T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TORSION TEORİDE ÖRTÜLER VE HULL

Seçil ÇEKEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2009

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TORSION TEORİDE ÖRTÜLER VE HULL

Seçil ÇEKEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından, "2228 Son Sınıf Lisans Öğrencileri İçin Yurt İçi Lisansüstü (Yüksek Lisans/Doktora) Burs" programı ile desteklenmiştir.

2009

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TORSION TEORİDE ÖRTÜLER VE HULL

Seçil ÇEKEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../ .../ 2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından ...... not takdir edilerek oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mustafa ALKAN ....

(Danışman)

Prof. Dr. Veli KURT ....

Prof. Dr. Yücel TIRAŞ ....

ÖZET

TORSION TEORİDE ÖRTÜLER VE HULL

Seçil ÇEKEN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa ALKAN

Mayıs-2009, 78 Pages

Bu tezin amacı torsion teorinin temel özelliklerini incelemek ve modül teorideki bazı kavramların torsion teorideki genellemelerini araştırarak CS modüllerin yeni bir genellemesini yapmaktır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, modül teorideki temel tanım ve teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

İkinci bölümün, ilk kısmında torsion teorinin tanımı ve bazı özellikleri incelenmiştir. Sonraki kısımda ise daha sonraki bölümlerin temel kavramları olacak olan τ-yoğun ve τ-pür alt modül tanımları ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca modül teorideki önemli bir modül sınıfı olan basit modüllerin genellemesi olarak, τ-basit ve τ-kokritikal modül kavramları tanıtılmıştır. Bu kavramlar ile ilgili temel özellikler verildikten sonra, maksimal alt modüllerin genellemesi olan τ-maksimal alt modüller tanıtılmıştır. Daha sonra da modül teorideki gibi τ-dar alt modül kavramı ile τ-radikal kavramları arasındaki bağıntı incelenmiştir. Ayrıca, modül kuramının önemli teoremlerinden biri olan Nakayama Lemma'nın bir genellemesi de verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bir torsion teoriye göre injektif ve projektif modüller tanımlanarak, injektif hull ve projektif örtü kavramlarının torsion teorideki genellemeleri incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde (0,Mod-R) torsion teorisinde injektif modüllere karşılık gelen τ-bölümlü modül kavramı da verilmiştir.

Son bölümde, CS modüllerin torsion teorideki yeni bir genellemesini elde etmek amacıyla, τ-kapalı ve τ-tamlayan alt modüller tanımlanarak, τ-CS modül tanımlanmıştır. Daha sonra da bu yeni kavramların özellikleri araştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Torsion teori, τ-injektif modül, τ-projektif modül, τ-bölümlü modül, τ-injektif hull, τ-projektif örtü, τ-bölümlü hull, τ-CS modül.

JÜRİ: Yrd. Doç. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Veli KURT
Prof. Dr. Yücel TIRAŞ

ABSTRACT

COVERS and HULLS RELATIVE TO TORSION THEORIES

Seçil Çeken

M.Sc. in Mathematics

Adviser : Assist. Prof. Dr. Mustafa ALKAN

May-2009, 78 Pages

The aim of this thesis is to examine fundamental properties of torsion theory and make a new generalization of CS modules by studying generalizations of some concepts in module theory relative to a torsion theory.

This thesis consists of four chapter. In the first chapter fundamental definitions and theorems in module theory are given without proofs.

In the first part of the second chapter definition and some properties of torsion theory are examined. In the next part, definitions and properties of τ-dense and τ-pure submodules, which will be basic notions of next chapters, are given. Moreover as a generalization of simple module which is an important module class in module theory τ-simple and τ-cocritical modules are introduced. After giving fundamental properties of these concepts, τ-maximal submodules which are generalizations of maximal submodules are introduced. Then the connection between τ-small submodules and τ-radical is established as in module theory. Furthermore a generalization of Nakayama Lemma which is an important theorem of module theory is given.

In the third chapter injective and projective modules are defined relative to a torsion theory and generalizations of injective hulls and projective covers are examined in a torsion theory. Moreover in this chapter, the concept of τ-divisible module which coincides with injective module in (0,Mod-R) is given.

In the last chapter τ-CS modules are defined by defining τ-closed and τ-complement submodules in order to obtain a new generalization of CS modules. Then properties of these new concepts are investigated.

KEY WORDS: Torsion theory, τ-injective module, τ-projective module, τ-divisible module, τ-injective hull, τ-projective cover, τ-divisible hull, τ-CS module.

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Veli KURT
Prof. Dr. Yücel TIRAŞ

ÖNSÖZ

Torsion teorileri modül teorinin önemli çalışma konuları arasındadır. Çünkü burada elde edilen sonuçlar modül teorideki sonuçları genellemektedir. Bu amaçla birçok yazar önemli modül sınıflarının torsion teorideki karakterizasyonlarını araştırmıştır. Örneğin 1997'de Patrick Smith komplement modüllerin genellemesi olarak τ-komplement modül kavramını tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir. 2007 yılında, modül teoride önemli bir modül sınıfı olan CS modüllerin torsion teorideki bir karakterizasyonu, Charalambides ve Clark tarafından araştırılmıştır.

Bu çalışmada Charalambides ve Clark'dan farklı olarak, CS modüllerin torsion teoride yeni bir karakterizasyonu elde edilmiş ve temel özellikleri incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında ve bugüne kadar yaptığım tüm çalışmalarda bilgi ve desteğiyle yanımda olan, bana her zaman inanan ve güvenen çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa ALKAN'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\oplus_{i\in I}M_i$	M_i modüllerinin dik toplamı
$\Pi_{i\in I}M_i$	M_i modüllerinin dik çarpımı
$N \leq M$	N M'nin alt modülü
$N \trianglelefteq M$	N M'nin geniş alt modülü
$N \trianglelefteq_\tau M$	N M'nin τ-geniş alt modülü
$N \leq_c M$	N M'nin tamlayan alt modülü
$N \leq_{\tau-c} M$	N M'nin τ-tamlayan alt modülü
$N << M$	N M'nin dar alt modülü
$N <<_\tau M$	N M'nin τ-dar alt modülü
$J(M)$	M modülünün Jacobson Radikali
$J_\tau(M)$	M modülünün τ-radikali
$Hom_R(M,N)$	M'den N'ye R-modül homomorfizmalarının kümesi
Ç$ek\,(f)$	f homomorfizmasının çekirdeği
$G\ddot{o}r(f)$	f homomorfizmasının görüntüsü
$E(M)$	M modülünün injektif hull'ü
$E_\tau(M)$	M modülünün τ-injektif hull'ü
Ext_R^i	i. Ext funktoru
$t_\tau(M)$	M modülünün τ-torsion alt modülü
$F_\tau(M)$	M modülünün τ-yoğun alt modüllerinin kümesi
$\mathcal{P}_\tau(M)$	M modülünün τ-pür alt modüllerinin kümesi

1 GİRİŞ

Herhangi bir küme üzerinde işlem yapabilmek için bu kümenin elemenları üzerinde bir cebirsel yapıya ihtiyaç vardır. Örneğin, $A = \{a, b, c\}$ ve $X, Y \in P(A)$ için $X + Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ işlemi ile A'nın kuvvet kümesi $\mathcal{P}(A)$ değişmeli gruptur. Ayrıca $X + Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ ve $X.Y = X \cap Y$ işlemleri ile de $\mathcal{P}(A)$ bir halkadır.

$$\{a\} + x = \{b\} \qquad (*)$$

$$\{a\}\{c, a\} + \{b\}x = \{b\} \qquad (**)$$

denklemlerini göz önüne alalım. Halka yapısı ve kümenin sonlu olması kullanılarak bu denklemlerin çözümünün var olup olmadığı kolayca kontrol edilebilir ve varsa da bu çözümler bulunabilir. Burada $(*)$'ın çözümü $x = \{b, a\}$'dır. Fakat $\{b\}$'nin halka yapısında tersi olmadığından $(**)$'ın çözümü yoktur. Ancak elimizde her zaman bu şekilde basit kümeler olmayabilir. O halde bir kümenin elemanları üzerindeki cebirsel yapıyı incelemek oldukça önemlidir.

Bir küme üzerindeki grup ya da halka yapısına benzer olarak, bir cisim yardımı ile değişmeli grup üzerine yeni bir yapı teşkil edilebilir. Bu yapı, değişmeli grubun cisim üzerindeki, vektör uzayı yapısı olarak adlandırılır. Bu tür yapılar yardımı ile de küme üzerinde değişik işlemler yapabiliriz. Bu sebepten dolayı, vektör uzayı kavramı matematiğin ve dolayısıyla bilim dünyasının en önemli kavramlarından biridir. Ancak $(**)$'ın çözümü için vektör uzayı kavramı da yetersiz kalmaktadır. Bundan dolayı yeni bir kavrama ihtiyaç duymaktayız.

Tanım 1.0.1 *(Dummit ve Foote 1999) R birimli halka ve M toplamsal Abel grubu olsun. $\bullet : M \times R \to M$ fonksiyonu $\bullet(m, r) = mr$ ile gösterilmek üzere her $r, s \in R$ ve $a, b \in M$ için,*

a) $(a + b)r = ar + br$

b) $a(r + s) = ar + as$

c) $a(rs) = (ar)s$

d) $a1_R = a$

özellikleri sağlanıyor ise M'ye (sağ) R-modül denir.

Yukarıdaki tanımdan açıkca görüldüğü gibi, her vektör uzayı modüldür. Ayrıca G değişmeli bir grup ve $n \in G$ $r \in \mathbb{Z}$ için

$$n.r = \begin{cases} n + \cdots + n & r > 0 \\ 0 & r = 0 \\ -n - \cdots - n & r < 0 \end{cases}$$

tanımı ile G bir $\mathbb{Z}$-moduldür.

Bundan sonra R ile birimli bir halkayı ve M ile R üzerindeki sağ R–modülü göstereceğiz.

Bu tezde vektör uzayların genellemesi olan modüllerin değişik karakterizasyonu üzerinde çalışaçağız. Bu bölümünde ise, daha sonra kullanacağımız modül teorinin temel bilgilerini değişik kaynaklardan ispatsız bir şekilde vereceğiz. Modül teorinin temel taşlarından olan bir eşitlik ile başlayalım.

Önerme 1.0.2 *(Modülarite Kuralı) M R-modül, K, H, L M'nin alt modülleri ve $K \subseteq H$ olsun. $H \cap (K + L) = K + (H \cap L)$ dır.*

Tanım 1.0.3 *(Dummit ve Foote 1999)*

$$... \xrightarrow{f_{i-1}} A_{i-1} \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \longrightarrow ...$$

modül homomorfizması dizisi ve her $i \in \mathbb{Z}$ için $Imf_i =$Çekf_{i+1} ise bu diziye tam dizi denir.

Özel olarak $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ şeklindeki tam diziye kısa tam dizi denir.

Teorem 1.0.4 *(Dummit ve Foote 1999) R bir halka,*

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A_2 \longrightarrow 0$$

bir kısa tam dizi için aşağıdaki ifadeler denktir;

(i) $h : A_2 \longrightarrow B$, $gh = 1_{A_2}$ olacak şekilde bir h, homomorfizması vardır,

(ii) $k : B \longrightarrow A_1$, $kf = 1_{A_1}$ olacak şekilde bir k, homomorfizması vardır,

(iii) $B \simeq A_1 \oplus A_2$'dir.

Tanım 1.0.5 *(Dummit ve Foote 1999) R bir halka olsun*
$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A_2 \longrightarrow 0$ *kısa tam dizisi için yukarıdaki teoremin denk koşullarından biri sağlanıyorsa bu kısa tam diziye bölünür denir.*

Tanım 1.0.6 *(Dummit ve Foote 1999) M R-modül ve $\{m_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, M'nin bir üreteç kümesi olsun. M'nin her elemanı $m = a_1 m_{\alpha_1} + ...a_k m_{\alpha_k}$, $a_i \in R, \alpha_i \in \Lambda$ ve $k \in \mathbb{N}$ olacak şekilde tek türlü yazılabiliyorsa M'ye R üzerinde serbest modül denir.*

Örnek 1.0.7 *1) R halkası kendi üzerinde serbest R-modüldür.*

2) R bir değişmeli halka olsun. $R[x]$ polinomlar halkası bir serbest R-modüldür. $\{x^i\}_{i\geq 0}$ $R[x]$'in bir tabanıdır.

Teorem 1.0.8 *(Dummit ve Foote 1999) Her R-modül bir serbest R-modülün homomorf görüntüsüdür.*

M ve N R-modüller olsun.

$$Hom_R(M,N) = \{f \mid f : M \to N \ R\text{-homomorfizması}\}$$

kümesi fonksiyonlardaki toplama işlemi ile Abel grubudur. Ayrıca L, M, D R-modüller ve $\psi : L \to M$ bir homomorfizma olmak üzere,
$\psi^* : Hom_R(D,L) \to Hom_R(D,M)$, $\psi^*(f) = \psi o f$ ve olarak tanımlanan dönüşüm bir Abel grubu homomorfizmasıdır.

Teorem 1.0.9 *(Dummit ve Foote 1999) (1) D, L, M ve N R-modüller olsun.*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$$

dizisi tam ise

$$0 \longrightarrow Hom_R(D,L) \xrightarrow{\psi^*} Hom_R(D,M) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_R(D,N)$$

dizisi de tamdır.

(2) D R-modül ve $M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ dizisi tam olsun.
$\varphi_* : Hom_R(N,D) \longrightarrow Hom_R(M,D)$, $\varphi_*(f) = f o \varphi$ olmak üzere,

$$0 \longrightarrow Hom_R(N,D) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_R(M,D)$$

dizisi de tamdır.

Önerme 1.0.10 *(Dummit ve Foote 1999) A R-modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$, R-modül ailesi olsun.*

(1) $\Pi_{i\in I} Hom_R(M_i, A) \simeq Hom_R(\oplus_{i\in I} M_i, A)$.

(2) $\Pi_{i\in I} Hom_R(A, M_i) \simeq Hom_R(A, \Pi_{i\in I} M_i)$.

Teorem 1.0.11 *(Dummit ve Foote 1999) P R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) Herhangi L, M ve N R-modülleri için $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ dizisi tam ise $0 \longrightarrow Hom_R(P, L) \xrightarrow{\psi^*} Hom_R(P, M) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_R(P, N) \longrightarrow 0$ dizisi tamdır.

(2) M ve N iki R-modül ve $M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ dizisi tam olsun. Bu durumda her $f \in Hom_R(P, N)$ için $\varphi o g = f$ olacak şekilde bir $g \in Hom_R(P, M)$ vardır.

(3) Her $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi bölünür.

(4) P bir serbest R-modülün dik toplananıdır.

Tanım 1.0.12 *(Dummit ve Foote 1999) Yukarıdaki teoremin denk koşullarını sağlayan P modülüne projektif modül denir.*

Örnek 1.0.13 *1) Her serbest modül projektiftir.*

2) p ve q farklı asallar olmak üzere $R = \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ olsun.

i, içerim dönüşümü, $q^*(x + pq\mathbb{Z}) = qx + pq\mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$0 \longrightarrow p\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \xrightarrow{q^*} q\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

tam dizisi bölünür. Buna göre $q\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ projektif R-modüldür, ancak serbest R-modül değildir.

3) $\mathbb{Q}$ projektif $\mathbb{Z}$–modül değildir.

Önerme 1.0.14 *(Dummit ve Foote 1999) $\{P_i\}_{i\in I}$ bir R-modül ailesi olsun.*

$\oplus_{i\in I} P_i$ projektiftir ancak ve ancak her $i \in I$ için P_i projektiftir.

Teorem 1.0.8'e göre her modül bir serbest modülün homomorf görüntüsü olarak yazılabilir. Yani, $F \xrightarrow{f} M \to 0$, $F/Çekf \simeq M$ olacak şekilde F serbest R-modülü ve f R-homomorfizması vardır. Eğer $Çekf \ll F$ ise serbest modülü kullanarak M modülünü belirlemek daha kolaydır. Bundan dolayı aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 1.0.15 *(Anderson ve Fuller 1992) M R-modül olsun. Eğer P projektif R-modül, $f : P \to M$ epimorfizma ve $Çekf \ll P$ ise (P, f) ikilisine M'nin projektif örtüsü (projective cover) denir.*

Açık bir şekilde M projektif R-modül ise projektif örtüsü kendisidir. Ancak her modülün projektif örtüsü olması gerekmez.

Örnek 1.0.16 $\mathbb{Q}$, *$\mathbb{Z}$-modülü projektif örtüye sahip değildir.*

Kanıt. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$-modülünün projektif örtüye sahip olmadığını gösterelim.

P projektif $\mathbb{Z}$-modül, $f : P \to \mathbb{Q}$ ve $Çekf \ll P$ olsun. $\mathbb{Z}$ temel ideal bölgesi olduğundan P serbest modüldür yani $P \simeq \oplus\mathbb{Z}$'dir. $J(\oplus\mathbb{Z}) = 0$ olduğundan $J(P) = 0$'dır. Buradan, $Çekf \leq \sum_{L \ll P} L = J(P) = 0$ elde edilir. Böylece f bir izomorfizma yani $P \simeq \mathbb{Q}$ serbest modül olur. Bu ise bir çelişkidir. □

Teorem 1.0.17 *(Anderson ve Fuller 1992) M R-modül olsun. M'nin projektif örtüsü varsa bu örtü izomorfizma farkı ile tektir.*

Tanım 1.0.18 *(Luthar ve Passi 2002) Aşağıdaki (a) ve (b) koşullarını sağlayan L modülüne ve $\beta \in Hom_R(N, L)$, $\beta' \in Hom_R(N', L)$ homomorfizmalarına $\alpha \in Hom_R(M, N)$ ve $\alpha' \in Hom_R(M, N')$ homomorfizmalarının push–out'u denir.*

(a) $\beta'\alpha' = \beta\alpha$

(b) Bir L_1 modülü ve $\beta_1 \in Hom_R(N, L_1)$, $\beta'_1 \in Hom_R(N', L_1)$ için $\beta_1 = \gamma\beta$ ve $\beta'_1 = \gamma\beta'$ olacak şekilde tek bir $\gamma \in Hom_R(L, L_1)$ vardır.

Teorem 1.0.19 *(Luthar ve Passi 2002) $\alpha \in Hom_R(M, N)$ ve $\alpha' \in Hom_R(M, N')$ homomorfizmalarının push-out'u her zaman vardır ve izomorfizma farkı ile tektir.*

Teorem 1.0.20 *(Luthar ve Passi 2002) a, α', β ve β' Tanım 1.0.18'deki homomorfizmalar olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) α birebir ise β' de birebirdir.

(2) α' birebir ise β da birebirdir.

(3) $N/(Gör\alpha) \simeq L/(Gör\beta')$

(4) $N'/(Gör\alpha') \simeq L/(Gör\beta)$

Teorem 1.0.21 *(Dummit ve Foote 1999) Q R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) Herhangi L, M, N R-modülleri için $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ dizisi tam ise $0 \longrightarrow Hom_R(N,Q) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_R(M,Q) \xrightarrow{\psi_*} Hom_R(L,Q) \longrightarrow 0$ dizisi de tamdır.

(2) L ve M iki R-modül, $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\psi} M$ dizisi tam ve her $f \in Hom_R(L,Q)$ için $go\psi = f$ olacak şekilde bir $g \in Hom_R(M,Q)$ vardır.

(3) Eğer Q bir M R-modülünün alt modülü ise Q, M'nin bir dik toplananıdır. Yani her $0 \longrightarrow Q \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi bölünür.

Tanım 1.0.22 *(Dummit ve Foote 1999) Yukarıdaki teoremin koşullarını sağlayan Q modülüne injektif modül denir.*

Örnek 1.0.23 *1) $\mathbb{Q}$ injektif $\mathbb{Z}$-modüldür.*

2) $\mathbb{Z}$ injektif $\mathbb{Z}$-modül değildir.

Önerme 1.0.24 *(Dummit ve Foote 1999) $\{M_i\}_{i \in I}$ bir R-modül ailesi olsun.*

$\Pi_{i \in I} M_i$ injektiftir ancak ve ancak her $i \in I$ için M_i injektiftir.

Teorem 1.0.25 *(Baer Kriteri) Q injektif R-modüldür ancak ve ancak R'nin her I (sağ) ideali için herhangi bir $g : I \to Q$, R-homomorfizması bir $G : R \to Q$, R-homomorfizmasına genişletilebilir.*

Tanım 1.0.26 *(Goodearl ve Warfield 1989) M R-modül olsun.*

1) $A \leq M$ olsun. M'nin sıfırdan farklı her C alt modülü için $A \cap C \neq 0$ ise A'ya M'nin bir geniş (essential) alt modülü denir ve $A \trianglelefteq M$ ile gösterilir. M'ye de A'nın bir geniş genişlemesi (essential extension) denir.

2) M'nin sıfırdan farklı her alt modülü M'nin geniş alt modülü ise M'ye düzgün (uniform) modül denir.

Örnek 1.0.27 *1) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$-modülünün sıfırdan farklı tüm alt modülleri geniştir. O halde $\mathbb{Q}$ düzgün $\mathbb{Z}$-modüldür.*

2) $R = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ olsun. $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ içinde geniş alt modül değildir.

Önerme 1.0.28 *(Goodearl ve Warfield 1989) M R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(a) $A \trianglelefteq B$'dir ancak ve ancak her $0 \neq b \in B$ için $br \neq 0$ ve $br \in A$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır.

(b) A, B, M R-modüller ve $A \leq B \leq M$ olsun. $A \trianglelefteq M$'dir ancak ve ancak $A \trianglelefteq B \trianglelefteq M$'dir.

(c) A_1, A_2, B_1, B_2 M'nin alt modülleri olsun. $A_1 \trianglelefteq B_1$ ve $A_2 \trianglelefteq B_2$ ise $A_1 \cap A_2 \trianglelefteq B_1 \cap B_2$'dir.

(d) $A \leq M$ ve $f : B \to M$ bir R-homomorfizması olsun. $A \trianglelefteq M$ ise $f^{-1}(A) \trianglelefteq B$'dir.

(e) $\{A_i\}_{i \in I}$, M'nin alt modüllerinin bağımsız ailesi ve her $i \in I$ için $A_i \trianglelefteq B_i \leq M$ olsun. $\{B_i\}_{i \in I}$ bağımsız bir ailedir. Ayrıca, $\oplus_{i \in I} A_i \trianglelefteq \oplus_{i \in I} B_i$'dir ancak ve ancak her $i \in I$ için $A_i \trianglelefteq B_i$'dir.

Tanım 1.0.29 *(Lam 1998)*

1) N, M'nin bir alt modülü olsun. M'nin herhangi bir L alt modülü, $N \cap L = 0$ özelliğine göre maksimal ise L'ye N'nin M içindeki tamlayanı (complement) denir.

2) Eğer L, M'nin herhangi bir alt modülünün tamlayanı ise L'ye M'nin tamlayan alt modülü denir ve $L \leq_c M$ ile gösterilir.

Zorn Önteoremi kullanılarak her $N \leq M$ alt modülünün M içinde bir tamlayanı olduğu görülebilir.

Önerme 1.0.30 *(Goodearl ve Warfield 1989) $N \leq M$ olsun. L, N'nin M içindeki bir tamlayanı ise $N \oplus L \trianglelefteq M$'dir.*

Tanım 1.0.31 *(Goodearl ve Warfield 1989) M R-modül ve A, M'nin bir alt modülü olsun. A'nın öz geniş genişlemesi yoksa A'ya M'nin kapalı (closed) alt modülü denir.*

Önerme 1.0.32 *(Dung vd 1994) M R–modül olmak üzere $K \leq L \leq M$ ve $N \leq M$ olsun.*

(1) $N \trianglelefteq H$ olacak şekilde M'nin kapalı bir H alt modülü vardır.

(2) K, M'nin kapalı alt modülüdür ancak ve ancak $K \subseteq Q$ ve $Q \trianglelefteq M$ ise $Q/K \trianglelefteq M/K$'dır.

(3) L, M'nin kapalı alt modülü ise L/K, M/K'nın kapalı alt modülüdür.

(4) K, L'nin kapalı alt modülü ve L de M'nin kapalı alt modülü ise K, M'nin kapalı alt modülüdür.

Önerme 1.0.32'deki H alt modülüne N'nin M içindeki bir kapanışı (closure) denir.

Önerme 1.0.33 *(Lam 1998) C, M'nin bir alt modülü olsun. C, M içinde kapalıdır ancak ve ancak C, M'nin bir tamlayan alt modülüdür.*

Modül teoride injektif modüllerin bir genellemesi olarak CS modüller tanımlanmıştır.

Tanım 1.0.34 *(Dung vd 1994) M R-modül olsun. M'nin her kapalı alt modülü M'nin bir dik toplananı ise M'ye CS modül denir.*

Örnek 1.0.35 *(Dung vd 1994) 1) Yarıbasit modüller, düzgün modüller, injektif modüller CS modüllerdir.*

2) $\oplus\mathbb{Z}$ CS $\mathbb{Z}$-modül değildir.

Önerme 1.0.36 *(Dung vd 1994) M CS modüldür ancak ve ancak M'nin her alt modülü M'nin bir dik toplananı içinde geniştir.*

Önerme 1.0.37 *(Dung vd 1994) CS modüllerin her dik toplananı da CS modüldür.*

Önerme 1.0.38 *(Goodearl ve Warfield 1989) M R-modül olsun. M injektiftir ancak ve ancak M'nin öz geniş genişlemesi yoktur.*

Teorem 1.0.39 *(Goodearl ve Warfield 1989) E injektif modül ve A, E'nin bir alt modülü olsun.*

A injektif modüldür ancak ve ancak A, E'nin kapalı alt modülüdür.

Teorem 1.0.40 *(Sharpe ve Vámos 1972) E bir R-modül ve M, E'nin bir alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) E, M'nin bir injektif geniş genişlemesidir.

(2) E, M'nin bir maksimal geniş genişlemesidir.

(3) E, M'nin bir minimal injektif genişlemesidir.

Tanım 1.0.41 *(Sharpe ve Vámos 1972) M R-modül olsun. Yukarıdaki teoremin koşullarını sağlayan E R-modülüne M'nin injektif hull'ü denir ve $E(M)$ ile gösterilir.*

Örnek 1.0.42 *$\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$-modülü $\mathbb{Z}$'nin bir injektif hull'üdür.*

Teorem 1.0.43 *(Sharpe ve Vámos 1972) Her modülün bir injektif hull'ü vardır ve bu hull izomorfizma farkı ile tektir.*

Teorem 1.0.44 *(Sharpe ve Vámos 1972) M R-modül ve $E(M)$, M'nin bir injektif hull'ü olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) Her $N \trianglelefteq M$ alt modülü için $E(N) = E(M)$'dir.

(2) $E(M) = M$'dir ancak ve ancak M injektiftir.

(3) $E(M_1 \oplus M_2) = E(M_1) \oplus E(M_2)$'dir.

Bir R halkasının maksimal sağ (sol) ideallerinin arakesitine R'nin Jacobson radikali denir ve $J(R)$ ile gösterilir. $J(R)$ halka toerisindeki en önemli kavramlar dan biridir. Örneğin $J(R)$ kullanılarak halkalar teorisinde önemli bir denklik olan; "$x \in J(R)$'dir ancak ve ancak her $r \in R$ için $1 - xr$ tersinirdir" ifadesi elde edilir. $J(R)$ ile ilgili diğer önemli teorem ise Nakayama Lemma'dır.

Önerme 1.0.45 (Nakayama Lemma)

R bir halka ve I, R'nin sağ ideali olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $I \subseteq J(R)$'dir.

(2) Sonlu üretilmiş bir M R-modülü için $MI = M$ olması $M = 0$ olmasını gerektirir.

(3) M'nin, M/N sonlu üretilmiş olacak şekildeki herhangi bir N alt modülü için $N + MI = M$ olması $N = M$ olmasını gerektirir.

Modül teoride de $J(R)$'ye karşılık olarak aşağıdaki tanım verilmiştir.

Tanım 1.0.46 *(Anderson ve Fuller 1992) M R-modül olsun. M'nin tüm maksimal alt modüllerinin kesişimine M'nin Jacobson radikali denir ve $J(M)$ ile gösterilir.*

M'nin maksimal alt modülü yoksa $J(M) = M$ kabul edilir.

Tanım 1.0.47 *(Anderson ve Fuller 1992) M R-modül, $N \leq M$ olsun. Eğer $L \leq M$ için $L+N = M$ iken $L = M$ ise N'ye M'nin dar (small) alt modülü denir ve $N \ll M$ ile gösterilir.*

Örnek 1.0.48 *1)* 0, *M'nin dar alt modülüdür.*

2) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının 0'dan başka dar alt modülü yoktur.

3) M sonlu üretilmiş bir R-modül ise $J(M)$, M'nin dar alt modülüdür.

Önerme 1.0.49 *(Anderson ve Fuller 1992) M R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) $J(M) = \sum_{L \ll M} L$'dir.

(2) $f : M \to N$ bir R-modül homomorfizması ise,

(i) $f(J(M)) \subseteq J(N)$'dir.

(ii) $L \ll M$ ise $f(L) \ll N$'dir.

(3) $N \leq L \leq M$ olsun. $L \ll M$'dir ancak ve ancak $L/N \ll M/N$ ve $N \ll M$'dir.

(4) $K, L \leq M$ olsun. $K + L \ll M$'dir ancak ve ancak $K \ll M$ ve $L \ll M$'dir.

(5) $K \leq L \leq M$, $K \ll M$ ve $L \leq_d M$ ise $K \ll L$'dir.

(6) $K \ll M$ ve $M \leq L$ ise $K \ll L$'dir.

(7) Her $i \in \{1, ..., n\}$ için $K_i \ll M_i$ ise $\oplus_{i=1}^{n} K_i \ll \oplus_{i=1}^{n} M_i$'dir.

Tanım 1.0.50 *(Goodearl ve Warfield 1989) M R-modül olsun.*

1) $m \in M$ için $r(m) = \{r \in R : mr = 0\}$ kümesine m'nin sıfırlayıcısı (annihilator) denir.

2) Eğer $m \in M$ için $r(m)$ R'nin bir geniş sağ ideali ise m'ye tekil (singular) eleman denir. M'nin tekil elemanlarının kümesi $Z(M)$ ile gösterilir.

Bu tanıma denk olarak,

$$Z(M) = \{m \in M : mI = 0 \text{ olacak şekilde } I \trianglelefteq R \text{ sağ ideali vardır}\}$$

şeklinde de ifade edilebilir. $Z(M)$, M'nin bir alt modülüdür.

Tanım 1.0.51 *(Goodearl ve Warfield 1989) M R-modül olsun.*

1) $Z(M)$'ye M'nin tekil alt modülü denir.

2) $Z(M) = M$ ise M'ye tekil modül, $Z(M) = 0$ ise M'ye tekil olmayan (nonsingular) modül denir.

Önerme 1.0.52 *(Goodearl ve Warfield 1989) M R-modül olsun.*

(1) M tekildir ancak ve ancak $M \simeq B/A$ ve $A \trianglelefteq B$ olacak şekilde A ve B R-modülleri vardır.

(2) M tekil olmayan bir modül ve $A \leq M$ olsun. M/A tekildir ancak ve ancak $A \trianglelefteq M$'dir.

Önerme 1.0.53 *(Goodearl ve Warfield 1989)*

(1) Tekil olmayan tüm sağ R-modüllerin sınıfı alt modüller, dik çarpımlar, geniş genişlemeler ve modül genişlemeleri altında kapalıdır.

(2) Bütün tekil sağ R-modüllerin sınıfı alt modüller, bölüm modülleri ve dik toplamlar altında kapalıdır.

Tanım 1.0.54 *(Goodearl 1976) M modülü için $\frac{Z_2(M)}{Z(M)} = Z(\frac{M}{Z(M)})$ şeklinde tanımlanan $Z_2(M)$ alt modülüne M'nin ikinci tekil alt modülü denir.*

Denk olarak $Z_2(M) = \{x \in M : xI \subseteq Z(M)$ olacak şekilde $I \trianglelefteq R$ vardır$\}$ şeklinde de ifade edilebilir.

Önerme 1.0.55 *(Goodearl 1976) M R-modül olsun.*

(1) $M/Z_2(M)$ tekil olmayan bir modüldür.

(2) M modülü tekil olmayan modüldür ancak ve ancak her A tekil modülü için $Hom_R(A, M) = 0$'dır.

Tanım 1.0.56 *(Dummit ve Foote 1999)*

$$\mathcal{C} : 0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d_1} C^1 \longrightarrow ... \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d_n} C^n \xrightarrow{d_{n+1}} ...$$

bir Abel grubu homomorfizmaları dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $d_{n+1} o d_n = 0$ ise $\mathcal{C}$ dizisine bir eş zincir kompleks (co-chain complex) denir.

Tanım 1.0.57 *(Dummit ve Foote 1999) M R-modül olsun. Her P_i bir projektif R-modül olmak üzere*

$$... \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

tam dizisine M'nin bir projektif çözülmesi (projective resolution) denir.

Teorem 1.0.8 kullanılarak her R-modülün projektif çözülmesinin var olduğu görülebilir.

Önerme 1.0.58 *(Dummit ve Foote 1999) M R-modül,*

$$... \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

M'nin bir projektif çözülmesi olsun. D bir R-modül olmak üzere,
$0 \rightarrow Hom_R(M,D) \overset{\epsilon}{\rightarrow} Hom_R(P_0,D) \overset{d_1}{\rightarrow} ... \overset{d_{n-1}}{\rightarrow} Hom_R(P_{n-1},D) \overset{d_n}{\rightarrow} Hom_R(P_n,D) \overset{d_{n+1}}{\rightarrow}$ *...dizisi bir eş zincir kompleksdir.*

Tanım 1.0.59 *(Dummit ve Foote 1999) M ve D R-modüller olsun. M'nin, Tanım 1.0.57'deki gibi bir projektif çözülmesini göz önüne alalım.*

Her $n \geq 1$ için $d_n : Hom_R(P_{n-1},D) \rightarrow Hom_R(P_n,D)$ dönüşümü olmak üzere, $Ext_R^n(M,D) =$Çek$d_{n+1}/$Çekd_n olarak tanımlanır.

Teorem 1.0.60 *(Dummit ve Foote 1999) L, M, N ve D R-modüller*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & D & & & & & & \\ & & \downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

tam dizi olsun.

1) $0 \longrightarrow Hom_R(D,L) \longrightarrow Hom_R(D,M) \longrightarrow Hom_R(D,N) \longrightarrow Ext_R^1(D,L) \longrightarrow Ext_R^1(D,M) \longrightarrow Ext_R^1(D,N) \longrightarrow Ext_R^2(D,L) \longrightarrow ...$

Abel gruplarının tam dizisi vardır.

2) $0 \longrightarrow Hom_R(N,D) \longrightarrow Hom_R(M,D) \longrightarrow Hom_R(L,D) \longrightarrow Ext_R^1(N,D) \longrightarrow Ext_R^1(M,D) \longrightarrow Ext_R^1(L,D) \longrightarrow Ext_R^2(N,D) \longrightarrow ...$

Abel gruplarının tam dizisi vardır.

Projektif ve injektif modül tanımları kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 1.0.61 *(Dummit ve Foote 1999) M R-modül olsun.*

1) M injektiftir ancak ve ancak her A R-modülü için $Ext_R^1(A,M) = 0$'dır.

2) M projektiftir ancak ve ancak her B R-modülü için $Ext_R^1(P,M) = 0$'dır.

2 TORSION TEORİYE GİRİŞ

2.1 Torsion Teori

Dickson 1966 yılında 'A Torsion Theory For Abelian Categories' başlıklı makalesinde torsion ve torsion-free Abel gruplarının özelliklerini kullanarak Abel grup kategorilerini incelemiş ve torsion teoriyi tanımlamıştır. Daha sonra bu özellikler keyfi halkalar üzerindeki modül kategorilerine genelleştirilmeye çalışılmış ve torsion teori Abel grupları ile keyfi modül sınıfları için gözlenen ortak özelliklerin birleştirilmesiyle ortaya çıkmıştır. Torsion teori tanımını vermeden önce gerekli olan bazı tanımları verelim.

Tanım 2.1.1 *(Bland 1998) $\mathcal{C}$ bir modül sınıfı olsun.*

1) $\mathcal{C}$ içindeki her modülün homomorf görüntüsü $\mathcal{C}$ içinde ise $\mathcal{C}$ homomorf görüntüler altında kapalıdır denir.

2) $\mathcal{C}$ içindeki her modülün alt modülü de $\mathcal{C}$ içinde ise $\mathcal{C}$ alt modüller altında kapalıdır denir.

3) I bir indis kümesi olmak üzere, her $\alpha \in I$ için $M_\alpha \in \mathcal{C}$ iken $\oplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ $(\Pi_{\alpha \in I} M_\alpha) \in \mathcal{C}$ ise $\mathcal{C}$ dik toplamlar (dik çarpımlar) altında kapalıdır denir.

4) $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ bir kısa tam dizi olsun. $L, N \in \mathcal{C}$ iken $M \in \mathcal{C}$ ise $\mathcal{C}$ modül genişlemeleri altında kapalıdır denir.

5) $\mathcal{C}$ içindeki her modülün injektif hull'ü (varsa projektif örtüsü) $\mathcal{C}$ içinde ise $\mathcal{C}$ injektif hull'ler (projektif örtüler) altında kapalıdır denir.

Bu tanımdan sonra torsion teori tanımını verelim.

Tanım 2.1.2 *(Bland 1998) Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ modül sınıfı ikilisine Mod-R üzerinde bir torsion teori denir.*

1) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$

2) $M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ dizisi tam ve $M \in \mathcal{T}$ ise $N \in \mathcal{T}$

3) $0 \longrightarrow M \longrightarrow N$ dizisi tam ve $N \in \mathcal{F}$ ise $M \in \mathcal{F}$

4) Her M modülü için $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ dizisi tam olacak şekilde $L \in \mathcal{T}$ ve $N \in \mathcal{F}$ vardır.

Örnek 2.1.3 *(Bland 1998) G bir Abel grubu olsun.* $t(G)$, *G'nin tüm torsion elemanlarından oluşan küme olmak üzere,* $\mathcal{T} = \{G : t(G) = G\}$ *ve* $\mathcal{F} = \{G : t(G) = 0\}$ *modül sınıflarını göz önüne alalım.* $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *Mod-*$\mathbb{Z}$ *üzerinde bir torsion teoridir.*

Her değişmeli grup $\mathbb{Z}$-modül olduğundan Abelyen gruplar için yapılan herşey Mod-$\mathbb{Z}$ için de yapılabilir. Bundan dolayı Mod-$\mathbb{Z}$ üzerindeki bu torsion teori Mod-R üzerindeki torsion teori tanımının oluşturulmasında çıkış noktası olmuştur.

Tanım 2.1.4 *(Bland 1998)*

1) $\mathcal{T}$ *içindeki modüllere* τ*-torsion,* $\mathcal{F}$ *içindeki modüllere* τ*-torsion-free modül denir.*

2) $\mathcal{T}$ *alt modüller altında kapalı ise* τ*'ya kalıtsal (hereditary) torsion teori,* $\mathcal{F}$ *homomorf görüntüler altında kapalı ise* τ*'ya eşkalıtsal (cohereditary) torsion teori denir.*

Tanım 2.1.5 *(Bland 1998)*

1) $\mathcal{T}$ *bir modül sınıfı olsun.* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *Mod-*R *üzerinde (kalıtsal) torsion teori olacak şekilde bir* $\mathcal{F}$ *modül sınıfı varsa* $\mathcal{T}$*'ya (kalıtsal) torsion sınıf denir.*

2) $\mathcal{F}$ *bir modül sınıfı olsun.* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *Mod-*R *üzerinde (eşkalıtsal) torsion teori olacak şekilde bir* $\mathcal{T}$ *modül sınıfı varsa* $\mathcal{F}$*'ye (eşkalıtsal) torsion-free sınıf denir.*

3) R *halkası* $\mathcal{F}$ *içinde ise* τ*'ya faithful torsion teori denir.*

Örnek 2.1.6 *(Bland 1998)* (*Mod-*$R, 0$) *ve* ($0,$*Mod-*R) *birer kalıtsal torsion teoridir.*

Mod-R üzerindeki bir torsion teoriye göre halkalar ve modüller için bilinen birçok sonuç $\tau =$ (Mod-$R, 0$) veya $\tau =$($0,$Mod-R) seçilerek klasik sonuçlara indirgenebilir.

Bundan sonra $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ ile Mod-R üzerindeki bir torsion teoriyi göstereceğiz.

Tanım 2.1.7 *(Bland 1998)* $\mathcal{A}$ *ve* $\mathcal{B}$ *boş kümeden farklı modül sınıfları olsun.*

1) $\mathcal{A} = \{M : Hom_R(M, N) = 0 \ \forall N \in \mathcal{B}\}$ *ise* $\mathcal{A}$*'ya* $\mathcal{B}$*'nin sol dik komplimenti denir.*

2) $\mathcal{B} = \{N : Hom_R(M, N) = 0 \ \forall M \in \mathcal{A}\}$ *ise* $\mathcal{B}$*'ye* $\mathcal{A}$*'nın sağ dik komplimenti denir.*

3) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$*'nin sol dik komplimenti ve* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{A}$*'nın sağ dik komplimenti ise* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *ikilisine kompliment ikili denir.*

Teorem 2.1.8 *(Bland 1998) $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ modül sınıfı ikilisinin Mod-R üzerinde bir torsion teori olması ile $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$'nn kompliment ikili olması denktir.*

Kanıt. τ Mod-R üzerinde bir torsion teori, $\mathcal{A}$ $\mathcal{F}$'nin sol dik komplimenti ve $M \in \mathcal{T}$ olsun. $N \in \mathcal{F}$ olmak üzere $f \in Hom_R(M, N)$ alınsın. Torsion teori tanımındaki koşullara göre $M \longrightarrow f(M) \longrightarrow 0$ ve $0 \longrightarrow f(M) \longrightarrow N$ dizilerinin tamlığı $f(M) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$ olmasını gerektirir. $\mathcal{T} \cap \mathcal{F}$ =0 olduğundan her $N \in \mathcal{F}$ için $Hom_R(M, N) =$ 0'dır. Buna göre $M \in \mathcal{A}$'dır. Böylece $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$'dır.

$M \in \mathcal{A}$ alınsın. Tanım 2.1.2'ye göre $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ dizisi tam olacak şekilde bir $L \in \mathcal{T}$ ve bir $N \in \mathcal{F}$ bulunabilir. $M \in \mathcal{A}$ olduğundan $g = 0$ ve dolayısıyla $f(L) = M$'dir. $L \longrightarrow M \longrightarrow 0$ dizisi tam ve $L \in \mathcal{T}$ olduğundan $M \in \mathcal{T}$'dur. Böylece $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$'dır. Sonuç olarak $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ olur.

Benzer şekilde $\mathcal{B}$ $\mathcal{T}$'nun sağ dik komplimenti ise $\mathcal{B} = \mathcal{F}$ elde edilir. Buna göre $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ bir kompliment ikilidir.

Tersine, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ bir kompliment ikili olsun. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{F}$'nin torsion teori tanımındaki 4 koşulu sağladığını göstereceğiz.

1) $0 \neq M \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$ olduğunu varsayalım. Kabulden dolayı $Hom_R(M, M) = 0$'dır. Bu ise bir çelişkidir.

2) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ dizisi tam ve $M \in \mathcal{T}$ olsun. $N \notin \mathcal{T}$ olduğunu varsayalım. O zaman $Hom_R(N, K) \neq 0$ olacak şekilde bir $K \in \mathcal{F}$ vardır. $0 \neq g \in Hom_R(N, K)$ alalım. $gof : M \to K$, $gof \neq 0$ olur. Bu ise $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$'nin bir kompliment ikili olması ile çelişir.

3) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ dizisi tam ve $N \in \mathcal{F}$ olsun. $M \notin \mathcal{F}$ olduğunu varsayalım. O zaman $Hom_R(L, M) \neq 0$ olacak şekilde bir $L \in \mathcal{T}$ vardır. O halde $0 \neq g \in Hom_R(L, M)$ seçelim. $fog : L \to N$, $fog \neq 0$ olur. Bu ise $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$'nin bir kompliment ikili olması ile çelişir.

4) $\mathcal{C}$ bir M modülünün tüm τ-torsion alt modüllerinin ailesi olsun.

Her $N \in \mathcal{F}$ için $Hom_R(\oplus_{T \in \mathcal{C}} T, N) \simeq \Pi_{T \in \mathcal{C}} Hom_R(T, N) = 0$ olduğundan $\oplus_{T \in \mathcal{C}} T \in \mathcal{T}$'dur. $L = \sum_{T \in \mathcal{C}} T$ olsun. $f : \oplus_{T \in \mathcal{C}} T \to \sum_{T \in \mathcal{C}} T$ $f((t_i)) = t_1 + ... + t_n$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmadır. O halde (2)'den dolayı $L \in \mathcal{T}$'dur.

Son olarak $M/L \in \mathcal{F}$ olduğunu gösterelim. $M/L \notin \mathcal{F}$ olduğunu varsayalım. O zaman $Hom_R(K, M/L) \neq 0$ olacak şekilde bir $K \in \mathcal{T}$ vardır. O halde

$0 \neq f \in Hom_R(K, M/L)$ seçelim. $K \longrightarrow f(K) \longrightarrow 0$ dizisi tam olduğundan (2)'den dolayı $L \leq X \leq M$ olmak üzere $f(K) = X/L \in \mathcal{T}$'dur.

$N \in \mathcal{F}$ olsun. $Hom_R(-, N)$ funktorunun sol tamlığından ve

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow X \longrightarrow X/L \longrightarrow 0$$

tam dizisinden yararlanılarak

$0 \longrightarrow Hom_R(X/L, N) \longrightarrow Hom_R(X, N) \longrightarrow Hom_R(L, N)$ tam dizisi elde edilir. $Hom_R(X/L, N) = 0$ ve $Hom_R(L, N) = 0$ olduğundan $Hom_R(X, N) = 0$'dır. Buradan $X \in \mathcal{C}$'dir. Buna göre $X \subseteq L = \sum_{T \in \mathcal{C}} T$ olur. Böylece $L = X$ olur ancak bu sonuç $f \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $M/L \in \mathcal{F}$'dir. Sonuç olarak $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow M/L \longrightarrow 0$ dizisi tam olacak şekilde $L \in \mathcal{T}$ ve $M/L \in \mathcal{F}$ bulunmuş olur. □

τ Mod-R üzerinde bir torsion teori, $\mathcal{C}$ bir M modülünün tüm τ-torsion alt modüllerinin ailesi ve $t_\tau(M) = \sum_{T \in \mathcal{C}} T$ olsun. L, M'nin $L \in \mathcal{T}$ ve $M/L \in \mathcal{F}$ olan bir alt modülü olsun. $t_\tau(M)$'nin tanımından, $L \subseteq t_\tau(M)$'dir. $M/L \in \mathcal{F}$ ve $t_\tau(M) \in \mathcal{T}$ olduğundan $Hom_R(t_\tau(M), M/L) = 0$'dır. Buna göre, $f : t_\tau(M) \longrightarrow M/L$, $f(x) = x + L$ homomorfizması da sıfırdır. O halde her $x \in t_\tau(M)$ için $f(x) = x + L = L$ yani $x \in L$'dir. Böylece $t_\tau(M) \subseteq L$, buradan da $L = t_\tau(M)$ elde edilir.

O halde $N \in \mathcal{T}$ ve $M/N \in \mathcal{F}$ olacak şekildeki tek alt modül $N = t_\tau(M)$'dir.

Tanım 2.1.4'ü kullanarak , $\mathcal{T} = \{M : t_\tau(M) = M\}$ ve $\mathcal{F} = \{M : t_\tau(M) = 0\}$ olarak da tanımlayabiliriz.

$f : M \rightarrow N$ R -modül homomorfizması olsun. $x \in f(t_\tau(M))$ alalım. O zaman $x = f(m)$ olacak şekilde $m \in t_\tau(M)$ vardır. $i \in \{1, ..., n\}$ için $x_{k_i} \in T_{k_i} \in \mathcal{T}$ olmak üzere $m = x_{k_1} + ... + x_{k_n}$ şeklinde yazılabilir.

$f(m) = f(x_{k_1} + ... + x_{k_n}) = f(x_{k_1}) + ... + f(x_{k_n})$ ve $i \in \{1, ..., n\}$ için

$f(x_{k_i}) \in f(T_{k_i}) \in \mathcal{T}$ olduğundan $f(m) = x \in t_\tau(N)$'dir. Böylece $f(t_\tau(M)) \subseteq t_\tau(N)$ elde edilir.

$r \in R$ için $f : R \rightarrow R$, $f(x) = rx$ ve $g : R \rightarrow R$, $g(x) = xr$ R-modül homomorfizmaları düşünülerek $t_\tau(R) \leq R$ olduğu görülebilir.

Tanım 2.1.9 *(Bland 1998) τ Mod-R üzerinde bir torsion teori olsun. $t_\tau(M)$'ye M'nin τ-torsion alt modülü, $t_\tau(R)$'ye de R'nin τ-torsion ideali denir.*

Teorem 2.1.10 *(Bland 1998) τ Mod-R üzerinde bir torsion teori olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) τ kalıtsal torsion teoridir.

(2) Her M modülü ve M'nin her N alt modülü için $t_\tau(M) \cap N = t_\tau(N)$'dir.

(3) $\mathcal{F}$ injektif hull'ler altında kapalıdır.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2) τ kalıtsal torsion teori ve N M'nin bir alt modülü olsun. $t_\tau(M) \cap N$ $t_\tau(M)$'nin bir alt modülü olduğundan $t_\tau(M) \cap N$, N'nin bir τ-torsion alt modülüdür. O halde $t_\tau(M) \cap N \subseteq t_\tau(N)$'dir. Ayrıca $t_\tau(N) \subseteq N$ ve $t_\tau(N) \subseteq t_\tau(M)$ ve böylece $t_\tau(N) \subseteq t_\tau(M) \cap N$'dir. Sonuç olarak $t_\tau(M) \cap N = t_\tau(N)$ elde edilir.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $M \in \mathcal{F}$ olsun. $t_\tau(E(M)) \cap M = t_\tau(M) = 0$ ve aynı zamanda M, $E(M)$ içinde geniş olduğundan $t_\tau(E(M)) = 0$'dır. Böylece $E(M) \in \mathcal{F}$'dir.

(3) $\Longrightarrow$ (1) $M \in \mathcal{T}$ ve L, M'nin bir alt modülü olsun. $L \notin \mathcal{T}$ olduğunu varsayalım. O halde $Hom_R(L, N) \neq 0$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{F}$ vardır.
$0 \neq f \in Hom_R(L, N)$ alalım.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M \\ & & f \downarrow & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E(N) \end{array}$$

Diagramını değişmeli olarak tamamlayan bir $0 \neq g \in Hom_R(M, E(N))$ vardır. Ancak $E(N) \in \mathcal{F}$ ve $M \in \mathcal{T}$ olduğundan bu sonuç $Hom_R(M, E(N)) = 0$ olması ile çelişir. $\square$

Teorem 2.1.11 *(Crivei 2004) τ kalıtsal torsion teorisi için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) A'nın τ-torsion modül olması ile her τ-torsion-free B modülü için $Hom_R(A, E(B)) = 0$ olması denktir.

(2) B'nin τ-torsion-free modül olması ile her τ-torsion A modülü için $Hom_R(A, E(B)) = 0$ olması denktir.

Kanıt. (1) A τ-torsion modül olsun. τ kalıtsal olduğundan $\mathcal{F}$ injektif hull'ler altında kapalıdır. O halde her $B \in \mathcal{F}$ için $E(B) \in \mathcal{F}$'dir. $A \in \mathcal{T}$ ve $E(B) \in \mathcal{F}$ olduğundan $Hom_R(A, E(B)) = 0$'dır.

Her τ-torsion-free B modülü için $Hom_R(A, E(B)) = 0$ olsun.

$$0 \longrightarrow t_\tau(A) \longrightarrow A \longrightarrow A/t_\tau(A) \longrightarrow 0$$

tam dizisini göz önüne alalım. $E(B)$'nin injektifliğinden dolayı bu tam diziden,

$$0 \longrightarrow Hom_R(A/t_\tau(A), E(B)) \longrightarrow Hom_R(A, E(B)) \longrightarrow Hom_R(t_\tau(A), E(B)) \longrightarrow 0$$

tam dizisi elde edilir. Hipoteze göre $Hom_R(A, E(B)) = 0$'dır. Buna göre $Hom_R(A/t_\tau(A), E(B)) = 0$'dır. Özel olarak $B = A/t_\tau(A)$ seçersek, $Hom_R(A/t_\tau(A), E(A/t_\tau(A))) = 0$'dır. Böylece $A/t_\tau(A) = 0$ yani $A = t_\tau(A)$ olur.

(2) $B \in \mathcal{F}$ olsun. $\mathcal{F}$ injektif hull'ler altında kapalı olduğundan $E(B) \in \mathcal{F}$'dir. O halde her $A \in \mathcal{T}$ için $Hom_R(A, E(B)) = 0$'dır.

Her τ-torsion A modülü için $Hom_R(A, E(B)) = 0$ olsun.

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E(B) \longrightarrow E(B)/B \longrightarrow 0$$

tam dizisinden her $A \in \mathcal{T}$ için

$$0 \longrightarrow Hom_R(A, B) \longrightarrow Hom_R(A, E(B)) \longrightarrow Hom_R(A, E(B)/B)$$

tam dizisi elde edilir. Hipotezden dolayı $Hom_R(A, E(B)) = 0$'dır. Böylece $Hom_R(A, B) = 0$ olur. O halde $B \in \mathcal{F}$'dir. □

Teorem 2.1.12 *(Bland 1998) $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{F}$ modül sınıfları için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) $\mathcal{T}$ Mod-R üzerinde bir torsion teorinin torsion sınıfıdır ancak ve ancak $\mathcal{T}$ homomorf görüntüler, dik toplamlar ve modül genişlemeleri altında kapalıdır.

(2) $\mathcal{F}$'nin Mod-R üzerinde bir torsion teorinin torsion-free sınıfı olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{F}$'nin alt modüller, izomorfik görüntüler, dik çarpımlar ve modül genişlemeleri altında kapalı olmasıdır.

Kanıt. (1) $\mathcal{T}$, Mod-R üzerinde τ torsion teorisinin torsion sınıfı olsun. Torsion teori tanımına göre $\mathcal{T}$ homomorf görüntüler altında kapalıdır.

Her $\alpha \in I$ için $M_\alpha \in \mathcal{T}$ olacak şekildeki $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ modül ailesini alalım. $N \in \mathcal{F}$ için $Hom_R(\oplus_{\alpha \in I} M_\alpha, N) \simeq \Pi_{\alpha \in I} Hom_R(M_\alpha, N) = 0$'dır. Çünkü her $\alpha \in I$ için $M_\alpha \in \mathcal{T}$ ve $N \in \mathcal{F}$ olduğundan $Hom_R(M_\alpha, N) = 0$'dır. O halde $\oplus_{\alpha \in I} M_\alpha \in \mathcal{T}$'dur.

$L, K \in \mathcal{T}$ olmak üzere $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow 0$ tam dizisini göz önüne alalım. $N \in \mathcal{F}$ için $Hom_R(L, N) = Hom_R(K, N) = 0$'dır. $Hom_R(-, N)$ funktorunun sol tamlığından dolayı

$0 \longrightarrow Hom_R(K, N) \longrightarrow Hom_R(M, N) \longrightarrow Hom_R(L, N)$ dizisi tam ve ayrıca $Hom_R(L, N) = Hom_R(K, N) = 0$ olduğundan $Hom_R(M, N) = 0$ olur. Böylece $M \in \mathcal{F}$'dir. Bu da $\mathcal{T}$'nun modül genişlemeleri altında kapalı olduğunu gösterir.

$\mathcal{T}$'nun homomorf görüntüler, dik toplamlar ve modül genişlemeleri altında kapalı olduğunu kabul edelim. $\mathcal{F}$, $\mathcal{T}$'nun sağ dik komplimenti ve $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ olsun. Şimdi τ'nun Mod-R üzerinde torsion teori olduğu göstereceğiz.

1) $0 \neq M \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$ olsun. $\mathcal{F}$, $\mathcal{T}$'nun sağ dik komplimenti olduğundan $Hom_R(M, M) = 0$ olur ve çelişki elde edilir.

2) $M \in \mathcal{T}$ ve $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ tam dizi olsun. $N \notin \mathcal{T}$ olduğunu varsayalım. O halde $Hom_R(N, L) \neq 0$ olacak şekilde bir $L \in \mathcal{F}$ vardır. $0 \neq g \in Hom_R(N, L)$ seçelim. O halde $0 \neq gof \in Hom_R(M, L)$ olur. Bu ise $\mathcal{F}$'nin $\mathcal{T}$'nun sağ dik komplimenti olması ile çelişir. Böylece $N \in \mathcal{T}$ elde edilir.

3) $N \in \mathcal{F}$ ve $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ bir tam dizi olsun. $M \notin \mathcal{F}$ olduğunu varsayalım. O halde $Hom_R(L, M) \neq 0$ olacak şekilde bir $L \in \mathcal{T}$ vardır. $0 \neq g \in Hom_R(L, M)$ alalım. $0 \neq fog \in Hom_R(L, N)$ olması $\mathcal{F}$'nin $\mathcal{T}$'nun sağ dik komplimenti olması ile çelişir. Böylece $M \in \mathcal{F}$ elde edilir.

4) M modülü için $0 \longrightarrow t_\tau(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/t_\tau(M) \longrightarrow 0$ dizisi tam, $t_\tau(M) \in \mathcal{T}$ ve $M/t_\tau(M) \in \mathcal{F}$'dir.

Sonuç olarak τ, Mod-R üzerinde bir torsion teoridir.

(2) $\mathcal{F}$, Mod-R üzerinde τ torsion teorisi için bir torsion-free sınıf olsun. $N \in \mathcal{F}$ ve N'nin bir L alt modülünü alalım. $0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} N$, $i(x) = x$ monomorfizmasını göz önüne alalım. Torsion teori tanımına göre $N \in \mathcal{F}$ olduğundan $L \in \mathcal{F}$'dir. Böylece $\mathcal{F}$ alt modüller altında kapalıdır.

$N \in \mathcal{F}$ ve $f : N \to M$ bir izomorfizma olsun. f birebir ve örten olduğundan f'nin f^{-1}tersi vardır aynı zamanda f^{-1} de birebir ve örtendir. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f^{-1}} N$

dizisinin tamlığı ve $N \in \mathcal{F}$ olması torsion teori tanımına göre $M \in \mathcal{F}$ olmasını gerektirir. Böylece $\mathcal{F}$ izomorfik görüntüler altında kapalıdır.

Her $\alpha \in I$ için $M_\alpha \in \mathcal{F}$ olmak üzere $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ modül ailesi verilsin. $M \in \mathcal{T}$ ise $Hom_R(M, \Pi_{\alpha\in I} M_\alpha) \simeq \Pi_{\alpha\in I} Hom_R(M, M_\alpha) = 0$'dır. Çünkü her $\alpha \in I$ için $M_\alpha \in \mathcal{F}$ ve $M \in \mathcal{T}$ olduğundan $Hom_R(M, M_\alpha) = 0$'dır. Buna göre $\Pi_{\alpha\in I} M_\alpha \in \mathcal{F}$'dir. Böylece $\mathcal{F}$ dik çarpımlar altında kapalıdır.

$L, K \in \mathcal{F}$ olmak üzere $0 \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow K \longrightarrow 0$ kısa tam dizi olsun. $M \in \mathcal{T}$ ise $Hom_R(M, L) = Hom_R(M, K) = 0$'dır. $Hom_R(M, -)$ funktorunun sol tamlığından dolayı

$0 \longrightarrow Hom_R(M, L) \longrightarrow Hom_R(M, N) \longrightarrow Hom_R(M, K)$ dizisi tamdır. $Hom_R(M, L) = Hom_R(M, K) = 0$ olduğundan $Hom_R(M, N) = 0$'dır. Buradan $N \in \mathcal{F}$ olur. Böylece $\mathcal{F}$ modül genişlemeleri altında kapalıdır.

$\mathcal{F}$'nin alt modüller, izomorfik görüntüler, dik çarpımlar ve modül genişlemeleri altında kapalı olduğunu kabul edelim. $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$'nin sol dik komplimenti ve $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ olsun. τ'nun Mod-R üzerinde bir torsion teori olduğunu göstereceğiz.

1) $M \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$ olsun. $M \neq 0$ olduğunu varsayalım. $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$'nin sol dik komplimenti olduğundan $Hom_R(M, M) = 0$'dır. Ancak M üzerindeki birim fonksiyon $I_M \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $M = 0$ olmalıdır.

2) $M \in \mathcal{T}$ ve $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ bir tam dizi olsun. $N \notin \mathcal{T}$ olduğunu varsayalım. O halde $Hom_R(N, L) \neq 0$ olacak şekilde bir $L \in \mathcal{F}$ vardır. $0 \neq g \in Hom_R(N, L)$ alalım. $0 \neq gof \in Hom_R(M, L)$ olur. Bu ise $\mathcal{T}$'nun, $\mathcal{F}$'nin sol dik komplimenti olması ile çelişir. O halde $N \in \mathcal{T}$'dur.

3) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ bir tam dizi ve $N \in \mathcal{F}$ olsun. $f(M) \subseteq N$ ve $M \simeq f(M)$'dir. $\mathcal{F}$ alt modüller ve izomorfik görüntüler altında kapalı olduğundan $M \in \mathcal{F}$'dir.

4) Herhangi bir M modülü için $0 \longrightarrow t_\tau(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/t_\tau(M) \longrightarrow 0$ dizisi tam, $t_\tau(M) \in \mathcal{T}$ ve $M/t_\tau(M) \in \mathcal{F}$'dir.

Sonuç olarak τ Mod-R üzerinde bir torsion teoridir. □

Örnek 2.1.13 *(Bland 1998) Tüm tekil olmayan modüllerin sınıfı $\mathcal{N}$ Mod-R üzerinde kalıtsal bir torsion teori için torsion-free sınıftır. Bu torsion teoriye Goldie torsion teori denir ve τ_G ile gösterilir.*

Önerme 2.1.14 *(Stenström 1975) M bir sağ R-modül olsun. $t_G(M) = Z_2(M)$'dir.*

Kanıt. $m \in t_G(M)$ alalım. $mR \in \mathcal{T}$'dur. $M/Z_2(M)$ tekil olmayan modül olduğundan $M/Z_2(M) \in \mathcal{F}$'dir. O halde $Hom_R(mR, M/Z_2(M)) = 0$ ve buna göre, $f : mR \to M/Z_2(M)$ $f(mr) = mr + Z_2(M)$ olarak tanımlanan R-homomorfizması sıfır yani $m \in Z_2(M)$'dir. Böylece $t_G(M) \subseteq Z_2(M)$ olur.

$N \in \mathcal{F}$ olmak üzere $f \in Hom_R(Z_2(M), N)$ alalım.
$Z_2(M)/Z(M) = Z(M/Z(M)) \in \mathcal{T}$ olduğundan $Hom_R(Z_2(M)/Z(M), N) = 0$'dır. $g : Z_2(M)/Z(M) \to N$, $g(x + Z(M)) = f(x)$ olarak tanımlanan g bir homomorfizmadır. $g = 0$ olduğundan her $x \in Z_2(M)$ için $f(x) = 0$ yani $f = 0$ olur. Bu sonuç $Z_2(M) \in \mathcal{T}$ yani $Z_2(M) \subseteq t_G(M)$ olduğunu gösterir. □

Tanım 2.1.15 *(Crivei 2004) $\mathcal{A}$ bir modül sınıfı olsun.*

(1) $\mathcal{F}_1 = \{Y : Hom_R(A, Y) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}\}$, $\mathcal{T}_1 = \{X : Hom_R(X, F) = 0 \ \forall F \in \mathcal{F}_1\}$ modül sınıfları ise $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ bir torsion teoridir. Bu torsion teoriye $\mathcal{A}$ ile üretilmiş torsion teori denir.

(2) $\mathcal{T}_2 = \{X : Hom_R(X, A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}\}$, $\mathcal{F}_2 = \{Y : Hom_R(T, Y) = 0 \ \forall T \in \mathcal{T}_2\}$ modül sınıfları ise $(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ bir torsion teoridir. Bu torsion teoriye $\mathcal{A}$ ile eş üretilmiş (cogenerated by $\mathcal{A}$) torsion teori denir.

Örnek 2.1.16 *(Bland 1998) R'nin injektif hull'ü ile eş üretilen kalıtsal torsion teoriye Lambek torsion teori denir.*

Teorem 2.1.17 *(Bland 1998) Mod-R üzerindeki her kalıtsal torsion teori bir τ-torsion-free injektif modül ile eş üretilir.*

Kanıt. τ Mod-R üzerinde bir kalıtsal torsion teori ve $\mathcal{F}$ τ'nun τ-torsion-free sınıfı olsun. $\mathcal{S} = \{wR : wR \in \mathcal{F}\}$, τ-torsion-free devirli modüllerin bir tam temsilciler kümesi olsun. $Y = E(\Pi_{X \in \mathcal{S}} X) \in \mathcal{F}$'dir. Çünkü $\mathcal{F}$, dik çarpımlar ve injektif hull'ler altında kapalıdır. Şimdi $\{Y\}$ kümesinin τ'yu eş ürettiğini göstereceğiz. $\mathcal{A} = \{M : Hom_R(M, Y) = 0\}$ olsun. $Y \in \mathcal{F}$ olduğundan her $M \in \mathcal{T}$ için $Hom_R(M, Y) = 0$'dır. Buna göre $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$'dır.

$M \in \mathcal{A}$ olsun ve $M \notin \mathcal{T}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $Hom_R(M, N) \neq 0$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{F}$ vardır. $0 \neq g \in Hom_R(M, N)$ için $g(M)$'nin sıfırdan farklı L devirli alt modülünü alalım. L τ-torsion-free modüldür. Çünkü $N \in \mathcal{F}$'dir. Dolayısıyla $L \simeq X$ olacak şekilde bir $X \in \mathcal{S}$ vardır. $\psi : L \to X$ tanımlı izomorfizma olsun. $T = g^{-1}(L)$ ve $f = g_{|T}$ ise $f : T \to L$, $f \neq 0$'dır. Buradan, $\psi f : T \to X$ homomorfizması sıfırdan farklıdır. O halde $Hom_R(T, X) \neq 0$ ve buradan da $Hom_R(T, Y) \neq 0$'dır.

Diğer taraftan Y injektif olduğundan $0 \longrightarrow T \longrightarrow M$ tam dizisinden $Hom_R(M, Y) \longrightarrow Hom_R(T, Y) \longrightarrow 0$ tam dizisi elde edilir. $Hom_R(M, Y) = 0$ olduğundan da $Hom_R(T, Y) = 0$'dır. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $M \in \mathcal{T}$ ve dolayısıyla $\mathcal{A} = \mathcal{T}$'dur. Sonuç olarak $\{Y\}$ τ'yu eş üretir. □

2.2 Yoğun Alt Modüller ve Gabriel Filtreleri

Modül teoride bazı alt modül sınıfları kullanılarak modüller ve halkalar karakterize edilebilir. Şimdi torsion teorideki önemli alt modül sınıflarını inceleyelim. İlk olarak τ-yoğun alt modüller ile başlayalım. Bu bölümden itibaren aksi belirtilmedikçe τ ile kalıtsal bir torsion teoriyi göstereceğiz.

Tanım 2.2.1 *(Bland 1998) M R-modül, $N \leq M$ olsun.*

1) $M/N \in \mathcal{T}$ ise N'ye M'nin τ-yoğun alt modülü denir.

2) M'nin tüm τ-yoğun alt modüllerinin kümesini $F_\tau(M)$ ile göstereceğiz. $F_\tau(M)$'ye M'nin τ-yoğun alt modüller filtresi denir.

3) N, M'nin τ-yoğun alt modülü ise M'ye N'nin τ-yoğun genişlemesi denir.

(Mod-$R, 0$) torsion teorisinde M modülünün tüm alt modüllerinin τ-yoğun olduğu açıktır.

Örnek 2.2.2

$\mathcal{T} = \{G : G$ Abel grubu, $t(G) = G\}$, $\mathcal{F} = \{G : G$ Abel grubu, $t(G) = 0\}$ olmak üzere, Mod-$\mathbb{Z}$ üzerinde $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ torsion teorisini gözönüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \in \mathcal{T}$ olduğundan $n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$'nin τ-yoğun alt modülüdür.

Örnek 2.2.3 *Goldie torsion teoride M'nin her geniş alt modülü M'nin τ_G-yoğun alt modülüdür.*

Teorem 2.2.4 *(Golan 1986) M R-modülü ve N, $L \leq M$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) $N \subseteq L$ ve $M/N \in \mathcal{T}$ ise $M/L \in \mathcal{T}$'dur.

(2) M/N, $M/L \in \mathcal{T}$ ise $M/(N \cap L) \in \mathcal{T}$'dur.

(3) $M/N \in \mathcal{T}$ ve $\alpha : N \to M'$ R-modül homomorfizması olsun. $M'/W \in \mathcal{T}$ ise $M/\alpha^{-1}(W) \in \mathcal{T}$'dur.

(4) $M/N \in \mathcal{T}$ ve $m \in M \backslash N$ ise $R/(N : m) \in \mathcal{T}$'dur.

(5) $M/L \in \mathcal{T}$ ve her $x \in L$ için $R/(N : x) \in \mathcal{T}$ ise $M/N \in \mathcal{T}$'dur.

(6) $M/N \in \mathcal{T}$ ve her $x \in M$ için I_x, R'nin τ-yoğun sağ ideali ise $\sum_{x \in N} I_x x$, M'nin τ-yoğun alt modülüdür.

(7) $M/N \in \mathcal{T}$ ve I, R'nin sağ ideali olmak üzere $R/I \in \mathcal{T}$ ise $M/IN \in \mathcal{T}$'dur.

Kanıt. (1) $f : M/N \to M/L$, $f(x + N) = x + L$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmadır. $M/N \in \mathcal{T}$ olduğundan M/N'nin homomorf görüntüsü $M/L \in \mathcal{T}$'dur.

(2) $f : M/(N \cap L) \to M/N \oplus M/L$, $f(x + N \cap L) = (x + N, x + L)$ şeklinde tanımlanan f dönüşümü monomorfizmadır. $\mathcal{T}$'nun dik toplamlar altında kapalı olması kullanılarak $(M/N) \oplus (M/L) \in \mathcal{T}$ elde edilir. O halde $M/(N \cap L)$, $(M/N) \oplus (M/L)$'nin bir alt modülüne izomorf olduğundan $M/(N \cap L) \in \mathcal{T}$'dur.

(3) $f : N/\alpha^{-1}(W) \to M'/W$, $f(n + \alpha^{-1}(W)) = \alpha(n) + W$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir monomorfizmadır. $M'/W \in \mathcal{T}$ olduğundan $N/\alpha^{-1}(W) \in \mathcal{T}$'dur.

$$0 \longrightarrow N/\alpha^{-1}(W) \longrightarrow M/\alpha^{-1}(W) \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

dizisinin tamlığı $M/\alpha^{-1}(W) \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir.

(4) $M/N \in \mathcal{T}$ ve $m \in M \backslash N$ olsun. $R/(N : m) \simeq (m + N)R \leq M/N \in \mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}$ kalıtsal olduğundan $R/(N : m) \in \mathcal{T}$ olur.

(5) (1)'den dolayı $M/(N + L) \in \mathcal{T}$'dur. Aynı zamanda kabulden dolayı her $x \in L$ için $R/(N : x) \simeq (x+N)R \in \mathcal{T}$ olur ve böylece $\sum_{x \in L}(Rx+N) \subseteq t_\tau(M/N)$'dir. Buna göre, $(L + N)/N \in \mathcal{T}$ olur. O halde,

$$0 \longrightarrow (L + N)/N \longrightarrow M/N \longrightarrow M/(N + L) \longrightarrow 0$$

dizisinin tamlığı $M/N \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir.

(6) $M/N \in \mathcal{T}$ ve her $x \in N$ için I_x, R'nin τ-yoğun sağ ideali olmak üzere $L = \sum_{x \in N} I_x x$ olsun. Bu durumda bu şekildeki her x için, $I_x \subseteq (L : x)$'dir. (1)'den dolayı $R/(L : x) \in \mathcal{T}$'dur. (5)'den dolayı $N/L \in \mathcal{T}$ elde edilir. O halde,

$$0 \longrightarrow N/L \longrightarrow M/L \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

dizisinin tamlığı $M/L \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir.

(7) (6)'da özel olarak her $x \in N$ için $I_x = I$ alınırsa sonuç elde edilir. $\square$

Tanım 2.2.5 *(Bland 1998) $F(R)$, R'nin sağ ideallerinin boş kümeden farklı bir ailesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $F(R)$'ye R'nin Gabriel filtresi denir.*

1) $K \in F(R)$ ve $x \in R$ ise $(K : x) = \{r \in R : xr \in K\} \in F(R)$'dir.

2) $J \in F(R)$, $K \leq R$ ve her $x \in J$ için $(K : x) \in F(R)$ ise $K \in F(R)$'dir.

Önerme 2.2.6 *(Bland 1998) $F(R)$, R'nin Gabriel filtresi olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1) $J \in F(R)$ ve $J \subseteq K$ ise $K \in F(R)$'dir.

2) J, $K \in F(R)$ ise $J \cap K \in F(R)$'dir.

3) J, $K \in F(R)$ ise $JK \in F(R)$'dir.

Kanıt. 1) $J \in F(R)$ ve $J \subseteq K$ olsun. Her $r \in R$ ve her $x \in J$ için $xr \in J \subseteq K$ olduğundan $r \in (K : x)$'dir. O halde $R = (K : x) \in F(R)$'dir. Gabriel filtresi tanımındaki 2. koşuldan dolayı $K \in F(R)$'dir.

2) $J, K \in F(R)$ ve $x \in K$ ise $(J \cap K : x) = (J : x) \in F(R)$'dir. Gabriel filtresi tanımındaki 2. koşuldan dolayı $J \cap K \in F(R)$'dir.

3) $J, K \in F(R)$ ve $x \in J$ ise $K \subseteq (JK : x)$'dir. Önermedeki (1)'den dolayı $(JK : x) \in F(R)$ ve Gabriel filtresi tanımındaki 2. koşuldan dolayı $JK \in F(R)$'dir. $\square$

Önerme 2.2.7 *τ kalıtsal bir torsion teori olsun. R'nin τ-yoğun sağ idealleri kümesi R'nin Gabriel filtresidir.*

Kanıt. $F(R) = \{K \leq R : R/K \in \mathcal{T}\}$ olsun. $F(R)$'nin Gabriel filtresi tanımındaki iki koşulu sağladığını göstereceğiz.

1) $K \in F(R)$ ve $x \in R$ olsun. $f : R/(K : x) \to R/K$, $f(r + (K : x)) = xr + K$ monomorfizmasını alalım. $R/K \in \mathcal{T}$ olduğundan $R/(K : x) \in \mathcal{T}$ olur ve böylece $(K : x) \in F(R)$ elde edilir.

2) $J \in F(R)$, K R'nin bir sağ ideali ve her $x \in J$ için $(K : x) \in F(R)$ olsun. $\overline{x} = x + (J \cap K) \in J/\,(J \cap K)$ alalım. $(0 : \overline{x}) = (J \cap K : x) = (K : x) \in F(R)$'dir. O halde her $x \in J$ için $(0 : \overline{x}) \in F(R)$ olur ve buradan $R/(0 : \overline{x}) \simeq \overline{x}R \in \mathcal{T}$ elde edilir. Buna göre $\sum_{\overline{x} \in J/(J \cap K)} \overline{x}R = J/\,(J \cap K) \simeq (J + K)\,/K \in \mathcal{T}$'dur. Diğer taraftan $R/J \in \mathcal{T}$ olduğundan $R/\,(J + K) \in \mathcal{T}$ olur ve

$$0 \longrightarrow (J + K)\,/K \longrightarrow R/K \longrightarrow R/\,(J + K) \longrightarrow 0$$

dizisinin tamlığı da $R/K \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir. Böylece $K \in F(R)$'dir. □

Teorem 2.2.8 *(Bland 1998) $\mathcal{H}$:Mod-R içindeki tüm kalıtsal torsion sınıfların ailesi, $\mathcal{C}$: R'nin tüm Gabriel filtrelerin ailesi olmak üzere, ψ ve ϕ aşağıdaki gibi tanımlansın;*

a) $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{C}$, $\psi(\mathcal{T})$ =$F(R) = \{K \subseteq R : K$ R'nin bir sağ ideali ve $R/K \in \mathcal{T}\}$

b) $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$, $\phi(F(R)) = \mathcal{T} = \{M : (0 : m) \in F(R)\ \forall m \in M\}$

ψ ve ϕ fonksiyonları birbirlerinin tersidir.

Kanıt. Önerme 2.2.7'den dolayı ψ tanımlanabilir.

$F(R)$, R'nin bir Gabriel filtresi ve $\mathcal{T} = \{M : (0 : m) \in F(R)\ \forall m \in M\}$ olsun. $\mathcal{T} \in \mathcal{H}$ olduğunu göstereceğiz. O halde $\mathcal{T}$'nun alt modüller, homomorf görüntüler, dik toplamlar ve modül genişlemeleri altında kapalı olduğunu göstermeliyiz.

Alt modüller: $M \in \mathcal{T}$ ve $N \leq M$ olsun. $n \in N$ alalım. $n \in M$ ve $M \in \mathcal{T}$ olduğundan $(0 : n) \in F(R)$'dir. Böylece $N \in \mathcal{T}$'dur.

Homomorf Görüntüler: $f : M \to N$ bir epimorfizma ve $M \in \mathcal{T}$ olsun. $n \in N$ ise $f(m) = n$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. $(0 : m) \subseteq (0 : n)$ ve $(0 : m) \in F(R)$ olduğundan $(0 : n) \in F(R)$'dir. $\mathcal{T}$'nun tanımından $N \in \mathcal{T}$'dur.

Dik Toplamlar: Her $\alpha \in I$ için $M_\alpha \in \mathcal{T}$ olmak üzere $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi verilsin ve $(m_\alpha) \in \oplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ alalım. $\cap_{\alpha \in I}(0 : m_\alpha) = (0 : (m_\alpha))$ olduğu biliniyor. Ayrıca sadece sonlu sayıdaki $\alpha \in I$ elemanları için $m_\alpha \neq 0$ olduğundan $\cap_{\alpha\in I}(0 : m_\alpha)$ kesişimi sonludur. $M_\alpha \in \mathcal{T}$ olduğundan $(0 : m_\alpha) \in F(R)$'dir. Bu kümelerin sonlu kesişimi $(0 : (m_\alpha)) = \cap_{\alpha\in I}(0 : m_\alpha) \in F(R)$ olur. $\mathcal{T}$'nun tanımından $\oplus_{\alpha\in I} M_\alpha \in \mathcal{T}$'dur.

Modül genişlemeleri: $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow M/L \longrightarrow 0$ dizisi tam ve L, $M/L \in \mathcal{T}$ olsun. $m \in M$ ise $m + L \in M/L$ ve $(0 : m + L) = (L : m) \in F(R)$'dir. $r \in (L : m)$ ise $mr \in L$'dir. $L \in \mathcal{T}$ olduğundan $(0 : mr) = ((0 : m) : r) \in F(R)$'dir. Yani her $r \in (L : m)$ için $((0 : m) : r) \in F(R)$'dir. Gabriel filtresi tanımına göre $(0 : m) \in F(R)$'dir. Böylece $M \in \mathcal{T}$'dur.

O halde ϕ dönüşümü tanımlıdır.

Son olarak ψ ve ϕ dönüşümlerinin iyi tanımlı ve birbirlerinin tersi olan dönüşümler olduğunu göstermeliyiz.

ψ ve ϕ'nin iyi tanımlı oldukları tanımlarından açıktır.

Şimdi $\phi o \psi = 1_{\mathcal{H}}$ ve $\psi o \phi = 1_{\mathcal{C}}$ olduğunu göstereceğiz.

$\phi o \psi = 1_{\mathcal{H}}$ olduğunu göstermek için Mod-R içinde bir $\mathcal{T}$ torsion sınıfı alalım. $\psi(\mathcal{T}) = F(R) = \{K \leq R : R/K \in \mathcal{T}\}$ ve $\phi(F(R)) = \mathcal{T}^* = \{M : (0 : m) \in F(R)\ \forall m \in M\}$ olsun. $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ olduğunu göstermek yetecektir.

$M \in \mathcal{T}$ ve $m \in M$ olsun. $\mathcal{T}$ alt modüller altında kapalı olduğundan, $mR \simeq R/(0 : m) \in \mathcal{T}$ böylece $(0 : m) \in F(R)$ ve dolayısıyla $M \in \mathcal{T}^*$'dır. Böylece $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$ olur.

Tersine $M \in \mathcal{T}^*$ olsun. Her $m \in M$ için $(0 : m) \in F(R)$ olduğundan $mR \simeq R/(0 : m) \in \mathcal{T}$'dur. $\sum_{m\in M} mR = M \in \mathcal{T}$ olur. Buna göre $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$ ve böylece $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ olur. O halde $\phi o \psi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$, $\phi o \psi = 1_{\mathcal{H}}$'dir.

Şimdi de $\psi o \phi = 1_{\mathcal{C}}$ olduğunu gösterelim. $F(R)$, R'nin bir Gabriel filtresi olmak üzere, $\phi(F(R)) = \mathcal{T} = \{M : (0 : m) \in F(R)\ \forall m \in M\}$ ve $\psi(\mathcal{T}) = \{K \leq R : R/K \in \mathcal{T}\} = F^*(R)$ olsun. $F(R) = F^*(R)$ olduğunu göstermeliyiz. $K \in F^*(R)$ olsun. $R/K \in \mathcal{T}$ olması her $r \in R$ için $(0 : r + K) = (K : r) \in F(R)$ olmasını gerektirir. $R \in F(R)$ ve her $r \in R$ için $(K : r) \in F(R)$ olduğundan Gabriel filtresi tanımına göre $K \in F(R)$'dir. Böylece $F^*(R) \subseteq F(R)$'dir.

Ters kapsama için $K \in F(R)$ olsun. Her $x \in R$ için $(K : x) = (0 : x+K) \in F(R)$ olur. Buna göre $R/K \in \mathcal{T}$ ve $K \in F^*(R)$'dir. Sonuç olarak $F(R) = F^*(R)$ elde edilir ve ispat biter. □

Sonuç 2.2.9 *(Bland 1998) $F_\tau(R)$, Mod-R üzerinde τ kalıtsal torsion teorisine karşılık gelen Gabriel filtresi ve M R-modül olsun.*
$t_\tau(M) = \{m \in M \mid (0:m) \in F_\tau(R)\}$'dir.

Kanıt. $\{m \in M \mid (0:m) \in F_\tau(R)\} = H$ ve $F_\tau(R)$'ye karşılık gelen kalıtsal torsion sınıf $\mathcal{T}$ olsun. $t_\tau(M) \in \mathcal{T}$ olduğundan her $m \in t_\tau(M)$ için $(0:m) \in F_\tau(R)$'dir. Buradan $t_\tau(M) \subseteq H$ olur. Diğer yön için $m \in H$ olsun. $mR \simeq R/(0:m) \in \mathcal{T}$'dur. Buradan $mR \subseteq t_\tau(M)$ ve $H \subseteq t_\tau(M)$ elde edilir. □

Örnek 2.2.10 *(1) $(\text{Mod-}R, 0)$ torsion teorisine karşılık gelen Gabriel filtresi R'nin tüm sağ ideallerinden oluşur.*

(2) (0,Mod-R) torsion teorisine karşılık gelen Gabriel filtresi sadece R halkasından oluşur.

Örnek 2.2.11 *$\mathcal{T} = \{G : G$ Abel grup ve $t(G) = G\}$,*
$\mathcal{F} = \{G : G$ Abel grup ve $t(G) = 0\}$ olmak üzere Mod-$\mathbb{Z}$ üzerinde $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ torsion teorisini göz önüne alalım.

$F_\tau(\mathbb{Z})$ Gabriel filtresi $\mathbb{Z}$'nin sıfırdan farklı her idealini kapsar.

Önerme 2.2.12 *(Bland 1998) $M \in \mathcal{F}$ ve $N \leq M$ olsun. $M/N \in \mathcal{T}$ ise $N \trianglelefteq M$'dir.*

Kanıt. $0 \neq m \in M \backslash N$ alalım. $(mR+N)/N \subseteq M/N$ olduğundan $mR/(mR \cap N) \simeq (mR+N)/N \in \mathcal{T}$'dur. $mR \cap N = 0$ olsaydı $mR \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$ olurdu. Bu ise $m \neq 0$ olması ile çelişirdi. O halde her $m \in M \backslash N$ için $mR \cap N \neq 0$'dır.
□

Teorem 2.2.13 *(Bland 1998) τ Mod-R üzerinde bir kalıtsal torsion teori olsun. τ, devirli modüllerin bir dik toplamı tarafından üretilir.*

Kanıt. $\mathcal{S}$ devirli τ-torsion modüllerin izomorfizm sınıflarının bir tam temsilciler kümesi olsun ve $F_\tau(R)$, τ'ya karşılık gelen Galbriel filtresini göstersin.
$F_\tau(R)^* = \{(0:n) \in F_\tau(R) \mid nR \in \mathcal{S}\}$ olmak üzere $X = \oplus_{(0:n) \in F_\tau(R)^*} nR$ olsun. X τ-torsion modüldür.

Şimdi $\mathcal{F}$'nin $\{X\}$'in sağ dik komplimenti olduğunu gösterelim:

$\beta = \{N : Hom_R(X, N) = 0\}$ olsun. $N \in \mathcal{F}$ ise $X \in \mathcal{T}$ olduğundan $Hom_R(X, N) = 0$'dır. O halde $\mathcal{F} \subseteq \beta$'dır.

$N \in \beta$ olsun ve $N \notin \mathcal{F}$ olduğunu varsayalım. $Hom_R(M, N) \neq 0$ olacak şekilde bir $M \in \mathcal{T}$ vardır. $0 \neq g \in Hom_R(M, N)$ alalım. $M \in \mathcal{T}$ olduğundan $g(M)$ τ-torsion bir modüldür. $0 \neq nR$ olacak şekilde bir $n \in g(M) \in \mathcal{T}$ vardır. Buradan $nR \simeq R/(0 : n) \in \mathcal{S}$ elde edilir. $F_\tau(R)^*$'ın tanımından $(0 : n) \in F_\tau(R)^*$'dır. $f : R/(0 : n) \to nR$ izomorfizması ve p kanonik epimorfizma olmak üzere, $fop \neq 0$'dır. $0 \longrightarrow nR \longrightarrow N$ tam dizisine $Hom_R(X, -)$ funktoru uygulanırsa, $0 \longrightarrow Hom_R(X, nR) \longrightarrow Hom_R(X, N)$ tam dizisi elde edilir. $N \in \beta$ olduğundan $Hom_R(X, N) = 0$ dolayısıyla $Hom_R(X, nR) = 0$ olur. Bu sonuç $0 \neq fop \in Hom_R(X, nR)$ olması ile çelişir. O halde $N \in \mathcal{F}$ ve böylece $\beta \subseteq \mathcal{F}$'dir. Sonuç olarak $\mathcal{F} = \beta$'dir. □

2.3 Pür alt modüller

Tanım 2.3.1 *(Bland 1998) M R-modül, $B \leq M$ olsun. $M/B \in \mathcal{F}$ ise B'ye M'nin τ-pür alt modülü denir. M'nin tüm τ-pür alt modüllerinin kümesi $\mathcal{P}_\tau(M)$ ile gösterilir.*

Örnek 2.3.2 *$t_\tau(M)$, M'nin τ-pür alt modülüdür.*

Teorem 2.3.3 *(Crivei 2004) M R-modül ve $B, B' \leq M$ olsun.*

(1) $M/B \in \mathcal{F}$ ise $t_\tau(M) \subseteq B$, ve $t_\tau(B) = t_\tau(M)$'dir.

(2) $B \subseteq B'$ ve $M/B \in \mathcal{F}$ ise $B'/B \in \mathcal{F}$'dir.

(3) $B \subseteq B'$, $B'/B \in \mathcal{F}$ ve $M/B' \in \mathcal{F}$ ise $M/B \in \mathcal{F}$'dir..

(4) M'nin τ-pür alt modüller sınıfı keyfi kesişimler altında kapalıdır.

(5) $t_\tau(M) = \cap_{B \in \mathcal{P}_\tau(M)} B$'dir.

Kanıt. (1) $(t_\tau(M) + B)/B \simeq t_\tau(M)/(t_\tau(M) \cap B) \in \mathcal{T}$'dur.
$(t_\tau(M) + B)/B \subseteq M/B \in \mathcal{F}$ olduğundan $(t_\tau(M) + B)/B \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$'dır. Buna göre, $t_\tau(M) + B = B$, yani $t_\tau(M) \subseteq B$'dir. Buradan, $t_\tau(M) \subseteq t_\tau(B)$'dir. Diğer taraftan $B \subseteq M$ olduğundan, $t_\tau(B) \subseteq t_\tau(M)$ ve böylece $t_\tau(M) = t_\tau(B)$ olur.

(2) $M/B \in \mathcal{F}$ ve $B'/B \subseteq M/B$ olduğundan, $B'/B \in \mathcal{F}$'dir.

(3) $B'/B \in \mathcal{F}$ ve $M/B' \in \mathcal{F}$ olduğunu kabul edelim.

$$0 \longrightarrow B'/B \longrightarrow M/B \longrightarrow M/B' \longrightarrow 0$$

dizisinin tamlığı $M/B \in \mathcal{F}$ olmasını gerektirir.

(4) $(B_i)_{i\in I}$, M'nin τ-pür alt modül ailesi olsun. $f : M/\left(\cap_{i\in I} B_i\right) \to \Pi_{i\in I} M/B_i$, $f(M + \cap_{i\in I} B_i) = (M + B_i)_{i\in I}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir monomorfizmadır. $\Pi_{i\in I} M/B_i \in \mathcal{F}$ olduğundan, $M/\left(\cap_{i\in I} B_i\right) \in \mathcal{F}$'dir.

(5) $t_\tau(M)$, M içinde τ-pür olduğundan, $\cap_{B\in\mathcal{P}_\tau(M)} B \subseteq t_\tau(M)$'dir.

Ters kapsamayı görmek için $x \in t_\tau(M)$ alalım. $M/B \in \mathcal{F}$ olsun.
$(0 : x) \subseteq (0 : x + B)$ olduğundan $x + B$, M/B'nin τ-torsion bir elemanıdır. O halde $x + B = 0$, yani $x \in B$'dir. Buna göre $t_\tau(M) \subseteq B$ ve $t_\tau(M) \subseteq \cap_{B\in\mathcal{P}_\tau(M)} B$ olur. □

Tanım 2.3.4 *(Bland 1998) M R-modül, $N \leq M$ olsun. M'nin N'yi kapsayan tüm τ-pür alt modüllerinin kesişimine N'nin M içindeki τ-pür kapanışı denir ve N^c ile gösterilir.*

Örnek 2.3.5 *N, M'nin τ-pür alt modülü ise N'nin M içindeki τ-pür kapanışı kendisine eşittir.*

Önerme 2.3.6 *(Bland 1998) N, M modülünün bir alt modülü olsun.
$N^c/N = t_\tau(M/N)$ ve $N^c = \{m \in M \mid (N : m) \in F_\tau(R)\}$'dir.*

Kanıt. $\mathcal{C}$, M'nin N'yi kapsayan tüm τ-pür alt modüllerinin ailesi olsun.
$N^c = \cap_{X\in\mathcal{C}} X$ ve $N^c/N = \left(\cap_{X\in\mathcal{C}} X\right)/N = \cap_{X\in\mathcal{C}}(X/N) = t_\tau(M/N)$ olur. $N^c/N = t_\tau(M/N)$ olduğundan $m+N \in N^c/N = t_\tau(M/N)$ olması ile $(N : m) \in F_\tau(R)$ olması denktir. O halde $N^c = \{m \in M : (N : m) \in F_\tau(R)\}$ elde edilir. □

$K \leq N \leq M$ olsun. K'nın N içindeki τ-pür kapanışını K_N^c ve K'nın M içindeki τ-pür kapanışını K_M^c ile gösterelim.
$K_N^c/K = t_\tau(N/K) = t_\tau(M/K) \cap (N/K) = (K_M^c/K) \cap (N/K) = \left(K_M^c \cap N\right)/K$'dır.
Böylece $(K_M^c \cap N) = K_N^c$ elde edilir.

Önerme 2.3.7 *(Golan 1986) N, M modülünün bir alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) $(N^c)^c = N^c$'dir.

(2) Her $m \in M$ için $(N:m)^c = (N^c:m)$'dir.

(3) $N \subseteq W$ ise $N^c \subseteq W^c$'dir.

(4) $N, W \leq M$ için $N^c \cap W^c = (N \cap W)^c$'dir.

Kanıt. (1) ve (3) tanımlardan açıktır.

(2) $a \in (N:m)^c$ olsun. Önerme 2.3.6'ya göre $I = ((N:m):a) \in F_\tau(R)$ ve buradan da $aI \subseteq (N:m)$ olur. O halde $maI \subseteq N$, yani $I \subseteq (N:ma)$'dir. $I \in F_\tau(R)$ ve $F_\tau(R)$ Gabriel filtresi olduğundan, $(N:ma) \in F_\tau(R)$'dir. Buna göre, $ma \in N^c$ olur. Böylece $a \in (N^c:m)$'dir. Buradan $(N:m)^c \subseteq (N^c:m)$'dir.

$a \in (N^c:m)$ olsun. $ma \in N^c$ ve buradan $(N:ma) \in F_\tau(R)$'dir.
$(N:ma) \subseteq ((N:m):a))$ olduğundan $((N:m):a)) \in F_\tau(R)$, yani $a \in (N:m)^c$ dir. Böylece $(N^c:m) \subseteq (N:m)^c$ olur.

(4) $N \cap W \subseteq N$ ve $N \cap W \subseteq W$ olduğundan $(N \cap W)^c \subseteq N^c$ ve
$(N \cap W)^c \subseteq W^c$'dir. Buradan $(N \cap W)^c \subseteq N^c \cap W^c$ olur.

$a \in N^c \cap W^c$ olsun. $a \in N^c$ ve $a \in W^c$ olduğundan $(N:a), (W:a) \in F_\tau(R)$'dir. Buradan, $(N:a) \cap (W:a) \in F_\tau(R)$ olur. $(N:a) \cap (W:a) \subseteq (N \cap W:a)$ olduğu kullanılarak $(N \cap W:a) \in F_\tau(R)$ elde edilir. Önerme 2.3.6'dan dolayı $a \in (N \cap W)^c$ ve buna göre $N^c \cap W^c \subseteq (N \cap W)^c$ olur. □

Önerme 2.3.8 *(Golan 1986) $f: M \to M'$ bir R-homomorfizması ve $N \leq M$ olsun. $f(N^c) \subseteq f(N)^c$ dir.*

Eğer f örten ve Çek$f \in \mathcal{T}$ ise ters kapsama da vardır.

Kanıt. $y \in f(N^c)$ olsun. O halde $y = f(x)$ olacak şekilde $x \in N^c$ vardır. $x \in N^c$ olduğundan $(N:x) \in F_\tau(R)$'dir. $(N:x) \subseteq (f(N):f(x))$ kullanılarak $(f(N):f(x)) \in F_\tau(R)$ olur. O halde $f(x) \in f(N)^c$ ve böylece $f(N^c) \subseteq f(N)^c$ elde edilir.

Ters kapsama için $g: M/N^c \to M'/f(N^c)$,
$g(m + N^c) = f(m) + f(N^c)$ dönüşümünü tanımlayalım. Çek$g = (\text{Çek}f + N^c)/N^c$

olur. $\text{Çek}g = (\text{Çek}f + N^c)/N^c \simeq \text{Çek}f/(\text{Çek}f \cap N^c) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$'dır. O halde $\text{Çek}g = 0$ ve böylece g bir izomorfizmadır. Çünkü g örtendir. $M/N^c \in \mathcal{F}$ olduğundan

$M'/f(N^c) \in \mathcal{F}$'dir. Ayrıca $N \subseteq N^c$ olduğundan da $f(N) \subseteq f(N^c)$'dir. O halde $f(N)^c \subseteq (f(N^c))^c = f(N^c)$'dir. □

Örnek 2.3.9 *(Bland 1998) R, S'nin bir althalkası, S bir düz R-modül olsun. $\mathcal{T} = \{M : M \otimes_R S = 0\}$ sınıfı Mod-R üzerinde bir kalıtsal torsion sınıftır. $\mathcal{F} = \{M : M \to M \otimes_R S,\ m \to m \otimes 1_s$ dönüşümü monomorfizma$\}$ sınıfı $\mathcal{T}$'ya karşılık gelen torsion-free sınıftır. Bu torsion teoriye karşılık gelen Gabriel filtresi $F_\tau(R)$, $KS = S$ olacak şekildeki K sağ ideallerinin kümesidir.*

Bu sonuç $R/K \otimes_R S \simeq S/KS$ olmasından elde edilir.

Örnek 2.3.10 *(Bland 1998) τ Mod-R üzerinde kalıtsal bir torsion teori, $F_\tau(R)$ τ'ya karşılık gelen Gabriel filtresi, M R-modül olsun. Her $K \in F_\tau(R)$ için $KM = M$ ise M'ye τ-bölünebilir denir.*

$\mathcal{D} = \{M \in R\text{-Mod} : N \otimes_R M = 0\ \forall N \in \mathcal{T}\}$ olsun. $\mathcal{D}$'nin tüm τ-bölünebilir sol R-modüllerin sınıfı olduğunu gösterelim:

$K \in F_\tau(R)$ ve $M \in \mathcal{D}$ olsun. O zaman $(R/K) \otimes M \simeq M/KM = 0$'dır. Böylece $M = KM$'dir. O halde M τ-bölünebilirdir. Tersine M τ-bölünebilir yani her $K \in F_\tau(R)$ için $KM = M$ ve $N \in \mathcal{T}$ olmak üzere $n \otimes m$ $N \otimes_R M$'nin bir üreteci olsun. $n \in N$ olduğundan $nK = 0$ olacak şekilde bir $K \in F_\tau(R)$ vardır. $KM = M$ olduğundan $\sum_{i=1}^{q} k_i m_i = m$ olacak şekilde $m_i \in M$ ve $k_i \in K$ vardır.
$n \otimes m = n \otimes \sum_{i=1}^{q} k_i m_i = \sum_{i=1}^{q} (n \otimes k_i m_i) = \sum_{i=1}^{q} (nk_i \otimes m_i) = \sum_{i=1}^{q} (0 \otimes m_i) = 0$'dır. Böylece $N \otimes_R M = 0$ ve dolayısıyla $M \in \mathcal{D}$'dir. Bu nedenle $\mathcal{D}$ tüm τ-bölünebilir sol R-modüllerin sınıfıdır.

$\mathcal{D}$ R-Mod üzerinde bir torsion sınıftır. $\mathcal{T}$ kalıtsal olmasına rağmen $\mathcal{D}$ kalıtsal olmak zorunda değildir. $\mathcal{T}$ içindeki her modül düz ise $\mathcal{D}$ kalıtsal olacaktır.

$t_{\mathcal{D}}(M)$, M'nin tüm τ-bölümlü alt modüllerin toplamı olsun. $t_{\mathcal{D}}(M) = 0$ ise M'ye τ-indirgenmiş modül denir. $\mathcal{R}$ tüm τ-indirgenmiş sol R-modüllerin ailesi olmak üzere $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ R-Mod üzerinde bir torsion teoridir. τ torsion ve torsion-free abel gruplardan oluşan torsion teori ise $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{R}$ sırasıyla bölünebilir ve indirgenmiş Abel grupların sınıfıdır.

Tanım 2.3.11 *(Bland 1998)* $\sigma = (\mathcal{T}_\sigma, \mathcal{F}_\sigma)$ *ve* $\tau = (\mathcal{T}_\tau, \mathcal{F}_\tau)$ *Mod-R üzerinde torsion teoriler olsun.* $\mathcal{T}_\sigma \subseteq \mathcal{T}_\tau$ *veya* $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$ *ise* $\sigma \leq \tau$ *yazılır.*

$\leq$ Mod-R üzerindeki tüm torsion teoriler ailesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Mod-R üzerindeki her τ torsion teorisi için (0,Mod-R) $\leq \tau \leq$ (Mod-R, 0) olduğu açıktır.

Örnek 2.3.12 *(Bland 1998)* τ *Mod-R üzerinde bir faithful torsion teori ise* R τ*-torsion-free modüldür. Bu durumda* $K \in F_\tau(R)$ *ise bir önceki önermeye göre* $K \trianglelefteq R$ *ve dolayısıyla* $K \in F_G(R)$*'dir. Buradan* $\tau \subseteq \tau_G$*'dir. O halde* τ_G*, Mod-R üzerindeki faithful torsion teoriler için bir üst sınırdır. Ancak* τ_G *faithful olmak zorunda değildir.*

2.4 Kokritikal Modüller

Bu bölümden itibaren aksi belirtilmedikçe $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ Mod-R üzerinde kalıtsal bir torsion teori olacaktır.

Bu bölümde modül teorinin en önemli kavramlarından biri olan basit ve maksimal alt modüllerin genellemesi üzerine çalışacağız.

Tanım 2.4.1 *(Golan 1986)* M τ*-torsion olmayan bir R-modül olsun. Eğer* $t_\tau(M)$*,* M*'nin tek* τ*-pür öz alt modülü ise* M*'ye* τ*-basit modül denir.*

(0,Mod-R) torsion teorisinde τ-basit modül kavramı ile basit modül kavramı aynıdır.

Teorem 2.4.2 M *R-modül,* $N \leq M$ *ve* N^c*,* N*'nin* M *içindeki* τ*-pür kapanışı olsun.*
N'nin τ*-basit olması ile* N^c*'nin* τ*-basit olması denktir.*

Kanıt. N'nin τ-basit olduğunu kabul edelim. N τ-torsion olmadığından N^c de τ-torsion olamaz. K, N^c'nin bir öz alt modülü olsun.
$K/(K \cap N) \simeq (K+N)/N \leq N^c/N \in \mathcal{T}$ ve böylece $K/(K \cap N) \in \mathcal{T}$ olur. Eğer $K \cap N \in \mathcal{T}$ ise

$$0 \longrightarrow K \cap N \longrightarrow K \longrightarrow K/(K \cap N) \longrightarrow 0$$

dizisinin tamlığı $K \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir. Bu durumda K, N^c içinde τ-pür ise $K = t_\tau(N^c)$'dir.

$K \cap N \notin \mathcal{T}$ olduğunu kabul edelim. $N/\left(N \cap K\right)^c \in \mathcal{F}$ ve N τ-basit olduğundan $(N \cap K)^c = N$'dir. Buradan $t_\tau(N/\left(N \cap K\right)) = (N \cap K)^c/(N \cap K) = N/\left(N \cap K\right)$ ve dolayısıyla $N/\left(N \cap K\right) \in \mathcal{T}$'dur. O halde $(N + K)/K \simeq N/(N \cap K) \in \mathcal{T}$ olur. Diğer taraftan $N^c/(N + K)$, N^c/N'nin bir homomorf görüntüsü olduğundan $N^c/\left(N + K\right) \in \mathcal{T}$'dur.

$$0 \longrightarrow (N + K)/K \longrightarrow N^c/K \longrightarrow N^c/\left(N + K\right) \longrightarrow 0$$

dizisinin tamlığı $N^c/K \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir. Bu sonuç da N^c'nin τ-basit olduğunu gösterir.

Şimdi, N^c'nin τ-basit olduğunu kabul edelim. $N \in \mathcal{T}$ olsaydı;

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow N^c \longrightarrow N^c/N \longrightarrow 0$$

dizisinin tamlığı ve $N^c/N \in \mathcal{T}$ olması $N^c \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirecekti. O halde $N \notin \mathcal{T}$'dur.

K, N'nin bir öz alt modülü olsun.

$K \subseteq t_\tau(N)$ ise $N/K \in \mathcal{F}$ olması $K = t_\tau(N)$ olmasını gerektirir.

$K \notin \mathcal{T}$ kabul edelim. $N^c/K^c \in \mathcal{F}$ ve N^c τ-basit olduğundan $N^c = K^c$'dir. $t_\tau(N^c/K) = K^c/K = N^c/K \in \mathcal{T}$ ve $N/K \leq N^c/K$ olması kullanılarak $N/K \in \mathcal{T}$ elde edilir. Böylece N τ-basit modüldür. $\square$

Önerme 2.4.3 *(Golan 1986) Bir τ-basit modülün, her alt modülü ve her homomorf görüntüsü ya τ-basit ya da τ-torsion bir modüldür.*

Kanıt. M τ-basit bir modül ve N, M'nin τ-torsion olmayan bir alt modülü olsun. Teorem 2.4.2'den dolayı N'yi τ-pür kabul edebiliriz. K, N'nin τ-pür bir öz alt modülü olsun.

$$0 \longrightarrow N/K \longrightarrow M/K \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

dizisinin tamlığı $M/K \in \mathcal{F}$ olmasını gerektirir. M τ-basit olduğundan $K = t_\tau(M) = t_\tau(N)$'dir. Böylece N τ-basit modüldür.

M/N'nin τ-torsion olmadığını kabul edelim. L/N, M/N'nin τ-pür bir öz alt modülü olsun. $(M/N)/(L/N) \simeq M/L \in \mathcal{F}$ olur. M τ-basit olduğundan $L = t_\tau(M)$'dir $t_\tau(M)/N \in \mathcal{T}$ ve L/N τ-pür olduğundan $t_\tau(M)/N = L/N = t_\tau(M/N)$'dir. O halde M/N τ-basit modüldür. □

Tanım 2.4.4 *(Golan 1986) Bir M modülü τ-basit ve τ-torsion-free ise M'ye τ-kokritikal modül denir.*

M τ-kokritikal modül ve $0 \neq N \leq M$ olsun. $M/N^c \in \mathcal{F}$ ve M τ-basit olduğundan $N^c = M$'dir. Böylece $M/N = N^c/N \in \mathcal{T}$ olur. Böylece τ-kokritikal bir modülün sıfırdan farklı her alt modülü τ-yoğundur. Ayrıca M τ-torsion-free modül ve M'nin sıfırdan farklı her altmodülü τ-yoğun ise M τ-basittir.

O halde M'nin τ-kokritikal modül olması için gerekli ve yeterli koşul M'nin τ-torsion-free ve sıfırdan farklı her alt modülünün τ-yoğun olmasıdır.

Önerme 2.4.5 *(Golan 1986) M sıfırdan farklı bir modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M τ-torsion veya τ-kokritikal modüldür.

(2) M'nin sıfırdan farklı her öz alt modülü B, M içinde τ-pür değildir.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2) Tanımlardan açıktır.

(2) $\Longrightarrow$ (1) M τ-torsion olmasın. $t_\tau(M) \neq 0$ ise kabulden dolayı $M/t_\tau(M)$ τ-torsion-free olamaz. Bu ise bir çelişkidir. O halde M τ-torsion-free olmalıdır. B M'nin sıfırdan farklı bir öz alt modülü olsun. Bu durumda $M/B \notin \mathcal{F}$'dir. O halde $t_\tau(M/B) = C/B$ olacak şekilde B'yi kapsayan bir $C \leq M$ alt modülü vardır.
$M/C \simeq (M/B)/(C/B) = (M/B)/t_\tau(M/B)$ τ-torsion-free modüldür. Hipoteze göre $M = C$ olmalıdır. Buna göre M/B τ-torsion ve böylece M τ-kokritikal modüldür. □

Teorem 2.4.6 *(Golan 1986) M R-modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M τ-kokritikal modüldür.

(2) M düzgün bir modüldür ve M'nin τ-yoğun, τ-kokritikal bir alt modülü vardır.

(3) M τ-torsion-free bir modüldür ve M'nin τ-yoğun, τ-kokritikal bir alt modülü vardır.

(4) M'nin sıfırdan farklı her alt modülü τ-kokritikaldir.

(5) M düzgün bir modüldür ve M'nin sıfırdan farklı her devirli alt modülü τ-kokritikaldir.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2) $0 \neq N \leq M$ olsun. $M/N \in \mathcal{T}$ ve $M \in \mathcal{F}$ olduğundan Önerme 2.2.12'ye göre $N \trianglelefteq M$ olur. M kendisinin τ-yoğun, τ-kokritikal alt modülüdür.

(2) $\Longrightarrow$ (3) M'nin τ-torsion-free olduğunu göstereceğiz. $N = t_\tau(M)$ ve N', M'nin bir τ-yoğun, τ-kokritikal alt modülü olsun. M düzgün olduğundan $N' \trianglelefteq M$ olur. O halde $N \neq 0$ ise $N \cap N' = t_\tau(N') \neq 0$ olur. Bu ise $N' \in \mathcal{F}$ olması ile çelişir.

(3) $\Longrightarrow$ (1) N, M'nin bir τ-yoğun, τ-kokritikal alt modülü olsun. M, τ-torsion-free olduğundan Önerme 2.2.12'ye göre $N \trianglelefteq M$ olur.

$0 \neq N' \leq M$ olsun. O halde $N \cap N'$, N'nin sıfırdan farklı, τ-yoğun alt modülüdür. $N/(N \cap N') \simeq (N' + N)/N' \in \mathcal{T}$ olur. Ayrıca $M/N \in \mathcal{T}$ olduğundan $M/(N + N') \in \mathcal{T}$'dur.

$$0 \longrightarrow (N' + N)/N' \longrightarrow M/N' \longrightarrow M/(N + N') \longrightarrow 0$$

tam dizisinden ve $(N' + N)/N', M/(N + N') \in \mathcal{T}$ olmasından dolayı $M/N' \in \mathcal{T}$ olur.

(1) $\Longrightarrow$ (4) $0 \neq N \leq M$ olsun. $M \in \mathcal{F}$ olduğundan $N \in \mathcal{F}$'dir. $0 \neq N' \leq N$ için $N/N' \leq M/N' \in \mathcal{T}$ olduğundan $N/N' \in \mathcal{T}$'dur. Böylece N τ-kokritikaldir.

(4) $\Longrightarrow$ (5) Açıktır.

(5) $\Longrightarrow$ (1) Kabulden dolayı her $m \in M$ için $mR \in \mathcal{F}$ ve dolayısıyla $M \in \mathcal{F}$'dir. M τ-kokritikal değilse M'nin sıfırdan farklı bir τ-pür öz alt modülü vardır. N, M'nin sıfırdan farklı bir τ-pür öz alt modülü ve $m \in M \backslash N$ olsun. $mR/\left(mR \cap N\right) \simeq \left(mR + N\right)/N \in \mathcal{F}$'dir. M düzgün olduğundan, $mR \cap N \neq 0$'dır. Bu ise mR'nin τ-kokritikal olması ile çelişir. O halde M τ-kokritikal modüldür. □

Önerme 2.4.7 *(Golan 1986) M τ-torsion-free R-modül ve N, M'nin sıfırdan farklı bir alt modülü olsun. N'nin τ-kokritikal olması ile N^c'nin τ-kokritikal olması denktir.*

Kanıt. N'nin τ-kokritikal olduğunu kabul edelim. $M \in \mathcal{F}$ olduğundan $N^c \in \mathcal{F}$'dir. $0 \neq K \leq N^c$ olsun. $K/(N \cap K) \simeq (K+N)/N \subseteq N^c/N \in \mathcal{T}$'dur. $N \cap K = 0$ ise $K \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$ olur. O halde $N \cap K \neq 0$'dır. N τ-kokritikal olduğundan $N/(N \cap K) \simeq (K+N)/K \in \mathcal{T}$'dur. Ayrıca $N^c/(N+K) \in \mathcal{T}$'dur. Çünkü $N^c/(N+K)$, N^c/N τ-torsion modülünün bir homomorf görüntüsüdür.

$0 \longrightarrow (K+N)/K \longrightarrow N^c/K \longrightarrow N^c/(N+K) \longrightarrow 0$ tam dizisinden $N^c/K \in \mathcal{T}$ elde edilir.

N^c'nin τ-kokritikal olduğunu kabul edelim. $0 \neq N \leq N^c$ olduğundan Teorem 2.4.6'dan dolayı N de τ-kokritikal olur. □

Sonuç 2.4.8 *(Golan 1986) M τ-torsion-free R-modül, N, M'nin τ-kokritikal alt modülü ve $0 \neq K \leq N$ olsun. N'nin M içindeki τ-pür kapanışı N^c_M ile K'nın M içindeki τ-pür kapanışı K^c_M birbirine eşittir.*

Kanıt. Yukarıdaki önermeye göre N^c_M de M'nin bir τ-kokritikal alt modülüdür. O halde N'nin M içinde τ-pür olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $K^c_M \subseteq N$'dir. $M/K^c_M \in \mathcal{F}$ olduğundan $N/K^c_M \in \mathcal{F}$'dir. N τ-kokritikal olduğundan $K^c_M = 0$ ya da $N = K^c_M$'dir. $K \neq 0$ olduğundan $K^c_M \neq 0$'dır. O halde $N = K^c_M$'dir. □

Teorem 2.4.9 *(Golan 1986) $\{M_i : i \in \Omega\}$ M'nin τ-kokritikal alt modüllerinden oluşan bir küme ve $M/(\sum_{i\in\Omega} M_i) \in \mathcal{T}$ olsun. $N \leq M$ ise aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\Lambda \subseteq \Omega$ altkümesi vardır.*

(1) $\sum_{j\in\Lambda} M_j$ toplamı diktir.

(2) $N \oplus [\oplus_{j\in\Lambda} M_j]$, M içinde τ-yoğundur.

Kanıt. $N = M$ ise $\Lambda = \emptyset$ alınır ve ispat biter. $N \neq M$ olduğunu kabul edelim. $\mathcal{A} = \left\{\Lambda \subseteq \Omega : \sum_{i\in\Lambda} M_i \text{ toplamı dik ve } N \cap \left[\sum_{i\in\Lambda} M_i\right] = 0\right\}$ kümesini oluşturalım. O halde $\emptyset \in \mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}$ küme kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı bir kümedir. $\{\Lambda_k\}$, $\mathcal{A}$ içinde bir zincir olsun. $\cup\Lambda_k \in \mathcal{A}$ yani $\cup\Lambda_k$, $\{\Lambda_k\}$ için bir üst sınırdır. Zorn Önteoremi'ne göre $\mathcal{A}$'nın bir maksimal elemanı vardır. Bu eleman Λ olsun ve $K = \oplus_{j\in\Lambda} M_j$, $B = N \oplus K$ diyelim.

Şimdi $M/B \in \mathcal{T}$ olduğunu göstereceğiz. Tersini kabul edelim. $M/B \notin \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda $M \neq B^c$ olur. Çünkü $B^c/B = t_\tau(M/B) \in \mathcal{T}$'dur.

Her $i \in \Omega$ için $M_i \subseteq B^c$ olsaydı $\sum_{i\in\Omega} M_i \subseteq B^c$ ve $M/(\sum_{i\in\Omega} M_i) \in \mathcal{T}$ olduğundan $M/B^c \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$ yani $M = B^c$ olurdu. O halde en az bir M_i τ-kokritikal alt modülü için $M_i \nsubseteq B^c$'dir.

$B^c \cap M_i \neq 0$ ise M_i, τ-kokritikal olduğundan $M_i/(B^c \cap M_i) \simeq (M_i + B^c)/B^c \in \mathcal{T}$ olur. Ayrıca $M_i/(B^c \cap M_i) \simeq (M_i + B^c)/B^c \leq M/B^c \in \mathcal{F}$ olduğundan $M_i/(B^c \cap M_i) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$ ve böylece $M_i = B^c \cap M_i$ yani $M_i \subseteq B^c$ olurdu. O halde $B^c \cap M_i = 0$'dır.

$K \cap M_i \subseteq (N \oplus K) \cap M_i \subseteq B^c \cap M_i = 0$ olur böylece de $K \cap M_i = 0$ ve $(N \oplus K) \cap M_i = 0$ elde edilir. Buradan, $N \cap (K \oplus M_i) = 0$ olduğu da görülür. Buradan $\Lambda' = \Lambda \cup \{i\} \in \mathcal{A}$ olur bu sonuç ise Λ'nın maksimalliği ile çelişir. O halde $M/B = M/(N \oplus [\oplus_{j\in\Lambda} M_j]) \in \mathcal{T}$'dur. □

Önerme 2.4.10 *(Golan 1986) M R-modül ve K, M'nin τ-kokritikal alt modülü olsun. $N \in \mathcal{P}_\tau(M)$ ise $K \cap N = 0$ veya $K \subseteq N$'dir.*

Kanıt. $K \cap N \neq 0$ olsun. K, M'nin bir τ-kokritikal alt modülü olduğundan $K/(K \cap N) \simeq (N + K)/N \in \mathcal{T}$'dur. Kabuldeki $(N + K)/N \leq M/N \in \mathcal{F}$ kullanılarak, $K/(K \cap N) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$ elde edilir ve böylece $K = K \cap N$, yani $K \subseteq N$ olur. □

2.5 Jacobson Radikal

Tanım 2.5.1 *(Bland 1998) M R-modül, $N \leq M$ olsun. M/N τ-kokritikal modül ise N'ye M'nin τ-maksimal alt modülü denir.*

Örnek 2.5.2 *M R-modül ve $N \leq M$ olsun. $\tau = (0,$Mod-$R)$ torsion teorisinde N'nin τ-maksimal alt modül olması ile maksimal alt modül olması denktir.*

Bu tanım yardımıyla aşağıdakiler kolayca görülebilir:

(1) M modülünün τ-maksimal bir alt modülü M'nin öz alt modülü olmalıdır. Çünkü N, M'nin τ-maksimal alt modülü ise M/N τ-kokritikal, yani $M/N \neq 0$'dır. Buradan $M \neq N$ olmalıdır.

(2) $\tau = ($Mod-$R, 0)$ torsion teorisinde τ-kokritikal modül ve dolayısıyla τ-maksimal alt modül yoktur. Daha genel olarak her torsion teoride τ-maksimal alt modül yoktur. Bu sebepten dolayı bundan sonra çalışmaların anlamlı olması için τ-kokritikal modüllerin var olduğu kabul edilecektir.

Önerme 2.5.3 *(Bland 1998) R halkasının τ-maksimal sağ idealleri vardır.*

Kanıt. τ torsion teorisini τ-kokritikal modüller var olacak şekilde seçtiğimiz için, bir M τ-kokritikal R-modülü vardır. $0 \neq m \in M$ ise mR bir τ-kokritikal modüldür. $R/(0:m) \simeq mR$ olduğundan $(0:m)$, R'nin bir τ-maksimal sağ idealidir. $\square$

Teorem 2.5.4 *(Bland 1998) M R-modül, $N \leq M$ olsun.*

N'nin τ-maksimal alt modül olması ile N'nin τ-pür alt modüller arasında maksimal olması denktir.

Ayrıca $M \in \mathcal{F}$ ise M'nin sıfırdan farklı τ-pür alt modüller kümesinin (varsa) herhangi bir minimal elemanı τ-kokritikaldir.

Kanıt. N'yi M'nin bir τ-maksimal alt modülü olarak kabul edelim. $X \in \mathcal{P}_\tau(M)$ için $N \subset X \subseteq M$ olsun. M/N τ-kokritikal olduğundan, $0 \neq X/N \leq M/N$ için $(M/N)/(X/N) \simeq M/X \in \mathcal{T}$'dur. Ayrıca $X \in \mathcal{P}_\tau(M)$ olduğundan $M/X \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$'dır. Böylece N, M'nin τ-pür alt modülleri arasında maksimaldir.

Şimdi N'nin M'nin τ-pür alt modülleri arasında maksimal olduğunu kabul edelim. M/N'nin τ-kokritikal olmadığını varsayalım.
O halde öyle bir $0 \neq X/N \leq M/N$ vardır ki $(M/N)/(X/N) \simeq M/X \notin \mathcal{T}$'dur. Şimdi $M/X \simeq (M/N)/(X/N) \in \mathcal{F}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $X \in \mathcal{P}_\tau(M)$ olur. Fakat $X/N \neq 0$ olduğundan N, X'in bir öz alt modülüdür. Buna göre $X \in \mathcal{P}_\tau(M)$ olması N'nin M'nin τ-pür alt modülleri arasında maksimal olması ile çelişir. O halde $(M/N)/(X/N)$ ne τ-torsion ne de τ-torsion-free modüldür. $(Y/N)/(X/N) = t_\tau((M/N)/(X/N))$ olacak şekilde M'nin N'yi kesin kapsayan bir Y alt modülü vardır. $M/Y \simeq (M/N)/(Y/N) \simeq [(M/N)/(X/N)]/[(Y/N)/(X/N)] = [(M/N)/(X/N)]/[t_\tau((M/N)/(X/N))] \in \mathcal{F}$ olur ve böylece $Y \in \mathcal{P}_\tau(M)$ elde edilir. Bu ise N'nin M'nin τ-pür alt modülleri arasında maksimal olması ile çelişir. O halde M/N τ-kokritikal dolayısıyla N τ-maksimal olmalıdır.

İkinci kısım için $M \in \mathcal{F}$ ve N, $\mathcal{P}_\tau(M)$ içindeki sıfırdan farklı alt modüller arasında minimal olsun. N'nin τ-kokritikal olmadığını varsayalım. Bu durumda N'nin sıfırdan farklı öyle bir A alt modülü vardır ki $N/A \notin \mathcal{T}$'dur. $B/A = t_\tau(N/A)$

olacak şekilde olacak şekilde A'yı kesin kapsayan bir $B < N$ alt modülü vardır. $(N/A)\,/\,(B/A) \simeq N/B \in \mathcal{F}$'dir. Ayrıca

$$0 \longrightarrow N/B \longrightarrow M/B \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

tam dizisinden $M/B \in \mathcal{F}$ elde edilir. Bu ise N'nin minimalliği ile çelişir. O halde N τ-kokritikal olmalıdır. □

Teorem 2.5.5 *(Bland 1998) M R-modül ve $N \leq M$ olsun.*

N, M'nin τ-maksimal alt modülüdür ancak ve ancak N, M'nin $F_\tau(M)$'de olmayan alt modülleri arasında maksimaldir.

Kanıt. N'yi M'nin bir τ-maksimal alt modülü kabul edelim. $N \notin F_\tau(M)$'dir. N', M'nin $N \subseteq N'$ ve $N' \notin F_\tau(M)$ olacak şekilde bir alt modülü olsun. N, M'nin τ-pür alt modülleri arasında maksimal ve $N \subseteq N' \subseteq N'^c \in \mathcal{P}_\tau(M)$ olduğundan $N = N' = N'^c$ olur. O halde N, M'nin $F_\tau(M)$'de olmayan alt modülleri arasında maksimaldir.

N'nin M'nin $F_\tau(M)$'de olmayan alt modülleri arasında maksimal olduğunu kabul edelim. O halde $M/N \neq t_\tau(M/N) = N^c/N$ ve $M \neq N^c$ elde edilir. $N^c \in \mathcal{P}_\tau(M)$ ve $M \neq N^c$ olduğundan $N^c \notin F_\tau(M)$'dir. N, M'nin $F_\tau(M)$'de olmayan alt modülleri arasında maksimal olduğundan $N = N^c$ ve dolayısıyla N, M'nin τ-pür bir alt modülüdür.

Şimdi N'nin τ-pür alt modüller arasında maksimal olduğunu gösterelim. $X \in \mathcal{P}_\tau(M)$ için $N \subseteq X \subset M$ olsun. $X \neq M$ ve $X \in \mathcal{P}_\tau(M)$ olduğundan $X \notin F_\tau(M)$ olur. N, M'nin $F_\tau(M)$'de olmayan alt modülleri arasında maksimal olduğundan $N = X$ olmalıdır. O halde N, M'nin τ-pür alt modülleri arasında maksimaldir. Teorem 2.5.4'den dolayı N, M'nin τ-maksimal alt modülüdür. □

Teorem 2.5.6 *(Golan 1986) M R-modül, $N \leq M$ olsun ve M'nin her τ-pür öz alt modülü maksimal bir τ-pür öz alt modül tarafından kapsansın.*

N'nin M'nin her maksimal τ-pür öz alt modülü içinde kapsanması ile $M/\,(N+K) \in \mathcal{T}$ iken $M/K \in \mathcal{T}$ olması denktir.

Kanıt. N'nin M'nin her maksimal τ-pür öz alt modülü içinde kapsandığını kabul edelim. $M/(N+K) \in \mathcal{T}$ ve $M/K \notin \mathcal{T}$ olduğunu varsayalım. K^c M'nin bir τ-pür öz alt modülüdür. Hipoteze göre $K^c \subseteq K'$ olacak şekilde bir maksimal τ-pür K' öz alt modülü vardır. Kabulden dolayı $N \subseteq K'$ ve buradan $N+K \subseteq K'$ olur. $M/(N+K) \in \mathcal{T}$ olduğundan $M/K' \in \mathcal{T}$ elde edilir. $M/K' \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$ olur ve böylece $M = K'$ olur ki bu sonuç K''nün öz alt modül olması ile çelişir.

$K \leq M$ alt modülü için $M/(N+K) \in \mathcal{T}$ iken $M/K \in \mathcal{T}$ olduğunu kabul edelim. W, M'nin bir maksimal τ-pür öz alt modülü olsun. $N \nsubseteq W$ olduğunu varsayalım. Teorem 2.5.5'den dolayı $N+W$, M içinde τ-yoğundur. Kabulden dolayı W, M içinde τ-yoğun olur ki bu bir çelişkidir. O halde $N \subseteq W$'dir. □

Tanım 2.5.7 *(Bland 1998) Bir M modülünün tüm τ-maksimal alt modüllerinin kesişimine M'nin τ-radikali denir ve $J_\tau(M)$ ile gösterilir. M modülünün τ-maksimal alt modülü yoksa $J_\tau(M) = M$ kabul edilir.*

$J_\tau(M) = 0$ ise M'ye τ-radikali serbest modül denir.

Önerme 2.5.8 *M R-modülü için $M/J_\tau(M)$ τ-radikali serbest modüldür.*

Kanıt. $N \leq M$ olsun. N'nin M içinde τ-maksimal olması ile $N/J_\tau(M)$'nin $M/J_\tau(M)$ içinde τ-maksimal olmasının denk olduğunu görebiliriz. O halde $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ ailesinin M'nin tüm τ-maksimal alt modüllerini içermesi ile $\{N_\alpha/J_\tau(M)\}_{\alpha\in\Delta}$ailesinin $M/J_\tau(M)$'nin tüm τ-maksimal alt modüllerini içermesi denk olur. Buna göre,
$J_\tau(M/J_\tau(M)) = \cap_{\alpha\in\Delta}(N_\alpha/J_\tau(M)) = (\cap_{\alpha\in\Delta}N_\alpha)/J_\tau(M) = J_\tau(M)/J_\tau(M) = 0$ olur.
□

Örnek 2.5.9 *$\tau = (0, Mod\text{-}R)$ torsion teorisinde $J_\tau(M)$, M'nin Jacobson radikali $J(M)$'ye eşittir.*

Uyarı 2.5.10 *(1) R'nin tüm τ-maksimal sağ ideallerinin kesişimi $J_\tau(R)$ ile gösterilir.*

(2) τ-maksimal alt modüller τ-pür ve τ-pür alt modüllerin kesişimi de τ-pür olduğundan $J_\tau(M) \in \mathcal{P}_\tau(M)$'dir.

(3) $t_\tau(M) = \cap_{N\in\mathcal{P}_\tau(M)} N$ *ve* $J_\tau(M) \in \mathcal{P}_\tau(M)$ *olduğundan* $t_\tau(M) \subseteq J_\tau(M)$*'dir. O halde herhangi bir* τ*-radikali serbest modül* τ*-torsion-free'dir.*

(4) M τ*-kokritikal modül olsun.* 0, M*'nin* τ*-maksimal alt modülüdür. Böylece* $J_\tau(M) = 0$*'dır. O halde her* τ*-kokritikal modül* τ*-radikali serbest modüldür.*

Dar alt modül kavramının genellemesi olarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.5.11 *(Park ve Rim 1994)* M *R-modül,* $N \leq M$ *olsun.* M *nin herhangi bir* L *alt modülü için* $M/(N+L) \in \mathcal{T}$ *iken* $M/L \in \mathcal{T}$ *oluyorsa* N*'ye* M *içinde* τ*-dar alt modül denir ve* $N <<_\tau M$ *ile gösterilir.*

$\tau = (0,\text{Mod-}R)$ torsion teorisinde τ-dar alt modül kavramı ile dar alt modül kavramı aynıdır.

Önerme 2.5.12 *(Park ve Rim 1994)* M *R-modül ve* $A, B \leq M$ *olsun.*

(1) $A \subseteq B$ *ve* B, M *içinde* τ*-dar ise* A M*'nin* τ*-dar alt modülüdür.*

(2) A*'nın* M*'nin* τ*-dar alt modülü olması için gerekli ve yeterli koşul* A^c*'nin* M*'nin* τ*-dar alt modülü olmasıdır.*

Kanıt. (1) Herhangi bir $L \leq M$ için $M/(A+L) \in \mathcal{T}$ olsun. $A \subseteq B$ olduğundan $M/(B+L) \in \mathcal{T}$'dur. $B <<_\tau M$ olduğundan $M/L \in \mathcal{T}$ ve $(A+L)/L \in \mathcal{T}$ elde edilir.

$$0 \longrightarrow (A+L)/L \longrightarrow M/L \longrightarrow M/(A+L) \longrightarrow 0$$

tam dizisinden $M/L \in \mathcal{T}$ olur. Böylece A, M içinde τ-dar alt modüldür.

(2) A'nın M içinde τ-dar alt modül olduğunu kabul edelim ve $L \leq M$ için $M/(A^c+L) \in \mathcal{T}$ olsun. $f : A^c/A \longrightarrow (A^c+L)/(A+L)$,
$f(x+A) = x+(A+L)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmadır. O halde $(A^c+L)/(A+L) \in \mathcal{T}$'dur.

$$0 \longrightarrow (A^c+L)/(A+L) \longrightarrow M/(A+L) \longrightarrow M/(A^c+L) \longrightarrow 0$$

dizisinin tamlığı $M/(A+L) \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir. A, M içinde τ-dar olduğundan $M/L \in \mathcal{T}$ ve böylece A^c, M içinde τ-dardır.

A^c, M içinde τ-dar ise $A \subseteq A^c$ olduğundan ve (1)'den dolayı $A <<_\tau M$ olur. $\square$

Önerme 2.5.13 *M R-modül, $N \leq M$ olsun.*

N'nin M içinde τ-dar alt modül olması ile $N^c + X \in F_\tau(M)$ ve $X \in \mathcal{P}_\tau(M)$ olacak şekilde M'nin X öz alt modülünün olmaması denktir.

Kanıt. $N^c + X \in F_\tau(M)$ ve $X \in \mathcal{P}_\tau(M)$ olacak şekilde M'nin bir X öz alt modülünün olmadığını kabul edelim. M'nin herhangi bir L alt modülü için $M/(N+L) \in \mathcal{T}$ olsun. $N \subseteq N^c$ ve $L \subseteq L^c$ ve $\mathcal{T}$'nun homomorf görüntüler altında kapalı olması kullanılarak $M/(N^c + L^c) \in \mathcal{T}$ elde edilir. Hipotezden dolayı $M = L^c$ olmalıdır. Bu durumda $L^c/L = t_\tau(M/L) = M/L \in \mathcal{T}$ ve böylece $N <<_\tau M$ olur.

$N <<_\tau M$ olduğunu kabul edelim. $X \in \mathcal{P}_\tau(M)$ olmak üzere $M/(N^c + X) \in \mathcal{T}$ olsun. Önerme 2.5.12'den dolayı N^c de M'nin bir τ-dar alt modülüdür. Buradan $M/X \in \mathcal{T}$ olur. $M/X \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$ olduğundan $M = X$ olur ve ispat biter. □

Önerme 2.5.14 *(Bland 1998) M'nin her τ-dar alt modülü $J_\tau(M)$ içinde kapsanır.*

Kanıt. $J_\tau(M) = M$ ise ispat açıktır. O halde $J_\tau(M) \neq M$ olduğunu kabul edelim.

X, M'nin bir τ-maksimal alt modülü ve N, M'nin bir τ-dar alt modülü olsun. X M'nin $F_\tau(M)$'de olmayan alt modülleri arasında maksimaldir. Buna göre $X \subset N^c + X$ olsaydı $N^c + X \in F_\tau(M)$ olurdu ki bu sonuç N'nin M içinde τ-dar olması ile çelişirdi. O halde $X = N^c + X$ yani $N \subseteq N^c \subseteq X$ olur. O halde N, M'nin her τ-maksimal alt modülü içinde kapsanır ve böylece $N \subseteq J_\tau(M)$ elde edilir. □

Teorem 2.5.15 *M modülünün her alt modülü τ-maksimal bir alt modül tarafından kapsanıyor ise $J_\tau(M) = \sum_{L \ll_\tau M} L$'dir.*

Kanıt. $J_\tau(M)$, M'nin her τ-dar alt modülünü kapsadığından $\sum_{L \ll_\tau M} L \subseteq J_\tau(M)$ olduğu açıktır. Ters kapsamayı görmek için $a \in J_\tau(M)$ alalım ve aR'nin τ-dar olduğunu gösterelim: $M/X \in \mathcal{F}$ olmak üzere $M/((aR)^c + X) \in \mathcal{T}$ olsun. $X \neq M$ olduğunu varsayalım. $a \in J_\tau(M)$ olduğundan $aR \subseteq J_\tau(M)$ ve $J_\tau(M)$ τ-pür alt modül olduğundan $(aR)^c \subseteq J_\tau(M)$ dir. N, X'i kapsayan bir τ-maksimal alt modül olsun. O halde $(aR)^c \subseteq J_\tau(M) \subseteq N$ olur ve $(aR)^c + X \subseteq N$ elde edilir. Buradan $M/N \in \mathcal{T}$ olur. Ancak M/N τ-kokritikal olduğundan $M/N \in \mathcal{F}$ ve $M/N \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$ olur. Bu ise N'nin öz alt modül olması ile çelişir. O halde aR, M'nin τ-dar alt modülü ve dolayısıyla $a \in \sum_{L\ \tau-dar} L$ olur. O zaman da $J_\tau(M) \subseteq \sum_{L\ \tau-dar} L$ elde edilerek ispat biter. □

Teorem 2.5.16 *(Bland 1998) M R-modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M τ-radikali serbest modüldür.

(2) $0 \neq m \in M$ için $f : M \to N$, $f(m) \neq 0$ olacak şekilde bir R-homomorfizması ve N τ-kokritikal R-modülü vardır.

(3) $\{N_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, M'nin boştan farklı τ-maksimal alt modüllerinin ailesi olsun. $\varphi : M \to \Pi_{\alpha \in \Delta} M/N_\alpha$ $\varphi(m) = (m + N_\alpha)$ dönüşümü bir monomorfizmadır.

(4) M, τ-kokritikal R-modüllerin dik çarpımı içine gömülebilir.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2) $J(M) = 0$ ve $0 \neq m \in M$ olsun. $m \notin A$ olacak şekilde bir τ-maksimal A alt modülü vardır. M/A τ-kokritikal ve $f : M \to M/A$, $f(x) = x + A$ homomorfizması için $f(m) \neq 0$'dır.

(2) $\Longrightarrow$ (1) $0 \neq m \in M$ için $f : M \to N$, $f(m) \neq 0$ olacak şekilde bir homomorfizma ve N bir τ-kokritikal modül olsun. τ-kokritikal modüllerin sıfırdan farklı alt modülleri de τ-kokritikal olduğundan $f(M)$ de bir τ-kokritikal modüldür. $M/\text{Çek}f \simeq f(M)$ olduğundan Çek$f$ τ-maksimaldir. Böylece $J_\tau(M) \subseteq$Çek$f$ ve $f(m) \neq 0$ olduğundan $m \notin J_\tau(M)$'dir. O halde $J_\tau(M) = 0$'dır.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $m \in$Çekφ olsun. $\varphi(m) = (m + N_\alpha) = 0$ yani her $\alpha \in \Delta$ için $m \in N_\alpha$'dır. Böylece m, M'nin her τ-maksimal alt modülü içinde kapsanır. O halde $m \in J_\tau(M)$'dir. (2) ile (1)'in denkliğinden $J_\tau(M) = 0$'dır.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Açık.

(4) $\Longrightarrow$ (2) $\varphi : M \to \Pi_{\alpha \in \Delta} N_\alpha$, bir R-monomorfizması ve $\{N_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, bir τ-kokritikal R-modüller ailesi olsun. φ bir monomorfizma olduğundan $0 \neq m \in M$ için $\varphi(m) \neq 0$'dır. π_β, kanonik izdüşüm dönüşümü olmak üzere $\pi_{\beta o \varphi}(m) \neq 0$ olacak şekilde bir $\beta \in \Delta$ vardır. Buna göre $\pi_{\beta o \varphi}$ istenen homomorfizmadır. □

M R-modül ve N, M'nin τ-maksimal bir alt modülü olsun. M/N τ-kokritikaldir ve $\pi : M \to M/N$ kanonik epimorfizması elde edilir. Ayrıca Çek$\pi = N$ olur.

O halde $\Delta = \{g \mid g : M \to X$ bir R-epimorfizması ve X bir τ-kokritikal modül$\}$ olmak üzere $J_\tau(M) = \cap$Çek$g$ yazabiliriz.

Önerme 2.5.17 *(Bland 1998) M ve N R-modülleri için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) $f : M \to N$ bir homomorfizma ise $f(J_\tau(M)) \subseteq J_\tau(N)$'dir.

(2) $J_\tau(R)$, R'nin bir idealidir.

(3) $MJ_\tau(R) \subseteq J_\tau(M)$'dir.

Kanıt. (1) $f : M \to N$ homomorfizma olsun.

$\Delta = \{g : N \to X$ bir R-epimorfizması ve X bir τ-kokritikal modül$\}$ olmak üzere $g \in \Delta$ alalım.

i) $gof = 0$ ise $f(J_\tau(M)) \subseteq$Çek$g$'dir.

ii)$gof \neq 0$ kabul edelim. $M/$Çek$\,(gof) \simeq gof(M)$'dir.O halde Çek$\,(gof)$ M'nin bir τ-maksimal alt modülüdür. Çünkü $gof(M)$ τ-kokritikal modüldür.Böylece $J_\tau(M) \subseteq$Çek$\,(gof)$ ve buradan da $f(J_\tau(M)) \subseteq$Çek$g$'dir. O halde $f(J_\tau(M)) \subseteq J_\tau(N)$'dir.

(2) $r \in R$ için $f_r : R \to R$, $f_r(x) = rx$ olarak tanımlansın. (1)'den dolayı $f_r(J_\tau(R)) = rJ_\tau(R) \subseteq J_\tau(R)$'dir. Yani $J_\tau(R)$, R'nin bir sol idealidir. $J_\tau(R)$ aynı zamanda bir sağ ideal olduğundan $J_\tau(R)$, R'nin bir idealidir.

(3) X bir τ-kokritikal modül ve $x \in X$ ise $f : R \to X$, $f(r) = xr$, R-modül homomorfizmasını göz önüne alalım. $f_r(J_\tau(R)) \subseteq J_\tau(X)$'dir. X bir τ-kokritikal modül olduğundan $J_\tau(X) = 0$, böylece $XJ_\tau(R) = 0$'dır. Δ (1)'deki gibi olsun ve $g \in \Delta$ alalım. $g(MJ_\tau(R)) = g(M)J_\tau(R) = XJ_\tau(R) = 0$'dır. O halde her $g \in \Delta$ için $MJ_\tau(R) \subseteq$Çek$g$'dir. Böylece $MJ_\tau(R) \subseteq J_\tau(M)$'dir. □

Sonuç 2.5.18 *(Bland 1998) Her τ-radikali serbest M modülü için $MJ_\tau(R) = 0$'dır.*

Önerme 2.5.19 *(Bland 1998) $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ tüm τ-kokritikal R-modüller ailesi ise $J_\tau(R) = \cap_{\alpha\in\Delta}(0 : N_\alpha)$'dır.*

Kanıt. τ-kokritikal R-modüller τ-radikali serbest olduğundan her τ-kokritikal M modülü için $MJ_\tau(R) = 0$'dır. Buna göre $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, tüm τ-kokritikal R-modüller ailesi olmak üzere $J_\tau(R) \subseteq \cap_{\alpha\in\Delta}(0 : N_\alpha)$'dır.

$r \in \cap_{\alpha\in\Delta}(0 : N_\alpha)$ alalım. K, R'nin bir τ-maksimal sağ ideali ise $(R/K)\,r = 0$'dır. $(1 + K)r = r + K = K$ yani $r \in K$'dır. Böylece $r \in J_\tau(R)$ olur. □

Önerme 2.5.20 *(Bland 1998) $\eta : R \to S$ bir halka epimorfizması ve $F(R)$ R'nin bir Gabriel filtresi olsun. $\eta(F(R)) = \{K \subseteq S : K$ S'nin sağ ideali ve $\eta^{-1}(K) \in F(R)\}$ kümesi S'nin bir Gabriel filtresidir.*

Kanıt. $\eta(F(R))$'nin Gabriel filtesi tanımındaki iki koşulu sağladığını göstereceğiz.

1) $K \in \eta(F(R))$, $y \in S$ olsun. $y = \eta(x)$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. $\eta^{-1}(K) \in F(R)$ olduğundan $(\eta^{-1}(K) : x) \in F(R)$'dir. $(\eta^{-1}(K) : x) = \eta^{-1}((K : y))$ olduğu kolayca görülür ve $\eta^{-1}((K : y)) \in F(R)$ elde edilir. Buradan $(K : y) \in \eta(F(R))$ olur.

2) $J \in \eta(F(R))$, K S'nin bir sağ ideali ve her $y \in J$ için $(K : y) \in \eta(F(R))$ olsun. $\eta^{-1}((K : y)) \in F(R)$'dir. Aynı zamanda $y = \eta(x)$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. O halde $x \in \eta^{-1}(J)$ ve $(\eta^{-1}(K) : x) = \eta^{-1}((K : y)) \in F(R)$ elde edilir. $F(R)$, R'nin bir Gabriel filtresi olduğundan $\eta^{-1}(K) \in F(R)$'dir. Bu da $K \in \eta(F(R))$ olduğunu gösterir. □

$\eta : R \to S$ bir halka epimorfizması olsun. Önerme 2.5.20 kullanılarak S'nin bir Gabriel filtresi elde edilir. S üzerindeki bu Gabriel filtresine karşılık gelen torsion teori $\eta(\tau)$ ile gösterilir. Özel olarak I, R'nin bir ideali ise Önerme 2.5.20'den dolayı R/I'ya karşılık gelen Gabriel filtresi $F(R/I) = \{K/I : K \supseteq I \text{ ve } K \in F(R)\}$ olur.

π, I üzerindeki kanonik epimorfizma ve $I \subseteq J_\tau(R)$ ise $J_{\pi(\tau)}(R/I) = J_\tau(R)/I$ elde edilir. Özel olarak $I = t_\tau(R)$ seçersek $J_{\pi(\tau)}(R/t_\tau(R)) = J_\tau(R)/t_\tau(R)$ olur.

π, $J_\tau(R)$ üzerindeki kanonik epimorfizma ise $R/J_\tau(R)$, $\pi(\tau)$-radikali serbest $(R/J_\tau(R))$-modüldür.

Önerme 2.5.21 *(Bland 1998) $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ bir R-modül ailesi olsun.*
$J_\tau(\oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha) = \oplus_{\alpha\in\Delta} J_\tau(M_\alpha)$'dır.

Kanıt. Her $\alpha \in \Delta$ için $i : M_\alpha \to \oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$ kanonik içerim dönüşümünü göz önüne alalım. Buna göre$J_\tau(M_\alpha) \subseteq J_\tau(\oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha)$'dır. Böylece
$\oplus_{\alpha\in\Delta} J_\tau(M_\alpha) \subseteq J_\tau(\oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha)$ olur.

$f : (\oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha) \,/\, ((\oplus_{\alpha\neq\beta} M_\alpha) \oplus N_\beta) \to M_\beta/N_\beta$,,
$f((m_\alpha) + (\oplus_{\alpha\neq\beta} M_\alpha) \oplus N_\beta) = m_\beta + N_\beta$ olarak tanımlanan dönüşüm bir izomorfizma olacaktır. N_β, M_β'nın bir τ-maksimal alt modülü ise $(\oplus_{\alpha\neq\beta} M_\alpha) \oplus N_\beta$ da $\oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha$'nın bir τ-maksimal alt modülü olur. O halde $(m_\alpha) \in J_\tau(\oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha)$ ise $(m_\alpha) \in (\oplus_{\alpha\neq\beta} M_\alpha) \oplus N_\beta$'dır. Böylece $m_\beta \in N_\beta$'dır. Herhangi bir β için bu sonuç doğru olduğundan $J_\tau(\oplus_{\alpha\in\Delta} M_\alpha) \subseteq \oplus_{\alpha\in\Delta} J_\tau(M_\alpha)$ olur. □

Şimdi de sonlu üreteç kavramının genellemesi üzerine çalışacağız.

Tanım 2.5.22 *(Bland 1998) (1) M R-modül olsun. M'nin sonlu üretilmiş bir τ-yoğun alt modülü varsa M'ye τ-sonlu üretilmiş modül denir.*

(2) $\mathcal{P}_\tau(M) \neq \{M\}$ olacak şekildeki her τ-sonlu üretilmiş R-modülün τ-maksimal alt modülü varsa τ torsion teorisine τ-Max'ı sağlıyor denir.

Örnek 2.5.23 *Sonlu üretilmiş her modül τ-sonlu üretilmiştir. $\tau = (0, Mod\text{-}R)$ torsion teorisinde sonlu üretilmiş modül kavramı ile τ-sonlu üretilmiş modül kavramı aynıdır.*

$Max_\tau(M)$ ve $Max_\tau(R)$ ile sırasıyla M'nin τ-maksimal alt modüller kümesi ve R'nin τ-maksimal sağ idealleri kümesini göstereceğiz.

Önerme 2.5.24 *(Bland 1998) M τ-sonlu üretilmiş bir R-modül ve $N \leq M$ ise M/N de τ-sonlu üretilmiştir.*

Kanıt. M τ-sonlu üretilmiş olsun. X, M'nin sonlu üretilmiş τ-yoğun bir alt modülü ise $(N+X)/N$, M/N'nin sonlu üretilmiş bir τ-yoğun alt modülüdür. Buna göre M/N de τ-sonlu üretilmiştir. □

Önerme 2.5.25 *(Bland 1998) τ, τ-Max'ı sağlayan bir torsion teori, M τ-sonlu üretilmiş R-modül ve $X \leq M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) $X \subseteq J_\tau(M)$

(2) $H \leq M$ için $M/(X+H) \in \mathcal{T}$ olması $M/H \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2) $H = M$ ise ispat açıktır. O halde $M/(X+H) \in \mathcal{T}$ ve $M/H \notin \mathcal{T}$ olduğunu varsayalım. M/H τ-sonlu üretilmiştir ve $t_\tau(M/H) \neq M/H$ olduğundan $\mathcal{P}_\tau(M/H) \neq \{M/H\}$'dır. τ, τ-Max'ı sağladığından $Max_\tau(M/H) \neq \emptyset$'dir. $N/H \in Max_\tau(M/H)$ ise M/N τ-kokritikal dolayısıyla N τ-maksimaldir. Böylece $X \subseteq N$ ve $X+H \subseteq N$'dir. $M/(X+H) \in \mathcal{T}$ olduğundan $M/N \in \mathcal{T}$'dur. Fakat $M/N \neq 0$ ve $M/N \in \mathcal{F}$ olduğundan bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $M/(X+H) \in \mathcal{T}$ iken $M/H \in \mathcal{T}$ olmalıdır.

(2) $\Longrightarrow$ (1) $N \in Max_\tau(M)$ olsun. O halde N, $F_\tau(M)$'de olmayan alt modüller arasında maksimaldir. $X \nsubseteq N$ ise $X+N \in F_\tau(M)$ yani $M/(X+N) \in \mathcal{T}$'dur. Kabulden dolayı $M/N \in \mathcal{T}$'dur. $M/N \neq 0$ ve $M/N \in \mathcal{F}$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $X \subseteq N$'dir. Böylece $X \subseteq J_\tau(M)$'dir. □

Şimdi de modül teorinin çok kullanışlı bir teoremi olan Nakayama Lemma'nın genellemesini verelim.

Teorem 2.5.26 (Genelleştirilmiş Nakayama Lemma) *(Bland 1998)*

τ, τ-Max koşulunu sağlayan bir torsion teori ve I, R'nin bir sağ ideali olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $I \subseteq J_\tau(R)$

(2) τ-sonlu üretilmiş bir M R-modülü için $M/MI \in \mathcal{T}$ olması $M \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir.

(3) M τ-sonlu üretilmiş ve $N \subseteq M$ ise $M/(N+MI) \in \mathcal{T}$ olması $M/N \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (3) $MJ_\tau(R) \subseteq J_\tau(M)$ olduğundan $MI \subseteq J_\tau(M)$'dir. Önerme 2.5.25'den dolayı $M/(N+MI) \in \mathcal{T}$ olması $M/N \in \mathcal{T}$ olmasını gerektirir.

(3) $\Longrightarrow$ (1) $I \nsubseteq J_\tau(R)$ ise $I \nsubseteq X$ olacak şekilde bir $X \in Max_\tau(R)$ vardır. Ayrıca X, $F_\tau(R)$'de olmayan sağ idealler arasında maksimaldir. O halde $X+I \in F_\tau(R)$'dir. $X+I \subseteq X+RI$ olduğundan $X+RI \in F_\tau(R)$ yani
$R/(X+RI) \in \mathcal{T}$ ve kabulden dolayı $R/X \in \mathcal{T}$'dur. Bu ise $X \neq R$ ve $R/X \in \mathcal{F}$ olması ile çelişir. O halde $I \subseteq J_\tau(R)$'dir.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $f : MI/(MI \cap N) \to (M/N)I$, $f(\sum_{i=1}^{q} m_i I_i + (MI \cap N)) = \sum_{i=1}^{q}(m_i + N)I_i$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir monomorfizmadır. Böylece $MI/(MI \cap N) \simeq f(MI/(MI \cap N)) \leq (M/N)I$ olur. Diğer taraftan $M/(N+MI) \in \mathcal{T}$ ise $(M/N)/[(N+MI)/N] \simeq (M/N)/[MI/(MI \cap N)] \in \mathcal{T}$ olur. Ayrıca $(M/N)/[MI/(MI \cap N)] \in \mathcal{T}$ olduğundan $(M/N)/[(M/N)I] \in \mathcal{T}$ olur. Kabulden dolayı $M/N \in \mathcal{T}$'dur.

(3) $\Longrightarrow$ (2) $N = 0$ alınırsa (2) elde edilir. $\square$

3 TORSION TEORİYE GÖRE İNJEKTİF ve PROJEKTİF MODÜLLER

3.1 İnjektif Modüller ve İnjektif Hull

Tanım 3.1.1 *(Bland 1998) M R-modül olsun. $N \in \mathcal{T}$ olan her*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} X \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

tam dizisi ve $h : L \to M$ homomorfizması için $gf = h$ olacak şeilde bir $g : X \to M$ homomorfizması var ise M'ye τ-injektif modül denir.

$\tau = (\text{Mod-}R, 0)$ torsion teorisinde τ-injektif modül kavramı ile injektif modül kavramı aynıdır.

Ön önerme 3.1.2 *(Bland 1998) N τ-injektif modül, $N \leq M$ ve $M/N \in \mathcal{T}$ ise N, M'nin bir dik toplananıdır.*

Kanıt. N, τ-injektif olduğundan $gi = 1_N$ olacak şekilde $g : M \to N$ homomofizması vardır. Buna göre yukarıdaki tam dizi bölünür. O halde $M = N \oplus A$ ve $A \simeq M/N$ olcak şekilde bir $A \leq M$ alt modülü vardır. □

Teorem 3.1.3 *(Crivei 2004) M R-modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M τ-injektiftir.

(2) M, $E(M)$'nin τ-pür alt modülüdür.

(3) R'nin bir τ-yoğun sağ idealinden M'ye giden herhangi bir homomorfizma R'den M'ye giden bir homomorfizmaya genişletilebilir.

(4) Her τ-torsion B modülü için $Ext^1_R(B, M) = 0$'dır.

(5) R'nin bir τ-yoğun sağ ideali I için $Ext^1_R(R/I, M) = 0$'dır.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2) M τ-injektif, $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} M^c \xrightarrow{\pi} M^c/M \longrightarrow 0$ dizisi tam ve $M^c/M = t_\tau(E(M)/M) \in \mathcal{T}$ olduğundan $hi = 1_M$ olacak şekilde bir $h : M^c \to M$ homomorfizması vardır. h'nin örten olduğu da açıktır. $M \trianglelefteq E(M)$ ve

$M \leq M^c \leq E(M)$ olduğundan $M \trianglelefteq M^c$'dir. Ayrıca Ç$ekh \cap M = 0$ olur ve böylece Ç$ekh = 0$ elde edilir. Yani h bir izomorfizmadır. Böylece $M = M^c$ olur.

(2) $\Longrightarrow$ (3) I, R'nin τ-yoğun sağ ideali olmak üzere $g : I \to M$ bir homomorfizma ve $i : I \to R$, $j : M \to E(M)$ içerim dönüşümleri olsun. $E(M)$ injektif olduğundan $hi = jg$ olacak şekilde bir $h : R \to E(M)$ homomorfizması vardır. $a = h(1)$ olsun. $h(I) = hi(I) = jg(I) = g(I)$ olduğundan $I \subseteq (M : a)$ olur ve böylece $(M : a)$, R içinde τ-yoğundur. O halde $R/(M : a) \simeq R(a + M) \in \mathcal{T}$'dur. Ayrıca hipotezden dolayı $R(a + M) \subseteq E(M)/M \in \mathcal{F}$'dir. Buna göre $R(a + M) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$, böylece $a \in M$ $h(R) = aR \subseteq M$'dir. Böylece h, g'yi genişletir.

(3) $\Longrightarrow$ (1) C bir modül, B C'nin τ-yoğun alt modülü ve $g : B \to M$ bir homomorfizma olsun.

$\mathcal{M} = \{(N, \varphi) : B \subseteq N \subseteq C$ ve $\varphi : N \to M$ g'yi genişleten homomorfizma$\}$ kümesini göz önüne alalım. $(B, g) \in \mathcal{M}$ olduğundan $\mathcal{M} \neq \emptyset$'dir. $\mathcal{M}$ kümesini

$$(M_1, \varphi_1) \leq (M_2, \varphi_2) \iff M_1 \subseteq M_2 \text{ } ve \text{ } \varphi_{2|M_1} = \varphi_1$$

ile kısmi sıralayalım. $\mathcal{M}$'nin her zincirinin bir üst sınırı vardır. Zorn Önteoremi'ne göre $\mathcal{M}$'nin bir maksimal (M_0, φ_0) elemanı vardır.

Şimdi $M_0 = C$ olduğunu göstereceğiz. $c \in C \backslash M_0$ alalım. $I = (M_0 : c)$ olsun. $B \subseteq (B : c) \subseteq I$ olduğundan I, R'nin bir τ-yoğun sağ idealidir. Hipoteze göre $\alpha : I \to M$, $\alpha(x) = \varphi_0(xc)$ homomorfizmasını tanımlayalım. O halde α, $\beta : R \to M$ homomorfizmasına genişletilebilir. Bundan yararlanarak $\gamma : M_0 + cR \to M$, $\gamma(m_0 + cr) = \varphi_0(m_0) + \beta(r)$ homomorfizmasını tanımlayalım. γ, φ_0'ın bir genişlemesi olacaktır. Bu ise (M_0, φ_0)'ın maksimalliği ile çelişir. O halde $M_0 = C$'dir.

(2) $\Longrightarrow$ (4) B τ-torsion bir modül olsun.

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E(M) \longrightarrow E(M)/M \longrightarrow 0$$

tam dizisinden $Hom_R(B, E(M)/M) \longrightarrow Ext^1_R(B, M) \longrightarrow Ext^1_R(B, E(M))$ tam dizisi elde edilir. $B \in \mathcal{T}$ ve $E(M)/M \in \mathcal{F}$ olduğundan $Hom_R(B, E(M)/M) = 0$'dır. $E(M)$'nin injektifliğinden dolayı $Ext^1_R(B, E(M)) = 0$'dır. Böylece $Ext^1_R(B, M) = 0$'dır.

(4) $\Longrightarrow$ (5) Açık.

(5) $\Longrightarrow$ (3) Açık. $\square$

Sonuç 3.1.4 *(Bland 1998) M bir R-modül olsun. M'nin τ-injektif olması için gerek ve yeter koşul R'nin her τ-yoğun, geniş sağ ideali E ve her $f \in Hom_R(E, M)$ için f'yi genişleten bir $g \in Hom_R(R, M)$ olmasıdır.*

Kanıt. Yalnızca M'nin τ-injektif olduğunu göstereceğiz. $K \in F_\tau(R)$, $f \in Hom_R(K, M)$ ve J, K'nın R içindeki bir tamlayanı olsun. Önerme 1.0.30'dan dolayı $E = K \oplus J \trianglelefteq R$'dir. Ayrıca $K \subseteq E$ olduğundan $E \in F_\tau(R)$'dir.

$\beta : E \to M$, $g(x + y) = f(x)$ homomorfizmasını tanımlayalım. β, f'yi E'ye genişletir. Hipoteze göre β'yı dolayısıyla f'yi genişleten bir $g \in Hom_R(R, M)$ vardır. □

Önerme 3.1.5 *(Golan 1986) τ-injektif modüller sınıfı dik çarpımlar, dik toplananlar, modül genişlemeleri ve τ-pür alt modüller altında kapalıdır.*

Kanıt. τ-injektif modüller sınıfının dik çarpımlar ve dik toplananlar altında kapalı olduğu injektif modüller sınıfının dik çarpımlar ve dik toplananlar altında kapalı olmasının ispatı tekrarlanarak yapılabilir. Biz modül genişlemeleri ve τ-pür altmodüller altında kapalı olduğunu göstereceğiz.

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

bir tam dizi, M' ve M'' τ-injektif modüller olsun. N τ-torsion bir modül olmak üzere yukarıdaki tam diziden

$$0 = Ext_R^1(N, M') \longrightarrow Ext_R^1(N, M) \longrightarrow Ext_R^1(N, M'') = 0$$

tam dizisi elde edilir. Buna göre $Ext_R^1(N, M) = 0$'dır. Böylece M τ-injektif modül olur.

M τ-injektif bir modül ve N, M'nin τ-pür bir alt modülü olsun.M τ-injektif olduğundan $E(M)/M \in \mathcal{F}$'dir.

$$0 \longrightarrow M/N \longrightarrow E(M)/N \longrightarrow E(M)/M \longrightarrow 0$$

tam dizisinden $E(M)/N \in \mathcal{F}$ olur. O halde $E(N)/N \subseteq E(M)/N$ olması kullanılarak $E(N)/N \in \mathcal{F}$ elde edilir. Bu da N'nin τ-injektif olduğunu gösterir. □

Tanım 3.1.6 *(Bland 1998) M R-modül olsun. Eğer N τ-injektif modül, $f : M \to N$ R-monomorfizma ve $f(M)$, N'nin τ-yoğun ve geniş alt modülü ise (f, N) çiftine veya N'ye M'nin τ-injektif hull'ü denir.*

$\tau = (\text{Mod-}R, 0)$ torsion teorisinde τ-injektif hull kavramı ile injektif hull kavramı aynıdır.

Teorem 3.1.7 *(Bland 1998) Her M modülünün bir τ-injektif hull'ü vardır ve bu hull izomofizma farkı ile tektir.*

Kanıt. $E_\tau(M) = \{m \in E(M) \mid (M : m) \in F_\tau(R)\}$'nin τ-injektif olduğunu göstereceğiz. $E_\tau(M)$, $E(M)$'nin M'yi geniş olarak kapsayan bir alt modülüdür.

$m + M \in E_\tau(M)/M$ ise $(M : m) = (0 : m + M) \in F_\tau(R)$'dir. Buna göre $E_\tau(M)/M \in \mathcal{T}$ yani $M \in F_\tau(E_\tau(M))$'dir.

Şimdi $E(M)/E_\tau(M) \in \mathcal{F}$ olduğunu gösterelim. $m + E_\tau(M) \in t_\tau(E(M)/E_\tau(M))$ alalım. O zaman $(0 : m + E_\tau(M)) = (E_\tau(M) : m) \in F_\tau(R)$'dir. $r \in (E_\tau(M) : m)$ için $mr \in E_\tau(M)$'dir. Buna göre $(M : mr) = ((M : m) : r) \in F_\tau(R)$'dir. Gabriel filtresi tanımından, $(M : m) \in F_\tau(R)$ olur. Böylece $m \in E_\tau(M)$ yani $m + E_\tau(M) = 0$'dır. O halde $E(M)/E_\tau(M) \in \mathcal{F}$'dir.

N bir R-modül, $L \in F_\tau(N)$, $f : L \to E_\tau(M)$ bir homomorfizma olsun. $E(M)$'nin injektif olmasından dolayı $g : N \to E(M)$ homomorfizması vardır. Şimdi $h : N/L \to E(M)/E_\tau(M)$, $h(x + L) = g(x) + E_\tau(M)$ olarak tanımlayalım. O zaman aşağıdaki diagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N/L & \longrightarrow & 0 \\ & & f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E_\tau(M) & \longrightarrow & E(M) & \longrightarrow & E(M)/E_\tau(M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Diğer taraftan $N/L \in \mathcal{T}$ ve $E(M)/E_\tau(M) \in \mathcal{F}$ olduğundan $h = 0$ olur. O halde $g(N) \subseteq E_\tau(M)$'dir yani g, f'yi genişletir. Bu yüzden $E_\tau(M)$ τ-injektiftir.

Sonuç olarak; $\varphi : M \to E_\tau(M)$ kanonik içerim dönüşümü M'nin bir τ-injektif hull'üdür.

Şimdi injektif hull'ün tek olduğunu gösterelim.

$\varphi : M \to E_\tau(M)$ ve $\varphi^* : M \to E_\tau(M)^*$, M'nin iki τ-injektif hull'ü olsun.

$$\begin{array}{ccccc} & & E_\tau(M)^* & & \\ & & \varphi^* \uparrow & \nwarrow \psi & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\varphi} & E_\tau(M) \end{array}$$

O halde $E_\tau(M)^*$ τ-injektif olduğundan $\varphi^* = \varphi\psi$ olacak şekilde bir $\psi : E_\tau(M) \to E_\tau(M)^*$ homomorfizması vardır.

Şimdi ψ homomorfizmasının birebir olduğunu görelim. $\varphi(m) \in \varphi(M) \cap \text{Ç}ek\psi$ alalım. $\psi o \varphi(m) = \varphi^*(m) = 0$'dır. φ^* birebir olduğundan $m = 0$'dır. Bu durumda $\varphi(M) \cap \text{Ç}ek\psi = 0$ olur. $\varphi(M) \trianglelefteq E_\tau(M)$ olduğundan $\text{Ç}ek\psi = 0$ yani ψ bir monomorfizmadır. O halde

$$0 \longrightarrow \psi(E_\tau(M)) \longrightarrow E_\tau(M)^* \longrightarrow E_\tau(M)^*/\psi(E_\tau(M)) \longrightarrow 0$$

tam dizisini oluşturabiliriz. $E_\tau(M) \simeq \psi(E_\tau(M))$ olduğundan $\psi(E_\tau(M))$ τ-injektiftir. $E_\tau(M)^*/\psi(E_\tau(M)) \in \mathcal{T}$ olduğundan $E_\tau(M)^* = \psi(E_\tau(M)) \oplus X$ ve $X \simeq E_\tau(M)^*/\psi(E_\tau(M))$ olacak şekilde bir $X \leq E_\tau(M)^*$ alt modülü vardır. Ayrıca $\varphi^*(M) = \psi o \varphi(M) = \psi(\varphi(M)) \subseteq \psi(E_\tau(M))$ ve $\psi(E_\tau(M)) \cap X = 0$ olduğundan $\varphi^*(M) \cap X = 0$ olur. $\varphi^*(M) \trianglelefteq E_\tau(M)^*$ olduğundan da $X = 0$'dır. Böylece $E_\tau(M)^* = \psi(E_\tau(M))$ yani ψ örtendir. Sonuç olarak ψ bir izomorfizmadır. □

Uyarı 3.1.8 *Yukarıdaki ispata ve $M^c_{E(M)}$ tanımına göre $M^c_{E(M)} = E_\tau(M)$'dir. Böylece $E_\tau(M)/M = M^c_{E(M)}/M = t_\tau(E(M)/M)$ olur.*

Önerme 3.1.9 *(Bland 1998) $E_\tau(M)$, M'yi kapsayan minimal τ-injektif modüldür.*

Kanıt. N, M'yi kapsayan τ-injektif bir modül ve $N \subseteq E_\tau(M)$ olsun. j, kanonik içerim dönüşümü olmak üzere, $0 \longrightarrow N \xrightarrow{j} E_\tau(M) \longrightarrow E_\tau(M)/N \longrightarrow 0$ tam dizisini göz önüne alalım. N τ-injektif ve $E_\tau(M)/N \in \mathcal{T}$ olduğundan bu dizi bölünür. Buna göre $foj = 1_N$ olacak şekilde bir $f : E_\tau(M) \to N$, homomorfizması vardır ve $E_\tau(M) = N \oplus \text{Ç}ekf$'dir. $N \trianglelefteq E_\tau(M)$ olduğundan $\text{Ç}ekf = 0$'dır. Böylece $N = E_\tau(M)$'dir. □

σ ve τ, Mod-R üzerinde torsion teoriler, $\sigma \leq \tau$ olsun. Aşağıdaki diagram değişmeli olacak şekilde bir $\psi : E_\sigma(M) \to E_\tau(M)$, R-homomorfizması vardır.

$$\begin{array}{ccc} & & E_\sigma(M) \\ & \varphi_\sigma \nearrow & \psi \downarrow \\ M & \xrightarrow{\varphi_\tau} & E_\tau(M) \end{array}$$

Böylece M'nin torsion teorideki injektif hull'leri torsion teorilerin kısmi sıralaması kullanılarak kısmi sıralanabilir.

Önerme 3.1.10 *(Crivei 2004) M R-modül olsun. M τ-torsion (sırayla τ-torsion-free, τ-kokritikal) ise $E_\tau(M)$ de aynı özelliğe sahiptir.*

Kanıt. M τ-torsion olsun.

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_\tau(M) \longrightarrow E_\tau(M)/M \longrightarrow 0$$

tam dizisinden $E_\tau(M) \in \mathcal{T}$'dur.

M, τ-torsion-free olsun. $\mathcal{F}$ injektif hull'ler altında kapalı olduğundan $E(M) \in \mathcal{F}$'dir. $E_\tau(M) \subseteq E(M)$ olduğundan $E_\tau(M) \in \mathcal{F}$'dir.

M τ-kokritikal olsun. $E(M) \in \mathcal{F}$ olur çünkü τ kalıtsaldır. O halde $M^c_{E(M)} = E_\tau(M)$'nin τ-kokritikal olması ile M'nin τ-kokritikal olması denktir. Buna göre $E_\tau(M)$ de τ-kokritikal'dir. $\square$

Önerme 3.1.11 *(Crivei 2004) M sıfırdan farklı bir modül ve $B \trianglelefteq M$ olsun.*

B'nin M içinde τ-yoğun olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $E_\tau(M) = E_\tau(B)$ olmasıdır.

Kanıt. $M/B \in \mathcal{T}$ kabul edelim. $B \trianglelefteq M$ olduğundan $E(B) = E(M)$'dır. Diğer yandan $M/B = t_\tau(M/B) \subseteq t_\tau(E(M)/B) = t_\tau(E(B)/B) = E_\tau(B)/B$ olduğundan $M \subseteq E_\tau(B)$'dir. Buradan $E_\tau(M) \subseteq E_\tau(B)$ ve böylece $E_\tau(M) = E_\tau(B)$'dir.

$E_\tau(M) = E_\tau(B)$ kabul edelim. $M/B \subseteq E_\tau(M)/B = E_\tau(B)/B \in \mathcal{T}$ olduğundan $M/B \in \mathcal{T}$ olur. $\square$

3.2 Bölümlü Modüller ve Hull

Bu bölümde injektif modüllerin torsion teorideki bir başka genellemesi olan τ-bölümlü modülleri inceleyeceğiz.

Tanım 3.2.1 *(Golan 1986) M R-modül ve N, M'nin τ-pür alt modülü olsun. $M/(N \oplus L) \in \mathcal{F}$ olacak şekilde bir $0 \neq L \leq M$ alt modülü yoksa N'ye M'nin τ-pürce geniş alt modülü denir.*

$\tau = (0,\text{Mod-}R)$ torsion teorisinde τ-pürce geniş alt modül kavramı ile geniş alt modül kavramı aynıdır.

Ön önerme 3.2.2 *(Golan 1986) M R-modül, $N \leq M$ ve $\{M_i : i \in \Omega\}$, her $i \in \Omega$ için N, M_i içinde τ-pürce geniş olacak şekilde M'nin alt modüller zinciri olsun. N, $\cup_{i\in\Omega} M_i$ içinde de τ-pürce geniş olur.*

Kanıt. $T = \cup_{i\in\Omega} M_i$ olsun. $N \cap L = 0$ ve $T/(N \oplus L) \in \mathcal{F}$ olacak şekilde bir $L \leq T$ bulunduğunu varsayalım. $i \in \Omega$ için $M_i \cap (L \oplus N) = N \oplus (M_i \cap L)$ kullanılarak $M_i/(N \oplus (M_i \cap L)) = M_i/((N \oplus L) \cap M_i) \simeq (M_i + L + N)/(L \oplus N) \in \mathcal{F}$ elde edilir. Her $i \in \Omega$ için N, M_i içinde τ-pürce geniş olduğundan $M_i \cap L = 0$ olmak zorundadır. Buna göre $M = \cup_{i\in\Omega} M_i$ ve $L \leq M$ olduğundan $L = 0$ olmalıdır. $\square$

Tanım 3.2.3 *(Golan 1986) Bir M modülünün τ-pür alt modüllerinin bir artan zincirinin birleşimi yine τ-pür oluyorsa τ'ya pür inductive torsion teori denir.*

M R-modül ve τ pür inductive bir torsion teori ise Zorn Önteoremi'ne göre M'nin τ-pür alt modüllerinden oluşan her kümenin bir maksimal elemanı vardır.

Tanım 3.2.4 *(Golan 1986) M R-modül olsun. $N \in \mathcal{F}$ olan her*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} X \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

tam dizisi ve $h : L \to M$ homomorfizması için $gf = h$ olacak şekilde bir $g : X \to M$ homomorfizması varsa M'ye τ-bölümlü modül denir.

$\tau = (0,\text{Mod-}R)$ torsion teorisinde τ-bölümlü modül kavramı ile injektif modül kavramı aynıdır.

Önerme 3.2.5 *σ ve τ Mod-R üzerinde iki torsion teori ve $\sigma \leq \tau$ olsun. M modülü σ-bölümlü ise τ-bölümlüdür.*

Kanıt. Aşağıdaki şekildeki gibi alt satırı tam dizi ve $C \in \mathcal{F}_\tau$ olan bir diagramı göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M & & & & & & \\ & & f\uparrow & \nwarrow h & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{g} & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

O halde $\sigma \leq \tau$ olduğundan $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$'dır. Buna göre $C \in \mathcal{F}_\sigma$'dır. M σ-bölümlü olduğundan $hg = f$ olacak şekilde bir $h : B \to M$ homomorfizması vardır. Böylece M τ-bölümlüdür. $\square$

Teorem 3.2.6 *(Golan 1986) Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M τ-bölümlüdür.

(2) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$ dizisi tam ve $0 \longrightarrow t_\tau(A) \xrightarrow{\alpha_{|t_\tau(A)}} t_\tau(N) \xrightarrow{\beta_{|t_\tau(N)}} t_\tau(B) \longrightarrow 0$ dizisi bölünür ise A'den M'ye giden her R-homomorfizması N'den M'ye giden bir R-homomorfizmasına genişletilebilir.

(3) Her τ-torsion-free R-modül N için $Ext^1_R(N, M) = 0$'dır.

(4) M bir N modülünün τ-pür alt modülü ise M, N'nin dik toplananıdır.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$ dizisi tam ve $0 \longrightarrow t_\tau(A) \xrightarrow{\alpha} t_\tau(N) \xrightarrow{\beta} t_\tau(B) \longrightarrow 0$ dizisinin bölünür olduğunu kabul edelim. O halde $\theta : t_\tau(B) \to t_\tau(N)$, $\beta\theta = 1_{t_\tau(B)}$ ve $t_\tau(N) = \alpha(t_\tau(A)) \oplus \theta(t_\tau(B))$ olacak şekilde bir θ homomorfizması vardır. $\alpha(A) \cap \theta(t_\tau(B)) \in \mathcal{T}$ ve α birebir olduğundan $\alpha(A) \cap \theta(t_\tau(B)) = 0$ elde edilir.

Şimdi $\beta^{-1}(t_\tau(B)) = \alpha(A) \oplus \theta(t_\tau(B))$ olduğunu gösterelim.

$x \in \beta^{-1}(t_\tau(B))$ alalım. $\beta(x - \theta\beta(x)) = \beta(x) - \beta\theta\beta(x) = \beta(x) - \beta(x) = 0$ yani $x - \theta\beta(x) \in$Çekβ = Gör$\alpha = \alpha(A)$'dır. Buradan $x \in \alpha(A) \oplus \theta(t_\tau(B))$ elde edilir. Böylece $\beta^{-1}(t_\tau(B)) \subseteq \alpha(A) \oplus \theta(t_\tau(B))$ olur.

$x \in \alpha(A) \oplus \theta(t_\tau(B))$ alalım. $x = \alpha(a) + \theta(b)$ olacak şekilde $a \in A$, $b \in t_\tau(B)$ vardır.

$\beta(x) = \beta\alpha(a) + \beta\theta(b) = b \in t_\tau(B)$ olduğundan $x \in \beta^{-1}(t_\tau(B))$ elde edilir. O halde $\beta^{-1}(t_\tau(B)) = \alpha(A) \oplus \theta(t_\tau(B)) \simeq A \oplus \theta(t_\tau(B))$ olur.

$\varphi \in Hom_R(A, M)$ olsun. $\psi : \beta^{-1}(t_\tau(B)) \to M$, $x \in A$, $y \in \theta(t_\tau(B))$ olmak üzere $\psi(x + y) = \varphi(x)$ homomorfizmasını tanımlayalım. Buradan $\psi\alpha = \varphi$ olur.

$$
(*) \qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & M & & \\
 & \varphi & \uparrow & \nwarrow \psi & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \beta^{-1}(t_\tau(B))
\end{array}
$$

Şimdi $N/\left(\beta^{-1}(t_\tau(B))\right) \simeq B/\left(t_\tau(B)\right)$ olduğunu gösterelim.
$h : B \simeq N/A \to N/\left(A \oplus \theta(t_\tau(B))\right)$, $h(\overline{n}) = \overline{n}$ homomorfizmasını tanımlayalım. Çe$kh \simeq \theta(t_\tau(B)) \simeq t_\tau(B)$ ve h örten olduğundan $N/\left(A \oplus \theta(t_\tau(B))\right) \in \mathcal{F}$ olur. O halde $B/t_\tau(B) \simeq N/\left(A \oplus \theta(t_\tau(B))\right) \simeq N/\beta^{-1}(t_\tau(B)) \in \mathcal{F}$'dir. M τ-bölümlü olduğundan $\psi' i = \psi$ olacak şekilde bir $\psi' : N \to M$ homomorfizması vardır.

$$
(**) \qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & M & & & & & & \\
 & & \psi \uparrow & & \nwarrow \psi' & & & & \\
0 & \longrightarrow & \beta^{-1}(t_\tau(B)) & \xrightarrow{i} & N & \longrightarrow & N/\beta^{-1}(t_\tau(B)) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

$(*)$ ve $(**)$ diagramlarını birleştirirsek $\psi' i = \varphi$ olduğu görülür. Böylece (2) elde edilir.

(2) $\Longrightarrow$ (1) L, N'nin τ-pür alt modülü olsun.

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow N/L \longrightarrow 0$$

tam dizisinden kısıtlamalar yardımıyla

$$0 \longrightarrow t_\tau(L) \longrightarrow t_\tau(N) \longrightarrow t_\tau(N/L) \longrightarrow 0$$

tam dizisi elde edilir. $t_\tau(N/L) = 0$ olduğundan $t_\tau(N) \simeq t_\tau(L)$ olur. (2)'den dolayı L'den M'ye giden her homomorfizma N'den M'ye giden bir homomorfizmaya genişletilebilir. Böylece M τ-bölümlü modüldür.

(1) $\Longrightarrow$ (3) M, τ-bölümlü ve N bir τ-torsion-free modül olsun. F serbest modül olmak üzere,

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

tam dizisini göz önüne alalım. Bu tam diziden

$$0 \longrightarrow Hom_R(N,M) \xrightarrow{g_*} Hom_R(F,M) \xrightarrow{f_*} Hom_R(K,M) \longrightarrow Ext^1_R(N,M) \longrightarrow ...$$

elde edilir. Kabulden dolayı f_* örtendir. Buna göre $Ext^1_R(N,M) = 0$ olmalıdır.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Tanımlardan açıktır.

(1) $\Longrightarrow$ (4) $M/N \in \mathcal{F}$ ve M τ-bölümlü olduğundan $hi = 1_M$ olacak şekilde bir $h : N \to M$ homomorfizması vardır. Buradan M N'nin bir dik toplananıdır.

(4) $\Longrightarrow$ (1) A bir R-modül, $N \leq A$ ve $A/N \in \mathcal{F}$ olmak üzere aşağıdaki diagram verilsin.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M & & & & & & \\ & & u' \uparrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & A & \longrightarrow & A/N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\alpha} & A \\ u' \downarrow & & \\ M & & \end{array}$ diagramının push-out'u $\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\alpha} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow w \\ M & \xrightarrow{v} & L \end{array}$ olsun.

Teorem 1.0.20'den dolayı α birebir olduğundan v de birebirdir. $L'' = L/G\ddot{o}rv$ olmak üzere, $0 \longrightarrow M \xrightarrow{v} L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0$ tam dizisini göz önüne alalım. Teorem 1.0.20'den dolayı $L'' = L/M \simeq L/G\ddot{o}rv \simeq A/N \in \mathcal{F}$'dir. Kabulden dolayı M, L'nin dik toplananıdır. Buradan $pv = 1_M$ olacak şekilde bir $p \in Hom_R(L,M)$ vardır. O halde $u\alpha = (pw)\,\alpha = pvu' = u'$ olur ve M'nin τ-bölümlü olduğu görülür. □

Teorem 3.2.7 *(Golan 1986) τ pür inductive bir torsion teori ve M R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M τ-bölümlüdür.

(2) M'nin öyle bir τ-pürce geniş N alt modülü vardır ki N, M'yi τ-pür olarak kesin kapsayan hiçbir R-modül içinde τ-pürce geniş değildir.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2) $0 \neq L/M \in \mathcal{F}$ olsun. Teorem 3.2.6'dan dolayı $L \simeq M \oplus A$ olacak şekilde bir $A \leq L$ vardır. $L/\left(M \oplus A\right) \in \mathcal{F}$ olduğundan M, L içinde τ-pürce geniş olamaz.

(2) $\Longrightarrow$ (1) $0 \neq K/M \in \mathcal{F}$ olsun. M'nin K'nın dik toplananı olduğunu göstermek yetecektir.

$$0 \longrightarrow M/N \longrightarrow K/N \longrightarrow K/M \longrightarrow 0$$

tam dizisine göre $K/N \in \mathcal{F}$'dir. Kabulden dolayı N, K içinde τ-pürce geniş olamaz. O halde $K/(N \oplus L) \in \mathcal{F}$ olacak şekilde bir $0 \neq L \leq K$ vardır. $M/[N \oplus (L \cap M))] = M/[M \cap (N \oplus L)] \subseteq K/[M \cap (N \oplus L)]$ olur. Ayrıca $K/[M \cap (N \oplus L)]$'yi $(K/M) \oplus (K/(N \oplus L))$ τ-torsion-free modülünün alt modülü olarak düşünebiliriz. Böylece $M/[N \oplus (L \cap M))] \in \mathcal{F}$ elde ederiz. N, M içinde τ-pürce geniş olduğundan $L \cap M = 0$'dır.

$\Psi = \{T \leq K : N \cap T = 0$ ve $K/(N \oplus T) \in \mathcal{F}\}$ kümesini oluşturalım. $L \in \Psi$ olduğundan $\Psi \neq \emptyset$'dir. Ψ içinde $\{N_i\}_{i \in I}$ zincirini alalım. O halde $\{N \oplus N_i\}_{i \in I}$ τ-pür alt modüllerin bir artan zinciridir. Ayrıca $N \cap (\cup_{i \in I} N_i) = \cup_{i \in I}(N \cap N_i) = 0$ olduğu açıktır. τ pür inductive olduğundan $\cup_{i \in I}(N \oplus N_i) = (N \oplus (\cup_{i \in I} N_i)) \in \mathcal{P}_\tau(M)$'dir. Yani $\cup_{i \in I} N_i \in \Psi$'dir. Zorn Önteoremi'ne göre Ψ'nin bir maksimal elemanı vardır. N_0'ı Ψ'nin bir maksimal elemanı olarak alalım. Daha önce L için yapılan işlemler tekrarlanarak $N_0 \cap M = 0$ bulunur. Ayrıca $(N \oplus N_0)/N_0$ K/N_0 içinde τ-pürce geniştir ve $M \simeq (M \oplus N_0)/N_0 \subseteq K/N_0$'dır. Kabulden dolayı $M \oplus N_0 = K$ olmak zorundadır. Böylece M kendisini τ-pür olarak kapsayan herhangi bir modülün dik toplananıdır. Teorem 3.2.6'ya göre bu sonuç M'nin τ-bölümlü olması demektir. □

Tanım 3.2.8 *(Golan 1986) N, M'nin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir alt modülü ise M'ye N'nin τ-bölümlü hull'ü denir.*

(1) N, M içinde τ-pürce geniştir ve N, M'yi kesin kapsayan bir R-modül içinde τ-pürce geniş değildir.

(2) M τ-bölümlüdür ve M'nin N'yi kapsayan τ-bölümlü bir öz alt modülü yoktur.

$\tau = (0,\text{Mod-}R)$ torsion teorisinde τ-bölümlü hull kavramı ile injektif hull kavramı aynıdır.

Teorem 3.2.9 *(Golan 1986) τ pür inductive bir torsion teori ve N, τ-bölümlü M modülünün τ-pür bir alt modülü olsun. N'nin M içinde kapsanan bir τ-bölümlü hull'ü vardır.*

Kanıt. $\mathcal{A} = \{K \leq M : N$ K'nın τ-pürce geniş alt modülü$\}$ kümesini oluşturalım. $N \in \mathcal{A}$ olduğundan $\mathcal{A} \neq \emptyset$'dir. $\mathcal{A}$ kümelerdeki kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı bir kümedir. Ön önerme 3.2.2'ye göre $\mathcal{A}$ içindeki her zincirin bir üst sınırı vardır. Zorn Önteoremi'ne göre $\mathcal{A}$'nın bir maksimal elemanı N_0 vardır. $0 \neq L/N_0 \in \mathcal{F}$ ve N, L içinde τ-pürce geniş olsun. M τ-bölümlü olduğundan $i : N_0 \to M$ içerim dönüşümünü L'ye genişleten bir $\alpha : L \to M$, R-homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd}
 & M & & & \\
0 \arrow[r] & N_0 \arrow[u, "i"] \arrow[r] & L \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[r] & L/N_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ayrıca Çek$\alpha \cap N = 0$ ve $L/\left(\text{Çek}\alpha \oplus N\right) \simeq \alpha(L)/\alpha(N) = \alpha(L)/N \subseteq M/N \in \mathcal{F}$'dir. N, L içinde τ-pürce geniş olduğundan Çek$\alpha = 0$ olur. α, N_0 üzerindeki içerim dönüşümünü genişlettiği için $N_0 \subseteq \alpha(L)$ ve N, $\alpha(L)$ içinde τ-pürce geniştir. N_0'ın maksimalliğinden dolayı $\alpha(L) = N_0$ olmalıdır. Bu ise N_0'ın L içinde öz alt modül olması ile çelişir. O halde N_0, τ-bölümlü hull tanımındaki (1) özelliğini sağlar. Bu özellikten ve Teorem 3.2.7'den dolayı N_0'ın (2) özelliğini sağladığı da görülür. Böylece N_0, N'nin M içindeki bir τ-bölümlü hull'üdür. $\square$

Teorem 3.2.10 *(Golan 1986) τ pür inductive bir torsion teori olsun. M R-modülünün τ-bölümlü hull'ü varsa bu hull izomorfizma farkı ile tektir.*

Kanıt. M R-modül, E ve E' M'nin iki τ-bölümlü hull'ü olsun.

$$\begin{tikzcd}
 & E & & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[u] \arrow[r] & E' \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[r] & E'/M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Yukarıdaki diagramı göz önüne alalım. E τ-bölümlü olduğundan $\alpha \in Hom_R(E', E)$ vardır. Bir önceki önermenin ispatında olduğu gibi α bir monomorfizmadır. $E' \simeq \alpha(E') \subseteq E$ olduğundan $\alpha(E')$, E'nin M'yi kesin kapsayan bir τ-bölümlü alt modülüdür. τ-bölümlü hull tanımına göre $E = \alpha(E')$, yani α örtendir. Böylece $E \simeq E'$ olur. $\square$

Önerme 3.2.11 *τ pür inductive torsion teori ve M R-modül olsun. M'nin σ-bölümlü hull'ünün E_σ olduğunu kabul edelim. $\sigma \leq \tau$ ve M, E_σ içinde τ-pür ise M'nin τ-bölümlü hull'ü vardır.*

Kanıt. E_σ σ-bölümlü ve $\sigma \leq \tau$ olduğundan E_σ τ-bölümlü modüldür. Buna göre M'nin E_σ içinde kapsanan bir τ-bölümlü hull'ü vardır. □

3.3 Projektif Modüller ve Projektif Örtü

Tanım 3.3.1 *(Bland 1998) M R-modül olsun. $L \in \mathcal{F}$ olan her*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow X \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

tam dizisi ve $h : M \to N$ homomorfizması için $fg = h$ olacak şekilde bir $g : M \to X$ homomorfizması var ise M'ye τ-projektif modül denir.

$\tau = (0,\text{Mod-}R)$ torsion teorisinde τ-projektif modül kavramı ile projektif modül kavramı aynıdır.

Önerme 3.3.2 *(Bland 1998) M R-modül, $N \leq M$ ve $N \in \mathcal{F}$ olsun. M/N τ-projektif ise $M \simeq N \oplus M/N$'dir.*

Kanıt.

$$\begin{tikzcd} & & & M/N \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "1_{M/N}"] & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "\pi"] & M/N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$N \in \mathcal{F}$ ve M/N τ-projektif olduğundan $\pi g = 1_{M/N}$ olacak şekilde bir $g : M/N \to M$ homomorfizması vardır. O halde yukarıdaki tam dizi bölünür yani $M \simeq N \oplus M/N$ olur. □

Tanım 3.3.3 *(Bland 1998) (1) M R-modül, $f : M \to N$ bir R-homomorfizması olsun. $\text{Çek} f \ll M$ ve $\text{Çek} f \in \mathcal{F}$ ise f'ye τ-minimal denir.*

(2) M R-modül olsun. Eğer $P_\tau(M)$ τ-projektif R-modül, $\varphi : P_\tau(M) \to M$ τ-minimal epimorfizma ise $(P_\tau(M), \varphi)$ çiftine veya φ'ye M'nin τ-projektif örtüsü denir.

τ = (0,Mod-R) torsion teorisinde τ-projektif örtü kavramı ile projektif örtü kavramı aynıdır.

Her modülün τ-projektif örtüsünün olmayabilir. Örneğin τ = (0,Mod-R) torsion teorisinde $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$-modülünün τ-projektif örtüsü yoktur.

Önerme 3.3.4 *(Bland 1998) $f : M \to N$ bir τ-minimal epimorfizm olsun. N τ-projektif iken f bir izomorfizmadır.*

Kanıt. K =Çek$f \in \mathcal{F}$ olduğundan $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ tam dizisi N τ-projektif iken bölünür. Buna göre $M = K \oplus M'$, $M' \simeq N$ olacak şekilde $M' \leq M$ vardır. $K \ll M$ olduğundan $M = M'$ böylece $K = 0$ olmalıdır. □

Önerme 3.3.5 *(Bland 1998) $f : M \to N$ bir epimorfizma, M τ-projektif bir modül ve K =Çek$f$ olsun. Bu durumda $K \in \mathcal{T}$ iken N τ-projektif modüldür.*

Kanıt. $f : M \to N$ bir epimorfizma, M τ-projektif bir modül ve K =Çek$f \in \mathcal{T}$ olsun. L, X R-modüller ve Çek$h \in \mathcal{F}$ olmak üzere aşağıdaki diagramı göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \downarrow f & & \\ & & N & & \\ & & \downarrow g & & \\ L & \xrightarrow{h} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

M τ-projektif olduğundan $ho\varphi = gof$ olacak şekilde bir $\varphi : M \to L$ homomorfizması vardır. O halde $(ho\varphi)(K) = (gof)(K) = g(f(K)) = 0$ olur ve $\varphi(K) \subseteq$Çek$h$ elde edilir. $K \in \mathcal{T}$ olduğundan $\varphi(K) \subseteq t_\tau$(Çek$h$) $= 0$, yani $K \subseteq$Çekφ'dir. Buradan $\varphi^* : M/K \to L$, $\varphi^*(m + K) = \varphi(m)$, homomorfizması tanımlanabilir. $N \simeq M/K$ olduğundan $\varphi^* : N \to L$ olarak kabul edilebilir. Böylece N τ-projektif bir modüldür.
□

Teorem 3.3.6 *(Bland 1998) M modülünün iki τ-projektif örtüsü varsa bu τ-projektif örtüler izomorftur.*

Kanıt. $\varphi : P_\tau(M) \to M$ ve $\varphi^* : P_\tau(M)^* \to M$, M'nin iki τ-projektif örtüsü olsun. Aşağıdaki diagramı göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & P_\tau(M) & & \\ & & & & & & \downarrow \varphi & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ç}ek\varphi^* & \xrightarrow{i} & P_\tau(M)^* & \xrightarrow{\varphi^*} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$P_\tau(M)$, M'nin τ-projektif örtüsü olduğundan $\varphi^* o \psi = \varphi$ olacak şekilde bir $\psi : P_\tau(M) \to P_\tau(M)^*$ homomorfizması vardır. Buradan $P_\tau(M)^* = Im\psi + \text{Ç}ek\varphi^*$ olur. Ç$ek\varphi^* \ll P_\tau(M)^*$ olduğundan $P_\tau(M)^* = Im\psi$, yani ψ örtendir.

$x \in$Ç$ek\psi$ alalım. $\psi(x) = 0$, $\varphi^* o \psi(x) = \varphi(x) = 0$ ve böylece Ç$ek\psi \subseteq$Ç$ek\varphi$ olur. Dar alt modüllerin alt modülleri de dar olduğundan Ç$ek\psi \ll P_\tau(M)$'dir. Önerme 3.3.4'e göre ψ bir izomorfizmadır. $\square$

Önerme 3.3.7 *(Bland 1998)* $\pi : P \to M$, *M'nin bir projektif örtüsü ise* $\varphi : P/\left(t_\tau(\text{Ç}ek\pi)\right) \to M$, $\varphi(x + t_\tau(\text{Ç}ek\pi)) = \pi(x)$, *olarak tanımlanan epimorfizma M'nin bir τ-projektif örtüsüdür.*

Kanıt. Ç$ek\varphi =$Ç$ek\pi/\left(t_\tau(\text{Ç}ek\pi)\right) \in \mathcal{F}$'dir. $f : P \to P/\left(t_\tau(\text{Ç}ek\pi)\right)$ kanonik epimorfizmasına göre $f(\text{Ç}ek\pi) =$Ç$ek\pi/\left(t_\tau(\text{Ç}ek\pi)\right)$'dir. Dar alt modüllerin homomorf görüntüleri de dar olduğundan Ç$ek\varphi =$Ç$ek\pi/\left(t_\tau(\text{Ç}ek\pi)\right) \ll P/\left(t_\tau(\text{Ç}ek\pi)\right)$'dir. O halde φ bir τ-minimal epimorfizmadır. Ayrıca $t_\tau(\text{Ç}ek\pi) \in \mathcal{T}$ ve P τ-projektif olduğundan Önerme 3.3.5'e göre $P/\left(t_\tau(\text{Ç}ek\pi)\right)$ τ-projektif modüldür. $\square$

4 BİR TORSION TEORİYE GÖRE CS MODÜLLER

4.1 Kapalı alt modüller

Tanım 4.1.1 *(Golan 1986) M R-modül, $N \leq M$ olsun. Herhangi bir $W \leq M$ alt modülü için $N \cap W \subseteq t_\tau(M)$ iken $W \subseteq t_\tau(M)$ oluyorsa N'ye M içinde τ-geniş alt modül denir ve $N \trianglelefteq_\tau M$ ile gösterilir.*

M τ-torsion modül ise M'nin her alt modülü τ-geniştir.

$\tau = (0,\text{Mod-}R)$ torsion teorisinde τ-geniş alt modül kavramı ile geniş alt modül kavramı aynıdır.

Ön önerme 4.1.2 *M τ-torsion-free bir modül ve $N \leq M$ olsun. N'nin M içinde τ-geniş olması için gerekli ve yeterli koşul N'nin M içinde geniş olmasıdır.*

Kanıt. N'nin M içinde τ-geniş olduğunu kabul edelim. $L \leq M$ için $L \cap N = 0$ olsun. $L \cap N = 0 = t_\tau(M)$'dir. Kabulden dolayı $L \subseteq t_\tau(M) = 0$ yani $L = 0$ olur.

$N \trianglelefteq_\tau M$ ve $L \leq M$ için $L \cap N \subseteq t_\tau(M)$ olsun. $L \cap N = 0$'dır. Kabulden dolayı $L = 0$ yani $L \subseteq t_\tau(M)$ olur. □

Teorem 4.1.3 *(Golan 1986) M R-modül, $N \leq M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) N, M içinde τ-geniştir.

(2) N^c, M içinde τ-geniştir.

(3) $(N + t_\tau(M))/t_\tau(M)$ $M/t_\tau(M)$ içinde geniştir.

(4) $N^c/t_\tau(M)$ $M/t_\tau(M)$ içinde geniştir.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2) $W \leq M$ için $W \cap N^c \subseteq t_\tau(M)$ olsun.
$W \cap N \subseteq W \cap N^c \subseteq t_\tau(M)$'dir. N M içinde τ-geniş olduğundan $W \subseteq t_\tau(M)$'dir.

(2) $\Longrightarrow$ (1) $W \leq M$ için, $N \cap W \subseteq t_\tau(M)$ olsun.
$(N \cap W)^c = N^c \cap W^c \subseteq t_\tau(M)^c = t_\tau(M)$'dir. (2)'den dolayı $W \subseteq W^c \subseteq t_\tau(M)$'dir.

(1) $\Longrightarrow$ (3) $W \leq M$ ve $t_\tau(M) \subseteq W$ olmak üzere, $[(N + t_\tau(M))/t_\tau(M)] \cap [W/t_\tau(M)] = 0$ olsun. Buradan, $W \cap (N + t_\tau(M)) = t_\tau(M) + (N \cap W) = t_\tau(M)$ ve $N \cap W \subseteq t_\tau(M)$ olur. (1)'den dolayı $W \subseteq t_\tau(M)$'dir. Böylece $W = t_\tau(M)$ yani $W/t_\tau(M) = 0$'dır.

(3) $\Longrightarrow$ (4) $(N + t_\tau(M))/t_\tau(M) \subseteq N^c/t_\tau(M)$ olduğundan açıktır.

(4) $\Longrightarrow$ (1) $W \leq M$ için, $N \cap W \subseteq t_\tau(M)$ olsun. $t_\tau(M) \subseteq N^c \cap W^c$ olduğundan $N^c \cap W^c = t_\tau(M)$ ve $(N \cap W)^c = N^c \cap W^c \subseteq t_\tau(M)^c = t_\tau(M)$'dir. $0 = [N^c/(N^c \cap W^c)] \cap [W^c/(N^c \cap W^c)] = [N^c/t_\tau(M)] \cap [W^c/t_\tau(M)]$'dir. $N^c/t_\tau(M) \trianglelefteq M/t_\tau(M)$ olduğundan $W^c/t_\tau(M) = 0$ yani $W^c = t_\tau(M)$'dir. Böylece $W \subseteq t_\tau(M)$'dir. □

Uyarı 4.1.4 *$M/N \in \mathcal{F}$ ise N'nin M içinde τ-geniş olması ile $N/t_\tau(M)$'nin $M/t_\tau(M)$ içinde geniş olması denktir.*

Sonuç 4.1.5 *(Golan 1986) M R-modül, N, M'nin τ-pür ve τ-geniş bir alt modülü ise N, M içinde geniştir.*

Kanıt. $W \leq M$ için $N \cap W = 0$ olsun. $N \cap W = 0 \subseteq t_\tau(M)$ ve $N \trianglelefteq_\tau M$ olduğundan $W \subseteq t_\tau(M)$ ve $M/N \in \mathcal{F}$ olduğundan da $t_\tau(M) \subseteq N$'dir. O halde $N \cap W = W = 0$'dır. □

Önerme 4.1.6 *(Golan 1986) M R-modülü ve $N, L \leq M$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) $N \subseteq L$ ve $N \trianglelefteq_\tau M$ ise $L \trianglelefteq_\tau M$'dir.

(2) $N \trianglelefteq_\tau L \trianglelefteq_\tau M$'dir ancak ve ancak $N \trianglelefteq_\tau M$'dir.

Kanıt. (1) $N \subseteq L$ ve $N \trianglelefteq_\tau M$ olsun. $W \leq M$ için $L \cap W \subseteq t_\tau(M)$ olsun. $N \cap W \subseteq t_\tau(M)$'dir. $N \trianglelefteq_\tau M$ olduğundan $W \subseteq t_\tau(M)$'dir.

(2) $N \trianglelefteq_\tau L \trianglelefteq_\tau M$ olduğunu kabul edelim. $W \leq M$ için $N \cap W \subseteq t_\tau(M)$ olsun. $N \cap (W \cap L) \subseteq t_\tau(M) \cap L = t_\tau(L)$'dir. Kabulden $W \cap L \subseteq t_\tau(L) \subseteq t_\tau(M)$ ve böylece $W \subseteq t_\tau(M)$ elde edilir. O halde $N \trianglelefteq_\tau M$ olur.

$N \trianglelefteq_\tau M$ kabul edelim. O halde $L \trianglelefteq_\tau M$'dir. $W \leq L$ için $N \cap W \subseteq t_\tau(L)$ olsun. $t_\tau(L) \subseteq t_\tau(M)$ olduğundan $N \cap W \subseteq t_\tau(M)$ olur ve $W \subseteq t_\tau(M)$ elde edilir. O halde $W \cap L = W \subseteq t_\tau(M) \cap L = t_\tau(L)$ olur. Böylece $N \trianglelefteq_\tau L$'dir. □

Ön önerme 4.1.7 *M R-modül ve $L \trianglelefteq_\tau M$ olsun. Her $N \leq M$ için $N \cap L \trianglelefteq_\tau N$'dir.*

Kanıt. $W \leq N$ için $N \cap L \cap W \subseteq t_\tau(N)$ olsun. $L \cap W \subseteq t_\tau(N) \subseteq t_\tau(M)$'dir. $L \trianglelefteq_\tau M$ olduğundan $W \subseteq t_\tau(M)$'dir. Buradan $W \cap N = W \subseteq t_\tau(M) \cap N = t_\tau(N)$'dir. Böylece $N \cap L \trianglelefteq_\tau N$ olur. □

Sonuç 4.1.8 *M R-modül $K \leq K' \leq M$ ve $L \leq L' \leq M$ olsun. $K \trianglelefteq_\tau K'$ ve $L \trianglelefteq_\tau L'$ ise $(K \cap L) \trianglelefteq_\tau (K' \cap L')$'dür.*

Kanıt. $K' \cap L \leq K'$ ve $K \trianglelefteq_\tau K'$ olduğundan Ön önerme 4.1.7'den dolayı $K \cap K' \cap L = K \cap L \trianglelefteq_\tau K' \cap L$ olur. $K' \cap L' \leq L'$ ve $L \trianglelefteq_\tau L'$ olduğundan yine Ön önerme 4.1.7'den $K' \cap L' \cap L = K' \cap L \trianglelefteq_\tau K' \cap L'$ olur. Önerme 4.1.6'dan da $K \cap L \trianglelefteq_\tau K' \cap L'$ elde edilir. □

Tanım 4.1.9 *M R-modül $K, N \leq M$ olsun.*

(1) $K \trianglelefteq_\tau N$ ise N'ye K'nın τ-geniş genişlemesi denir.

(2) K'nın M içinde kendisinden farklı bir τ-geniş genişlemesi yoksa K'ya M içinde τ-kapalı alt modül denir.

(3) $N \trianglelefteq_\tau K$ ve K, M içinde τ-kapalı alt modül ise K'ya N'nin M içindeki τ-kapanışı denir.

M τ-torsion modül ise M'nin kendisinden farklı bir τ-kapalı alt modülü yoktur. Çünkü M'nin tüm alt modülleri M içinde τ-geniştir.

Önerme 4.1.10 *M modülünün τ-kapalı bir alt modülü M'nin τ-pür alt modülüdür.*

Kanıt. N, M'nin τ-kapalı alt modülü olsun. Teorem 4.1.3'den dolayı $N \trianglelefteq_\tau N^c \leq M$'dir. Kabulden $N = N^c$ elde edilir. O halde N, M'nin τ-pür alt modülüdür. □

Teorem 4.1.11 *M modülünün her alt modülünün bir τ-kapanışı vardır.*

Kanıt. $N \leq M$ olsun. $\Psi = \{L : N\ L$ içinde τ-geniş$\}$ kümesini oluşturalım. $N \in \Psi$ olduğundan $\Psi \neq \emptyset$'dir. Ψ içinde $\{K_i\}_{i \in I}$ zincirini alalım. $W \leq \cup_{i \in I} K_i$ olmak üzere $W \cap N \subseteq t_\tau(\cup_{i \in I} K_i) = \cup_{i \in I} t_\tau(K_i)$ olsun. $x \in W$ ise $x \in K_i$ olacak şekilde bir $i \in I$ vardır. Yani $xR \cap N \subseteq K_i$'dir. Ayrıca $xR \cap N \subseteq t_\tau(\cup_{i \in I} K_i)$ olduğundan $xR \cap N \subseteq K_i \cap t_\tau(\cup_{i \in I} K_i) = t_\tau(K_i)$ elde edilir. Böylece $xR \subseteq t_\tau(K_i)$ olur. Çünkü $N \trianglelefteq_\tau K_i$'dir. Buna göre $x \in \cup_{i \in I} t_\tau(K_i) = t_\tau(\cup_{i \in I} K_i)$ olur. Böylece $W \subseteq t_\tau(\cup_{i \in I} K_i)$'dir. Bu da $N \trianglelefteq_\tau \cup_{i \in I} K_i$ olduğunu gösterir. O halde $\cup_{i \in I} K_i \in \Psi$'dir.

Zorn Önteoremi'ne göre Ψ'nin bir maksimal elemanı vardır. Bu elemanı K ile gösterelim. Şimdi K'nın N'nin τ-kapanışı olduğunu görelim.

$K \trianglelefteq_\tau K'$ olacak şekilde bir $K' \leq M$ bulunduğunu varsayalım. $N \trianglelefteq_\tau K \trianglelefteq_\tau K'$ olduğundan $N \trianglelefteq_\tau K'$ yani $K' \in \Psi$ olur. Ancak K, Ψ'nin bir maksimal elemanı olduğundan $K = K'$ olmalıdır. O halde K, M içinde τ-kapalı olur. Böylece K, N'nin M içindeki bir τ-kapanışıdır. □

Önerme 4.1.12 *M R-modül, B M'nin bir τ-kapalı alt modülü olsun.*

$B \leq K \trianglelefteq_\tau M$ ise $K/B \trianglelefteq_\tau M/B$'dir.

Kanıt. $N/B \leq M/B$ olmak üzere $(N/B) \cap (K/B) \subseteq t_\tau(M/B)$ olsun. Önerme 4.1.10'dan dolayı $B^c = B$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $t_\tau(M/B) = B^c/B = 0$'dır. Ayrıca $K \trianglelefteq_\tau M$ olduğundan $N \cap K = B \trianglelefteq_\tau N \cap M = N$'dir. Ayrıca B, M'nin τ-kapalı alt modülü olduğundan $B = N$ elde edilir ve ispat biter. □

4.2 Tamlayan alt modüller

M R-modül ve $A \leq M$ ise $\Psi = \{B : A \cap B \subseteq t_\tau(M)\}$ kümesi boştan farklıdır. Bu küme kapsama bağıntısına göre kısmi sıralıdır. Ψ içinde $\{B_i\}_{i \in I}$ zincirini alalım. Her $i \in I$ için $A \cap B_i \subseteq t_\tau(M)$ olması kullanılarak
$A \cap (\cup_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I}(A \cap B_i) \subseteq \sum (A \cap B_i) \subseteq t_\tau(M)$ ve dolayısıyla $\cup_{i \in I} B_i \in \Psi$ elde edilir. Zorn Önteoremi'ne göre Ψ'nin bir maksimal elemanı vardır.

O halde aşağıdaki tanımı yapmak uygun olacaktır.

Tanım 4.2.1 *(1) M R-modül olsun. $A \leq M$ için $A \cap B \subseteq t_\tau(M)$ özelliğine göre maksimal olan B alt modülüne A'nın M içindeki τ-tamlayanı denir.*

(2) $C \leq M$ olsun. C, S'nin M içindeki bir τ-tamlayanı olacak şekilde $S \leq M$ alt modülü varsa C'ye M içinde τ-tamlayan alt modül denir ve $C \leq_{\tau-c} M$ ile gösterilir.

$\tau = (0,\text{Mod-}R)$ torsion teorisinde τ-tamlayan alt modül kavramı ile tamlayan alt modül kavramı aynıdır.

Ön önerme 4.2.2 *M R-modül, $A \leq M$ olsun. B, A'nın M içindeki bir τ-tamlayanı ise B M içinde τ-pür alt modüldür.*

Kanıt. B, A'nın M içindeki bir τ-tamlayanı olsun. $A \cap B \subseteq t_\tau(M)$ olduğundan $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c \subseteq t_\tau(M)^c = t_\tau(M)$'dir. Buna göre $A \cap B^c \subseteq t_\tau(M)$ olur. B'nin maksimalliğinden dolayı $B = B^c$ olmalıdır. □

Önerme 4.2.3 *M R-modül ve $S \leq M$ olsun. N, S'nin M içindeki bir τ-tamlayanıdır ancak ve ancak N, S^c'nin M içindeki bir τ-tamlayanıdır.*

Kanıt. İlk önce N'yi S'nin M içindeki τ-tamlayanı olarak kabul edelim.
$N \cap S \subseteq t_\tau(M)$ olduğundan $(N \cap S)^c = N \cap S^c \subseteq t_\tau(M)^c = t_\tau(M)$'dir. $N \subseteq K$ ve $K \cap S^c \subseteq t_\tau(M)$ olsun. O halde $K \cap S \subseteq t_\tau(M)$ ve N bu özelliğe göre maksimal olduğundan $N = K$ olmalıdır. Buna göre N, S^c'nin M içindeki bir τ-tamlayanıdır.

Şimdi N'yi S^c'nin M içindeki τ-tamlayanı olarak kabul edelim.$N \cap S^c \subseteq t_\tau(M)$ ise $N \cap S \subseteq t_\tau(M)$ olur. Ayrıca $N \subseteq K$ ve $K \cap S \subseteq t_\tau(M)$ ise
$(K \cap S)^c = K^c \cap S^c \subseteq t_\tau(M)^c = t_\tau(M)$ olur. N, bu özelliğe göre maksimal olduğundan $N = K^c$'dir. Buradan $K \subseteq N$'dir. Böylece $N = K$ elde edilir. Buna göre N, S'nin M içindeki bir τ-tamlayanıdır. □

Teorem 4.2.4 *M R-modül, $A \leq M$ olsun. B, A'nın M içindeki bir τ-tamlayanı ise $A + B \trianglelefteq_\tau M$'dir.*

Kanıt. İlk önce Ön önerme 4.2.2'den dolayı $M/B \in \mathcal{F}$ ve böylece $t_\tau(M) \subseteq B$ olduğunu not edelim. $K \leq M$ olmak üzere $(A+B) \cap K \subseteq t_\tau(M)$ olsun.
$x \in A \cap (B+K)$ alalım. $x = b+k$ olacak şekilde $b \in B$, $k \in K$ vardır. O zaman $x - b \in K \cap (A+B) \subseteq t_\tau(M) \subseteq B$ ve böylece $x \in A \cap B \subseteq t_\tau(M)$ elde edilir. O halde $A \cap (B+K) \subseteq t_\tau(M)$'dir. Kabulden dolayı $B+K = B$ yani $K \subseteq B$ olmalıdır.

Ayrıca $A \cap K + B \cap K = A \cap K + K = K \subseteq (A+B) \cap K \subseteq t_\tau(M)$ ve $K \subseteq t_\tau(M)$ olur. Böylece $A + B \trianglelefteq_\tau M$'dir. □

Şimdi bu teoremin tersinin doğruluğu üzerine çalışalım.

Teorem 4.2.5 *M R-modül, $C \leq_{\tau-c} M$, $T \leq M$ ve $C \cap T \subseteq t_\tau(M)$ olsun.*
$C + T \trianglelefteq_\tau M$ ise C, T'nin M içindeki τ-tamlayanıdır.

Kanıt. $C \leq_{\tau-c} M$, $T \leq M$, $C \cap T \subseteq t_\tau(M)$ ve $C + T \trianglelefteq_\tau M$ olsun. C, S'nin M içindeki bir τ-tamlayanı olsun. $C \subseteq D$ ve $D \cap T \subseteq t_\tau(M)$ olacak şekilde bir $D \leq M$ bulunduğunu kabul edelim. Şimdi $C = D$ olduğunu görmek istiyoruz. $C \leq_{\tau-c} M$ olduğundan C, M içinde τ-pür ve dolayısıyla $t_\tau(M) \subseteq C$'dir. Modülarite kuralından $(C+T) \cap (D \cap S) = ((C+T) \cap D) \cap S = ((C + (D \cap T)) \cap S \subseteq (C + t_\tau(M)) \cap S = C \cap S \subseteq t_\tau(M)$ olur. $(C+T) \trianglelefteq_\tau M$ olduğundan $(D \cap S) \subseteq t_\tau(M)$'dir. C'nin maksimalliğinden dolayı $D = C$ ve böylece C, T'nin M içindeki τ-tamlayanıdır. □

Teorem 4.2.6 *M R-modül, $B \leq M$ olsun. B, M'nin τ-tamlayan alt modülüdür ancak ve ancak B, M'nin τ-kapalı alt modülüdür.*

Kanıt. B'yi M'nin τ-tamlayan alt modülü olarak kabul edelim. B, M içinde A alt modülünün τ-tamlayanı ve $B \trianglelefteq_\tau B' \leq M$ olsun. $(B' \cap A) \cap B = A \cap B \subseteq t_\tau(M)$ ve $(B' \cap A) \cap B \subseteq t_\tau(M) \cap B' = t_\tau(B')$ olur. $B \trianglelefteq_\tau B'$ olduğundan
$(B' \cap A) \subseteq t_\tau(B') \subseteq t_\tau(M)$'dir. B'nin maksimalliğinden dolayı $B = B'$ olur ve böylece B, M içinde τ-kapalı alt modüldür.

Şimdi B'yi M'nin τ-kapalı alt modülü olarak kabul edelim. T, B'nin M içindeki bir τ-tamlayanı olsun. B'nin T'nin τ-tamlayanı olduğunu gösterelim:

T, B'nin M içindeki τ-tamlayanı olduğundan $B \cap T \subseteq t_\tau(M)$ olduğunu not edelim. $B \subseteq L$ ve $L \cap T \subseteq t_\tau(M)$ olsun. Teorem 4.2.4'e göre $B + T \trianglelefteq_\tau M$ ve

$(B+T)\cap L \trianglelefteq_\tau L$ elde edilir. Ayrıca $(B+T)\cap L = B+(L\cap T) \subseteq B+t_\tau(M)$ olur. B, M içinde τ-kapalı olduğundan $t_\tau(M)\subseteq B$ ve $B+t_\tau(M)=B$ elde edilir. O halde $(B+T)\cap L = B \trianglelefteq_\tau L$ sonucuna ulaşılır. B, M içinde τ-kapalı olduğundan $B=L$ olmalıdır. □

Önerme 4.2.7 *M R-modül ve $M/B \in \mathcal{F}$ olmak üzere $B \leq K \trianglelefteq_\tau M$ iken $K/B \trianglelefteq_\tau M/B$ olsun. A, B'nin M içindeki herhangi bir τ-tamlayanı ise B, A'nın M içindeki bir τ-tamlayanıdır.*

Kanıt. A, B'nin M içindeki herhangi bir τ-tamlayanı olsun. $A\cap B\subseteq t_\tau(M)$ olur. $\Psi = \{C \leq M : A\cap C \subseteq t_\tau(M),\ B\subseteq C\}$ kümesinin maximal elemanını bulabiliriz. Bu elemanı B' ile gösterelim. $(A+B)\cap B' = B+(A\cap B') \subseteq B^c + t_\tau(M) = B^c$ olur. Buradan, $((A+B)/B)\cap(B'/B)\subseteq B^c/B = 0 = t_\tau(M/B)$ elde edilir.
$B\subseteq A+B \trianglelefteq_\tau M$ olduğundan hipoteze göre $(A+B)/B \trianglelefteq_\tau M/B$ ve böylece $B'/B=0$ olur. □

Teorem 4.2.8 *(1) $C\subseteq N\subseteq M$ ve $C\leq_{\tau-c} M$ ise $C\leq_{\tau-c} N$'dir.*

(2) $C\leq_{\tau-c} N_{\tau-c}\subseteq M$ ise $C\leq_{\tau-c} M$'dir.

Kanıt. (1) C M içinde X'in τ-tamlayanı olsun. C'nin N içinde $X\cap N$'ye τ-tamlayan olduğunu gösterelim: $C\cap(X\cap N)\subseteq t_\tau(M)\cap N = t_\tau(N)$'dir. $C\subseteq D$ ve $D\cap(X\cap N)\subseteq t_\tau(N)$ olacak şekilde $D\leq N$ bulunsun.
$D\cap(X\cap N) = D\cap X\subseteq t_\tau(N)\subseteq t_\tau(M)$'dir. C'nin maksimalliğinden dolayı $C=D$ olmalıdır.

(2) C, N içinde S'nin τ-tamlayanı ve N, M içinde T'nin τ-tamlayanı olsun. $C\leq_{\tau-c} N$ ve $N_{\tau-c}\subseteq M$ olduğundan N/C, $M/N\in\mathcal{F}$'dir.

$$0 \longrightarrow N/C \longrightarrow M/C \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

tam dizisi kullanılarak $M/C\in\mathcal{F}$ elde edilir. O halde $t_\tau(M)\subseteq C$'dir. Şimdi C'nin M içinde $S+T$'nin τ-tamlayanı olduğunu gösterelim:

İlk olarak $C\cap(S+T)\subseteq t_\tau(M)$ olduğunu gösterelim: $C\cap S\subseteq t_\tau(N)$ ve $N\cap T\subseteq t_\tau(M)$ olduğundan $(C\cap S)+(N\cap T)\subseteq t_\tau(M)$'dir. $x\in C\cap(S+T)$ alalım.

$x \in C$ ve $x = s+t$ olacak şekilde $s \in S$, $t \in T$ vardır. $x-s = t \in N \cap T \subseteq t_\tau(M)$'dir. $x-s \in C$ ve $x \in C$ olduğundan $s \in C$'dir. Buna göre $x = s+t \in (C \cap S)+(N \cap T) \subseteq t_\tau(M)$ ve böylece $x \in t_\tau(M)$ ve dolayısıyla $C \cap (S+T) \subseteq t_\tau(M)$ olur.

Şimdi de $C \subset D$ olacak şekildeki herhangi bir $D \leq M$ alt modülü için $D \cap (S+T) \nsubseteq t_\tau(M)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Böylece C'nin $(S+T)$'nin τ-tamlayanı olduğunu göstermiş oluruz. İki durum söz konusudur.

(i) $D \cap N \neq C$ ise $D \cap N \cap S = D \cap S \nsubseteq t_\tau(N)$'dir. $M/N \in \mathcal{F}$ olduğundan $t_\tau(N) = t_\tau(M)$'dir. $D \cap S \nsubseteq t_\tau(M)$ yani $D \cap (S+T) \nsubseteq t_\tau(M)$'dir.

(ii) $D \cap N = C$ olduğunu kabul edelim. $C \subset D$ olduğundan $d \in D \backslash N$ seçelim. $(N+dR) \cap T \nsubseteq t_\tau(M)$'dir. Buna göre $t = n + dr \notin t_\tau(M)$ olacak şekilde $t \in T$, $n \in N$, $r \in R$ vardır. $n \in C$ ise $n + dr \in D$ ve $D \cap T \nsubseteq t_\tau(M)$ elde edilir. Böylece $D \cap (S+T) \nsubseteq t_\tau(M)$ olur. $n \notin C$ ise $(C + nR) \cap S \nsubseteq t_\tau(N) = t_\tau(M)$'dir. Buna göre $c + nl = s \notin t_\tau(M)$ olacak şekilde $c \in C$, $s \in S$, $l \in R$ vardır. $tl = (n+dr)l$ ve buradan $s - tl = c + nl - nl - drl \in D \cap (S+T)$ elde edilir. Eğer $s - tl \in t_\tau(M) \subseteq N$ olsaydı $s - tl \in N$ ve $s \in N$ olduğundan $tl \in N \cap T \subseteq t_\tau(M)$ olurdu. Ancak $s - tl \in t_\tau(M)$ ve $tl \in t_\tau(M)$ olduğundan $s \in t_\tau(M)$ çelişkisi elde edilirdi. O halde $D \cap (S+T) \nsubseteq t_\tau(M)$'dir. □

Sonuç 4.2.9 *$C \subseteq N \subseteq M$ olsun. C, N içinde τ-kapalı ve N, M içinde τ-kapalı ise C, M'nin τ-kapalı alt modülüdür.*

Kanıt. C, N içinde τ-kapalı ve N, M içinde τ-kapalı olduğundan C, N içinde bir τ-tamlayan ve N, M içinde bir τ-tamlayandır. Teorem 4.2.8'e göre C, M içinde bir τ-tamlayan Teorem 4.2.6'dan dolayı da C, M içinde τ-kapalı alt modüldür. □

4.3 CS Modüller

Tanım 4.3.1 *M R-modül olsun. M'nin her τ-kapalı alt modülü M'nin bir dik toplananı ise M'ye τ-CS modül denir.*

Örnek 4.3.2 *(1) M τ-torsion bir modül ise M'nin kendisinden farklı τ-kapalı alt modülü yoktur. Buna göre her τ-torsion modül τ-CS'dir. Özel olarak Goldie torsion teoride M tekil modül ise M τ_G-CS modüldür.*

(2) $\chi = (Mod\text{-}R, 0)$ torsion teorisinde her R-modül τ-CS'dir.

(3) $\varepsilon = (0, Mod\text{-}R)$ torsion teorisinde τ-CS modül kavramı ile CS modül kavramı aynıdır.

(4) Her yarıbasit ve τ-kokritikal modül τ-CS modüldür.

(5) M τ-torsion-free bir modül ise M'nin τ-CS olması ile CS olması denktir.

Ön önerme 4.3.3 *M'nin τ-CS modül olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul M'nin her alt modülünün M'nin bir dik toplananı içinde τ-geniş olmasıdır.*

Kanıt. M'nin τ-CS modül olduğunu kabul edelim. $N \leq M$ ve L, N'nin M içindeki τ-kapanışı olsun. $N \trianglelefteq_\tau L \leq M$, ve L, M içinde τ-kapalı alt modüldür. M τ-CS olduğundan L, M'nin bir dik toplananıdır.

M'nin her alt modülünün M'nin bir dik toplananı içinde τ-geniş olduğunu kabul edelim. N, M'nin bir τ-kapalı alt modülü olsun. $N \trianglelefteq_\tau A$ olacak şekilde M'nin bir A dik toplananı vardır. N τ-kapalı olduğundan $N = A$ olmalıdır. □

Tanım 4.3.4 *(Smith vd 1997) M bir R-modül olsun. M'nin her alt modülü M'nin bir dik toplananı içinde τ-yoğun ise M'ye τ-komplement modül denir.*

Önerme 4.3.5 *(Smith vd 1997) M'nin τ-komplement modül olması ile M'nin her τ-pür alt modülünün M'nin bir dik toplananı olması denktir.*

Kanıt. M'nin τ-komplement olduğunu kabul edelim. $M/B \in \mathcal{F}$ ise $C/B \in \mathcal{T}$ olacak şekilde M'nin bir C dik toplananı vardır. $M/B \in \mathcal{F}$ ve $C/B \leq M/B$ olduğundan $C/B \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$'dır. Böylece $C = B$'dir yani B M'nin bir dik toplananıdır.

M'nin her τ-pür alt modülünün M'nin bir dik toplananı olduğunu kabul edelim. $B \leq M$ olsun. $t_\tau(M/B) = C/B$ olacak şekilde $C \leq M$ vardır.
$(M/B)\,/\,(t_\tau(M/B)) = (M/B)\,/\,(C/B) \simeq M/C \in \mathcal{F}$ olduğundan C, M'nin bir dik toplananıdır. $C/B \in \mathcal{T}$ olduğundan da M τ-komplement modüldür. □

Teorem 4.3.6 *Her τ-komplement modül τ-CS modüldür.*

Kanıt. M τ-komplement modül ve K, M'nin τ-kapalı alt modülü olsun. K, M içinde τ-pürdür. Önerme 4.3.5'e göre K, M'nin bir dik toplananıdır. $\square$

Önerme 4.3.7 *(Smith vd 1997) Her CS modül τ_G-komplement modüldür.*

Kanıt. M bir CS modül ve $B \leq M$ olsun. $B \trianglelefteq C$ olacak şekilde M'nin bir C dik toplananı vardır. C/B singular modül olduğundan $C/B \in \mathcal{T}$'dur. Böylece M bir τ_G-komplement modüldür. $\square$

Sonuç 4.3.8 *Goldie torsion teoride her CS modül τ_G-CS'dir.*

Önerme 4.3.9 *(Smith vd 1997) Her τ-torsion-free, τ-komplement modül CS'dir.*

Kanıt. M τ-torsion-free, τ-komplement modül ve B, M'nin bir altmodülü olsun. $C/B \in \mathcal{T}$ olacak şekilde M'nin C dik toplananı vardır. C, τ-torsion-free ve $C/B \in \mathcal{T}$ olduğundan $B \trianglelefteq C$'dir. Böylece M CS modüldür. $\square$

Önerme 4.3.10 *(Smith vd 1997) τ-komplement modüller sınıfı homomorf görüntüler altında kapalıdır.*

Kanıt. M τ-komplement modül ve $B \leq M$ olsun. $C/B \leq M/B$ alalım. M, τ-komplement olduğundan $D/C \in \mathcal{T}$ ve $M = D \oplus L$ olacak şekilde bir $L \leq M$ vardır.
$D/C \simeq (D/B)\,/\,(C/B) \in \mathcal{T}$, yani C/B, D/B içinde τ-yoğundur.
$M/B = (D \oplus L)\,/B \simeq D/B \oplus (L + B)\,/B$, yani D/B, M/B'nin bir dik toplananıdır.
Böylece M/B τ-komplement modüldür. $\square$

Önerme 4.3.11 *(Smith vd 1997) M τ-komplement ve T τ-torsion bir modül olsun. $M \oplus T$, τ-komplement modüldür.*

Kanıt. M, τ-komplement olduğundan $t_\tau(M)$, M'nin bir dik toplananıdır. $M = t_\tau(M) \oplus B$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{F}$ vardır. $M \oplus T = B \oplus (T \oplus t_\tau(M))$ olduğundan ispatı τ-torsion bir modül ve τ-torsion-free, τ-komplement bir modül için yapmak yeterlidir. M'yi τ-torsion-free kabul edelim. D, $M \oplus T$'nin bir τ-pür altmodülü olsun. $t_\tau(D) = t_\tau(M \oplus T) = t_\tau(T) = T$'dir. $D = D \cap (M \oplus T) = D \cap (M \oplus t_\tau(D)) = t_\tau(D) \oplus (M \cap D) = T \oplus (M \cap D)$ ve $M/(M \cap D) \simeq (M + D)/D = (M \oplus T)/D \in \mathcal{F}$'dir. M, τ-komplement olduğundan $M = (M \cap D) \oplus C$ olacak şekilde $C \leq M$ vardır. O halde $M \oplus T = (M \cap D) \oplus C \oplus T = D \oplus C$'dir. Buna göre $M \oplus T$, τ-komplement modüldür. □

Önerme 4.3.12 *(Smith vd 1997) Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M, bir τ-komplement modüldür.

(2) $M = t_\tau(M) \oplus B$ olacak şekilde bir τ-komplement B modülü vardır.

Kanıt. (1) $\Longrightarrow$ (2) M, τ-komplement olsun. $t_\tau(M)$, M'nin bir dik toplananı olduğundan $M = t_\tau(M) \oplus B$ olacak şekilde bir $B \leq M$ vardır. M, τ-komplement olduğundan B de τ-komplement modüldür.

(2) $\Longrightarrow$ (1) $t_\tau(M) \in \mathcal{T}$ ve B τ-komplement olduğundan Önerme 4.3.11'den dolayı $M = t_\tau(M) \oplus B$ τ-komplement modüldür. □

Teorem 4.3.13 *τ-CS modüllerin her dik toplananı τ-CS modüldür.*

Kanıt. M τ-CS modül ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M_1'in τ-kapalı bir N alt modülünü alalım. $N' = N \oplus M_2$ olsun. N' alt modülünün M içinde τ-kapalı olduğunu gösterelim:

$N' \trianglelefteq_\tau T \leq M$ olsun. $M_1 \cap N' = M_1 \cap (N \oplus M_2) = N + (M_1 \cap M_2) = N'$'dir. $N' \trianglelefteq_\tau T$ ve $M_1 \trianglelefteq_\tau M_1$ olduğundan $N' \cap M_1 = N \trianglelefteq_\tau T \cap M_1 \subseteq M_1$ ve $T \cap M_1 = N$ olur. Çünkü N, M_1 içinde τ-kapalıdır. $T = T \cap (M_1 \oplus M_2) = M_2 + (T \cap M_1) = M_2 + N = N'$ olur. Böylece N', M içinde τ-kapalı alt modüldür. M'nin τ-CS olduğunu kullanarak $M = N' \oplus K$ olacak şekilde bir $K \leq M$ bulabiliriz. Buradan $M = N' \oplus K = N \oplus M_2 \oplus K$ olur. $M_1 = M \cap M_1 = (N \oplus M_2 \oplus K) \cap M_1 = N \oplus (M_1 \cap (M_2 \oplus K))$ olur. Böylece M_1 τ-CS modüldür. □

Sonuç 4.3.14 *τ-CS modüllerin τ-kapalı alt modülleri de τ-CS'dir.*

Teorem 4.3.15 *τ pür inductive bir torsion teori, M R-modül ve M'nin her τ-pürce geniş altmodülü τ-geniş olsun. M τ-bölümlü modül ise τ-CS modüldür.*

Kanıt. M bir τ-bölümlü R-modül ve N, M'nin τ-kapalı bir alt modülü olsun. Teorem 3.2.9'a göre N'nin M içinde kapsanan bir τ-bölümlü hull'ü vardır. L, N'nin M içindeki bir τ-bölümlü hull'ü olsun. N L içinde τ-pürce geniştir. Hipotezden dolayı N, L içinde τ-geniştir. O halde $N = L$ olmalıdır. Buna göre N τ-bölümlüdür $M/N \in \mathcal{F}$ ve N τ-bölümlü olduğundan N, M'nin bir dik toplananıdır.

□

SONUÇ

Bu tezin ilk üç bölümünde CS modüllerin torsion teoride yeni bir genellemesini yapabilmek için hazırlık yapıldı. Son bölümde ise Golan'ın tanımlamış olduğu τ-geniş altmodül kavramından yaralanılarak τ-kapalı ve τ-tamlayan alt modül kavramları tanımlandı. Daha sonra da amacımız olan τ-CS modül tanımı verildi ve bazı temel özellikleri çalışıldı. Ayrıca τ-CS modüllerin Smith'in tanımlamış olduğu τ-komplement modüller ile olan bağlantısı Teorem 4.3.6'da "Her τ-komplement modül τ-CS modüldür." ile verildi. Her injektif modülün CS olduğu gerçeğine benzer olarak da Teorem 4.3.15'de "τ pür inductive bir torsion teori, M R-modül ve M'nin her τ-pürce geniş altmodülü τ-geniş olsun. M τ-bölümlü modül ise τ-CS modüldür." sonucu elde edildi.

KAYNAKLAR

ANDERSON, F. W. and FULLER, K. R., 1992. Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag, New York.

BLAND, P. E., 1998. Topics in Torsion Theory, Wiley-VCH Verlag, Berlin.

CHARALAMBIDES, S. and CLARK, J., 2007. CS Modules Relative to a Torsion Theory, Mediterranean Journal of Mathematics, 4 (2007), 291-308.

CRIVEI, S., 2004. Injective Modules Relative To Torsion Theories, Editura Fundatıeı Pentru Studıı Europene, Cluj-Napoca.

DOĞRUÖZ, S., 2008. Extending Modules Relative to a Torsion Theory, Czechoslovak Mathematical Journal, 58 (133) (2008), 381-393.

HARMANCI, A. and SMITH, P. F., 2008. Modules With Unique Closure Relative to a Torsion Theory II, Turkish Journal of Mathematics, 32 (2008), 1-8.

DUMMIT, D. S. and FOOTE, R. M., 1999. Abstract Algebra, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J.

DUNG, N. V., HUYNH, D. V., SMITH, P. F. and WISBAUER, R., 1994. Extending Modules, Longman, Harlow.

GOLAN, S. G., 1986. Torsion Theories, Pitman Monographs and Surveys in pür and Applied Mathematics 29, Longman Scientific and Technical, Harlow.

GOODEARL, K. R., 1976. Ring Theory, Marcel Dekker, New York.

GOODEARL, K. R. and WARFIELD, R. B., 1989. An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings, London Math. Society (Student Texts 16).

LAM, T. Y., 1999. Lectures On Modules and Rings, Springer-Verlag, New York.

LUTHAR, I. S. and PASSI, I. B. S., 2002. Algebra: Modules, Alpha Science, Pangbourne.

PARK, Y. S. and RIM, S. H., 1994. Hollow Modules and Corank Relative to a Torsion Theory, J. Korean Math. Soc. 31 (1994), No.3, pp. 439-456.

SHARPE, D. W. and VAMOS, P., 1972. Injective Modules, Cambridge Tracts inMathematics 62. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

SMITH, P. F., VIOLA-PRIOLI, A. M. and VIOLA-PRIOLI, J. E., 1997. Modules Complemented With Respect to a Torsion Theory, Communications in Algebra, 25 (4), 1307-1326.

STENSTROM, B., 1975. Rings of Quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory, Springer-Verlag, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Seçil Çeken, 1983 yılında Hatay'da doğdu. İlk öğrenimini Hatay'da, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2003 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2007 yılında mezun oldu. 2007 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen Matematik anabilim dalında Araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.