T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK İÇ VE BULANIK KAPANIŞ OPERATÖRLERİ ÜZERİNE

Hakan ŞİMŞEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2010

BULANIK İÇ VE BULANIK KAPANIŞ OPERATÖRLERİ ÜZERİNE

Hakan ŞİMŞEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2010

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK İÇ VE BULANIK KAPANIŞ OPERATÖRLERİ ÜZERİNE

Hakan ŞİMŞEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../ .../ 2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (.....) not takdir edilerek Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ (Danışman)	....
Prof. Dr. Murat DİKER	....
Yard. Doç. Dr. Sadık BAYHAN	....

ÖZET

BULANIK İÇ VE BULANIK KAPANIŞ OPERATÖRLERİ ÜZERİNE

Hakan ŞİMŞEK

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ

Mayıs 2010, 54 Sayfa

Bu tezde, ilk olarak topolojik bulanık iç operatörleri, topolojik bulanık kapanış operatörleri ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Daha sonra Belohlavek anlamında, bulanık iç ve bulanık kapanış operatörleri tanıtılmış ve bulanık topolojiden daha genel sistemlerle, aralarındaki ilişkiler sunulmuştur. Bu operatörler, $K = \{\mathbf{1}\}$ durumunda tam kalanlı örgü üzerine genişletilerek çekirdek ve kapanış operatörleri olarak adlandırılmış ve temel özellikleri çalışılmıştır. Ayrıca topolojik bulanık iç ve topolojik bulanık kapanış operatörleri de tam kalanlı örgü üzerinde çalışılmıştır. Son olarak çekirdek ve kapanış operatörlerinin L^X üzerinde ürettiği sistemlerde, **L**-süreklilik derecesi ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Bulanık İç Operatörü, Bulanık Kapanış Operatörü, Bulanık Topoloji, Bulanık Mantık, Bulanık Komşuluk Sistemi, Bulanık Süreklilik

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ
Prof. Dr. Murat DİKER
Yard. Doç. Dr. Sadık BAYHAN

ABSTRACT

ON FUZZY INTERIOR OPERATORS AND FUZZY CLOSURE OPERATORS

Hakan ŞİMŞEK

M.Sc. Thesis in Mathematics

Adviser: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ

May 2010, 54 Pages

In this thesis, first, topological fuzzy interior operators, topological fuzzy closure operators and relations between them are investigated. Later, in the sense Belohlavek, fuzzy interior and fuzzy closure operators are introduced and relationships between them with the systems that are more general from fuzzy topology are presented. In case of $K = \{\mathbf{1}\}$, these operators are named kernel and closure operators by expanding on the complete residuated lattice and basic properties are studied. Also topological fuzzy interior and topological fuzzy closure operators are studied on the complete residuated lattice. Finally, $\mathbf{L}$-continuity degree with the corresponding results are obtained in the systems that kernel and closure operators generated on L^X.

KEY WORDS: Fuzzy Interior Operator, Fuzzy Closure Operator
Fuzzy Topology, Fuzzy Logic
Fuzzy Neighborhood System, Fuzzy Continuity

COMMİTEE: Prof. Dr. Mustafa DEMİRCİ
Prof. Dr. Murat DİKER
Asst. Prof. Dr. Sadık BAYHAN

ÖNSÖZ

Bulanık iç operatörleri ve bulanık kapanış operatörleri bulanık küme teorisinde, çeşitli alanlarda önemli uygulamalara sahiptir. Klasik anlamdaki topolojik uzaylarda kapanış ve iç operatörlerinin birbirine denk olduğu ve topolojik uzay oluşturmada eşdeğer bir yol olduğu bilinmektedir. Ancak bulanık anlamdaki iç operatörleri, kapanış operatörleri ve topolojik uzaylar da durum tamamen farklıdır. Bulanık anlamdaki bu kavramlar arasındaki ilişkiler; doğruluk değerleri kümesinin ve bu kümenin üzerindeki işlemin, yani kalanlı örgü (residuated lattice) yapısının seçimine bağlı olarak değişmektedir. Bu tez çalışmasında amaç; topolojik bulanık iç ve kapanış operatörlerinden daha genel olan bulanık iç ve bulanık kapanış operatörlerini ele almak ve bu operatörlerin temel özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri incelemek ve topolojik uzaylardaki bazı özelliklerin topolojiden daha genel sistemlerde uygulamalarını vermektir. Yapılan çalışmanın bulanık küme teorisi alanında çalışan araştırmacılar için bulanık iç operatörü ve bulanık kapanış operatörü konularında yararlı bir kaynak oluşturacağı kanısındayım.

Bana bu konuda çalışma şansı veren ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Mustafa Demirci'ye teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Bulanık iç ve bulanık kapanış operatörleri bulanık küme literatüründe ilk olarak bulanık topolojik uzaylar çerçevesinde Lowen (1976), Höhle ve Sostak (1999) tarafından sunulmuştur. Bu operatörlere topolojik bulanık iç ve topolojik bulanık kapanış operatörleri denecektir. Topolojik bulanık iç ve bulanık kapanış operatörlerinden daha genel olarak bulanık iç ve bulanık kapanış operatörleri Belohlavek (2001, 2002-a, 2002-b, 2003, 2004) tarafından sunulmuş ve temel özellikleri incelenmiştir.

Bulanık kapanış operatörleri ve kapanış sistemleri, tam örgü ve bulanık kümeler üzerinde Biacino ve Gerla (1996), Gerla (1999, 2001) tarafından çalışılmıştır.

L-bulanık topolojik uzaylarda da L-bulanık iç operatörleri Höhle ve Sostak (1999), L-bulanık iç operatörleri ve L-bulanık kapanış operatörleri Shi (2009) tarafından çalışılmıştır. Ancak bu tezde bu anlamdaki operatörler ele alınmamıştır.

Bu tez çalışmasının kapsamında L-bulanık iç ile L-bulanık kapanış operatörleri dışındaki bulanık iç ve bulanık kapanış operatörlerinin ele alınması ve bu operatörler arasındaki ilişkilerde bulanık mantıksal baz olarak kullanılan kalanlı örgü yapısının nasıl bir rol oynadığının araştırılması bulunmaktadır. Ayrıca bulanık iç ve bulanık kapanış operatörlerinin; bulanık topoloji, bulanık iç sistemleri ve bulanık kapanış istemleri ile ne gibi münasebetlerin var olduğunu araştırmak da tezin kapsamında bulunmaktadır.

1.2. Kalanlı Örgüler

Bu bölümde bulanık mantıktaki doğruluk değerleri yapısı olan kalanlı örgüler ve temel özellikleri incelenecektir. Bu yapı klasik mantıktaki iki değerlikli doğruluk yapısının bulanık mantıktaki karşılığı olacaktır. Klasik mantık bundan sonra **2** ile gösterilecektir.

Tanım 1.1 *$L \neq \varnothing$ bir küme olmak üzere $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $\forall a, b \in L$ için $a \wedge b = Inf\{a, b\}$ ve $a \vee b = Sup\{a, b\}$ varsa $(L, \leq, \wedge, \vee)$ yapısına bir* örgü (lattice) *denir. Eğer $\forall A \subseteq L$ için $\wedge A = Inf(A)$ ve $\vee A = Sup(A)$ var ise $(L, \leq)$ ikilisine bir* tam örgü (complete lattice) *denir. $(L, \leq)$ tam örgüsünde, en küçük eleman* **0** *ve en büyük eleman* **1** *ile gösterilir (Höhle ve Sostak 1999, Klement vd 2000, Belohlavek 2002-b).*

Tanım 1.2 *Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ yapısına bir* tam kalanlı (residuated) örgü *denir (Höhle 1995, Belohlavek 2002-b):*

(i) $(L, \leq, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ bir tam örgüdür.

(ii) $(L, \otimes)$ değişmeli monoiddir; yani, $\otimes$ değişme, birleşme ve $\forall x \in L$ için $x \otimes \mathbf{1} = x$ özelliklerini sağlar.

(iii) Bitişiklik(Adjointness) özelliğini sağlar; yani, $\forall x, y, z \in L$ için

$$(AD) \quad x \otimes y \leq z \Leftrightarrow x \leq y \rightarrow z \ \textit{dir.}$$

Yukarıda geçen $\otimes$ ve $\rightarrow$ işlemleri sırasıyla çarpım ve kalan (residuum) işlemleri, $(\otimes, \rightarrow)$ ikilisi de bitişik (adjoint) çift olarak adlandırılır. $\rightarrow$ işlemi (AD) özelliği ile tek türlü olarak belirlidir.

Örnek 1.3 *(Belohlavek 2002-b) $L = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde doğal sıralama göz önüne alınırsa $a \wedge b = \min(a, b)$ ve $a \vee b = \max(a, b)$ olmak üzere $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ bir tam örgüdür. Bu örgü yapısıyla aşağıdaki işlem çiftlerinin her biri ile $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ bir tam kalanlı örgü yapısı oluşturur: $\forall a, b \in L$ için;*

(i) $a \otimes b = \max(a + b - 1, 0)$, $a \rightarrow b = \min(1 - a + b, 1)$ *(Lukasiewicz yapısı)*

(ii) $a \otimes b = \min(a, b)$, $a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ b & a > b \end{cases}$ *(Gödel yapısı)*

(iii) $a \otimes b = a.b$, $a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ \frac{b}{a} & a > b \end{cases}$ *(Çarpımsal yapı)*

Önerme 1.4 *(Höhle 1995, Belohlavek 2002-b) Aşağıdaki özellikler herhangi* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \to, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *tam kalanlı örgüsünde geçerlidir:* $\forall x, y, z \in L$ *için;*

(i) $x \otimes (x \to y) \leq y, \;\; y \leq x \to (x \otimes y), \;\; x \leq (x \to y) \to y$

(ii) $x \leq y \iff x \to y = \mathbf{1}$

(iii) $x \to x = \mathbf{1}, \;\; x \to \mathbf{1} = \mathbf{1}, \;\; \mathbf{0} \to x = \mathbf{1}$

(iv) $\mathbf{1} \to x = x, \;\; x \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$

(vi) $x \otimes y \leq x, \;\; x \leq y \to x$

(vii) $x \otimes y \leq x \wedge y$

(viii) $(x \otimes y) \to z = x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$

(ix) $(x \to y) \otimes (y \to z) \leq (x \to z)$

(x) $x \to y = \vee \{z \in L : x \otimes z \leq y\}$

(xi) $x \otimes y = \wedge \{z \in L : x \leq y \to z\}$

Önerme 1.5 *(Höhle 1995, Belohlavek 2002-b) Her* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \to, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *tam kalanlı örgü yapısında aşağıdakiler doğrudur:* $\forall x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$ *için;*

(i) $y_1 \leq y_2 \Rightarrow x \otimes y_1 \leq x \otimes y_2$

(ii) $y_1 \leq y_2 \Rightarrow x \to y_1 \leq x \to y_2$

(iii) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_2 \to y \leq x_1 \to y$

Önerme 1.6 *(Höhle 1995, Belohlavek 2002-b)* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \to, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *bir tam kalanlı örgü olsun. Aşağıdakiler* $\forall x, y \in L$ *ve* $\forall \{x_i : i \in I\}, \{y_i : i \in I\} \subseteq L$ *için sağlanır:*

(i) $x \otimes \left(\bigvee_{i \in I} y_i \right) = \bigvee_{i \in I} (x \otimes y_i)$

(ii) $x \to \left(\bigwedge_{i \in I} y_i \right) = \bigwedge_{i \in I} (x \to y_i)$

(iii) $\left(\bigvee_{i \in I} x_i \right) \to y = \bigwedge_{i \in I} (x_i \to y)$

(iv) $x \otimes \left(\bigwedge_{i \in I} y_i \right) \leq \bigwedge_{i \in I} (x \otimes y_i)$

(v) $\bigvee_{i \in I} (x \to y_i) \leq x \to \left(\bigvee_{i \in I} y_i \right)$

(vi) $\bigvee_{i \in I} (x_i \to y) \leq \left(\bigwedge_{i \in I} x_i \right) \to y$

Tanım 1.7 *(Höhle 1995, Belohlavek 2002-b)* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \to, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *bir tam kalanlı örgü olsun. L üzerinde*

$$\neg a = a \to \mathbf{0}, \ \forall a \in L$$

şeklinde tanımlı $\neg : L \to L$ *işlemine* değilleme *(negation) denir. Burada kalan ve değilleme işlemleri sırasıyla, klasik mantıktaki gerektirme ve değil alma işlemlerinin çok değerli mantığa genelleştirmeleridir.*

Eğer $\forall a \in L$ *için*

$$a = \neg\neg a = (a \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$$

ise $\mathbf{L}$ *yapısı* çift değilleme *kuralını sağlar denir.*

L üzerinde $\forall a, b \in L$ *için* $a \sqcup b = \neg (\neg (a) \otimes \neg (b))$ *ile belirlenen* $\sqcup$ *işlemine* $\otimes$*'nın duali denir.*

Tanım 1.8 *(Belohlavek 2001, 2002-a, 2004)* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *bir tam kalanlı örgü olsun.* $K \subseteq L$ *boş olmayan alt kümesi*

$$\forall a, b \in L \text{ için; } (a \in K \text{ ve } a \leq b) \Rightarrow b \in K$$

gerektirmesini sağlarsa K*'ya bir* $\leq$*-filtre denir.* $\forall a \in L$ *için* $a \leq \mathbf{1}$ *olduğundan* $\mathbf{1} \in K$ *olur. Eğer* $\forall a, b \in K$ *için* $a \otimes b \in K$ *ise* K $\leq$*-filtresine bir filtre denir. Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece* K*, bir* $\leq$*-filtresini gösterecektir.*

Önerme 1.9 *Her* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *tam kalanlı örgü yapısında aşağıdakiler doğrudur (Höhle 1995, Höhle ve Sostak 1999, Belohlavek 2002-b) :*

(i) $\neg\mathbf{0} = \mathbf{1}, \quad \neg\mathbf{1} = \mathbf{0}$

(ii) $x \otimes \neg x = \mathbf{0}$

(iii) $x \leq \neg\neg x, \quad \neg x = \neg\neg\neg x$

(iv) $x \leq y \Rightarrow \neg y \leq \neg x$

(v) $\neg\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) = \bigwedge_{i \in I} (\neg x_i)$

(vi) $\neg\left(\bigwedge_{i \in I} x_i\right) \geq \bigvee_{i \in I} (\neg x_i)$. *Eğer* $\mathbf{L}$ *çift değilleme kuralını sağlarsa eşitlik elde edilir.*

(vii) $\mathbf{L}$ *çift değilleme kuralını sağlarsa* $\neg(x \sqcup y) = (\neg(x) \otimes \neg(y))$ *ve* $\neg(x \otimes y) = (\neg(x) \sqcup \neg(y))$ *olur.*

(viii) $(\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in L)\left[((x_1 \leq x_2) \text{ ve } (y_1 \leq y_2)) \Rightarrow (x_1 \sqcup y_1 \leq x_2 \sqcup y_2)\right]$

1.3. Bulanık Kümeler Kuramı

Bu bölümde bulanık küme ve bulanık kapsama kavramları tanıtılıp temel özellikleri incelenecektir. Bundan sonraki bölümlerde doğruluk değerleri yapısı olarak $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ tam kalanlı örgü yapısı baz alınacaktır.

Tanım 1.10 *(Goguen 1967) $X \neq \varnothing$ herhangi bir küme ve $L \neq \varnothing$ bir örgü olmak üzere $f : X \rightarrow L$ fonksiyonuna X'in bir L-bulanık kümesi denir ve X'in tüm L-bulanık kümelerinin ailesi L^X ile gösterilir.*

$\forall a \in L$ için $f : X \rightarrow L$, $f(x) = a$, $\forall x \in X$, sabit dönüşümü $a.1_X$ ile gösterilir. Özel olarak $\mathbf{0}.1_X = 1_\varnothing$ ve $\mathbf{1}.1_X = 1_X$ ile gösterilir.

L üzerindeki $\leq$, $\wedge$, $\vee$, $\otimes$, $\rightarrow$, $\neg$ işlemleri L^X'e noktasal olarak aşağıdaki gibi genişletilebilir. $\forall f, g \in L^X$ ve $\forall \{f_i : i \in I\} \subseteq L^X$ için; (Höhle ve Sostak, 1999)

(i) $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in X$

(ii) $\left(\underset{i\in I}{\wedge} f_i\right)(x) = \underset{i\in I}{\wedge} f_i(x)$ *ve* $\left(\underset{i\in I}{\vee} f_i\right)(x) = \underset{i\in I}{\vee} f_i(x), \forall x \in X$

(iii) $(f \otimes g)(x) = f(x) \otimes g(x), \forall x \in X$

(iv) $(f \rightarrow g)(x) = f(x) \rightarrow g(x), \forall x \in X$

(v) $(\neg(f))(x) = \neg(f(x)), \forall x \in X$

Herhangi bir $\mathcal{A} = \{f_i : i \in I\} \subseteq L^X$ ailesi için $\underset{i\in I}{\wedge} f_i = \wedge\mathcal{A}$ ve $\underset{i\in I}{\vee} f_i = \vee\mathcal{A}$ L-bulanık kümeleri sırasıyla $\mathcal{A}$'nın kesişimi ve birleşimi olarak adlandırılır.

Tanım 1.11 *(Gaugen 1967, Lowen 1996) Herhangi bir $\varphi : X \rightarrow Y$ dönüşümü ve $f \in L^X$ ve $g \in L^Y$ L-bulanık kümeleri için φ altında f'nin görüntüsü ve g'nin ters görüntüsü, sırasıyla $\varphi(f) \in L^X$ ve $\varphi^{-1}(g) \in L^Y$ şöyle tanımlanır:*

$$\varphi(f)(y) = \begin{cases} \underset{x\in\varphi^{-1}(y)}{\vee} f(x) & , \ \varphi^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & , \ \textit{aksi halde} \end{cases} \quad \textit{ve} \quad \varphi^{-1}(g)(x) = (g \circ \varphi)(x)$$

Tanım 1.12 *(Sostak 1985, Belohlavek 2001, 2002-a, Belohlavek ve Funikova 2004,)* $\tilde{\subseteq} : L^X \times L^X \longrightarrow L$ *olmak üzere*

$$\forall f, g \in L^X \text{ için } \tilde{\subseteq}(f,g) = \bigwedge_{x \in X} (f(x) \to g(x))$$

ile tanımlı $\tilde{\subseteq}$ *dönüşümüne* L^X *üzerinde* L-bulanık kapsama bağıntısı *denir.* $f, g \in L^X$ *için* L*'nin* $\tilde{\subseteq}(f,g)$ *elemanı* g*'nin* f*'yi kapsama derecesi olarak adlandırılır.*

Önerme 1.13 *(Demirci 2007)* $\forall f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^X, \forall \{f_i : i \in I\} \subseteq L^X, \forall h_1, h_2 \in L^Y, \forall \{h_i : i \in I\} \subseteq L^Y$ *ve* $\varphi : X \to Y$ *dönüşümü için, aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(i) $\tilde{\subseteq}(f,g) = \mathbf{1} \Leftrightarrow f \leq g$

(ii) $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \tilde{\subseteq}(f_2, g) \leq \tilde{\subseteq}(f_1, g)$

(iii) $g_1 \leq g_2 \Rightarrow \tilde{\subseteq}(f, g_1) \leq \tilde{\subseteq}(f, g_2)$

(iv) $\tilde{\subseteq}\left(\bigvee_{i \in I} f_i, g\right) = \bigwedge_{i \in I} \left(\tilde{\subseteq}(f_i, g)\right)$

(v) $\tilde{\subseteq}\left(f, \bigwedge_{i \in I} g_i\right) = \bigwedge_{i \in I} \left(\tilde{\subseteq}(f, g_i)\right)$

(vi) $\tilde{\subseteq}(f,g) \leq \tilde{\subseteq}(\varphi(f), \varphi(g))$

(vii) $\tilde{\subseteq}(h_1, h_2) \leq \tilde{\subseteq}(\varphi^{-1}(h_1), \varphi^{-1}(h_2))$

(viii) $\tilde{\subseteq}(f,g) \leq \tilde{\subseteq}(\neg(g), \neg(f))$ *dir. Eğer* **L** *çift değilleme kuralını sağlarsa* $\tilde{\subseteq}(f,g) = \tilde{\subseteq}(\neg(g), \neg(f))$ *olur.*

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Topolojik Bulanık İç ve Topolojik Bulanık Kapanış Operatörleri

Tanım 2.1 *(Höhle ve Sostak 1999)* $\tau \subseteq L^X$*, L-bulanık kümeler ailesi X üzerinde bir* L-topolojidir $\Leftrightarrow$ *Aşağıdaki üç koşul sağlanır:*

$(O.1)$ $1_\varnothing, 1_X \in \tau$

$(O.2)$ $\forall f, g \in L^X$ *için* $f, g \in \tau \Rightarrow f \otimes g \in \tau$

$(O.3)$ $\forall \{f_i : i \in I\} \subseteq L^X$ *için* $\{f_i : i \in I\} \subseteq \tau \Rightarrow \bigvee_{i\in I} f_i \in \tau$

Bu koşulları sağlayan (X, τ) *çiftine L-topolojik uzay denir.*

Tanım 2.2 *(Demirci 2007)* $\mathcal{C} \subseteq L^X$*, L-bulanık kümeler ailesi X üzerinde bir* L-co-topolojidir $\Leftrightarrow$ *Aşağıdaki üç koşul sağlanır:*

$(C.1)$ $1_\varnothing, 1_X \in \mathcal{C}$

$(C.2)$ $\forall f, g \in L^X$ *için* $f, g \in \mathcal{C} \Rightarrow f \sqcup g \in \mathcal{C}$

$(C.3)$ $\forall \{f_i : i \in I\} \subseteq L^X$ *için* $\{f_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow \bigwedge_{i\in I} f_i \in \mathcal{C}$

Teorem 2.3 *(Demirci 2007)* $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *çift değilleme kuralını sağlayan bir kalanlı örgü olsun. O halde X üzerinde verilen bir* $\mathcal{C}$ *L-co-topolojisi için* $\tau_\mathcal{C} = \{f : \neg(f) \in \mathcal{C}\}$ *X üzerinde bir L-topolojidir. Tersine X üzerinde verilen bir* τ *L-topolojisi için* $\mathcal{C}_\tau = \{f : \neg(f) \in \tau\}$ *X üzerinde bir L-co-topolojidir. Ayrıca* $\mathcal{C}_{\tau_\mathcal{C}} = \mathcal{C}$ *ve* $\tau_{\mathcal{C}_\tau} = \tau$ *olur.*

Tanım 2.4 *(Höhle ve Sostak 1999)* $\mathcal{I} : L^X \longrightarrow L^X$ *dönüşümüne X üzerinde bir* topolojik L-iç operatörü *denir* $\Leftrightarrow$ *Aşağıdaki koşullar sağlanır:*

$(I.0)$ $\mathcal{I}(1_X) = 1_X$

$(I.1)$ $\forall f, g \in L^X$ *için* $f \leq g \Rightarrow \mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}(g)$

$(I.2)$ $\forall f, g \in L^X$ *için* $\mathcal{I}(f) \otimes \mathcal{I}(g) \leq \mathcal{I}(f \otimes g)$

$(I.3)$ $\forall f \in L^X$ *için* $\mathcal{I}(f) \leq f$

$(I.4)$ $\forall f \in L^X$ *için* $\mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}(\mathcal{I}(f))$

Tanım 2.5 *(Demirci 2007)* $\mathcal{C}l : L^X \longrightarrow L^X$ *dönüşümüne* X *üzerinde bir* topolojik L-kapanış operatörü *denir* $\Leftrightarrow$ *Aşağıdaki koşullar sağlanır:*

$(Cl.0)$ $\mathcal{C}l(1_\varnothing) = 1_\varnothing$

$(Cl.1)$ $\forall f, g \in L^X$ *için* $f \leq g \Rightarrow \mathcal{C}l(f) \leq \mathcal{C}l(g)$

$(Cl.2)$ $\forall f, g \in L^X$ *için* $\mathcal{C}l(f \sqcup g) \leq \mathcal{C}l(f) \sqcup \mathcal{C}l(g)$

$(Cl.3)$ $\forall f \in L^X$ *için* $f \leq \mathcal{C}l(f)$

$(Cl.4)$ $\forall f \in L^X$ *için* $\mathcal{C}l(\mathcal{C}l(f)) \leq \mathcal{C}l(f)$

Teorem 2.6 *(Höhle ve Sostak 1999)* X *üzerindeki bir* τ *L-topolojisi*

$$\forall f \in L^X \text{ için } \mathcal{I}_\tau(f) = \vee \{g \in \tau : g \leq f\}$$

ile belirlenen topolojik L-iç operatörünü üretir.Tersine bir $\mathcal{I}$ *topolojik L-iç operatörü*

$$\tau_{\mathcal{I}} = \left\{g \in L^X : g \leq \mathcal{I}(g)\right\}$$

ile belirlenen X *üzerinde bir* $\tau_{\mathcal{I}}$ *L-topolojisini üretir. Dahası* $\tau_{\mathcal{I}_\tau} = \tau$ *ve* $\mathcal{I}_{\tau_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$ *olur.*

Teorem 2.7 *(Demirci 2007) X üzerindeki bir $\mathcal{C}$ L-co-topolojisi*

$$\forall f \in L^X \text{ için } \mathcal{C}l_{\mathcal{C}}(f) = \wedge \{h \in \mathcal{C} : f \leq h\}$$

ile belirlenen topolojik L-kapanış operatörünü üretir. Tersine bir $\mathcal{C}l$ topolojik L-kapanış operatörü

$$\mathcal{C}_{\mathcal{C}l} = \left\{h \in L^X : \mathcal{C}(h) \leq h\right\}$$

ile belirlenen X üzerinde bir $\mathcal{C}_{\mathcal{C}l}$ L-co-topolojisini üretir. Dahası $\mathcal{C}_{\mathcal{C}l_{\mathcal{C}}} = \mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}l_{\mathcal{C}_{\mathcal{C}l}} = \mathcal{C}l$ olur.

Sonuç 2.8 *(Demirci 2007) $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \longrightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ çift değilleme kuralını sağlayan bir tam kalanlı örgü olsun. X üzerindeki bir $\mathcal{I}$ topolojik L-iç operatörü için*

$$\mathcal{C}l_{\mathcal{I}}(f) = \neg(\mathcal{I}(\neg(f))), \forall f \in L^X$$

X üzerinde bir topolojik L-kapanış operatörüdür. Tersine X üzerindeki bir $\mathcal{C}l$ topolojik L-kapanış operatörü için

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}l}(f) = \neg(\mathcal{C}l(\neg(f))), \forall f \in L^X$$

X üzerinde bir topolojik L-iç operatörüdür. Dahası $\mathcal{C}l = \mathcal{C}l_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}l}}$ ve $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}l_{\mathcal{I}}}$ olur.

Kanıt. *Teorem 2.3 ve Teorem 2.7 den elde edilir.*

Tanım 2.9 *(Höhle ve Sostak 1999) $\mathcal{N} : X \longrightarrow L^{\left(L^X\right)}$ bir dönüşüm olsun. $\forall x \in X$ için $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}_x$ olsun. $\mathcal{N}$'ye, X üzerinde bir L-komşuluk sistemi denir $\Leftrightarrow$ Aşağıdaki koşullar sağlanır: $\forall x \in X$ ve $\forall f, f_1, f_2 \in X$ için;*

$(N.0)$ $\mathcal{N}_x(1_X) = 1$

$(N.1)$ $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \mathcal{N}_x(f_1) \leq \mathcal{N}_x(f_2)$

$(N.2)$ $\mathcal{N}_x(f_1) \otimes \mathcal{N}_x(f_2) \leq \mathcal{N}_x(f_1 \otimes f_2)$

$(N.3)$ $\mathcal{N}_x(f) \leq f(x)$

$(N.4)$ $\mathcal{N}_x(f) \leq \vee \{\mathcal{N}_x(h) : h(y) \leq \mathcal{N}_y(f), \forall y \in X\}$

$f \in L^X$ ve $x \in X$ için, L'nin $\mathcal{N}_x(f)$ elemanına f'nin x noktasının komşuluğu olma derecesi denir.

■

Teorem 2.10 *(Höhle ve Sostak 1999) X üzerindeki $\mathcal{I}$ topolojik L-iç operatörü $\forall f \in L^X$ ve $\forall x \in X$ için $\mathcal{N}_x^{(\mathcal{I})}(f) = [\mathcal{I}(f)](x)$ ile belirlenen $\mathcal{N}^{(\mathcal{I})} = \left(\mathcal{N}_x^{(\mathcal{I})}\right)_{x \in X}$ L-komşuluk sistemini üretir. Tersine $\mathcal{N} = (\mathcal{N}_x)_{x \in X}$ L-komşuluk sistemi $\forall f \in L^X$ ve $\forall x \in X$ için; X üzerinde $\left[\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(f)\right](x) = \mathcal{N}_x(f)$ ile belirlenen $\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}$ topolojik L-iç operatörünü üretir. Ayrıca $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\left(\mathcal{N}^{(\mathcal{I})}\right)}$ ve $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\left(\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}\right)}$ olur.*

Bu teorem sayesinde L-iç operatörleri ve L-komşuluk sistemleri birbirlerine denk kavramlar olur. Dolayısıyla L-iç operatörleri ve L-topolojiler birbirlerine denk olduğundan L-komşuluk sistemleri ve L-topolojiler de birbirlerine denk kavramlar olur.

2.2. Bulanık İç Operatörleri

Tanım 2.11 *(Belohlavek ve Funikova 2004) $\mathbf{L}$ bir tam kalanlı örgü ve K $\mathbf{L}$'de bir $\leq$-filtre olsun. X üzerindeki bir $\mathbf{L}_K$-iç operatörü (bulanık iç operatörü (fuzzy interior operator)) aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{I} : L^X \to L^X$ bir dönüşümdür: $\forall f, f_1, f_2 \in L^X$ için;*

$(IK.1)$ $\mathcal{I}(f) \leq f$

$(IK.2)$ $\tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \in K$ *ise* $\tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f_1), \mathcal{I}(f_2))$

$(IK.3)$ $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(\mathcal{I}(f))$

Not 2.12 *(Belohlavek ve Funikova 2004)* (1) : *Eğer* $K = L$ *ise* $\mathcal{I}$*'ya* L*-iç operatörü denir.* K *kümesi, yeniden tasarlanmış doğruluk değerleri kümesinin rolünü oynar.* K, $\mathbf{L}$*'de bir* $\leq$*-filtre olduğundan bir bakıma yeterli derecede yüksek doğruluk değerlerini yeniden sunar.*

(2) : K_1, K_2 $\mathbf{L}$*'de* $\leq$*-filtreler olmak üzere* $K_1 \subseteq K_2$ *ise her* $\mathbf{L}_{K_2}$*-iç operatörü bir* $\mathbf{L}_{K_1}$*-iç operatörüdür.*

$\boldsymbol{S}_{\mathcal{I}} = \left\{ f \in L^X : \mathcal{I}(f) = f \right\}$ kümesi göz önüne alınırsa $(IK.3)$ koşulundan $\boldsymbol{S}_{\mathcal{I}} = \left\{ \mathcal{I}(f) : f \in L^X \right\}$ olur. Aksi iddia edilmedikçe $\mathcal{I}$ bir $\mathbf{L}_K$-iç operatörünü gösterecektir.

Lemma 2.13 *(Belohlavek ve Funikova 2004)* $i \in \Omega$ *olmak üzere* $f_i \in \boldsymbol{S}_{\mathcal{I}}$ *için* $\bigvee_{i \in \Omega} f_i = \mathcal{I}\left(\bigvee_{i \in \Omega} f_i \right)$ *olur. Yani* $\boldsymbol{S}_{\mathcal{I}}$ *keyfi birleşimler altında kapalıdır.*

Kanıt. $\forall i \in \Omega$ *için* $\mathcal{I}(f_i) \leq \bigvee_{i \in \Omega} \mathcal{I}(f_i)$*'dır.* $(IK.3)$, $(IK.2)$ *koşullarından ve* $f_i \in \boldsymbol{S}_{\mathcal{I}}$ *olduğundan*

$$f_i = \mathcal{I}(f_i) = \mathcal{I}(\mathcal{I}(f_i)) \leq \mathcal{I}\left(\bigvee_{i \in \Omega} \mathcal{I}(f_i) \right) \Rightarrow \bigvee_{i \in \Omega} f_i \leq \mathcal{I}\left(\bigvee_{i \in \Omega} \mathcal{I}(f_i) \right) = \mathcal{I}\left(\bigvee_{i \in \Omega} f_i \right)$$

elde edilir. $(IK.1)$ *koşulundan* $\mathcal{I}\left(\bigvee_{i \in \Omega} f_i \right) \leq \bigvee_{i \in \Omega} f_i$ *olduğundan* $\mathcal{I}\left(\bigvee_{i \in \Omega} f_i \right) = \bigvee_{i \in \Omega} f_i$ *bulunur.* ■

Lemma 2.14 *(Belohlavek ve Funikova 2004)* $f \in \boldsymbol{S}_{\mathcal{I}}$ *ve* $a \in K$ *için* $\mathcal{I}(a \otimes f) = a \otimes f$ *olur.*

Kanıt. $f \in \boldsymbol{S}_{\mathcal{I}}$ *olduğundan* $f = \mathcal{I}(f)$*'dir. Bu nedenle* $\mathcal{I}(a \otimes \mathcal{I}(f)) = a \otimes \mathcal{I}(f)$ *eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir.* $(IK.1)$ *koşulundan* $\mathcal{I}(a \otimes \mathcal{I}(f)) \leq a \otimes \mathcal{I}(f)$ *olur. Tersine* $\forall x \in X$ *için* $a \otimes (\mathcal{I}(f)(x)) = (a \otimes \mathcal{I}(f))(x)$ *olduğundan Tanım 1.2* (AD) *özelliğinden*

$$a \leq \mathcal{I}(f)(x) \to (a \otimes \mathcal{I}(f))(x) \Rightarrow a \leq \bigwedge_{x \in X} (\mathcal{I}(f)(x) \to [(a \otimes \mathcal{I}(f))(x)])$$

olur. Buradan $a \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f), a \otimes \mathcal{I}(f))$ *olur. Buna göre* $a \in K$ *ve* K*'nın* $\leq$*-filtre özelliğinden* $\tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f), a \otimes \mathcal{I}(f)) \in K$ *olur ki* $(IK.2)$ *ve* $(IK.3)$ *özelliklerinden*

$$a \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f), a \otimes \mathcal{I}(f)) \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(\mathcal{I}(f)), \mathcal{I}(a \otimes \mathcal{I}(f))) = \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(a \otimes \mathcal{I}(f)))$$

olması demektir. O halde

$$a \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(a \otimes \mathcal{I}(f))) \Rightarrow a \leq \bigwedge_{x \in X}(\mathcal{I}(f)(x) \to \mathcal{I}(a \otimes \mathcal{I}(f))(x)) \Rightarrow$$

$$a \leq (\mathcal{I}(f)(x) \to \mathcal{I}(a \otimes \mathcal{I}(f))(x))$$

(AD) *özelliğinden*

$$a \otimes \mathcal{I}(f)(x) \leq \mathcal{I}(a \otimes \mathcal{I}(f))(x), \quad (\forall x \in X) \Rightarrow a \otimes \mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}(a \otimes \mathcal{I}(f))$$

olur. O halde $\mathcal{I}(a \otimes \mathcal{I}(f)) = a \otimes \mathcal{I}(f)$ *elde edilir.* ■

Teorem 2.15 *(Belohlavek ve Funikova 2004)* $\mathcal{I} : L^X \to L^X$ *dönüşümü bir* $\mathbf{L}_K$*-iç operatörüdür* $\Leftrightarrow \mathcal{I}$ $(IK.1)$ *koşulunu ve aşağıdaki koşulu sağlar:*

$(IK.0)$ $\tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f_1), f_2) \in K$ *ise* $\tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f_1), f_2) \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f_1), \mathcal{I}(f_2))$

Kanıt. $(:\Longrightarrow)$ $\mathcal{I}$ *bir* $\mathbf{L}_K$*-iç operatörü olsun.* $\tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f_1), f_2) \in K$ *ise* $(IK.2)$ *ve* $(IK.3)$ *özelliklerinden*

$$\tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f_1), f_2) \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(\mathcal{I}(f_1)), \mathcal{I}(f_2)) = \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f_1), \mathcal{I}(f_2))$$

bulunur ve $(IK.0)$ *sağlanır.*

$(\Longleftarrow:)$ $\mathcal{I}$ $(IK.1)$ *ve* $(IK.0)$ *koşullarını sağlasın.*

$(IK.2)$: $\tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \in K$ *olsun.* $(IK.1)$*'den* $\forall x \in X$ *için* $\mathcal{I}(f_1)(x) \leq f_1(x)$ *olur. Önerme 1.5 (ii)'den*

$$f_1(x) \to f_2(x) \leq \mathcal{I}(f_1)(x) \to f_2(x) \Rightarrow$$

$$\bigwedge_{x \in X}(f_1(x) \to f_2(x)) \leq \bigwedge_{x \in X}(\mathcal{I}(f_1)(x) \to f_2(x)) \;\; \Rightarrow \;\; \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f_1), f_2)$$

olur. $\tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \in K$ *ve* K $\leq$*-filtre olduğundan* $\tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f_1), f_2) \in K$ *olur ki bu da* $(IK.0)$ *özelliğinden* $\tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f_1), f_2) \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f_1), \mathcal{I}(f_2))$ *olması demektir.*

$(IK.3)$: *Önerme 1.4 (iii)'den* $\forall x \in X$ *için*

$$\mathcal{I}(f)(x) \to \mathcal{I}(f)(x) = \mathbf{1} \Rightarrow \bigwedge_{x \in X} (\mathcal{I}(f)(x) \to \mathcal{I}(f)(x)) = \mathbf{1} \Rightarrow \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(f)) = \mathbf{1}$$

$\mathbf{1} \in K$*'dan* $\tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(f)) \in K$ *ve* $(IK.0)$ *özelliğinden*

$$\mathbf{1} = \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(f)) \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(\mathcal{I}(f))) \Rightarrow \mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}(\mathcal{I}(f))$$

olur. $(IK.1)$*'den* $\mathcal{I}(\mathcal{I}(f)) \leq \mathcal{I}(f)$ *olur ki bu da* $\mathcal{I}(\mathcal{I}(f)) = \mathcal{I}(f)$ *olması demektir.*

O halde $\mathcal{I}$ *bir* $\mathbf{L}_K$*-iç operatörüdür.* ■

Tanım 2.16 *(Belohlavek ve Funikova 2004)* $\mathcal{S} = \{f_i \in L^X : i \in \Omega\}$ *ailesine* $\tilde{\subseteq}_K$*-birleşimleri altında kapalıdır denir* $\Leftrightarrow \forall f \in L^X$ *için* $\bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i\right) \in \mathcal{S}$ *olur. Burada*

$$\left(\bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i\right)\right)(x) = \bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x)\right), \ \forall x \in X.$$

$\tilde{\subseteq}_K$*-birleşimleri altında kapalı olan* $\mathcal{S}$ *ailesine bir* $\mathbf{L}_K$*-iç sistemi denilecektir.*

Not 2.17 *(Belohlavek ve Funikova 2004)* (1) : $\bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) \in \{\mathbf{1}\}} \left(\tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i\right) = \bigvee_{i \in \Omega, f_i \leq f} f_i$ *olur. Bu nedenle klasik mantık ele alınırsa, yani* $\mathbf{L} = \mathbf{2} = (\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \leq)$ *için,*

$$\mathcal{S} \text{ bir } \mathbf{2}\text{-iç sistemidir} \Leftrightarrow \forall f \in L^X \text{ için } \bigvee_{i \in \Omega, f_i \leq f} f_i \in \mathcal{S}$$

olur. Bu sağdaki ifade de $\mathcal{S}$*'nin keyfi birleşimler altında kapalı olmasına denktir. Yani*

$$\forall f \in L^X \text{ için } \bigvee_{i \in \Omega, f_i \leq f} f_i \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall J \subseteq \Omega \text{ için } \bigvee_{j \in J} f_j \in \mathcal{S} \text{ olur.}$$

Bu denklik şu şekilde görülür:

$(:\Longrightarrow)$ $f = \mathbf{1}_X$ *alınırsa* $j \in J \subseteq \Omega$ *olmak üzere* $f_j \leq \mathbf{1}_X$ *olduğundan* $\bigvee_{j \in J, f_j \leq \mathbf{1}_X} f_j \in \mathcal{S}$ *olur.* $\forall j \in J$ *için* $f_j \leq \mathbf{1}_X$ *olduğundan* $\bigvee_{j \in J} f_j \in \mathcal{S}$ *bulunur.*

$(\Longleftarrow:)$ $\mathcal{S}$ *keyfi birleşimler altında kapalı olduğundan istenen açıktır.*

(2) : *Genelde keyfi birleşim altındaki kapanışlar $\tilde{\subseteq}_K$-birleşimleri altındaki kapanıştan daha zayıf bir koşuldur. Gerçekten $\mathcal{S}$ $\tilde{\subseteq}_K$-birleşimleri altında kapalı olsun. $\mathcal{S}$'nin keyfi birleşimler altında kapalı olduğunu göstermek için Tanım 2.16 gereği $\forall J \subseteq \Omega$ için*

$$\bigvee_{j\in J} f_j(x) = \bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}\left(f_i, \bigvee_{j\in J} f_j\right)\in K} \left(\tilde{\subseteq}\left(f_i, \bigvee_{j\in J} f_j\right) \otimes f_i(x)\right)$$

eşitliğini görmek yeterlidir. Buna göre $\forall j \in J$ için $f_j \leq \bigvee_{j\in J} f_j$ olduğundan

$$\tilde{\subseteq}\left(f_j, \bigvee_{j\in J} f_j\right) \otimes f_j(x) = \mathbf{1} \otimes f_j(x) = f_j(x)$$

olur. O halde

$$\bigvee_{j\in J} f_j = \bigvee_{j\in J, \tilde{\subseteq}\left(f_j, \bigvee_{j\in J} f_j\right)\in K} \left(\tilde{\subseteq}\left(f_j, \bigvee_{j\in J} f_j\right) \otimes f_j(x)\right) \leq$$

$$\left[\bigvee_{j\in J, \tilde{\subseteq}\left(f_j, \bigvee_{j\in J} f_j\right)\in K} \left(\tilde{\subseteq}\left(f_j, \bigvee_{j\in J} f_j\right) \otimes f_j(x)\right)\right] \vee \left[\bigvee_{i\in\Omega-J, \tilde{\subseteq}\left(f_i, \bigvee_{j\in J} f_j\right)\in K} \left(\tilde{\subseteq}\left(f_i, \bigvee_{j\in J} f_j\right) \otimes f_i(x)\right)\right]$$

$$= \bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}\left(f_i, \bigvee_{j\in J} f_j\right)\in K} \left(\tilde{\subseteq}\left(f_i, \bigvee_{j\in J} f_j\right) \otimes f_i(x)\right) \Rightarrow$$

$$\bigvee_{j\in J} f_j \leq \bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}\left(f_i, \bigvee_{j\in J} f_j\right)\in K} \left(\tilde{\subseteq}\left(f_i, \bigvee_{j\in J} f_j\right) \otimes f_i(x)\right)$$

olur. $\tilde{\subseteq}$'nın tanımından

$$\tilde{\subseteq}\left(f_i, \bigvee_{j\in J} f_j\right) \otimes f_i(x) = f_i(x) \otimes \left(\bigwedge_{y\in X}\left(f_i(y) \to \bigvee_{j\in J} f_j(y)\right)\right)$$

olduğundan Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (i)'den

$$f_i(x) \otimes \left(\bigwedge_{y\in X}\left(f_i(y) \to \bigvee_{j\in J} f_j(y)\right)\right) \leq f_i(x) \otimes \left(f_i(x) \to \bigvee_{j\in J} f_j(x)\right) \leq \bigvee_{j\in J} f_j(x)$$

elde edilir. Bu da

$$\bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}\left(f_i, \bigvee_{j\in J} f_j\right)\in K} \left(\tilde{\subseteq}\left(f_i, \bigvee_{j\in J} f_j\right) \otimes f_i(x)\right) \leq \bigvee_{j\in J} f_j(x)$$

olması demektir. Yani eşitlik elde edilir. Diğer yandan keyfi birleşimler altında kapalı iken $\tilde{\subseteq}_K$-birleşimleri altında kapalı olmadığına dair ters örnek şu şekilde verilir:

$X = \{x\}$, $L = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} = K$, $\mathcal{S} = \{1_{\varnothing}, 1_X\}$, $f = \frac{1}{2}.1_X$ olsun. $\mathcal{S}$ keyfi birleşimler altında kapalıdır ama $\tilde{\subseteq}_K$-birleşimleri altında kapalı değildir. Çünkü

$$\bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}(f_i,f)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i\right) = \left(\tilde{\subseteq}(1_{\varnothing}, f) \otimes 1_{\varnothing}\right) \vee \left(\tilde{\subseteq}(1_X, f) \otimes 1_X\right) = f \notin \mathcal{S}$$

olduğundan Tanım 2.16'yı sağlamaz.

Teorem 2.18 *(Belohlavek ve Funikova 2004) $\mathcal{S} = \left\{f_i \in L^X : i \in \Omega\right\}$ bir $\mathbf{L}_K$-iç sistemidir $\Leftrightarrow$ f_i'ye bağlı $a_i \in L$ elemanları için $\bigvee_{a_i\in K} (a_i \otimes f_i) \in \mathcal{S}$ olur.*

Kanıt. ($\Longleftarrow$:) $\bigvee_{a_i\in K} (a_i \otimes f_i) \in \mathcal{S}$ olsun. $\tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K$ için $a_i = \tilde{\subseteq}(f_i, f)$ ve aksi durumda $a_i = \mathbf{0}$ olsun. O halde $\bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}(f_i,f)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i\right) = \bigvee_{a_i\in K} (a_i \otimes f_i) \in \mathcal{S}$ olur ki bu da $\mathcal{S}$'nin bir $\mathbf{L}_K$-iç sistemi olması demektir.

(:$\Longrightarrow$) $\mathcal{S}$ bir $\mathbf{L}_K$-iç sistemi, $a_i \in K$ ve $f = \bigvee_{a_i\in K} (a_i \otimes f_i)$ olsun. $f \in \mathcal{S}$ olduğunu göstermek için $\bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}(f_i,f)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i\right) = f$ eşitliğini elde etmek yeterlidir.

$j \in \Omega$, $a_j \in K$ ise $\forall x \in X$ için $a_j \otimes f_j(x) \leq \bigvee_{a_i\in K} (a_i \otimes f_i(x))$ ise (AD) özelliğinden

$$a_j \leq f_j(x) \to \left(\bigvee_{a_i\in K} (a_i \otimes f_i(x))\right) \Rightarrow a_j \leq \bigwedge_{x\in X} \left(f_j(x) \to \left(\bigvee_{a_i\in K} (a_i \otimes f_i(x))\right)\right)$$

ve buradan $a_j \leq \tilde{\subseteq}(f_j, f)$ olur. K'nın $\leq$-filtre özelliğinden $\tilde{\subseteq}(f_j, f) \in K$ olur. Buna göre f_j'ye bağlı $a_j \in K$ için Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (ii)'den

$$a_j \leq \tilde{\subseteq}(f_j, f) \leq f_j(x) \to \left(\tilde{\subseteq}(f_j, f) \otimes f_j(x)\right) \leq f_j(x) \to \left(\bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}(f_i,f)\in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x)\right)$$

olur.

$$a_j \otimes f_j(x) \leq \left(\bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}(f_i,f)\in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{a_i\in K} (a_i \otimes f_i(x)) \leq \left(\bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}(f_i,f)\in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x)\right)$$

Bu eşitsizlik $\forall x \in X$ için geçerli olduğundan

$$f \leq \bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}(f_i,f)\in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i$$

bulunur. Tersine $\forall x \in X$ ve $\tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K$ olacak şekildeki $\forall i \in \Omega$ için

$$\tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x) = f_i(x) \otimes \bigwedge_{y \in X} (f_i(y) \to f(y))$$

olur. Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (i)'den

$$\tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x) \leq f_i(x) \otimes (f_i(x) \to f(x)) \leq f(x)$$

ve buradan

$$\bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x) \leq f(x) \Rightarrow \bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i \leq f$$

bulunur ve eşitlik elde edilir. ■

Sonuç 2.19 *(Belohlavek ve Funikova 2004) Keyfi birleşimler altında kapalı olan $\mathcal{S} \subseteq L^X$ ailesi bir $\mathbf{L}_K$-iç sistemidir $\Leftrightarrow \forall a \in K$ ve $f \in \mathcal{S}$ için $a \otimes f \in \mathcal{S}$ olur.*

Kanıt. $(:\Longrightarrow)\, \mathcal{S}$ bir $\mathbf{L}_K$-iç sistemi olduğundan Teorem 2.18'den f_i'ye bağlı $a_i \in L$ elemanları için $\bigvee_{a_i \in K} (a_i \otimes f_i) \in \mathcal{S}$ olur. $\mathcal{S}$ keyfi birleşimler altında kapalı olduğundan $\forall a \in K$ ve $f \in \mathcal{S}$ için $a \otimes f \in \mathcal{S}$ olur.

$(\Longleftarrow:)\, \forall a \in K$ ve $f \in \mathcal{S}$ için $a \otimes f \in \mathcal{S}$ ve $\mathcal{S}$ keyfi birleşimler altında kapalı olduğundan f_i'ye bağlı $a_i \in L$ elemanları için $\bigvee_{a_i \in K} (a_i \otimes f_i) \in \mathcal{S}$ olur. O halde Teorem 2.18'den $\mathcal{S}$ bir $\mathbf{L}_K$-iç sistemi olur. ■

Teorem 2.20 *(Belohlavek ve Funikova 2004) $\mathcal{S} = \{f_i \in L^X : i \in \Omega\}$ bir $\mathbf{L}_K$-iç sistemi olsun. Öyleyse $\forall f \in L^X$ için $\bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i = \bigvee_{i \in \Omega, f_i \leq f} f_i$ eşitliği vardır.*

Kanıt.

$$\bigvee_{i \in \Omega, f_i \leq f} f_i = \bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) = \mathbf{1}} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i \leq \bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i$$

bulunur. Tersine; herhangi bir $\forall x \in X$, $\tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K$ olacak şekildeki $i \in \Omega$ için,

$$\tilde{\subseteq}(f_i, f) = \bigwedge_{x \in X} (f_i(x) \to f(x)) \leq f_i(x) \to f(x)$$

ve (AD) özelliğinden

$$\tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x) \leq f(x), \forall x \in X \Rightarrow \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i \leq f$$

bulunur. Bu da

$$\bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i \leq f$$

olması demektir. $\mathcal{S}$ bir $\mathbf{L}_K$-iç sistemi olduğundan $\bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i \in \mathcal{S}$ olur ve buradan

$$\bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i \leq \bigvee_{i \in \Omega, f_i \leq f} f_i$$

bulunur ve eşitlik elde edilir. ■

Lemma 2.21 *(Belohlavek ve Funikova 2004)* $\mathcal{S} = \left\{f_i \in L^X : i \in \Omega\right\}$ *bir* $\mathbf{L}_K$*-iç sistemi olsun.* K L*'de bir filtre olsun. O halde*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f)(x) = \bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i$$

ile belirlenen $\mathcal{I}_{\mathcal{S}} : L^X \to L^X$ *dönüşümü bir* $\mathbf{L}_K$*-iç operatörüdür. Dahası* $\forall f \in L^X$ *için* $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f = \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f)$ *olur.*

Kanıt. $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$*'nin bir* $\mathbf{L}_K$*-iç operatörü olduğunu gösterelim:*

$(IK.1)$: $\forall x \in X$ *ve* $\tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K$ *olacak şekildeki* $\forall i \in \Omega$ *için*

$$\tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x) = f_i(x) \otimes \bigwedge_{y \in X} (f_i(y) \to f(y))$$

olur. Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (i)'den

$$\tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x) \leq f_i(x) \otimes (f_i(x) \to f(x)) \leq f(x)$$

ve buradan

$$\bigvee_{i \in \Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x) \leq f(x) \Rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f)(x) \leq f(x) \Rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f) \leq f$$

bulunur.

$(IK.2) : \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \in K$ *ise*

$$\tilde{\subseteq} \quad (f_1, f_2) \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_1), \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_2)) \Leftrightarrow \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \leq \bigwedge_{x\in X}(\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_1) \to \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_1)(x) \to \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_2)(x) \overset{(AD)}{\Leftrightarrow} \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_1)(x) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_2)(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\bigvee_{j\in\Omega, \tilde{\subseteq}(f_j, f_1)\in K} \tilde{\subseteq}(f_j, f_1) \otimes f_j(x)\right) \otimes \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_2)(x) \Leftrightarrow$$

$\tilde{\subseteq}(f_j, f_1) \in K$ *olacak şekildeki* $\forall j \in \Omega$ *için*

$$\tilde{\subseteq}(f_j, f_1) \otimes f_j(x) \otimes \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_2)(x)$$

eşitsizliği gösterilirse $(IK.2)$ *ispatlanmış olur. Buna göre Önerme 1.4 (ix) ve Önerme 1.6(iv)'den*

$$\tilde{\subseteq}(f_j, f_1) \otimes \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \leq \bigwedge_{x\in X}(f_j(x) \to f_1(x)) \otimes \bigwedge_{x\in X}(f_1(x) \to f_2(x)) \leq$$

$$\leq \bigwedge_{x\in X}[(f_j(x) \to f_1(x)) \otimes (f_1(x) \to f_2(x))] \leq \bigwedge_{x\in X}(f_j(x) \to f_2(x)) = \tilde{\subseteq}(f_j, f_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\subseteq}(f_j, f_1) \otimes \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \leq \tilde{\subseteq}(f_j, f_2)$$

olur. $\tilde{\subseteq}(f_j, f_1), \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \in K$ *olduğundan* K*'nın filtre özelliğinden* $\tilde{\subseteq}(f_j, f_2) \in K$ *bulunur ve buradan Önerme 1.5 (i)'den*

$$\tilde{\subseteq}(f_j, f_1) \otimes \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \otimes f_j(x) \leq \tilde{\subseteq}(f_j, f_2) \otimes f_j(x) \leq$$

$$\leq \bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f_2)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f_i, f_2) \otimes f_i(x)\right) = \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_2)(x)$$

bulunur.

$(IK.3) : (IK.1)$*'den* $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f))$ *olduğunu göstermek yeterlidir.* $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f)$*'nin tanımından* $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f) \in \mathcal{S}$ *olduğundan* $\exists j \in \Omega$ *vardır öyle ki* $f_j = \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f)$ *olur. O halde* $\forall x \in X$ *için*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f)(x) = \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f), \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f)) \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f)(x) \leq$$

$$\leq \bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f))\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f_i, \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f)) \otimes f_i(x)\right) = \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f))(x)$$

bulunur. $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f = \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f)$ *denkliği de şöyle gösterilir:*

$(:\Longrightarrow)$ $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists j \in \Omega,\ f = f_j$*'dir.* $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_j) \leq f_j$ $(IK.1)$*'den vardır. Tersine* $\forall x \in X$ *için*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_j)(x) = \bigvee_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}(f_i, f_j)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f_i, (f_j)) \otimes f_i(x)\right) \geq \tilde{\subseteq}(f_j, f_j) \otimes f_j(x) = f_j(x)$$

yani $f_j \leq \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f_j)$ *bulunur ve eşitlik elde edilir.*

($\Longleftarrow$:) $f = \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f)$ *ise* $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(f)$*'nin ve* $\mathcal{S}$*'nin* $\mathbf{L}_K$*-iç sistemi tanımından* $f \in \mathcal{S}$ *bulunur.* ■

Lemma 2.22 *(Belohlavek ve Funikova 2004)* $\mathcal{I} : L^X \to L^X$ *bir* $\mathbf{L}_K$*-iç operatörü olsun.* $\mathcal{S}_{\mathcal{I}} = \left\{f \in L^X : f = \mathcal{I}(f)\right\}$ *bir* $\mathbf{L}_K$*-iç sistemidir.*

Kanıt. $\mathcal{S}_{\mathcal{I}} = \{f_i : i \in \Omega\}$ olsun. $\forall f \in L^X$ için $\bigvee_{i\in\Omega,\tilde{\subseteq}(f_i,f)\in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ olmalıdır. Buna göre $\mathcal{I}(\mathcal{I}(f)) = \mathcal{I}(f)$ ve buradan $\mathcal{I}(f) \in \mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ olduğundan $\bigvee_{i\in\Omega,\tilde{\subseteq}(f_i,f)\in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x) = \mathcal{I}(f)$ eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. $\mathcal{I}(f) \leq f$ olduğundan $\tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f), f) = \mathbf{1} \in K$ olur. Buradan

$$\mathcal{I}(f)(x) = \mathbf{1} \otimes \mathcal{I}(f)(x) = \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f), f) \otimes \mathcal{I}(f)(x) \leq \bigvee_{i\in\Omega,\tilde{\subseteq}(f_i,f)\in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x)$$

bulunur. Tersine $\tilde{\subseteq}(f_i, f) \in K$ olacak şekildeki $\forall i \in \Omega$ için; $(IK.2)$, Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (i)'den

$$\tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x) \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f_i), \mathcal{I}(f)) \otimes f_i(x) \leq \mathcal{I}(f_i)(x) \otimes \bigwedge_{y\in X} (\mathcal{I}(f_i)(y) \to \mathcal{I}(f)(y)) \leq$$

$$\leq \mathcal{I}(f_i)(x) \otimes (\mathcal{I}(f_i)(x) \to \mathcal{I}(f)(x)) \leq \mathcal{I}(f)(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{i\in\Omega,\tilde{\subseteq}(f_i,f)\in K} \tilde{\subseteq}(f_i, f) \otimes f_i(x) \leq \mathcal{I}(f)(x)$$

olduğundan istenilen eşitlik elde edilir. ■

Teorem 2.23 *(Belohlavek ve Funikova 2004)* $\mathcal{I}$*,* X *üzerinde bir* $\mathbf{L}_K$*-iç operatörü,* $\mathcal{S}$ X *üzerinde bir* $\mathbf{L}_K$*-iç sistemi ve* K $\mathbf{L}$*'de bir filtre olsun. Öyleyse* X *üzerinde* $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ *bir* $\mathbf{L}_K$*-iç sistemi ve* $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$ *bir* $\mathbf{L}_K$*-iç operatörüdür. Ayrıca* $\mathcal{I}_{\mathcal{S}_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$ *ve* $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{\mathcal{S}}} = \mathcal{S}$ *olur.*

Kanıt. Lemma 2.21 ve Lemma 2.22'den $\mathcal{I}_{\mathcal{S}_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$ olduğunu göstermek kalır. Yani $\forall f \in L^X$, $\forall x \in X$ için

$$\mathcal{I}(f)(x) = \bigvee_{g\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}},\tilde{\subseteq}(g,f)\in K} \tilde{\subseteq}(g, f) \otimes g(x)$$

eşitliği gösterilecektir. $\tilde{\subseteq}(g,f)\in K$ olacak şekildeki $\forall g\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ ve $\forall x\in X$ için $(IK.2)$ Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (i)'den

$$\tilde{\subseteq}(g,f)\otimes g(x)\leq\tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(g),\mathcal{I}(f))\otimes g(x)\leq\mathcal{I}(g)(x)\otimes(\mathcal{I}(g)(x)\to\mathcal{I}(f)(x))\leq\mathcal{I}(f)(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\bigvee_{g\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}},\tilde{\subseteq}(g,f)\in K}\tilde{\subseteq}(g,f)\otimes g(x)\leq\mathcal{I}(f)(x)$$

bulunur. Tersine $g=\mathcal{I}(f)$ denirse $(IK.3)$'den $g\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ olduğundan

$$\mathcal{I}(f)(x)=\mathbf{1}\otimes\mathcal{I}(f)(x)=\tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(f),f)\otimes\mathcal{I}(f)(x)\leq\tilde{\subseteq}(g,f)\otimes g(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mathcal{I}(f)(x)\leq\bigvee_{g\in\mathcal{S}_{\mathcal{I}},\tilde{\subseteq}(g,f)\in K}\tilde{\subseteq}(g,f)\otimes g(x)$$

olur ve eşitlik elde edilir. ■

2.3. Bulanık Kapanış Operatörleri

Tanım 2.24 *(Belohlavek 2001, 2002-a)* $\mathbf{L}$ *bir kalanlı örgü ve* K $\mathbf{L}$*'de bir* $\leq$*-filtre olsun.* X *üzerindeki bir* $\mathbf{L}_K$*-kapanış operatörü (bulanık kapanış operatörü (fuzzy closure operator)) aşağıdaki koşulları sağlayan* $\mathcal{C}l: L^X\to L^X$ *bir dönüşümdür:* $\forall f,f_1,f_2\in L^X$ *için;*

$(CK.1): f\leq\mathcal{C}l(f)$

$(CK.2): \tilde{\subseteq}(f_1,f_2)\in K$ *ise* $\tilde{\subseteq}(f_1,f_2)\leq\tilde{\subseteq}(\mathcal{C}l(f_1),\mathcal{C}l(f_2))$

$(CK.3): \mathcal{C}l(f)=\mathcal{C}l(\mathcal{C}l(f))$

Eğer $K=L$ *ise* $\mathcal{C}l$*'ye* L*-kapanış operatörü denir. Bulanık iç operatörler konusunda ifade edildiği gibi* K *yüksek derecedeki doğruluk değerlerini içerir.*

Not 2.25 *(Belohlavek 2001)* $L=\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ *ise* $\mathbf{L}_K$*-kapanış operatörleri tam olarak klasik kapanış operatörleri olur.* $K_1\subseteq K_2$ *ise her* $\mathbf{L}_{K_2}$*-kapanış operatörü bir* $\mathbf{L}_{K_1}$*-kapanış operatörüdür.*

Teorem 2.26 *(Belohlavek 2001)* $\mathcal{C}l : L^X \to L^X$ *dönüşümü bir* $\mathbf{L}_K$*-kapanış operatörüdür* $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{C}$ $(CK.1)$ *koşulunu ve aşağıdaki koşulu sağlar:*

$$(CK.0) : \tilde{\subseteq}\left(f_1, \mathcal{C}l\left(f_2\right)\right) \in K \ ise\ \tilde{\subseteq}\left(f_1, \mathcal{C}l\left(f_2\right)\right) \leq \tilde{\subseteq}\left(\mathcal{C}l\left(f_1\right), \mathcal{C}l\left(f_2\right)\right)$$

Kanıt. $(:\Longrightarrow)$ $\mathcal{C}l$ *bir* $\mathbf{L}_K$*-kapanış operatörü olsun.* $\tilde{\subseteq}\left(f_1, \boldsymbol{C}\left(f_2\right)\right) \in K$ *ise* $(CK.2)$ *ve* $(CK.3)$ *özelliklerinden*

$$\tilde{\subseteq}\left(f_1, \mathcal{C}l\left(f_2\right)\right) \leq \tilde{\subseteq}\left(\mathcal{C}l\left(f_1\right), \mathcal{C}l\left(\mathcal{C}l\left(f_2\right)\right)\right) = \tilde{\subseteq}\left(\mathcal{C}l\left(f_1\right), \mathcal{C}l\left(f_2\right)\right)$$

bulunur ve $(CK.0)$ *sağlanır.*

$(\Longleftarrow:)$ $\mathcal{C}l$ $(CK.0)$ *ve* $(CK.1)$*'i sağlasın.*

$(CK.2)$: $\tilde{\subseteq}\left(f_1, f_2\right) \in K$ *ise* $(CK.1)$*'den* $f_2 \leq \mathcal{C}l\left(f_2\right)$ *olduğundan Önerme 1.13 (iii) özelliğinden* $\tilde{\subseteq}\left(f_1, f_2\right) \leq \tilde{\subseteq}\left(f_1, \mathcal{C}l\left(f_2\right)\right)$ *bulunur.* K*'nın* $\leq$*-filtre özelliğinden* $\tilde{\subseteq}\left(f_1, \mathcal{C}l\left(f_2\right)\right) \in K$ *ve buradan* $(CK.0)$ *kullanılırsa*

$$\tilde{\subseteq}\left(f_1, f_2\right) \leq \tilde{\subseteq}\left(f_1, \mathcal{C}l\left(f_2\right)\right) \leq \tilde{\subseteq}\left(\mathcal{C}l\left(f_1\right), \mathcal{C}l\left(f_2\right)\right)$$

bulunur.

$(CK.3) : \mathcal{C}l\left(f\right) \leq \mathcal{C}l\left(f\right)$ *olduğundan Önerme 1.13 (i)'den* $\tilde{\subseteq}\left(\mathcal{C}l\left(f\right), \mathcal{C}l\left(f\right)\right) = \mathbf{1}$ *ve* $\mathbf{1} \in K$ *olduğundan* $(IK.0)$ *kullanılırsa*

$$\tilde{\subseteq}\left(\mathcal{C}l\left(f\right), \mathcal{C}l\left(f\right)\right) \leq \tilde{\subseteq}\left(\mathcal{C}l\left(f\right), \mathcal{C}l\left(\mathcal{C}l\left(f\right)\right)\right) \Rightarrow \mathbf{1} = \tilde{\subseteq}\left(\mathcal{C}l\left(f\right), \mathcal{C}l\left(\mathcal{C}l\left(f\right)\right)\right)$$

yani, Önerme 1.13 (i)'den $\mathcal{C}l\left(f\right) \leq \mathcal{C}l\left(\mathcal{C}l\left(f\right)\right)$ *bulunur.* $(CK.1)$*'den* $\mathcal{C}l\left(\mathcal{C}l\left(f\right)\right) \leq \mathcal{C}l\left(f\right)$ *olduğundan* $\mathcal{C}l\left(f\right) = \mathcal{C}l\left(\mathcal{C}l\left(f\right)\right)$ *bulunmuş olur.* $\blacksquare$

Tanım 2.27 *(Belohlavek 2001, 2002-a)* $\mathcal{F} = \left\{f_i \in L^X : i \in \lambda\right\}$ *ailesine* $\tilde{\subseteq}_K$*-kesişimleri altında kapalıdır denir* $\Leftrightarrow$ $\forall f \in L^X$ *için* $\bigwedge\limits_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}\left(f, f_i\right) \to f_i\right) \in \mathcal{F}$*'dir. Burada* $\forall x \in X$ *için*

$$\bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}\left(f, f_i\right) \to f_i\right)(x) = \bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}\left(f, f_i\right) \to f_i\left(x\right)\right)$$

$\tilde{\subseteq}_K$*-kesişimleri altında kapalı olan aileye bir* $\mathbf{L}_K$*-kapanış sistemi denir.*

Not 2.28 *(Belohlavek 2001)* $(1):\bigwedge_{i\in\lambda,\tilde{\subseteq}(f,f_i)\in\{\mathbf{1}\}}\left(\tilde{\subseteq}(f,f_i)\rightarrow f_i\right)=\bigwedge_{i\in\lambda,f\leq f_i}f_i$ *olduğundan klasik mantık ele alınırsa*

$$\mathcal{F}\ \text{bir }\mathbf{2}\text{-kapanış sistemidir}\Leftrightarrow\forall f\in L^X\ \text{için}\ \bigwedge_{i\in\lambda,f\leq f_i}f_i\in\mathcal{F}$$

olur. Bu sağdaki ifade de $\mathcal{F}$*'nin keyfi kesişimler altında kapalı olmasına denktir. Yani*

$$\forall f\in L^X\ \text{için}\ \bigwedge_{i\in\lambda,f\leq f_i}f_i\in\mathcal{F}\Leftrightarrow j\in J\subseteq\lambda\ \text{olmak üzere}\ \bigwedge_{j\in J}f_j\in\mathcal{F}\ \text{olur.}$$

Bu denklik şu şekilde görülür:

$(:\Longrightarrow)$ $f=\mathbf{1}_\varnothing$ *alınırsa* $j\in J\subseteq\lambda$ *olmak üzere* $\mathbf{1}_\varnothing\leq f_j$ *olduğundan* $\bigwedge_{j\in J,\mathbf{1}_\varnothing\leq f_j}f_j\in\mathcal{F}$ *olur.* $\forall j\in J$ *için* $\mathbf{1}_\varnothing\leq f_j$ *olduğundan* $\bigwedge_{j\in J}f_j\in\mathcal{F}$ *bulunur.*

$(\Longleftarrow:)$ $\mathcal{F}$ *keyfi kesişimler altında kapalı olduğundan istenen açıktır.*

$(2):$ *Genelde keyfi kesişim altındaki kapanışlar* $\tilde{\subseteq}_K$*-kesişimleri altındaki kapanıştan daha zayıf bir koşuldur. Gerçekten* $\mathcal{F}$ $\tilde{\subseteq}_K$*-kesişimleri altında kapalı olsun.* $\mathcal{F}$*'nin keyfi kesişimler altında kapalı olduğunu göstermek için, Tanım 2.27 gereği* $\forall J\subseteq\lambda$ *için*

$$\bigwedge_{j\in J}f_j(x)=\bigwedge_{i\in\lambda,\tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J}f_j,f_i\right)\in K}\left(\tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J}f_j,f_i\right)\rightarrow f_i(x)\right)$$

eşitliğini görmek yeterlidir. Buna göre $\forall j\in J$ *için* $\bigwedge_{j\in J}f_j\leq f_i$ *olduğundan*

$$\tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J}f_j,f_i\right)\rightarrow f_j(x)=\mathbf{1}\rightarrow f_j(x)=f_j(x)$$

olur. O halde

$$\bigwedge_{j\in J}f_j=\bigwedge_{i\in J,\tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J}f_j,f_i\right)\in K}\left(\tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J}f_j,f_i\right)\rightarrow f_j(x)\right)\geq$$

$$\left[\bigwedge_{i\in J,\tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J}f_j,f_i\right)\in K}\left(\tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J}f_j,f_i\right)\rightarrow f_j(x)\right)\right]\wedge\left[\bigvee_{i\in\lambda-J,\tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J}f_j,f_i\right)\in K}\left(\tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J}f_j,f_i\right)\rightarrow f_j(x)\right)\right]$$

$$=\bigwedge_{i\in\lambda,\tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J}f_j,f_i\right)\in K}\left(\tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J}f_j,f_i\right)\rightarrow f_i(x)\right)\Rightarrow$$

$$\bigwedge_{j\in J} f_j(x) \geq \bigwedge_{i\in\lambda, \tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J} f_j, f_i\right)\in K} \left(\tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J} f_j, f_i\right) \to f_i(x)\right)$$

olur. $\left(\bigwedge_{j\in J} f_j, f_i\right) \in K$ *olacak şekildeki* $\forall i \in \lambda$ *ve* $\forall x \in X$ *için Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (i)'den*

$$\bigwedge_{j\in J} f_j(x) \otimes \tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J} f_j, f_i\right) = \bigwedge_{j\in J} f_j(x) \otimes \bigwedge_{y\in X}\left(\left(\bigwedge_{j\in J} f_j(y)\right) \to f_i(x)\right) \leq$$

$$\leq \bigwedge_{j\in J} f_j(x) \otimes \left(\bigwedge_{j\in J} f_j(x)\right) \to f_i(x) \leq f_i(x)$$

yani $\bigwedge_{j\in J} f_j(x) \otimes \tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J} f_j, f_i\right) \leq f_i(x)$ *olur.* (AD) *özelliğinden*

$$\bigwedge_{j\in J} f_j(x) \leq \tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J} f_j, f_i\right) \to f_i(x)$$

ve bu da

$$\bigwedge_{j\in J} f_j(x) \leq \bigwedge_{i\in\lambda, \tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J} f_j, f_i\right)\in K} \left(\tilde{\subseteq}\left(\bigwedge_{j\in J} f_j, f_i\right) \to f_i(x)\right)$$

olması demektir. Yani eşitlik elde edilir. Diğer yandan keyfi kesişimler altında kapalı iken $\tilde{\subseteq}_K$*-kesişimleri altında kapalı olmadığına dair ters örnek şu şekilde verilir:*

$X = \{x\}$, $L = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $K = L$, $\mathcal{F} = \{1_X, 1_\varnothing\}$, $f = \frac{1}{2}.1_X$ *ve* $\mathbf{L}$ *kalanlı örgü yapısı olarak Örnek 1.3'deki Lukasiewicz yapısı olsun.* $\mathcal{F}$ *açıkca keyfi kesişimler altında kapalıdır ama*

$$\bigwedge_{i\in\lambda, \tilde{\subseteq}(f,f_i)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i(x)\right) = \left(\tilde{\subseteq}(f, 1_\varnothing) \to 1_\varnothing\right) \wedge \left(\tilde{\subseteq}(f, 1_X) \to 1_X\right) = f \notin \mathcal{F}$$

olduğundan $\mathcal{F}$ $\tilde{\subseteq}_K$*-kesişimleri altında kapalı değildir.*

Teorem 2.29 *(Belohlavek 2001, 2002-a)* $\mathcal{F} = \{f_i : i \in \lambda\}$ *bir* $\mathbf{L}_K$*-kapanış sistemidir* $\Leftrightarrow$ f_i*'ye bağlı* $a_i \in L$ *elemanları için* $\bigwedge_{a_i\in K} (a_i \to f_i) \in \mathcal{F}$*'dir.*

Kanıt. $(\Longleftarrow:)$ $\bigwedge_{a_i\in K}(a_i \to f_i) \in \mathcal{F}$ *olsun. Herhangi bir* $f \in L^X$ *için,* $\tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K$ *için* $a_i = \tilde{\subseteq}(f, f_i)$ *ve aksi durumda* $a_i = \mathbf{0}$ *olsun. O halde* $\bigwedge_{i\in\Omega, \tilde{\subseteq}(f,f_i)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i\right) = \bigwedge_{a_i\in K} (a_i \to f_i) \in \mathcal{F}$ *olur ki bu da* $\mathcal{F}$*'nin bir* $\mathbf{L}_K$*-kapanış sistemi olması demektir.*

$(:\Longrightarrow)$ $\mathcal{F}$ *bir* $\mathbf{L}_K$*-iç sistemi,* $a_i \in L$ *ve* $f = \bigwedge_{a_i \in K} (a_i \to f_i)$ *olsun.* $f \in \mathcal{F}$ *olduğunu göstermek için* $\bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f,f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i\right) = f$ *eşitliğini elde etmek yeterlidir.* $j \in \lambda$, $a_j \in K$ *ise* $\forall x \in X$ *için Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (i)'den*

$$a_j \otimes \left(\bigwedge_{a_i \in K} (a_i \to f_i(x)) \right) \le a_j \otimes (a_j \to f_j(x)) \le f_j(x)$$

olur. (AD) *özelliğinden*

$$a_j \le \left(\bigwedge_{a_i \in K} (a_i \to f_i(x)) \right) \to f_j(x) \Rightarrow a_j \le \bigwedge_{x \in X} (f(x) \to f_j(x))$$

yani $a_j \le \tilde{\subseteq}(f, f_j)$ *olduğundan* K*'nın* $\le$*-filtre özelliğinden* $\tilde{\subseteq}(f, f_j) \in K$ *olur. Buradan Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (i)'den*

$$a_j \otimes \left(\bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f,f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i(x)\right) \right) \le a_j \otimes \left(\tilde{\subseteq}(f, f_j) \to f_j(x)\right) \le$$

$$\le \tilde{\subseteq}(f, f_j) \otimes \left(\tilde{\subseteq}(f, f_j) \to f_j(x)\right) \le f_j(x)$$

$a_j \in K$ *için* (AD) *özelliğinden*

$$\left(\bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f,f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i(x)\right) \right) \le a_j \to f_j(x) \Rightarrow$$

$$\left(\bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f,f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i(x)\right) \right) \le \bigwedge_{a_i \in K} (a_j \to f_j(x)) = f(x)$$

yani

$$\bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f,f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i\right) \le f$$

bulunur. Tersine $\forall x \in X$ *ve* $\tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K$ *olacak şekildeki* $\forall i \in \lambda$ *için Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (i)'den*

$$f(x) \otimes \tilde{\subseteq}(f, f_i) = f(x) \otimes \bigwedge_{y \in X} (f(y) \to f_i(y)) \le f(x) \otimes (f(x) \to f_i(x)) \le f_i(x)$$

yani $f(x) \otimes \tilde{\subseteq}(f, f_i) \le f_i(x)$ *olur.* (AD) *özelliğinden* $f(x) \le \tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i(x)$ *ve buradan*

$$f(x) \le \bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f,f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i(x)\right) \Rightarrow f \le \bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f,f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i\right)$$

Yani eşitlik elde edilir. ■

Sonuç 2.30 *(Belohlavek 2001, 2002-a) Keyfi kesişimler altında kapalı olan* $\mathcal{F} \subseteq L^X$ *ailesi* $\mathbf{L}_K$*-kapanış sistemidir* $\Leftrightarrow$ $\forall a \in K$ *ve* $\forall f \in \mathcal{F}$ *için* $a \to f \in \mathcal{F}$*'dir.*

Kanıt. ($:\Longrightarrow$) $\mathcal{F}$ bir $\mathbf{L}_K$-kapanış sistemi olsun. Teorem 2.29'dan f_i'ye bağlı $a_i \in L$ elemanları için $\bigwedge_{a_i \in K} (a_i \to f_i) \in \mathcal{F}$'dir. $\mathcal{F}$ keyfi kesişimler altında kapalı olduğundan $\forall a \in K$ ve $\forall f \in \mathcal{F}$ için $a \to f \in \mathcal{F}$ olur.

($\Longleftarrow:$) $\forall a \in K$ ve $\forall f \in \mathcal{F}$ için $a \to f \in \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}$ keyfi kesişimler altında kapalı olduğundan f_i'ye bağlı $a_i \in L$ elemanları için $\bigwedge_{a_i \in K} (a_i \to f_i) \in \mathcal{F}$ olur. O halde Teorem 2.29'dan $\mathcal{F}$ bir $\mathbf{L}_K$-kapanış sistemi olur. ∎

Teorem 2.31 *(Belohlavek 2001, 2002-a) $\mathcal{F} = \{f_i : i \in \lambda\}$ bir $\mathbf{L}_K$-kapanış sistemi olsun. Öyleyse $\forall f \in L^X$ için*

$$\bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i\right) = \bigwedge_{i \in \lambda, f \leq f_i} f_i$$

Kanıt.

$$\bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i\right) \leq \bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i) = \mathbf{1}} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i\right) = \bigwedge_{i \in \lambda, f \leq f_i} f_i$$

olur. Tersine $\tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K$ olacak şekildeki $\forall i \in \lambda$ ve $\forall x \in X$ için Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (iii)'den

$$f(x) \leq (f(x) \to f_i(x)) \to f_i(x) \leq \left(\bigwedge_{y \in X} (f(y) \to f_i(y))\right) \to f_i(x) \Rightarrow$$

$$f(x) \leq \tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i(x) \Rightarrow f(x) \leq \bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i(x)\right)$$

yani $f \leq \bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i\right)$ olur. $\mathcal{F}$ bir $\mathbf{L}_K$-kapanış sistemi olduğundan $\bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i\right) \in \mathcal{F}$ ve buradan

$$\bigwedge_{i \in \lambda, f \leq f_i} f_i \leq \bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i\right)$$

olur. Yani eşitlik elde edilir. ∎

Lemma 2.32 *(Belohlavek 2001) $\mathcal{F} = \{f_i : i \in \lambda\}$ bir $\mathbf{L}_K$-kapanış sistemi ve K $\mathbf{L}$'de bir filtre olsun.*

$$\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)(x) = \bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i(x)\right)$$

ile belirlenen $\mathcal{C}l_{\mathcal{F}} : L^X \to L^X$ dönüşümü bir $\mathbf{L}_K$-kapanış operatörüdür. Dahası $f \in L^X$ için $f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow f = \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)$ olur.

Kanıt. $\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}$ dönüşümünün bir $\mathbf{L}_K$-kapanış operatörü olduğu şu şekilde gösterilir:

$(CK.1)$: $\forall x \in X$ ve $\tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K$ olacak şekildeki $\forall i \in \lambda$ için Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (i)'den

$$f(x) \otimes \tilde{\subseteq}(f, f_i) = f(x) \otimes \bigwedge_{y \in X} (f(y) \rightarrow f_i(y)) \leq f(x) \otimes (f(x) \rightarrow f_i(x)) \leq f_i(x)$$

yani $f(x) \otimes \tilde{\subseteq}(f, f_i) \leq f_i(x)$ olur. (AD) özelliğinden $f(x) \leq \tilde{\subseteq}(f, f_i) \rightarrow f_i(x)$ ve buradan

$$f(x) \leq \bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \rightarrow f_i(x)\right) \Rightarrow f(x) \leq \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)(x)$$

yani $f \leq \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)$ bulunur.

$(CK.2)$: $\tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \in K$ ise

$$\tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f_1), \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f_2)) \Rightarrow \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \leq \bigwedge_{x \in X} (\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f_1)(x) \rightarrow \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f_2)(x))$$

Buradan $\forall x \in X$ için (AD) özelliğinden

$$\Rightarrow \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \leq \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f_1)(x) \rightarrow \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f_2)(x) \Rightarrow$$

$$\tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \otimes \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f_1)(x) \leq \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f_2)(x) = \bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f_2, f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f_2, f_i) \rightarrow f_i(x)\right)$$

$\tilde{\subseteq}(f_2, f_i) \in K$ olacak şekildeki $\forall j \in \lambda$ için (AD) özelliğinden

$$\tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \otimes \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f_1)(x) \leq \tilde{\subseteq}(f_2, f_j) \rightarrow f_j(x)$$

$$\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f_1)(x) \otimes \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \otimes \tilde{\subseteq}(f_2, f_j) \leq f_j(x)$$

eşitsizliği gösterilirse $(CK.2)$ ispatlanmış olur. Buna göre $\tilde{\subseteq}(f_1, f_2), \tilde{\subseteq}(f_2, f_j) \in K$ ve K filtre olduğundan $\tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \otimes \tilde{\subseteq}(f_2, f_j) \in K$ ve $\tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \otimes \tilde{\subseteq}(f_2, f_j) \leq \tilde{\subseteq}(f_1, f_j)$ olduğundan $\tilde{\subseteq}(f_1, f_j) \in K$ bulunur. O halde Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (i)'den

$$\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f_1)(x) \otimes \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \otimes \tilde{\subseteq}(f_2, f_j) \leq \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f_1)(x) \otimes \tilde{\subseteq}(f_1, f_j) =$$

$$= \bigwedge_{i \in \lambda, \tilde{\subseteq}(f_1, f_i) \in K} \left(\tilde{\subseteq}(f_1, f_i) \rightarrow f_i(x)\right) \otimes \tilde{\subseteq}(f_1, f_j) \leq$$

$$\leq \tilde{\subseteq}(f_1, f_j) \otimes \left(\tilde{\subseteq}(f_1, f_j) \rightarrow f_j(x)\right) \leq f_j(x)$$

bulunur.

$(CK.3)$: $(CK.1)$'den $\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)) \leq \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)$ eşitsizliğini göstermek yeterlidir. $\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f) \in \mathcal{F}$ olduğundan $\exists j \in \lambda$ için $f_j = \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)$ olur. O halde $\forall x \in X$ için

$$\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)) = \bigwedge_{i\in\lambda, \tilde{\subseteq}(\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f), f_i)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f), f_i) \to f_i(x)\right) \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f), f_j) \to f_j(x)$$

$$\leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f), \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)) \to \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)(x) = \mathbf{1} \to \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)(x) = \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)(x)$$

bulunur ve $(CK.3)$ ispatlanmış olur.

$f \in \mathbf{L}^X$ için $f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow f = \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)$ denkliği de şu şekilde görülür:

$(:\Longrightarrow)$ $f = f_j \in \mathcal{F}, j \in \lambda$, ise $(CK.1)$'den $f \leq \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)$'dir. Tersine $\forall x \in X$ için Önerme 1.4 (iii)'den

$$\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f_j) = \bigwedge_{i\in\lambda, \tilde{\subseteq}(f_j, f_i)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f_j, f_i) \to f_i(x)\right) \leq \tilde{\subseteq}(f_j, f_j) \to f_j(x) = \mathbf{1} \to f_j(x) = f_j(x)$$

bulunur ve eşitlik elde edilir.

$(\Longleftarrow:)$ $f = \mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f)$ ise $\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}(f) \in \mathcal{F}$ olduğundan $f \in \mathcal{F}$ elde edilir. ■

Lemma 2.33 *(Belohlavek 2001) $\mathcal{C}l : L^X \to L^X$ bir $\mathbf{L}_K$-kapanış operatörü olsun. $\mathcal{F}_{\mathcal{C}l} = \left\{f \in L^X : f = \mathcal{C}l(f)\right\}$ bir $\mathbf{L}_K$-kapanış sistemidir.*

Kanıt. $\mathcal{F}_{\mathcal{C}l} = \{f_i : i \in \lambda\}$ olsun. $\forall f \in L^X$ için

$$\bigwedge_{i\in\lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i(x)\right) \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}l}$$

olduğu gösterilmelidir. $(CK.3)$'den $\mathcal{C}l(\mathcal{C}l(f)) = \mathcal{C}l(f)$ olduğundan $\mathcal{C}l(f) \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}l}$ olur. O halde

$$\bigwedge_{i\in\lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i(x)\right) = \mathcal{C}l(f)$$

eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. $(CK.1)$'den $f \leq \mathcal{C}l(f)$, yani $\tilde{\subseteq}(f, \mathcal{C}l(f)) = \mathbf{1}$ olduğundan

$$\bigwedge_{i\in\lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i(x)\right) \leq \tilde{\subseteq}(f, \mathcal{C}l(f)) \to \mathcal{C}l(f)(x) = \mathcal{C}l(f)(x) \Rightarrow$$

$$\bigwedge_{i\in\lambda, \tilde{\subseteq}(f, f_i)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f, f_i) \to f_i(x)\right) \leq \mathcal{C}l(f)(x)$$

olur. Tersine $\tilde{\subseteq}(f,f_i) \in K$ olacak şekildeki $\forall i \in \lambda$ için $(IK.2)$, Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (i)'den

$$\begin{aligned} \mathcal{C}l(f)(x) \otimes \left(\tilde{\subseteq}(f,f_i)\right) &\leq \mathcal{C}l(f)(x) \otimes \tilde{\subseteq}(\mathcal{C}l(f), \mathcal{C}l(f_i)) \\ &\leq \mathcal{C}l(f)(x) \otimes (\mathcal{C}l(f)(x) \to \mathcal{C}l(f_i)(x)) \\ &\leq \mathcal{C}l(f_i)(x) = f_i(x) \end{aligned}$$

ve (AD) özelliğinden

$$\mathcal{C}l(f)(x) \leq \left(\tilde{\subseteq}(f,f_i)\right) \to f_i(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}l(f)(x) \leq \bigwedge_{i\in\lambda, \tilde{\subseteq}(f,f_i)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f,f_i) \to f_i(x)\right)$$

bulunur ve eşitlik sağlanır. ■

Teorem 2.34 *(Belohlavek 2001) $\mathcal{C}l : L^X \to L^X$ X üzerinde bir $\mathbf{L}_K$-kapanış operatörü, $\mathcal{F}$ bir $\mathbf{L}_K$-kapanış sistemi ve K $\mathbf{L}$'de bir filtre olsun. Öyleyse $\mathcal{F}_{\mathcal{C}l}$ X üzerinde bir $\mathbf{L}_K$-kapanış sistemi, $\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}$ bir $\mathbf{L}_K$-kapanış operatörüdür. Ayrıca $\mathcal{C}l = \mathcal{C}l_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}l}}$ ve $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{C}l_{\mathcal{F}}}$'dir.*

Kanıt. Lemma 2.32 ve Lemma 2.33'den $\mathcal{C}l = \mathcal{C}l_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}l}}$ eşitliğini göstermek kalır. Yani $\forall x \in X$ için

$$\mathcal{C}l(f)(x) = \bigwedge_{g\in\mathcal{F}_{\mathcal{C}}, \tilde{\subseteq}(f,g)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f,g) \to g(x)\right)$$

eşitliği gösterilmelidir. Buna göre $\tilde{\subseteq}(f,g) \in K$ olacak şekildeki $\forall g \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}l}$ için; $(CK.2)$, Önerme 1.4 (i) ve Önerme 1.5 (i)'den

$$\begin{aligned} \mathcal{C}l(f)(x) \otimes \left(\tilde{\subseteq}(f,g)\right) &\leq \mathcal{C}l(f)(x) \otimes \tilde{\subseteq}(\mathcal{C}l(f), \mathcal{C}l(g)) \\ &\leq \mathcal{C}l(f)(x) \otimes (\mathcal{C}l(f)(x) \to \mathcal{C}l(g)(x)) \\ &\leq \mathcal{C}l(g)(x) = g(x) \end{aligned}$$

yani $\mathcal{C}l(f)(x) \otimes \left(\tilde{\subseteq}(f,g)\right) \leq g(x)$ olur. Buradan (AD) özelliğinden

$$\mathcal{C}l(f)(x) \leq \left(\tilde{\subseteq}(f,g)\right) \to g(x) \Rightarrow \mathcal{C}l(f)(x) \leq \bigwedge_{g\in\mathcal{F}_{\mathcal{C}l}, \tilde{\subseteq}(f,g)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f,g) \to g(x)\right)$$

bulunur. Tersine $g = \mathcal{C}l(f)$ denilirse $(CK.3)$'den $g \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}l}$ olur. O halde $(CK.1)$'den $\tilde{\subseteq}(f, \mathcal{C}l(f)) = \mathbf{1}$ olduğu kullanılırsa

$$\bigwedge_{g\in\mathcal{F}_{\mathcal{C}l}, \tilde{\subseteq}(f,g)\in K} \left(\tilde{\subseteq}(f,g) \to g(x)\right) \leq \tilde{\subseteq}(f, \mathcal{C}l(f)) \to \mathcal{C}l(f) = \mathcal{C}l(f)$$

bulunur ve eşitlik elde edilir. ■

2.4. Bulanık İç ve Bulanık Kapanış Operatörleri Arasındaki İlişki

Klasik mantıkta iç operatörlerin ve kapanış operatörlerin notasyonu arasında bir dualite vardır. Bu durumda iç operatörleri ile kapanış operatörleri arasında bir denlik kurulabilir. Ancak bulanık mantıkta bulanık iç ve bulanık kapanış operatörleri arasında bir denklik kurulabilmesi için baz olarak alınan **L** tam kalanlı örgü yapısı, çift değilleme kuralını sağlamak zorundadır.

Lemma 2.35 *(Belohlavek ve Funikova 2004)* $\mathcal{I}$**,** *X üzerinde bir $\mathbf{L}_K$-iç operatörü olsun. Herhangi $f \in L^X$ için $\mathcal{C}l_{\mathcal{I}}(f) = \neg\mathcal{I}(\neg(f))$ ile belirlenen $\mathcal{C}l_{\mathcal{I}} : L^X \to L^X$ dönüşümü X üzerinde bir $\mathbf{L}_K$-kapanış operatörüdür.*

Kanıt. $(CK.1)$: $(IK.1)$ ve Önerme 1.9 (iii), (iv) 'den

$$\mathcal{I}(\neg(f)) \le \neg(f) \Rightarrow \neg(\neg(f)) \le \neg\mathcal{I}(\neg(f)) \Rightarrow f \le \neg(\neg(f)) \le \neg\mathcal{I}(\neg(f)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f \le \neg\mathcal{I}(\neg(f)) = \mathcal{C}l_{\mathcal{I}}(f)$$

bulunur.

$(CK.2)$: $\tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \in K$ ise Önerme 1.13 (viii) ve $(IK.2)$'den

$$\begin{aligned} \tilde{\subseteq} \quad & (\mathcal{C}l_{\mathcal{I}}(f_1), \mathcal{C}l_{\mathcal{I}}(f_2)) = \tilde{\subseteq}(\neg\mathcal{I}(\neg(f_1)), \neg\mathcal{I}(\neg(f_2))) \ge \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}(\neg(f_2)), \mathcal{I}(\neg(f_1))) \\ \ge \quad & \tilde{\subseteq}(\neg(f_2), \neg(f_1)) \ge \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \Rightarrow \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \le \tilde{\subseteq}(\mathcal{C}l_{\mathcal{I}}(f_1), \mathcal{C}l_{\mathcal{I}}(f_2)) \end{aligned}$$

bulunur.

$(CK.3)$: $\mathcal{C}l_{\mathcal{I}}(f) = \mathcal{C}l_{\mathcal{I}}(\mathcal{C}l_{\mathcal{I}}(f))$. Yani $\neg\mathcal{I}(\neg(f)) = \neg\mathcal{I}(\neg(\neg\mathcal{I}(\neg(f))))$ eşitliği gösterilmelidir. Buna göre Önerme 1.9 (iii)'den $\mathcal{I}(\neg(f)) \le \neg(\neg\mathcal{I}(\neg(f)))$ olur. Buradan Önerme 1.9 (iv), $(IK.3)$ ve $(IK.2)$'den

$$\mathcal{I}(\mathcal{I}(\neg(f))) \le \mathcal{I}(\neg(\neg\mathcal{I}(\neg(f)))) \Rightarrow \mathcal{I}(\neg(f)) \le \mathcal{I}(\neg(\neg\mathcal{I}(\neg(f)))) \Rightarrow$$
$$\neg\mathcal{I}(\neg(\neg\mathcal{I}(\neg(f)))) \le \neg\mathcal{I}(\neg(f))$$

bulunur. Tersine $(IK.1)$, $(IK.2)$, Önerme 1.9 (iii) ve (iv)'den

$$\mathcal{I}(\neg(f)) \le \neg(f) \Rightarrow \neg(\neg(f)) \le \neg\mathcal{I}(\neg(f)) \Rightarrow \neg(\neg\mathcal{I}(\neg(f))) \le \neg(\neg(\neg(f))) = \neg(f)$$
$$\Rightarrow \mathcal{I}(\neg(\neg\mathcal{I}(\neg(f)))) \le \mathcal{I}(\neg(f)) \Rightarrow \neg\mathcal{I}(\neg(f)) \le \neg\mathcal{I}(\neg(\neg\mathcal{I}(\neg(f))))$$

olur ve eşitlik elde edilir. ■

Lemma 2.36 *(Belohlavek ve Funikova 2004)* $\mathbf{L}$ *çift değilleme kuralını sağlasın.* $\mathcal{C}l$ X *üzerinde bir* $\mathbf{L}_K$*-kapanış operatörü ise* $\forall f \in L^X$ *için* $\mathcal{I}_{\mathcal{C}l}(f) = \neg\mathcal{C}l(\neg(f))$ *ile belirlenen* $\mathcal{I}_{\mathcal{C}l} : L^X \to L^X$ *dönüşümü* X *üzerinde bir* $\mathbf{L}_K$*-iç operatörüdür.*

Kanıt. $(IK.1)$: $(CK.1)$ çift değilleme kuralı ve Önerme 1.9 (iv) 'den

$$\neg(f) \leq \mathcal{C}l(\neg(f)) \Rightarrow \neg(\mathcal{C}l(\neg(f))) \leq \neg(\neg(f)) = f$$

bulunur.

$(IK.2)$: $\tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \in K$ ise Önerme 1.13 (viii) ve $(CK.2)$'den

$$\begin{aligned}\tilde{\subseteq} & \left(\mathcal{I}_{\mathcal{C}l}(f_1), \mathcal{I}_{\mathcal{C}l}(f_2)\right) = \tilde{\subseteq}(\neg\mathcal{C}l(\neg(f_1)), \neg\mathcal{C}l(\neg(f_2))) \geq \tilde{\subseteq}(\mathcal{C}l(\neg(f_2)), \mathcal{C}l(\neg(f_1))) \\ \geq & \ \tilde{\subseteq}(\neg(f_2), \neg(f_1)) \geq \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \Rightarrow \tilde{\subseteq}(f_1, f_2) \leq \tilde{\subseteq}(\mathcal{I}_{\mathcal{C}l}(f_1), \mathcal{I}_{\mathcal{C}l}(f_2))\end{aligned}$$

bulunur.

$(IK.3)$: $\mathcal{I}_{\mathcal{C}l}(f) = \mathcal{I}_{\mathcal{C}l}(\mathcal{I}_{\mathcal{C}l}(f))$. Yani $\neg\mathcal{C}l(\neg(f)) = \neg\mathcal{C}l(\neg(\neg\mathcal{C}l(\neg(f))))$ eşitliği gösterilmelidir. O halde çift değilleme kuralı ve $(CK.2)$'den

$$\neg\mathcal{C}l(\neg(\neg\mathcal{C}l(\neg(f)))) = \neg\mathcal{C}l(\mathcal{C}l(\neg(f))) = \neg\mathcal{C}l(\neg(f))$$

bulunur ve ispat biter. ∎

Lemma 2.37 *(Belohlavek ve Funikova 2004)* $\mathbf{L}$ *tam kalanlı örgü yapısı çift değilleme kuralını sağlasın.* $\mathcal{I}_{\mathcal{C}l_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$ *ve* $\mathcal{C}l_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}l}} = \mathcal{C}l$ *olur.*

Kanıt. $\forall f \in L^X$ için

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}l_{\mathcal{I}}}(f) = \neg\mathcal{C}l_{\mathcal{I}}(\neg(f)) = \neg(\neg\mathcal{I}(\neg(\neg(f)))) = \mathcal{I}(f)$$

ve

$$\mathcal{C}l_{\mathcal{I}_{\mathcal{C}l}}(f) = \neg\mathcal{I}_{\mathcal{C}l}(\neg(f)) = \neg(\neg\mathcal{C}l(\neg(\neg(f)))) = \mathcal{C}l(f)$$

bulunur ve kanıt biter. ∎

3. BULGULAR

3.1. Çekirdek ve Kapanış Operatörleri

Tanım 3.1 *(Gierz vd. 1980)* $\mathbf{L}$ *bir tam kalanlı örgü olsun.*

(i) $p : L \to L$ *dönüşümüne bir izdüşüm (projection) dönüşümü denir* $\Leftrightarrow$ *Aşağıdaki iki koşul sağlanır:* $\forall a, b \in L$ *için*

$(p.1) : a \leq b \Rightarrow p(a) \leq p(b)$

$(p.2) : p(p(a)) = p(a)$

(ii) Bir kapanış (closure) operatörü; $c : L \to L$ *olmak üzere* $\forall a \in L$ *için* $a \leq c(a)$ *koşulunu sağlayan bir izdüşüm dönüşümüdür.*

(iii) Bir çekirdek (kernel) operatörü; $k : L \to L$ *olmak üzere* $\forall a \in L$ *için* $k(a) \leq a$ *koşulunu sağlayan bir izdüşüm dönüşümüdür.*

Not 3.2 *Burada tanımlanan çekirdek ve kapanış operatörleri herhangi bir tam kalanlı örgü üzerinde tanımlanmıştır. Bu tam kalanlı örgü yapısında tam örgü özel olarak* $(L^X, \leq, \wedge, \vee, 1_\varnothing, 1_X)$ *alınırsa, Tanım 2.11 ve Tanım 2.24'de tanımlanan bulanık iç ve bulanık kapanış operatörleri Tanım 3.1 (ii) ve (iii) anlamında özel bir çekirdek ve kapanış operatörleri olur. Yani* $\leq$*-filtre olarak* $K = \{\mathbf{1}\}$ *alınırsa bir* $\mathbf{L}_{\{\mathbf{1}\}}$*-iç ve* $\mathbf{L}_{\{\mathbf{1}\}}$*-kapanış operatörleri özel bir çekirdek ve kapanış operatörleri olur.*

Teorem 3.3 (i) $k : L \to L$ *bir çekirdek operatörüdür* $\Leftrightarrow$ *Aşağıdaki koşullar sağlanır:* $\forall a, b \in L$ *için*

$(1) : k(a) \leq a$ *ve* $(2) : k(a) \leq b \Rightarrow k(a) \leq k(b)$

(ii) $c : L \to L$ *bir kapanış operatörüdür* $\Leftrightarrow$ *Aşağıdaki koşullar sağlanır:* $\forall a, b \in L$ *için*

$(1) : a \leq c(a)$ *ve* $(2) : a \leq c(b) \Rightarrow c(a) \leq c(b)$

Kanıt. (i) : $(:\Longrightarrow)$ k bir çekirdek operatörü olsun. (1) koşulu tanımdan elde edilir. $\forall a, b \in L$ için $k(a) \leq b$ ise $(p.1)$'den $k(k(a)) \leq k(b)$ ve $(p.2)$'den $k(a) \leq k(b)$ bulunur.

$(\Longleftarrow:)$ k (1) ve (2) koşullarını sağlasın. $\forall a, b \in L$ için

$(p.1)$: $a \leq b$ ise (1)'den $k(a) \leq a \leq b$ ise $k(a) \leq b$ ve (2)'den $k(a) \leq k(b)$ elde edilir.

$(p.2)$: (1)'den $k(k(a)) \leq k(a)$ olur. $k(a) \leq k(a)$ olduğundan (2)'den $k(a) \leq k(k(a))$ bulunur ki bu da $k(a) = k(k(a))$ olması demektir. O halde k bir çekirdek operatörüdür.

(ii) : $(:\Longrightarrow)$ c bir kapanış operatörü olsun. (1) koşulu tanımdan elde edilir. $\forall a, b \in L$ için $a \leq c(b)$ ise $(p.1)$'den $c(a) \leq c(c(b))$ ve $(p.2)$'den $c(a) \leq c(b)$ bulunur.

$(\Longleftarrow:)$ c (1) ve (2) koşullarını sağlasın. $\forall a, b \in L$ için

$(p.1)$: $a \leq b$ ise (1)'den $a \leq b \leq c(b)$ ise $a \leq c(b)$ ve (2)'den $c(a) \leq c(b)$ bulunur.

$(p.2)$: (1)'den $c(a) \leq c(c(a))$ olur. $c(a) \leq c(a)$ olduğundan (2)'den $c(c(a)) \leq c(a)$ olur ki bu da $c(c(a)) = c(a)$ olması demektir. O halde c bir kapanış operatörüdür. ■

Tanım 3.4 (i) *(Gierz vd. 1980)* $\mathcal{K} = \{a_i \in L : i \in I\}$ *kümesine bir çekirdek sistem denir* $\Leftrightarrow$ $\forall J \subseteq I$ *için* $\bigvee_{j \in J} a_j \in \mathcal{K}$ *olur.*

(ii) *(Gerla 1999)* $\mathcal{R} = \{a_i \in L : i \in \Delta\}$ *kümesine bir kapanış sistemi denir* $\Leftrightarrow$ $\forall J \subseteq \Delta$ *için* $\bigwedge_{j \in J} a_j \in \mathcal{R}$ *olur.*

Lemma 3.5 *(i)* $\mathcal{K} = \{a_i \in L : i \in I\}$ *bir çekirdek sistemi olsun.* $\forall x \in L$ *için*

$$k_{\mathcal{K}}(x) = \vee \{a_i : i \in I,\ a_i \leq x,\ a_i \in \mathcal{K}\}$$

ile belirlenen $k_{\mathcal{K}} : L \to L$ *dönüşümü bir çekirdek operatördür.*

(ii) (Gerla 1999) $\mathcal{R} = \{a_i \in L : i \in \Delta\}$ *bir kapanış sistemi olsun.* $\forall x \in L$ *için*

$$c_{\mathcal{R}}(x) = \wedge \{a_i : i \in \Delta,\ x \leq a_i,\ a_i \in \mathcal{R}\}$$

ile belirlenen $c_{\mathcal{R}} : L \to L$ *dönüşümü bir kapanış operatörüdür.*

(iii) $a \in \mathcal{K} \Leftrightarrow a = k_{\mathcal{K}}(a)$

(iv) $a \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a = c_{\mathcal{R}}(a)$

Kanıt. (i) : $\forall x \in L$ için $\vee \{a_i : i \in I,\ a_i \leq x,\ a_i \in \mathcal{K}\} \leq x$ olduğundan $k_{\mathcal{K}}(x) \leq x$ bulunur.

$(p.1)$: $\forall x, y \in L$ için $x \leq y$ ise $\vee \{a_i : i \in I,\ a_i \leq x,\ a_i \in \mathcal{K}\} \leq x \leq y$ olur. $\mathcal{K}$ bir çekirdek sistemi olduğundan $\vee \{a_i : i \in I,\ a_i \leq x,\ a_i \in \mathcal{K}\} = k_{\mathcal{K}}(x) \in \mathcal{K}$ ve buradan $\exists i_0 \in I$ için $a_{i_0} = k_{\mathcal{K}}(x)$ olur. $a_{i_0} \leq y$ olduğundan

$$k_{\mathcal{K}}(x) = a_{i_0} \leq \vee \{a_i : i \in I,\ a_i \leq y,\ a_i \in \mathcal{K}\} = k_{\mathcal{K}}(y)$$

elde edilir.

$(p.2)$: $\forall x \in L$ için $k_{\mathcal{K}}(k_{\mathcal{K}}(x)) \leq k_{\mathcal{K}}(x)$ olduğundan $k_{\mathcal{K}}(x) \leq k_{\mathcal{K}}(k_{\mathcal{K}}(x))$ eşitsizliğini göstermek yeterlidir. $k_{\mathcal{K}}(k_{\mathcal{K}}(x)) = \vee \{a_i : i \in I,\ a_i \leq k_{\mathcal{K}}(x),\ a_i \in \mathcal{K}\}$'dır. $k_{\mathcal{K}}(x) \leq k_{\mathcal{K}}(x)$ ve $\exists i_0 \in I$ için $a_{i_0} = k_{\mathcal{K}}(x)$ olduğundan

$$k_{\mathcal{K}}(x) = a_{i_0} \leq \vee \{a_i : i \in I,\ a_i \leq k_{\mathcal{K}}(x),\ a_i \in \mathcal{K}\} = k_{\mathcal{K}}(k_{\mathcal{K}}(x))$$

elde edilir.

(ii) : $\forall x \in L$ için $x \leq \wedge \{a_i : i \in \Delta,\ x \leq a_i,\ a_i \in \mathcal{R}\}$ olduğundan $x \leq c_{\mathcal{R}}(x)$ bulunur.

$(p.1)$: $\forall x, y \in L$ için $x \leq y$ ise $x \leq y \leq \wedge \{a_i : i \in \Delta,\ x \leq a_i,\ a_i \in \mathcal{R}\}$ olur. $\mathcal{R}$ bir kapanış sistemi olduğundan $\wedge \{a_i : i \in \Delta,\ y \leq a_i,\ a_i \in \mathcal{R}\} = c_{\mathcal{R}}(y) \in \mathcal{R}$ ve buradan $\exists i_0 \in \Delta$ için $a_{i_0} = c_{\mathcal{R}}(y)$ olur. $x \leq a_{i_0}$ olduğundan

$$c_{\mathcal{R}}(x) = \wedge \{a_i : i \in \Delta,\ x \leq a_i,\ a_i \in \mathcal{R}\} \leq a_{i_0} = c_{\mathcal{R}}(y)$$

elde edilir.

$(p.2)$: $\forall x \in L$ için $c_{\mathcal{R}}(x) \leq c_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}(x))$ olduğundan $c_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}(x)) \leq c_{\mathcal{R}}(x)$ eşitsizliğini göstermek yeterlidir. $c_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}(x)) = \wedge \{a_i : i \in \Delta,\ c_{\mathcal{R}}(x) \leq a_i,\ a_i \in \mathcal{R}\}$'dir. $c_{\mathcal{R}}(x) \leq c_{\mathcal{R}}(x)$ ve $\exists i_0 \in I$ için $a_{i_0} = c_{\mathcal{R}}(x)$ olduğundan

$$c_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}(x)) = \wedge \{a_i : i \in \Delta,\ c_{\mathcal{R}}(x) \leq a_i,\ a_i \in \mathcal{R}\} \leq a_{i_0} = c_{\mathcal{R}}(x)$$

elde edilir.

(iii) : $(:\Longrightarrow)$ $a \in \mathcal{K}$ ise $\exists i_0 \in I$ için $a = a_{i_0}$'dır. $k_{\mathcal{K}}$ bir çekirdek operatörü olduğundan $k_{\mathcal{K}}(a_{i_0}) \leq a_{i_0}$ olur. $a_{i_0} \leq a_{i_0}$ olduğundan

$$a_{i_0} \leq \vee \{a_i : i \in I,\ a_i \leq a_{i_0},\ a_i \in \mathcal{K}\} \Rightarrow a_{i_0} \leq k_{\mathcal{K}}(a_{i_0})$$

yani $a = k_{\mathcal{K}}(a)$ elde edilir.

$(\Longleftarrow:)$ $a = k_{\mathcal{K}}(a)$ olsun. $\mathcal{K}$ bir çekirdek sistemi olduğundan

$$k_{\mathcal{K}}(a) = \vee \{a_i : i \in I,\ a_i \leq a,\ a_i \in \mathcal{K}\} \in \mathcal{K}$$

olur ki bu da $a \in \mathcal{K}$ olması demektir.

(iv) : $(:\Longrightarrow)$ $a \in \mathcal{R}$ ise $\exists i_0 \in \Delta$ için $a = a_{i_0}$'dır. $c_{\mathcal{R}}$ bir kapanış operatörü olduğundan $a_{i_0} \leq c_{\mathcal{R}}(a_{i_0})$ olur. $a_{i_0} \leq a_{i_0}$ olduğundan

$$\wedge \{a_i : i \in \Delta,\ a_{i_0} \leq a_i,\ a_i \in \mathcal{R}\} \leq a_{i_0} \Rightarrow c_{\mathcal{R}}(a_{i_0}) \leq a_{i_0}$$

yani $a = c_{\mathcal{R}}(a)$ elde edilir.

$(\Longleftarrow:)$ $a = c_{\mathcal{R}}(a)$ olsun. $\mathcal{R}$ bir kapanış sistemi olduğundan

$$c_{\mathcal{R}}(a) = \wedge \{a_i : i \in \Delta,\ a \leq a_i,\ a_i \in \mathcal{R}\} \in \mathcal{R}$$

olur ki bu da $a \in \mathcal{R}$ olması demektir. ■

Lemma 3.6 *(Gierz vd. 1980) (i) $k : L \to L$ bir çekirdek operatörü olsun. $\mathcal{K}_k = \{a \in L : a = k(a)\}$ kümesi bir çekirdek sistemidir.*

(ii) (Gerla 1999) $c : L \to L$ bir kapanış operatörü olsun. $\mathcal{R}_c = \{a \in L : a = c(a)\}$ kümesi bir kapanış sistemidir.

Kanıt. (i) : $\forall H \subseteq \mathcal{K}_k$ için $H = \{a_i : i \in J\}$ denilirse $\vee H = \underset{i\in J}{\vee} a_i \in \mathcal{K}_k$ olması gerekir. Yani $\underset{i\in J}{\vee} a_i = k\left(\underset{i\in J}{\vee} a_i\right)$ eşitliği görülmelidir. Buna göre $\forall i \in J$ için $a_i \le \underset{i\in J}{\vee} a_i$ ve $(p.1)$ koşulundan

$$k(a_i) \le k\left(\underset{i\in J}{\vee} a_i\right) \Rightarrow \underset{i\in J}{\vee} k(a_i) \le k\left(\underset{i\in J}{\vee} a_i\right) \Rightarrow \underset{i\in J}{\vee} a_i \le k\left(\underset{i\in J}{\vee} a_i\right)$$

bulunur. k bir çekirdek operatörü olduğundan $k\left(\underset{i\in J}{\vee} a_i\right) \le \underset{i\in J}{\vee} a_i$ olur ki bu da $\underset{i\in J}{\vee} a_i = k\left(\underset{i\in J}{\vee} a_i\right)$ olması demektir. O halde $\mathcal{K}_k$ bir çekirdek sistemidir.

(ii) : $\forall T \subseteq \mathcal{R}_c$ için $T = \{a_i : i \in \theta\}$ denilirse $\wedge T = \underset{i\in\theta}{\wedge} a_i \in \mathcal{R}_c$ olması gerekir. Yani $\underset{i\in I}{\wedge} a_i = c\left(\underset{i\in I}{\wedge} a_i\right)$ eşitliği görülmelidir. $\forall i \in \theta$ için $\underset{i\in\theta}{\wedge} a_i \le a_i$ ve $(p.1)$ koşulundan

$$c\left(\underset{i\in\theta}{\wedge} a_i\right) \le c(a_i) \Rightarrow c\left(\underset{i\in\theta}{\wedge} a_i\right) \le \underset{i\in\theta}{\wedge} c(a_i) \Rightarrow c\left(\underset{i\in\theta}{\wedge} a_i\right) \le \underset{i\in\theta}{\wedge} a_i$$

bulunur. c bir kapanış operatörü olduğundan $\underset{i\in\theta}{\wedge} a_i \le c\left(\underset{i\in\theta}{\wedge} a_i\right)$ olur ki bu da $\underset{i\in\theta}{\wedge} a_i = c\left(\underset{i\in\theta}{\wedge} a_i\right)$ olması demektir. O halde $\mathcal{R}_c$ bir kapanış sistemidir. ■

Teorem 3.7 *(i) $k : L \to L$ bir çekirdek operatörü ve $\mathcal{K}$ bir çekirdek sistemi olsun. $k_{\mathcal{K}_k} = k$ ve $\mathcal{K}_{k_{\mathcal{K}}} = \mathcal{K}$ olur.*

(ii) (Gerla 1999) $c : L \to L$ bir kapanış operatörü ve $\mathcal{R}$ bir kapanış sistemi olsun. $c_{\mathcal{R}_c} = c$ ve $\mathcal{R}_{c_{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$ olur.

Kanıt. (i) Lemma 3.5 (iii)'den $k_{\mathcal{K}_k} = k$ eşitliğini göstermek kalır. Yani $\forall x \in L$ için

$$k_{\mathcal{K}_k}(x) = \underset{a\in\mathcal{K}_k}{\vee} \{a : a \le x\} = \vee\{a \in L : a \le x, a = k(a)\} = k(x)$$

olduğu gösterilmelidir. $a \leq x$ ve $a = k(a)$ olacak şekildeki $\forall a \in L$ için $(p.1)$'den $a = k(a) \leq k(x)$ olduğundan

$$\vee \{a \in L : a \leq x, a = k(a)\} \leq k(x) \Rightarrow k_{\mathcal{K}_k}(x) \leq k(x)$$

bulunur. Tersine $(p.2)$'den $k(k(x)) = k(x)$ ve $k(x) \leq x$ olduğundan

$$k(x) \leq \vee \{a \in L : a \leq x, a = k(a)\} \Rightarrow k(x) \leq k_{\mathcal{K}_k}(x)$$

bulunur ve eşitlik elde edilir.

(ii) : Lemma 3.5 (iv)'den $c_{\mathcal{R}_c} = c$ eşitliğini göstermek kalır. Yani $\forall x \in L$ için

$$c_{\mathcal{R}_c}(x) = \underset{a \in L}{\wedge} \{a : x \leq a, a \in \mathcal{R}_c\} = \underset{a \in L}{\wedge} \{a : x \leq a, a = c(a)\} = c(x)$$

olduğu gösterilmelidir. $x \leq a$ ve $c(a) = a$ olacak şekildeki $\forall a \in L$ için $(p.1)$'den $c(x) \leq c(a) = a$ olduğundan

$$c(x) \leq \wedge \{a \in L : x \leq a, a = c(a)\} = c_{\mathcal{R}_c}(x)$$

bulunur. Tersine $(p.2)$'den $c(c(x)) = c(x)$ ve $x \leq c(x)$ olduğundan

$$\wedge \{a \in L : x \leq a, a = c(a)\} \leq c(x)$$

bulunur ve eşitlik elde edilir. ■

Teorem 3.8 *(i) k **L** üzerinde bir çekirdek operatörü olsun. $\forall a \in L$ için $c_k(a) = \neg k(\neg a)$ ile belirlenen c_k dönüşümü bir kapanış operatörüdür.*

*(ii) **L** çift değilleme kuralını sağlasın. c **L** üzerinde bir kapanış operatörü olsun. $\forall a \in L$ için $k_c(a) = \neg c(\neg a)$ ile belirlenen k_c dönüşümü bir çekirdek operatörüdür.*

Kanıt. *(i) $\forall a \in L$ için $k(\neg a) \leq \neg a$ olduğundan Önerme 1.9 (iii),(iv)'den*

$$a \leq \neg\neg a \leq \neg k(\neg a) \Rightarrow a \leq c_k(a)$$

elde edilir.

$(p.1)$: $\forall a, b \in L$ için Önerme 1.9 (iii)'den ve k bir çekirdek operatörü olduğundan

$$a \leq b \Rightarrow \neg b \leq \neg a \Rightarrow k(\neg b) \leq k(\neg a) \Rightarrow \neg k(\neg a) \leq \neg k(\neg b) \Rightarrow c_k(a) \leq c_k(b)$$

elde edilir.

$(p.2)$: $\forall a \in L$ için $c_k(a) = c_k(c_k(a))$ olduğunu yani $\neg k(\neg a) = \neg k(\neg(\neg k(\neg a)))$ eşitliği gösterilmelidir. Buna göre Önerme 1.9 (iii), (iv)'den ve k bir çekirdek operatörü olduğundan

$$k(\neg a) \leq \neg(\neg k(\neg a)) \Rightarrow k(k(\neg a)) \leq k(\neg(\neg k(\neg a))) \Rightarrow$$

$$k(\neg a) \leq k(\neg(\neg k(\neg a))) \Rightarrow \neg k(\neg(\neg k(\neg a))) \leq \neg k(\neg a)$$

bulunur. Tersine

$$k(\neg a) \leq \neg a \Rightarrow \neg\neg a \leq \neg k(\neg a) \Rightarrow \neg(\neg k(\neg a)) \leq \neg\neg\neg a = \neg a \Rightarrow$$

$$k(\neg(\neg k(\neg a))) \leq k(\neg a) \Rightarrow \neg k(\neg a) \leq \neg k(\neg(\neg k(\neg a)))$$

bulunur ve eşitlik elde edilir. O halde c_k bir kapanış operatörüdür.

(ii) : $\forall a \in L$ için $\neg a \leq c(\neg a)$ ve çift değilleme kuralından $\neg c(\neg a) \leq \neg\neg a = a$ yani $k_c(a) \leq a$ elde edilir. $(p.1)$ ve $(p.2)$ özellikleri (i)'deki kanıta benzer şekilde elde edilir. ■

Teorem 3.9 **L** *çift değilleme kuralını sağlasın. $k_{c_k} = k$ ve $c_{k_c} = c$ olur.*

Kanıt. $\forall a \in L$ için

$$k_{c_k}(a) = \neg c_k(\neg a) = \neg(\neg k(\neg\neg a)) = k(a)$$

ve

$$c_{k_c}(a) = \neg k_c(\neg a) = \neg(\neg c(\neg\neg a)) = c(a)$$

olduğundan ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.10 *(i) $\mathcal{K}$ **L** üzerinde bir çekirdek sistemi olsun ve* **L** *çift değilleme kuralını sağlasın. $\mathcal{K}^{(\neg)} = \{a \in L : \neg a \in \mathcal{K}\}$ bir kapanış sistemidir.*

*(ii) $\mathcal{R}$ **L** üzerinde bir kapanış sistemi olsun. $\mathcal{R}^{(\neg)} = \{a \in L : \neg a \in \mathcal{R}\}$ bir çekirdek sistemidir.*

Kanıt. (i) : $\forall V \subseteq \mathcal{K}^{(\neg)}$ için $V = \{a_j : j \in J\}$ olmak üzere $\forall j \in J$ için $a_j \in \mathcal{K}^{(\neg)}$ olduğundan $\neg a_j \in \mathcal{K}$ olur. $\mathcal{K}$ bir çekirdek sistemi olduğundan ve Önerme 1.9 (vi)'dan

$$\bigvee_{j \in J} (\neg a_j) = \neg \left(\bigwedge_{j \in J} a_j \right) \in \mathcal{K}$$

olur ki bu da $\mathcal{K}^{(\neg)}$'nın tanımından $\bigwedge_{j \in J} a_j \in \mathcal{K}^{(\neg)}$, yani $\mathcal{K}^{(\neg)}$'nın kapanış sistemi olması demektir.

(ii) : $\forall Z \subseteq \mathcal{R}^{(\neg)}$ için $Z = \{b_j : j \in J\}$ olmak üzere $\forall j \in J$ için $b_j \in \mathcal{R}^{(\neg)}$ olduğundan $\neg b_j \in \mathcal{R}$ olur. $\mathcal{R}$ bir kapanış sistemi olduğundan ve Önerme 1.9 (v)'den

$$\bigwedge_{j \in J} (\neg b_j) = \neg \left(\bigvee_{j \in J} b_j \right) \in \mathcal{R}$$

olur ki bu da $\mathcal{R}^{(\neg)}$'nın tanımından $\bigvee_{j \in J} b_j \in \mathcal{R}^{(\neg)}$, yani $\mathcal{R}^{(\neg)}$'nın çekirdek sistemi olması demektir. ■

3.2. Topolojik Bulanık İç ve Topolojik Kapanış Operatörlerinin Tam Kalanlı Örgü Üzerine Genelleştirilmesi

Hutton ve Reilly (1980) ve Rodabaugh (1999); L bir tam örgü ve $\tau \subseteq L$ olmak üzere

(1) J sonlu bir küme olmak üzere $\forall B = \{a_i : i \in J\} \subset L$ için $\bigwedge_{i \in J} a_i \in \tau$

(2) $\forall A = \{a_i : i \in I\} \subseteq \tau$ için $\bigvee_{i \in I} a_i \in \tau$

koşullarını sağlayan τ kümesini Hutton topoloji olarak sundu. (1)'den $B = \varnothing$ alınırsa $\wedge B = \wedge\varnothing = \mathbf{1} \in \tau$ ve (2)'den $A = \varnothing$ alınırsa $\vee A = \vee\varnothing = \mathbf{0} \in \tau$ olur. Bu sayede Hutton topoloji tam kalanlı örgü üzerine aşağıdaki tanım ile şöyle genişletilebilir:

Tanım 3.11 **L** *bir tam kalanlı örgü olsun.* $\tau \subseteq L$ *kümesi bir Hutton topolojidir* $\Leftrightarrow$ *Aşağıdaki koşullar sağlanır:*

$(H.1)$ $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \tau$

$(H.2)$ $\forall a, b \in L$ *için* $a, b \in \tau \Rightarrow a \otimes b \in \tau$

$(H.3)$ $\forall \{a_i : i \in I\} \subseteq \tau$ *için* $\bigvee\limits_{i \in I} a_i \in \tau$

(L, τ) *ikilisine bir Hutton topolojik uzayı denir.*

Tanım 3.12 **L** *bir tam kalanlı örgü olsun.* $\upsilon \subseteq L$ *kümesi bir H-co-topolojidir* $\Leftrightarrow$ *Aşağıdaki koşullar sağlanır:*

$(H\text{-}co.1)$ $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \upsilon$

$(H\text{-}co.2)$ $\forall a, b \in L$ *için* $a, b \in \upsilon \Rightarrow a \sqcup b \in \upsilon$

$(H\text{-}co.3)$ $\forall \{a_i : i \in I\} \subseteq \upsilon$*için* $\bigwedge\limits_{i \in I} a_i \in \upsilon$

(L, υ) *ikilisine bir H-co-topolojik uzayı denir.*

Tanım 3.13 **L** *bir tam kalanlı örgü olsun.*

(i) $k : L \to L$ *çekirdek operatörüne bir H-çekirdek operatörü denir* $\Leftrightarrow$ *Aşağıdaki koşullar sağlanır:*

$(Hk.1)$ $k(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$

$(Hk.2)$ $\forall a, b \in L$ *için* $k(a) \otimes k(b) \leq k(a \otimes b)$

(ii) $c : L \to L$ *kapanış operatörüne bir H-kapanış operatörü denir* $\Leftrightarrow$ *Aşağıdaki koşullar sağlanır:*

$(Hc.1)$ $c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

$(Hc.2)$ $\forall a, b \in L$ *için* $c(a \sqcup b) \leq c(a) \sqcup c(b)$

Teorem 3.14 *(L, τ) Hutton topolojik uzayı $\forall a \in L$ için $k_\tau(a) = \vee \{y \in \tau : y \leq a\}$ ile belirlenen k_τ H-çekirdek operatörünü üretir. Tersine bir k H-çekirdek operatörü $\tau_k = \{a \in L : a = k(a)\}$ ile belirlenen τ_k Hutton topolojisini üretir.*

Kanıt. İlk önce k_τ'nin bir H-çekirdek operatörü olduğunu gösterelim:

$\forall a \in L$ için $\vee \{b \in \tau : b \leq a\} \leq a$ olduğundan $k_\tau(a) \leq a$ olur.

$(p.1)$: $\forall a, b \in L$ için $a \leq b$ ise $k_\tau(a) \leq a \leq b$, yani $k_\tau(a) \leq b$ olur. $(H.3)$'den $k_\tau(a), k_\tau(b) \in \tau$ olur. O halde

$$k_\tau(a) \leq \vee \{y \in \tau : y \leq b\} = k_\tau(b)$$

elde edilir.

$(p.2)$: $\forall a \in L$ için $k_\tau(a) \leq k_\tau(a)$ ve $k_\tau(a) \in \tau$ olduğundan

$$k_\tau(a) \leq \vee \{y \in \tau : y \leq k_\tau(a)\} = k_\tau(k_\tau(a))$$

bulunur. Ayrıca $\forall a \in L$ için $k_\tau(k_\tau(a)) \leq k_\tau(a)$ olduğundan $k_\tau(k_\tau(a)) = k_\tau(a)$ elde edilir.

$(Hk.1)$: $k_\tau(\mathbf{1}) = \vee \{y \in \tau : y \leq \mathbf{1}\}$ ve $\mathbf{1} \in \tau$ olduğundan $k_\tau(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ elde edilir.

$(Hk.2)$: $\forall a, b \in L$ için $(H.3)$ özelliğinden $\vee \{y \in \tau : y \leq a\}, \vee \{y \in \tau : y \leq b\} \in \tau$ ve $(H.2)$ koşulundan

$$(\vee \{y \in \tau : y \leq a\}) \otimes (\vee \{y \in \tau : y \leq b\}) = k_\tau(a) \otimes k_\tau(b) \in \tau$$

bulunur. $k_\tau(a) \leq a$ ve $k_\tau(b) \leq b$ olduğundan Önerme 1.5 (i)'den

$$k_\tau(a) \otimes k_\tau(b) \leq a \otimes k_\tau(b) \leq a \otimes b$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$k_\tau(a) \otimes k_\tau(b) \leq \vee \{y \in \tau : y \leq a \otimes b\} = k_\tau(a \otimes b)$$

bulunur. τ_k'nın bir Hutton topoloji olduğu da şöyle gösterilir.

$(H.1)$: $(Hk.1)$'den $\mathbf{1} \in \tau_k$ ve $k(\mathbf{0}) \leq \mathbf{0}$ olduğundan $k(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ yani $\mathbf{0} \in \tau_k$ bulunur.

$(H.2)$: $\forall a, b \in L$ için $a, b \in \tau_k$ ise $a = k(a)$ ve $b = k(b)$ olur. Önerme 1.5 (i) ve $(Hk.2)$'den

$$a \otimes b = k(a) \otimes k(b) \leq k(a \otimes b)$$

olur ki bu da $k(a \otimes b) \leq a \otimes b$ olduğundan $a \otimes b \in \tau_k$ olması demektir.

$(H.3)$: $\{a_i : i \in I\} \subseteq \tau_k$ olsun. Bu durumda $\forall i \in I$, $a_i = k(a_i)$ olur. $a_i \leq \bigvee_{i \in I} a_i$ ve $(p.1)$'den

$$a_i = k(a_i) \leq k\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) \Rightarrow \bigvee_{i \in I} a_i \leq k\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right)$$

yani $\bigvee_{i \in I} a_i \in \tau_k$ bulunur. ■

Teorem 3.15 *(L, υ) bir H-co-topolojik uzayı $\forall a \in L$ için $c_\upsilon(a) = \wedge \{x \in \upsilon : a \leq x\}$ ile belirlenen c_υ H-kapanış operatörünü üretir. Tersine bir c H-kapanış operatörü $\upsilon_c = \{a \in L : c(a) = a\}$ ile belirlenen υ_c H-co-topolojik uzayını üretir.*

Kanıt. c_υ dönüşümünün bir L-kapanış operatörü olduğu şu şekilde görülebilir:

$\forall a \in L$ için $a \leq \wedge \{y \in \upsilon : a \leq y\}$ olduğundan $a \leq c_\upsilon(a)$ bulunur.

$(p.1)$: $\forall a, b \in L$ için $a \leq b$ ise

$$a \leq b \leq \wedge \{x \in \upsilon : b \leq x\} \Rightarrow a \leq \wedge \{x \in \upsilon : b \leq x\}$$

ve $(H\text{-}co.3)$ koşulundan $\wedge \{x \in \upsilon : b \leq x\} \in \upsilon$ olduğundan $\wedge \{y \in \upsilon : a \leq y\} \leq \wedge \{x \in \upsilon : b \leq x\}$ olur. Dolayısıyla $c_\upsilon(a) \leq c_\upsilon(b)$ bulunur.

$(p.2)$: $c_\upsilon(a) \leq c_\upsilon(a)$ ve $c_\upsilon(a) \in \upsilon$ olduğundan

$$c_\upsilon(c_\upsilon(a)) = \wedge\{x \in \upsilon : c_\upsilon(a) \leq x\} \leq c_\upsilon(a)$$

bulunur. Ayrıca $\forall a \in L$ için $c_\upsilon(a) \leq c_\upsilon(c_\upsilon(a))$ olduğundan $c_\upsilon(c_\upsilon(a)) = c_\upsilon(a)$ elde edilir.

$(Hc.1)$: $c_\upsilon(\mathbf{0}) = \wedge\{x \in \upsilon : \mathbf{0} \leq x\}$ ve $\mathbf{0} \in \upsilon$ olduğundan $c_\upsilon(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ bulunur.

$(Hc.2)$: $(H\text{-}co.3)$ ve $(H\text{-}co.2)$ koşullarından $\wedge\{y \in \upsilon : a \leq y\}, \wedge\{x \in \upsilon : b \leq x\} \in \upsilon$ ve buradan

$$(\wedge\{y \in \upsilon : a \leq y\}) \sqcup (\wedge\{x \in \upsilon : b \leq x\}) \in \upsilon \Rightarrow c_\upsilon(a) \sqcup c_\upsilon(b) \in \upsilon$$

olur. $a \leq \wedge\{y \in \upsilon : a \leq y\}$ ve $g \leq \wedge\{x \in \upsilon : b \leq x\}$ olduğundan Önerme 1.9 (viii)'den

$$a \sqcup b \leq (\wedge\{y \in \upsilon : a \leq y\}) \sqcup (\wedge\{x \in \upsilon : b \leq x\})$$

yani $a \sqcup b \leq c_\upsilon(a) \sqcup c_\upsilon(b)$ olur. Buna göre $c_\upsilon(a \sqcup b) = \wedge\{z \in \upsilon : a \sqcup b \leq z\} \leq c_\upsilon(a) \sqcup c_\upsilon(b)$ bulunur.

υ_c'nin L-co-topoloji olduğunu da şöyle gösterilir:

$(H\text{-}co.1)$: $(Hc.1)$ koşulundan $c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ olduğundan $\mathbf{0} \in \upsilon_c$ ve $\mathbf{1} \leq c(\mathbf{1})$ olduğundan $\mathbf{1} = c(\mathbf{1})$, yani $\mathbf{1} \in \upsilon_c$ bulunur.

$(H\text{-}co.2)$: $\forall a, b \in L$ için $a, b \in \upsilon_c$ ise $c(a) = a$ ve $c(b) = b$ olur. $(Hc.2)$ özelliğinden

$$c(a \sqcup b) \leq c(a) \sqcup c(b) = a \sqcup b \Rightarrow c(a \sqcup b) \leq a \sqcup b$$

yani $a \sqcup b \in \upsilon_c$ bulunur.

$(H\text{-}co.3)$: $\{a_i : i \in I\} \subseteq \upsilon_c$ olsun. $\forall i \in I$ için $c(a_i) = a_i$ olur. $\underset{i \in I}{\wedge} a_i \leq a_i$ ve $(p.1)$ özelliğinden, $\forall i \in I$ için

$$c\left(\underset{i \in I}{\wedge} a_i\right) \leq c(a_i) = a_i \Rightarrow c\left(\underset{i \in I}{\wedge} a_i\right) \leq \underset{i \in I}{\wedge} a_i$$

olur ki bu da $\underset{i \in I}{\wedge} a_i \in \upsilon_c$ olması demektir. ■

Teorem 3.16 *(i) k bir H-çekirdek operatörü ve τ bir Hutton topoloji olmak üzere $\tau_{k_\tau} = \tau$ ve $k_{\tau_k} = k$ olur.*

(ii) c bir H-kapanış operatörü ve υ bir H-co-topoloji olmak üzere $c_{\upsilon_c} = c$ ve $\upsilon_{c_\upsilon} = \upsilon$ olur.

Kanıt. (i) $a \in \tau_{k_\tau}$ ise $a = k_\tau(a) \in \tau$ olduğundan $a \in \tau$ olur. Tersine $a \in \tau$ ise $a \leq a$ olduğundan $a \leq \vee\{y \in \tau : y \leq a\} = k_\tau(a)$ olur ki bu da $k_\tau(a) \leq a$ olduğundan $k_\tau(a) = a$ yani $a \in \tau_{k_\tau}$ olduğunu gösterir. Bu iki gerektirmeden $\tau_{k_\tau} = \tau$ elde edilir.

(ii) (i) ile benzer şekilde elde edilir. ■

3.3. Genelleştirilmiş **L**-iç ve **L**-kapanış Operatörleri ve Genelleştirilmiş **L**-süreklilik

Bu bölümde Not 3.2'de bahsedilen çekirdek ve kapanış operatörleri ele alınacaktır. Bu özel durumdaki operatörlere genelleştirilmiş **L**-iç operatörü ve genelleştirilmiş **L**-kapanış operatörü denecektir. Genelleştirilmiş **L**-iç operatörü ve genelleştirilmiş **L**-kapanış operatörü özel bir çekirdek ve kapanış operatörü olduğundan Bölüm 3.1.'de sağlanan tüm ifadeler bu operatörler için de geçerlidir. Bu operatörler aynı zamanda topolojik bulanık iç ve topolojik bulanık kapanış operatörlerinin zayıf bir versiyonudur. Dolayısıyla süreklilik ve komşuluk kavramlarını daha genel bir versiyonda inceleme şansı elde edilmiş olur.

Tanım 3.17 **L** *bir tam kalanlı örgü olsun.*

(i) $\mathcal{I} : L^X \to L^X$ dönüşümüne X üzerinde bir genelleştirilmiş **L***-iç operatörü ya da kısaca G-***L***-iç operatörü denir $\Leftrightarrow$ Aşağıdaki koşullar sağlanır: $\forall f, g \in L^X$ için*

$(GI.1)$ $\mathcal{I}(f) \leq f$

$(G.2)$ $f \leq g \Rightarrow \mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}(g)$

$(G.3)$ $\mathcal{I}(\mathcal{I}(f)) = \mathcal{I}(f)$

(ii) $\mathcal{C}l : L^X \to L^X$ *dönüşümüne* X *üzerinde bir genelleştirilmiş* **L***-kapanış operatörü ya da kısaca* G-**L***-kapanış operatörü denir* $\Leftrightarrow$ $(GK.1)$ $f \leq \mathcal{C}l(f)$ *özelliğini ve* $(G.2)$, $(G.3)$ *özelliklerini sağlar.*

Tanım 3.18 *(i)* $\tau = \left\{f_i \in L^X : i \in I\right\}$ *kümesine bir genelleştirilmiş* **L***-iç sistem ya da kısaca* G-**L***-iç sistemi denir* $\Leftrightarrow$ $\forall J \subseteq I$ *için* $\bigvee_{j\in J} f_j \in \tau$ *olur.*

(ii) $\upsilon = \left\{f_i \in L^X : i \in \lambda\right\}$ *kümesine bir genelleştirilmiş* **L***-kapanış sistemi ya da kısaca* G-**L***-kapanış sistemi denir* $\Leftrightarrow$ $\forall J \subseteq \lambda$ *için* $\bigwedge_{j\in J} f_j \in \upsilon$ *olur.*

Tanım 3.19 $\mathcal{N} : X \to L^{L^X}$ *dönüşüm ve* $\forall x \in X$ *için* $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}_x$ *olsun.* $\mathcal{N}$*'ye* X *üzerinde bir genelleştirilmiş* **L***-komşuluk sistemi (*G-**L***-komşuluk sistemi) denir* $\Leftrightarrow$ *Aşağıdaki özellikler sağlanır:* $\forall f, f_1, f_2 \in L^X$ *için;*

$(NG.1)$ $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \mathcal{N}_x(f_1) \leq \mathcal{N}_x(f_2)$

$(NG.2)$ $\mathcal{N}_x(f) \leq f(x)$

$(NG.3)$ $\mathcal{N}_x(f) \leq \vee\{\mathcal{N}_x(h) : h(y) \leq \mathcal{N}_y(f), \forall y \in X\}$

Teorem 3.20 X *üzerindeki* $\mathcal{I}$ G-**L***-iç operatörü* $\forall f \in L^X$ *ve* $\forall x \in X$ *için*

$$\mathcal{N}_x^{(\mathcal{I})}(f) = [\mathcal{I}(f)](x)$$

ile belirlenen $\mathcal{N}^{(\mathcal{I})} = \left(\mathcal{N}_x^{(\mathcal{I})}\right)_{x\in X}$ G-**L***-komşuluk sistemini üretir. Tersine* $\mathcal{N} = (\mathcal{N}_x)_{x\in X}$ G-**L***-komşuluk sistemi* $\forall f \in L^X$ *ve* $\forall x \in X$ *için;* X *üzerinde*

$$\left[\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(f)\right](x) = \mathcal{N}_x(f)$$

ile belirlenen $\mathcal{I}^{(\mathbf{N})}$ G-**L***-iç operatörünü üretir. Ayrıca* $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\left(\mathcal{N}^{(\mathcal{I})}\right)}$ *ve* $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\left(\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}\right)}$ *olur.*

Kanıt. *İlk olarak* $\mathcal{N}_x^{(\mathcal{I})}$ *dönüşümünün* G*-*$\mathbf{L}$*-komşuluk sistemi olduğu şöyle gösterilebilir:*

$(NG.1)$: $f_1 \leq f_2$ *olsun.* $(G.2)$*'den* $\mathcal{N}_x^{(\mathcal{I})}(f_1) = [\mathcal{I}(f_1)](x) \leq [\mathcal{I}(f_2)](x) = \mathcal{N}_x^{(\mathcal{I})}(f_2)$ *bulunur.*

$(NG.2)$: $(GI.1)$*'den* $\mathcal{N}_x^{(\mathcal{I})}(f) = [\mathcal{I}(f)](x) \leq f(x)$ *bulunur.*

$(NG.3)$: $h^* = \mathcal{I}(f)$ *denirse*

$$[\mathcal{I}(f)](y) \leq [\mathcal{I}(f)](y) \Rightarrow h^*(y) \leq \mathbf{N}_y^{(\mathcal{I})}(f)$$

olur. Buradan $(G.3)$ *koşulunu kullanırsak*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_x^{(\mathcal{I})}(f) &= [\mathcal{I}(f)](x) = \mathcal{I}(\mathcal{I}(f))(x) = [\mathcal{I}(h^*)](x) = \mathcal{N}_x^{(\mathcal{I})}(h^*) \leq \\ &\leq \vee \left\{\mathcal{N}_x^{(\mathcal{I})}(h) : h(y) \leq \mathcal{N}_y^{(\mathcal{I})}(f), \forall y \in X\right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}$ *dönüşümünün güçlü* L*-iç operatörü olduğu da şöyle gösterilebilir:*

$(G.1)$: $(NG.2)$*'den* $\forall x \in X$ *ve* $\forall f \in L^X$ *için* $\left[\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(f)\right](x) = \mathcal{N}_x(f) \leq f(x)$ *olduğundan* $\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(f) \leq f$ *bulunur.*

$(G.2)$: $\forall f, g \in L^X$ *için* $f \leq g$ *ise* $\forall x \in X$ *için* $(NG.1)$*'den*

$$\left[\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(f)\right](x) = \mathcal{N}_x(f) \leq \mathcal{N}_x(g) = \left[\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(g)\right](x)$$

olduğundan $\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(f) \leq \mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(g)$ *bulunur.*

$(G.3)$: $\forall y \in X$ *için* $\left[\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(f)\right](y) = \mathcal{N}_y(f) = g(y)$ *olsun.* $h \leq g$ *olacak şekildeki* $\forall h \in L^X$ *için* $(NG.1)$*'den* $\mathcal{N}_x(h) \leq \mathcal{N}_x(g)$ *ve buradan*

$$\vee \{\mathcal{N}_x(h) : h(y) \leq \mathcal{N}_y(f), \forall y \in X\} \leq \mathcal{N}_x(g)$$

olur. $(NG.3)$*'den*

$$\mathcal{N}_x(f) \leq \vee \{\mathcal{N}_x(h) : h(y) \leq \mathcal{N}_y(f), \forall y \in X\} \leq \mathcal{N}_x(g) \Rightarrow \mathcal{N}_x(f) \leq \mathcal{N}_x\left(\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(f)\right)$$

olur. O halde $\left[\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(f)\right](x) \leq \left[\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}\left(\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(f)\right)\right](x) \Rightarrow \mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(f) \leq \mathcal{I}^{(\mathcal{N})}\left(\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(f)\right)$ *bulunur.*

Son olarak $\forall x \in X$ *ve* $\forall f \in L^X$ *için*

$$\left[\mathcal{I}^{\left(\mathcal{N}^{(\mathcal{I})}\right)}(f)\right](x) = \mathcal{N}_x^{(\mathcal{I})}(f) = [\mathcal{I}(f)](x) \Rightarrow \mathcal{I}^{\left(\mathcal{N}^{(\mathcal{I})}\right)} = \mathcal{I}$$

ve

$$\mathcal{N}_x^{\left(\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}\right)}(f) = \left[\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}(f)\right](x) = \mathcal{N}_x(f) \Rightarrow \mathcal{N} = \mathcal{N}^{\left(\mathcal{I}^{(\mathcal{N})}\right)}$$

bulunur. ■

Bu teorem sayesinde G-**L**-iç operatörleri ve G-**L**-komşuluk sistemleri birbirlerine denk kavramlar olur. Dolayısıyla G-**L**-iç operatörleri ve G-**L**-iç sistemleri birbirlerine denk olduğundan G-**L**-komşuluk sistemleri ve G-**L**-iç sistemleri birbirlerine denk kavramlar olur.

Tanım 3.21 τ_1, τ_2 *sırasıyla* X *ve* Y *üzerinde* G-**L**-*iç sistemler ve* $\varphi : X \to Y$ *bir fonksiyon olsun.*

φ *genelleştirilmiş* **L**-*süreklidir ya da kısaca* G-**L**-*süreklidir* $\Leftrightarrow$ $\forall g \in \tau_2$ *için* $\varphi^{-1}(g) \in \tau_1$

Tanım 3.22 τ_1, τ_2*sırasıyla* X *ve* Y *üzerinde* G-**L**-*iç sistemler,* $\varphi : X \to Y$ *bir fonksiyon ve* $\mathcal{N}^{(\tau_1)} = \left(\mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\right)_{x \in X}, \mathcal{N}^{(\tau_2)} = \left(\mathcal{N}_y^{(\tau_2)}\right)_{y \in Y}$ *sırasıyla* X *ve* Y *üzerinde* G-**L**-*komşuluk sistemleri olsun.*

$\varphi,\ x \in X$ *noktasında* G-**L**-*süreklidir* $\Leftrightarrow \forall f \in L^Y$ *için* $\mathcal{N}_{\varphi(x)}^{(\tau_2)}(f) \leq \mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\left(\varphi^{-1}(f)\right)$

Tanım 3.23 *(i)* $\forall x \in X$ *için* $G_x(\varphi) = \bigwedge_{f \in L^Y}\left(\mathcal{N}_{\varphi(x)}^{(\tau_2)}(f) \to \mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\left(\varphi^{-1}(f)\right)\right)$ *ile tanımlı* $G_x(\varphi) \in L$*'ye* φ*'nin* $x \in X$*'de* G-**L**-*süreklilik derecesi denir.*

(ii) $G(\varphi) = \bigwedge_{x \in X} G_x(\varphi)$ *ile tanımlı* $G(\varphi) \in L$*'ye* φ*'nin* G-**L**-*süreklilik derecesi denir.*

G-$\mathbf{L}$-iç sistemler yerine $\mathbf{L}$-topolojiler alınırsa, G-$\mathbf{L}$-süreklilik tanımı Höhle ve Sostak'da (1999) var olan $\mathbf{L}$-süreklilik tanımı ile ve G-$\mathbf{L}$-süreklilik derecesi de Demirci'de (2007) tanımlanan $\mathbf{L}$-süreklilik derecesi ile aynı olur. Bundan sonraki bölümde τ_1, τ_2 sırasıyla X ve Y üzerinde G-$\mathbf{L}$-iç sistemler, $\varphi : X \to Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{N}^{(\tau_1)} = \left(\mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\right)_{x\in X}, \mathcal{N}^{(\tau_2)} = \left(\mathcal{N}_y^{(\tau_2)}\right)_{y\in Y}$ sırasıyla X ve Y üzerinde G-$\mathbf{L}$-komşuluk sistemleri olarak alınacaktır. $\forall f \in L^X$, $g \in L^Y$ için $\mathcal{I}_{\tau_1}(f)$ ve $\mathcal{I}_{\tau_2}(g)$, f° ve g° ile gösterilecektir.

Lemma 3.24 $G(\varphi) = \bigwedge_{g\in\tau_2} \tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}(g), \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ\right)$

Kanıt. $\forall g \in \tau_2$ ve $\forall x \in X$ için Teorem 3.20'den

$$\mathcal{N}_{\varphi(x)}^{(\tau_2)}(g) = [\mathcal{I}_{\tau_2}(g)](\varphi(x)) = g^\circ(\varphi(x)) = g(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(g)(x)$$

ve $\mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\left(\varphi^{-1}(g)\right) = \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ(x)$ olduğundan

$$G(\varphi) = \bigwedge_{x\in X}\left(\bigwedge_{g\in L^Y}\left(\mathcal{N}_{\varphi(x)}^{(\tau_2)}(g) \to \mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\left(\varphi^{-1}(g)\right)\right)\right) \leq$$

$$\leq \bigwedge_{x\in X}\left(\bigwedge_{g\in\tau_2}\left(\mathcal{N}_{\varphi(x)}^{(\tau_2)}(g) \to \mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\left(\varphi^{-1}(g)\right)\right)\right) =$$

$$= \bigwedge_{g\in\tau_2}\left[\bigwedge_{x\in X}\left(\varphi^{-1}(g)(x) \to \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ(x)\right)\right] = \bigwedge_{g\in\tau_2}\tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}(g), \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ\right)$$

olur. Tersine $\forall g \in L^Y$ ve $\forall x \in X$ için Teorem 3.20'den $\mathcal{N}_{\varphi(x)}^{(\tau_2)}(g) = g^\circ(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(g^\circ)(x)$ olur. $(GI.1)$'den $g^\circ \leq g$ ise $\varphi^{-1}(g^\circ) \leq \varphi^{-1}(g)$ olduğundan $(NG.1)$'den

$$\left(\varphi^{-1}(g^\circ)\right)^\circ(x) = \mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\left(\varphi^{-1}(g^\circ)\right) \leq \mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\left(\varphi^{-1}(g)\right)$$

bulunur. O halde Önerme 1.5 (ii) $g^\circ \in \tau_2$ olduğundan

$$\mathcal{N}_{\varphi(x)}^{(\tau_2)}(g) \to \mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\left(\varphi^{-1}(g)\right) = \varphi^{-1}(g^\circ)(x) \to \mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\left(\varphi^{-1}(g)\right) \geq$$

$$\geq \varphi^{-1}(g^\circ)(x) \to \left(\varphi^{-1}(g^\circ)\right)^\circ(x) \geq \bigwedge_{x\in X}\left(\varphi^{-1}(g)(x) \to \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ(x)\right) \geq$$

$$\geq \bigwedge_{g\in\tau_2}\left(\bigwedge_{x\in X}\left(\varphi^{-1}(g)(x) \to \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ(x)\right)\right)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} G(\varphi) &= \bigwedge_{x\in X}\left(\bigwedge_{g\in L^Y}\left(\mathcal{N}_{\varphi(x)}^{(\tau_2)}(g) \to \mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\left(\varphi^{-1}(g)\right)\right)\right) \geq \\ &\geq \bigwedge_{g\in\tau_2}\left(\bigwedge_{x\in X}\left(\varphi^{-1}(g)(x) \to \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ(x)\right)\right) = \bigwedge_{g\in\tau_2}\tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}(g), \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ\right) \end{aligned}$$

bulunur ve eşitlik elde edilir. ∎

Teorem 3.25 *(i)* $G(\varphi) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \varphi$ *G-$\mathbf{L}$-süreklidir.*

(ii) φ, $\forall x \in X$ *noktasında G-$\mathbf{L}$-süreklidir* $\Leftrightarrow \varphi$ *G-$\mathbf{L}$-süreklidir.*

(iii) $G(\varphi) = \bigwedge_{g \in L^Y} \tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}(g^\circ), (\varphi^{-1}(g))^\circ\right)$

Kanıt. (i) : Lemma 3.24 ve Önerme 1.4'den

$$G(\varphi) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \bigwedge_{g \in \tau_2} \tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}(g), \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ\right) = \mathbf{1}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \varphi^{-1}(g)(x) \to \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ(x) = \mathbf{1} \ \ (\forall g \in \tau_2), (\forall x \in X) \\ &\Leftrightarrow \varphi^{-1}(g)(x) \leq \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ(x) \ \ (\forall g \in \tau_2), (\forall x \in X) \end{aligned}$$

olur. $(GI.1)$'den $(\varphi^{-1}(g))^\circ \leq \varphi^{-1}(g)$ olduğundan $\varphi^{-1}(g) = (\varphi^{-1}(g))^\circ$ olur ki bu da $\varphi^{-1}(g) \in \tau_1$ olması demektir. Yani φ G-$\mathbf{L}$-sürekli olur. Ters gerektirme benzer şekilde görülür.

(ii) : (i) ve Önerme 1.4'den

$$\varphi \ G\text{-}\mathbf{L}\text{-süreklidir} \Leftrightarrow G(\varphi) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in X} G_x(\varphi) = \mathbf{1} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \mathcal{N}_{\varphi(x)}^{(\tau_2)}(g) \to \mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\left(\varphi^{-1}(g)\right) = \mathbf{1} \ \ \left(\forall g \in L^Y\right), (\forall x \in X) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N}_{\varphi(x)}^{(\tau_2)}(g) \leq \mathcal{N}_x^{(\tau_1)}\left(\varphi^{-1}(g)\right) \ \ \left(\forall g \in L^Y\right), (\forall x \in X) \end{aligned}$$

olur ki bu da $\forall x \in X$ için φ'nin G-$\mathbf{L}$-sürekli olması demektir. Ters gerektirme benzer şekilde görülür.

(iii) : $(GI.1)$'den $g^\circ \leq g$ ise $\varphi^{-1}(g^\circ) \leq \varphi^{-1}(g)$ olur. $(G.2)$'den $(\varphi^{-1}(g^\circ))^\circ \leq (\varphi^{-1}(g))^\circ$ bulunur. O halde Önerme 1.13 (iii) ve Lemma 3.24'den

$$\tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}(g^\circ), \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ\right) \geq \tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}(g^\circ), \left(\varphi^{-1}(g^\circ)\right)^\circ\right) \geq G(\varphi)$$

ve böylece

$$\bigwedge_{g \in L^Y} \tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}(g^\circ), \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ\right) \geq G(\varphi)$$

bulunur. Tersine Lemma 3.24'den

$$\bigwedge_{g \in L^Y} \tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}(g^\circ), \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ\right) \leq$$

$$\leq \bigwedge_{g \in \tau_2} \left(\tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}(g^\circ), \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ\right)\right) = \bigwedge_{g \in \tau_2} \left(\tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}(g), \left(\varphi^{-1}(g)\right)^\circ\right)\right) = G(\varphi)$$

olur. Yani eşitlik elde edilir. ■

Not 3.26 *τ bir G-$\mathbf{L}$-iç sistemi olmak üzere, eğer* $\mathbf{L}$ *çift değilleme kuralını sağlarsa Teorem 3.10 (i)'den $\tau^{(\neg)}$'nın bir G-$\mathbf{L}$-kapanış sistemi olduğu biliniyor. O halde Lemma 3.5 (ii)'den*

$$\overline{f} = \mathcal{C}l_{\tau^{(\neg)}}(f) = \wedge\left\{h \in L^X : h \in \tau^{(\neg)}, f \leq h\right\}$$

dönüşümü bir G-$\mathbf{L}$-kapanış operatörüdür. Ayrıca Lemma 3.5 (i) ve Teorem 3.8 (i)'den $\overline{f} = \neg\mathcal{I}_\tau(\neg(f))$ olur.

Teorem 3.27 $\mathbf{L}$ *çift değilleme kuralını sağlasın. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

(i) $G(\varphi) = \bigwedge_{g \in \tau_2^{(\neg)}} \tilde{\subseteq}\left(\overline{\varphi^{-1}(g)}, \varphi^{-1}(g)\right)$

(ii) $G(\varphi) = \bigwedge_{g \in L^Y} \tilde{\subseteq}\left(\overline{\varphi^{-1}(g)}, \varphi^{-1}(\overline{g})\right)$

(iii) $G(\varphi) = \bigwedge_{f \in L^X} \tilde{\subseteq}\left(\varphi\left(\overline{f}\right), \overline{\varphi(f)}\right)$

Kanıt. (i) Not 3.26, Önerme 1.13 (viii), Lemma 3.24, çift değilleme kuralı ve $\varphi^{-1}(\neg(g)) = \neg(\varphi^{-1}(g))$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
G(\varphi) &= \bigwedge_{h \in \tau_2} \tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}(h), \left(\varphi^{-1}(h)\right)^{\circ}\right) = \bigwedge_{g \in \tau_2^{(\neg)}} \tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}(\neg(g)), \left(\varphi^{-1}(\neg(g))\right)^{\circ}\right) = \\
&= \bigwedge_{g \in \tau_2^{(\neg)}} \tilde{\subseteq}\left(\neg\left(\left(\varphi^{-1}(\neg(g))\right)^{\circ}\right), \neg\left(\varphi^{-1}(\neg(g))\right)\right) = \\
&= \bigwedge_{g \in \tau_2^{(\neg)}} \tilde{\subseteq}\left(\neg\left(\left(\neg\left(\varphi^{-1}(g)\right)\right)^{\circ}\right), \neg\left(\neg\left(\varphi^{-1}(g)\right)\right)\right) = \\
&= \bigwedge_{g \in \tau_2^{(\neg)}} \tilde{\subseteq}\left(\neg\mathcal{I}_{\boldsymbol{\tau}_1}\left(\neg\left(\varphi^{-1}(g)\right)\right), \varphi^{-1}(g)\right) = \bigwedge_{g \in \tau_2^{(\neg)}} \tilde{\subseteq}\left(\overline{\varphi^{-1}(g)}, \varphi^{-1}(g)\right)
\end{aligned}$$

bulunur ve eşitlik elde edilir.

(ii) $\forall g \in L^Y$ için $(GK.1)$'den $g \leq \overline{g}$ ve buradan $\varphi^{-1}(g) \leq \varphi^{-1}(\overline{g})$ olduğundan $(G.2)$ kullanılırsa $\overline{\varphi^{-1}(g)} \leq \overline{\varphi^{-1}(\overline{g})}$ elde edilir. Bu eşitsizlik, (i) özelliği ve Önerme 1.13 (ii)'den

$$\tilde{\subseteq}\left(\overline{\varphi^{-1}(g)}, \varphi^{-1}(\overline{g})\right) \geq \tilde{\subseteq}\left(\overline{\varphi^{-1}(\overline{g})}, \varphi^{-1}(\overline{g})\right) \geq \bigwedge_{h \in \tau_2^{(\neg)}} \tilde{\subseteq}\left(\overline{\varphi^{-1}(h)}, \varphi^{-1}(h)\right) = G(\varphi)$$

yani

$$\bigwedge_{g\in L^Y}\tilde{\subseteq}\left(\overline{\varphi^{-1}(g)},\varphi^{-1}(\overline{g})\right)\geq G(\varphi)$$

elde edilir. Tersine (i) özelliğinden ve $g\in\tau_2^{(\neg)}$ ise $\overline{g}=g$ olduğundan

$$\begin{aligned}\bigwedge_{g\in L^Y}\ \tilde{\subseteq}\ &\left(\overline{\varphi^{-1}(g)},\varphi^{-1}(\overline{g})\right)\leq\bigwedge_{g\in\tau_2^{(\neg)}}\tilde{\subseteq}\left(\overline{\varphi^{-1}(g)},\varphi^{-1}(\overline{g})\right)=\\ =&\bigwedge_{g\in\tau_2^{(\neg)}}\tilde{\subseteq}\left(\overline{\varphi^{-1}(g)},\varphi^{-1}(g)\right)=G(\varphi)\end{aligned}$$

bulunur ve eşitlik elde edilir.

(iii) $\varphi\left(\varphi^{-1}(g)\right)\leq g$ olduğundan $(G.2)$'den $\overline{\varphi\left(\varphi^{-1}(g)\right)}\leq\overline{g}$ ve $g\leq\varphi^{-1}(\varphi(g))$ olduğundan $(G.2)$'den $\overline{g}\leq\overline{\varphi^{-1}(\varphi(g))}$olur. O halde (ii) özelliği ve Önerme 1.13 (ii), (iii) ve (vii)'den

$$\begin{aligned}\bigwedge_{f\in L^X}\ \tilde{\subseteq}\ &\left(\varphi\left(\overline{f}\right),\overline{\varphi(f)}\right)\leq\tilde{\subseteq}\left(\varphi\left(\overline{\varphi^{-1}(g)}\right),\overline{\varphi\left(\varphi^{-1}(g)\right)}\right)\leq\tilde{\subseteq}\left(\varphi\left(\overline{\varphi^{-1}(g)}\right),\overline{g}\right)\leq\\ \leq\ &\tilde{\subseteq}\left(\varphi^{-1}\left(\varphi\left(\overline{\varphi^{-1}(g)}\right)\right),\varphi^{-1}(\overline{g})\right)\leq\tilde{\subseteq}\left(\overline{\varphi^{-1}(g)},\varphi^{-1}(\overline{g})\right)\end{aligned}$$

yani

$$\bigwedge_{f\in L^X}\tilde{\subseteq}\left(\varphi\left(\overline{f}\right),\overline{\varphi(f)}\right)\leq\bigwedge_{g\in L^Y}\tilde{\subseteq}\left(\overline{\varphi^{-1}(g)},\varphi^{-1}(\overline{g})\right)=G(\varphi)$$

bulunur. Tersine Önerme 1.13 (vi) özelliği kullanılırsa $\forall f\in L^X$ için,

$$\begin{aligned}G(\varphi)\ =\ &\bigwedge_{g\in L^Y}\tilde{\subseteq}\left(\overline{\varphi^{-1}(g)},\varphi^{-1}(\overline{g})\right)\leq\tilde{\subseteq}\left(\overline{\varphi^{-1}(\varphi(f))},\varphi^{-1}\left(\overline{\varphi(f)}\right)\right)\leq\\ \leq\ &\tilde{\subseteq}\left(\overline{f},\varphi^{-1}\left(\overline{\varphi(f)}\right)\right)\leq\tilde{\subseteq}\left(\varphi\left(\overline{f}\right),\varphi\left(\varphi^{-1}\left(\overline{\varphi(f)}\right)\right)\right)\leq\tilde{\subseteq}\left(\varphi\left(\overline{f}\right),\overline{\varphi(f)}\right)\end{aligned}$$

yani

$$G(\varphi)\leq\bigwedge_{f\in L^X}\tilde{\subseteq}\left(\varphi\left(\overline{f}\right),\overline{\varphi(f)}\right)$$

bulunur ve eşitlik elde edilir. ■

G-**L**-iç ,G-**L**-kapanış operatörleri ve G-**L**-iç ,G-**L**-kapanış sistemleri yerine sırasıyla topolojik L-iç, topolojik L-kapanış operatörleri ve L-topoloji,L-co-topoloji alınırsa Demirci'nin (2007) elde ettiği gibi Lemma 3.24, Teorem 3.25 ve Teorem 3.27 aynen geçerli olur.

4. SONUÇ

Bu çalışma sonucunda $K = \{\mathbf{1}\}$ durumundaki bulanık iç ve bulanık kapanış operatörleri tam kalanlı örgü üzerine genişletilerek incelenmiştir. Daha sonra tam kalanlı örgü yapısında, tam örgü özel olarak $\left(L^X, \wedge, \vee, \mathbf{1}_\varnothing, \mathbf{1}_X\right)$ alınmış ve bu genişletilen operatörler, bu özel tam kalanlı örgü yapısı üzerinde incelenmiştir. Bu incelenen operatörlerin ürettiği sistemlere de G-$\mathbf{L}$-iç ve G-$\mathbf{L}$-kapanış sistemi denilmiştir. Bu sistemler bulanık topolojiden daha zayıf olmalarına rağmen, bulanık topolojik uzaylarda sağlanan bazı özelliklerin bu sistemlerde de sağlandığı gözlemlenmiştir. Örneğin, topolojik uzaylarda tanımlanan L-süreklilik, L-komşuluk, bir noktada L-süreklilik ve L-süreklilik derecesi gibi kavramlar bu sistemlerde de tanımlanarak daha genel bir versiyonda bu tanımlarla, özellikle L-süreklilik derecesi ile ilgili, önemli sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca topolojik bulanık iç ve topolojik bulanık kapanış operatörlerini tam kalanlı örgü üzerine genelleştirerek, ürettiği sistemler ile nokta kavramı olmayan topolojiler oluşturulmuş ve aralarındaki denklikler de ele alınmıştır.

5. KAYNAKLAR

BELOHLAVEK, R. 2001. Fuzzy closure operators. Journal of Mathematical Analysis and Appl. 262, 473-489.

BELOHLAVEK, R. 2002-a. Fuzzy closure operators II. Soft Computing 7, 53-64.

BELOHLAVEK, R. 2002-b. Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles. Kluwer Academic/Plenum Press, 369 pp, New York.

BELOHLAVEK, R. 2003. Fuzzy closure operators induced by similarity. Fund. Inform. 58, 79-91.

BELOHLAVEK, R. and FUNIKOVA, T. 2004. Fuzzy interior operators. Int. J. Gen. Syst. 33, 315-330

BIACINO, L. and GERLA, G. 1996. An extension principle for closure operators. J. Math. Anal. Appl. 198, 1-24.

CHANG, C. L. 1968. Fuzzy Topological Spaces. J. Math. Anal. Appl. 24, 182-190.

DEMİRCİ, M. 2007. On the convergence structure of L-topological spaces and the continuity in L-topological spaces. New Math. Nat. Comput. 3, 1-25.

FANG, J. and YUE, Y. 2009. L-fuzzy closure systems. Fuzzy Sets and Systems, 1-11.

GERLA, G. 1999. Closure operators, fuzzy logic and constraints. Fuzzy sets, logics and reasoning about knowledge, Appl. Log. Ser., 3, Kluwer Acad. Publ., Boston, 101-120.

GERLA, G. 2001. Fuzzy Logic: Mathematical Tools for Approximate Reasoning. Kluwer, Dordrecht.

GIERZ, G., HOFMANN, H., KEIMEL, K., LAWSON, J. D., MISLOVE, M. and SCOTT, D. S. 1980. A compendium of continuous lattices. Springer-Verlag, Berlin.

GOGUEN, J. A. 1967. L-fuzzy sets. J. Math. Anal. Appl. 18,145-174.

HAJEK, P. 1998. Metamathematics of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, pp 297.

HÖHLE, U. 1995. Commutative, Residuated l-monoids. in: U. Höhle and E.P. Klement (Eds.), Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets. Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, pp. 53-106.

HÖHLE, U. and ŠOSTAK, A.P. 1999. Axiomatic Foundations of Fixed-Basis Fuzzy Topology. in: U. Höhle and S. E. Rodabaugh (Eds.), Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, The hand books of fuzzy sets series, Vol.3, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, pp. 123-273.

HUTTON, B. and REILLY, I.R. 1980. Separation axioms in fuzzy topological spaces. Fuzzy Sets and Systems 3, 93-104.

KLEMENT, E.P., MESIAR, R. and PAP, E. 2000. Triangular Norms, pp 385.

LOWEN, R. 1976. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. J. Math. Anal. Appl. 56, 621-633.

LOWEN, R. 1996. Fuzzy Set Theory, pp 428.

RODABAUGH, S. E. 1999. Categorical Foundations of Variable-Basis Fuzzy Topology. in: U. Höhle and S. E. Rodabaugh (Eds.), Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, The hand books of fuzzy sets series, Vol.3, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, pp. 273-389.

SHI, F. 2009. L-fuzzy interiors and L-fuzzy closures. Fuzzy Sets and Systems 160, 1218-1232.

ŠOSTAK, A. P. 1985. On a fuzzy topological structure. Rend. Circ. Mat., Palermo, 11, 89-103.

ZADEH, L. A. 1965. Fuzzy Sets, *Inform. Control* 8, 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Hakan Şimşek 1987 yılında Ankara'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara'da, lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2004 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. 2008 yılı Eylül ayında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.