

**DAİRESEL PLAKLARIN AYRIK TEKİL KONVOLÜSYON VE
DİFERANSİYEL QUADRATURE YÖNTEMLERİYLE KARŞILAŞTIRILMALI
SERBEST TİTREŞİM HESABI**

Emre KUZU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

2008

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAİRESEL PLAKLARIN AYRIK TEKİL KONVOLÜSYON VE
DİFERANSİYEL QUADRATURE YÖNTEMLERİYLE KARŞILAŞTIRILMALI
SERBEST TİTREŞİM HESABI

Emre KUZU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu tez .././2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından(.....) not takdir edilerek
Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr.Ömer CİVALEK (Danışman)

Yrd.Doç.Dr. Hakan ERSOY

Yrd.Doç.Dr. Baki ÖZTÜRK

ÖZET

DAİRESEL PLAKLARIN AYRIK TEKİL KONVOLÜSYON VE DİFERANSİYEL QUADRATURE YÖNTEMLERİYLE KARŞILAŞTIRILMALI SERBEST TİTREŞİM HESABI

Emre KUZU

Yüksek lisans Tezi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Ömer CİVALEK
Haziran 2008, 40 Sayfa

Çalışmada diferansiyel quadrature ve ayırık tekil konvolüsyon metotları, çeşitli mesnet şartları için ince ve kalın dairesel plakların titreşim analizinin çözümü için uygulanmıştır. Diferansiyel quadrature metodu; koordinat doğrultusuna göre bir fonksiyonun türevi, çepeçevre saran bir çözüm bölgesindeki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşım kurabilen sürekli bir fonksiyon ve o doğrultu boyunca bütün ağ noktalarındaki fonksiyon değerlerinin tümünün lineer toplamı olarak ifade edilir. Ağırlık katsayıları bilinmeyenler olarak bulunur. Ayırık tekil konvolüsyon yönteminde ise yaklaşım fonksiyonları olarak çeşitli kerneller kullanılmaktadır. Plağın titreşimini ifade eden her bir diferansiyel denkleme metot sınır şartları altında tatbik edilerek standart bir özdeğer problemi elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar mevcut analitik ve diğer yaklaşık yöntem değerleri ile karşılaştırılmıştır. Metot sonuçları bakımından yeter doğrulukta olup hesaplayıcı bakımından verimlidir.

ANAHTAR KELİMLER: Dairesel plak, titreşim, diferansiyel quadrature, ayırık tekil konvolüsyon, sayısal yaklaşım

JÜRİ:

Doç.Dr.Ömer CİVALEK

Yrd.Doç.Dr. Hakan ERSOY

Yrd.Doç.Dr. Baki ÖZTÜRK

ABSTRACT

COMPARATIVE FREE VIBRATION ANALYSIS OF CIRCULAR PLATES BY DIFFERENTIAL QUADRATURE AND DISCRETE SINGULAR CONVOLUTION METHODS

Emre KUZU

M.Sc. in Civil Engineering

Adviser: Assoc. Prof. Ömer CİVALEK

June, 2008 40 pages

The differential quadrature method has been presented in this paper to solve the problems of the vibration of thin and thick circular plates for various support conditions. In the method of differential quadrature, partial space derivatives of a function appearing in a differential equation are approximated by means of a polynomial expressed as the weighted linear sum of the function values at a reselected grid of discrete points. The weighting coefficients are treated as the unknowns. However, some kernels were used in discrete singular convolution as approximating functions. Applying this concept to each partial derivative of the free vibration for differential equation of plates give a set of standard eigenvalue equations, which are solved for the unknown weighting coefficients by accounting for the boundary conditions. Results are compared with existing solutions available from other analytical and numerical methods. The method presented gives accurate results and is computationally efficient.

Key Words: Circular plates, differential quadrature, discrete singular convolution, free vibration, numerical approaches

COMMITTEE:

Assoc. Prof. Ömer CİVALEK

Assistant Prof. Hakan ERSOY

Assistant Prof. Baki ÖZTÜRK

ÖNSÖZ

Dairesel plakların serbest titreşim hesabının yapıldığı bu çalışmada esas amaç, literatürde son zamanlarda kullanılmaya başlanan iki yeni yöntemin performanslarını karşılaştırmak ve mekanik problemlerine uygulanabilirliğini göstermektir. Bu çalışma genişletilerek dairesel plakların frekans kısıtlayıcıları altında kalınlık optimizasyonu yapılabilecektir. İlgilenilen problemin literatürde pek çok yöntemle çözümü mevcuttur. Bu çalışma süresince yardımlarını ve ilgisini esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. Ömer CİVALEK'e, programlama sırasında ve ANSYS paket program ile yapılan modelleme ve çözümlene sürecinde büyük destek olan Yrd. Doç. Dr. Hakan ERSOY'a, ve sürekli yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Emre KUZU

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
1.1. Daha önceki çalışmalar.....	4
2. AMAÇ ve KAPSAM	6
3. DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU	9
3.1. Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ)	16
4. AYRIK TEKİL KONVOLÜSYON YÖNTEMİ	18
4.1. Lagrange kernel (LK)	20
5. DAİRESEL PLAKLAR	21
5.1. İnce dairesel plak	22
5.2. Mindlin dairesel plak	24
6. SAYISAL HESAPLAMALAR	28
7. SONUÇLAR	34
8. KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	40

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar

HDQ: harmonik diferansiyel quadrature

DQ: Diferansiyel quadrature

ATK: Ayrık tekil konvolüsyon

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. İki boyutlu bölge için grid noktaları	13
Şekil 5.1. Dairesel plak ve geometrik elemanları.....	23
Şekil 6.1. Basit mesnetli ve ankastre mesnetli plağın frekans değerleri.....	29
Şekil 6.2. Kenarlarında serbest olan dairesele plak için frekans değerlerinin yakınsaması.....	30
Şekil 6.3. Kenarlarında basit mesnetli tutturulmuş olan dairesele plak için frekans değerlerinin yakınsaması	30
Şekil 6.4. Kenarlarından serbest olan dairesele plak için frekans değerlerinin kalınlığa bağılı değişimi	31
Şekil 6.5. Kenarlarından basit mesnetli dairesele plak için mod sayısına bağılı frekans değerleri.....	32
Şekil 6.6. Ankastre dairesele plağın ilk üç aksenele simetrik frekans değeri	33

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 6.1. Ankastre mesnetli dairesel plak için ilk üç frekans değeri.....	28
Çizelge 6.2. Dairesel plak için doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması.....	28
Çizelge 6.3. Basit mesnetli dairesel plak için ilk dört frekans	28
Çizelge 6.4. Basit mesnetli dairesel plak için frekans değerleri	28

1. GİRİŞ

Çağlar boyunca insanlık, önce temel ihtiyaçlarını gidermek, uygarlaşma yolunda ilerledikçe ise farklı gereksinimler için mekânlara ihtiyaç duymuştur. Bu ihtiyaçların karşılanmasında yapı mühendislerinin önemi büyüktür.

Genel bir yaklaşımla denilebilir ki mühendislik uygulamalarında temel amaç; insan yaşamını kolaylaştıracak sistemler ortaya koymaktır. Bu sistemlerin geliştirilmesinde ve biçimlenmesi sürecinde ki temel etken insan ihtiyaçlarının karşılanmasıdır. Uygarlaşma yönündeki olumlu gelişmeler, sosyal bir varlık olma yönünde ilerleme ve teknolojinin günümüzde geldiği nokta ihtiyaçların farklılaşmasına neden olmuştur. Değişen bu ihtiyaçlara cevap vermek için teorik ve pratik çalışmalar yapan mühendislerde farklı teknikler üzerinde yoğunlaşmışlardır. Mühendislik sistemlerinin analizi en genel anlamda iki aşamayı içermektedir. Mevcut bir fiziksel sistemi ifade eden matematik modelin kurulması ve elde edilen matematik denklemin analitik olarak veya çeşitli yaklaşık sayısal metotlar kullanılarak çözülmesidir. Bu iki aşamadan birincisi tecrübe, sezgi ve iyi bir matematik alt yapı; ikincisi ise modelleme de kullanılan sezgi ve bilgiye ilaveten hızlı ve kapsamlı bir hesaplayıcıyı gerektirir (Civalek 2004a). Günümüzde artık çözüm yöntemleri çeşitlenmiş ve analizciye pek çok alternatif sunmuştur.

Yapılan modellemenin gerçek modeli yansıtmaması, gerçek fiziksel olay ile uyumluluk derecesiyle ölçülür. Bu modellerin büyük bir çoğunluğu, sınır değer formundaki diferansiyel denklemlerdir. Bu matematik denklemlerin fiziksel modele en yakın sunuş biçimi ise varyasyonel problemlerdir. Giriş verileri üzerine konulan süreklilik ve türevlenebilirlik koşulları açısından, varyasyonel problem kendi özdeşi olan sınır değer problemiyle karşılaştırıldığında, uygulama alanı daha geniş olan problemler sınıfına hitap eder. Matematik modelleme işleminin, modelin varyasyonel problem olarak ifade edilmesinden sonraki aşaması, hesaplayıcıya tanıtımı uygun olan ayrık modelin oluşturulmasıdır(Celia ve Gray 1992). Günümüzde, diferansiyel denklemlerle ilgili matematik modellerin ayrık benzeşiklerinin oluşturulması ve elde edilen ayrık

problemin bilgisayarda çözümlenmesi açısından en kapsamlı ve bilinen yöntem Sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntemin klasik sonlu farklar yönteminden başlıca ayırt edici özelliği, sonlu elemanlar yöntemi sınır değer problemini değil varyasyonel problemi temel alır (Civalek 1998).

En genel anlamda, mühendislik problemleri, süreksiz ve sürekli ortam problemleri olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Serbestlik derecesi sonsuz büyük olan sürekli ortam problemlerinin çözümü bir diferansiyel denklem, bir integral denklem veya denklem sisteminin çözümünü gerektirdiği halde, serbestlik derecesi sonlu olan süreksiz ortam problemlerinin çözümü lineer denklem takımının çözümüyle elde edilebilmektedir. Sonsuz serbestlik dereceli sistemlerinin çözümünde çeşitli matematik güçlükler ortaya çıkmakta buna karşın süreksiz ortam problemlerinin çözümünde gerekli olan hesaplayıcı kapasitesi ve hesap süresi artmaktadır. Bunlardan başka mühendislik problemleri evrensel bir yaklaşımla; kararlı durum problemlerini içeren denge problemleri, kararlı durum problemlerindeki bazı parametrelerin kritik değerlerinin bulunmasını gerektiren özdeğer problemleri ve başlangıç değer formundaki problemleri içeren propagasyon problemleri olarak üç temel gruba da ayırmak mümkündür. Bu tarz bir sınıflandırmada da elde edilen denklem; kapalı yada açık sınır ve/veya başlangıç değerine sahip kısmi veya adi türevli bir diferansiyel denklem yada lineer bir denklem takımı olarak elde edilir (Crandall 1968).

Lineer bir diferansiyel denklem takımını sağlayan fonksiyonların bir bölgedeki değerleri tayin edilirken, bazı matematik güçlüklerle karşılaşılır. Bunun için bu hallerde, önce bu fonksiyonların verilen bölgenin sonlu uzunluktaki bazı noktalarına ait değerleri aranır. Daha sonra, bu değerler kullanılarak diğer bilinmeyen noktalardaki değerler elde edilir. Bu şekilde sürekli bir ortam yerine, cebirsel bir denklem takımının çözümünü gerektiren ayrık bir ortam alınmış olur. Hızlı ve yüksek kapasiteli hesaplayıcıların gelişmesi, ve kullanımının yaygınlaşması nedeniyle sürekli ortam yerine süreksiz ortam modeli üzerinden işlem yapmaya elverişli yöntemler artmıştır. Bu yöntemler içinde sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanlar günümüzde yaygın olarak kullanılabilir. Karakteristik büyüklüklerin ortam içinde değişmesini ifade

edebilmesi ve karmaşık sınır şartlarının çözüme katılablmesine olanak vermesi bakımından sonlu elemanlar daha yaygındır. Kurulan matematik model çoğunlukla sistemi ifade eden ya bir integral denklem yada kısmi veya adi türevli bir diferansiyel denklemdir. Sınır koşullarının karmaşıklığı nedeniyle elde edilen diferansiyel denklemin analitik çözümü çoğu durumda mümkün olmaz. Bu nedenle sayısal analiz tekniklerine başvurulur (Civalek 2001). Bilgisayar tekniğindeki gelişmeler ve denklemlerin matris formda ifade edilebilmesi sayısal analiz metotlarında büyük bir gelişmeye neden olmuştur (Çakıroğlu vd 1974). Bu metotlar içinde; sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, varyasyonel (değişim) hesap, Rayleigh-Ritz gibi yaklaşık metotlar günümüze kadar etkin olarak kullanılmıştır. Çoğu sayısal hesap yönteminde sürekli denge problemi sonlu sayıda serbestlik dereceli bir sisteme indirgenerek çözüme ulaşılır.

Son yıllarda kullanılan ayrık tekil konvolüsyon yöntemi özellikle titreşim problemlerinde üstünlüğünü ortaya koymuş ve yüksek frekansların hesabında güvenilir ve başarılı sonuçlar üretmiştir (Wei 2001a; Civalek 2007a; Civalek 2007d).

1.1. Daha önceki çalışmalar

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için; sonlu elemanlar, sonlu farklar, sınır elemanlar gibi birkaç sayısal çözüm yöntemi mevcut olup, bu metotlar günümüze kadar mühendislikte ve fizikte uygulama alanı olan titreşim, stabilite, akışkanlar mekaniği, sürekli ortam mekaniği, sıvı veya termal etkiler maruz yapıların analizi gibi pek çok probleme başarıyla uygulanmıştır.

Dairesel plakların analizi ile ilgili literatürde binlerce çalışma bulmak mümkündür. Statik, dinamik, burkulma ve serbest titreşim analizleri için günümüze kadar pek çok yöntem kullanılmıştır. Başlangıçta analitik yöntemler ile çözüme ancak belli yük ve sınır koşulları için ulaşılabilmektedir. Bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler, yeni algoritmalar ve sayısal yaklaşım yöntemlerinin ortaya çıkması ile pek çok plak problemi yeter yaklaşıklıkta çözülebilmektedir. Günümüze kadar sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, Galerkin, Ritz, diferansiyel quadrature yöntemler, pertürbasyon yöntemler, enerji ve varyasyonel yaklaşımlar dairesel plakların analizinde başarıyla kullanılmıştır.

Genel çözüm şekilleri ve sonuçlara ait detaylı bilgi Blevins tarafından sunulmuştur (Blevins 1984). Referans bir kaynak olması bakımından detaylı bilgi Leissa'nın kitabında bulunabilir (Leissa 1969). Irie ve arkadaşları tarafından dairesel plakların kayma etki dikkate alınarak titreşim analizleri için analitik bir yöntem sunulmuştur (Irie vd 1980). Leissa ve Narita (1980) basit mesnetli ince dairesel plakların analizini incelemişlerdir. Üç boyutlu Elastisite teorisi ile dairesel plakların analizinde Ritz yaklaşımı uygulanmış ve çeşitli mesnetleme durumu için sonuçlar verilmiştir (Liew ve Yang 1999). Shu ve Du (1997) tarafından dairesel plakların serbest titreşim hesabı diferansiyel quadrature yöntemi ile yapılmıştır.

Kalın dairesel plakların Mindlin teorisine dayalı bir yaklaşık hesabı Han ve Liew (1997) tarafından yapılmış ve diferansiyel quadrature yönteminin üstünlüğü bu tarz problemler için vurgulanmıştır.

Yine diferansiyel quadrature metodu kullanılarak dairesel Mindlin plakların serbest titreşim analizi yapılmış (Liew vd 1997) ve mod şekilleri karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Metodun sonlu elemanlar yöntemine göre daha az düğüm noktası ile çözüme ulaştığı ve pratik oluşu vurgulanmıştır.

Dairesel plakların teorisi ve çözüm yöntemleri ile ilgili detaylı bilgi için pek çok çalışma önerilebilir. Özellikle Timoshenko ve Krieger (1959), Reismann (1988) ve Leissa'nın (1977; 1977a; 1981; 1987) çalışmaları önemlidir.

2. AMAÇ VE KAPSAM

Gerek sonlu elemanlar ve gerekse sonlu farklar metodunda düğüm noktası sayısı arttıkça elde edilen çözümlerin hassasiyetinin arttığı bilinmektedir. Bununla birlikte, daha hassas sonuçlar elde etmek için düğüm noktası sayısının artırılması, gerekli olan bilgisayar kapasitesi ve hesap süresi de aynı oranda arttırmaktadır. Ancak pek çok problemde gerçek değere yakın hassas sonuçlar fiziksel anlamda ancak birkaç özel noktada gerekmektedir.

Bilgisayar tekniğindeki gelişmelere paralel olarak denklemlerin matris formda ifade edilmesi ve bilgisayar ortamına aktarılmasındaki kolaylıklar neticesinde hesap yöntemleri sayısal analiz lehine gelişmeler göstermiştir. Hesap tekniklerindeki bu gelişmeler nedeniyle lineer kabul yerine parça parça lineerleştirerek adım adım hesaplama, ardışık yaklaşım veya bu tür sistemlerde süperpozisyon metodu geçerli olmadığından ardışık yük artım metotları gibi lineer olmayan sayısal analiz yöntemleri çok yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır.

Bu metotlar içinde sonlu elemanlar ve sonlu farklar metotları kullanım alanı diğerlerine göre daha fazla olan iki analiz tekniğidir. Sonlu elemanlar metodunda çözüm için yaklaşık bir fonksiyon seçilerek çözüme başlanır. Ancak sonlu elemanlar metodunda seçilen enterpolasyon fonksiyonları lokal düzeyde olup elemanlar için geçerlidir. Sonlu elemanlar metodunda çözüm bölgesi çok fazla elemana ayrılarak yeter hassasiyette sonuçlar elde etmek mümkündür. Özellikle plak veya kabuk elemanların hassas çözümleri ancak yüksek sayıda elemana bölünerek sağlanır. Elemanın çok fazla bölgeye ayrılarak çözüme ulaşılması durumunda ise gerekli olan hesaplayıcı kapasitesi ve zaman artacaktır. Bununla birlikte yeter yaklaşıktaki sonuçlar yani gerçek değere çok yakın sonuçlar mühendislik uygulamalarında çoğunlukla bir veya birkaç özel noktada istenir (Civalek 2004b).

Daha az grid nokta sayısı kullanılarak yeter hassasiyette sonuçlar verebilecek bir metod olan Diferansiyel Quadrature Metodu(DQM) Bellman ve Casti(1971) tarafından geliştirilerek lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümüne uygulanmıştır. Diferansiyel quadrature metodu; koordinat doğrultusuna göre bir fonksiyonun türevi, çepeçevre saran bir çözüm bölgesindeki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşım kurabilen sürekli bir fonksiyon ve o doğrultu boyunca bütün ağ noktalarındaki fonksiyon değerlerinin tümünün lineer toplamı olarak ifade edilebileceği prensibine dayanır (Belman vd 1972).

Diferansiyel quadrature metodu ile sonlu elemanlar metodu arasında gerek yaklaşım ve gerekse uygulama açısından çeşitli farklılıklar mevcuttur. Diferansiyel quadrature metodu genel çerçeveli yani global bir yaklaşım metodu olup yüksek dereceden polinomlar kullanılmakta iken sonlu elemanlar metodunda seçilen fonksiyonlar düşük dereceden olup sadece eleman bazında yani lokal düzeydedir (Du vd 1994). Diferansiyel quadrature metodu herhangi bir noktadaki fonksiyonun türevine direkt bir yaklaşım getirir, oysa sonlu elemanlar metodunda yaklaşım lokal elemanlar üzerinde olup, türev ifadeler yaklaşım metodundan elde edilir (Bert ve Malik 1996b). Diferansiyel quadrature metodu daha çok sonlu farklar ile benzerlik gösterir. Ancak sonlu farklar metodu da düşük dereceden polinom yaklaşımları üzerine kurulan lokal bir yaklaşım metodudur. Bununla birlikte sonlu farklar metodu seri yaklaşımlar ile çözüme ulaşırken DQ metodunda polinom fonksiyonlar kullanılır. Bununla birlikte diferansiyel quadrature metodunda elde edilen matrisler band matris olup simetrik değildir. Benzer sayısal yaklaşım yöntemlerinde olduğu gibi, DQ metodu da mevcut türev denklemi, çözüm bölgesinde önceden seçilen düğüm noktalarındaki bilinmeyen fonksiyon değerleri cinsinden, lineer denklem takımına dönüştürür. Bu denklemlere ilaveten sınır şartları da DQ metoduna uygun formda yazılır. Sınır şartlarının Dirichlet ve/veya Neuman yada karışık olması herhangi bir güçlük doğurmaz (Civalek 2004).

Kare veya dikdörtgen geometri dışında farklı geometriye sahip plaklar köprü ve uçak uzay yapılarında, füze ve roket sanayisinde ve gemi mühendisliğinde kullanılmaktadır. Bu yapıların boyutlandırmaya esas teşkil edecek titreşim frekanslarının hesaplanması geçen 30 yılda araştırmacıların üzerinde dikkatle çalıştığı bir konudur.

Bu çalışmanın esas amacı Kirchoff ve Reissner plak teorisi kullanılarak, yani kayma deformasyonlarının etkisi dikkate alınarak, çıkartılmış plak hareket denklemleri çözülecektir. Böylece, dairesel plakların serbest titreşim hesapları yeni iki yöntem olan tekil konvolüsyon ve diferansiyel quadrature yöntemleriyle yapılarak sonuçlar karşılaştırılacaktır. Metotların düğüm sayısı bakımından performansları karşılaştırılacaktır. ANSYS ve SAP 2000 programları ile elde edilen sonuçlar test edilecek ve diğer sınır durumları için bütün mod şekilleri hesaplanacaktır.

3. DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU

Diferansiyel quadrature metodu; bir fonksiyonun verilen bir ayrık noktadaki bir uzay değişkenine göre kısmi türevi, o değişken bölgesinin bütün ayrık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı bir lineer toplamı ile ifade edilir, şeklinde tanımlanan düşünceye dayanır. Yeter yaklaşıktaki sonuçlar elde etmek için daha az sayıda grid kullanan diferansiyel quadrature metodu ; fizik ve mühendislikte karşılaşılan başlangıç değer ve sınır değer problemleri için farklı bir yaklaşım ortaya koymuştur. Bu amaçla tek boyutlu bir $u(x)$ fonksiyonun birinci türevini $x_i (i=1,2,\dots,N)$ noktalarında N ayrık nokta için göz önüne alırsak i .nci ayrık nokta için birinci türev (Bert ve Malik 1996) ;

$$u_x(x_i) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} u(x_j) \quad ; \quad i = 1,2,\dots,N \quad (3.1)$$

olacaktır. Burada x_j değişken bölgesindeki ayrık noktaları, $u(x_j)$ bu noktalardaki fonksiyon değerlerini, ve A_{ij} birinci dereceden türev için bu değerleri fonksiyon değerlerine bağlayan ağırlık katsayılarını ifade eder. Ağırlık katsayılarının hesabı, karşılık gelen koordinat yönlerinde fonksiyonel yaklaşımlar ile gerçekleştirilir. Test fonksiyonu yada yaklaşım fonksiyonu olarak bilinen bu fonksiyonların seçiminde süreklilik şartına dikkat edilmelidir. Benzer zorunluluk sonlu elamanlar yöntemindeki enterpolasyon fonksiyonlarının seçiminde de vardır. Ancak DQ metodunda, seçilen fonksiyonlarının Ritz metodunda olduğu gibi sınır şartını sağlaması zorunluluğu yoktur. Yaklaşım fonksiyonları, alan değişkenlerinin olası kararlı yani üniform durumlarını tanımlayabilmeli ve diferansiyel denklemdeki yada sınır şartlarındaki mevcut en yüksek dereceli diferansiyel kadar türevinin alınabilmesi gerekir. Yani süreklilik şartı için, bir koordinat yönündeki düğüm sayısı, diferansiyel denklemdeki karşılık gelen bağımsız değişkene göre en yüksek dereceli türevin bir fazlasına eşit olmalıdır. Belmann ve arkadaşları (1972) ağırlık katsayılarının hesabı için iki farklı yöntem

önermişlerdir. Bunlardan birincisinde (3.1) denklemini tam olarak alındığında, test fonksiyonu olarak (N-1) veya daha küçük dereceden seçilen polinom fonksiyonu için;

$$u_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

verilen denklem (3.1)'de yerine yazılırsa aşağıda belirtildiği formda bir lineer denklem takımı verir (Bellman ve Casti 1971)

$$(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j^{k-1} \quad (3.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad \text{ve} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad \text{için}$$

Ancak bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinanı Vandermonde formunda olduğundan tekil bir çözüme sahiptir. Denklem ağırlık katsayıları için analitik olarak Hamming'in önerdiği metotla (Hamming 1973) yada Vandermonde denklemleri için Bjorck ve Pareyra'nın (1970) önerdiği gibi bilinen bazı özel algoritmalar ile sayısal olarak çözülebilir. Bu tekilliği gidermek için, ağırlık katsayıları, değişik düğüm nokta sayıları ile (3.3) denklemini eşit düğüm değerleri için hesaplanmalıdır. Denklem (3.3) aşağıdaki matris formunda da verilebilir.

$$\{x'\}_j = [A_{ij}] \{x\}_j \quad (3.4)$$

Benzer işlemler iki ve daha fazla derecenin türev ifadeleri için de yazılabilir. Böylece, her bir dereceden türev için ağırlık ifadeleri birinci dereceden türev ifadesinden farklı olmaktadır. İkinci dereceden türev için metot (Bert vd 1994)

$$u_{xx}(x_i) = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N B_{ij} u(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

olarak verilir. Burada B_{ij} ikinci dereceden türev için ağırlık katsayısıdır. Denklem (3.5) birinci dereceden ağırlık katsayıları cinsinden

$$u_{xx}(x_i) = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{jk} u(x_k); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

Denklem (3.2) ile verilen polinom fonksiyon uygulanarak ikinci dereceden türev ifadesi

$$(k-1)(k-2)x_i^{k-3} = \sum_{j=1}^N B_{ij} x_j^{k-1} \quad (3.7)$$

olmaktadır. Bu denklem yukarıda verilen (3.3) denklemine benzer yaklaşımla çözülür. İkinci, üçüncü ve dördüncü dereceden ağırlık katsayıları B_{ij} , C_{ij} , D_{ij} , aşağıdaki formda hesaplanır (Bert vd 1993)

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj} \quad (3.8)$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} \quad (3.9)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} C_{kj} \quad (3.10)$$

Bellman ve arkadaşları (1972) tarafından ağırlık katsayılarının hesaplanması için önerilen ikinci metot'da birinciye benzer olup farklı bir test fonksiyonu seçilir. Denklem (3.1)'i sağlayacak şekilde x_k ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri olarak

$$u_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k)L_N^{(1)}(x_k)}, \quad k=1,2,\dots,N \quad (3.11)$$

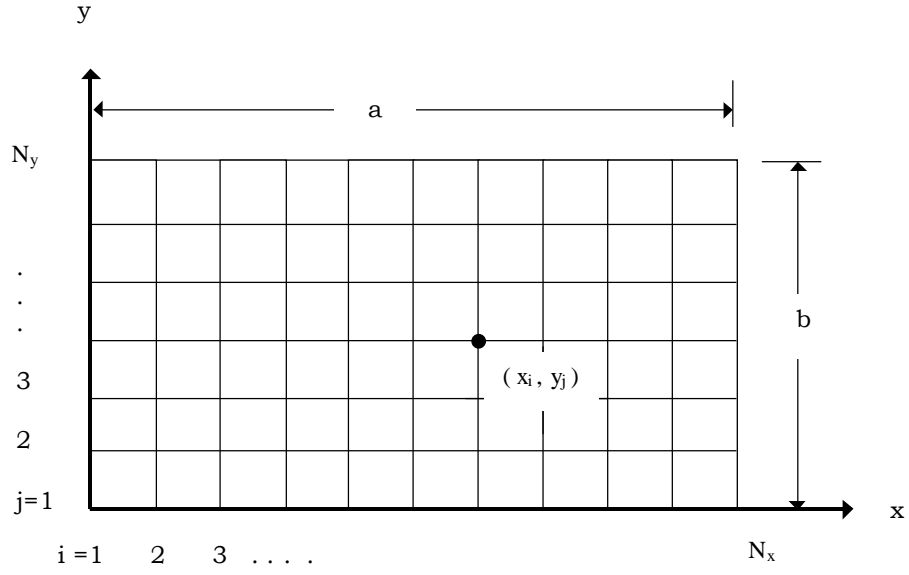
fonksiyonu seçilir. Burada N grid nokta sayısı, $L_N(x)$ N . Dereceden legendre polinomu, $L_N^{(1)}(x)$ ise bu polinomun birinci türevidir. Denklemdaki x_k ötelenmiş legendre polinomunun kökleri olarak seçilip (3.11) ile verilen polinom fonksiyon (3.1) denkleminde yazılırsa ağırlık katsayıları

$$A_{ij} = \frac{L_N'(x_i)}{(x_i - x_j)L_N'(x_j)} \quad i \neq j \text{ için} \quad (3.12)$$

$$A_{ii} = \frac{1 - 2x_i}{2x_i(x_i - 1)} \quad i=j \text{ için} \quad (3.13)$$

$$i, j= 1,2,\dots,N$$

Bu ikinci yaklaşımda, (3.12) ve(3.13) ile tanımlanan ağırlık katsayıları birincide olduğu gibi herhangi bir tekillik problemi ve lineer denklem takımı çözmeden elde edilir. Bir boyutlu problemlere benzer olarak iki boyutlu problemler içinde diferansiyel quadrature metodu geliştirilebilir. Şekil 3.1'de görülen dikdörtgen düzlem için, N_x x -doğrultusundaki grid ve N_y y -doğrultusundaki düğüm sayısı olmak üzere türev ifadeleri yazılabilir.



Şekil 3.1. İki boyutlu bölge için grid noktaları

Bu amaçla $u(x,y)$ fonksiyonunun r -inci mertebeden x 'e göre, s -inci mertebeden y 'e göre ve $(r+s)$ -nci- mertebeden x ve y değişkenlerine göre (x_i, y_j) ayrık noktaları için türev ifadeleri (Bert ve Malik 1996)a;

$$\left. \frac{\partial^r u}{\partial x^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} u(x_k, y_j); \quad r=1,2,\dots,N_x-1 \quad (3.14)$$

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial y^s} \right|_{y=y_j} = \sum_{k=1}^{N_x} B_{jk}^{(s)} u(x_i, y_k); \quad s=1,2,\dots,N_y-1 \quad (3.15)$$

$$\left. \frac{\partial^{(r+s)} u}{\partial x^r \partial y^s} \right|_{x_i y_j} = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \left(\frac{\partial^s u}{\partial y^s} \right)_{x_i y_j} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^{(s)} u(x_k, y_m); \quad (3.16)$$

$$i=1,2, \dots, N_x, \text{ ve } j= 1,2,\dots, N_y$$

olarak verilir. $A_{ij}^{(r)}$ ve $B_{ij}^{(s)}$ $u(x,y)$ fonksiyonunun sırasıyla x' e ve y' ye göre r inci ve s inci mertebeden x_i ve y_j ayrık noktaları için yazılan türev ağırlık katsayılarıdır. Bu katsayılar ilk olarak Shu ve Richards(1992) tarafından geliştirilmiştir. Bu ağırlık katsayıları;

$$A_{ij}^{(r)} = r \left[A_{ii}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right]; \quad i,j=1,2,\dots,N_x, \quad j \neq i; \quad \text{ve } r = 2,3,\dots, N_x-1 \quad (3.17)$$

$$B_{ij}^{(s)} = s \left[B_{ii}^{(s-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(s-1)}}{y_i - y_j} \right]; \quad i,j=1,2,\dots,N_y, \quad j \neq i; \quad \text{ve } s = 2,3,\dots, N_y-1 \quad (3.18)$$

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_x} A_{ij}^{(r)}; \quad i = 1,2,\dots,N_x \quad \text{ve } r = 1,2,\dots, N_x-1 \quad (3.19)$$

$$B_{ii}^{(s)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_y} B_{ij}^{(s)}; \quad i = 1,2,\dots,N_y \quad \text{ve } r = 1,2,\dots, N_y-1 \quad (3.20)$$

olmaktadır. Dikkat edilmelidir ki örnek noktaların sayısı verilen bağıntıların performansında yani ağırlık katsayılarının hesabında etkili değildir. Hesap performansını geliştirmek açısından önemlidir. Bundan başka, bazı durumlarda bu noktalar çözümün doğruluğunu etkileyebilmektedir. Örneğin eşit aralıklı noktalar ile işlem kısmen daha kolay ve uygulaması daha basittir (Liu ve Liew 1999), ancak eşit olmayan nokta aralığı için az da olsa sonuçların hassaslığı düşür. Düğüm noktalarının seçiminde sıkça kullanılan ve önerilen metot her iki doğrultuda yani her bir koordinat yönünde (tek boyutlu problemler için bir yönde) eşit aralıklı seçilen (Du vd 1996)

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-1}; \quad i = 1,2,\dots,N_x \quad (3.21a)$$

$$y_j = \frac{j-1}{N_y-1}; \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (3.21b)$$

olarak verilir. Bazı durumlarda eşit aralıklı olmayan noktaların seçiminin daha iyi sonuç verdiği bilinmektedir. Yine iki boyutlu problemler için eşit olmayan düğüm noktaları Chebyshev-Gauss-Lobatto noktaları için (Farsa vd 1993):

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (3.22)$$

$$y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{j-1}{N_y-1} \pi \right) \right], \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (3.23)$$

şeklinde seçilir. Bununla birlikte diferansiyel quadrature çözümlerinde farklı koordinat yönlerindeki düğüm noktaları sayısı ve tipi bakımından farklı seçilebileceği gibi, farklı koordinat yönlerinde farklı test fonksiyonları da seçilebilir. Pek çok çalışmada ispatlanmıştır ki (Liew ve Liu 2000; Kukreti vd 1992; Liew ve Teo 1999; Lin vd 1994) eşit olmayan şekilde düzenlenmiş düğüm nokta şekli özellikle titreşim problemlerinde daha başarılı sonuçlar üretmektedir.

3. 1. Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ)

Harmonik diferansiyel quadrature yönteminde ağırlık katsayılarının hesaplanması için önerilen test fonksiyonu trigonometrik yada harmonik formda olduğundan metot harmonik diferansiyel quadrature olarak önerilmiştir. Bu fonksiyon (Civalek 2004; 2004a)

$$u_k(x) = [1, \sin(d), \cos(d), \dots, \sin \frac{N-1}{2}(d), \cos \frac{N-1}{2}(d)]; k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.24)$$

olarak verilmektedir. Burada $d = \pi x$. Bu yöntemde birinci ve ikinci mertebeden ağırlık katsayıları (Liew vd 1999);

$$A_{ij} = \frac{(d/x)P(x_i)}{2P(x_j)\sin\left[\frac{x_i - x_j}{2}\right](d/x)}, \quad j \neq i \text{ için} \quad (3.25)$$

olur. Burada

$$P(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \sin\left(\frac{x_i - x_j}{2} \frac{d}{x}\right), \quad j=1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (3.26)$$

Eğer $j = i$ için birinci mertebeden ağırlık katsayısı hesaplanacak olursa ifade

$$A_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}; j=1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (3.27)$$

olarak verilir. Benzer olarak ikinci merteben ağırlık katsayıları

$$B_{ij} = A_{ij} \left[2A_{ii} - \frac{d}{x} \operatorname{ctg} \frac{x_i - x_j}{2} \left(\frac{d}{x} \right) \right] \quad j \neq i \quad \text{için} \quad (3.28)$$

$$B_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N B_{ij} \quad j = i \quad \text{için} \quad (3.29)$$

4. AYRIK TEKİL KONVOLÜSYON YÖNTEMİ

Diğer sayısal yöntemlerde olduğu ayırık tekil konvolüsyon yöntemi (ATK) de mevcut bir türev denklemi yani sürekli bir sisteme ait denklemi yaklaşım veya test fonksiyonu (sonlu elemanlarda şekil fonksiyonu) olarak kerneller kullanarak ayırıştırır. Kernel olarak Shannon kernel, Shannon delta kernel, Dirichlet kernel, de la Vallee kernel vb. kullanılır. Detaylı bilgi Wei (1999, 2000, 2001) ve Civalek (2006; 2007c, 2007d, 2007e, 2007f) tarafından sunulan çalışmalarda bulunabilir. Tekil bir konvolüsyon (Wei 2001b)

$$F(t) = (T * \eta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(t-x)\eta(x)dx \quad (4.1)$$

ile tanımlanır. Çalışmada kernel olarak Shannon delta kernel (SDK) ve Lagrange kernel(LK) kullanılmıştır. Shannon kernel (Wei 2001; Civalek 2007b)

$$\delta_{\Delta,\sigma}(x-x_k) = \frac{\sin[(\pi/\Delta)(x-x_k)]}{(\pi/\Delta)(x-x_k)} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right]; \sigma > 0 \quad (4.2)$$

Olarak tanımlanır. Burada $\Delta=\pi/(N-1)$ her bir düğüm arası aralık ve N düğüm nokta sayısı. Burada σ parametresi Gauss zarfı (Gaussian envelope) genişliği olarak bilinir ve $\sigma = rh$ ile hesaplanır. Burada r hesaplamanın başında seçilecek bir parametredir. ATK yönteminde herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun x_i noktası için x koordinat yönündeki türevi aşağıdaki toplam ile verilir (Wei 2001a)

$$\left. \frac{d^n f(x)}{d x^n} \right|_{x=x_i} = f^{(n)}(x) \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(n)}(x_i-x_k) f(x_k); \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (4.3)$$

Burada üst indis n türevin mertebesidir. Ayırık formda bu türev (Civalek 2007)

$$f^{(n)}(x) = \left. \frac{d^n f}{d x^n} \right|_{x=x_i} \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(n)}(k\Delta x_N) f_{i+k, j}. \quad (4.4)$$

Shannon kernel kullanılıncı türev için gerekli katsayılar yani $\delta_{\Delta, \sigma}^{(n)}(x)$ ifadeleri kolayca hesaplanır. Örnek olarak ikinci mertebeden türev için bu terim (Wei 2001b)

$$\begin{aligned} \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(x_m - x_k) &= -\frac{(\pi/\Delta) \sin(\pi/\Delta)(x - x_k) \exp[-(x - x_k)^2 / 2\sigma^2]}{(x - x_k)} \\ &\quad - 2 \frac{\cos(\pi/\Delta)(x - x_k) \exp[-(x - x_k)^2 / 2\sigma^2]}{(x - x_k)^2} \\ &\quad - 2 \frac{\cos(\pi/\Delta)(x - x_k) \exp[-(x - x_k)^2 / 2\sigma^2]}{\sigma^2} + 2 \frac{\sin(\pi/\Delta)(x - x_k) \exp[-(x - x_k)^2 / 2\sigma^2]}{\pi(x - x_k)^3 / \Delta} \\ &\quad + \frac{\sin(\pi/\Delta)(x - x_k) \exp[-(x - x_k)^2 / 2\sigma^2]}{\pi(x - x_k) \sigma^2 / \Delta} \\ &\quad + \frac{\sin(\pi/\Delta)(x - x_k)}{\pi \sigma^4 / \Delta} (x - x_k) \exp[-(x - x_k)^2 / 2\sigma^2] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Yüksek mertebeden türevler için diğer katsayılar literatürde bulunabilir (Wei 2001b).

4.1. Lagrange kernel (LK)

Bu kernel aşağıdaki şekilde tanımlı olup $i = 0, 1, \dots, N-1$ and $j = -M, \dots, M$ için

$$\mathfrak{R}_{i,j}(x) = \begin{cases} \prod_{k=i-M, k \neq i+j}^{i+M} \frac{x-x_k}{x_{i+j}-x_k}, & x_{i-M} \leq x \leq x_{i+M}, \\ 0 & \end{cases} \quad (4.6)$$

Bu durumda türev katsayıları (Civalek 2007; Wei 2001)

$$W_{i,j}^{(n)} = n \left[W_{ij}^1 W_{ij}^{(n-1)} - \frac{W_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_{i+j})} \right] \quad (4.7)$$

ile tanımlıdır. Burada n türevin mertebesi, x ler koordinat yönünü, W katsayıları ise türev katsayılarıdır.

5. DAİRESEL PLAKLAR

Plak ve kabukların kullanımı, yeni malzeme ve yapım tekniklerinin ortaya çıkması ile artmıştır. Özellikle uçak-uzay sanayi, gemi mühendisliği gibi alanlarda bu tür yapılar yaygındır. Analitik çözümlerde ortaya çıkan güçlükler nedeniyle son yıllarda sayısal metotlara ağırlık verilmiş ve sonlu elemanlar metodu çeşitli avantajları nedeniyle yıllardan beri pek çok probleme uygulanmış ve en fazla tercih edileni olmuştur. Ancak daha az düğüm noktası ve bu nedenle daha az denklem çözerek ve dolayısıyla daha az hesaplayıcı ihtiyacı ile çözüme ulaşan diferansiyel quadrature (DQ) yöntemleri son yıllarda pek çok alanda uygulama bulmaktadır. Çeşitli yaklaşım polinomları kullanan DQ yöntemlerinden farklı olarak tekil konvolüsyon yöntemler çeşitli kerneller kullanarak çözüme ulaşır. DQ yöntemi global olup ayrık tekil konvolüsyon yöntemi lokal bir yaklaşım sergiler.

Tasarım esnasında mühendisler, boyutlandırmaya esas teşkil eden titreşim frekansları, burkulma yükleri ve gerilmeleri bilmek zorundadırlar. Bu çalışmada titreşim frekansları (özdeğerler) ayrık tekil konvolüsyon ile hesaplanacak, mod şekilleri ise paket program yardımıyla her tür mesnet koşulu için geliştirilecektir.

Bu bölümde plakların titreşim denklemleri direkt olarak verilecektir. Bu denklemlerin çıkartılması ile ilgili literatürde yeterli kaynak mevcuttur ve bu işlem çalışmamız amacı dışındadır.

5.1. İnce dairesel plak

İnce dairesel bir plağın (Şekil 5.1) titreşim denklemi (Leissa 1969)

$$\frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\rho h}{D} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (5.1)$$

Deplasman fonksiyonunu aşağıdaki şekilde seçebiliriz.

$$u(r,t) = U(R) e^{i\omega t} \quad (5.2)$$

Denklem (5.2) yukarıda verilen (5.1) denklemde yazılırsa

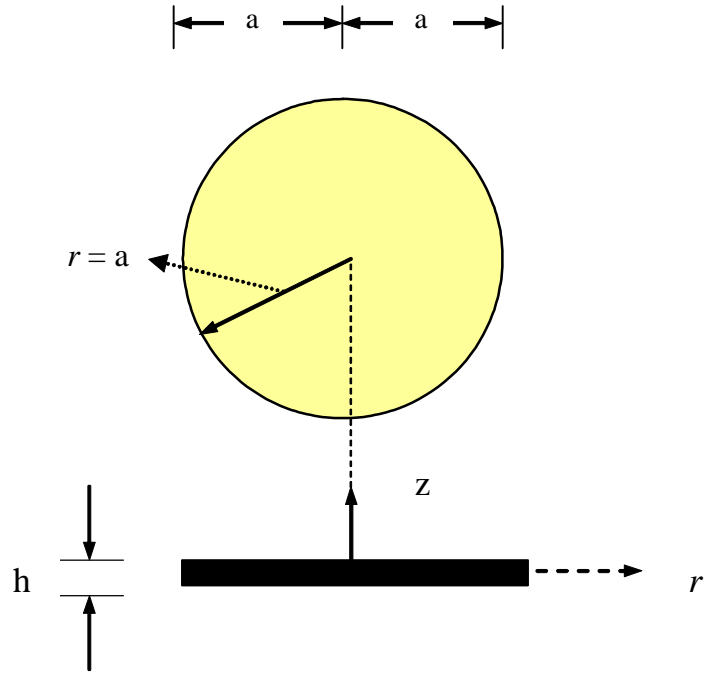
$$\frac{\partial^4 U}{\partial R^4} + \frac{2}{R} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial R^3} \right) - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \right) + \frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial U}{\partial R} \right) - \Omega^2 U = 0 \quad (5.3)$$

Şeklinde serbest titreşim denklemi elde edilir. Bu denklemde: $R = r/a$, a plağın çapı, h plağın kalınlığı, D eğilme rijitliği, ve Ω ise boyutsuz frekans değeri olup

$$\Omega^2 = \rho h \omega^2 a^4 / D. \quad (5.4)$$

formülüyle tanımlanır. Yukarıda verilen (5.3) denkleminde ATK yönteminin uygulanması ile aşağıdaki formda ayırık denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(4)}(k\Delta x) U_{k,j} + \frac{2}{R_i} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(3)}(k\Delta x) U_{k,j} - \frac{1}{R_i^2} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k\Delta x) U_{k,j} \\
& + \frac{1}{R_i^3} \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta x) U_{k,j} = \Omega^2 U_{k,j}
\end{aligned} \tag{5.5}$$



Şekil 5.1. Dairesel plak ve geometrik elemanları

Yukarıdaki (5.5) denkleminin sınır koşullarının dahil edilmesinden sonra ilgili matris denklemler düzenlenerek standart bir özdeğer formuna sokulur ve çözülür.

5.2. Mindlin dairesel plak

İnce plak teorisinin aksine kayma deformasyonlarının plak alan denklemlerine ilave edilmesi esasına dayanan çeşitli plak teorileri mevcuttur. Reissner ve Mindlin plak teorileri bunlardan en yaygın bilinenleridir.

Kayma deformasyonlarının dikkate alındığı izotrop ve homojen bir dairesel plak için titreşim denklemi (Liew vd 1997)

$$H^2 \left(R^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + R \frac{\partial \Psi}{\partial R} - \Psi \right) - 6\kappa(1-\nu)R^2 \left(\Psi + \frac{\partial W}{\partial R} \right) - H^2 R^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} = 0, \quad (5.6)$$

$$\left(R \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{\partial W}{\partial R} + R \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \Psi - \frac{2R}{(1-\nu)\kappa} \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} \right) = 0, \quad (5.7)$$

olarak verilir. Bu denklemler boyutsuz formda olup, ilgili boyutsuz değişkenler şöyle tanımlanır:

$$R = r/a, \quad W = w/a, \quad \Psi = \psi, \quad H = h/a, \quad T = t/t_0, \quad t_0 = \sqrt{\frac{\rho a^2 (1-\nu^2)}{E}}, \quad (5.8)$$

Denklemlerde w plak deplasman değişkeni, D eğilme rijitliği olup $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$, formülüyle tanımlanır, κ kayma düzeltme faktörü, ψ eksen r boyunca olan eğilme rotasyonu, ρ plak malzemenin yoğunluğu, t zaman, E, G ve ν ise sırasıyla Elastisite modülü, kayma modülü ve Poisson oranıdır. Deplasman ve rotasyonlar

$$W(R, T) = W_j(R) e^{i\Omega_j T}, \quad (5.9)$$

$$\Psi(R, T) = \Psi_j(R) e^{i\Omega_j T}, \quad (5.10)$$

Formüllerleriyle tanımlanırsa (burada Ω_j titreşimin *j.nci* moduna ait özdeğeridir). Denklem(5.9 ve 5.10) da verilen değerler (5.6 ve 5.7) denklemlerinde yazılırsa (Liew vd 1997)

$$H^2 \left(R^2 \frac{d^2\Psi}{dR^2} + R \frac{d\Psi}{dR} - \Psi \right) - 6\kappa(1-\nu)R^2 \left(\Psi + \frac{dW}{dR} \right) - H^2 R^2 \Omega^2 \Psi = 0, \quad (5.11)$$

$$R \frac{d^2W}{dR^2} + \frac{dW}{dR} + R \frac{d\Psi}{dR} + \Psi + \frac{2R}{(1-\nu)\kappa} W = 0. \quad (5.12)$$

olarak titreşim denklemi boyutsuz formda elde edilir. Bu yönetici denklemlere ATK yönteminin uygulanması ile

$$H^2 \left[R^2 \sum_{k=-M}^M \delta^{(2)}_{\Delta, \sigma}(k\Delta R) \Psi_k + R \sum_{k=-M}^M \delta^{(1)}_{\Delta, \sigma}(k\Delta R) \Psi_k \right] - 6\kappa(1-\nu)R^2 \left[\Psi_i + \sum_{k=-M}^M \delta^{(1)}_{\Delta, \sigma}(k\Delta R) W_k \right] - H^2 R^2 \Omega^2 \Psi_i = 0 \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned}
& R \sum_{k=-M}^M \delta^{(2)}_{\Delta,\sigma}(k\Delta R)W_k + \sum_{k=-M}^M \delta^{(1)}_{\Delta,\sigma}(k\Delta R)W_k + R \sum_{k=-M}^M \delta^{(1)}_{\Delta,\sigma}(k\Delta R)\Psi_k \\
& + \Psi_i + \frac{2R}{(1-\nu)\kappa}W_i = 0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Ayrık formda denklemler elde edilmiş olur.

Kalın plak çözümü için plak dış kenarında basit mesnet ve ankastre mesnet olarak iki farklı sınır koşulu dikkate alınmıştır. Bu mesnet durumları için sınır koşulu denklemleri aşağıda verilmiştir.

Basit mesnetli kenar (S)

$$W = 0, M_r = 0, \tag{5.15}$$

Ankastre mesnet (C)

$$W = 0, \Psi = 0. \tag{5.16}$$

Denklemler boyutsuz olarak yazıp ATK konvolüsyon yöntemi uygulanırsa ayrık formda aşağıdaki denklemler elde edilir.

a) Basit mesnet (S)

$$W_N = 0 \tag{5.17}$$

$$\sum_{k=-M}^M \delta^{(1)}_{\Delta,\sigma}(k\Delta R)\Psi_k + \nu\Psi_N = 0, \tag{5.18}$$

b) Ankastre mesnet (C)

$$W_N = 0 \quad (5.19)$$

$$\Psi_N = 0 \quad (5.20)$$

Dairesel plak için yukarıdaki sınır koşullarına ilave olarak aşağıdaki koşullar dikkate alınmalıdır. Bunlar plak merkezi için süreklilik yada düzenlilik (regularity) ve plak merkezinde rijit mesnet durum (rigid central support)dur.

c) Düzenlilik koşulu (R)

$$\Psi_1 = 0 \quad (5.21)$$

$$\sum_{k=-M}^M \delta^{(1)}_{\Delta, \sigma}(k\Delta R) W_k = 0, \quad (5.22)$$

d) merkezde rijit mesnet (D)

$$W_1 = 0 \quad (5.23)$$

$$\Psi_1 = 0 \quad (5.24)$$

Sayısal hesaplarda Poisson oranı 0.3 olarak alınmıştır.

6. SAYISAL HESAPLAMALAR

Bu bölümde, hem ince dairesel plak ve hem de kayma etkisinin dikkate alındığı kalın plak için sayısal sonuçlar sunulacaktır. Çizelge 5.1-5.4’de ince plaklar için elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Çizelge 6.1. Ankastre mesnetli dairesel plak için ilk üç frekans değeri

Frekanslar	Leissa (1969)	HDQ Bu çalışma	Kesin sonuç (Blevins 1994)	DSC Bu çalışma
Ω_1	10.21	10.21	10.22	10.23
Ω_2	39.77	40.68	39.77	40.01
Ω_3	89.10	89.33	89.10	89.11

Çizelge 6.2. Dairesel plak için doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması

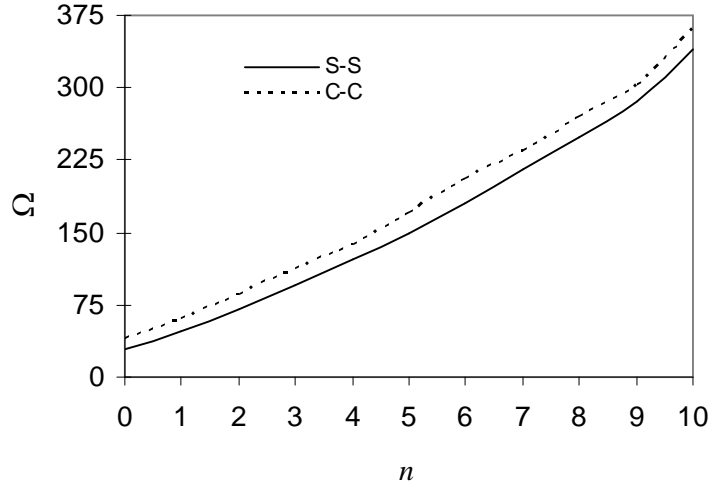
ν	Basit mesnetli dairesel plak					
	DQ (Bert vd 1993)	Leissa (1969)	DSC (N=7)	DSC (N=9)	DSC (N=11)	DSC (N=16)
0.0	4.443	4.444	5.857	5.112	4.584	4.451
0.1	4.619	4.619	5.996	5.147	4.673	4.620
0.2	4.782	4.783	6.415	5.863	4.811	4.786

Çizelge 6.3. Basit mesnetli dairesel plak için ilk dört frekans ($\nu=0.3$)

	Mod sayısı			
	1	2	3	4
ATK (N=16)	5.02	30.37	74.88	140.52
Leissa (1966)	4.93	29.72	74.15	138.31
HDQ (Civalek 2004)	4.94	29.85	74.96	139.83

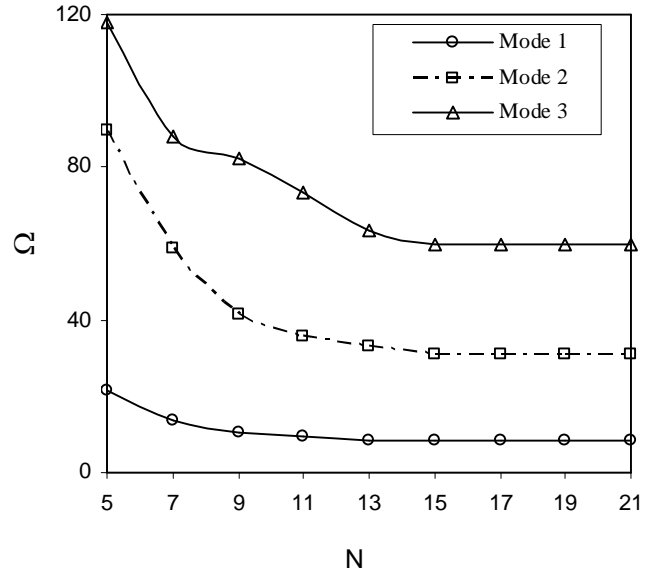
Çizelge 6.4. Basit mesnetli dairesel plak için frekans değerleri

Mod sayısı	Leissa (1966)	Bu çalışma		
		HDQ	DQ	ATK
1	4.93	4.87	4.79	5.02
2	13.89	13.86	13.88	14.03
3	25.61	26.01	24.98	26.11
4	39.95	38.84	37.12	40.32
5	56.84	55.97	55.04	56.91

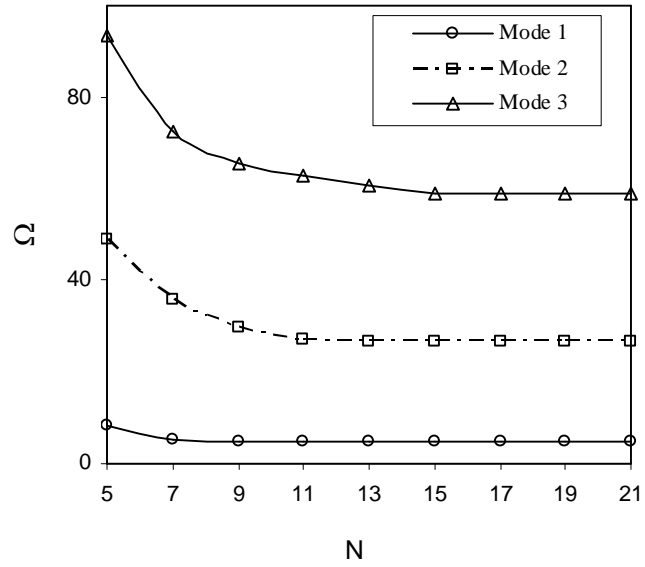


Şekil 6.1. Basit mesnetli ve ankastre mesnetli plağın frekans değerleri

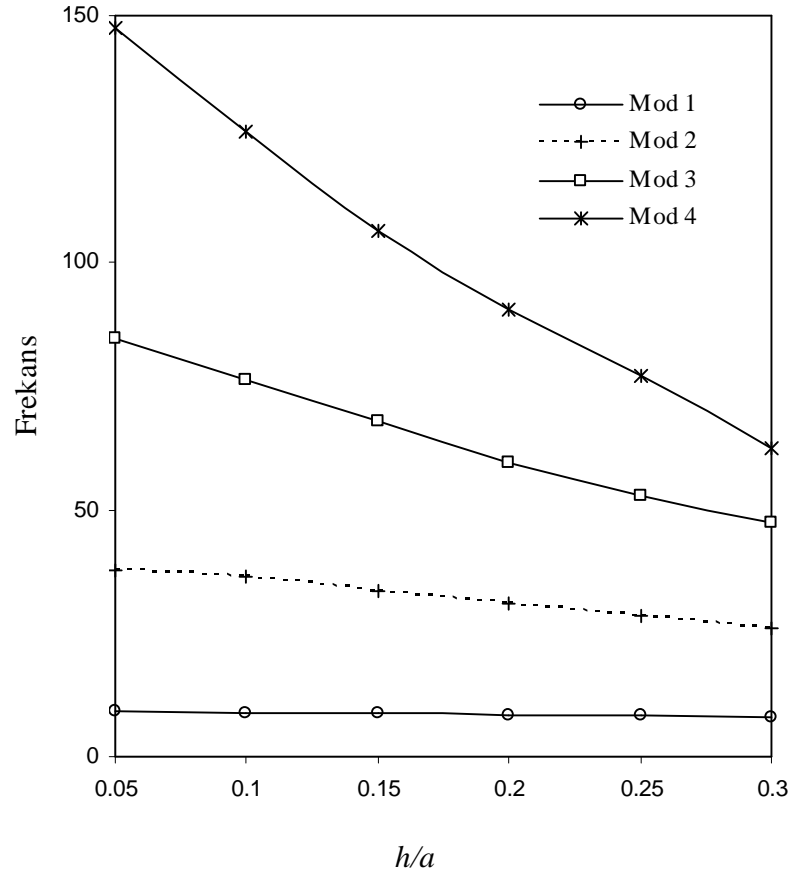
Bundan sonraki kısımda ise kalın plak için yani Mindlin plak teorisi için mevcut denklemlerin çözülmesiyle elde edilen sonuçlar sunulacaktır. Öncelikle ATK yöntemiyle kaç adet düğüm noktasının yeter yaklaşıklıkta sonuçlar verdiği irdelenecektir. Bu amaçla kenarlarından serbest ve basit mesnetli olan dairesel plaklar için ilk üç mod çeşitli düğüm nokta sayıları için hesaplanmış ve Şekil 5.2 ve Şekil 5.3’de verilmiştir. Genelde ilk iki mod için 13 adet düğüm noktası yeterli iken daha yüksek frekansların yeter doğrulukta hesabı için yaklaşık 17 adet düğüm noktası gerekmektedir. Bu nedenle bundan sonraki hesaplamalar için 17 adet düğüm kullanılmıştır. Şekil 5.4’de kenarlarından serbest olan dairesel plak için ilk dört frekans değerlerinin kalınlığa bağlı değişimi gösterilmiştir. Genel olarak söylenebilir ki; kalınlık arttıkça frekans değeri azalmaktadır. Bu azalma yüksek mod değerleri için daha belirgindir.



Şekil 6.2. Kenarlarında serbest olan dairesel plak için frekans değerlerinin yakınsaması ($h/a=0.2$)

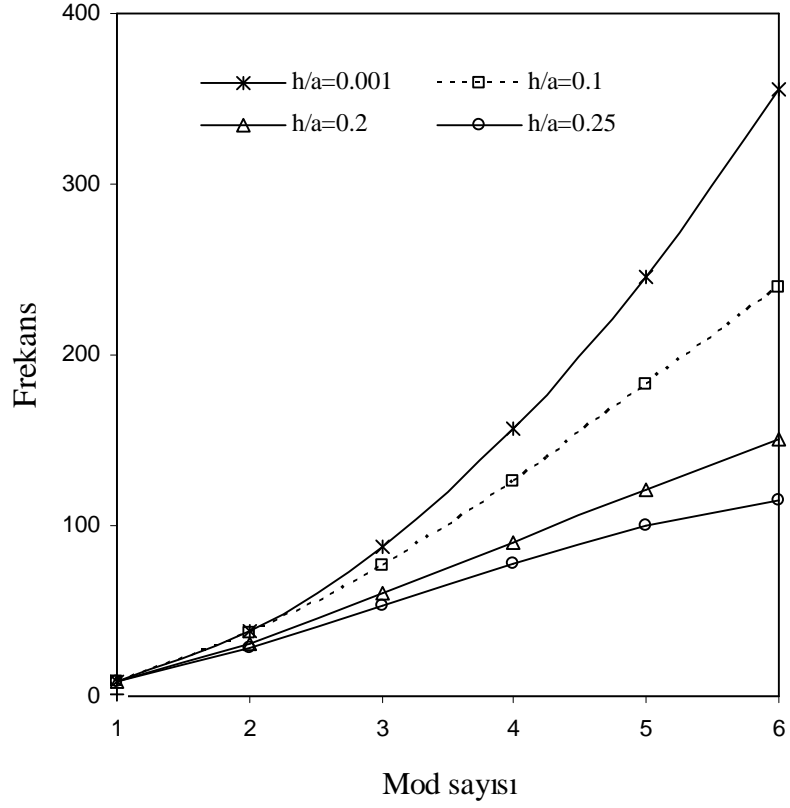


Şekil 6.3. Kenarlarında basit mesnetli tutturulmuş olan dairesel plak için frekans değerlerinin yakınsaması ($h/a=0.15$)



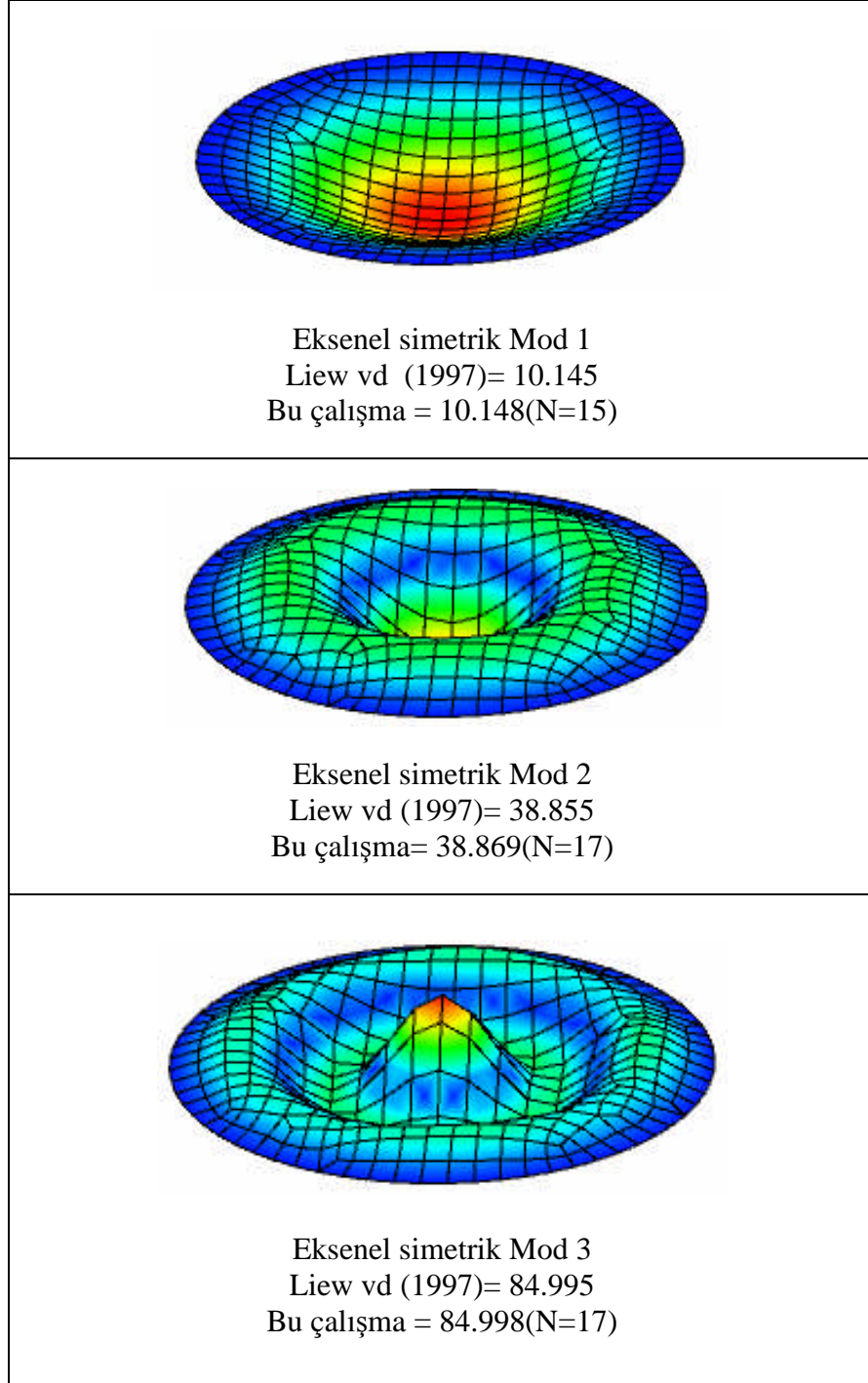
Şekil 6.4. Kenarlarından serbest olan dairesel plak için frekans değerlerinin kalınlığa bağlı değişimi

Şekil 5.4'de ise basit mesnetli dairesel plak için mod sayısına bağlı frekans değerleri gösterilmiştir. Mod değeri arttıkça frekans değeri artmaktadır. Bu artış kalın plaklar için daha düşük seviyedir.



Şekil 6.5. Kenarlarından basit mesnetli dairesel plak için mod sayısına bağlı frekans değerleri

Şekil 5.7’de ankastre dairesel plağın ilk üç eksenel simetrik frekans değeri $h/a=0.05$ için karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir. Ayrıca sonlu eleman tabanlı bir paket programıyla bu mod şekilleri elde edilmiş ve grafik olarak sunulmuştur. Sonuçlar Liew ve arkadaşları(1997) tarafından hesaplanan değerler ile uyum içindedir.



Şekil 6.6. Ankastre dairesel plağın ilk üç eksenel simetrik frekans değeri ($h/a=0.05$)

7. SONUÇLAR

Bu çalışmanın esas amacı ayırık tekil konvolüsyon yönteminin katı cisimler mekaniği alanına uygulanabilirliğini göstermek olup, daha önce bu yöntemle çözülmeyen dairesel plak sistemlerin titreşim problemi seçilmiştir. Çözümler aynı zamanda Civalek (2004a) tarafından geliştirilen HDQ yöntemi esaslı program ile de çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Elde edilen bulgular aşağıda özetlenmiştir:

- Ayırık tekil konvolüsyon yöntemi, diğer sayısal yöntemlerde olduğu gibi probleme ait mevcut yönetici denklemi bir lineer denklem takımı yâda özdeğer problemine indirger.
- Yaklaşım fonksiyonu olarak kerneller kullanılır.
- Metodun uygulanması basit elde edilen denklemlerin çözümü kolaydır.
- Yaklaşık 17 adet düğüm noktası ile yeter yaklaşıklıkta sonuçlar elde edilebilmiştir.
- Çözüm süresi en uzun durumda yaklaşık 2sn dir.
- Sınır koşullarının probleme dâhil edilmesi kolaydır.
- Ayırık tekil konvolüsyon yönteminde yakınsamayı etkileyen parametreler düğüm nokta sayısı ve hesabın başında seçilen r parametresidir.
- Burada verilmemiş olan daha büyük modlara ait değerler yine 17 ila 19 düğüm noktası ile elde edilebilmiştir. Örneğin 30. mod 19 düğüm kullanılarak %1 hatayla hesaplanmıştır.
- DQ ve ATK yöntemleri statik hesapta benzer performans sergilerken titreşim hesabında özellikle büyük modların hesabında ATK yöntemi daha üstündür.

8. KAYNAKLAR

- BELLMAN, R., CASTI, J. 1971. Differential quadrature and long-term integration. *Journal of Mathematical Analysis And Applications*, 34: 235-238.
- BELLMAN, R., KASHEF, B.G., CASTI, J. 1972. differential quadrature : a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equation. *Journal of Computational Physics*, 10: 40-52.
- BERT, C.W. and MALIK, M. 1996. The differential quadrature method for irregular domains and application to plate vibration. *Int. J. Mech. Sci.* , 38 (6): 589-606.
- BERT, C.W., JANG, S. K., STRIZ, A.,G. 1987. Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components. *AIAA Journal*, 26 (5): 612-618.
- BERT, C.W., WANG, Z., STRIZ, A.,G. 1993. Differential quadrature for static and free vibration analysis of anisotropic plates. *International Journal of Solids and Structures*, 30(13): 1737-1744.
- BERT, C.W., MALIK, M. 1996a. Free vibration analysis of tapered rectangular plates by differential quadrature method: a semi- analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, 190(1): 41-63.
- BERT, C.W., WANG, Z., STRIZ, A.,G. 1994. Convergence of the dq method in the analysis of anisotropic plates. *Journal Of Sound And Vibration*, 170(1): 140-144.
- BERT, C.W., MALIK, M. 1996b. Differential quadrature method in computational mechanics: a review. *Applied Mechanics Review*, 49(1): 1-28.
- BJÖRCK, A., and PEREYRA, V. 1970. Solution of vandermonde system of equations. *Math. Comput*, 24: 893-903.
- BLEVINS, R.D. 1984. *Formulas for Natural Frequency and Mode Shapes*. Robert E. Krieger, Malabar-Florida.
- CELIA, M .A., GRAY, W.G. 1992. *Numerical Methods for Differential Equations, Fundamental Concepts for Scientific and Engineering Applications*. Prentice Hall, New Jersey.
- CİVALEK, Ö. 1998. Plak ve Kabukların Sonlu Elemanlar Metoduyla Analizi. Yüksek Lisans Semineri, Fırat Üniversitesi.

- CİVALEK, Ö. 2004. Diferansiyel Quadrature Yöntemlerinin Titreşim Problemlerinde Kullanılması, Mühendis ve Makine, Makina Mühendisleri Odası, Cilt 45, Sayı 530, 27-36.
- CİVALEK, Ö. 2004a. Polinomal Diferansiyel Quadrature (PDQ) Metodu ile Elastik Zemine Oturan Plak ve Kabukların Geometrik Bakımdan Lineer Olmayan Statik ve Dinamik Analizi. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- CİVALEK, Ö. 2001. Diferansiyel Quadrature Metodu İle Elastik Çubukların Statik, Dinamik Ve Burkulma Analizi. XVI Mühendislik Teknik Kongresi, ODTU, Ankara.
- CİVALEK, Ö. 2004b. Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns, engineering structures. *An International Journal*, 26 (2): 171-186.
- CİVALEK, Ö. 2006. Free vibration analysis of composite conical shells using the discrete singular convolution algorithm. *Steel and Composite Structures*, 6 (4): 353-366.
- CİVALEK, Ö. 2007. Nonlinear analysis of thin rectangular plates on winkler-pasternak elastic foundations by DSC-HDQ methods. *Applied Mathematical Modeling*, 31: 606-624.
- CİVALEK, Ö. 2007a. Linear vibration analysis of isotropic conical shells by discrete singular convolution (DSC). *International Journal of Structural Engineering and Mechanics*, 25 (1): 127-130.
- CİVALEK, Ö. 2007b. Nonlinear dynamic response of mdof systems by the method of harmonic differential quadrature (HDQ). *International Journal of Structural Engineering and Mechanics*, 25 (2): 201-217.
- CİVALEK, Ö. 2007c. Three-dimensional vibration, buckling and bending analyses of thick rectangular plates based on discrete singular convolution method” *International Journal of Mechanical Sciences*, 49: 752-765.
- CİVALEK, Ö. 2007d. Numerical analysis of free vibrations of laminated composite conical and cylindrical shells: discrete singular convolution (DSC) approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 205: 251 – 271,.

- CİVALEK, Ö. 2007e. Parametric study of the free vibration analysis of rotating laminated cylindrical shells using the method of discrete singular convolution. *Thin-Walled Structures*, 45: 692-698.
- CİVALEK, Ö. 2007f. Free vibration and buckling analyses of composite plates with straight-sided quadrilateral domain based on dsc approach. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43: 1013-1022.
- CIVAN, F., SLIEPCEVICH, C. M. 1983. Application of differential quadrature to transport process. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 93: 206-221.
- CRANDALL, S.H. 1968. Mühendislik Analizi, Sayısal Hesap Metotlarına Genel Bakış. Çevirenler: Utku, Ş., Özden, E.Y., Berksoy Matbaası.
- ÇAKIROĞLU, A., ÖZMEN, G., ÖZDEN, E. 1974. Yapı Sistemlerinin Hesabı için Matris Metotları ve Elektronik Hesap Makinası Programları. Cilt II, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul.
- DU, H., LIM, M. K., LIN, R. M. 1994. Application of generalized differential quadrature method to structural problems. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 37: 1881-1896.
- DU, H., LIEW, K.M., LIM, M.K. 1996. Generalized differential quadrature method for buckling analysis. *Journal of Eng. Mech., ASCE*, 122 (2): 95-100.
- FARSA, J., KUKRETI, A. R., BERT, C.W. 1993. Fundamental frequency analysis of laminated rectangular plates by differential quadrature method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36: 2341-2356.
- HAMMING, R.W. 1973. Numerical Methods For Scientists and Engineers. McGraw-Hill, New York.
- HAN, J. B. and LIEW, K.M. 1997. Analysis of moderately thick circular plates using differential quadrature method. *Journal Of Eng. Mech., ASCE*, 123 (12): 1247-1252.
- IRIE, T., YAMADA, G., AOMURA, S. 1980. Natural frequencies of mindlin circular plates”, journal of applied mechanics”, *ASME*, 47: 652-655.
- JANG, S. K., BERT, C.W., STRİZ, A.,G. 1989. Application of differential quadrature to static analysis of structural components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28: 561-577.

- KUKRETI, A. R., FARSA, J., BERT, C.W. 1992. Fundamental frequency of tapered plates by differential quadrature. *Journal Of Engineering Mechanics, ASCE*, 118 (6): 1221-1238.
- LEISSA A.W. 1969. Vibration Analysis of Plates. NASA, 160pp.
- LEISSA, A.W., NARITA, Y. 1980. natural frequencies of simply supported circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 70: 221-229.
- LEISSA, A.W. 1977. Recent research in plate vibrations: classical theory. *The Shock and Vibration Digest*, 9 (10): 13-24.
- LEISSA, A.W. 1977a. Recent research in plate vibrations: complicating effects. *The Shock And Vibration Digest*, 9 (11): 21-35.
- LEISSA, A.W. 1981. Plate vibration research,: 1976-1980:classical theory. *The Shock And Vibration Digest*, 13 (9): 11-12,
- LEISSA, A.W. 1987. Recent research in plate vibrations, 1981-1985: part 1. classical theory. *The Shock And Vibration Digest*, 19(2): 11-18.
- LIEW, K.M., YANG, B. 1999. Three-dimensional elasticity solution for free vibrations of circular: a polynomials-ritz approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175: 189-201.
- LIEW, K.M., LIU, F.L., 2000. Differential quadrature method for vibration analysis of shear deformable annular sector plates. *Journal of Sound and Vibration*, 230(2): 335-356.
- LIEW, K.M., HAN, J.B., XIAO, Z.M., 1997. Vibration analysis of circular mindlin plates using the differential quadrature method. *Journal of Sound Vib.*, 205(5): 617-630.
- LIEW, K.M., TEO T.M. and HAN, J.B. 1999. Comparative accuracy of DQ and HDQ methods for three- dimensional vibration analysis of rectangular plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45: 1831-1848.
- LIEW, K.M. and TEO, T.M. 1999. Three dimensional vibration analysis of rectangular plates based on differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 220(4): 577-599.
- LIN, R.M., LIM, M.K., DU, H. 1994. Deflection of plates with nonlinear boundary supports using generalized differential quadrature. *Computers & Structures*, 53(4): 993-999.

- LIU, F.L., LIEW, K.M. 1999. Free vibration analysis of Mindlin sector plates: numerical solutions by differential quadrature method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 177: 77-92.
- REISMANN, H. 1988. Elastic Plates: Theory and Application. Wiley, New York,
- SHU, C., RICHARDS, B.E. 1992. Application of generalized differential quadrature to solve two- dimensional incompressible navier -stokes equations. “*International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 15: 791-798.
- SHU, C., DU, H. 1997. Implementation of clamped and simply supported boundary conditions in gdq free vibration analysis of beams and plates. *International Journal of Solids and Structures*, 34(7): 819-835.
- TIMOSHENKO, S., AND KRIEGER, W.S. 1959. Theory of Plates and Shells”, 2nd Ed. McGraw-Hill, New York.
- WEI, G.W. 1999. Discrete singular convolution for the solution of the Fokker–Planck equations. *J Chem Phys*, 110: 8930-8942.
- WEI, G.W. 2000. Wavelets generated by using discrete singular convolution kernels, *J.Phys. A: Math.Gen.*, 33: 8577-8596.
- WEI, G.W. 2001. A new algorithm for solving some mechanical problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 190: 2017-2030.
- WEI, G.W. 2001a. Vibration analysis by discrete singular convolution. *Journal of Sound and Vibration*, 244: 535-553.
- WEI, G.W. 2001b. Discrete singular convolution for beam analysis. *Engineering Structures*, 23: 1045-1053.

ÖZGEÇMİŞ

Emre KUZU, 1979 yılında Konya’da doğdu. İlkokulu Yunus Emre İlkokulu’nda tamamladı. Orta öğrenimini Mustafa Kemal Lisesi’nde, lise öğrenimini Ankara Başkent Lisesi Yabancı Dil Ağırlıklı Bölümü’nde tamamladı. 1998 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü’nden 2003 yılında İnşaat Mühendisi olarak mezun oldu. 2004 yılında Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. İki yıl Yurt Çelik Yapı Ltd. Şti.’nde inşaat mühendisi olarak görev yapmıştır. 2005 yılından beri Fark Mühendislik Ltd. Şti.’nde inşaat mühendisi olarak görev yapmaktadır.