

$$RHS=\sum_{\substack{n\neq0\\ c\nmid n, c\nmid m\\ c|(m+n)}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m+n)\frac{z}{c}}e^{2\pi imx}}{n^qm^r}+\sum_{\substack{n\neq0\\ c|n,\, c|m}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m+n)\frac{z}{c}}e^{2\pi imx}}{n^qm^r}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Burada $c\nmid n$, $c\nmid m$ ve $c|\,(m+n)$ koşulu için $m=mc+l$ ve $n=nc-l$ dönüşümleri, $c|n$ ve $c|m$ koşulu için $m=mc$ ve $n=nc$ dönüşümleri yapılırsa

$$RHS=\sum_{n\neq0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc-l)^q(mc+l)^r}e^{2\pi ilx}+\sum_{n\neq0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc)^q(mc)^r}$$

olur. Şimdi $\sum_{n\neq0}$ toplamı $\sum_{n=1}^{\infty}+\sum_{n=-\infty}^{-1}$ şeklinde yazılır ve $\sum_{n=-\infty}^{-1}$ toplamında n yerine $-n$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&RHS\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc-l)^q(mc+l)^r}e^{2\pi ilx}+(-1)^q\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{c-1}\frac{e^{-2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc+l)^q(mc+l)^r}e^{2\pi ilx}
\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc)^q(mc)^r}+(-1)^q\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc)^q(mc)^r}$$

elde edilir. $(-1)^q\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{c-1}\frac{e^{-2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc+l)^q(mc+l)^r}e^{2\pi ilx}$ ifadesinin $l=c$ deki değeri eklenip çıkartılırsa

$$\begin{aligned}
&RHS\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc-l)^q(mc+l)^r}e^{2\pi ilx}+(-1)^q\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{c}\frac{e^{-2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc+l)^q(mc+l)^r}e^{2\pi ilx}\\
&\quad-(-1)^q\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{[(n+1)c]^q\,[(m+1)c]^r}e^{2\pi icx}+(-1)^q\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc)^q(mc)^r}\\
&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc)^q(mc)^r}
\end{aligned}$$

olur. 3. satırdaki seriler birbirine eşit olduğundan sadeleşir ve

$$\begin{aligned}
RHS=&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{c-1}\frac{e^{2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc-l)^q(mc+l)^r}e^{2\pi ilx}\\
&+(-1)^q\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{c}\frac{e^{-2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc+l)^q(mc+l)^r}e^{2\pi ilx}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz}e^{2\pi im(cx+z)}}{(nc)^q(mc)^r}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
RHS=&\frac{1}{c^{q+r}}\sum_{l=1}^{c-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz}}{(n+1-\frac{l}{c})^q}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi im(cx+z)}}{(m+\frac{l}{c})^r}e^{2\pi i(lx+z)}\\
&+\frac{(-1)^q}{c^{q+r}}\sum_{l=1}^{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-2\pi inz}}{(n+\frac{l}{c})^q}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi im(cx+z)}}{(m+\frac{l}{c})^r}e^{2\pi ilx}+\frac{1}{c^{q+r}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi inz}}{n^q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi im(cx+z)}}{m^r}\\
=&\frac{1}{c^{q+r}}\left\{\sum_{l=1}^{c-1}\mathcal{L}(q;1-l/c;z)\mathcal{L}(r;l/c;cx+z)e^{2\pi i(lx+z)}+L(q;z)L(r;cx+z)\right\}\\
&+\frac{(-1)^q}{c^{q+r}}\left\{\sum_{l=1}^{c-1}\mathcal{L}(q;l/c;-z)\mathcal{L}(r;l/c;cx+z)e^{2\pi ilx}+L(q;-z)L(r;cx+z)\right\}\\
=&\frac{(-1)^q}{c^{q+r}}\sum_{l=1}^{c-1}\left\{\mathcal{L}(q;l/c;-z)+(-1)^q\mathcal{L}(q;1-l/c;z)e^{2\pi iz}\right\}\mathcal{L}(r;l/c;cx+z)e^{2\pi ilx}\\
&+\frac{(-1)^q}{c^{q+r}}\left\{L(q;-z)+(-1)^qL(q;z)\right\}L(r;cx+z)
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır. □

İspat (2) (3.8)'de verilen ifadede $s=0$ ve $z=-y$ dönüşümleri yapılır ve ifade $(-1)^p$ ile çarpılırsa

$$C(p,q,0;x,-y;c)$$

$$= (-1)^p T(p,0,q;-x,-y,0;c) - (-1)^q T(p,0,q;x,y,0;c) + (-1)^q D(0,q,p;-y,x;c)$$

elde edilir. $C(p,q,0;x,-y;c)$ ifadesi (3.11)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&T(p,0,q;x,y,0;c) - (-1)^{p+q} T(p,0,q;-x,-y,0;c) \\
&= \frac{1}{c^{p+q}} \sum_{l=1}^{c-1} e^{2\pi i l x} \mathcal{L}(p;l/c;cx-y) \left\{ \mathcal{L}(q;l/c;y) - (-1)^q \mathcal{L}(q;1-l/c;-y) e^{-2\pi i y} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{c^{p+q}} L(p;cx-y) \left\{ L(q;y) + (-1)^q L(q;-y) \right\} - L(p+q;x) \\
&\quad - (-1)^{p+q} T(p,0,q;-x,-y,0;c) + T(p,0,q;x,y,0;c) - D(0,q,p;-y,x;c)
\end{aligned}$$

elde edilir. İfade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&D(0,q,p;-y,x;c) \\
&= \frac{1}{c^{p+q}} \sum_{l=1}^{c-1} e^{2\pi i l x} \mathcal{L}(p;l/c;cx-y) \left\{ \mathcal{L}(q;l/c;y) - (-1)^q \mathcal{L}(q;1-l/c;-y) e^{-2\pi i y} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{c^{p+q}} L(p;cx-y) \left\{ L(q;y) + (-1)^q L(q;-y) \right\} - L(p+q;x)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\lim_{s \to 0} \binom{q-j+s-1}{s-1} = \begin{cases} 1, & j = q, \\ 0, & j < q, \end{cases}$$

olduğu gözönüne alınarak, (3.7)'den

$$D(0,q,p;-y,x;c) = \frac{(-1)^q}{cA_q} \sum_{\mu=0}^{c-1} \mathcal{B}_q\left(\frac{\mu-y}{c}\right) L\left(p; \frac{\mu-y}{c} + x\right) - L(p+q;x)$$

olur. Bulunan iki ifade birbirine eşitlenir, $z \to -y$ ve $p \to r$ dönüşümleri yapılırsa ispat tamamlanır. □

3.1. Özel Durumlar

$r, u, v \in \mathbb{N}$ ve $r+u+v$ tek ise (3.8)'den

$$\begin{aligned}
&T(r,u,v;z,-x,0;c) + T(r,u,v;-z,x,0;c) \\
&\quad = (-1)^u C(u,v,r;x,z;c) + (-1)^r D(r,v,u;z,x;c)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $(z,x)=(0,0)\,,(z,x)=(1/2,0)\,,(z,x)=(0,1/2)$ ve $(z,x)=(1/2,1/2)$ için $T(r,u,v;z,-x,0;c)=T(r,u,v;-z,x,0;c)$'dir. $T(r,u,v;z,-x,0;c)$ serisi, bu özel durumlarda,

$$2T(r,u,v;z,-x,0;c)=(-1)^{u}C(u,v,r;x,z;c)+(-1)^{r}D(r,v,u;z,x;c) \tag{3.13}$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu $x=z=0$ ve $c=1$ için Huard vd. tarafından verilen (1.2) ifadesine dönüşür.

Bu bölümde yukarıda bahsi geçen durumlarda $T(r,u,v;z,-x,0;c)$ serisinin zeta değerleri cinsinden ifadeleri verilecektir.

3.1.1. T(r, u, v; 0, 0, 0; c) serisinin hesabı

$r+u+v$ tek ise (3.13)'den

$$\begin{aligned}
&2(-1)^{u}T(r,u,v;0,0,0;c)\\
&=2\sum_{j=0}^{maks(\frac{u}{2},\frac{v}{2})}\left[\binom{u+v-2j-1}{v-1}+\binom{u+v-2j-1}{u-1}\right]\frac{\zeta(2j)\zeta(u+v+r-2j)}{c^{u+v-2j}}\\
&+2(-1)^{r+u}\sum_{j=0}^{r/2}\binom{r+v-2j-1}{r-1}\zeta(2j)\zeta(r+u+v-2j)c^{r-2j}\\
&+(-1)^{u+r}c^{r-1}\binom{r+v-1}{r-1}\sum_{\mu=0}^{c-1}L\left(r+u+v;\frac{\mu}{c}\right)\\
&+\frac{(-1)^{u+r}c^{r-1}}{2\pi i}\binom{r+v-2}{r-1}\sum_{\mu=1}^{c-1}\mathcal{B}_1\left(\frac{\mu}{c}\right)L\left(r+u+v-1;\frac{\mu}{c}\right)\\
&+(-1)^{u+r}c^{r}\sum_{j=2}^{v}\binom{r+v-j-1}{r-1}\frac{(-1)^{j}}{cA_j}\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_j\left(\frac{\mu}{c}\right)L\left(r+u+v-j;\frac{\mu}{c}\right)
\end{aligned}$$

olur. Burada (ve bundan sonra) $\sum\limits_{j=0}^{\alpha}=\sum\limits_{0\leq j\leq\alpha}=\sum\limits_{j=0}^{\lfloor\alpha\rfloor}$, $0\leq\alpha\in\mathbb{R}$, anlamında kullanılmaktadır. Son ifade (3.12) ile açılırsa

$$\begin{aligned}
&2T(r,u,v;0,0,0;c)\\
&=2(-1)^{u}\sum_{j=0}^{maks(\frac{u}{2},\frac{v}{2})}\left[\binom{u+v-2j-1}{v-1}+\binom{u+v-2j-1}{u-1}\right]\frac{\zeta(2j)\zeta(u+v+r-2j)}{c^{u+v-2j}}\\
&+(-1)^{r}2\sum_{j=0}^{r/2}\binom{r+v-2j-1}{r-1}\zeta(2j)\zeta(r+u+v-2j)c^{r-2j}
\end{aligned}$$

$$+\frac{2(-1)^r}{c^{u+v}}\sum_{j=0}^{v/2}\binom{r+v-2j-1}{r-1}\zeta(2j)\zeta(r+u+v-2j)$$
$$+\frac{c^{r-1}(-1)^r}{2\pi i}\binom{r+v-2}{r-1}\sum_{\mu=1}^{c-1}\mathcal{B}_1\left(\frac{\mu}{c}\right)L\left(r+u+v-1;\frac{\mu}{c}\right)$$
$$+\frac{(-1)^r}{c^{u+v}}\sum_{j=2}^{v}\binom{r+v-j-1}{r-1}$$
$$\times\sum_{l=1}^{c-1}\zeta(r+u+v-j;l/c)\left[\zeta\left(j;l/c\right)-(-1)^j\zeta\left(j;1-l/c\right)\right]$$

olur. İfade düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
&(-1)^r c^{u+v}T(r,u,v;0,0,0;c)\\
&=(-1)^v\sum_{j=0}^{maks(\frac{u}{2},\frac{v}{2})}\left[\binom{u+v-2j-1}{v-1}+\binom{u+v-2j-1}{u-1}\right]\zeta(2j)\zeta(u+v+r-2j)c^{2j}\\
&\quad+\sum_{j=0}^{r/2}\binom{r+v-2j-1}{r-1}\zeta(2j)\zeta(r+u+v-2j)c^{u+v+r-2j}\\
&\quad+\sum_{j=0}^{v/2}\binom{r+v-2j-1}{r-1}\zeta(2j)\zeta(r+u+v-2j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{v}\binom{r+v-j-1}{r-1}\sum_{l=1}^{c-1}\zeta(r+u+v-j;l/c)\left[\zeta(j;l/c)-(-1)^j\zeta(j;1-l/c)\right]\\
&\quad+\frac{c^{u+v+r-1}}{4\pi i}\binom{r+v-2}{r-1}\sum_{\mu=1}^{c-1}\mathcal{B}_1\left(\frac{\mu}{c}\right)L\left(r+u+v-1;\frac{\mu}{c}\right) \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca, r tek iken (3.13)'den

$$\begin{aligned}
2T(r,r,r;0,0,0;c)&=-2\sum_{j=0}^{(r-1)/2}\binom{2r-2j-1}{r-1}\zeta\left(2j\right)\zeta(3r-2j)\left(\frac{2}{c^{2r-2j}}+c^{r-2j}\right)\\
&\quad-c^{r-1}\sum_{j=0}^{(r-1)/2}\binom{2r-2j-1}{r-1}\frac{(-1)^j}{A_j}\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_j\left(\frac{\mu}{c}\right)L\left(3r-j;\frac{\mu}{c}\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Dikkat edilirse, bu ifade $c=1$ için (1.3)'e dönüşür.

(3.14) yardımıyla $r+u+v$ tek iken $T(r,u,v;0,0,0;c)$ serisinin bazı özel değerlerini verelim.

Örnek 3.8. *$r=1$, $u=v=3$ ve $c=3$ için (3.14)'den*

$$-3^6T(1,3,3;0,0,0;3)$$

$$
\begin{aligned}
&= - \sum_{0 \le j < 3/2} \left[\binom{5-2j}{2} + \binom{5-2j}{2} \right] \zeta(2j)\, \zeta(7-2j)\, 3^{2j} \\
&\quad + \sum_{0 \le j < 1/2} \binom{3-2j}{0} \zeta(2j)\, \zeta(7-2j)\, 3^{7-2j} \\
&\quad + \sum_{0 \le j < 3/2} \binom{3-2j}{0} \zeta(2j)\, \zeta(7-2j) \\
&\quad + \frac{3^6}{4\pi i} \binom{2}{0} \sum_{\mu=1}^{2} \mathcal{B}_1\left(\frac{\mu}{3}\right) L(6;\mu/3) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{3} \binom{3-j}{0} \sum_{l=1}^{2} \zeta(7-j;l/3) \left[\zeta(j;l/3) - (-1)^j \zeta(j;1-l/3)\right]
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
T(1,3,3;0,0,0;3) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn^3(3m+n)^3} \\
&= \frac{1084}{729}\zeta(7) + \frac{53\pi^2}{4356}\zeta(5) + \frac{L(6;1/3) - L(6;2/3)}{24\pi i} \\
&\quad - \frac{1}{1458} \{ [\zeta(2;1/3) - \zeta(2;2/3)] [\zeta(5;1/3) - \zeta(5;2/3)] \\
&\quad + [\zeta(3;1/3) + \zeta(3;2/3)] [\zeta(4;1/3) + \zeta(4;2/3)] \}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 3.9. *$r = 1$, $u = v = 2$ ve $c = 3$ için (3.14)'den*

$$
\begin{aligned}
&- 3^4 T(1,2,2;0,0,0;3) \\
&= \sum_{j=0}^{1} \left[\binom{3-2j}{1} + \binom{3-2j}{1} \right] \zeta(2j)\, \zeta(5-2j)\, 3^{2j} \\
&\quad + \sum_{0 \le j < 1/2} \binom{2-2j}{0} \zeta(2j)\, \zeta(5-2j)\, 3^{5-2j} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{1} \binom{2-2j}{0} \zeta(2j)\, \zeta(5-2j) \\
&\quad + \frac{3^4}{4\pi i} \binom{1}{0} \sum_{\mu=1}^{2} \mathcal{B}_1\left(\frac{\mu}{3}\right) L(4;\mu/3) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{2} \binom{2-j}{0} \sum_{l=1}^{2} \zeta(5-j;l/3) \left[\zeta(j;l/3) - (-1)^j \zeta(j;1-l/3)\right]
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
T(1,2,2;0,0,0;3) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn^2(3m+n)^2}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{125}{81}\zeta(5) - \frac{19\pi^2}{486}\zeta(3) + \frac{L(4;1/3) - L(4;2/3)}{24\pi i} \\
&\quad - \frac{1}{162}\left[\zeta(2;1/3) + \zeta(2;2/3)\right]\left[\zeta(3;1/3) + \zeta(3;2/3)\right]
\end{aligned}
$$

bulunur.

3.1.2. T(r, u, v; 1/2, 0, 0; c) serisinin hesabı

$r+u+v$ tek ise (3.13)'den

$$
\begin{aligned}
&2T(r,u,v;1/2,0,0;c) \\
&= (-1)^c C(u,v,r;0,1/2;c) - (-1)^{u+v} D(r,v,u;1/2,0;c) \\
&= (-1)^u \sum_{j=0}^{u} \binom{u+v-j-1}{v-1} \frac{\mathcal{B}_j(0) L(u+v+r-j;1/2)}{c^{u+v-j} A_j} \\
&+ (-1)^u \sum_{j=0}^{v} \binom{u+v-j-1}{u-1} (-1)^j \frac{\mathcal{B}_j(0) L(u+v+r-j;1/2)}{c^{u+v-j} A_j} \\
&- (-1)^{u+v} \sum_{j=0}^{r} \binom{r+v-j-1}{r-1} \frac{c^{r-j}}{A_j} \mathcal{B}_j(1/2) L(r+u+v-j;0) \\
&+ (-1)^{u+v} c^{r-1} \sum_{j=0}^{v} \binom{r+v-j-1}{r-1} \frac{(-1)^j}{A_j} \sum_{\mu=0}^{c-1} \mathcal{B}_j\left(\frac{\mu+\frac{1}{2}}{c}\right) L\left(r+u+v-j;\frac{\mu+\frac{1}{2}}{c}\right) \\
&= -2(-1)^u \sum_{j=0}^{maks(\frac{u}{2},\frac{v}{2})} \left[\binom{u+v-2j-1}{v-1} + \binom{u+v-2j-1}{u-1}\right] \frac{\zeta(2j)\eta(u+v+r-2j)}{c^{u+v-2j}} \\
&+ (-1)^r \left\{ -2 \sum_{j=0}^{r/2} \binom{r+v-2j-1}{r-1} \eta(2j)\zeta(r+u+v-2j) c^{r-2j} \right. \\
&+ c^{r-1} \binom{r+v-1}{r-1} \sum_{\mu=0}^{c-1} L\left(r+u+v;\frac{\mu+1/2}{c}\right) \\
&\left. + c^r \sum_{j=1}^{v} \binom{r+v-j-1}{r-1} \frac{(-1)^j}{cA_j} \sum_{\mu=0}^{c-1} \mathcal{B}_j\left(\frac{\mu+1/2}{c}\right) L\left(r+u+v-j;\frac{\mu+1/2}{c}\right) \right\}
\end{aligned}
$$

olur. Son ifade (3.12) ile açılırsa

$$
\begin{aligned}
&2T(r,u,v;1/2,0,0;c) \\
&= -2(-1)^u \sum_{j=0}^{maks(\frac{u}{2},\frac{v}{2})} \left[\binom{u+v-2j-1}{v-1} + \binom{u+v-2j-1}{u-1}\right] \frac{\zeta(2j)\eta(u+v+r-2j)}{c^{u+v-2j}} \\
&\quad - (-1)^r 2 \sum_{j=0}^{r/2} \binom{r+v-2j-1}{r-1} \eta(2j)\zeta(r+u+v-2j) c^{r-2j}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{2(-1)^r}{c^{u+v}}\sum_{j=0}^{v/2}\binom{r+v-2j-1}{r-1}\eta(2j)\eta(r+u+v-2j)$$
$$+\frac{(-1)^r}{c^{u+v}}\sum_{j=1}^{v}\binom{r+v-j-1}{r-1}$$
$$\times\sum_{l=1}^{c-1}\eta(r+u+v-j;l/c)\left[\eta\left(j;l/c\right)-(-1)^j\eta\left(j;1-l/c\right)\right]$$

olur. Şimdi tüm ifade düzenlenir ve $\frac{(-1)^r c^{u+v}}{2}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
&(-1)^r c^{u+v}T(r,u,v;1/2,0,0;c)\\
&=(-1)^v\sum_{j=0}^{maks(\frac{u}{2},\frac{v}{2})}\left[\binom{u+v-2j-1}{v-1}+\binom{u+v-2j-1}{u-1}\right]\zeta(2j)\eta(u+v+r-2j)c^{2j}\\
&\quad-\sum_{j=0}^{r/2}\binom{r+v-2j-1}{r-1}\eta(2j)\zeta(r+u+v-2j)c^{u+v+r-2j}\\
&\quad+\sum_{j=0}^{v/2}\binom{r+v-2j-1}{r-1}\eta(2j)\eta(r+u+v-2j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{v}\binom{r+v-j-1}{r-1}\sum_{l=1}^{c-1}\eta(r+u+v-j;l/c)\left[\eta(j;l/c)-(-1)^j\eta(j;1-l/c)\right]
\end{aligned}\tag{3.15}$$

elde edilir.

(3.15) yardımıyla $r+u+v$ tek iken $T(r,u,v;1/2,0,0;c)$ serisinin bazı özel değerlerini verelim.

Örnek 3.10. *$r=u=v=1$ ve $c=2$ için (3.15)'den*

$$\begin{aligned}
-4T(1,1,1;1/2,0,0;2)&=-\sum_{0\le j\le 1/2}2\zeta(2j)\zeta(3-2j)2^{2j}-\sum_{0\le j\le 1/2}\eta(2j)\zeta(3-2j)2^{3-2j}\\
&\quad+\sum_{0\le j\le 1/2}\eta(2j)\eta(3-2j)+\frac{1}{2}\eta(2;1/2)\left\{\eta(1;1/2)+\eta(1;1/2)\right\}\\
&=-2\zeta(0)\zeta(3)-\eta(0)\zeta(3)2^3+\eta(0)\eta(3)+2\eta(2;1/2)\eta(1;1/2)\\
&=-\eta(3)-4\zeta(3)+\frac{1}{2}\eta(3)+2\eta(2;1/2)\eta(1;1/2)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$T(1,1,1;1/2,0,0;2)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{mn(2m+n)}$$

$$= \zeta(3) - \frac{3}{8}\eta(3) - \frac{1}{2}\eta(2;1/2)\eta(1;1/2)$$

bulunur.

Örnek 3.11. *$r = u = 3$, $v = 1$ ve $c = 2$ için (3.15)'den*

$$\begin{aligned}
&-2^4 T(3,3,1;1/2,0,0;2) \\
&= -\sum_{0\le j\le 3/2}\left\{1+\binom{3-2j}{2}\right\}\zeta(2j)\zeta(7-2j)2^{2j} - \sum_{0\le j\le 3/2}\eta(2j)\zeta(7-2j)2^{7-2j} \\
&\quad + \sum_{0\le j\le 1/2}\binom{3-2j}{2}\eta(2j)\eta(7-2j) \\
&= \frac{7}{2}\eta(7) - 2^6\zeta(7) - \frac{2\pi^2}{3}\eta(5) - \frac{2^3\pi^2}{3}\zeta(5)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
T(3,3,1;1/2,0,0;2) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^3 n^3(2m+n)} \\
&= 4\zeta(7) - \frac{7}{32}\eta(7) + \frac{\pi^2}{24}\eta(5) + \frac{\pi^2}{6}\zeta(5)
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.12. *$r = 4$, $u = 2$, $v = 1$ ve $c = 3$ için (3.15)'den*

$$\begin{aligned}
3^3 T(4,2,1;1/2,0,0;3) &= -\sum_{j=0}^{1}\left\{1+\binom{2-2j}{1}\right\}\zeta(2j)\eta(7-2j)3^{2j} \\
&\quad - \sum_{j=0}^{2}\eta(2j)\zeta(7-2j)3^{7-2j} + \sum_{0\le j\le 1/2}\binom{4-2j}{3}\eta(2j)\eta(7-2j) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}\eta(6;l/3)\left\{\eta(1;l/3)+\eta(1;1-l/3)\right\} \\
&= -\left[3\zeta(0)\eta(7) + 9\eta(2)\zeta(5)\right] \\
&\quad - \left[3^7\eta(0)\zeta(7) + 3^5\eta(2)\zeta(5) + 3^3\eta(4)\zeta(3)\right] + 4\eta(0)\eta(7) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\eta(6;l/3)+\eta(6;2/3)\right]\left[\eta(1;1/3)+\eta(1;2/3)\right] \\
&= -\frac{2187}{2}\zeta(7) + \frac{7}{2}\eta(7) - \frac{81\pi^2}{4}\zeta(5) - \frac{3\pi^2}{2}\eta(5) - \frac{7\pi^4}{80}\zeta(3) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\eta(6;l/3)+\eta(6;2/3)\right]\left[\eta(1;1/3)+\eta(1;2/3)\right]
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} T(4,2,1;1/2,0,0;3) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^4n^2(3m+n)} \\ &= \frac{7}{54}\eta(7)-\frac{81}{2}\zeta(7)-\frac{3\pi^2}{4}\zeta(5)-\frac{\pi^2}{18}\eta(5)-\frac{7\pi^4}{2160}\zeta(3) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left[\eta(6;1/3)+\eta(6;2/3)\right]\left[\eta(1;1/3)+\eta(1;2/3)\right] \end{aligned}$$

bulunur.

3.1.3. T(r, u, v; 1/2, 1/2, 0; c) serisinin hesabı

$r+u+v$ tek ise (3.13)'den

$$\begin{aligned} &2T(r,u,v;1/2,1/2,0;c) \\ &= (-1)^u C(u,v,r;0,1/2;c)-(-1)^{u+v}D(r,v,u;1/2,1/2;c) \\ &= (-1)^u\left[\sum_{j=0}^{u}\binom{u+v-j-1}{v-1}\frac{\mathcal{B}_j(1/2)L(u+v+r-j;1/2)}{c^{u+v-j}A_j}\right. \\ &\qquad\left.+\sum_{j=0}^{v}\binom{u+v-j-1}{u-1}(-1)^j\frac{\mathcal{B}_j(1/2)L(u+v+r-j;1/2)}{c^{u+v-j}A_j}\right] \\ &\quad-(-1)^{u+v}\left[\sum_{j=0}^{r}\binom{r+v-j-1}{r-1}\frac{c^{r-j}}{A_j}\mathcal{B}_j(1/2)L(r+u+v-j;1/2)\right. \\ &\qquad+c^{r-1}\sum_{j=0}^{v}\binom{r+v-j-1}{r-1}\frac{(-1)^j}{A_j} \\ &\qquad\left.\times\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_j\left(\frac{\mu+1/2}{c}\right)L\left(r+u+v-j;\frac{\mu+1/2}{c}\right)\right] \\ &= 2(-1)^u\sum_{j=0}^{maks(\frac{u}{2},\frac{v}{2})}\left[\binom{u+v-2j-1}{v-1}+\binom{u+v-2j-1}{u-1}\right]\frac{\eta(2j)\eta(u+v+r-2j)}{c^{u+v-2j}} \\ &+(-1)^r\left\{2\sum_{j=0}^{r/2}\binom{r+v-2j-1}{r-1}\eta(2j)\eta(r+u+v-2j)c^{r-2j}\right. \\ &+c^{r-1}\binom{r+v-1}{r-1}\sum_{\mu=0}^{c-1}L\left(r+u+v;\frac{\mu+1/2}{c}\right) \\ &\left.+c^r\sum_{j=1}^{v}\binom{r+v-j-1}{r-1}\frac{(-1)^j}{cA_j}\sum_{\mu=0}^{c-1}\mathcal{B}_j\left(\frac{\mu+1/2}{c}\right)L\left(r+u+v-j;\frac{\mu+1/2}{c}\right)\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade (3.12) ile açılırsa

$$2(-1)^u \sum_{j=0}^{maks(\frac{u}{2},\frac{v}{2})} \left[\binom{u+v-2j-1}{v-1} + \binom{u+v-2j-1}{u-1}\right] \frac{\eta(2j)\eta(u+v+r-2j)}{c^{u+v-2j}}$$
$$+(-1)^r \left\{ 2\sum_{j=0}^{r/2} \binom{r+v-2j-1}{r-1} \eta(2j)\eta(r+u+v-2j)c^{r-2j} \right.$$
$$+\frac{2}{c^{u+v}} \sum_{j=0}^{v/2} \binom{r+v-2j-1}{r-1} \eta(2j)\eta(r+u+v-2j)$$
$$\left. +\frac{1}{c^{u+v}} \sum_{j=1}^{v} \binom{r+v-j-1}{r-1} \sum_{l=1}^{c-1} \eta(r+u+v-j;l/c) \left[\eta(j;l/c)-(-1)^j\eta(j;1-l/c)\right] \right\}$$

olur. Bulunan ifade $\frac{(-1)^r c^{u+v}}{2}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
&(-1)^u c^{u+v} T(r,u,v;1/2,1/2,0;c) \\
&= \sum_{j=0}^{maks(\frac{u}{2},\frac{v}{2})} \left[\binom{u+v-2j-1}{v-1} + \binom{u+v-2j-1}{u-1}\right] \eta(2j)\eta(u+v+r-2j)c^{2j} \\
&\quad + (-1)^{u+r} \sum_{j=0}^{r/2} \binom{r+v-2j-1}{r-1} \eta(2j)\eta(r+u+v-2j)c^{u+v+r-2j} \\
&\quad + (-1)^{u+r} \sum_{j=0}^{v/2} \binom{r+v-2j-1}{r-1} \eta(2j)\eta(r+u+v-2j) \\
&\quad + (-1)^{u+r} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{v} \binom{r+v-j-1}{r-1} \\
&\qquad \times \sum_{l=1}^{c-1} \eta(r+u+v-j;l/c) \left[\eta(j;l/c)-(-1)^j\eta(j;1-l/c)\right]
\end{aligned} \tag{3.16}$$

elde edilir.

(3.16) yardımıyla $r+u+v$ tek iken $T(r,u,v;1/2,1/2,0;c)$ serisinin bazı özel değerlerini verelim.

Örnek 3.13. *$r=u=v=1$ ve $c=2$ için (3.16)'dan*

$$\begin{aligned}
&-4T(1,1,1;1/2,1/2,0;2) \\
&= 2\eta(0)\eta(3) + \eta(0)\eta(3)2^3 + \eta(0)\eta(3) + \frac{1}{2}\eta(2;1/2)\left\{\eta(1;1/2)+\eta(1;1/2)\right\}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$T(1,1,1;1/2,1/2,0;2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{mn(2n+m)} = -\frac{11}{8}\eta(3) - \frac{1}{4}\eta(2;1/2)\eta(1;1/2)$$

bulunur.

Örnek 3.14. *$r = v = 2$, $u = 1$ ve $c = 3$ için (3.16)'dan*

$$\begin{aligned}
&3^3 T(2,1,2;1/2,1/2,0;3)\\
&= -\sum_{j=0}^{1}\left\{\binom{2-2j}{1}+1\right\}\eta(2j)\eta(5-2j)3^{2j}+\sum_{j=0}^{1}\binom{3-2j}{1}\eta(2j)\eta(5-2j)3^{5-2j}\\
&\quad+\sum_{j=0}^{1}\binom{3-2j}{1}\eta(2j)\eta(5-2j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\binom{3-j}{1}\sum_{l=1}^{2}\eta(5-j;l/3)\left\{\eta(j;l/3)-(-1)^j\eta(j;1-l/3)\right\}\\
&= 3^6\eta(0)\eta(5)+19\eta(2)\eta(3)+\left[\eta(4;1/3)+\eta(4;2/3)\right]\left[\eta(1;1/3)+\eta(1;2/3)\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\eta(3;1/3)\left[\eta(2;1/3)-\eta(2;2/3)\right]+\eta(3;2/3)\left[\eta(2;2/3)-\eta(2;1/3)\right]\right\}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&T(2,1,2;1/2,1/2,0;3)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{m^2 n(3n+m)^2}\\
&=\frac{27}{2}\eta(5)+\frac{19\pi^2}{324}\eta(3)+\frac{1}{27}\left\{\eta(4;1/3)+\eta(4;2/3)\right\}\left\{\eta(1;1/3)+\eta(1;2/3)\right\}\\
&\quad+\frac{1}{54}\left\{\eta(3;1/3)-\eta(3;2/3)\right\}\left\{\eta(2;1/3)-\eta(2;2/3)\right\}
\end{aligned}$$

bulunur.

3.1.4. T(p, 0, q; 0, 0, 0; c) serisinin hesabı

$p+q$ tek ve $p, q \geq 2$ tamsayıları için (3.11)'den

$$\begin{aligned}
2T(p,0,q;0,0,0;c) &= \frac{1+(-1)^q}{c^{p+q}}\zeta(p)\zeta(q)-\zeta(p+q)-(-1)^q C(p,q,0;0,0;c)\\
&\quad+\frac{1}{c^{p+q}}\sum_{j=1}^{c-1}\zeta(p;j/c)\left\{\zeta(q;j/c)+(-1)^q\zeta(q;1-j/c)\right\}
\end{aligned}\tag{3.17}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
&C(p,q,0;0,0;c)\\
&=2\sum_{j=0}^{maks(p,q)/2}\left\{\binom{p+q-2j-1}{p-1}+\binom{p+q-2j-1}{q-1}\right\}\frac{\zeta(2j)\zeta(p+q-2j)}{c^{p+q-2j}}
\end{aligned}$$

dir.

(3.17) yardımıyla $T(p,0,q;0,0,0;c)$ serisinin $p,q \geq 2$ ve $p+q$ tek iken bazı özel değerlerini verelim.

Örnek 3.15. *$p=2$, $q=5$ ve $c=2$ için (3.17)'den*

$$\begin{aligned}
2T(2,0,5;0,0,0;2) &= -\zeta(7) + \frac{1}{2^6}\sum_{0\leq j\leq 5/2}\left\{\binom{6-2j}{1}+\binom{6-2j}{4}\right\}\frac{\zeta(2j)\zeta(7-2j)}{2^{7-2j}} \\
&= -\zeta(7) + \frac{1}{2^6}\left(\frac{21}{2^7}\zeta(0)\zeta(7)+\frac{5}{2^5}\zeta(2)\zeta(5)+\frac{1}{4}\zeta(4)\zeta(3)\right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
T(2,0,5;0,0,0;2) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2(2n+m)^5} \\
&= -\frac{16405}{32768}\zeta(7)+\frac{5\pi^2}{28576}\zeta(5)+\frac{\pi^4}{92168}\zeta(3)
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.16. *$p=3$, $q=2$ ve $c=3$ için (3.17)'den*

$$\begin{aligned}
&2T(3,0,2;0,0,0;3) \\
&= \frac{2}{3^5}\zeta(2)\zeta(3)-\zeta(5)-\frac{2}{3^5}\sum_{0\leq j\leq 3/2}\left\{\binom{4-2j}{2}+\binom{4-2j}{1}\right\}\frac{\zeta(2j)\zeta(5-2j)}{2^{5-2j}} \\
&\quad + \frac{1}{3^5}\sum_{j=1}^{2}\zeta(3;j/3)\left\{\zeta(2;j/3)+\zeta(2;1-j/3)\right\} \\
&= \frac{\pi^2}{729}\zeta(3)-\zeta(5)-\frac{2}{3^5}\left(\frac{10}{243}\zeta(0)\zeta(5)+\frac{1}{9}\zeta(2)\zeta(3)\right) \\
&\quad + \frac{1}{243}\left\{\zeta(3;1/3)\left[\zeta(2;1/3)+\zeta(2;2/3)\right]+\zeta(3;2/3)\left[\zeta(2;2/3)+\zeta(2;1/3)\right]\right\}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
T(3,0,2;0,0,0;3) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^3(3n+m)^2} \\
&= -\frac{59039}{118098}\zeta(5)-\frac{4\pi^2}{729}\zeta(3)+\frac{1}{486}\left[\zeta(3;1/3)+\zeta(3;2/3)\right]\left[\zeta(2;1/3)+\zeta(2;2/3)\right]
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.17. *$p=4$, $q=3$ ve $c=4$ için (3.17)'den*

$$2T(4,0,3;0,0,0;4)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\zeta(7) + \frac{2}{4^7}\sum_{j=0}^{2}\left\{\binom{6-2j}{3} + \binom{6-2j}{2}\right\}\frac{\zeta(2j)\zeta(7-2j)}{4^{7-2j}} \\
&\quad + \frac{1}{4^7}\sum_{j=1}^{3}\zeta(4;j/4)\left\{\zeta(3;j/4) - \zeta(3;1-j/4)\right\} \\
&= -\zeta(7) + 2\left\{\frac{35}{4^7}\zeta(0)\zeta(7) + \frac{10}{4^5}\zeta(2)\zeta(5) + \frac{1}{4^3}\zeta(4)\zeta(3)\right\} \\
&\quad + \frac{1}{4^7}\left\{\zeta(4;1/4)\left[\zeta(3;1/4) - \zeta(3;3/4)\right] + \zeta(4;3/4)\left[\zeta(3;3/4) - \zeta(3;1/4)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
T(4,0,3;0,0,0;4) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^4(4n+m)^3} \\
&= -\frac{268435491}{536870912}\zeta(7) + \frac{5\pi^2}{50331648}\zeta(5) + \frac{\pi^4}{94371840}\zeta(3) \\
&\quad + \frac{1}{32768}\left[\zeta(4;1/4) - \zeta(4;3/4)\right]\left[\zeta(3;1/4) - \zeta(3;3/4)\right]
\end{aligned}
$$

bulunur.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Tornheim tipli bir seri tanımlandı ve bu seri için bazı fonksiyonel eşitlikler elde edildi. Bu fonksiyonel eşitliklerin özel durumları Tornheim ve alterne Tornheim serileri için literatürde bulunan sonuçların bir çoğunu verdiği gözlemlendi. Ayrıca, elde edilen fonksiyonel eşitliklerin uygulamaları olarak bazı sonsuz seriler için zeta fonksiyonları cinsinden hesaplama formülleri verildi.

5. KAYNAKLAR

Adamchik, V. 1997. On Stirling numbers and Euler sums. *J. Comput. Appl. Math.*, 79 (1): 119–130.

Apostol, T. M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory. New York, NY, USA: Springer-Verlag, .

Arakawa, T. and Kaneko, M. 2004. On multiple L-values. *J. Math. Soc. Japan*, 56 (4): 967–991.

Basu, A. 2011. On the evaluation of Tornheim sums and allied double sums. *Ramanujan J*, 26: 193–207.

Borwein, D., Borwein, J. M. and Girgensohn, R. 1995. Explicit evaluation of Euler sums. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 38 (2): 277–294.

Boyadzhiev, K. N. 2002. Consecutive evaluation of Euler sums. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 29 (9): 555–561.

Can, M. 2020. Reciprocity formulas for Hall-Wilson-Zagier type Hardy–Berndt sums. *https://arxiv.org/abs/2006.13323*.

Dil, A. and Boyadzhiev, K. N. 2015. Euler sums of hyperharmonic numbers. *J. Number Theory*, 147: 490–498.

Dil, A., Mezo, I. and Cenkci, M. 2017. Evaluation of Euler-like sums via Hurwitz zeta values. *Turkish J. Math*, 41: 1640–1655.

Espinosa, O. and Moll, V. H. 2006. The evaluation of Tornheim double sums, Part 1. *J. Number Theory*, 116: 200–229.

Euler, L. 1776. Meditationes circa singulare serierum genus. *Novi Comment. Acad. Sci. Petropolitanae*, 20: 140–186.

Huard, J. G., Williams, K. S. and Nan-Yue, Z. 1996. On Tornheim's double series. *Acta Arith.*, 75 (2): 105–117.

Li, Z. 2015. On functional relations for the alternating analogues of Tornheim's double zeta function. *Chin. Ann. Math.*, 36B (6): 907–918.

Matsumoto, K., Nakamura, T., Ochiai, H. and Tsumura, H. 2008. On value-relations, functional relations and singularities of Mordell-Tornheim and related triple zeta-functions. *Acta Arith.*, 132 (2): 99–125.

Mordell, L. J. 1958. On the evaluation of some multiple series. *J. London Math. Soc.*, 33: 368–371.

Nakamura, T. 2006. A functional relation for the Tornheim double zeta function. *Acta Arith.*, 125 (3): 257–263.

Nakamura, T. 2008. Double Lerch series and their functional relations. *Aequationes Math.*, 75 (3): 251–259.

Nielsen, N. 1965. Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Reprinted by Chelsea Publishing Company, Bronx, New York,

Sofo, A., 2018. General order Euler sums with multiple argument. *J. Number Theory*, 189: 255–271.

Subbarao, M. V. and Sitaramachandrarao, R. 1985. On some infinite series of L. J. Mordell and their analogues. *Pacific J. Math.*, 119: 245–255.

Tornheim, L. 1950. Harmonic double series. *Amer. J. Math.*, 72: 303–314.

Tsumura, H. 2002. On some combinatorial relations for Tornheim's double series. *Acta Arith.*, 105: 239–252.

Tsumura, H. 2003. On alternating analogues of Tornheim's double series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131: 3633–3641.

Tsumura, H. 2004a. On evaluation formulas for double L-values. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 70 (2): 213-221.

Tsumura, H. 2004b. Evaluation formulas for Tornheim's type of alternating double series. *Math. Comp.*, 73: 251–258.

Tsumura, H. 2007. On functional relations between the Mordell-Tornheim double zeta functions and the Riemann zeta function. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 142: 395–405.

Tsumura, H. 2009. On alternating analogues of Tornheim's double series II. *Ramanujan J.*, 18: 81–90.

Xu, C. 2017. Euler sums of generalized hyperharmonic numbers. *J. Korean Math. Soc.*, 55 (5): 1207–1220.

Xu, C. 2018. Computation and theory of Euler sums of generalized hyperharmonic numbers. *Comptes Rendus Mathematique*, 356 (3): 243–252.

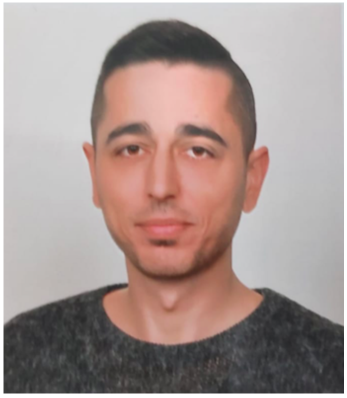
Xu, C. and Li, Z. 2017. Tornheim type series and nonlinear Euler sums. *J. Number Theory*, 174: 40–67.

Yang, J. and Wang, Y. 2017. Summation formulae in relation to Euler sums. *Integral Transforms and Special Functions*, 28 (5): 336–349.

Wang, W. Yanhong, L. 2018. Euler sums and Stirling sums. *J. Number Theory*, 185: 160–193.

Zhou, X., Cai, T. and Bradley, D. 2008. Signed q-Analogs of Tornheim's Double Series, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(8): 2689–2698.

ÖZGEÇMİŞ



Emre ÇAY

E-mail: emre.cay@hotmail.com.tr

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2017-2020	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2003-2010	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya