

**T.C.  
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER OLMAYAN ELASTİK ZEMİNE OTURAN TABAKALI KOMPOZİT  
PLAKLARIN LİNEER OLMAYAN STATİK ANALİZİ**

**Ali Kemal BALTACIOĞLU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI**

**2011**

**T.C.**  
**AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER OLMAYAN ELASTİK ZEMİNE OTURAN TABAKALI KOMPOZİT  
PLAKLARIN LİNEER OLMAYAN STATİK ANALİZİ**

**Ali Kemal BALTACIOĞLU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

Bu tez .../.../2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından(.....) not takdir edilerek Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. M. Hilmi ACAR .....  
Doç.Dr.Ömer CİVALEK (Danışman) .....  
Doç.Dr. Şükrü ÖZEN .....

## ÖZET

### LİNEER OLMAYAN ELASTİK ZEMİNE OTURAN TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN LİNEER OLMAYAN STATİK ANALİZİ

Ali Kemal BALTACIOĞLU

Yüksek lisans Tezi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı  
Danışman: Doç. Dr. Ömer CİVALEK  
Nisan 2011, 71 Sayfa

Bu tez çalışmasında, ayrık tekil konvolüsyon (ATK) kullanılarak elastik zemine oturan tabakalı kompozit plakların lineer olmayan statik analizi yapılmıştır. Winkler-Pasternak iki parametrelili zemin modeli kullanılmıştır. Winkler zemin için lineer olmayan parametre dikkate alınmıştır. Lineer olmayan deplasmanların üzerine pek çok parametrenin etkisi incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMLER: Lineer olmayan analiz, tabakalı kompozit plak, ayrık tekil konvolüsyon, statik analiz, lineer olmayan zemin modeli.

#### JÜRİ

Doç.Dr.Ömer CİVALEK (Danışman)

Prof.Dr. M. Hilmi ACAR

Doç.Dr. Şükrü ÖZEN

## **ABSTRACT**

### **NONLINEAR STATIC ANALYSIS OF LAMINATED COMPOSITE PLATES RESTING ON NONLINEAR ELASTIC FOUNDATIONS**

**Ali Kemal BALTACIOĞLU**

M.Sc. Thesis in Civil Engineering  
Adviser: Assoc. Prof. Ömer CİVALEK  
April 2011, 71 pages

In this thesis, nonlinear static analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations has been investigated by discrete singular convolution method. Winkler-Pasternak foundation model is used. Nonlinear parameter has been taken into consideration for Winkler model. The effects of many different parameters on nonlinear displacements are investigated.

**KEY WORDS:** Nonlinear analysis, laminated composite plate, discrete singular convolution, static analysis, nonlinear foundation model.

#### **COMMITTEE**

Assoc. Prof. Ömer CİVALEK (Advisor)

Prof.Dr. M. Hilmi ACAR

Assoc. Prof. Şükrü ÖZEN

## ÖNSÖZ

Elastik zemine oturan çeşitli geometrilerdeki kiriş, plak ve kabukların lineer ve lineer olmayan analizi geçen yüzyılın sonlarından beri araştırmacıların ve teorisyenlerin en fazla ilgisini çeken konulardan biri olmuştur. Elastik zemine oturan yapılar özellikle ikinci dünya savaşından sonra pek çok sektörde özellikle; füze ve roket rampaları olarak askeri alanlarda ve uçak-uzay sanayisinde, teknoloji de çeşitli uygulamalarda, inşaat ve makine mühendisliği alanında, endüstride çeşitli fabrika kren ve makinaların zemine sabitlenmesinde, diş hekimliği ve biyomekanikte, kıyı-liman yapılarında, sıvı ve gazların iletim hatlarında, temel ve zemin mühendisliğinde, nükleer enerji santrallerinde, uçak hangarlarında, özel amaçlı hava alanı inşasında ve demiryolu uygulamalarında karşılaşılır. Daha çok yüksek maliyet gerektiren büyük kapsamlı işlerde ve stratejik yapılarda kullanılan elastik zemine oturan plak ve kabukların her türlü dış etkiye karşı yeter güvenlikte inşası büyük önem kazanmaktadır. Bu çalışmada zemin modeli olarak lineer olmayan Winkler-Pasternak kullanılmış ve lineer olmayan analiz yapılmıştır. Bu çalışma süresince tezin oluşumuna yardım eden danışman hocam Doç. Dr. Ömer CİVALEK'e, yaptığı katkılardan dolayı Yrd. Doç.Dr. Hakan ERSOY'a, ve son olarak yüksek lisans çalışmam süresinde ve hayatımın her aşamasında bana maddi – manevi her türlü desteği veren aileme teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xi
1.GİRİŞ.....	1
2.KURAMSAL BİLGİLER.....	8
3.MATERYAL METOT.....	17
3.1 Diferansiyel Quadrature (DQ) Metodu.....	17
3.1.1 Kuvvet polinomları ile ağırlık matrislerinin hesabı.....	18
3.1.2 Düğüm grid noktalarının sayısı ve seçimi.....	22
3.2 Ayrık Tekil Konvolüsyon (ATK) Metodu.....	25
3.2.1 Shannon'un delta (RSD) kerneli.....	27
3.2.7 Sınır koşullar.....	32
4. ELASTİK ZEMİNE OTURAN TABAKALI PLAK PROBLEMİ.....	33
4.1. Yönetici denklemlerin çıkartılması.....	33
5. SAYISAL SONUÇLAR.....	47
5.1. Tabakalı Kompozit Plak.....	47
5.2. Elastik Zemine Oturan Tabakalı Kompozit Plak.....	56
6.SONUÇ VE TARTIŞMA.....	63
6.KAYNAKLAR.....	64
ÖZGEÇMİŞ	

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler:

$A_{ij}$	: Birinci dereceden türev için ağırlık katsayıları
$B_{ij}$	: İkinci dereceden türev için ağırlık katsayıları
$C_{ij}$	: Üçüncü dereceden türev için ağırlık katsayıları
$D_{ij}$	: Dördüncü dereceden türev için ağırlık katsayıları
$\psi(x)$	: Göz önüne alınan fonksiyon
$x_j$	: Değişken bölgesindeki ayırık noktalar
$F(x_j)$	: $x_j$ noktasındaki fonksiyon değeri
$F_x(x)$	: Fonksiyonun birinci türevi
$F_{xx}(x)$	: Fonksiyonun ikinci türevi
$x_j, y_j$	: $x, y$ doğrultusundaki düğüm noktaları
$\delta$	: Bitişik grid nokta dağılımı için alınan değer
$N_x, N_y$	: $x, y$ doğrultularındaki düğüm nokta sayısı
$u, v, w$	: sırasıyla $x, y$ ve $z$ doğrultusundaki deplasmanlar
$a, b$	: Plak için göz önüne alınan boyutlar
$\nu$	: Poisson oranı
$G$	: Kayma modülü
$E$	: Elastisite modülü
$q$	: Plağa etkiyen yayılı yük
$\delta_{\sigma, \Delta}$	: ATK kernel
$r$	: ATK parametresi
$h$	: band genişliği, plak kalınlığı
$K_1$	: Winkler zemin parametresi
$K_2$	: Lineer olmayan parametre (Winkler zemin)
$G$	: Pasternak zemin parametresi

Kısaltmalar:

ATK	Ayrık Tekil Konvolüsyon
TK	Tekil Konvolüsyon
DQ	Diferansiyel Quadrature
HDQ	Harmonik Diferansiyel Quadrature



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Winkler elastik zemine oturan üniform kiriş.....	10
Şekil 2.2. Winkler elastik zemine oturan dikdörtgen plak.....	10
Şekil 2.3. Winkler elastik zemine oturan çift eğrilikli basık kabuk (Civalek, 2004).....	11
Şekil 2.4. Uçak pisti (Elastik zemine oturan sürekli kiriş veya plak modeli).....	12
Şekil 2.5. Diş hekimliğinde elastik zemine oturan kiriş-modeli.....	13
Şekil 2.6. Biyomekanik (elastik zemine gömülü katı modellemesi).....	14
Şekil 2.7. Demiryolu uygulaması (elastik zemine oturan sürekli kiriş).....	14
Şekil 2.8. Elastik zemine oturan kabuk modelleri.....	15
Şekil 2.9. Elastik zemine oturan kiriş ve plak modelleri (MEMS uygulamaları; Atomik kuvvet mikroskobu, mikro çipler ve mikro plaklar).....	16
Şekil 3.1. Tek boyutlu sistem için tanımlanan grid (düğüm) noktaları.....	19
Şekil 3.2. İki boyutlu bölge için $\delta$ bitişik noktalı quadrature düğüm noktaları.....	24
Şekil 4.1. Lineer olmayan elastik zemine oturan tabakalı kompozit plak.....	35
Şekil 5. 2. CCSS tabakalı kare plak için (0/90/0/90) farklı düğüm nokta sayısına bağlı deplasman değeri ( $a/h=10$ ).....	51
Şekil 5. 3. Kullanılan iki farklı kernel için düğüm nokta sayısına bağlı hata değerleri (Dört kenarlı ankastre plak için lineer olmayan analiz ).....	52
Şekil 5.4. Dört kenarından ankastre tabakalı (0/90) plak için kalınlığa bağlı lineer olmayan deplasman değerleri ( $a/b=1$ ; Malzeme-III).....	53
Şekil 5.5. Dört kenarından ankastre tabakalı (0/90/0/90) plak için kenarlar oranına bağlı lineer olmayan yük-deplasman değeri ( $a/h=10$ ; Malzeme-II) .....	54
Şekil 5.6. Dört kenarından ankastre tabakalı (0/90/...) kare plak için katman sayısına bağlı yük-deplasman değeri ( $a/h=10$ ; Malzeme-II) .....	55
Şekil 5.7. Dört kenarından basit mesnetli tabakalı kompozit plağın farklı zemin parametreleri için yük-deplasman eğrisi (45/-45/45/-45; $a/h=10$ ).....	57
Şekil 5.8. Dört kenarından basit mesnetli tabakalı kompozit plağın (0/90/90/0) farklı kalınlık değerleri için deplasman değerleri( $K1=100$ ; $b/a=1.0$ ).....	58
Şekil 5.9. CSCS tabakalı kompozit plağın (0/90/90/0) farklı kalınlık değerleri için deplasman değerleri( $K1=100$ ; $b/a=1.0$ ).....	59

Şekil 5.10. Dört kenarından ankastre mesnetli tabakalı kompozit plağın (0/90/90/0) farklı kalınlık değerleri için deplasman değerleri( $K_1=100$ ; $b/a=1.0$ ).....	60
Şekil 5.11. Dört kenarından basit mesnetli tabakalı (0/90/90/0) plak için yük-deplasman ( $K_1=50$ ; $a/h=100$ ) eğrisi.....	61
Şekil 5.12. SCSC tabakalı(0/90/0/90) kare plak için farklı Winkler ( $K_2=100$ ; $a/h=10$ ; $Q=320$ ) ve Pasternak parametreleri için deplasman değerleri.....	62

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1. Dört kenarı basit mesnetli tabakalı kare plak (0/90/90/0) için deplasman değerinin karşılaştırılması (Malzeme-II).....	48
Çizelge 5. 2. Dört kenarında ankastre tutulmuş plak için üniform yük etkisindeki lineer olmayan deplasman değerleri .....	49
Çizelge 5. 3. Dört kenarından ankastre tutulmuş tabakalı plak için lineer olmayan deplasman değerleri (Malzeme-III).....	50
Çizelge 5. 4. Dört kenarından ankastre tutulmuş tabakalı plak için farklı tabaka ve açı durumu için lineer olmayan deplasman değerleri (Malzeme-III).....	50
Çizelge 5.5. dört kenarından ankastre tutulmuş tabakalı (0/90) plak için merkezi deplasman değeri(Malzeme-I; üniform yayılı yük).....	57

## 1.GİRİŞ

Yapı-zemin etkileşimini içeren mühendislik uygulamaları, yeni malzeme tiplerinin üretiminin mümkün olması ile sürekli gündemde olan bir araştırma alanıdır. Özellikle, katı- sıvı ve katı-zemin etkileşimini içeren problemler, uygulamada en fazla kullanılan model tipleridir.

Katı-zemin uygulamasının büyük çoğunluğunu oluşturan elastik zemine oturan çeşitli geometrilerdeki kiriş, plak ve kabukların lineer ve lineer olmayan analizi geçen yüzyılın son 40 yılında araştırmacıların ve teorisyenlerin en fazla ilgisini çeken konulardan biri olmuştur. Özellikle 1950' li yıllardan sonra uçak-uzay sanayindeki hızlı gelişmeler, savaş sonrasındaki sanayi hamleleri ve kompozitlerin sektörde kullanılması ile farklı tip ve amaçlar için geliştirilen yapılar ile birlikte elastik zemine oturan yapı türlerinde ve ihtiyaçlarında da bir artış olmuştur.

Bilindiği gibi, elastik zemine oturan plak ve kabuklar özellikle ikinci dünya savaşından sonra pek çok sektörde özellikle; füze ve roket rampaları olarak askeri alanlarda ve uçak-uzay sanayisinde, teknoloji de çeşitli uygulamalarda, inşaat ve makine mühendisliği alanında, endüstride çeşitli fabrika kren ve makinaların zemine sabitlenmesinde, diş hekimliği ve biyomekanikte, kıyı-liman yapılarında, sıvı ve gazların iletim hatlarında, temel ve zemin mühendisliğinde, nükleer enerji santrallerinde, uçak hangarlarında, özel amaçlı (özellikle ağır kargo uçakları ve süpersonik uçakların inebileceği) hava alanı inşasında ve demiryolu uygulamalarında karşılaşılır. Daha çok yüksek maliyet gerektiren büyük kapsamlı işlerde ve stratejik yapılarda kullanılan elastik zemine oturan plak ve kabukların her türlü dış etkiye karşı yeter güvenlikte inşası büyük önem kazanmaktadır. Dolayısı ile, gerek mevcut yükler ve kendi ağırlıkları altındaki gerilme, deformasyon, eğilme ve çeşitli noktalarındaki deplasmanlarının hesaplandığı statik hesap ve gerekse deprem gibi dinamik yükler altındaki dinamik analizleri yeter hassasiyete sahip olarak yapılmalıdır.

Geniş bir perspektiften bakınca, tarih boyunca toplumlar uygarlaşma ve refah düzeyine ulaşma hedefiyle her alanda olduğu gibi teknolojik ilerlemelerde kaydetmişler ve

böylece yeni ihtiyaçlar doğmuştur. Bu ihtiyaçların karşılanması amacıyla teorik ve pratik çalışmalar yürüten mühendisler de farklı teknikler üzerinde yoğunlaşmışlardır (Civalek ve Çatal 2004).

İhtiyaçların farklı alanlara kayması günümüz yapı mühendisliğinin büyük bir çoğunluğunu yüzeysel taşıyıcı sistemlere yöneltmiştir. Teknolojinin gelişmesine paralel olarak bu tür sistemlerin teşkil edilmesinin mümkün olması nedeniyle, günümüz yapı mühendisliği daha çok yüzeysel taşıyıcılar veya bu tür sistemlerden oluşan yapılarla ilgilenmektedir. Artık günümüzde kalın plak, kalın kabuk veya bunların birleşmesinden oluşan konstrüksiyonlar geniş uygulama alanı bulmaktadır.

Kalın bir plak veya kalın bir silindirik kabuğun gerilme analizi veya dinamik analizi önemli matematiksel güçlükler ortaya çıkarmaktadır. Örneğin kalın yapılar için dönel simetrik durumda bile günümüze kadar uygun bir kapalı çözüm bilinmemektedir. Kalınlığın, diğer boyutlar yanında ihmal edilemeyecek mertebede olan kemer barajlar, sığınak örtüsü tonozlar ve basınç odaları, nükleer enerji santralleri gibi yapılarda ince kabuk teorisi ile yapılan hesaplar mühendislik amaçları için yeterli olmamaktadır.

Yaygın olarak bilinmektedir ki, mühendislikte ve diğer uygulamalı bilimlerde karşılaşılan gerçek fiziksel sistemleri tanımlayacak matematik modeller büyük bir çoğunlukla adi veya kısmi türevli bir diferansiyel denklem olmaktadır. Analizi yapan mühendis; uygun sınır ve/veya başlangıç koşulları altında elde edilen bu türevsel denklemlerin çözümü ile ilgilenir. Kapalı matematik çözüm yani analitik çözüm çoğu uygulamalı bilim dalında ve mühendislik problemlerinde ulaşılmak istenen ideal çözümdür. Ancak analitik çözüm, problemlerin çeşitli karakteristikleri nedeniyle çoğu kez imkânsız olur. Bazen mevcut malzeme bileşenlerinin doğrusal olmayan bünye denklemleri, bazen problemin başlangıcında problemi gerçekleşmesi gereken başlangıç değerlerinin karmaşıklığı veya özdeş denklemlere götürmesi yâda temas yani dokunma (sıvı-yapı, zemin-yapı etkileşim problemlerinde olduğu gibi) problemlerinde olduğu gibi sınır koşullarının lineer olmaması gibi nedenlerle kapalı matematik çözüm imkânsız olup, tek çözüm sayısal yaklaşımdır. Mevcut bu sayısal çözümlerin biri birlerine ve problem tiplerine göre bazı üstünlükleri veya bazı olumsuzlukları olabilir. Yeter

doğrulukta çözümler elde etmek için günümüze kadar pek çok sayısal analiz yöntemi önerilmiştir. Özellikle 1960 yıllarından sonra bilgisayar teknolojisinde ortaya çıkan gelişmeler sayısal yaklaşım yöntemlerinin gelişmesine katkı sağlamıştır. Bunlar arasında; sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, Galerkin vb. yöntemler genel olarak bilinen ve kullanılan metotlardır.

Genel olarak sayısal yaklaşım yöntemleri zaman veya uzay bölgesinin belirli aralıklara bölünerek çözüme birkaç adımda ulaşmayı veya çoğu durumda ardışık iterasyon çözümlerini gerektirir. Bu nedenle geliştirilen sayısal yöntemler; gerektirdikleri hesaplayıcı ihtiyacı, çözüm için harcana zaman veya CPU(Merkezi işlem birimi) süresi, denklemlerin stabilitesi, kullanılan grid (düğüm) noktası sayısı, problem çözümü için ön işlemler ve en önemlisi bu çözüm için harcanan para yani ekonomi gibi kıstaslar açısından çeşitli avantajlara veya dezavantajlara sahip olur. Esas olan tabiidir ki; daha kısa sürede daha hassas sonuçlar elde etmektir. Daha hassas sonuçların daha az sayıda düğüm noktası kullanılarak elde edilebilmesi ve böylelikle daha az bilgisayar ihtiyacı, sonuçların daha kısa sürede elde edilebilmesi yani daha ekonomik çözümler elde edilebilme imkânının araştırılması çalışmaları yeni yöntemlerin geliştirilmesine yol açmıştır.

Mühendislik sistemlerini analizi, çözülecek sistemi tanımlayan matematik modelin oluşturulması ve sistemi tanımlayan matematik denklemlerin analitik ya da çeşitli sayısal yaklaşımlarla çözülmesi olarak iki ana aşamada gerçekleşir. Birinci aşama tecrübe, farklı boyutta modelleme yeteneği ve ilgili matematik altyapısı; ikinci aşama ise güvenilir, hızlı ve gelişmiş bir hesaplayıcıyı gerektirir (Civalek 2004).

Oluşturulan sayısal modelin, ana modele göre güvenilirliği; sayısal modelin belirli koşullar altındaki çözümüyle elde edilen sonuçların; aynı koşullar altında gerçekleşen fiziksel olayın sonuçları ile uyumluluğuna bağlıdır. Modellerin büyük çoğunluğu sınır değer formundaki diferansiyel denklemlerdir (Civalek 2004). Bu denklemler varyasyon problemleriyle fiziksel modele en uygun şekilde uyarlanabilir. Varyasyonel problemler sınır değer problemlerinde göre daha geniş kullanım alanlarına sahiptir. Bunun en önemli nedeni modelin giriş verileri üzerindeki süreklilik ve türevlenebilirlik

koşullarının varyasyonel problemlerde daha uygulanabilir oluşudur. Matematik modelleme işleminin sonraki aşaması problemin ayrık model olarak kullanılacak hesap yöntemine tanıtılmasıdır. Günümüzde, diferansiyel denklemlerle ilgili matematik modellerin ayrık benzeşiklerinin oluşturulması ve elde edilen ayrık problemin bilgisayarda çözümlenmesi açısından en kapsamlı ve bilinen yöntem sonlu elemanlar yöntemidir (Civalek ve Çatal 2004). Bu yöntem klasik sonlu farklar yönteminden daha farklı bir yapıya sahip olup, en önemli ayırt edici özelliği sonlu farklar yöntemi sınır değer problemini esas alırken, sonlu elemanlar yöntemi varyasyonel problemi esas alır.

Mühendislik problemlerini “sürekli ve süreksiz ortam problemleri” olarak iki ana başlık altında sınıflandırabiliriz. Serbestlik derecesi sonsuz büyük olan sürekli ortam problemlerinin çözümü bir diferansiyel veya integral denklem sisteminin çözümünü gerektirdiği halde; serbestlik derecesi sonlu olan süreksiz ortam problemlerinin çözümü lineer denklem takımının çözümüyle elde edilebilmektedir (Civalek ve Çatal 2004). Sürekli ortam problemlerinin çözümünde denklem sisteminin oluşturulması aşamasında çeşitli matematiksel güçlüklerle karşılaşılabilir. Bununla birlikte süreksiz ortam problemlerinin çözümünde hesaplayıcı kapasitesi ve hesap süresi değişkenlik gösterir.

Bunlardan başka mühendislik problemleri evrensel bir yaklaşımla; kararlı durum problemlerini içeren denge problemleri, kararlı durum problemlerindeki bazı parametrelerin kritik değerlerinin bulunmasını gerektiren özdeğer problemleri ve başlangıç değer formundaki problemleri içeren propagasyon problemleri olarak üç temel gruba da ayırmak mümkündür (Crandall 1968). Bu tarz bir sınıflandırmada da elde edilen denklem; kapalı yada açık sınır ve/veya başlangıç değerine sahip kısmi veya adi türevli bir diferansiyel denklem yada lineer bir denklem takımı olarak elde edilir (Civalek ve Çatal 2004).

Lineer bir diferansiyel denklem takımını sağlayan fonksiyonların bir bölgedeki değerleri tayin edilirken, bazı matematik güçlüklerle karşılaşılır (Civalek 2004). Bu zorlukları aşabilmek için öncelikle diferansiyel denklem takımını sağlayan fonksiyonların belirli uzunluktaki değerleri hesaplanır. Bu değerler ışığında belirsiz uzunluktaki diğer istenen değerlere ulaşılabilir. Bu yöntemle “sürekli” bir ortam

yerine, cebirsel denklem takımıyla çözümü mümkün olabilen “ayrık” bir ortam kullanılmış olur. Hızlı yüksek kapasiteli hesaplayıcıların gelişmesi ve kullanımının yaygınlaşması nedeniyle sürekli ortam yerine süreksiz ortam modeli üzerinden işlem yapmaya elverişli yöntemler artmıştır. Sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanlar bu yöntemler içerisinde en yaygın kullanılanları olarak göze çarpmaktadır. Karakteristik büyüklüklerin ortam içerisinde değişmesini ifade edebilmesi ve karmaşık sınır şartlarının çözüme katılabilmesine olanak vermesi bakımından sonlu elemanlar daha yaygındır (Civalek ve Çatal 2004).

Matematik model oluşturulurken genellikle çözümü istenen sistemi ifade eden “integral denklem” ya da “diferansiyel denklem” kümelerinden oluşur. Karmaşık sınır koşullarından dolayı ulaşılan kısmi ya da adi türevli diferansiyel denklem kümesinin analitik çözümü oldukça zordur. Bu durumda çeşitli uygulanabilir analiz teknikleri ortaya kullanılır. Denklemlerin matris formda ifade edilebilmesi ve bu şekilde çözülebilmesi gelişen teknolojiye paralel olarak bilgisayar tekniğinin de gelişmesiyle birlikte sayısal analiz yöntemlerine büyük katkı sağlamış; dolayısıyla analizlerin daha pratik ve güvenilir olmaları yönünde ilerlemelerine neden olmuştur. Sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, varyasyonel (değişim) hesap, Rayleigh-Ritz günümüzde en etkin kullanılan yaklaşık analiz yöntemleri olarak göze çarpmaktadır. Çoğu sayısal hesap yönteminde sürekli denge problemi sonlu sayıda serbestlik dereceli bir sisteme indirgenerek çözüme ulaşılır (Crandall 1968).

Gerek lineer ve gerekse lineer olmayan sistemlerin analizinde sayısal hesap yöntemleri geniş bir kullanım sahası bulmuştur. Bununla birlikte lineer olmayan sistemlerin analizinde ya çözümü basitleştirici bazı kabuller yaparak çeşitli parametreler ihmal edilmekte veya doğrudan lineer kabul ile çözümlere ulaşılmaktadır. (Civalek ve Çatal, 2004). Sistemlerin lineer davranıştan uzaklaştıkça lineer kabulün hesap sonuçlarına getireceği hata oranının artacağı kaçınılmaz bir gerçektir.

Yukarıda bahsedilen sayısal çözüm yöntemleri kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümü için kullanılmış olup, günümüzde farklı alanlardaki birçok problemin (titreşim,



stabilite, akışkanlar mekaniği, sürekli ortam mekaniği, sıvı veya termal etkiler maruz yapıların analizi) çözümünde başarıyla uygulanmıştır.

Sonlu elemanlar ve sonlu farklar metodunda düğüm noktalarının artması daha hassas sonuçlara ulaşılmasını sağlar. Ayrıca yüksek hassasiyet için düğüm noktalarının artırılması; çözümde faydalanılacak bilgisayar kapasitesini ve çözüm süresini de paralel olarak arttıracaktır. Fakat pek çok problemde tutarlı ve gerçek değerine yakın sonuçlara ulaşabilmek birkaç özel düğüm noktasında mümkün olabilmektedir.

Bilgisayarın günümüzde daha da efektif kullanılmasıyla birlikte denklemlerin matrislerle ifade edilebilmesi ve bilgisayar ortamına eskiye göre daha kolay aktarılması sonucunda kullanılan hesap yöntemleri sayısal analiz lehine gelişmeler göstermiştir. Hesap tekniklerindeki bu gelişmeler nedeniyle lineer kabul yerine parça parça lineerleştirerek adım adım hesaplama, ardışık yaklaşım veya bu tür sistemlerde süperpozisyon metodu geçerli olmadığından ardışık yük artım metotları gibi lineer olmayan sayısal analiz yöntemleri çok yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır

Sonlu elemanlar ve sonlu farklar metotları ardışık yük artım metotları içerisinde kullanım alanı diğer analiz tekniklerine göre en yaygın olanlarıdır. Sonlu elemanlar metodu kullanılarak çözüm yapılacaksa yaklaşık bir fonksiyon seçilerek çözüme başlanır. Ancak sonlu elemanlar metodunda seçilen enterpolasyon fonksiyonları lokal düzeyde olup elemanlar için geçerlidir (Aköz 1987). Sonlu elemanlar metodunda istenilen hassasiyette ve daha tutarlı sonuçlar elde edebilmek için çözüm bölgesini birden fazla elemana ayırmak mümkündür. Özellikle plak veya kabuk elemanların hassas çözümleri ancak yüksek sayıda elemana bölünerek sağlanır (Civalek 1998). Çözüm bölgesinin çok sayıda elemana ayrılmasıyla sonuçlara ulaşılması aynı zamanda gerekli olan hesaplayıcı kapasitesini ve zamanı arttıracaktır. Ayrıca istenilen hassasiyetteki yani gerçek değerine en yakın sonuçlar mühendislik problemlerinde genellikle bir veya birkaç özel noktada istenir.

Daha az grid nokta sayısı kullanılarak yeter hassasiyette sonuçlar verebilecek bir metot olan Diferansiyel Quadrature Metodu (DQM) Richard Bellman tarafından geliştirilerek lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümüne uygulanmıştır (Belmann ve Casti 1971). Diferansiyel quadrature metodu; koordinat doğrultusuna göre bir fonksiyonun türevi, çepeçevre saran bir çözüm bölgesindeki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşım kurabilen sürekli bir fonksiyon ve o doğrultu boyunca bütün ağ noktalarındaki) fonksiyon değerlerinin tümünün lineer toplamı olarak ifade edilebileceği prensibine dayanır (Civalek ve Çatal 2004).

Diferansiyel Quadrature metodu ile Sonlu Elemanlar metodu arasında gerek yaklaşım ve gerekse uygulama açısından çeşitli farklılıklar mevcuttur. Buna göre DQ metodu genel çerçeveli yani global bir yaklaşım metodu olup yüksek dereceden polinomlar kullanılır, sonlu elemanlar metodunda ise fonksiyonlar düşük dereceden olup sadece eleman bazında yani lokal düzeydedir. Bunun yanında DQ metodu herhangi bir noktadaki fonksiyonun türevine direk yaklaşım getirir, sonlu elemanlar metodunda yaklaşım lokal elemanlar üzerinde olup, türev ifadeler yaklaşım metodundan elde edilir.

Diferansiyel quadrature metodu daha çok sonlu farklar ile benzerlik gösterir. Sonlu farklar metodu düşük dereceden polinom yaklaşımları üzerine kurulan lokal bir yaklaşım metodudur (Civalek ve Çatal 2004). Buna göre DQ metodu çözüme polinom fonksiyonlar yardımıyla ulaşırken, sonlu farklar metodu seri yaklaşımlar ile sonuca gider.

Diferansiyel Quadrature metodunda oluşturulan matris formlar “band matris” olup simetrik yapıya sahip değildir. Bununla beraber bu metotta lineer denklem takımı oluşturmak için benzer sayısal yaklaşım metotlarında olduğu gibi mevcut türev denklemleri, çözüm bölgesinde önceden seçilen düğüm noktalarındaki bilinmeyen fonksiyon değerleri cinsinden ifade edilir ve ilgili sınır şartları DQ metoduna uygun biçimde ifade edilir. Sınır şartlarının farklı formlarda (Dirichlet ve/veya Neuman yada karışık) olması çözümde herhangi bir sorun teşkil etmez.

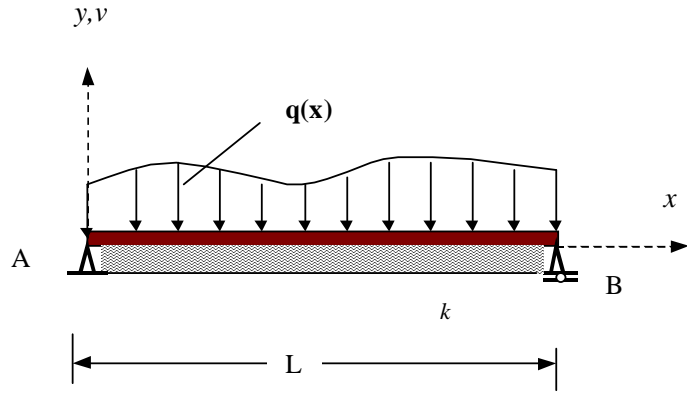
## 2. KURAMSAL BİLGİLER

Mühendislik uygulamalarında katı-sıvı veya katı-zemin etkileşimi büyük bir uygulama alanına sahiptir. Günümüze kadar zemin ve yapı modelleri ile ilgili pek çok kabul ve hesap yöntemi geliştirilmiştir. Çeşitli özellikteki zeminler ile temas halinde olan mühendislik yapılarının hesapları günümüzde de önemini korumaktadır. Bu çalışmalarda çeşitli tiplerde zemin modelleri kullanıldığı gibi, kullanılan analiz yöntemleri de çeşitli olabilmektedir. Bu tez kapsamında; elastik zeminler ile temas halinde olan tabakalı plak yapıların lineer olmayan analizleri incelenmiş, bu analizlerde zemin modeli olarak lineer ve lineer olmayan iki parametrelili (Winkler-Pasternak) zemin modeli kullanılmıştır. Temel denklemlerin çıkartılması çok fazla irdelenmemiş ve literatürdeki mevcut plak teorilerinden faydalanılmıştır.

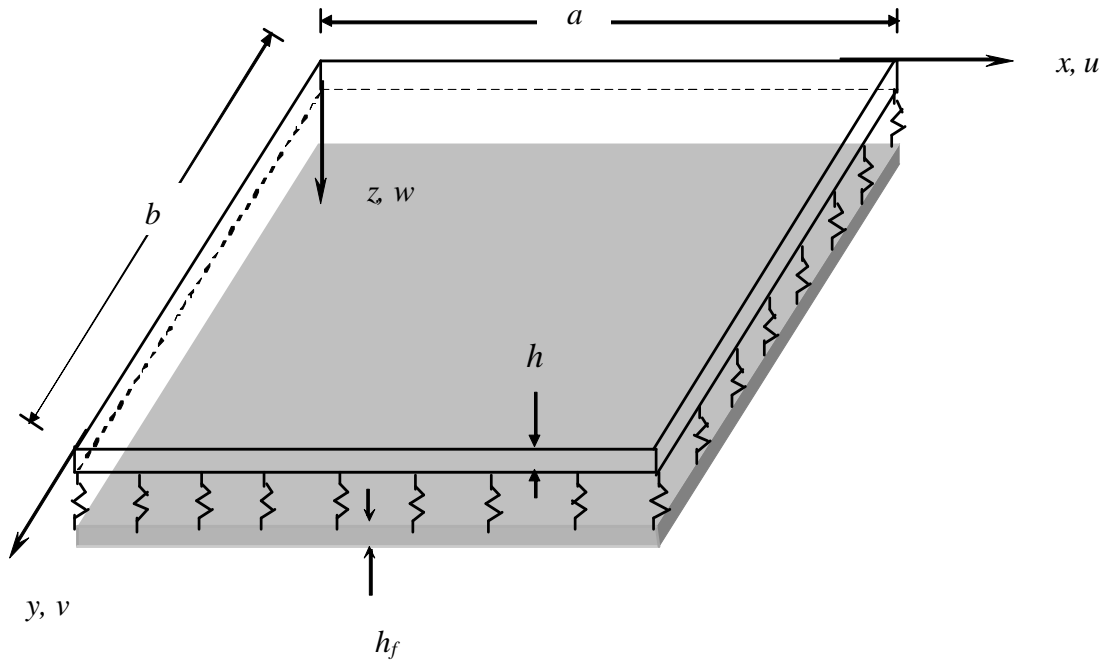
Elastik zemine oturan yapılar veya daha teknik ifadesi ile katı-zemin etkileşimi problemi bilimde ve mühendislikte pek çok uygulaması olan bir çalışma alanıdır. Disiplinler arası çalışmayı gerektiren bu alan aşağıdaki çalışma alanlarında ve problem tiplerinde sıkça karşılaşılır:

- İnşaat Mühendisliği uygulamaları (Demiryolu raylarının modellenmesi, iletim hatları, yapı temelleri vb., sönümlü sistemler)
- Makine mühendisliği alanına (Makine temelleri, yatak ve rulman sistemler)
- Biyomekanik (Kafatası modelleri, diş hekimliği ve bazı hücre modelleri)
- Elektronik ve bilgisayar mühendisliği uygulamaları (mikro elektro mekanik sistemler, mikro plaklar, mikro devre tasarımı, aktüator vb.)
- Malzeme ve nano teknoloji ( karbon nanotüplerin mekanik modelleri, atomik kuvvet mikroskobu vb.)

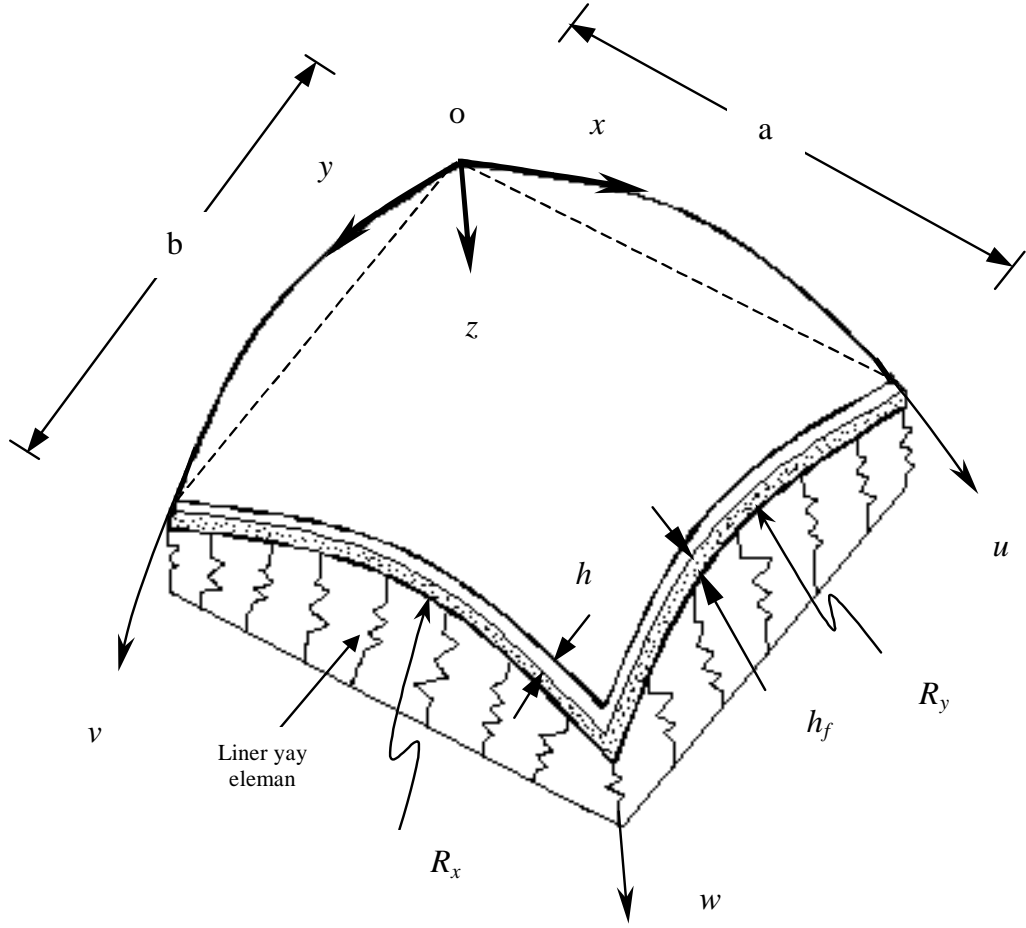
- Petro-Kimya endüstrisi ve gaz iletim boruları
- Uçak-Uzay sanayi (Havaalanı pistleri, roket ve füze rampaları vb.)



Şekil 2.1. Winkler elastik zemine oturan üniform kiriş



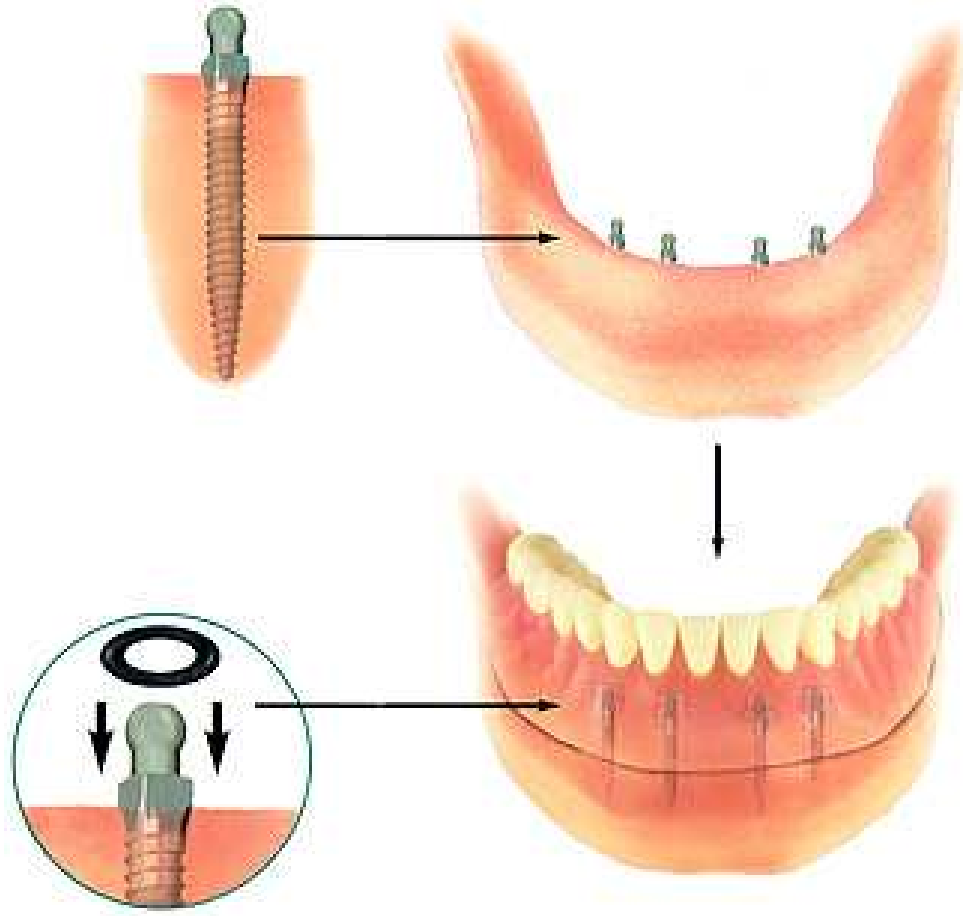
Şekil 2.2. Winkler elastik zemine oturan dikdörtgen plak



Şekil 2.3. Winkler elastik zemine oturan çift eğrilikli basık kabuk (Civalek, 2004)

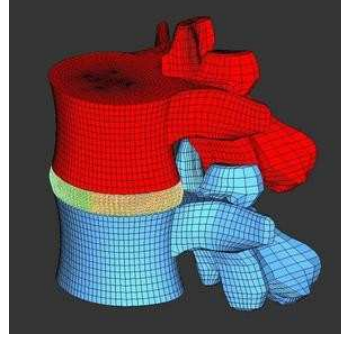
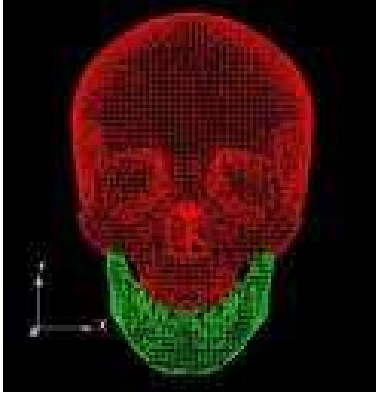


Şekil 2.4. Uçak pisti (Elastik zemine oturan sürekli kiriş veya plak modeli)



Şekil 2.5. Diş hekimliğinde elastik zemine oturan kiriş-modeli





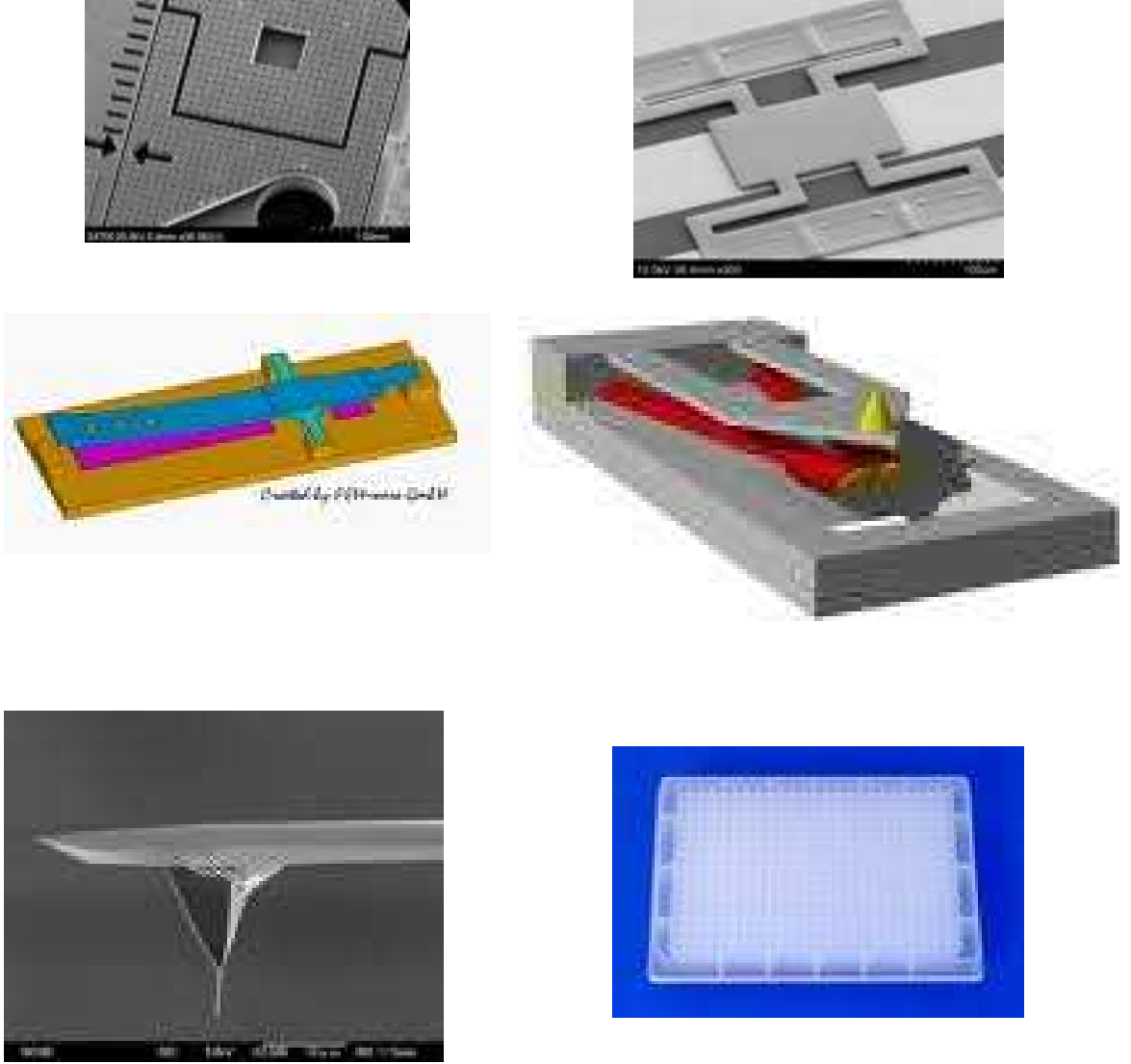
Şekil 2.6. Biyomekanik (elastik zemine gömülü katı modellemesi)



Şekil 2.7. Demiryolu uygulaması (elastik zemine oturan sürekli kiriş)



Şekil 2.8. Elastik zemine oturan kabuk modelleri



Şekil 2.9. Elastik zemine oturan kiriş ve plak modelleri  
(MEMS uygulamaları; Atomik kuvvet mikroskobu, mikro çipler ve mikro plaklar)

### 3. MATERYAL METOD

Bu tez kapsamında modellenen sisteme ait mevcut problemi çözmek için diferansiyel quadrature ve ayırık tekil konvolüsyon yöntemleri kullanılmıştır. Her iki yöntemde sürekli bir sisteme ait türev denklemi ayırıklaştırarak çözüme ulaşır. Bu bölümde bu iki yöntem temel olarak tanıtılacaktır. Bu bölümün yazılmasında Civalek (2004) ve Gürses, (2008) tarafından yapılan çalışmalardan büyük ölçüde yararlanılmıştır, bazı kısımlar aynen alınmıştır ve atıf yapılmıştır.

#### 3.1 Diferansiyel Quadrature (DQ) Metodu

Diferansiyel quadrature yönteminin pek çok kişi tarafından kabul görmüş tanımı hemen her yayında mevcuttur. Metodun tanımı genel olarak şöyle yapılabilir (Civalek 2004): herhangi bir fonksiyonun verilen bir ayırık noktadaki bir uzay değişkenine göre kısmi türevi, o değişken bölgesinin bütün ayırık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı bir lineer toplamı ile ifade edilir, şeklinde tanımlanan düşünceye dayanır (Belmann vd 1972). Az sayıda grid kullanarak güvenilir nitelikteki sonuçlara ulaşmayı hedefleyen DQ metodu; fizik ve mühendislikte karşılaşılan başlangıç değer ve sınır değer problemlerini farklı bir bakış açısından ele alabilen bir yöntem olarak göze çarpmaktadır. Buna göre tek boyutlu bir  $f(x)$  fonksiyonun birinci türevini  $x_i (i=1,2,\dots,N)$  noktalarında  $N$  ayırık nokta için göz önüne alırsak  $i$ .nci ayırık nokta için birinci türev ;

$$f_x(x_i) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} f(x_j) \quad ; \quad i = 1,2,\dots,N \quad (3.1)$$

olacaktır. Yukarıdaki ifadeye göre eşitlikteki değerler:

- $(x_j)$  = Değişken bölgesindeki ayırık noktaları
- $(u(x_j))$  = Ayırık noktalardaki fonksiyon değerlerini

$(A_{ij})$  = Birinci dereceden türev için bu değerleri fonksiyon değerlerine bağlayan ağırlık katsayıları olarak adlandırılır.

Ağırlık katsayılarının hesabı, karşılık gelen koordinat yönlerinde “test fonksiyonu” yada “yaklaşım fonksiyonu” olarak ta bilinen fonksiyonel yaklaşımlar ile gerçekleştirilir ve hesap için belirtilen fonksiyonlarda, sonlu elamanlar yöntemindeki enterpolasyon fonksiyonlarında da olduğu gibi, “süreklilik şartı” gözetilir. Ancak DQ metodunda “sınır şartı” nı sağlaması zorunlu değildir. Yaklaşım fonksiyonları, alan değişkenlerinin olası kararlı yani üniform durumlarını ifade edebilmeli ve fonksiyonların diferansiyel denklemden yâda sınır şartlarındaki mümkün olabilecek en yüksek mertebedeki diferansiyele kadar türevinin alınabilmesi gerekir. Yani süreklilik şartı için, bir koordinat yönündeki düğüm sayısı, diferansiyel denklemden karşılık gelen bağımsız değişkene göre en yüksek dereceli türevin bir fazlasına eşit olmalıdır (Civalek 2004).

Bellman ve arkadaşları tarafından ağırlık katsayılarının hesaplanması için üç metot önerilmiştir: Ağırlık katsayılarının hesaplanmasında kuvvet polinomları ve Legendre polinomlarının kullanılması bilinen ilk yöntemdir ve  $N \leq 20$  olduğu durumda kuvvet polinomları uygun olup diğer durumlarda Legendre polinomları kullanılır.

### 3.1.1. Kuvvet Polinomları ile Ağırlık Matrislerinin hesabı

Denklem (3.1) tam olarak alındığında, test fonksiyonu olarak  $(N-1)$  veya daha küçük dereceden seçilen polinom fonksiyonu için;

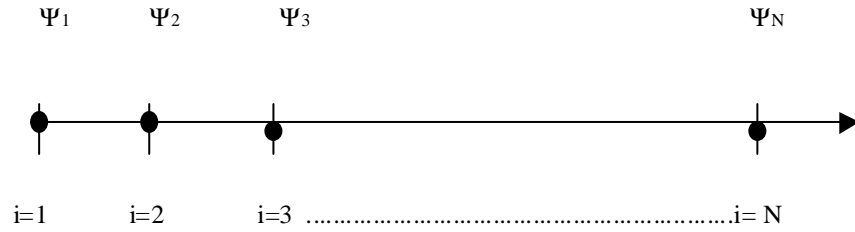
$$f_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

verilen denklem (3.1)'de yerine yazılırsa aşağıda belirtildiği formda bir lineer denklem takımı verir

$$(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j^{k-1} \quad (3.3)$$

$i = 1, 2, \dots, N$  ve  $k = 1, 2, \dots, N$  için

Yukarıda ifade edilen denklem sisteminin tekil bir çözümü vardır çünkü katsayılar matrisinin determinanı Vandermonde formundadır. Denklem ağırlık katsayıları için analitik olarak Hamming'in önerdiği metotla (Hamming 1973) yada Vandermonde denklemleri için Bjorck ve Pareyra'nın önerdiği gibi bilinen bazı özel algoritmalar ile sayısal olarak (Bjorck ve Pareyra 1970) çözülebilir. Bu tekilliği gidermek için, ağırlık katsayıları, değişik grid nokta sayıları ile (3.3) denklemi eşit grid değerleri için hesaplanmalıdır (Civalek 2004).



Şekil 3.1. Tek boyutlu sistem için tanımlanan grid (düğüm) noktaları

Denklem (3.3) matris formda aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\left\{ \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \right\}_i = [A_{ij}] \left\{ \Psi(x) \right\}_j \quad (3.4)$$

Benzer işlemler iki ve daha fazla derecen türev ifadeleri için de uygulanarak, her bir dereceden türev için farklı ağırlık ifadeleri elde edilir. Buna göre ikinci dereceden türev için metot:

$$\psi_{xx}(x_i) = \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N B_{ij} \psi(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

$(B_{ij})$  = İkinci dereceden türev için ağırlık katsayısı

olarak ifade edilir. Denklem (3.5) birinci dereceden ağırlık katsayıları cinsinden:

$$\Psi_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{jk} \Psi(x_k) ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

Denklem (3.2) ile verilen polinom fonksiyon uygulanarak ikinci dereceden türev ifadesi:

$$(k-1)(k-2)x_i^{k-3} = \sum_{j=1}^N B_{ij} x_j^{k-1} \quad (3.7)$$

eşitliği olarak bulunmuştur.

İkinci dereceden türev ifadesi denklem (3.3) teki yaklaşımla çözümlerse ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden ağırlık katsayıları ( $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ) aşağıdaki formda hesaplanır.

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj} \quad (3.8)$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} \quad (3.9)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} C_{kj} \quad (3.10)$$

Örnek noktaların sayısı hesap performansını geliştirmek açısından önemlidir, buna karşın ağırlık katsayılarının hesabında önemli değildir. Nokta aralıklarının eşit olması gerek işlemlerin basit ve kolay uygulanabilmesine ve daha hassas sonuçlara ulaşılabilmesine olanak sağlar. Düğüm noktalarının seçiminde sıkça kullanılan ve önerilen metot her iki doğrultuda yani her bir koordinat yönünde (tek boyutlu problemler için bir yönde) eşit aralıklı seçilen

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-1}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (3.11)$$

$$y_j = \frac{j-1}{N_y-1}; \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (3.12)$$

olarak verilir.

Bazı durumlarda eşit aralıklı olmayan noktaların seçiminin daha iyi sonuç verdiği bilinmektedir. Yine iki boyutlu problemler için eşit olmayan grid noktaları Chebyshev-Gauss-Lobatto noktaları için:

$$x_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (3.13)$$

$$y_j = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{j-1}{N_y-1} \pi \right) \right], \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (3.14)$$

şekkinde seçilir. Bununla birlikte diferansiyel quadrature çözümlerinde farklı koordinat yönlerindeki grid noktaları sayısı ve tipi bakımından farklı seçilebileceği gibi, farklı koordinat yönlerinde farklı test fonksiyonları da seçilebilir (Civalek 2004).

### 3.1.2. Düğüm grid noktalarının sayısı ve seçimi

Diferansiyel quadrature metodunda çözümün hassasiyeti bazı problem türlerinde sınır koşullarına bağlı olsa da (sınır değer problemlerinde) genelde bu hassasiyet düğüm



(grid) noktalarının seçimine ve sayısına bağlıdır. Düğüm noktaları sonlu farklar metodunda teşkil edilen şebeke (network) seçimi, veya sonlu elemanlar metodunda seçilen sonlu eleman ağ tipi ile hemen hemen benzerdir. Bu benzerlik yapısal bir benzerlik olmayıp fiziksel sistemi temsil eden matematik model için çözümün bulunacağı temel noktalar bazındadır. Daha önce yapılan çalışmalarda gösterilmiştir ki; lineer türden denklemler ve homojen sınır koşullarına sahip problemlerde eşit aralıklı seçilen düğüm noktaları çözüm hassasiyeti açısından yeterlidir.

Bazı durumlarda ise örnek noktaların sayısı verilen bağıntıların performansında yani ağırlık katsayılarının hesabında etkili değildir. Hesap performansını geliştirmek açısından önemlidir. Bundan başka, bazı durumlarda bu noktalar çözümün doğruluğunu etkileyebilmektedir. Örneğin eşit aralıklı noktalar ile işlem kısmen daha kolay ve uygulaması daha basittir, ancak eşit olmayan nokta aralığı için az da olsa sonuçların hassaslığı bazı tür problemlerde azalıp bazılarında artar. Grid noktalarının seçimi ile ilgili ayrıntılı bilgi Striz ve arkadaşları , Bert ve Malik, Jang ve arkadaşları ve Du ve arkadaşları'nın çalışmalarında bulunabilir.

Düğüm noktalarının seçiminde sıkça kullanılan ve önerilen metotlar bu kısımda sırasıyla takdim edilecektir:

a) Her doğrultuda yani her bir koordinat yönünde (tek boyutlu problemler için bir yönde) eşit aralıklı seçilen grid dağılımı.

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-1} ; y_j = \frac{j-1}{N_y-1} \quad (3.15a,3.15b)$$

$$i = 1,2,\dots,N_x; \quad j = 1,2,\dots,N_y;$$

olarak verilir.

b) Sınıra yakın noktalar için yani bitişik noktalar için bilinen çok küçük değerler atanarak işlem yapılabilir. Örneğin eşit ve eşit olmayan aralıklı  $\delta$  bitişik (adjacent) noktalı örnekleme modeli aşağıda tanımlanmıştır.

i) eşit aralıklı bitişik- $\delta$  nokta dağılımı

$$x_1=0, \quad x_2=\delta, \quad x_{i-1}=1-\delta \quad \text{ve} \quad x_i=1 \quad (3.16a)$$

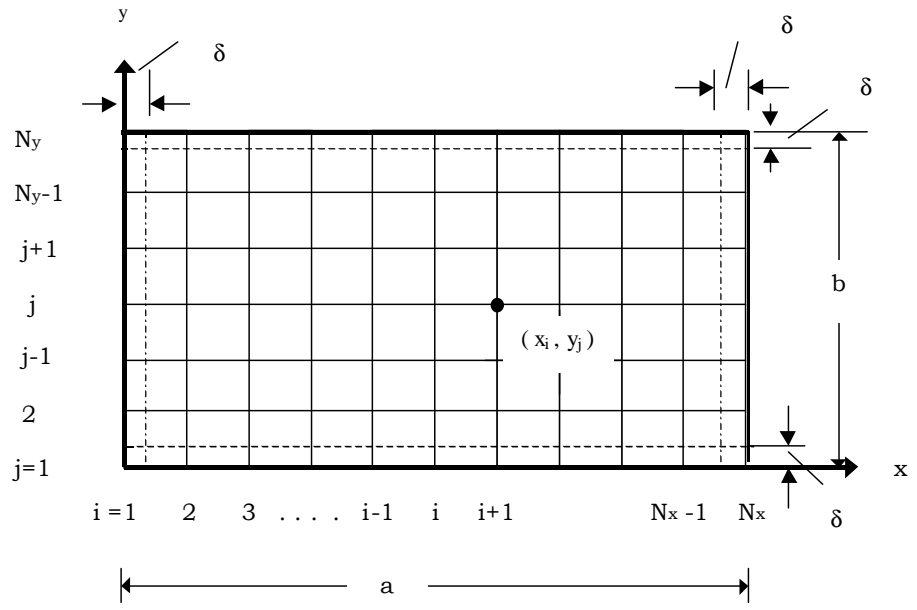
$$y_1=0, \quad y_2=\delta, \quad y_{j-1}=1-\delta \quad \text{ve} \quad y_j=1 \quad (3.16b)$$

olmak üzere diğer noktalar için yani sınıra yakın olmayan noktalar için

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-3}; \quad y_j = \frac{j-1}{N_y-3} \quad (3.17a, 3.17b)$$

$$i = 3, 4, \dots, (N_x-2); \quad j = 3, 4, \dots, (N_y-2)$$

şeklinde olur. Burada  $\delta$  değeri çok küçük bir değer olup sınırın hemen bitişik komşuluğundadır. Pek çok uygulamada genel olarak  $\delta \approx 10^{-5}$  alınır. Bu teknik giriş ve plak problemlerinde ankastre mesnet ve basit mesnet gibi çift sınır koşulu olan uygulamalarda iyi sonuç verir. Yani her bir mesnette iki sınır koşulu olup toplam dört denklem elde edilir. Bu sınır koşullarının esas yönetici denklem ile dikkate alınması sırasında teknik uygundur. Örnek olarak plağın iki boyutu için bu tarz gösterim Şekil 3.2'de verilmiştir.



Şekil 3.2. İki boyutlu bölge için  $\delta$  bitişik noktalı quadrature düğüm noktaları

### 3.2. AYRIK TEKİL KONVOLÜSYON (ATK) METODU

Ayrık tekil konvolüsyon (ATK) yöntemi ilk olarak Wei (1999) tarafından ortaya atılmıştır. Wei'nin de belirttiği gibi (Wei 2000) çeşitli fen bilimleri ve mühendislik problemlerinde görülen tekil konvolüsyonlar (TK), Hilbert, Abel and Radon dönüşümleri gibi, matematik dönüşümlerinin özel bir sınıfını oluşturur. Gerçekte çoğu pratik uygulamada bu dönüşümlerin kullanılması gerekir. Mesela son bir kaç yılda gelişme gösteren matematiğin yeni dalı Wavelet (dalgacık) bu metodun esasını teşkil eder (Wei 2002).

Wei ve arkadaşları Ayrık Tekil Konvolüsyon algoritmasını ilk olarak katı ve akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümünde uyguladı (Wei 2001, Zhao 2002). ATK algoritmasını kullanarak yüksek frekanslı titreşime sahip plakları ve düzensiz iç destekli plak titreşimlerini analiz etti. Yakın zamanda, Ayrık Tekil Konvolüsyon algoritmasının ve Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature yönteminin dikdörtgen plakların titreşim hesabında karşılaştırılması Ng ve diğerleri tarafından (Ng vd 2004), tabakalı konik kabukların ve elastik temel üzerindeki plakların serbest titreşimlerinin sayısal çözümleri ise Civalek (Civalek 2006) tarafından sunulmuştur. Bu çalışmalar ATK algoritmasının özellikle dikdörtgen plakların yüksek frekanslı titreşimleri olmak üzere plakların titreşim analizinde son derece işe yaradığını açıkça belirtmektedir. Bundan başka, ATK algoritmasının mekanikte uygulanan türevsel eşitliklerin çözümünde esneklik sağlayan evrensel yöntemlere sahip olduğu ortaya çıkmaktadır. Yakınlarda, ATK-Ritz yöntemiyle Mindlin plaklar and kalın basık kabukların serbest titreşim analizi Hou ve diğerleri (2005) ve Lim ve diğerleri (2005) tarafından sunulmuştur.

Diğer sayısal yöntemlerde olduğu ayırık tekil konvolüsyon yöntemi (ATK) de mevcut bir türev denklemi yani sürekli bir sisteme ait denklemi yaklaşım veya test fonksiyonu (sonlu elemanlarda şekil fonksiyonu) olarak kerneller kullanarak ayrıştırır. Kernel olarak Shannon kernel, Shannon delta kernel, Dirichlet kernel, de la Vallee kernel vb. kullanılır. Eşitlikteki  $T$  and  $\eta(t)$  test fonksiyonundaki elaman değerleridir.

Tekil konvolisyon

$$F(t) = (T * \eta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(t-x)\eta(x)dx, \quad (3.18)$$

olarak ifade edilebilir (Wei 2001).  $T(t-x)$  tekil kernel olarak ifade edilir.

Örneğin:

$$T(x) = \delta^{(n)}(x); \quad (n=0,1,2,\dots). \quad (3.19)$$

Buradaki ayrık kernel of delta tiptir. Kernel  $T(x) = \delta(x)$  eşitliği yüzeysel ve eğrisel interpolasyon için önemlidir, ve  $T(x) = \delta^{(n)}(x)$  eşitliği  $n>1$  için türevsel eşitliklerin sayısal çözümünde gereklidir. Yeterli düzgün yaklaşımla, ayrık tekil konvolüsyon yönteminin dikkate alınması son derece etkili olur (Wei 2001).

$$F_{\alpha}(t) = \sum_k T_{\alpha}(t-x_k)f(x_k), \quad (3.20)$$

### 3.2.1. Shannon'un delta (RSD) kerneli

Yakın geçmişte, bazı yeni kernellerin kullanımı (Wei 2002) mekanik ve uygulamalı matematik problemlerinin çözümünde önerilmiştir. Shannon kernel:

$$\delta_{\Delta,\sigma}(x-x_k) = \frac{\sin[(\pi/\Delta)(x-x_k)]}{(\pi/\Delta)(x-x_k)} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right]; \sigma > 0. \quad (3.21)$$

şeklinde düzenlenmiştir (Wei 2001). Burada  $\Delta = \pi/(N-1)$  her bir düğüm arası aralık ve  $N$  düğüm nokta sayısı. Burada  $\sigma$  parametresi Gauss zarfı (Gaussian envelope) genişliği olarak bilinir ve  $\sigma = rh$  ile hesaplanır. Burada  $r$  hesaplamanın başında seçilecek bir parametredir. Denklem (3.60) tekil konvolüsyon kernellerinin (delta type) ayrık yaklaşımlar sağlaması için kullanılabilir (Zhao 2005). Örneğin bir fonksiyon için herhangi bir mertebeden türev

$$f^{(n)}(x) \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta}(x-x_k) f(x_k), \quad (3.22)$$

$\delta_{\Delta}(x-x_k) = \Delta \delta_{\alpha}(x-x_k)$  olarak belirtilmiştir ve  $(n)$  türevin mertebesini göstermektedir.  $(2M+1)$   $x$  çevresinde konumlanan ve genellikle toplam değerinden daha küçük toplam hesap genişliğidir. ATK yönteminde herhangi bir  $f(x)$  fonksiyonunun  $x_i$  noktası için  $x$  koordinat yönündeki türevi aşağıdaki toplam ile verilir.

$$\left. \frac{d^n f(x)}{d x^n} \right|_{x=x_i} = f^{(n)}(x) \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(n)}(x_i-x_k) f(x_k); \quad (n=0,1,2,\dots). \quad (3.23)$$

Denklemden  $n$  .  $x$  değişkenine göre  $n$ . mertebeden türev olarak tanımlanır. Örneğin ATK kernellerinin  $x=x_i$ deki ikinci mertebeden türevi aşağıdaki gibidir.

$$\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(x-x_j) = \frac{d^2}{dx^2} \left[ \delta_{\Delta,\sigma}(x-x_j) \right] \Big|_{x=x_i}, \quad (3.24)$$

Ayrık formda denklem (3.24) deki bu türev,

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x=x_i} \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(k\Delta x_N) f_{i+k,j}. \quad (3.25)$$

olarak formüle edilebilir.

Birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türev katsayılarının hesabı aşağıdaki formüller ile hesaplanır.

$$\begin{aligned} \delta_{\pi/\Delta,\sigma}^{(1)}(x_m-x_k) &= \frac{\cos(\pi/\Delta)(x-x_k)}{(x-x_k)} \exp[-(x-x_k)^2/2\sigma^2] \\ &\quad - \frac{\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\pi(x-x_k)^2/\Delta} \exp[-(x-x_k)^2/2\sigma^2] \\ &\quad - \frac{\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{(\pi\sigma^2/\Delta)} \exp[-(x-x_k)^2/2\sigma^2] \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\sigma,\Delta}^{(2)}(x-x_k) &= -\frac{(\pi/\Delta)\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{(x-x_k)} \exp[-(x-x_k)^2/2\sigma^2] \\ &\quad - 2\frac{\cos(\pi/\Delta)(x-x_k)}{(x-x_k)^2} \exp[-(x-x_k)^2/2\sigma^2] \\ &\quad - 2\frac{\cos(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\sigma^2} \exp[-(x-x_k)^2/2\sigma^2] + 2\frac{\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\pi(x-x_k)^3/\Delta} \exp[-(x-x_k)^2/2\sigma^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\pi(x-x_k)\sigma^2/\Delta} \exp[-(x-x_k)^2/2\sigma^2] \\
& + \frac{\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\pi\sigma^4/\Delta} (x-x_k) \exp[-(x-x_k)^2/2\sigma^2] \tag{3.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\pi/\Delta,\sigma}^{(3)}(x_m-x_k) &= -\frac{(\pi^2/\Delta^2)\cos(\pi/\Delta)(x-x_k)}{(x-x_k)} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& + 3\frac{(\pi/\Delta)\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{(x-x_k)^2} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& + 3\frac{(\pi/\Delta)\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] + 6\frac{\cos(\pi/\Delta)(x-x_k)}{(x-x_k)^3} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& + 3\frac{\cos(\pi/\Delta)(x-x_k)}{(x-x_k)\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] + 3\frac{(x-x_k)\cos(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\sigma^4} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& - 6\frac{\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\pi(x-x_k)^4/\Delta} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] - 3\frac{\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\pi(x-x_k)^2\sigma^2/\Delta} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& - \frac{(x-x_k)^2\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\pi\sigma^2/\Delta} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.28}
\end{aligned}$$

$$\delta_{\pi/\Delta,\sigma}^{(4)}(x_m-x_k) = 4\frac{(\pi^2/\Delta^2)\cos(\pi/\Delta)(x-x_k)}{(x-x_k)^2} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right]$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{(\pi^3 / \Delta^3) \sin(\pi/\Delta)(x - x_k)}{(x - x_k)} \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& + 4 \frac{(\pi^2 / \Delta^2) \cos(\pi/\Delta)(x - x_k)}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right] - 12 \frac{(\pi/\Delta) \sin(\pi/\Delta)(x - x_k)}{(x - x_k)^3} \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& - 6 \frac{(\pi/\Delta) \sin(\pi/\Delta)(x - x_k)}{(x - x_k)\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right] - 6 \frac{(\pi/\Delta)(x - x_k) \sin(\pi/\Delta)(x - x_k)}{\sigma^4} \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& - 24 \frac{\cos(\pi/\Delta)(x - x_k)}{(x - x_k)^4} \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right] - 12 \frac{\cos(\pi/\Delta)(x - x_k)}{(x - x_k)^2 \sigma^2} \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& - 4 \frac{(x - x_k)^2 \cos(\pi/\Delta)(x - x_k)}{\sigma^6} \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right] + 24 \frac{\sin(\pi/\Delta)(x - x_k)}{\pi(x - x_k)^5 / \Delta} \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& + 12 \frac{\sin(\pi/\Delta)(x - x_k)}{\pi \sigma^6 (x - x_k)^3 / \Delta} \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right] + 3 \frac{\sin(\pi/\Delta)(x - x_k)}{\pi(x - x_k)\sigma^4 / \Delta} \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& - 2 \frac{(x - x_k) \sin(\pi/\Delta)(x - x_k)}{(\pi \sigma^6 / \Delta)} \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& + \frac{(x - x_k)^3 \sin(\pi/\Delta)(x - x_k)}{\pi \sigma^8 / \Delta} \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

$x = x_k$ , için bu türev katsayıları farklı olup, örneğin ikinci mertebeden türev için diyagonal elemanlar

$$\delta_{\sigma, \Delta}^{(2)}(0) = -\frac{3 + (\pi^2 / \Delta^2) \sigma^2}{3\sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^2} - \frac{\pi^2}{3\Delta^2} \quad (3.309)$$

Aşağıdaki Lagrange kernel kullanıldığında

$$\delta_{\Delta, \sigma}(x) = \prod_{i=-M, k \neq i}^M \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (3.31)$$

Birinci ve ikinci dereceden türev için sırasıyla bu türev katsayıları

$$\delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(x) = \sum_{i=-M; i \neq k}^M \left( \frac{1}{x_k - x_i} \right) \prod_{i=-M, k \neq i}^{i+M} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (3.32a)$$

$$\delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(x) = \sum_{\substack{i, m = -M; i \neq k \\ m \neq k, i \neq m}}^M \left( \frac{1}{(x - x_i)(x - x_m)} \right) \prod_{i=-M, k \neq i}^{i+M} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (3.32b)$$

### 3.2.2. Sınır koşullar

Çalışmada iki tip sınır koşulu dikkate alınmıştır. Bu sınır koşullarının yukarıda verilen temel denklemlere dâhil edilmesiyle problem titreşim ve burkulma probleminde bir özdeğer probleminde, eğilme hesabı için ise bir lineer denklem takımına indirgenir. Bu koşullar için genel denklemler aşağıda verilmiştir. Ancak ileriki aşamalarda bu sınır koşulları her bir problem için kullanılan plak teorisi dikkate alınarak özel durum için ayrıca yazılacaktır.

*i) Sabit mesnet (S)*

$$W = 0, -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial s^2}\right) = 0. \quad (3.33)$$

*ii) Ankastre mesnet (C)*

$$W = 0, \frac{\partial W}{\partial n} = 0. \quad (3.34)$$

Sınır koşullarının dâhil edilmesiyle ilgili literatürde önemli sayıda kaynak vardır (Wei 2002, Zhao 2002, Civalek 2007)

## 4. ELASTİK ZEMİNE OTURAN TABAKALI PLAK PROBLEMİ

Elastik zemine oturan plak problemi üzerine pek çok çalışma bulmak mümkündür. Bu çalışmaların büyük çoğunluğu, Winkler zemine oturan plakların lineer analizlerini içermektedir. Bu analizler daha çok statik ve serbest titreşim analizlerini içerir. Burkulma analizleri ise kısmen daha az çalışılmıştır. Daha sonraki çalışmalar iki parametrelili zemin modellerini içermektedir. Winkler-Pasternak zemin modeli olarak bilinen bu model kayma deformasyonlarını da içermektedir. Bazı çalışmalarda Vlasov zemin modeli kullanılarak plak-zemin etkileşimi modellenmiştir.

Lineer olmayan analiz içinde benzer zemin modelleri kullanılmış ve plakların lineer olmayan statik (büyük deformasyon) ve titreşim analizleri yapılmıştır. Geçen 10 yıl içinde ise zemin için üç parametrelili ve lineer olmayan modeller kullanılmaya başlanmıştır. Winkler-Pasternak modelindeki iki ( $k_w$ ,  $k_g$ ) parametreye ek olarak bir üçüncü parametre dahil edilerek deformasyon parametresinin çeşitli kuvveti ile çarpılıp modele ilave edilmiştir. Bu çalışmada da zemin için lineer olmayan model kullanılacaktır ve tabakalı plaklar için lineer olmayan statik, ve titreşim analizleri yapılacaktır.

### 4.1. Yönetici denklemlerin çıkartılması

Boyutları  $a$ ,  $b$ , ve kalınlığı  $h$  olan bir tabakalı ve dikdörtgen plak göz önüne alalım. Plak iki parametrelili (Winkler-Pasternak) ve lineer olmayan bir zemine yayılı olarak oturmuş olsun(Şekil 4.1.) Birinci mertebeli plak teorisi kullanılarak deplasman alan ifadeleri aşağıdaki şekilde yazılır (Reddy, 1997)

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\psi_x(x, y),$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\psi_y(x, y),$$

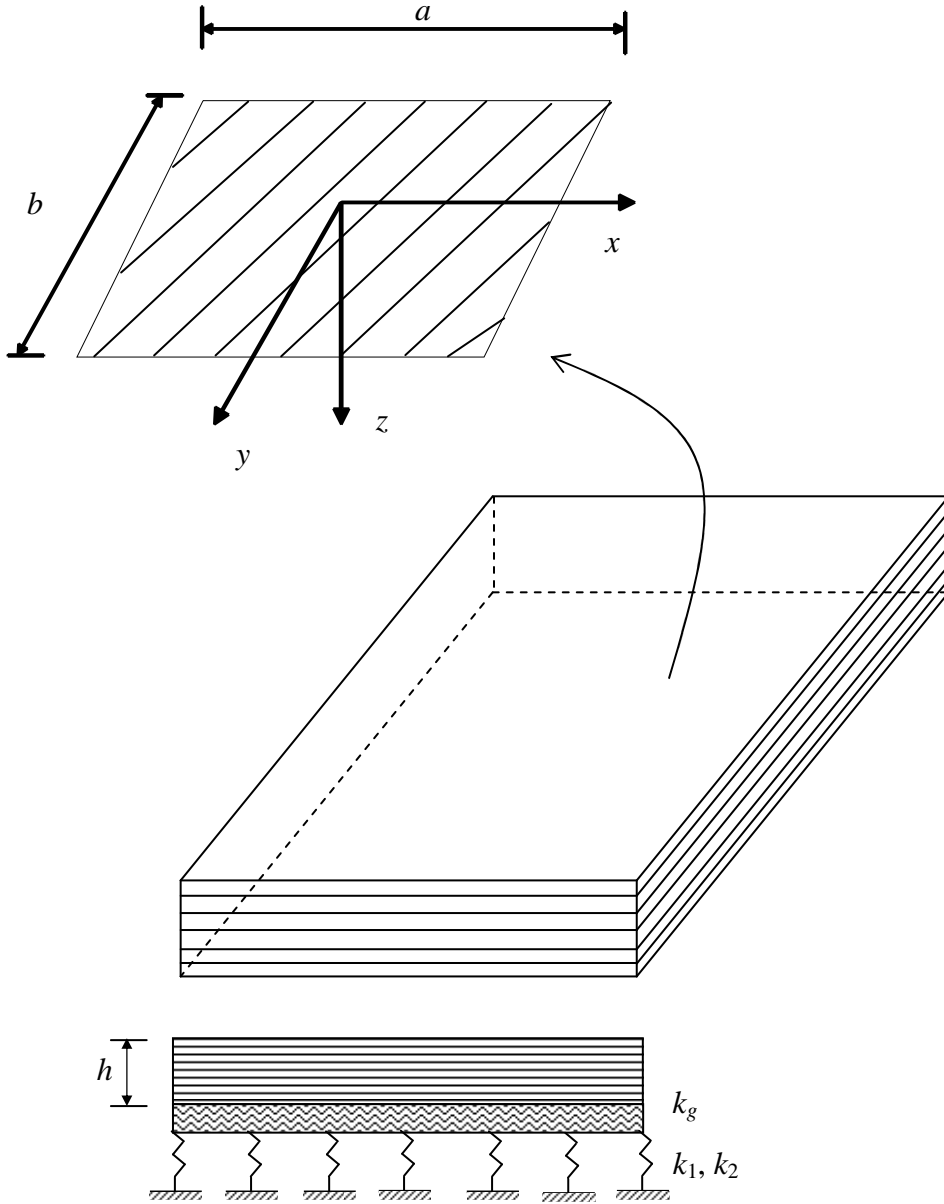
$$w(x, y, z) = w_0(x, y). \quad (4.1)$$

Burada  $u$ ,  $v$  ve  $w(x, y, z)$ , noktalarındaki deplasman bileşenleri ve  $u_0, v_0$  ve  $w_0$  ise plak orta noktalarındaki deplasman bileşenleridir. Denklemlerdeki  $\psi_x$  ve  $\psi_y$  değişkenleri ise plağın  $yz$ - ve  $xz$ - düzlemleri boyunca dönmeleri gösterir.

von Karman tarafından önerilen lineer olmayan plak teorisine göre plağın şekil değiştirme bağıntıları(Nath ve diğ. 2006)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

olarak ifade edilir.



Şekil 4.1. Lineer olmayan elastik zemine oturan tabakalı kompozit plak

Tabakalı plak için iç kuvvet (normal kuvvet ve moment) bileşenleri

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Şeklinde yazılır. Kesme kuvveti bileşenleri ise

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Buradaki rijitlik terimleri  $(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij})$  her bir katman için

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (1, z, z^2) (\bar{Q}_{ij})_k dz \quad (i,j=1,2,6), \quad (4.5)$$

$$(A_{ij}) = \sum_{k=1}^n k_i k_j \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k dz \quad (i,j=4,5). \quad (4.6)$$

Olarak ifade edilir. Denklemlerdeki kayma düzeltme faktörü  $k_i^2 = 5/6$  ( $i=4,5$ ). Lineer olmayan elastik zemine oturan tabakalı kompozit bir plağın lineer olmayan hareket denklemleri (Shukla ve Nath, 2000)

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - P \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - R \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - P \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - R \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} N_x + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} N_{xy} \\ & + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} N_{xy} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} N_y + q(x, y, t) - P \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - R \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0, \quad (4.11)$$

burada  $R$ ,  $P$  ve  $I$  terimleri çift normal dönme, normal dönme ve dönem atalet ifadeleri olup

$$(P, R, I) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho dz, \quad (4.12)$$



Bağıntısı ile hesaplanır. Denklem (4.1) den (4.6) kadar olanlar (4.7-4.11) de yazılırsa lineer olmayan denklem aşağıdaki formda yazılabilir (Baltacıoğlu ve diğ. 2010)

$$L_{11}(U) + L_{12}(V) + L_{15}(W) = 0 \quad (4.13a)$$

$$L_{21}(U) + L_{22}(V) + L_{25}(W) = 0 \quad (4.13b)$$

$$L_{31}(U) + L_{32}(V) + L_{35}(W) = 0 \quad (4.13c)$$

$$L_{43}(\Psi_X) + L_{44}(\Psi_Y) + L_{45}(W) = 0 \quad (4.13d)$$

$$L_{52}(V) + L_{53}(\Psi_X) + L_{54}(\Psi_Y) + L_{55}(W) = 0 \quad (4.13e)$$

Bu denklemdeki türev operatörleri ile ilgili katsayılar aşağıda verilmiştir:

$$L_{11} = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \lambda^2 A_{66} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + 2\lambda A_{16} \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \quad (4.14)$$

$$L_{12} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \lambda^2 A_{26} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \lambda(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \quad (4.15)$$

$$L_{15} = 2\alpha_1 \left[ A_{11} \frac{\partial^3}{\partial X^3} + \lambda^2 A_{66} \frac{\partial^3}{\partial Y^2 \partial X} + 2\lambda A_{16} \frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial Y} \right]$$

$$+ 2\alpha_2 \left[ A_{16} \frac{\partial^3}{\partial X \partial Y^2} + \lambda^2 A_{26} \frac{\partial^3}{\partial Y^3} + \lambda(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^3}{\partial X \partial Y^2} \right] \quad (4.16)$$

$$L_{21} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \lambda^2 A_{26} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \lambda(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \quad (4.17)$$

$$L_{22} = A_{66} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \lambda^2 A_{22} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + 2\lambda A_{26} \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \quad (4.18)$$

$$L_{25} = 2\alpha_1 \left[ A_{16} \frac{\partial^3}{\partial X^3} + \lambda^2 A_{26} \frac{\partial^3}{\partial Y^2 \partial X} + \lambda(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial Y} \right] \\ + 2\alpha_2 \left[ A_{66} \frac{\partial^3}{\partial X^2 \partial Y} + \lambda^2 A_{22} \frac{\partial^3}{\partial Y^3} + 2\lambda A_{26} \frac{\partial^3}{\partial X \partial Y^2} \right] \quad (4.19)$$

$$L_{31} = \frac{\partial}{\partial X} [L_{31}^1] + \frac{\partial}{\partial Y} [L_{31}^2] \quad (4.20)$$

$$L_{31}^1 = \frac{2}{\beta} A_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + 2A_{12} \frac{\lambda^2}{\beta} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + 4A_{16} \frac{\lambda}{\beta} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \quad (4.21)$$

$$L_{31}^2 = \left[ \lambda A_{16} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + 4A_{66} \frac{\lambda^2}{\beta} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \right] \quad (4.22)$$

$$L_{32} = \frac{\partial}{\partial x} [L_{32}^1] + \frac{\partial}{\partial y} [L_{32}^2] \quad (4.23)$$

$$L_{32}^1 = A_{16} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + A_{26} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \quad (4.24)$$

$$L_{32}^2 = \lambda A_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \lambda A_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \lambda A_{26} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} L_{35} &= k^2 A_{55} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \lambda^2 k^2 A_{44} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + 2\lambda k^2 A_{45} \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left[ \frac{2}{\beta^2} A_{11} \left( \frac{\partial}{\partial X} \right)^2 + \frac{2\lambda^2}{\beta^2} A_{12} \left( \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[ \lambda^2 A_{12} \left( \frac{\partial}{\partial X} \right)^2 + \lambda^2 A_{22} \left( \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \left[ 2\lambda A_{26} \left( \frac{\partial}{\partial X} \right)^2 + 2\lambda A_{26} \left( \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 + \frac{4\lambda}{\beta^2} A_{16} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \lambda^2 A_{26} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + 2\lambda A_{66} \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \right] \\ &+ qa^2 / 4h - A_{22} \left[ K_1 W - K_2 W^3 + G \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$L_{43} = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \lambda^2 D_{66} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{(\beta kh)^2}{4} A_{55} \Psi_x \quad (4.27)$$

$$L_{44} = \lambda (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + \frac{(\beta kh)^2}{4} A_{45} \Psi_y \quad (4.28)$$

$$L_{45} = \frac{(\beta kh)^2}{2} A_{55} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\lambda \beta k^2 h^2}{2} A_{45} \frac{\partial}{\partial Y} \quad (4.29)$$

$$L_{52} = D_{66} h \frac{\partial^2}{\partial X^2} \quad (4.30)$$

$$L_{53} = \lambda(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} + \frac{(\beta kh)^2}{4} A_{45} \Psi_x \quad (4.31)$$

$$L_{54} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{(\beta kh)^2}{2} A_{44} \Psi_y \quad (4.32)$$

$$L_{55} = -\frac{\beta(kh)^2}{2} A_{25} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\lambda\beta(kh)^2}{2} D_{22} \frac{\partial}{\partial Y} \quad (4.33)$$

Bu denklemlerde aşağıdaki boyutsuz büyüklükler kullanılmıştır.

$$U = u/h, V = v/h, W = w/h, \Psi_x = \psi_x, \Psi_y = \psi_y, X = 2x/a,$$

$$Y = 2y/b, \lambda = a/b, \beta = a/h, \alpha_1 = h/a, \alpha_2 = h/b,$$

$$K_1 = k_1 a^4 / D_{11}, K_2 = k_2 a^4 h^2 / D_{11}, G = k_p a^2 / D_{11} \quad (4.34)$$

4.13 denklemlerine ayrık tekil konvolüsyon uygulanarak ayrıklaştırılırsa, bu denklemler aşağıdaki formda yazılır

$$D_{11}(U) + D_{12}(V) + D_{15}(W) = 0 \quad (4.35a)$$

$$D_{21}(U) + D_{22}(V) + D_{25}(W) = 0 \quad (4.36b)$$

$$D_{31}(U) + D_{32}(V) + D_{35}(W) = 0 \quad (4.37c)$$

$$D_{41}(U) + D_{42}(V) + D_{45}(W) = 0 \quad (4.38d)$$

$$D_{52}(V) + D_{53}(\Psi_X) + D_{54}(\Psi_Y) + D_{55}(W) = 0 \quad (4.39e)$$

Bu denklemlerdeki ATK ile ayrıklaştırılmış katsayılar

$$D_{11} = A_{11} \mathfrak{R}_X^2 + \lambda^2 A_{66} \mathfrak{R}_Y^2 + 2\lambda A_{16} \mathfrak{R}_{XY}^2 \quad (4.40)$$

$$D_{12} = A_{16} \mathfrak{R}_X^2 + \lambda^2 A_{26} \mathfrak{R}_Y^2 + \lambda(A_{12} + A_{66}) \mathfrak{R}_{XY}^2 \quad (4.41)$$

$$D_{15} = 2\alpha_1 [A_{11} \mathfrak{R}_X^3 + \lambda^2 A_{66} \mathfrak{R}_Y^2 \mathfrak{R}_X^1 + 2\lambda A_{16} \mathfrak{R}_X^2 \mathfrak{R}_Y^1]$$

$$+ 2\alpha_2 [A_{16} \mathfrak{R}_X^1 \mathfrak{R}_Y^2 + \lambda^2 A_{66} \mathfrak{R}_Y^3 + \lambda(A_{12} + A_{66}) \mathfrak{R}_X^1 \mathfrak{R}_Y^2] \quad (4.42)$$

$$D_{21} = A_{16} \mathfrak{R}_X^2 + \lambda^2 A_{26} \mathfrak{R}_Y^2 + \lambda(A_{12} + A_{66}) \mathfrak{R}_{XY}^2 \quad (4.43)$$

$$D_{22} = A_{66} \mathfrak{R}_X^2 + \lambda^2 A_{22} \mathfrak{R}_Y^2 + 2\lambda A_{26} \mathfrak{R}_{XY}^2 \quad (4.44)$$

$$D_{25} = 2\alpha_1 [A_{16} \mathfrak{R}_X^3 + \lambda^2 A_{26} \mathfrak{R}_Y^2 \mathfrak{R}_X^1 + \lambda(A_{12} + A_{66}) \mathfrak{R}_X^2 \mathfrak{R}_Y^1]$$

$$+ 2\alpha_2 [A_{66} \mathfrak{R}_X^2 \mathfrak{R}_Y^1 + \lambda^2 A_{22} \mathfrak{R}_Y^3 + 2\lambda A_{26} \mathfrak{R}_X^1 \mathfrak{R}_Y^2] \quad (4.45)$$

$$D_{31} = \frac{\partial}{\partial X} [D_{31}^1] + \frac{\partial}{\partial Y} [D_{31}^2] \quad (4.46)$$

$$D_{31}^1 = \frac{2}{\beta} A_{11} \mathfrak{R}_X^2 + 2A_{12} \frac{\lambda^2}{\beta} \mathfrak{R}_Y^2 + 4\frac{\lambda}{\beta} A_{16} \mathfrak{R}_{XY}^2 \quad (4.47)$$

$$D_{31}^2 = \lambda A_{16} \mathfrak{R}_X^2 + 4A_{66} \frac{\lambda^2}{\beta} \mathfrak{R}_{XY}^2 \quad (4.48)$$

$$D_{32} = \frac{\partial}{\partial x} [D_{32}^1] + \frac{\partial}{\partial y} [D_{32}^2] \quad (4.49)$$

$$D_{32}^1 = A_{16} \mathfrak{R}_X^2 + A_{26} \mathfrak{R}_Y^2 + A_{66} \mathfrak{R}_{XY}^2 \quad (4.50)$$

$$D_{32}^2 = \lambda A_{12} \mathfrak{R}_X^2 + \lambda A_{22} \mathfrak{R}_Y^2 + \lambda A_{26} \mathfrak{R}_{XY}^2 \quad (4.51)$$

$$D_{35} = k^2 A_{55} \mathfrak{R}_X^2 + \lambda^2 k^2 A_{44} \mathfrak{R}_Y^2 + 2\lambda k^2 A_{45} \mathfrak{R}_{XY}^2$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left[ \frac{2}{\beta^2} A_{11} (\mathfrak{R}_X)^2 + \frac{2}{\beta^2} \lambda^2 A_{12} (\mathfrak{R}_Y)^2 \right]$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left[ \lambda^2 A_{12} (\mathfrak{R}_X)^2 + \lambda^2 A_{22} (\mathfrak{R}_Y)^2 \right]$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} \left[ 2\lambda A_{26} (\mathfrak{R}_X)^2 + 2\lambda A_{26} (\mathfrak{R}_Y)^2 + \frac{4\lambda}{\beta^2} A_{16} \mathfrak{R}_X^2 + \lambda^2 A_{26} \mathfrak{R}_Y^2 + 2\lambda A_{66} \mathfrak{R}_{XY}^2 \right]$$

$$+ qa^2 / 4h - A_{22} [K_1 W - K_2 W^3 + G(\mathfrak{R}_X^2 + \mathfrak{R}_Y^2)] \quad (4.52)$$

$$D_{43} = \mathfrak{R}_X^2 + \lambda^2 D_{66} \mathfrak{R}_Y^2 + \frac{(\beta kh)^2}{4} A_{55} \Psi_X \quad (4.53)$$

$$D_{44} = \lambda(D_{12} + D_{66}) \mathfrak{R}_{XY}^2 + \frac{(\beta kh)^2}{4} A_{45} \Psi_Y \quad (4.54)$$

$$D_{45} = \frac{(\beta kh)^2}{4} A_{55} \mathfrak{R}_X^1 + \frac{\lambda \beta (kh)^2}{2} A_{45} \mathfrak{R}_Y^1 \quad (4.55)$$

$$D_{52} = D_{66} h \mathfrak{R}_X^2 \quad (4.56)$$

$$D_{53} = \frac{(\beta kh)^2}{4} A_{45} \Psi_X \quad (4.57)$$

$$D_{54} = D_{66} \mathfrak{R}_X^2 + \lambda^2 \mathfrak{R}_Y^2 + \frac{(\beta kh)^2}{2} A_{44} \Psi_Y \quad (4.58)$$

$$D_{55} = -\frac{\beta (kh)^2}{2} A_{25} \mathfrak{R}_X^1 - \frac{\lambda \beta (kh)^2}{2} D_{22} \mathfrak{R}_Y^1 \quad (4.59)$$

Elde edilen denklemler toplanarak aşağıdaki matris formda yazılabilir

$$\{ \{ {}^L K \} + \{ {}^N K \} \} \{ X \} = \{ F \} \quad (4.60)$$

Bu denklemdeki lineer ve lineer olmayan matris katsayıları  ${}^L K$  ve  ${}^{NL} K$  sırasıyla aşağıdaki gibi verilir

$${}^L K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$${}^{NL} K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Deplasman ve kuvvet vektörleri bileşenleri

$$\{X\} = \{U \quad V \quad \Psi_x \quad \Psi_y \quad W\}^T \quad (4.63)$$

$$\{F\} = \{0 \quad 0 \quad Q \quad 0 \quad 0\}^T \quad (4.64)$$

ve ATK türev operatör katsayıları

$$\mathfrak{R}_X^n(\cdot) = \frac{\partial^{(n)}(\cdot)}{\partial X^{(n)}} = \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(n)}(k\Delta X)(\cdot)_{i+j+k} \quad (4.65)$$

$$\mathfrak{R}_Y^n(\cdot) = \frac{\partial^{(n)}(\cdot)}{\partial Y^{(n)}} = \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(n)}(k\Delta Y)(\cdot)_{i,j+k} \quad (4.66)$$



$$\mathfrak{R}_X^1 \mathfrak{R}_Y^{(n-1)}(\cdot) = \frac{\partial^{(n)}(\cdot)}{\partial X \partial Y^{(n-1)}} = \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta X)(\cdot)_{i+k, j} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(n-1)}(k\Delta Y)(\cdot)_{i, k+j} \quad (4.67)$$

$$\mathfrak{R}_X^{(n-1)} \mathfrak{R}_Y^1(\cdot) = \frac{\partial^{(n)}(\cdot)}{\partial X^{(n-1)} \partial Y} = \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(n-1)}(k\Delta X)(\cdot)_{i+k, j} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta Y)(\cdot)_{i, k+j} \quad (4.68)$$

Elde edilen niyahi denklem Newton-Rapson yöntemi (Civalek, 2004; Civalek, 2006; Baltacıoğlu, 2010) ile çözülmüştür.

## 5. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde lineer olmayan elastik zemine oturan tabakalı kompozit plakların lineer olmayan statik hesabını içeren sonuçlar sunulacaktır. İlk olarak elastik zemin etkisinin dikkate alınmadığı tabakalı plaklar için lineer olmayan yük-deplasman eğrileri verilecektir. Daha sonra lineer olmayan (üç parametrelili) elastik zemine oturan (Winkler-Pasternak) tabakalı kompozit plakların lineer (doğrusal) olmayan statik analizlerini içeren sonuçlar verilecektir. Sonuçlar verilirken, malzeme ve geometrinin lineer olmayan deplasman üzerine etkisi incelenecek ve aynı zamanda göz önüne alınan zemin modelindeki parametrelerin etkisi incelenecektir.

### 5.1. Tabakalı Kompozit Plak

Bu bölümde zemin etkisi dikkate alınmadan sadece tabakalı plaklar için lineer olmayan analiz sonuçları verilecektir. Kayma düzeltme katsayısı 5/6 olarak alınmıştır. Aşağıdaki üç malzeme tipi çözümlerde kullanılmıştır:

Malzeme-I

$$E_1 / E_2 = 3, G_{12} / E_2 = 0.5, G_{23} / E_2 = 0.33, G_{13} = G_{12}, \nu_{12} = 0.25$$

Malzeme -II

$$E_1 / E_2 = 25, G_{12} / E_2 = 0.5, G_{23} / E_2 = 0.2, G_{13} = G_{12}, \nu_{12} = 0.25$$

Malzeme -III

$$E_1 / E_2 = 40, G_{12} / E_2 = 0.6, G_{23} / E_2 = 0.2, G_{13} = G_{12}, \nu_{12} = 0.25$$

İki farklı yük çözümlerde dikkate alınmıştır:

Yük 1: Üniform yük:  $q(x, y) = q_0$

Yük 2: Sinüzoidal düşey yük:  $q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

İlk olarak dört kenarı basit mesnetli tabakalı kare plak (0/90/90/0) için deplasman değerinin karşılaştırılması (Malzeme-II) yapılmıştır. Lineer analiz yapılmış olup sinüzoidal yük kullanılmıştır. Yani geliştirilen yöntem test edilmiştir. Dört farklı düğüm nokta sayısı kullanılarak orta nokta deplasman değeri hesaplanmıştır. Karşılaştırma amacıyla Putcha ve Reddy (1986) tarafından verilen sonlu elemanlar çözümüne ait sonuçlar ve analitik değerler (Putcha ve Reddy, 1986) değerler kullanılmıştır. Farklı kalınlık değerleri için yapılan bu analizde, tablodan görüleceği üzere ATK yöntemi 13 düğüm noktası kullanılarak yeter doğrulukta sonuçlar vermiştir.

Çizelge 5.1. Dört kenarı basit mesnetli tabakalı kare plak (0/90/90/0) için deplasman değerinin karşılaştırılması (Malzeme-II)

$a/h$	Putcha ve Reddy (1986)	Analitik*	ATK sonuçları (farklı düğüm sayıları için)			
			N=9	N=11	N=13	N=15
10	0.6627	0.6627	0.6702	0.6643	0.6629	0.6630
20	0.4912	0.4912	0.5007	0.4928	0.4925	0.4925
100	0.4437	0.4437	0.4491	0.4442	0.4438	0.4439

\*Bu değerler Putcha ve Reddy(1986)den alınmıştır.

İkinci olarak karşılaştırma amacıyla yüke bağlı deplasman değerleri hesaplanmış ve yine literatürde ki güvenilir sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. N=15 düğüm noktası kullanılarak hesaplanan sonuçlar literatürdeki değerlere yakındır. Bu değerden sonra düğüm nokta sayısının artması sonuçları çok fazla değiştirmemiştir. Tablo 5.1 ve Tablo 5.2’de elde edilen sonuçlar izotrop plak için yapılmıştır. Sonuç olarak lineer analiz için 13\*13, ve lineer olmayan analiz için 15\*15 düğüm yeterli gözükmektedir. Bu amaçla bundan sonraki analizde 15 adet düğüm ve eşit aralık kullanılacaktır.

Çizelge 5. 2. Dört kenarında ankastre tutulmuş plak için üniform yük etkisindeki lineer olmayan deplasman değerleri

$Q$	Putcha ve Reddy (1986)	Analitik *	ATK sonuçları			
			N=9	N=11	N=13	N=15
17.8	0.2392	0.2370	0.2401	0.2397	0.2396	0.2394
38.3	0.4738	0.4710	0.4803	0.4742	0.4741	0.4740
63.4	0.6965	0.6950	0.6970	0.6968	0.6967	0.6966
95.0	0.9087	0.9120	0.9100	0.9092	0.9090	0.9089
134.9	1.1300	1.2210	1.1316	1.1311	1.1311	1.1310
184.0	1.3080	1.3230	1.3099	1.3093	1.3080	1.3088

\*Bu değerler Putcha ve Reddy(1986)den alınmıştır.

Tablo 3 ve Tablo 4’de tabakalı kompozit plakların lineer olmayan analizlerine ait sonuçlar verilmiştir. Malzeme tipi olarak: Malzeme-III kullanılmış olup, mesnet koşulu dört tarafından ankastredir. Tabaka sayısı arttıkça deplasman azalmaktadır.

Çizelge 5. 3. Dört kenarından ankastre tutulmuş tabakalı plak için lineer olmayan deplasman değerleri (Malzeme-III)

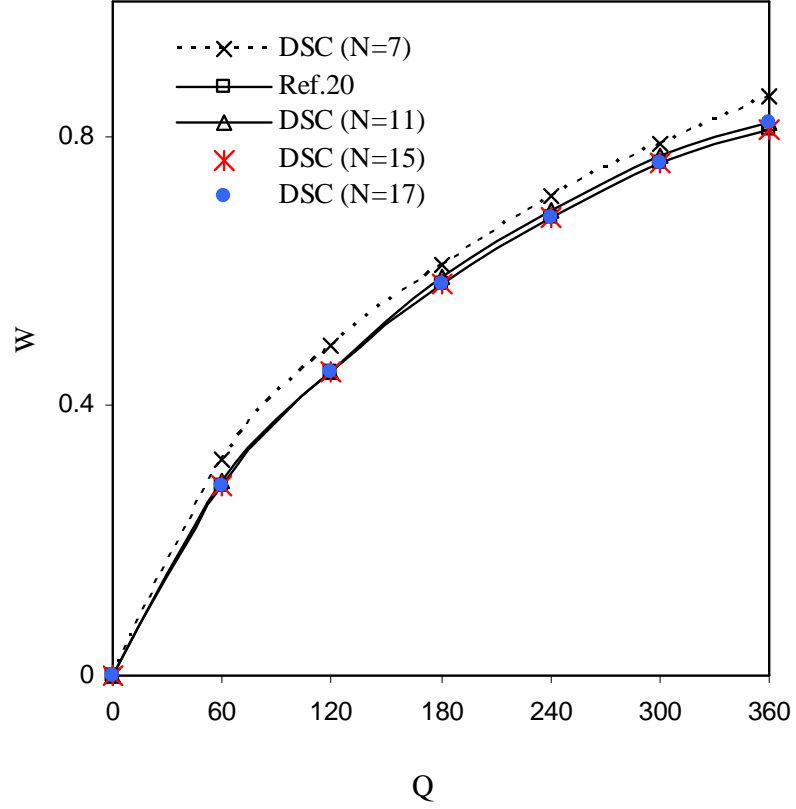
$Q$	(45/-45)	(0/90)
10	0.0440	0.0550
20	0.0861	0.1096
30	0.0995	0.1378
50	0.1658	0.2086
75	0.2331	0.2903
100	0.2926	0.3540
150	0.3934	0.4563
200	0.4768	0.5356
250	0.5487	0.6003

Çizelge 5. 4. Dört kenarından ankastre tutulmuş tabakalı plak için farklı tabaka ve açılış durumu için lineer olmayan deplasman değerleri (Malzeme-III)

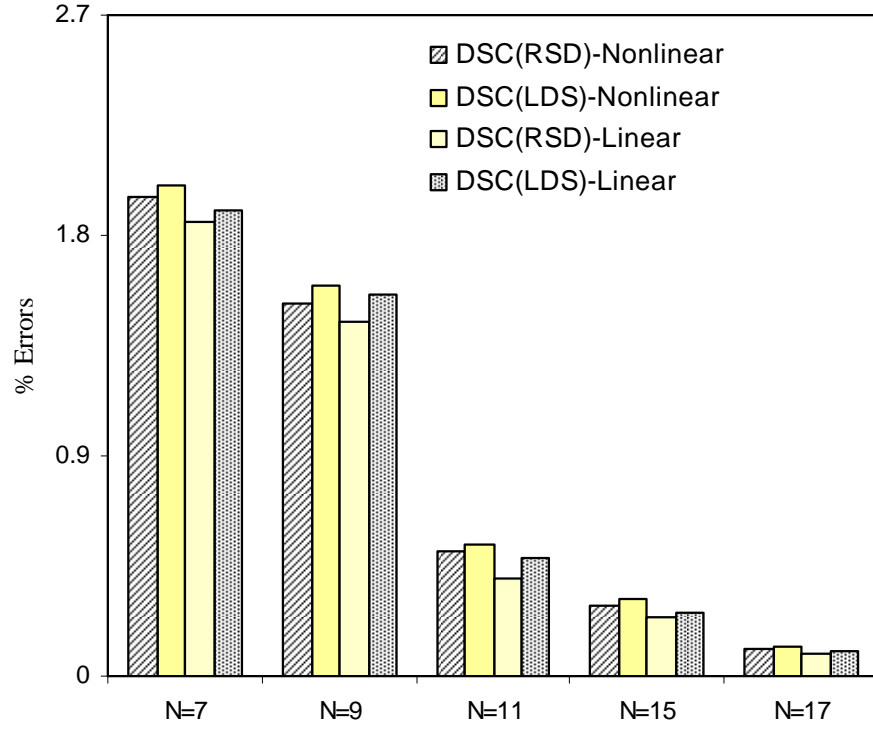
$Q$	(±45) <sub>8</sub> layer	(±45) <sub>4</sub> layer	(0/90) <sub>8</sub> layer	(0/90) <sub>4</sub> layer
15	0.0365	0.0432	0.0412	0.0489
30	0.0711	0.0801	0.1256	0.1305
60	0.1506	0.1613	0.1559	0.1443
90	0.2408	0.2588	0.2376	0.2208
120	0.3017	0.3194	0.2908	0.2785
150	0.3534	0.3776	0.3411	0.4003
200	0.4402	0.4659	0.4208	0.4937

Şekil 5.2- Şekil 5.6' de tabakalı kompozit plakların yük-deplasman ilişkisi çeşitli geometrik ve malzeme parametreleri için sunulmuştur. Şekil 5.2'den görüleceği üzere 15 düğüm noktasından sonra sonuçlar artık çakışmaktadır. Yukarıda tablodan elde edilen sonuçlara paralel olarak N=15 için yeterli doğrulukta sonuçlar elde edilebilmektedir. Kullanılan iki farklı kernel için düğüm nokta sayısına bağlı hata değerleri, dört kenarı ankastre plak için hesaplanmış ve Şekil 5.3'de sunulmuştur. Görüldüğü gibi lineer olmayan analiz için Shannon kernel, lineer analiz için ise Lagrange kernel daha uygundur. Şekil 5.4-Şekil 5.6'dan söylenebilir ki: Kalınlık ve

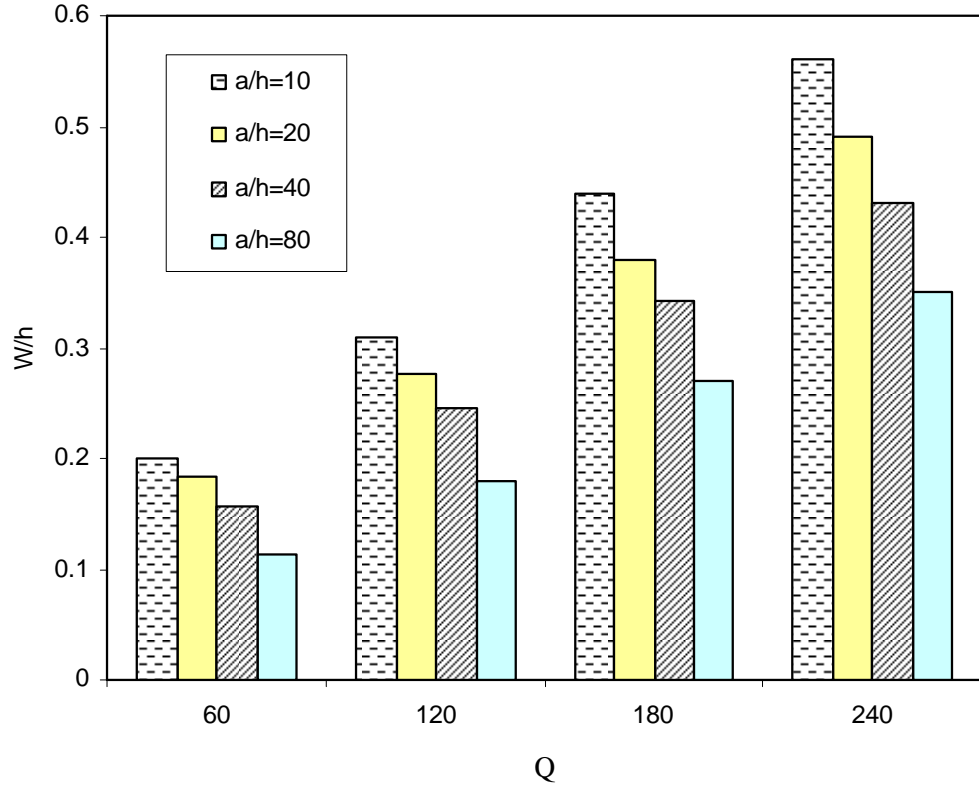
kenar boyutlarının oranı deplasman üzerinde önemli etkiye sahiptir. Tabaka sayısı ise kısmen önemli olup, belirli bir sayıdan sonra sonuç değişmemektedir.



Şekil 5. 2. CCSS tabakalı kare plak için (0/90/0/90) farklı düğüm nokta sayısına bağlı deplasman değeri ( $a/h=10$ )

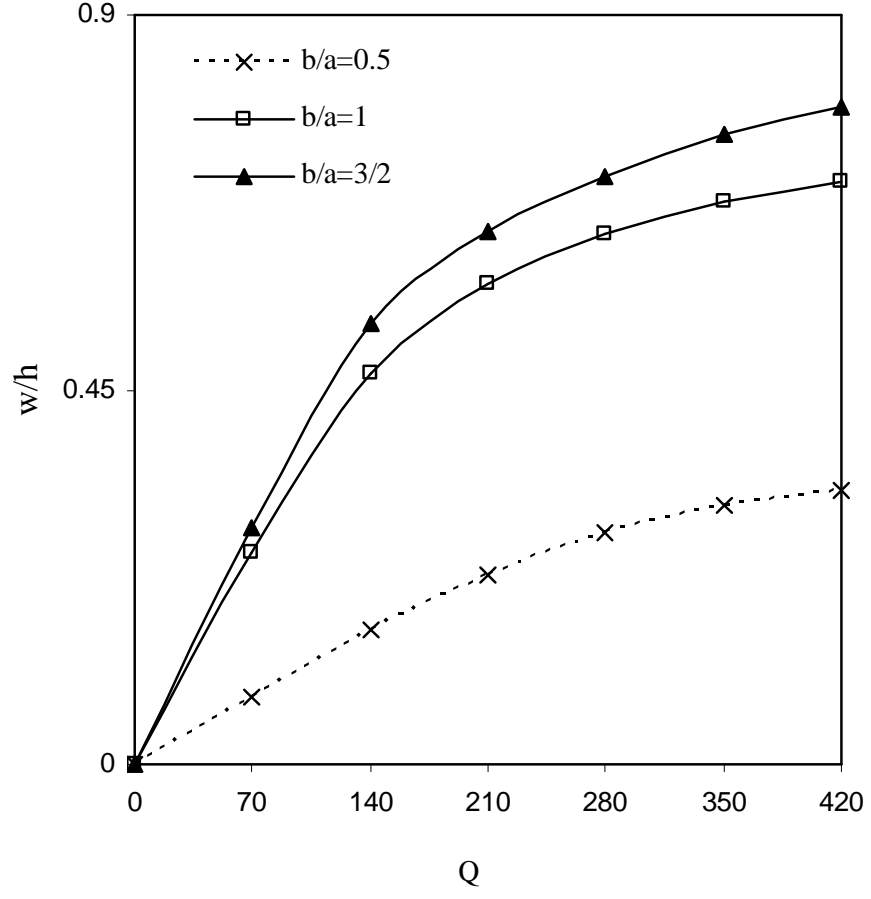


Şekil 5. 3. Kullanılan iki farklı kernel için düğüm nokta sayısına bağlı hata değerleri (Dört kenarlı ankastre plak için lineer olmayan analiz )

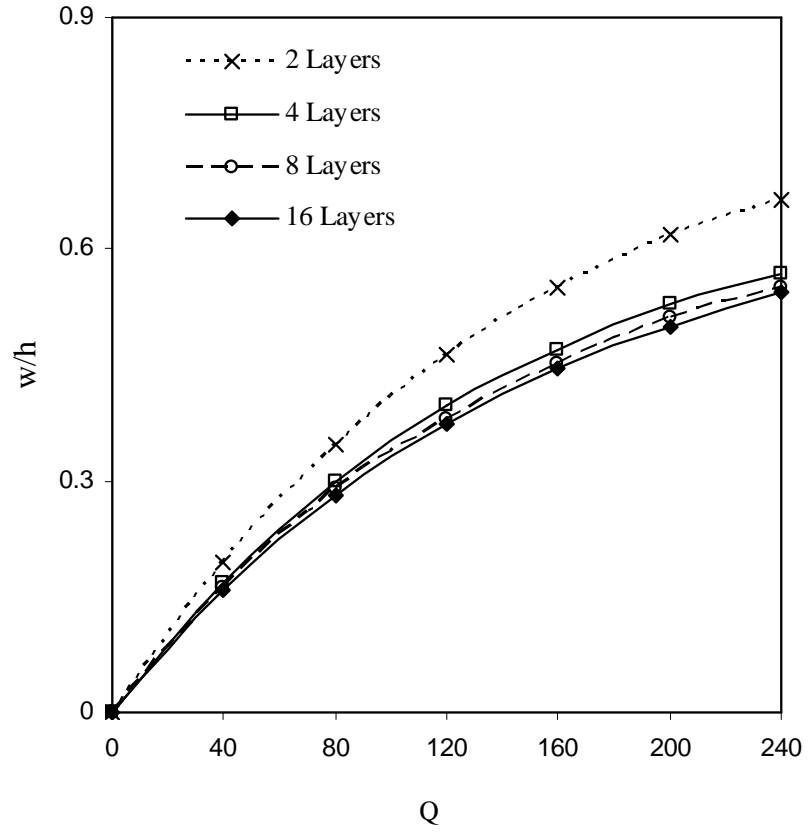


Şekil 5.4. Dört kenarından ankastre tabakalı (0/90) plak için kalınlığa bağlı lineer olmayan deplasman değerleri ( $a/b=1$ ; Malzeme-III)





Şekil 5.5. Dört kenarından ankastre tabakalı (0/90/0/90) plak için kenarlar oranına bağlı lineer olmayan yük-deplasman değeri ( $a/h=10$ ; Malzeme-II)



Şekil 5.6. Dört kenarından ankastre tabakalı (0/90/...) kare plak için katman sayısına bağlı yük-deplasman değeri ( $a/h=10$ ; Malzeme-II)

## 5.2. Elastik Zemine Oturan Tabakalı Kompozit Plak

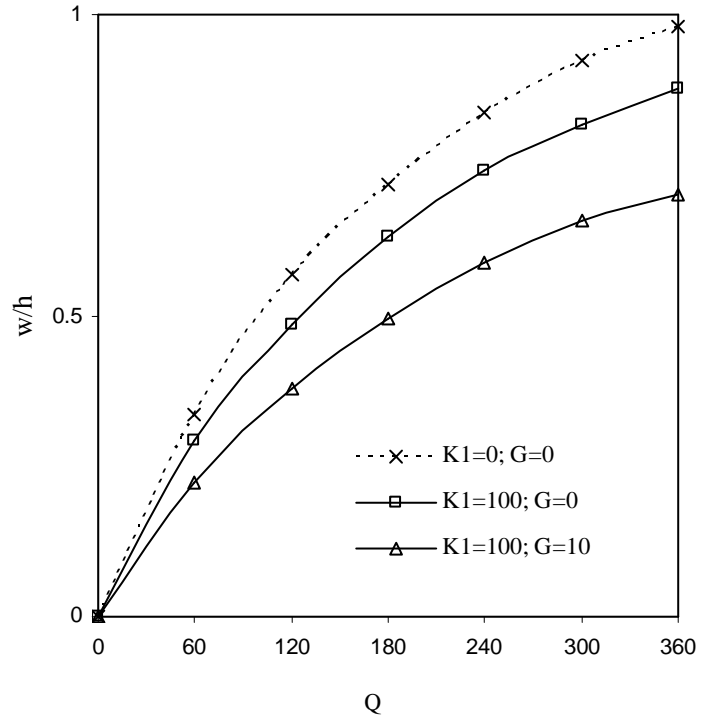
Bu bölümde tabakalı kompozit plakların lineer olmayan analizinde zemin etkisi dikkate alınacaktır ve tezin asıl amacı da budur. Zemin modeli olarak üç parametrelili lineer olmayan Winkler-Pasternak modeli kullanılmıştır.  $K_1$  Winkler model için parametreyi,  $K_2$  Winkler model için lineer olmayan parametreyi,  $G$  ise Pasternak zemin için ilgili parametreyi göstermektedir. Böylece zemin etkisi aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$K_1W + K_2W^3 + G\nabla^2(W) = 0$$

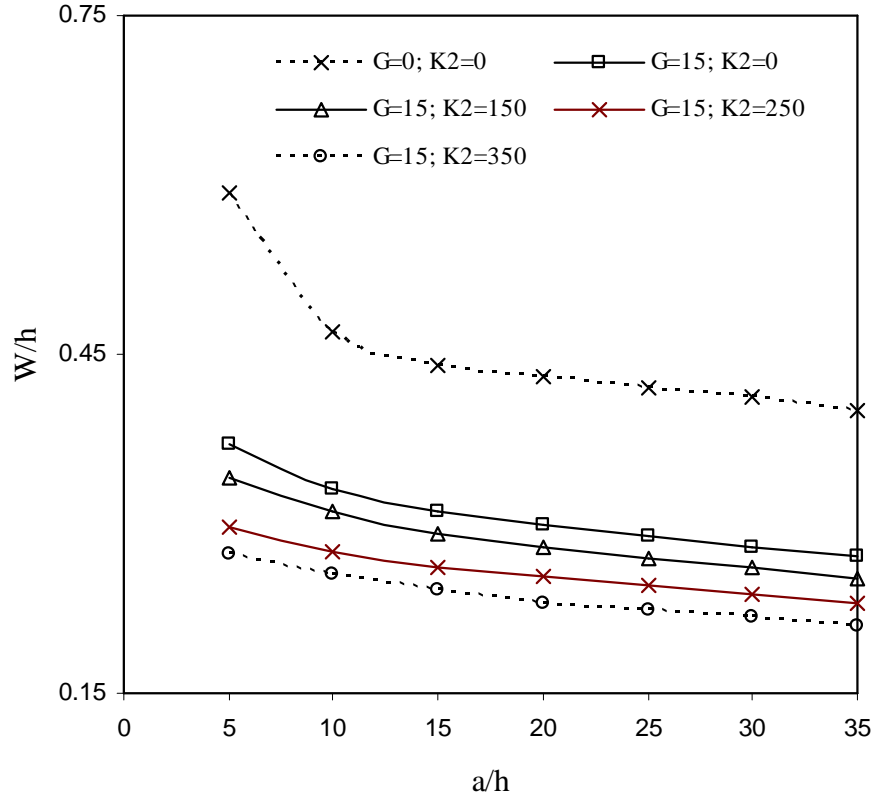
Karşılaştırma amacıyla dört kenarından ankastre tutulmuş tabakalı (0/90) plak için üniform yük etkisindeki merkezi deplasman hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 5.5’de listelenmiştir. Elde edilen sonuçlar Nath ve diğerleri (2006) tarafından verilen analitik sonuçlar ve Malekzadeh ve Setoodeh (2007) tarafından diferansiyel quadrature yöntemiyle hesaplanan sonuçlara yakındır. Elde edilen diğer sonuçlar Şekil 5.7-Şekil 5.12’de özetlenmiştir. Bu grafiklerde zemin etkisi çeşitli parametrelere bağlı olarak verilmiştir. Önemle vurgulanması gereken durumlar bir sonraki bölümde sonuçlar kısmında özetlenecektir.

Çizelge 5.5. dört kenarından ankastre tutulmuş tabakalı (0/90) plak için merkezi deplasman değeri(Malzeme-I; üniform yayılı yük)

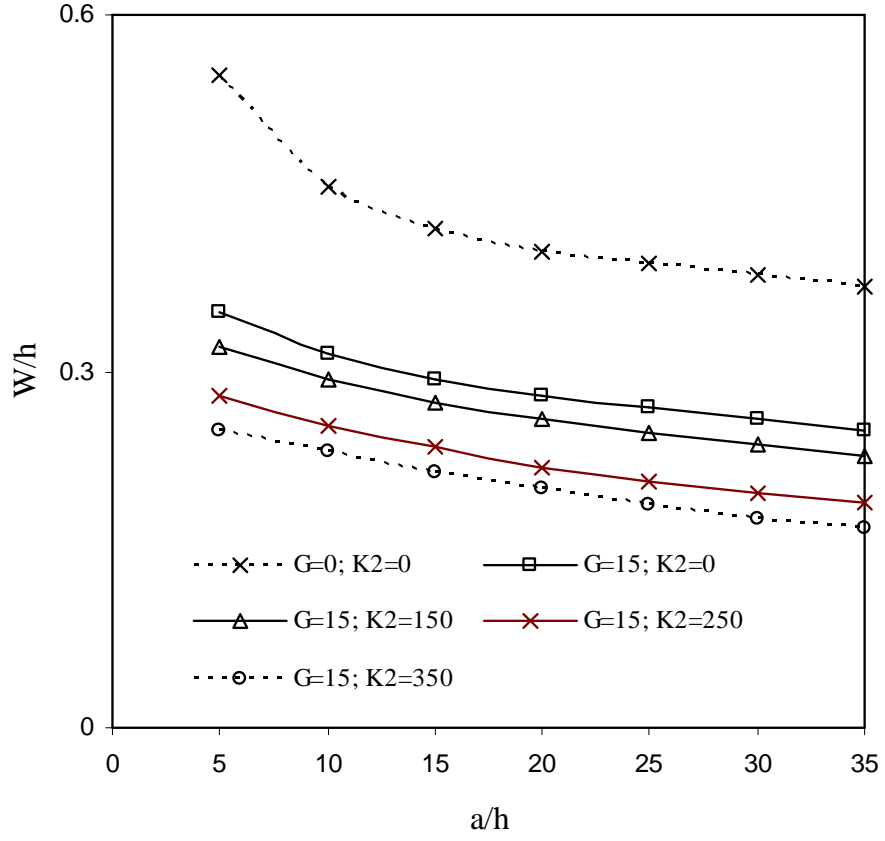
Zemin parametreleri	Nath ve diğerleri (2006)	DQ- Malekzadeh ve Setoodeh (2007)	ATK
K1=25; G=10 ; K2=100 (Q=400)	0.71	0.715	0.7204
K1=50; G=10 ; K2=100 (Q=400)	0.65	0.649	0.6568
K1=50; G=10 ; K2=-100 (Q=300)	0.63	0.644	0.6471



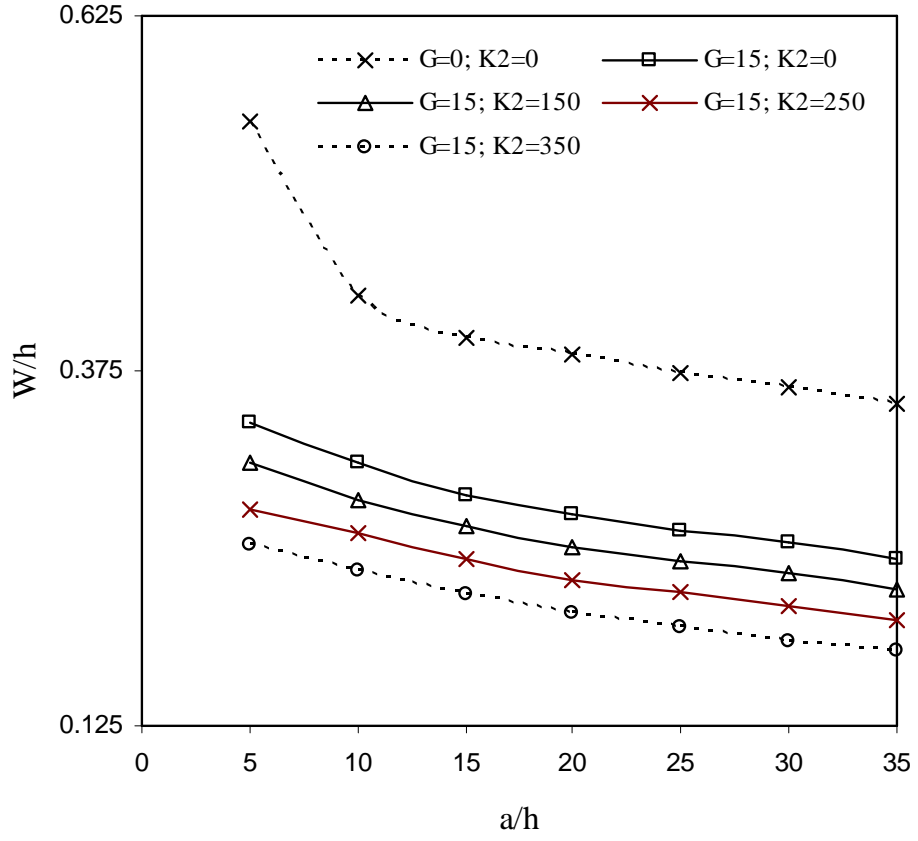
Şekil 5.7. Dört kenarından basit mesnetli tabakalı kompozit plağın farklı zemin parametreleri için yük-deplasman eğrisi (45/-45/45/-45; a/h=10)



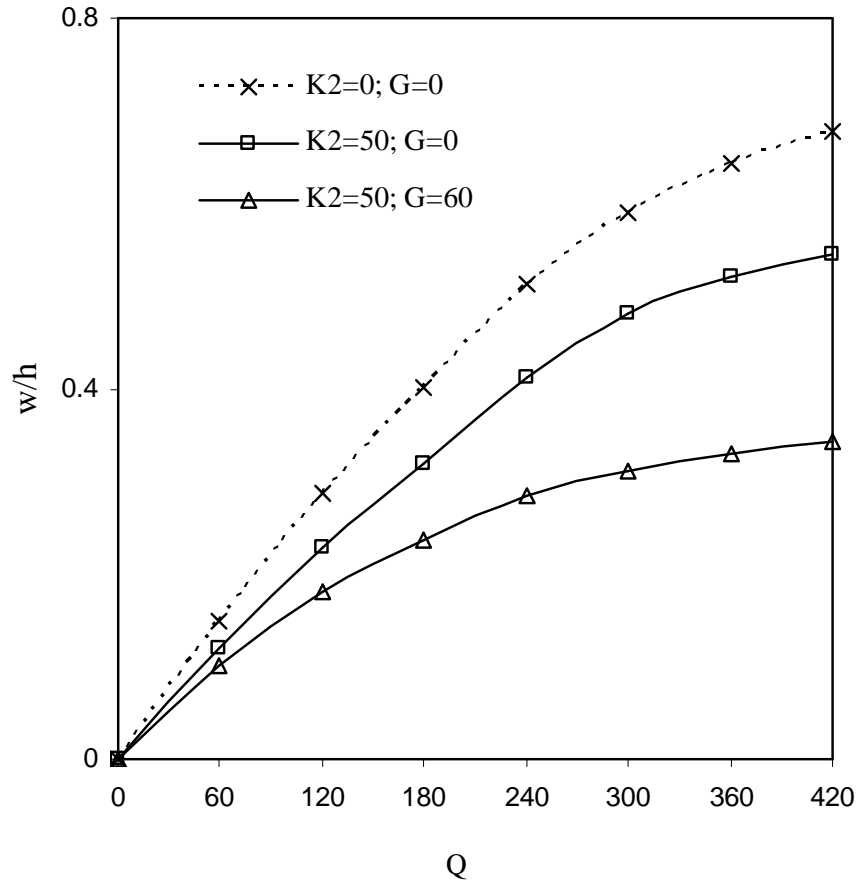
Şekil 5.8. Dört kenarından basit mesnetli tabakalı kompozit plağın (0/90/90/0) farklı kalınlık değerleri için deplasman değerleri ( $K1=100$ ;  $b/a=1.0$ )



Şekil 5.9. CSCS tabakalı kompozit plâğın (0/90/90/0) farklı kalınlık değerleri için deplasman değerleri( $K_1=100$ ;  $b/a=1.0$ )

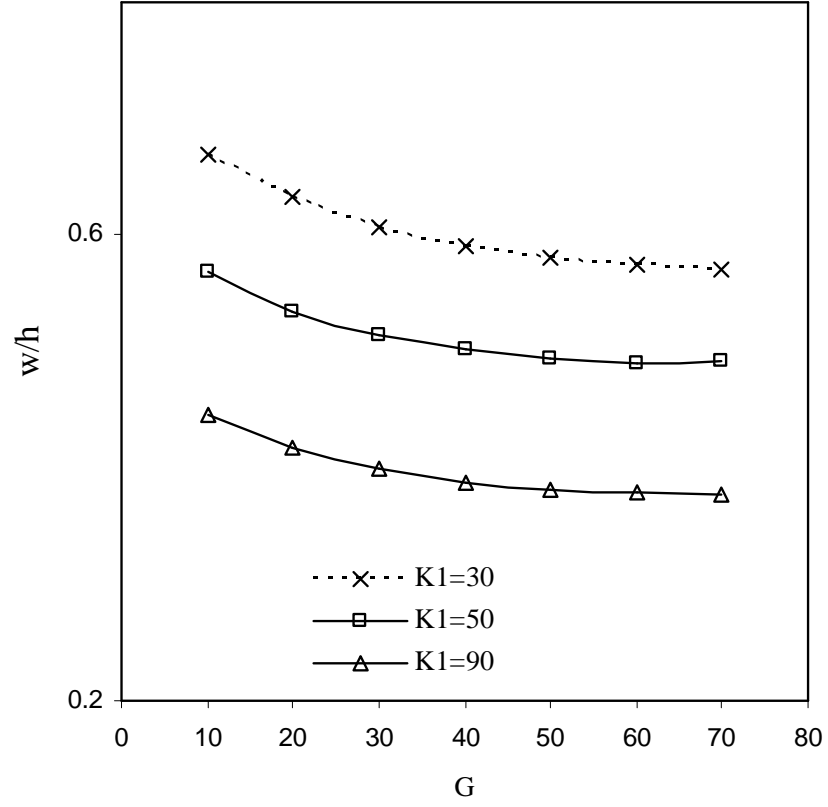


Şekil 5.10. Dört kenarından ankastre mesnetli tabakalı kompozit plağın (0/90/90/0) farklı kalınlık değerleri için deplasman değerleri ( $K1=100$ ;  $b/a=1.0$ )



Şekil 5.11. Dört kenarından basit mesnetli tabakalı (0/90/90/0) plak için yük-deplasman ( $K1=50$ ;  $a/h=100$ ) eğrisi





Şekil 5.12. SCSC tabakalı(0/90/0/90) kare plak için farklı Winkler ( $K_2=100$ ;  $a/h=10$ ;  $Q=320$ ) ve Pasternak parametreleri için deplasman değerleri

## 6. SONUÇ ve TARTIŞMA

Çözüm için literatürde henüz birkaç yıldır kullanılan ve yaklaşım fonksiyonu olarak kernelleri kullanan ayırık tekil konvolüsyon (ATK) seçilmiş ve sonuçlar çoğu durum için karşılaştırılmıştır. ATK yöntemi her durumda (gerek zemin etkisinin dikkate alındığı ve gerekse alınmadığı) yeter doğrulukta sonuçları daha az düğüm nokta sayısı ile üretmekte ancak hassasiyet ATK yöntemiyle ilgili olan parametrelere bağlı olarak değişmektedir. Ayırık tekil konvolüsyon için daha önceki çalışmalardan çıkarılan deneyimlerden (Gürses 2008; Kuzu, 2007) faydalanılarak farklı 6 kernel parametresi ( $r=0.8$ ;  $r=1.21$ ;  $r=2.64$ ;  $r=2.92$ ;  $r=3.1$ ;  $r=4$ ) seçilerek performansları irdelenmiştir. En hassas çözüm  $r=2.64$  ve  $N=15$  için hesaplanmıştır. Hesaplarda  $N < M$  alınmıştır. Düğüm nokta sayısının yakınsamaya olan etkisi vurgulanmış ancak, hassasiyet için AYT yönteminde kullanılan  $r$  parametresinin daha önemli olduğu görülmüştür. ATK yönteminde ise eşit aralıklı düğüm nokta dağılımı kullanılmıştır. Parametrik çalışma neticesinde elde edilen sonuçlar ise şöyle özetlenebilir:

- Plağın deformasyonuna etki eden parametreler daha çok malzeme tipi, plak geometrisi, yük, ve zemin parametreleridir.
- Belirli bir katmandan sonra tabaka sayısının lineer olmayan deformasyon üzerinde etkisi çok azdır.
- Plak kenar boyutlarının oranı ve kalınlık deformasyon üzerine her iki durumda da (zemine oturan veya oturmayan plak durumunda) etkindir. Ancak kalınlık plak boyutlarının oranına göre daha az etkiye sahiptir. Kalınlığın artması deformasyonu azaltmaktadır. Plak kenar oranları arttıkça deformasyon artmakta ancak belirli bir değerden sonra bu artış önemsiz olmaktadır.
- Pasternak zemin parametresi ( $G$ ) diğer zemin tipine göre, yani Winkler ( $K1$ )zemine göre sonuçlar üzerinde daha efektiftir. Ancak lineer olmayan Winkler parametresinin ( $K2$ ) değişimi en fazla etkiye sahiptir.

## 7. KAYNAKLAR

- BALTACIOGLU, A.K., AKÖZ, B., CİVALEK, Ö. 2010. Nonlinear static response of laminated composite plates by discrete singular convolution method, *Composite Structures*, 93, 153-161.
- BELMANN, R.E. and CASTI, J. 1971. Differential quadrature and long-term integration. *Journal of Mathematical Analysis Application*, 34: 235-238.
- BELMANN, R., KASHEF, B.G. and CASTI, J. 1972. Differential quadrature : A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 10: 40-52.
- BERT, C.W., JANG, S.K. and STRIZ, A.G. 1987. Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components. *AIAA Journal*, 26(5): 612-618.
- BERT, C.W., WANG, Z. and STRIZ, A.G. 1993. Differential quadrature for static and free vibration analysis of anisotropic plates. *International Journal of Solids And Structures*, 30(13): 1737-1744.
- BERT, C.W., WANG, Z. and STRIZ, A.G. 1994-a. Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method. *Acta Mechanica*, 102: 11-24.
- BERT, C.W., WANG, Z. and STRIZ, A.G. 1994-b. Convergence of the DQ method in the analysis of anisotropic plates. *Journal Of Sound And Vibration*, 170(1): 140-144.
- BERT, C.W. and MALIK, M. 1996-a. Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanic Rev*, 49(1): 1-28.
- BERT, C.W. and MALIK, M. 1996-b. The differential quadrature method for irregular domains and application to plate vibration. *Int. J. Mech. Sci.* , 38(6): 589-606.
- BERT, C.W. and MALIK, M. 1996-c. Free vibration analysis of tapered rectangular plates by differential quadrature method: A semi- analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, 190(1): 41-63.
- BERT, C.W. and MALIK, M. 1996-d. Free vibration analysis of thin cylindrical shells by the differential quadrature method. *Journal Of Pressure Vessel Technology*, 118: 1-12.
- BERT, C.W. and MALIK, M. 1997. Differential quadrature: A powerful new technique for analysis of composite structures. *Journal Of Composite Structures*, 39: 179-189.
- BJÖRCK, A. and PEREYRA, V. 1970. Solution of vandermonde system of equations. *Mathematical Computing*, 24: 893-903.

- CİVALEK, Ö. 1998. Plak ve kabukların sonlu elemanlar metoduyla analizi.Yüksek Lisans Semineri, Fırat Üniversitesi
- CİVALEK, Ö. ve ÇATAL, S. 2004. Genelleştirilmiş diferansiyel quadrature Methodu ile kısmi türevli diveransiyel denklemlerin çözümü.Dokuzeylül Üniversitesi,İzmir.
- CİVALEK, Ö. 2004. Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns. *Engineering Structures*, 26(2): 171-186.
- CİVALEK, Ö. 2006-a. Free vibration analysis of composite conical shells using the discrete singular convolution algorithm. *Steel and Composite Structures* , 6(4): 353-366.
- CİVALEK, Ö. 2006-b. An efficient method for free vibration analysis of rotating truncated conical shells. *International Journal Of Pressure Vessels And Piping* , 83: 1-12.
- CİVALEK, Ö. 2007-a. Three-dimensional vibration, buckling and bending analyses of thick rectangular plates based on discrete singular convolution method. *International Journal Of Mechanical Sciences*, 49: 752–765.
- CİVALEK, Ö. 2007-b. Nonlinear analysis of thin rectangular plates on winkler-pasternak elastic foundations by DSC-HDQ methods. *Applied Mathematical Modeling*, 31: 606-624.
- CİVALEK, Ö., BALTACIOGLU, A.K. 2010, Three-dimensional elasticity analysis of rectangular composite plates, *Journal of Composite Materials*, 44(17) 2049-2066.
- CİVALEK, Ö., BALTACIOGLU, A.K., Geometrically Nonlinear Analysis of Anisotropic Composite Plates Resting On Nonlinear Elastic Foundations, *Computer Modeling in Engineering & Sciences (CMES)*,Accept for Publication, 2010.
- CRANDALL, S.H. 1968 Mühendislik Analizi, Sayısal Hesap Metotlarına Genel Bakış. Çevirenler: Utku, Ş. ve Özden, E.Y., Berksoy Matbaası.
- DALOĞLU, A., DOĞANGÜN, A., AND AYVAZ, Y. 1999. Dynamic analysis of foundation plates using a consistent Vlasov Model , *Journal of Sound and Vibration*, 224(5), 941-951.
- DU, H., LIM, M.K. and LIN, R.M. 1994. Application of generalized differential quadrature method to structural problems. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 37: 1881-1896.
- DU, H., LIM, M.K. and LIN, R.M. 1995. Application of generalized differential quadrature method to vibration analysis. *Journal of Sound And Vibration*,181(2): 279-293.

- DU, H., LIEW, K.M. and LIM, M.K. 1996. Generalized differential quadrature method for buckling analysis. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* , 22(2): 95-100.
- HAN, J.B. and LIEW, K.M. 1997. An eight-node curvilinear differential quadrature formulation for reissner / mindlin plates. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 141: 265-280.
- HAN, J.B. and LIEW, K.M. 1997. Analysis of moderately thick circular plates using differential quadrature method. *Journal Of Eng. Mech ASCE*,123 (12): 1247-1252.
- HAMMING, R.W. 1973. Numerical Methods For Scientists And Engineers. McGraw-Hill ,New York.
- HETENYI, M. 1946, Beams on elastic foundation, The University of Michigan Press.
- HETENYI, M. 1966, Beams and plates on elastic foundations and related problems, Applied Mechanics Reviews, 19, 95-102.
- HOU, Z.J. and WEI, G.W. 2002 A new approach to edge detection. *Pattern Recognition*,35: 1559-1570.
- HOU, Y., WIE, G.W. and XIANG, Y. 2005. DSC-Ritz method for the free vibration analysis of mindlin plates. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*,62: 262–288.
- JANG S.K., BERT C.W. and STRIZ A.G. 1989. Application of differential quadrature to static analysis of structural components. *International Journal For Numerical Methods in Engineering* , 28: 561-577.
- KANG, K., BERT, C.W. and STRIZ, A.G. 1995. Vibration analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 181(2): 353-360.
- KANG, K., BERT, C.W. and STRIZ, A.G. 1996. Vibration analysis of horizontally curved beams with warping using DQM. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 122(6): 657-662.
- LIEW, K.M., HUNG, K.C. and LIM, M.K. 1995. Vibration characteristic of simply supported thick skew plates in three-dimensional setting. *Journal Of Applied Mechanics ASME*, 62: 880-886.
- LIEW, K. M. and HAN, J.B. 1995. Bending analysis of simply supported shear deformable skew plates. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 123(3): 214-221.

- LIEW, K. M. and LIU, F.L. 1997. Differential cubature method : A solutions technique for kirchhoff plates of arbitrary shapes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,145: 1-10.
- LIEW, K. M. and HAN, J-B. 1997. A four-note differential quadrature method for straight-sided quadrilateral reissner/mindlin plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering* ,13: 73-81.
- LIM, C.W. and LIEW, K.M. 1995. Vibration of pretwisted cantilever trapezoidal symmetric laminates. *Acta Mechanica*,111(3-4): 193-208.
- LIM, C.W., LIEW, K.M. and KITIPORNCHAI, S. 1996. Vibration of arbitrarily laminated plates of general trapezoidal planform. *Journal of the Acoustical Society of America*, 100(6): 3674-3685.
- LIM, C.W. 1999. Three-dimensional vibration analysis of a cantilevered parallelepiped: Exact and approximate solutions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 106(6): 3375-3383.
- LIM, C.W., LI, Z.R., XIANG, Y., WEI, G.W. and WANG, C.M. 2005. On the missing modes when using the exact frequency relationship between kirchhoff and mindlin plates. *Advances in Vibration Engineering*, 4: 221-248.
- LIM, C.W., LI, Z.R. and WEI, G.W. 2005. DSC-ritz method for high-mode frequency analysis of thick shallow shells. *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, 62: 205-232.
- LIN, R.M., LIM, M. K. and DU, H. 1994-a. Large deflection analysis of plates under thermal loading. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,117: 381-390.
- LIN, R.M., LIM, M. K. and DU, H. 1994-b. Deflection of plates with nonlinear boundary supports using generalized differential quadrature. *Computers & Structures*, 53(4): 993-999.
- MALIK, M. and BERT, C.W. 1996. Implementing multiple boundary conditions in the DQ solution of higher-order PDE's: Application to free vibration of plates. *International Journal for Numerical Meth. in Engineering*,39: 1237-1258.
- MALEKZADEH, P, SETOODEH, A.R. 2007. Large deformation analysis of moderately thick laminated plates on nonlinear elastic foundation. *Comp Struct* 80:569-579.

- NATH, Y, PRITHVIRAJU, M, MUFTI A.A. 2006. Nonlinear static and dynamics of antisymmetric composite laminated square plates supported on nonlinear elastic subgrade. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 11:340-354.
- NG, CHW, ZHAO, Y.B. and WIE, G.W. 2004. Comparison of discrete singular convolution and generalized differential quadrature for the vibration analysis of rectangular plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,193: 2483 –2506.
- PASTERNAK, P.L. 1954. New method of calculation for flexible substructures on two-parameter elastic foundation, Gosudarstvennoe Izdatelstoo, Literaturi po Stroitelstvu Arkhitekture, pp. 1–56 , Moskau,(in Russian).
- PUTCHA, N.S., REDDY, J.N., 1986. A refined mixed shear flexible finite element for the non-linear analysis of laminated plates, *Computers and Structures*, 22: 529-538.
- QUAN, J.R. and CHANG, C.T. 1989-a. New insights in solving distributed system equations by the quadrature method-I analysis. *Computers in Chemical Engineering*,13(7): 779-788.
- QUAN, J.R. and CHANG, C.T. 1989-b. New insights in solving distributed system equations by the quadrature method-II. numerical experiment. *Computers Chemical Engineering*, 13(9): 1017-1024.
- SHU, C. and RICHARDS, B.E. 1992. Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible navier-stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* , 15: 791-798.
- SHUKLA, K.K., NATH, Y. 2000. Non-linear analysis of moderately thick laminated rectangular plates, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*,.26;831-838.
- STRIZ, A.G., CHEN, W. and BERT, C.W. 1994. Static analysis of structures by the quadrature element method. *International Journal of Solids and Structures*, 31(20): 2807-2818.
- STRIZ, A.G., WANG, X., and BERT, C.W. 1995. Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components. *Acta Mechanica*,111:85-94.
- VLASOV, I. V.Z., AND LEONT'EV N.N. 1966. Beams, Plates and Shells on Elastic foundations, Translated from Russian to English by Barouch, A., Israel Program for scientific translations, Jerusalem.

- WAN, D.C. and WIE, G.W. 2000. Numerical solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations by efficient discrete singular convolution method. *Acta Mechanica Sinica*, 16(3), 223-239.
- WANG, X., STRIZ, A.G. and BERT, C.W. 1994. Buckling and vibration analysis of skew plates by the differential quadrature method. *AIAA Journal*, 32(4): 886-889.
- WANG, G. and CHENG-TZU, T.H. 1994. Static and dynamic analysis of arbitrary quadrilateral flexural plates by  $B_3$ -Spline functions. *International Journal of Solids and Structures*, 31: 657-667.
- WEI, G.W. 1999. Discrete singular convolution for the solution of the Fokker-Planck equations. *Journal of Chemical Physics*, 110: 8930-8942.
- WEI, G.W. 2000-a. Solving quantum eigenvalue problems by discrete singular convolution. *Journal of Physics B: At. Mol. Opt. Physics*, 33: 343-352.
- WEI, G.W. 2000-b. Discrete singular convolution for the Sine-Gordon equation. *Physica D*, 137: 247-259.
- WEI, G.W. 2000-c. A unified approach for the solution of the fokker-planck equation. *Journal of Physics A: Math. Gen.*, 33: 4935-4953.
- WEI, G.W. 2000-d. Wavelets generated by using discrete singular convolution kernels. *Journal Of Physics A: Math. Gen.*, 33: 8577-8596.
- WEI, G.W. 2001-a. Vibration analysis by discrete singular convolution. *Journal of Sound and Vibration*, 244: 535-553.
- WEI, G.W. 2001-b. Discrete singular convolution for beam analysis. *Engineering Structures*, 23: 1045-1053.
- WEI, G.W., ZHAO, Y.B. and XIANG, Y. 2001. The determination of natural frequencies of rectangular plates with mixed boundary conditions by discrete singular convolution. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43: 1731-1746.
- WEI, G.W. and YUN, G. 2002. Conjugate filter approach for solving burgers' equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 149: 439-456.
- WEI, G.W., ZHAO, Y.B. and XIANG, Y. 2002. Discrete singular convolution and its application to the analysis of plates with internal supports; part 1: theory and algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55: 913-946.
- WEI, G.W., ZHAO, Y.B. and XIANG, Y. 2002-a. A novel approach for the analysis of high-frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 257(2): 207-246.



- WINKLER, E. 1867. Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit, p. 182, Prague.
- ZHAO, S., WEI, G.W. and XIANG, Y. 2002-b. Discrete singular convolution and its application to the analysis of plates with internal supports; part 2: applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,55: 947-971.
- ZHAO, S., WEI, G.W. and XIANG, Y. 2002-c. Discrete singular convolution for the prediction of high frequency vibration of plates. *International Journal of Solids and Structures*, 39: 65-88.
- ZHAO, S., WEI, G.W. and XIANG, Y. 2002-d. Plate vibration under irregular internal supports. *International Journal of Solids and Structures*,39: 1361-1383.
- ZHAO, S., WEI, G.W. 2002-e. DSC analysis of rectangular plates with Non-Uniform boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 255(2): 203-228.
- ZHAO, S., WEI, G.W. and XIANG, Y. 2005. DSC analysis of free-edged beams by an iteratively matched boundary method. *Journal of Sound Vibration*, 284: 487-493.

## **ÖZGEÇMİŞ**

Ali Kemal Baltacıoğlu, 1973 yılında TRABZON' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Trabzon'da tamamladı. 1996 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü' nden mezun oldu. 2009 yılında Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı' nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. İller Bankası Genel Müdürlüğünde proje mühendisi olarak çalışmaktadır. Profesyonel düzeyde programlama çalışmaları olup, programlanabilen devreler, web tasarımı, bilgisayar dilleri ve algoritmalar ile ilgilenmektedir.