T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

HOUSEHOLDER DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI GEOMETRİK UYGULAMALARI

Duygu SOYLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2019

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

HOUSEHOLDER DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI GEOMETRİK UYGULAMALARI

Duygu SOYLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2019

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOUSEHOLDER DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI GEOMETRİK UYGULAMALARI

Duygu SOYLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEMMUZ 2019

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOUSEHOLDER DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI GEOMETRİK UYGULAMALARI

Duygu SOYLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 27/06/2019 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR (Danışman)

Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN

Dr. Öğr. Üyesi Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

HOUSEHOLDER DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI GEOMETRİK UYGULAMALARI

Duygu SOYLU

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Temmuz 2019; 75 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır ve ileri bölümlerde gerekli olan temel tanım, kavram ve özellikler verilmiştir. İkinci bölümde, genel olarak bir $\mathbf{V}$ vektör uzayı ve bu uzayda verilen bir iç çarpım kullanılarak yansıma dönüşümünün tanımı yapılmış; özellikleri sunulmuştur; farklı vektör uzaylarında Householder dönüşümüne dair literatürde yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Diğer yandan, Householder dönüşümünün n-boyutlu Öklit uzayındaki ve n-boyutlu, pozitif tanımlı ağırlıklı iç çarpım uzaylarındaki durumuna değinilmişitir. Benzer şekilde, Minkowski-3 uzayında Lorentz-Householder dönüşümü ve özellikleri ile reel tanımlı, genel iç çarpım uzaylarında hiperbolik-Householder dönüşümü de bu bölüm altında incelenmiştir. Bu bölümde ayrıca, Householder dönüşümünün n-boyutlu kompleks vektör uzayındaki durumu incelenmiş; eş normlu iki kompleks vektörün birbirine yansıtılmasındaki kısıtlamalar sunulmuştur. Son bölümde ise hiperbolik sayıların bir takım özellikleri sunulduktan sonra, hiperbolik sayı modülünde Householder dönüşümü ve özellikleri sunulmuş; ayrıca, henüz literatürde yeni bir alan olan hibrit sayılara ait bazı özellikler ve hibrit sayıların vektörel gösterimleri için Householder dönüşümünün tanımı ve özellikleri belirtilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Yansıma, Hiperbolik Sayılar, Householder Dönüşümü, Perpleks Householder Dönüşümü, Hibrit Sayılar

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN
Dr. Öğr. Üyesi Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

HOUSEHOLDER TRANSFORMATION AND SOME GEOMETRIC APPLICATIONS

Duygu SOYLU

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

July 2019; 75 pages

This thesis includes three main parts. The first is dedicated to the introduction which contains the fundamental definitions, concepts and properties. In the second part, in a vector space $\mathbf{V}$ with an inner product is being used, some definitions and properties for a reflexion transformation are handled in general; the previous studies on Householder transformation defined in different vector spaces are given place to. The status of the Householder transformation is mentioned accordingly n-dimensioned Euclidean space and n-dimensioned positively defined reel inner product spaces. In a similar way, Lorentzian-Householder transformation and its properties in Minkowski-3 space and the Householder transformation on the generally defined real inner product spaces also referenced under this part. Besides, the Householder transformation in n-dimensioned complex vector space is analized and some circumstances are presented on reflexing the same normed vectors to each other in this part. In the last part, after stating some properties on perplex numbers, the definition and properties of the Householder transformation on the modul of perplex numbers is studied. Moreover, the hybrid numbers which is a newly studied subject in literature, and their properties are examined before presenting the hybrid-Householder transformation.

KEYWORDS: Reflection, Hyperbolic numbers, Householder transformation, Perplex-Householder, Hybrid numbers

COMMITEE: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR
Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN
Asst. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Bu tezde, Householder dönüşümü ile ilgili temel çalışmalar derlenerek farklı vektör uzaylarındaki durumu ayrı ayrı verilmiştir. Bunun yanı sıra, Householder dönüşümünün kompleks vektör uzayları; perpleks modül uzayındaki durumu incelenmiştir. Ayrıca, henüz literatürde yeni çalışılmaya başlanan hibrit sayılar ve hibrit vektörler üzerinde tanımlanan dönüşümün özellikleri sunulmuştur.

Tez konumun belirlenmesinde ve hazırlanmasında, her türlü yardım ve fedakarlığı esirgemeyen, bilgisi, tecrübesi ve destekleri ile çalışmalarımda bana yol gösteren değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR' e en içten duygularla teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu çalışmamı, süreç boyunca beni cesaretlendiren, manevi desteklerini esirgemeyen eşime ve çocuklarıma ithaf ederim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans olarak sunduğum "*Householder Dönüşümü ve Bazı Geometrik Uygulamaları*" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

27/06/2019

Duygu SOYLU

SİMGELER

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{E}^n$	: n boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{Z}_0^-$	: $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$
$\mathbb{N}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	: Hiperbolik (Perpleks) sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbf{v}^{\perp}$	: $\mathbf{v}$'ye ortogonal vektörlerin oluşturduğu hiperdüzlem
$\mathcal{H}_{\mathbf{v}}$	: $\mathbf{v}^{\perp}$ uzayın göre yansıtan Householder dönüşümü
$H_{\mathbf{v}}$	: $\mathcal{H}_{\mathbf{v}}$ dönüşümüne karşılık gelen Householder matrisi
$\mathbb{E}_1^n$	: n boyutlu Lorentz uzay
$\mathbb{C}^n$	: n-boyutlu karmaşık sayılar vektör uzayı
$\Vert . \Vert$	: Bir vektörün uzunluğu (normu)
$\langle , \rangle$	: İç çarpım
$\langle , \rangle_L$	: Lorentziyen iç çarpım
$\langle , \rangle_{\mathbb{C}}$	: Kompleks iç çarpım
$\langle , \rangle_{\mathbb{P}}$	: Hiperbolik iç çarpım
$\mathbf{u}^*$	: $\mathbf{u}$ vektörünün eşlenik transpozu
$\mathbf{i} \times \mathbf{j}$	: İki vektörün vektörel çarpımı
$\mathcal{B}$	: Bilineer çarpım
$\mathbb{R}_{n \times n}$	: $n \times n$ boyutlu reel matrislerin kümesi
$\mathbb{E}_1^3$ $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_L)$	: Minkowski-3 uzayı
$\mathbb{R}^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ $\left(\mathbb{R}^n_{\mathcal{B}}\right.$ veya $\left.\mathbb{E}^{n,\mathcal{B}}\right)$	: Ağırlıklı iç çarpım uzayı
$\mathbb{P}^n$	: n- boyutlu hiperbolik uzay

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu bölümde, Householder dönüşümünün tanımlanması ve yapılan çalışmalar, tarihsel sürece uygun olarak sırasıyla verilecek, bu dönüşümün önemi ve kullanım alanları kısaca belirtilecektir. Tezin hangi aşamalar ve bölümlerden oluştuğu sırasıyla verilip, tezde elde edilen orjinal bulgular ve sonuçlar özel olarak ayrıca belirtilecektir.

Householder dönüşümü, bir düzleme ya da hiper-düzleme göre yansıma tanımlayan doğrusal bir dönüşümdür. 1958'de Alston Scott Householder tarafından tanımlanan Householder dönüşümü ve bu dönüşüme karşılık gelen matris, başta nümerik lineer cebir alanı olmak üzere, matrislerin QR çarpımsal yazılımları için ilk işlem olarak uygulanmaktadır. Bunun yanısıra, simetrik matrislerin tri-diyagonalleştirilmesinde ve simetrik olmayan matrislerin Hessenberg formuna dönüştürülmesinde de geniş bir kullanım alanı bulmaktadır (Özdemir 2016).

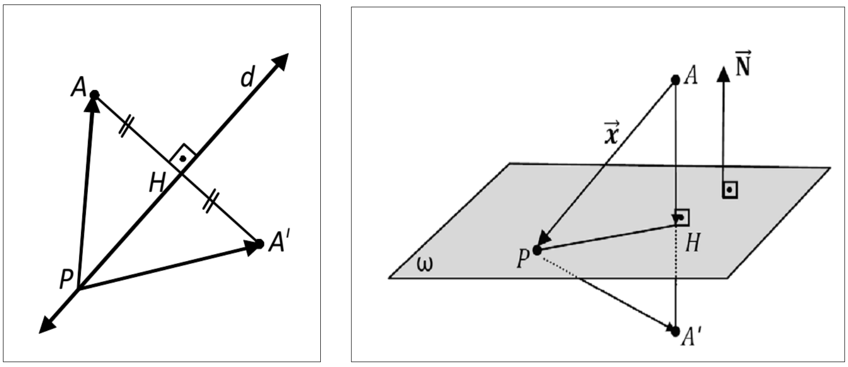
Bu dönüşüme göre, $\mathbf{v}$, sıfır olmayan bir vektör olmak üzere

$$\mathcal{H}_{\mathbf{v}}\left(x\right) = x - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}}x$$

şeklinde bir doğrusal dönüşüm olan Householder dönüşümü, bir $\mathbf{x}$ vektörünün, sıfır olmayan bir $\mathbf{v}$ vektörüne ortogonal olan ve orijinden geçen bir düzlem ya da hiper-düzleme göre yansımasını tanımlar.

Householder dönüşümünün çeşitli uzaylarda, dejenere olmayan bilineer ya da sesquilineer formları, Mackey vd. (2004) tarafından çalışılmıştır.

Cartan–Dieudonné teoremi olarak bilinen, her ortogonal dönüşümün, hiper-düzlemlere göre yansıma belirten dönüşümlerin bileşkesi olarak ifade edilebileceğini gösteren teoremden sonra, yansıma dönüşümleri önemli bir çalışma alanı olmuştur. Bu teoremin, genelleştirilmiş reel iç çarpım uzaylarındaki durumuna ait yapısal ispatı, Uhlig (2001) ve Fuller (2011). tarafından yapılmıştır. Ayrıca, yine genelleştirilmiş iç çarpım uzaylarındaki alternatif ispatı da Rodríguez-Andrade vd. (2011) ile verilmiştir



Şekil 2.1 Bir doğruya ve bir düzleme göre yansıma

.

Householder dönüşümü, bir $\mathbf{u}$ vektörünü, doğru, düzlem ya da hiper-düzleme göre, eş norma sahip bir başka bir $\mathbf{v}$ vektörüne yansıtan bir fonksiyondur. $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında iki kolon vektör $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ olmak üzere, $\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{v}$ vektörüne ortogonal olan vektörlerden oluşan bir $\mathbf{v}^{\perp}$ hiper-düzlemine göre yansıması olan vektörü belirlemek için, $\mathbf{u}$ vektörünün, $\mathbf{v}$ üzerindeki projeksiyon vektörünü aldıktan sonra, $\mathbf{u}$ vektöründen projeksiyon vektörünün iki katı kadar zıt yönde ilerlemek yeterli olacaktır (Aragón-González vd. 2009). Bununla ilgili teoremler ilerideki bölümlerde verilecektir.

Householder dönüşümü, geometride yansıma dönüşümlerinin incelenmesinin yanısıra, nümerik lineer-cebir alanında, simetrik matrislerin tri-diyagonal forma dönüştürülmesi için, ayrıca QR açılımlarının yazılabilmesinde de geniş yer tutmaktadır (Gallier 2011). Cipra (2000)' e göre Householder dönüşümü, yirminci yüzyılın en önemli ilk on algoritması içerisinde yer almaktadır

Bu tezde Householder dönüşümü detaylı incelenecektir. Tez üç temel kavramın üzerine kurulmuştur.

1. Yansıma dönüşümleri
2. Householder dönüşümü ve farklı iç çarpım uzaylarında Householder dönüşümü
3. Hiperbolik ve hibrit sayı kümeleri

Tezin ikinci bölümünde, geniş bir kaynak taraması yapılmış ve Householder dönüşümü için temel niteliğinde olan bazı tanım ve özelliklerden bahsedilmiştir. Bu amaçla, yansıma dönüşümünün tanımı, genel bir iç çarpım uzayı üzerinde yapılarak sunulmuş ve bir takım özellikleri belirtilmiştir. Bunun yanı sıra, Householder dönüşümü üzerine, farklı iç çarpım uzaylarında yapılmış çalışmalar, kaynakları ile birlikte verilmiştir. Buna göre, Householder dönüşümü için n-boyutlu Öklid uzayında, n-boyutlu reel iç çarpım uzayında, Minkowski-3 uzayında, ağırlıklı iç çarpım uzayında ve kompleks sayı iç çarpım uzayında yapılan çalışmalar ve sonuçları, bu kısımda sunulmuştur.

Üçüncü bölüm, bulgular ve tartışma kısmında ise hiperbolik sayı vektörleri ile tanımlanan bir iç çarpım ile hiperbolik-Householder dönüşümü ve bu dönüşüme karşılık gelen matrisin tanımı yapılmış; özellikleri gösterilmiş ve normları aynı hiperbolik vektörleri birbirine yansıtabilen bir hiperbolik-Householder dönüşümünün varlığı incelenmiştir. Bu durum için tanımlanan dönüşümün hermitiyen olmaması üzerine ise vektörlerin sadece eş normlu olmalarının, birbirlerine yansıtılabilmesi için yeterli bir şart olamayacağı; vektörlerin bir takım farklı şartları da sağlaması gerektiği sonucu geliştirilmiştir. Ayrıca, literatürde yeni bir çalışma alanı açan hibrit sayılar için de hibrit-Householder dönüşümünün tanımı yapılarak özellikleri belirtilmiştir.

Son bölümde ise çalışmadan elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, tez boyunca sıkça kullanılacak bazı temel kavramların tanımı, önemli sonuçları ve bunların kaynakları verilecektir. Bu bölümdeki temel kavramlar için özellikle Xia ve Suter (1995); Mackey vd. (2004); Aragón-González vd. (2006); Aragón-González vd.(2009); Rodríguez-Andrade vd.(2011); Özdemir ve Erdoğdu (2015) ile Özdemir (2016) makalelerinden yararlanılmıştır. Diğer bazı temel kavramların tanımı ve kaynakları da tez boyunca konu içerisinde verilecektir.

Öncelikle yansıma dönüşümünün tanımı ve özellikleri belirtilmiş; daha sonra, n-boyutlu Öklid uzayında Householder dönüşümü, n-boyutlu, pozitif tanımlı reel iç çarpım uzayında Householder dönüşümü, Minkowski-3 uzayında Householder dönüşümü, n-boyutlu, ağırlıklı iç çarpım uzaylarında Householder dönüşümü ve n-boyutlu kompleks iç çarpım uzayında Householder dönüşümü üzerine yapılan çalışmalar, ayrı başlıklar halinde verilmiştir.

2.1. Yansıma Dönüşümü

Tanım 2.1. *Bir $\mathbb{V}$ uzayında, $\mathcal{T}:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{V}$ lineer dönüşümü ve $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{V}}$ iç-çarpımı verilsin. Her $\mathbf{u}\in\mathbb{V}$ için,*

1. $\mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathbf{u}))=\mathbf{u}$
2. $\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=\langle\mathcal{T}(\mathbf{u}),\mathcal{T}(\mathbf{u})\rangle$

şartlarını sağlayan $\mathcal{T}$ dönüşümüne, yansıma dönüşümü denir.

Tanım 2.2. *$\mathbb{V}$, n boyutlu bir iç çarpım uzayı olmak üzere, $\mathbb{V}$ uzayında tanımlı bir iç çarpım, $\mathbf{u}^t=(u_1,u_2,..u_n)$, $\mathbf{v}^t=(v_1,v_2,..v_n)\in\mathbb{V}$ için*

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{V}}=\mathbf{u}^tA\mathbf{v}$$

matris eşitliğiyle verilebilir. Buradaki A matrisine, bu iç çarpım ile ilişkilendirilmiş matris denir.

$\mathbb{E}^n$, n-boyutlu Öklid uzayında, standart iç çarpım

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{E}}=u_1v_1+u_2v_2+...+u_nv_n$$

biçimindedir ve I_n birim matris olmak üzere, $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{E}}=\mathbf{u}^tI\mathbf{v}$ matris eşitliğiyle verilebilir.

$\mathbb{E}_1^n$, n-boyutlu Lorentz uzayında ise tanımlı iç çarpım

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{E}_1} = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

olduğundan

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{E}_1} = \mathbf{u}^t I^* \mathbf{v}$$

matris eşitliğiyle yazılabilir. Burada, Lorentz iç çarpımıyla ilişkilendirilmiş matris

$$I^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} = diag(-1, 1, 1, ..1)$$

olur. İç çarpıma göre, ilişkilendirilmiş matris ve daha sonra tanımlanacak olan vektörel çarpım değişecektir. Yansıma da, iç çarpıma göre farklılık gösterecek ve ilişkilendirilmiş matrise bağlı olarak yazılacaktır.

Örnek 2.3. $\mathbb{R}^3$ *uzayında verilen* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2 + u_3v_3$ *iç çarpımına göre,*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

eşitliği, $A = diag(2, 3, 1)$ *olmak üzere,*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t A \mathbf{v},$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 2.4. $\mathbb{E}^n$ *Öklid uzayında,* $\mathcal{T}$ *dönüşümü bir yansıma dönüşümü olsun.* $\mathcal{T}$ *dönüşümüne karşılık gelen matris* T *olmak üzere,* T *matrisi*

$i.$ *ortogonaldir*

$ii.T^{-1} = T$

$iii.$ *Simetriktir*

$iv. \det(T) = -1$

özelliklerini sağlar.

İspat

i $\mathcal{T}$ bir yansıma dönüşümü olduğundan

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{E}^n} = \langle \mathcal{T}(\mathbf{u}), \mathcal{T}(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbb{E}^n}$$

eşitliği sağlanır. Buradan matris gösterimi ile

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^t I \mathbf{u} &= (T\mathbf{u})^t T\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^t T^t T \mathbf{u} \end{aligned}$$

elde edilir ki bunun sağlanabilmesi için

$$T^t T = I$$

olmalıdır. Yani, T matrisi ortogonaldir.

ii. (i) 'den, $T^t T = I$ eşitliği T^{-1} ile çarpılırsa $T^{-1} = T$ olduğu kolayca görülür.

iii. $\mathcal{T}$ yansıma dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathbf{u})) &= \mathbf{u} \\ T.T.\mathbf{u} &= \mathbf{u} \\ T^2 &= I \end{aligned}$$

elde edilir ki buradan $T^{-1} = T$ eşitliği kullanılarak

$$T^t = T$$

yani T 'nin simetrik olduğu sonucuna ulaşılır.

iv. T matrisi ortogonal olduğundan

$$T^t T = I$$

sağlanır. Buradan

$$(\det T)^2 = 1$$

bulunur. T bir yansıma matrisi olduğu için de

$$\det T = -1$$

elde edilir.

□

Örnek 2.5.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{3\times 3}$$

matrisi incelenirse

$$A^t = A = A^{-1} \textit{ ve } \det(A) = -1$$

eşitliklerini sağladığı görülür. Bu durumda, A bir yansıma matrisidir.

2.2. E^n Uzayında Householder Dönüşümü

Householder dönüşümü en genel halde bulunduğu uzayın boyutuna göre, bir doğruya, bir düzleme veya bir hiper-düzleme göre yansıma hareketi yapan bir dönüşümdür.

$\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, $\mathbb{E}^n$ de sıfır olmayan, farklı kolon vektörleri olsunlar. $\mathbf{u}^t = (u_1, u_2, ..u_n)$ ve $\mathbf{v}^t = (v_{1,}v_2, ..v_n)$ olmak üzere,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \mathbf{u}^t I_n \mathbf{v}$$

Öklit iç çarpımına göre,

$$\mathbf{v}^\perp = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0 \right\}$$

kümesi, $\mathbf{v}$ vektörüne ortogonal vektörlerin kümesini gösterecektir. $\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{v}$ vektörü üzerindeki projeksiyon vektörü $r\mathbf{v}$ $(r \in \mathbb{R})$ ile gösterilirse,

$$(\mathbf{u} - r\mathbf{v}) \in \mathbf{v}^\perp$$

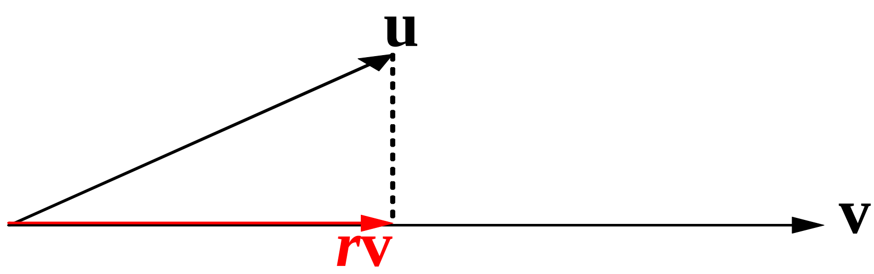
olur ki, buradan

$$\langle \mathbf{u} - r\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

eşitliğinden,

$$r = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

bulunur (Şekil 2.2)**.**



Şekil 2.2. Bir $\mathbf{u}$ vektörünün bir $\mathbf{v}$ vektörü üzerine dik izdüşümü

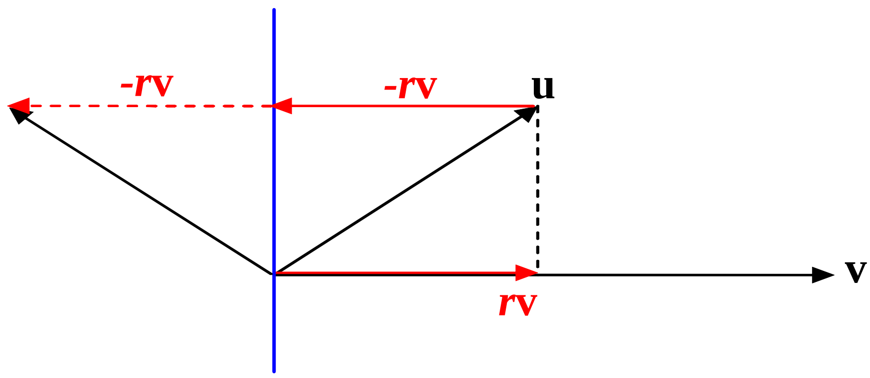
Böylece, bir $\mathcal{H}$ dönüşümü için

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2r\mathbf{v}$$

eşitliği incelendiğinde, elde edilen dönüşüm vektörünün $\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{v}^{\perp}$ hiper-düzlemine göre yansıma vektörü olduğu sonucuna varılır. r değeri bu eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - 2\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} - 2\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \end{aligned}$$

bulunur (Şekil 2.3).



Şekil 2.3. $\mathbf{u}$ vektörünün, $\mathbf{v}$ vektörüne ortogonal bir hiper-düzleme göre yansıması

Tanım 2.6. *Bu şekilde elde edilen*

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

dönüşümüne Householder dönüşümü, bu dönüşüme karşılık gelen H matrisine de Householder matrisi adı verilir (Aragón-González vd. 2009).

Teorem 2.7. *Sıfırdan ve birbirinden farklı $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v} \in \mathbb{E}^n$ için, $\mathbf{u}$ vektörünü $\mathbf{v}^{\perp}$ hiperdüzlemine göre yansımasını veren Householder dönüşümüne karşılık gelen Householder matrisi H,*

$$H = I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}}$$

ile bulunur (Aragón-González vd. 2009).

İspat $\mathcal{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ eşitliğinden $\mathcal{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\mathbf{v}\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|}$ yazılabilir. Buradan, standart iç çarpımın simetri özelliğine göre

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\mathbf{v}\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\|\mathbf{v}\|}$$

yazılarak matris gösterimi yapıldığında

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - 2\mathbf{v}\frac{\mathbf{v}^t\mathbf{u}}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \left(I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}}\right)\mathbf{u}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$H = I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}}$$

matrisi, Householder dönüşümüne karşılık gelen matris olur. □

Teorem 2.8. *$\mathbb{E}^n$ uzayında tanımlı Householder matrisi, bir yansıma matrisidir.*

İspat *$\mathcal{H}$ Householder dönüşümüne karşılık gelen matris*

$$H = I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}}$$

olmak üzere,

$$H = H^t$$

eşitliğinin sağlandığı aşikardır. Buradan H simetrik bir matristir. Benzer şekilde, H matrisinin ortogonal olup tersinin kendisine eşit olduğu, dolayısıyla $\det(H) = -1$ sonuçları da elde edilebilir. Bir başka deyişle, H yansıma matrisi özelliklerini sağlar. □

Örnek 2.9. $\mathbb{R}^3$*'de verilen* $\mathbf{u}$ $=(1,2,3)$ *vektörünün* $2x+y+z=0$ *düzlemine göre simetriği olan vektörü bulmak için, Householder dönüşümü uygulanabilir.* $\mathbf{u}$ *vektörünün* $2x+y+z=0$ *düzlemine göre simetriği olan vektörün bulunabilmesi için düzleme ortogonal bir vektör bulunması gereklidir; bu vektör* $\mathbf{v}$ *şeklinde isimlendirilirse,* $\mathbf{v}$ *için düzlemin normali seçilebilir. Böylece,* $\mathbf{v}$ $=(2,1,2)$ *olur ve Householder matrisi de*

$$H = I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}} = I - 2\frac{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}}$$

şeklinde yazılıp gerekli işlemler yapıldığında

$$H = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & -4 & -8\\ -4 & 7 & -4\\ -8 & -4 & 1\end{bmatrix}$$

elde edilir ki, ortogonal, simetrik ve dolayısıyla tersi kendisine eşit bir matris olduğu kolayca görülebilir.

Böylece, $\mathbf{u}$ *vektörünün düzleme göre simetriği olan vektör de*

$$\begin{aligned} H\mathbf{u} &= \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & -4 & -8\\ -4 & 7 & -4\\ -8 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{bmatrix}-31\\-2\\-13\end{bmatrix}\end{aligned}$$

olarak elde edilir

Örnek 2.10. $\mathbb{R}^3$*'de verilen* $\mathbf{u}^t$$=(1,2,3)$ *vektörünün*

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

doğrusuna göre simetriği olan vektörü iki farklı yolla bulmak mümkündür.

Klasik Yöntem : *(a,b,c) vektörü,* $\mathbf{u}$ *vektörünün $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$ doğrusuna göre simetriği olan vektör olsun. Bu durumda $(\frac{x+1}{2},\frac{y+2}{2},\frac{z+3}{2})$, doğrunun üzerinde olur, dolayısıyla, doğru denklemini sağlar:*

$$\frac{a+1}{2}=\frac{b+2}{4}=\frac{c+3}{4}=k$$

eşitliğinden $a=2k-1, b=4k-2, c=4k-3$ yazılabilir. Bu arada,

$$(x-1,y-2,z-3)\perp(1,2,2)$$

olacak şekilde, $\mathbf{u}$ *vektörünü içeren bir düzlem denklemi yazılırsa $x+2y+2z=11$ düzlemi elde edilir. (a,b,c) vektörü bu düzlem denklemini sağlayacağından*

$$2k-1+8k-4+8k-6=11$$

yazılarak $k=11/9$ bulunur ve $\mathbf{u}$ *vektörünün doğruya göre simetrik vektörü $\left(\frac{13}{9},\frac{26}{9},\frac{17}{9}\right)$ elde edilir.*

Householder Dönüşümü Kullanılarak : *Öncelikle, $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$ doğrusuna dik bir vektör bulunması gereklidir. Bu amaçla, $\mathbf{v}=(a,b,c)$ denilirse*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

eşitliğinin sağlanması gerekli olduğundan

$$-2a+b=0 \text{ ve } 2c=-5a$$

elde edilir. Buradan $a=2$ ve $c=-5$ seçilirse, $\mathbf{v}=(2,4,-5)$ bulunur. Böylece, Householder dönüşümüne karşılık gelen matris

$$H=I-2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}}=I-\frac{2}{45}\begin{bmatrix} 4 & 8 & -10 \\ 8 & 16 & -20 \\ -10 & -20 & 25 \end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda, $\mathbf{u}$ *vektörünü doğruya göre yansıma vektörü de*

$$\mathcal{H}(\mathbf{u})=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 13 \\ 26 \\ 17 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Householder dönüşümü ile eş normlara sahip iki vektörün de birbirine göre yansıması bulunabilir. Bunun için öncelikle bu yansımanın hangi eksene göre yapılacağı; sonrasında da yansımayı yapacak ve bu eksene ortogonal olacak vektörün belirlenmesi gereklidir.

Önteorem 2.11. *Birbirinden farklı, sıfır olmayan* $\mathbf{u}$,$\mathbf{v} \in \mathbb{E}^n$ *ve* $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ *için*

$$\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v} \rangle = 0$$

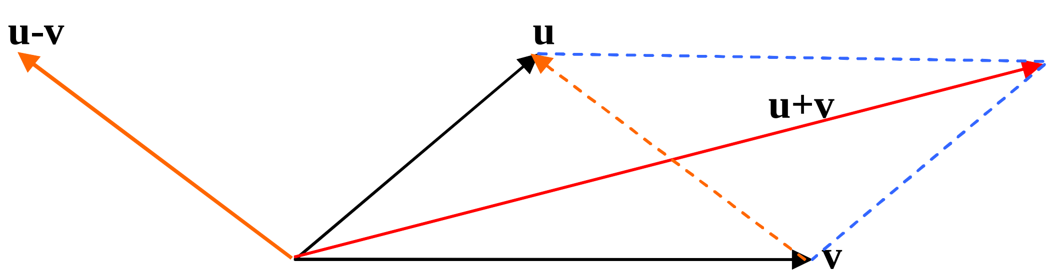
eşitliği sağlanır (Aragón-González vd. 2009).

İspat İç çarpım özellikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v} \rangle &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})^t (\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}^t\mathbf{u} - \mathbf{u}^t\mathbf{v} + \mathbf{v}^t\mathbf{u} - \mathbf{v}^t\mathbf{v} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. □

Böylece $\mathbf{u}$ vektörünün, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ vektörünün normal olduğu bir hiper-düzleme göre yansıması alındığında, $\mathbf{u}$ ile aynı norma sahip bir $\mathbf{v}$ vektörü elde edilebilir (Şekil 2.4).



Şekil 2.4. Bir $\mathbf{u}$ vektörünün, Householder dönüşümü ile eş normlu $\mathbf{v}$ vektörüne yansıması

Teorem 2.12. $\mathbf{u}$ *ve* $\mathbf{v}$, $\mathbb{E}^n$ *uzayında sıfır olmayan, farklı kolon vektörler olsunlar.*

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$$

olmak üzere, $\mathbf{u}$ *vektörünü,* $\mathbf{v}$ *vektörüne yansıtacak Householder dönüşümü*

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{array}{cc} \mathcal{H}_{\mathbf{u}} & \mathbf{u} = -\mathbf{v} \\ \mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}} & \mathbf{u} \neq -\mathbf{v} \end{array} \right\}$$

şeklindedir (Aragón-González vd. 2009).

İspat *a)* $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$ *olsun. Bu durumda,*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \left(I - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) &= -\mathbf{v} + 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}}\mathbf{v} \\ &= -\mathbf{v} + 2\mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

elde edilir.

b) $\mathcal{H}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \left(I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}}\right)\mathbf{u}$ *eşitliğinde* $\mathbf{v}$ *yerine* $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ *yazıldığında*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - 2\frac{(\mathbf{u}-\mathbf{v})(\mathbf{u}-\mathbf{v})^t}{(\mathbf{u}-\mathbf{v})^t(\mathbf{u}-\mathbf{v})}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^t - \mathbf{u}\mathbf{v}^t - \mathbf{v}\mathbf{u}^t + \mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{u}^t\mathbf{u} - \mathbf{u}^t\mathbf{v} - \underbrace{\mathbf{v}^t\mathbf{u}}_{\mathbf{u}^t\mathbf{v}} + \underbrace{\mathbf{v}^t\mathbf{v}}_{\mathbf{u}^t\mathbf{u}}}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^t\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{v}^t\mathbf{u} - \mathbf{v}\mathbf{u}^t\mathbf{u} + \mathbf{v}\mathbf{v}^t\mathbf{u}}{\mathbf{u}^t\mathbf{u} - \mathbf{u}^t\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u}-\mathbf{v})\,\mathbf{u}^t\mathbf{u} - (\mathbf{u}-\mathbf{v})\,\overbrace{\mathbf{v}^t\mathbf{u}}^{\mathbf{u}^t\mathbf{v}}}{\mathbf{u}^t\mathbf{u} - \mathbf{u}^t\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u}-\mathbf{v})\,(\mathbf{u}^t\mathbf{u} - \mathbf{u}^t\mathbf{v})}{\mathbf{u}^t\mathbf{u} - \mathbf{u}^t\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{u} - \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

elde edilir. □

2.3. Pozitif Tanımlı Ağırlıklı Uzaylarda Householder Dönüşümü

Çalışmanın bu kısmında, en genel anlamda ağırlıklı genelleştirilmiş, pozitif tanımlı iç çarpım uzayları için Householder dönüşümü verilecektir. Bu konuda daha detaylı bilgi Mackey vd. (2004) ve Özdemir (2016) makalelerinde bulunabilir.

Tanım 2.13. *$\mathbb{R}^n$ uzayında, $\mathbf{u}_{n\times 1}$ ve $\mathbf{v}_{n\times 1}$ vektörleri için, $a_i \in \mathbb{R}^+ (i = 1, 2, ..n)$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= a_1 u_1 v_1 + a_2 u_2 v_2 + \cdots + a_n u_n v_n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı iç çarpıma, pozitif tanımlı $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ağırlıklı iç çarpım veya reel-eliptik iç çarpım adı verilir. Özel olarak, $(1, 1, ..., 1)$ ağırlıklı iç çarpımı, Öklit iç çarpımıdır. Bu iç çarpımla donatılmış uzaya da ağırlıklı iç çarpım uzayı denir ve $\mathbb{R}^n_{a_1,a_2,...,a_n}$, $\mathbb{R}^n_{\mathcal{B}}$ veya $\mathbb{E}^{n,\mathcal{B}}$ ile gösterilir (Özdemir 2016).

Tanım 2.14. *$\mathcal{B}$ iç çarpımı ile uyumlu $n \times n$ boyutlu matris A olmak üzere,*

$$\mathcal{B} = \mathbf{u}^{\mathbf{t}} A \mathbf{v}$$

yazılabilir ki burada, $\mathcal{B}$ iç çarpımı ile ilişkilendirilmiş matris

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $\mathbb{R}^n_{\mathcal{B}}$ iç çarpım uzayında, bir $\mathbf{u}$ vektörünün normu,

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

ile tanımlıdır. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\cos\theta = \frac{\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{B}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{B}}}$$

eşitliği sağlanır. Buna göre,

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

ise, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerine $\mathcal{B}$ iç çarpımına göre ortogonal vektörler veya kısaca $\mathcal{B}$-ortogonal vektörler denir (Özdemir 2016).

Tanım 2.15. *$\mathcal{B}$, dejenere olmayan, pozitif tanımlı, bir ağırlıklı reel iç çarpım; A, bu iç çarpım ile ilişkilendirilmiş $n \times n$ boyutlu bir reel matris olmak üzere, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n_{\mathcal{B}}$ vektörleri için,*

1. *$\mathcal{B}(R\mathbf{u}, R\mathbf{v}) = \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sağlayan $R_{n\times n}$ matrisine $\mathcal{B}$-ortogonal matris denir.*
2. *$\mathcal{B}(S\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{B}(\mathbf{u}, S\mathbf{v})$ sağlayan $S_{n\times n}$ matrisine $\mathcal{B}$-simetrik matris denir.*
3. *$\mathcal{B}(S\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\mathcal{B}(\mathbf{u}, S\mathbf{v})$ sağlayan $S_{n\times n}$ matrisine $\mathcal{B}$-ters simetrik matris denir (Özdemir 2016).*

Sonuç 2.16. *Yukarıdaki tanıma göre, aşağıdaki sonuçlar yazılabilir :*

1. *$\mathcal{B}(R\mathbf{u}, R\mathbf{v}) = \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ olması durumunda, matris gösterimi yapıldığında*

$$\begin{aligned} (R\mathbf{u})^t AR\mathbf{v} &= \mathbf{u}^t A\mathbf{v} \\ \mathbf{u}^t R^t AR\mathbf{v} &= \mathbf{u}^t A\mathbf{u} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$R^t AR = A$$

olur. O halde, bir R matrisinin $\mathcal{B}$-ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $R^t AR = A$ olmasıdır.

2. *$\mathcal{B}(S\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{B}(\mathbf{u}, S\mathbf{v})$ olması durumunda*

$$\begin{aligned} (S\mathbf{u})^t A\mathbf{v} &= \mathbf{u}^t AS\mathbf{v} \\ \mathbf{u}^t S^t A\mathbf{v} &= \mathbf{u}^t AS\mathbf{v} \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, bir S matrisinin $\mathcal{B}$-simetrik olması için gerek ve yeter koşul

$$S^t A = AS$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

3. *Benzer şekilde, S matrisinin $\mathcal{B}$-ters simetrik olması için gerek ve yeter koşul*

$$S^t A = -AS$$

olmasıdır.

Sonuç 2.17. *R matrisi, $\mathcal{B}$-ortogonal bir matris olmak üzere,*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(R\mathbf{u}, R\mathbf{u}) &= (R\mathbf{u})^t AR\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^t R^t AR\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^t A\mathbf{u} \\ &= \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\end{aligned}$$

eşitliğini sağladığından, uzunluğu koruyan bir matristir.

Sonuç 2.18. *R matrisinin $\mathcal{B}$-ortogonal olması sonucu elde edilen*

$$R^t AR = A$$

eşitliğinin her iki tarafının determinantının alınması sonucu,

$$\det R = \pm 1$$

bulunur ki, bu da $\det R = 1$ olursa R'nin dönme matrisi, $\det R = -1$ olursa R'nin bir yansıma matrisi olması anlamına gelir.

Sonuç 2.19. *Eğer, bir T matrisi, $\mathcal{B}$ iç çarpımına göre hem simetrik, hem ortogonal ise*

$$\begin{aligned}AT &= T^t A \\ T^t AT &= A\end{aligned}$$

özellikleri sağlanacağından

$$\underbrace{T^t A}_{AT} T = ATT = A$$

yazılırsa, $T^2 = I$, dolayısıyla,

$$T^{-1} = T$$

elde edilir; bir başka deyişle, T matrisinin tersi de, kendisine eşit olmuş olur.

Tanım 2.20. *$\mathbb{E}^{n,\mathcal{B}}$ pozitif tanımlı, ağırlıklı iç çarpım uzayında, $\Delta = \sqrt{\det A}$ olmak üzere, $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..\mathbf{u_{n-1}}$ vektörlerinin vektörel çarpımı,*

$$\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{u_1} \times \mathbf{u_2} \times ..\mathbf{u_{n-1}}) = \Delta \begin{vmatrix} \mathbf{e_1}/a_1 & \mathbf{e_2}/a_2 & \cdots & \mathbf{e_n}/a_n \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{(n-1)1} & u_{(n-1)2} & \cdots & u_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

ile tanımldır. $\boldsymbol{\vartheta}$ *vektörü,* $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..\mathbf{u_{n-1}}$ *vektörlerinin hepsine de* $\mathcal{B}$*-ortogonal olan bir vektördür (Özdemir 2016).*

Örnek 2.21. $\mathbb{E}^{n,\mathcal{B}} = \mathbb{R}^4_{1,2,2,4}$ *ile verilen* 4*-boyutlu* $(1,2,2,3)$ *ağırlıklı iç çarpım uzayında* $\mathbf{u_1} = (1,1,2,3)$*,* $\mathbf{u_2} = (0,1,1,0)$ *ve* $\mathbf{u_3} = (1,0,2,0)$ *vektörlerinin üçüne de* $\mathcal{B}$*-ortogonal olan bir vektör bulunabilir. Bu uzayda tanımlı ağırlıklı iç çarpım*

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3 + 4u_4v_4$$

ile belirlidir. Buna göre, bu iç çarpımla ilişkilendirilmiş matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

olduğundan, $\Delta = \sqrt{\det A} = 4$ *olur. O halde, (2.20) tanımı kullanılırsa,*

$$\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{u_1} \times \mathbf{u_2} \times \mathbf{u_3}) = 4 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2}/2 & \mathbf{e_3}/2 & \mathbf{e_4}/4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 24\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e_2} - 6\mathbf{e_3} - \mathbf{e_4}$$

elde edilir. $\boldsymbol{\vartheta} = (24, 6, -6, -1)$ *vektörünün,* $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ *ve* $\mathbf{u_3}$ *vektörlerine* $\mathcal{B}$*-ortogonal olduğu kolayca görülebilir.*

Önteorem 2.22. $\mathbb{E}^{3,\mathcal{B}} = \mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ *ağırlıklı iç çarpım uzayında verilen bir*

$$ax + by + cz = d$$

düzleminin normali

$$\mathbf{N} = \left(\frac{a}{a_1}, \frac{b}{a_2}, \frac{c}{a_3}\right)$$

ile belirlidir.

İspat $\mathbb{R}^3_{a_1,a_2,a_3}$ ağırlıklı iç çarpım uzayında,

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_1u_1v_1 + a_2u_2v_2 + a_3u_3v_3$$

ile belirlidir. $ax + by + cz = d$ bu uzayda bir düzlem olsun. $P(x, y, z)$, bu düzlem üzerindeki herhangi bir nokta olsun.

$$Q(1, 1, \frac{d-a-b}{c})$$

noktası da, düzlem üzerinde bir noktadır. Bu durumda oluşan,

$$\overrightarrow{QP} = \left(x-1, y-1, z-\frac{d-a-b}{c}\right) = \mathbf{U}$$

vektörü, $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ağırlıklı iç çarpımna göre daima $\mathbf{N} = \left(\frac{a}{a_1}, \frac{b}{a_2}, \frac{c}{a_3}\right)$ vektörüne diktir. Gerçekten,

$$g(\mathbf{N}, \mathbf{U}) = a_1\frac{a}{a_1}(x-1) + a_2\frac{b}{a_2}(y-1) + a_3\frac{c}{a_3}\left(z-\frac{d-a-b}{c}\right) = 0$$

olduğu görülebilir. O halde, $\mathbf{N}$, bu iç çarpımla tanımlı $ax + by + cz = d$ düzlemi için bir normal olarak alınabilir. □

Bu durumda, $\mathbb{E}^{n,\mathcal{B}}$ ağırlıklı iç çarpım uzayında, $\mathcal{B}$ iç çarpımı kullanılarak, $\mathbf{u}$ vektörünün bir eksene göre yansıması verilebilir. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v} \in \mathbb{E}^{n,\mathcal{B}}$ için,

$$\mathbf{v}^{\perp} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathcal{B}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0\}$$

$\mathbf{v}$ vektörüne $\mathcal{B}$-ortogonal olan vektörlerin kümesi olsun. Böylece, $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathbf{z} = \mathbf{u} - r\mathbf{v}$$

şeklinde elde edilen vektör, $\mathbf{v}^{\perp}$ hiper-düzleminde olacağından $\mathcal{B}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = 0$ olur. Buradan

$$\mathbf{v}^t A(\mathbf{u} - r\mathbf{v}) = 0$$

eşitliğinden,

$$r = \frac{\mathbf{v}^t A\mathbf{u}}{\mathbf{v}^t A\mathbf{v}}$$

elde edilir.

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2r\mathbf{v}$$

dönüşümü incelenecek olursa, $\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{v}^{\perp}$ hiper-düzlemine göre yansımasının alındığı görülür. Bu eşitlikte r değeri yerine yazılırsa

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{v}^t A\mathbf{u}}{\mathbf{v}^t A\mathbf{v}}\mathbf{v}$$

elde edilir.

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\frac{\mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{u})}{\mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{v})}\mathbf{u}$$

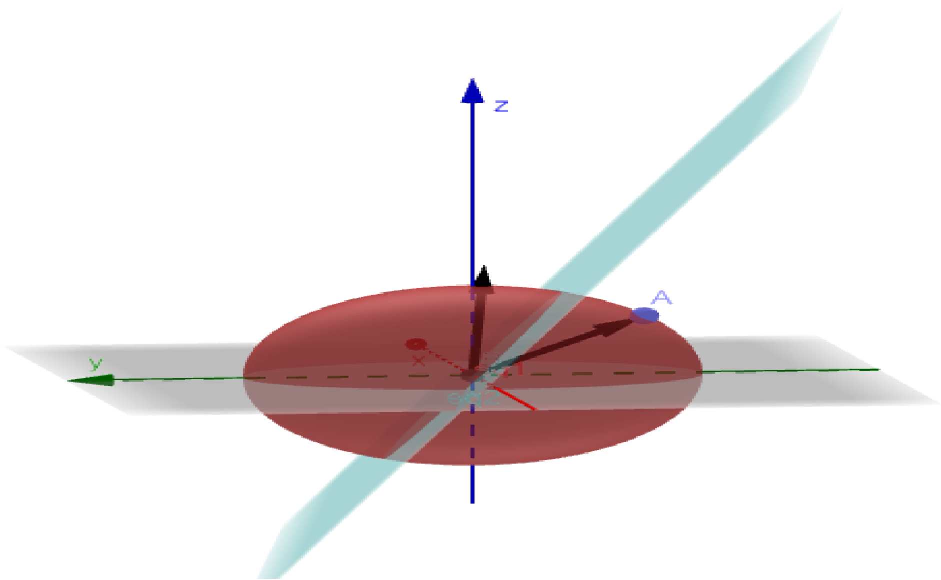
dönüşümü, $\mathbf{u}$ vektörünün, $\mathbf{v}$ vektörüne $\mathcal{B}$-ortogonal bir hiper-düzleme göre yansıma dönüşümünü verir.

Tanım 2.23. *$\mathbb{E}^{n,\mathcal{B}}$ ağırlıklı iç çarpım uzayı olmak üzere, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v} \in \mathbb{E}^{n,\mathcal{B}}$ için*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\frac{\mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{u})}{\mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{v})}\mathbf{v}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{H}$ dönüşümüne, $\mathbb{E}^{n,\mathcal{B}}$ uzayında, $\mathcal{B}$ pozitif tanımlı ağırlıklı iç çarpımı ile tanımlı Householder dönüşümü ya da eliptik-Householder dönüşümü adı verilir. (Özdemir 2016)

Bu dönüşüm, elipsoid üzerinde alınan bir noktanın, orijinden geçen ve $\mathbf{v}$ vektörüne $\mathcal{B}$-ortogonal olan bir hiper-düzleme göre yansımasını verir (Şekil 2.5).



Şekil 2.5. Elipsoid üzerindeki bir A noktasının orijinden geçen bir düzleme göre yansıması

Örnek 2.24. *$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ elipsoidi üzerinde alınan $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ noktasının, orijinden geçen ve $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ vektörüne $\mathcal{B}$-ortogonal olan bir düzleme göre yansıması olan noktayı bulunuz*

ÇÖZÜM: *Öncelikli olarak $\mathcal{B}$ iç çarpımı*

$$\mathcal{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3$$

şeklinde belirlenirse, $\mathbf{v} = (1,2,1)$ vektörü ile $\mathcal{B}$-ortogonal ve orijinden geçen düzlemin de

$$x + 4y + 4z = 0$$

olduğu görülür. Bu durumda,$\mathcal{B}$ iç çarpımı ile uyumlu matris

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, eliptik-Householder matrisi yazılırsa

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{B}} &= I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^t M}{\mathbf{v}^t M \mathbf{v}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{11}{13} & -\frac{8}{13} & -\frac{8}{13} \\ -\frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{16}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{8}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. A noktasının $x + 4y + 4z = 0$ düzlemine göre yansıması ise

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathcal{B}}(A) &= \begin{bmatrix} \frac{11}{13} & -\frac{8}{13} & -\frac{8}{13} \\ -\frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{16}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{8}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{26} \\ -\frac{15}{26} \\ -\frac{15}{52} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

noktası olur.

$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\frac{\mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{u})}{\mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{v})}\mathbf{v}$ dönüşümü için matris gösterimi yapıldığında

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\frac{\mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{u})}{\mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{v})}\mathbf{v}$$

eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - 2\frac{\overbrace{(\mathbf{v}^t A\mathbf{u})}^{\in\mathbb{R}}\mathbf{v}}{\mathbf{v}^t A\mathbf{v}} \\
&= \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t A}{\mathbf{v}^t A\mathbf{v}}\mathbf{u} \\
&= \left(I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t A}{\mathbf{v}^t A\mathbf{v}}\right)\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buna göre, aşağıdaki tanım yazılabilir.

Tanım 2.25. *$\mathbb{E}^{n,\mathcal{B}}$ ağırlıklı iç çarpım uzayı, A bu iç çarpım uzayına karşılık gelen matris olmak üzere, sıfır olmayan $\mathbf{v}_{n\times 1} \in \mathbb{E}^{n,\mathcal{B}}$ için*

$$
H_{\mathcal{B}} = I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t A}{\mathbf{v}^t A\mathbf{v}}
$$

şeklinde tanımlanan $H_{\mathcal{B}}$ matrisine, $\mathbb{E}^{n,\mathcal{B}}$ pozitif tanımlı ağırlıklı iç çarpım uzayında Householder matrisi veya eliptik-Householder matrisi denir ve $\mathbf{v}$ vektörüne ortogonal bir hiperdüzleme göre yansıma tanımlar (Özdemir 2016).

Teorem 2.26. *$H_{\mathcal{B}}$ matrisi, $\mathcal{B}$-ortogonal ve $\mathcal{B}$-simetrik bir matristir (Özdemir 2016).*

İspat *$A, \mathcal{B}$ iç çarpımı ile ilişkilendirilmiş matris olsun. Bu durumda,*

$$
\begin{aligned}
AH_{\mathcal{B}} &= A - \frac{2A\mathbf{v}\mathbf{v}^t A}{\mathbf{v}^t A\mathbf{v}} \\
&= \left(I - \frac{2A\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t A\mathbf{v}}\right)A \\
&= \left(I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^t A}{\mathbf{v}^t A\mathbf{v}}\right)^t A \\
&= H_{\mathcal{B}}^t \cdot A
\end{aligned}
$$

elde edilir ki $H_{\mathcal{B}}$'nin $\mathcal{B}$-simetrik olduğunu gösterir. Diğer yandan,

$$
H_{\mathcal{B}}^t A H_{\mathcal{B}} = AH_{\mathcal{B}}H_{\mathcal{B}}
$$

yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
H_{\mathcal{B}}^t A H_{\mathcal{B}} &= A\left(I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^t A}{\mathbf{v}^t A\mathbf{v}}\right)\left(I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^t A}{\mathbf{v}^t A\mathbf{v}}\right) \\
&= A\left(I - \frac{4\mathbf{v}\mathbf{v}^t A}{\mathbf{v}^t A\mathbf{v}} + \frac{4\mathbf{v}(\mathbf{v}^t A\mathbf{v})\mathbf{v}^t A}{(\mathbf{v}^t A\mathbf{v})^2}\right) \\
&= A
\end{aligned}
$$

eşitliğinin sağlanması da $H_{\mathcal{B}}$ matrisinin $\mathcal{B}$-ortogonal olduğunu gösterir. □

Örnek 2.27. $\mathbb{R}^3_{1,2,2}$ *ağırlıklı iç çarpım uzayında*

a. Ortogonal dönüşüm özelliklerini;

b. Simetrik dönüşüm özelliklerini;

c. Householder dönüşümünün özelliklerini belirleyiniz.

d. $\mathbf{w}=(1,1,2)$ *vektörünün* $x+y+z=0$ *düzlemine göre simetriğini bulunuz.*

Çözüm : $\mathbb{R}^3_{1,2,2}$ ağırlıklı iç çarpım uzayında, iç çarpım

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathcal{B}} = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3$$

ile belirlidir.

a) $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}$ ile tanımlı iç çarpım uzayında bir dönüşüm olmak üzere $\mathcal{T}$ dönüşümünün $\mathcal{B}$-ortogonal olması için

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathcal{B}} = \langle \mathcal{T}(\mathbf{u}),\mathcal{T}(\mathbf{v})\rangle_{\mathcal{B}}$$

sağlanmalıdır. Buna göre, $\mathcal{B}$ ile ilişkilendirilmiş matris

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

ve $\mathcal{T}$ dönüşümüne karşılık gelen matris de T olmak üzere

$$\mathbf{u}^tA\mathbf{v}=(T\mathbf{u})^tAT\mathbf{v}=\mathbf{u}^tT^tAT\mathbf{v}$$

yazılırsa,

$$A=T^tAT$$

eşitliğini sağlayan $\mathcal{T}$ dönüşümü ortogonal olur.

b) $\mathcal{T}$ dönüşümünün simetrik olması için

$$\langle \mathcal{T}(\mathbf{u}),\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathcal{T}(\mathbf{v})\rangle$$

eşitliği incelenirse,

$$\begin{aligned}(T\mathbf{u})^tA\mathbf{v} &= \mathbf{u}^tAT\mathbf{v}\\ \mathbf{u}^tT^tA\mathbf{v} &= \mathbf{u}^tAT\mathbf{v}\end{aligned}$$

bulunur ki, buna göre $T^tA = AT$ şartı sağlanırsa $\mathcal{T}$ simetrik olur.

c)$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ bu uzayda tanımlı, sıfır olmayan, $n \times 1$ boyutlu vektörler olmak üzere, $\mathbf{y}$ vektörünün $\mathbf{x}$ üzerindeki projeksiyon vektörü $r\mathbf{x}$ olsun $(r \in \mathbb{R})$. Bu durumda

$$\mathbf{x}^{\perp} = \{\mathbf{z} : \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{B}} = 0\}$$

olmak üzere, $\mathbf{y} - r\mathbf{x} \in \mathbf{x}^{\perp}$ olacağından

$$\langle \mathbf{y} - r\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{B}} = 0$$

sağlanır. Buradan

$$r = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{B}}}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{B}}}$$

yazılabilir.

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - 2r\mathbf{x}$$

dönüşümü, $\mathbf{y}$ vektörünün yansıma dönüşümünü vereceğinden, r değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{y}) &= \mathbf{y} - 2\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{B}}}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathcal{B}}}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{y} - 2\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^t A\mathbf{y}}{\mathbf{x}^t A\mathbf{x}} \\ &= \left(I - 2\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^t A}{\mathbf{x}^t A\mathbf{x}}\right)\mathbf{y} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, bu iç çarpım uzayında householder matrisi

$$H_{\mathcal{B}} = I - 2\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^t A}{\mathbf{x}^t A\mathbf{x}}$$

şeklinde tanımlanabilir.

d) $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})$ $=H_{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{w}$ olacağından öncelikle $H_{\mathcal{B}}$ matrisinin bulunması gereklidir. Bunun için de düzleme ortogonal vektör olarak $\mathbf{x}^t = (2, 1, 1)$ alınırsa

$$H_{\mathcal{B}} = I - \frac{2\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}}$$

elde edilir ve gerekli işlemler yapıldığında

$$H_{\mathcal{B}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

olur. $H_{\mathcal{B}}$ incelendiğinde,

$$H_{\mathcal{B}}^t A = A H_{\mathcal{B}}^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

sağlandığından, bu uzay için H simetrik bir matris olur. Ayrıca H ortogonaldir ve $\det H = -1$ olduğu aşikardır. Dolayısıyla, $\mathcal{B}$ iç çarpımı altında, $H_{\mathcal{B}}$, bir yansıma matrisi olur. Böylece, $\mathbf{w}$ vektörünün düzleme göre yansıma vektörü de

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Standart yöntemlerle düşünüldüğünde ise $\mathbf{w} = (1, 1, 2)$ vektörünün $x+y+z = 0$ düzlemine göre yansımasına $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) = (a, b, c)$ denilirse $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+2}{2}\right)$ vektörünün düzlem üzerinde olduğu söylenebilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{2} + \frac{b+1}{2} + \frac{c+2}{2} &= 0 \\ a+b+c &= -4 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}$ düzlemin normaline paralel olacağından

$$\frac{a-1}{2} = \frac{b-1}{1} = \frac{c-2}{1}$$

eşitliği

$$2k + 1 + k + 1 + k + 2 = -4$$

şeklinde yazılırsa $a = -3, b = -1, c = 0$ elde edilir ve

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) = (-3, -1, 0)$$

bulunur.

Teorem 2.28. $\mathbf{u}$ *ve* $\mathbf{v} \in \mathbb{E}^{n,\mathcal{B}}$ *birbirinden ve sıfırdan farklı,* $\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{B}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{B}}$ *eşitliğini sağlayan* $n \times 1$ *boyutlu vektörler olsun. Bu durumda* $\mathbf{u}$ *vektörünü* $\mathbf{v}$ *vektörüne yansıtan Householder dönüşümü*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}=\left\{\begin{array}{cc} \mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}} & \mathbf{u} \neq -\mathbf{v} \\ \mathcal{H}_{\mathbf{u}} & \mathbf{u} = -\mathbf{v} \end{array}\right\}$$

şeklindedir (Özdemir 2016).

İspat *a)* $(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ *ve* $(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ *vektörleri incelenirse*

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}-\mathbf{v})^t A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= (\mathbf{v}^t - \mathbf{u}^t)A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}^t A\mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{v}^t A\mathbf{v}}_{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{B}}} - \underbrace{\mathbf{u}^t A\mathbf{u}}_{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{B}}} - \mathbf{u}^t A\mathbf{v} \\ &= \mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{u}) - \mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{u}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

sağlandığı için $\mathcal{B}$*-ortogonal oldukları söylenebilir.*

Bu durumda, $\mathbf{u}$ *vektörünün* $(\mathbf{u}-\mathbf{v})^{\perp}$ *hiper-düzlemine göre yansıması olan vektör* $\mathbf{v}$ *olur.*

$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ *için*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \frac{2\mathcal{B}(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{\mathcal{B}}^2}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$$

eşitliğine bakılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - \frac{2(\mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - \mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{v}))}{\mathcal{B}(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v})}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} - \frac{2\mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - 2\mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - \mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{u}) + \mathcal{B}(\mathbf{v},\mathbf{v})}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} - \frac{2\mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - 2\mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{v})}{2\mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - 2\mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{v})}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} - \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

b) $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$ *durumunda ise,*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \frac{2\mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{B}}^2}(\mathbf{u})$$

eşitliğinden

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = -\mathbf{v} + \frac{2\mathcal{B}(-\mathbf{v},-\mathbf{v})}{\mathcal{B}(-\mathbf{v},-\mathbf{v})}(\mathbf{v})$$

ve

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$$

elde edilir. □

Örnek 2.29. $\mathcal{B}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3 4u_4v_4$ *pozitif tanımlı, ağırlıklı iç çarpım ile donatılmış* $\mathbb{R}^4_{1,2,2,4}$ *uzayında* $\mathbf{x} = (1,1,1,1)$ *ve* $\mathbf{y} = (1,-1,1,-1)$ *vektörleri veriliyor.*

a) $\mathbf{x}$ *vektörünü* $\mathbf{y}$ *vektörüne dönüştüren Householder matrisini bulunuz.*

b) $\mathbf{x}$ $=(1,1,1,1)$ *vektörünün* $2x + y + z - w = 0$ *hiper-düzlemine göre simetriğini bulunuz.*

Çözüm. a) $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ olduğundan $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = (0,2,0,2)$ olmak üzere, $\mathcal{B}$ iç çarpımı ile uyumlu matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

olacağından

$$H_{\mathcal{B}} = I - \frac{2\mathbf{w}\mathbf{w}^t A}{\mathbf{w}^t A \mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

bulunur. $\det H_{\mathcal{B}} = -1$ olup, ayrıca $H^t_{\mathcal{B}} A H_{\mathcal{B}} = A$ sağlandığı için de $H_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$-ortogonal olur.

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

b) $2x + y + z - w = 0$ hiper-düzleminin normali olarak $N = (2, 1/2, 1/2, -1/4)$ vektörü alınabilir. Bu düzlem üzerindeki $\mathbf{z} = (1,1,2,5)$ için $\mathbf{z} \perp_{\mathcal{B}} N$ olacağından

$$H_{\mathcal{B}} = I - \frac{2NN^tA}{N^tAN}$$

yazılırsa

$$H_{\mathcal{B}} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -11 & -16 & -16 & 16 \\ -8 & 17 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 17 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 19 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece,

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -9/7 \\ 3/7 \\ 3/7 \\ 9/7 \end{bmatrix}$$

olur ki, $\mathbf{x}$ vektörünün düzleme göre simetrisi incelenirse $\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})\|$ olduğu görülür

2.4. Minkowski-3 Uzayında Householder Dönüşümü

Minkowski-3 uzayı, Lorentziyen iç çarpımı altındaki üç boyutlu Öklid uzayı, $\mathbb{E}_1^3$ $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_L)$ olmak üzere, bu uzayda bir Householder yansıma dönüşümünün ve buna karşılık gelen matrisin oluşturulabilmesi için, öncelikle bir iç çarpım tanımının yapılması gereklidir. Sonrasında ise bu uzayda tanımlı bir yansıma dönüşümü ve bu dönüşüme karşılık gelen matrisin özellikleri belirlendikten sonra Lorentziyen Householder dönüşümü incelenecektir. Lorentz iç çarpım uzayında tanımlı Householder dönüşümü için (Özdemir ve Erdoğdu 2015) ile (Şimşek ve Özdemir 2016) incelenebilir.

Tanım 2.30. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *ve* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}_1^3$ *olmak üzere,*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

şeklinde tanımlanan iç çarpıma Lorentziyen iç çarpım adı verilir.

$$I^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yazılırsa, bu iç çarpımın matris açılımı

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_L = \mathbf{u}^t I^* \mathbf{v}$$

olarak da yazılabilir (Özdemir ve Erdoğdu 2015).

Tanım 2.31. $\mathbf{u} \in \mathbb{E}_1^n$ *olmak üzere*

$$\|\mathbf{u}\|_L = \sqrt{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_L|}$$

ifadesine $\mathbf{u}$ *vektörünün normu denir. Bu durumda,*

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_L > 0$ *veya* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *ise,* $\mathbf{u}$ *vektörüne spacelike,*
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_L < 0$ *ise timelike,*
- $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ *olmak üzere* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_L = 0$ *ise* $\mathbf{u}$ *null vektör adı verilir (Özdemir ve Erdoğdu 2015).*

Tanım 2.32.

1. $\mathcal{S}$*,Minkowski-3 uzayında bir dönüşüm olmak üzere, bu dönüşüme karşılık gelen matris* S*,*

   $$S^t I^* = I^* S$$

   şartını sağlıyorsa, $\mathcal{S}$ *dönüşümüne semi-simetrik (pseudo-simetrik) adı verilir.*

2. $\mathcal{T}$*,Minkowski-3 uzayında bir dönüşüm olmak üzere, bu dönüşüme karşılık gelen matris* T*,*

   $$T^t I^* = -I^* T$$

   şartını sağlıyorsa, $\mathcal{T}$ *dönüşümüne semi-ters simetrik (pseudo-ters simetrik) adı verilir.*

3. $\mathcal{R}$*, Minkowski-3 uzayında bir dönüşüm olmak üzere, bu dönüşüme karşılık gelen matris* R*,*

   $$R^t I^* R I^* = I$$

   şartını sağlıyorsa $\mathcal{R}$ *dönüşümüne ortogonal dönüşüm adı verilir (Özdemir ve Erdoğdu 2015).*

Teorem 2.33. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$ *null olmayan vektörler için*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_L = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L$$

olsun. Bu durumda

i. $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\perp_L(\mathbf{u}+\mathbf{v})$

ii. $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ *veya* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ *vektörlerinden en az biri null değildir* *(Özdemir ve Erdoğdu 2015).*

İspat

i. $\langle \mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle_L = \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_L + \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L - \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle_L - \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_L = 0$

ii. Simetrik bilineer form özellikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle_L &= \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_L + \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_L - 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L \\ &= 2(\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_L - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L) \end{aligned}$$

ve

$$\langle \mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle_L = 2(\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_L + \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L)$$

olur ki, buradan

$$\langle \mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle_L + \langle \mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle_L = 4\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_L = 4\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \neq 0$$

olacağından, $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_L$ veya $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_L$ ifadelerinden en az birinin sıfırdan farklı olması gerektiği görülür.

$\square$

Tanım 2.34. $R \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *bir matris olmak üzere,* $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{E}_1^3$ *için*

$$\langle R\mathbf{u}, R\mathbf{v}\rangle_L = \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L$$

sağlanıyorsa, R *matrisine semi-ortogonal matris denir (Özdemir ve Erdoğdu 2015).*

Semi-ortogonal bir matris, Minkowski-3 uzayda uzunluğu korur; satır ve sütunları, bu uzay için ortonormal bir taban oluşturur.

Teorem 2.35. R, *semi-ortogonal bir matris olmak üzere*

$$I^* R^t I^* = R^{-1}$$

eşitliği sağlanır (Özdemir ve Erdoğdu 2015).

İspat $\langle R\mathbf{u}, R\mathbf{v}\rangle_L = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_L$ *olduğundan,* $(R\mathbf{u})^t I^* R\mathbf{v} = \mathbf{u}^t I^* \mathbf{v}$ *yazılabilir. Buradan* $\mathbf{u}^t R^t I^* R\mathbf{v} = \mathbf{u}^t I^* \mathbf{v}$ *ve*

$$R^t I^* R = I^*$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitliğin her iki yanı R^{-1} *ile çarpılırsa*

$$R^t I^* I = I^* R^{-1}$$

olur ki, buradan

$$I^* R^t I^* = I^* I^* R^{-1} = R^{-1}$$

bulunur. □

Semi-ortogonal bir R matrisi için $\det R = \pm 1$ olacağı açıktır. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\det R = 1$ olan bir semi-ortogonal matris dönme; $\det R = -1$ olan bir semi-ortogonal matris ise yansıma matrisi belirtir.

2.4.1. Lorentziyen Householder dönüşümü

$\mathbf{u} \in \mathbb{E}_1^3$ için $\mathbf{u}$ vektörünün, null olmayan başka bir $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$ vektörü üzerindeki projeksiyon vektörü $r\mathbf{v} (r \in \mathbb{R})$ ile gösterilsin. Bu durumda, $\mathbf{u} - r\mathbf{v}$ vektörü, $\mathbf{v}$ vektörüne Lorentziyen anlamda ortogonal vektörlerden oluşan $\mathbf{v}^{\perp_L}$ hiper-düzlemi üzerinde olur. Yani

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - r\mathbf{v}\rangle_L = 0$$

sağlanır. Bu durumda,

$$r = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_L}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_L}$$

bulunur. Böylece, bir $\mathcal{H}_{L_\mathbf{v}}$ dönüşümü için

$$\mathcal{H}_{L_\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2r\mathbf{v}$$

eşitliğinde r değeri yerine yazılırsa

$$\mathcal{H}_{L_\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_L}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_L}\mathbf{v}$$

elde edilir; bu da $\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{v}^{\perp_L}$ hiper-düzlemine göre yansımasını verir.

Tanım 2.36. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$ $n \times 1$ *boyutlu vektörler ve* $\mathbf{v}$*, null olmayan bir vektör olmak üzere,*

$$\mathcal{H}_{L_\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_L}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L}\mathbf{v}$$

dönüşümüne pseudo-Householder dönüşümü denir (Özdemir ve Erdoğdu 2015).

$\mathcal{H}_{L_\mathbf{v}}(\mathbf{u})$ eşitliğinde matris gösterimi yapıldığında

$$\mathcal{H}_{L_\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^t I^* \mathbf{u}}{\mathbf{v}^t I^* \mathbf{v}}$$

elde edilir. Böylece,

$$H_{L_\mathbf{v}} = I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^t I^*}{\mathbf{v}^t I^* \mathbf{v}}$$

matrisi elde edilir.

Tanım 2.37. $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$ $n \times 1$ *boyutlu, null olmayan bir vektör olmak üzere,*

$$H_L = I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^t I^*}{\mathbf{v}^t I^* \mathbf{v}}$$

matrisine pseudo-Householder matrisi adı verilir (Özdemir ve Erdoğdu 2015).

Örnek 2.38. $\mathbf{v}^t = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}_1^3$*, null olmayan bir vektör olsun.*

a) *Herhangi bir* $\mathbf{u} \in \mathbb{E}_1^3$ *vektörünü* $\mathbf{v}^{\perp_L}$ *hiper-düzlemine göre yansıtan Householder matrisini yazınız.*

b) $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ *olmak üzere,* $\mathbf{u_1} = (2, 3, 5)$ *ve* $\mathbf{u_2} = (5, 3, 4)$ *vektörlerinin* $\mathbf{v}^{\perp_L}$ *hiper-düzlemine göre yansımalarını bulunuz.*

Çözüm : a)

$$H_{L_\mathbf{v}} = I - \frac{2\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

eşitliğinde gerekli işlemler yapıldığında, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında Householder matrisi için genel bir form

$$H_{L_\mathbf{v}} = \frac{1}{-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\begin{bmatrix} v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 & -2v_1v_2 & -2v_1v_3 \\ 2v_1v_2 & -v_1^2 - v_2^2 + v_3^2 & -2v_2v_3 \\ 2v_1v_3 & -2v_2v_3 & -v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

b) $\mathbf{v} = (1,1,2)$ vektörü için, $\mathbf{v}^{\perp_L}$ hiper-düzlemine göre yansıtan Householder yansıma vektörü

$$H_{L_\mathbf{v}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse, bu matrisin

$$H_L^t I^* = I^* H$$

eşitliğini sağladığı, dolayısıyla pseudo-simetrik bir matris olduğu görülebilir.

$$H_L^t I^* H_L I^* = I$$

eşitliği de sağlandığından, H_L aynı zaman da pseudo-ortogonal bir matris olur.
$\mathbf{u_1} = (2,3,5)$ vektörü için $\|\mathbf{u_1}\| = \sqrt{-4+9+25} = \sqrt{30}$ olup, spacelike olduğundan

$$\mathcal{H}_{L_\mathbf{v}}(\mathbf{u_1}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ -5/2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$\|\mathcal{H}_{L_\mathbf{v}}(\mathbf{u_1})\| = \sqrt{-\frac{49}{4}+\frac{25}{4}+\frac{144}{4}} = \sqrt{30}$$

olur ve $\mathcal{H}_{L_\mathbf{v}}$ dönüşümünün $\mathbf{u_1}$ vektörünün normunu, dolayısıyla karakterini koruduğu görülür.

Benzer şekilde, $\mathbf{u_2} = (5,3,4)$ için $\|\mathbf{u_2}\| = \sqrt{-25+9+16} = 0$ olduğundan null bir vektör olduğu görülür. Yansıma vektörü bulunduğunda ise

$$\mathcal{H}_{L_\mathbf{v}}(\mathbf{u_2}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olup,

$$\|\mathcal{H}_{L_\mathbf{v}}(\mathbf{u_2})\| = \sqrt{-4+4} = 0$$

eşitliğinden, yine normun ve karakterin korunduğu anlaşılır.

Teorem 2.39. *$\mathbb{E}_1^3$ uzayında tanımlı pseudo-Householder yansıma dönüşümü $\mathcal{H}_L$, vektörün karakterini koruyan bir dönüşümdür (Özdemir ve Erdoğdu 2015).*

İspat $\mathcal{H}_{L_{\mathbf{v}}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_L}\mathbf{v}$ dönüşümü, $\mathbf{u}$ vektörünün bir $\mathbf{v}$ vektörüne lorentziyen anlamda ortogonal olan $\mathbf{v}^{\perp_L}$ hiper-düzlemine göre yansımasını veren pseudo-Householder dönüşümü olsun.

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{H}_{L_{\mathbf{v}}}\mathbf{u}, \mathcal{H}_{L_{\mathbf{v}}}\mathbf{u}\rangle_L &= \left\langle \mathbf{u} - 2\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_L}\mathbf{v}, \mathbf{u} - 2\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_L}\mathbf{v}\right\rangle_L \\
&= \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_L - 2\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_L}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L - 2\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_L}\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle_L \\
&\quad +4\left(\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_L}\right)^2 \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_L \\
&= \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_L - 4\frac{(\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L)^2}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_L} + 4\frac{(\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_L)^2}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_L} \\
&= \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_L
\end{aligned}$$

olacağından $\mathcal{H}_L$ dönüşümü, karakteri koruyan bir dönüşüm olur. □

Örnek 2.40. *Lorentz uzayda $\mathbf{u} = (2,1,1)$ vektörünün*

$$2x + y - 2z = 0$$

düzlemine göre simetriği olan vektörü, Householder dönüşümü yardımı ile bulunuz.

Çözüm : Düzlemin normali (a,b,c) olsun Bu durumda düzlem üzerindeki $(2,2,3)$ noktası alınarak oluşturulan $(x-2, y-2, z-3)$ vektörü ile normal vektörü Lorentziyen anlamda ortogonal olur. Buradan

$$-a(x-2) + b(y-2) + c(z-3) = 0$$

denklemi, düzlemin denklemini verir. $a = -2$; $b = 1$; ve $c = -2$ bulunarak normal vektörü $(-2,1,-2)$ elde edilir. Böylece Lorentziyen-Householder matrisinde $\mathbf{v} = (-2,1,-2)$ yazılabilir. Lorentz uzayda genel olarak yazılan Householder dönüşümünde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
H_{L_{\mathbf{v}}} &= \frac{1}{-v_1^2+v_2^2+v_3^2}\begin{bmatrix} v_1^2+v_2^2+v_3^2 & -2v_1v_2 & -2v_1v_3 \\ 2v_1v_2 & -v_1^2-v_2^2+v_3^2 & -2v_2v_3 \\ 2v_1v_3 & -2v_2v_3 & -v_1^2+v_2^2-v_3^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9 & 4 & -8 \\ -4 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & -7 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olur ve

$$
\mathcal{H}_{L_{\mathbf{v}}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 9 & 4 & -8 \\ -4 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 13 \end{bmatrix}
$$

bulunur.

Teorem 2.41. *Null olmayan, birbirinden farklı* $\mathbf{u}$ *ve* $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$ *için* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_L = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L$ *olsun. Bu durumda,* $\mathbf{u}$ *vektörünün Lorentziyen anlamda yansımasını* $\mathbf{v}$ *yapan bir pseudo-Householder dönüşümü vardır ve şu şekildedir :*

$$
\mathcal{H} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}} & \mathbf{u} \neq -\mathbf{v} (\mathbf{u}-\mathbf{v} \textit{ null değil}) \\ \mathcal{H}_{\mathbf{u}} & \mathbf{u} = -\mathbf{v} \\ \mathcal{H}_{\mathbf{v}}(\mathcal{H}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}) & \mathbf{u} \neq -\mathbf{v} (\mathbf{u}-\mathbf{v} \textit{ null}) \end{array} \right\}
$$

İspat

1. $\mathbf{u} \neq -\mathbf{v}$ olmak üzere, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ null olmasın. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - \frac{2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}-\mathbf{v} \rangle_L}{\langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v} \rangle_L}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\
&= \mathbf{u} - \frac{2\left(\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_L - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_L\right)}{2\left(\left(\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_L - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_L\right)\right)}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\
&= \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

olur.

2. $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$ ise $\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{u}^{\perp_L}$hiper-düzlemine göre yansıması, $\mathbf{v}$ vektörünü verir; bu durumda ise

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}-\frac{2\left\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\right\rangle_L}{\left\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\right\rangle_L}\mathbf{u} \\ &= -\mathbf{u} \\ &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

elde edilir.

3. $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ null ve $\mathbf{u} \neq -\mathbf{v}$ iken ise

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathbf{v}}\left(\mathcal{H}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(\mathbf{u})\right) &= \mathcal{H}_{\mathbf{v}}\left(\mathbf{u}-\frac{2\left\langle \mathbf{u},\mathbf{u}+\mathbf{v}\right\rangle_L}{\left\langle \mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}\right\rangle_L}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\right) \\ &= \mathcal{H}_{\mathbf{v}}\left(\mathbf{u}-\frac{2\left\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\right\rangle_L+2\left\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\right\rangle_L}{2\left\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\right\rangle_L+2\left\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\right\rangle}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\right) \\ &= \mathcal{H}_{\mathbf{v}}(-\mathbf{v}) \\ &= -\mathbf{v}-\frac{2\left\langle \mathbf{v},-\mathbf{v}\right\rangle_L}{\left\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\right\rangle_L}\mathbf{v} \\ &= -\mathbf{v}+\frac{2\left\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\right\rangle_L}{\left\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\right\rangle_L}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

elde edilir.

□

2.5. Hiperbolik Householder Dönüşümü

Şimşek ve Özdemir (2016), geometri, kinematik, fizik, bilgisayar grafikleri, animasyonlar ve optimizasyon gibi çok geniş uygulama alanlarına sahip olan dönme matrislerinin elde edilme yöntemlerinden birinin de Householder dönüşümü olduğunu belirtmektedir. Buna göre, iki Householder dönüşümünün bileşkesi, bir dönme matrisi ile sonuçlanmaktadır (Şimşek ve Özdemir 2016). Bu amaçla, $\mathbb{R}^n$ uzayında, en genel anlamda tanımlanan bir iç çarpım ile oluşturulan Householder dönüşümünün tanımı verilmiştir.

Tanım 2.42. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *ve* $a_1, a_2, .., a_n \in \mathbb{R}^+$

olmak üzere,

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = -a_1 u_1 w_1 - \cdots - a_q u_q w_q + a_{q+1} u_{q+1} w_{q+1} + \cdots + a_n u_n w_n$$

şeklinde tanımlanan iç çarpıma semi-Öklit g-iç-çarpımı.adı verilir. İç çarpım g için matris gösterimi,

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{u}^t \Omega^* \mathbf{w}$$

şeklinde yapılırsa, bu iç çarpımla uyumlu Ω matrisi de

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & -a_q & 0 & & \vdots \\ & & \vdots & 0 & a_{q+1} & & \\ & & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & a_n \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

ile gösterilir (Şimşek ve Özdemir 2016).

Tanım 2.43. $\mathbb{R}^{2,1}_{a_1,a_2,a_3}$ *uzayında, genelleştirilmiş Lorentziyen Householder ya da* g-Householder *dönüşümü,* $\mathbf{v}$ *null olmayan bir vektör olmak üzere,*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^{2,1}_{a_1,a_2,a_3} \to \mathbb{R}^{2,1}_{a_1,a_2,a_3}$$
$$\mathcal{H}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\Omega^*}{\mathbf{v}^t\Omega^*\mathbf{v}}\mathbf{u}$$

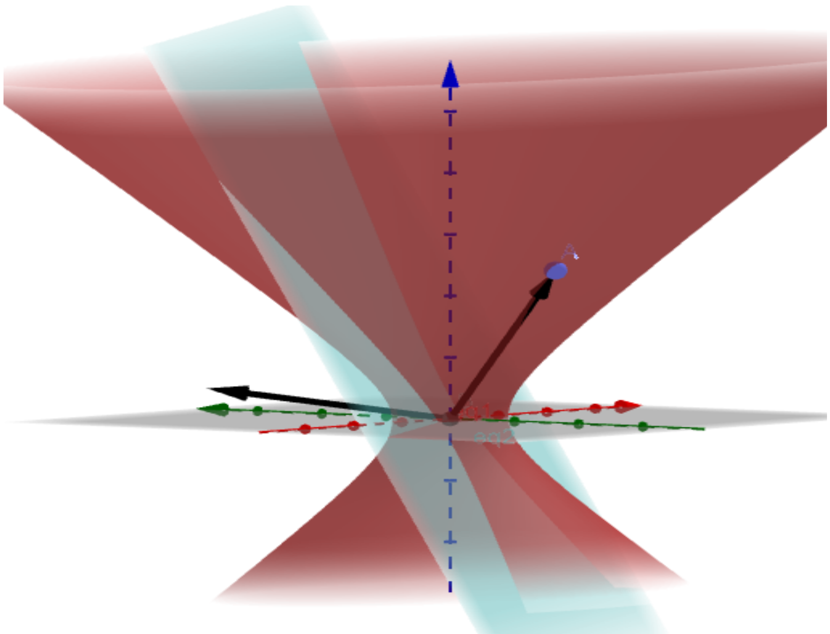
şeklinde tanımlanabilir (Şimşek ve Özdemir 2016).

Bu durumda, $\mathbb{R}^{2,1}_{a_1,a_2,a_3}$ uzayında, $\mathcal{H}_{\mathbf{v}}$ dönüşümünün matris temsili ise

$$H_{\mathbf{v}} = \frac{1}{g(\mathbf{v},\mathbf{v})} \begin{bmatrix} a_1v_1^2 + a_2v_2^2 + a_3v_3^2 & -2a_2v_1v_2 & -2a_3v_1v_3 \\ 2a_1v_1v_2 & -a_1v_1^2 - a_2v_2^2 + a_3v_3^2 & -2a_3v_2v_3 \\ 2a_1v_1v_3 & -2a_2v_2v_3 & -a_1v_1^2 + a_2v_2^2 - a_3v_3^2 \end{bmatrix}.$$

şeklinde olur. $H_{\mathbf{v}}$ matrisi, semi g-simetrik ve semi g-ortogonal olup; tersi de kendisine eşit bir matristir. Yani, $H_{\mathbf{v}}^t\Omega^* = \Omega^* H_{\mathbf{v}}$, $H_{\mathbf{v}}^t\Omega^* H_{\mathbf{v}} = \Omega^*$ ve $H_{\mathbf{v}}^2 = I$, eşitlikleri sırasıyla sağlanır. $\det H_{\mathbf{v}}$ incelendiğinde, -1 çıktığı görülür ki bu durumda, $\mathbf{v}$ vektörüne g-ortogonal olan ve orijinden geçen bir düzleme göre hiperbolik g-yansıma dönüşümü tanımlanmış olur. Böylece, bu matris ile herhangi bir hiperboloid üzerindeki hiperbolik g-yansımaları ifade edilebilir (Şimşek ve Özdemir 2016).

Şekil 2.6'da, $\mathcal{H}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \dfrac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^t\Omega^*}{\mathbf{v}^t\Omega^*\mathbf{v}}\mathbf{u}$ dönüşümünün, hiperboloid üzerinde alınan bir noktanın, orijinden geçen ve $\mathbf{v}$ vektörüne g-ortogonal olan bir düzleme göre yansıması görülmektedir.



Şekil 2.6. Hiperboloid üzerindeki bir A noktasının orijinden geçen bir düzleme göre yansıması

Örnek 2.44. $2x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 1$ *hiperbolodi üzerindeki* $A\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ *noktasının* $\mathbf{v} = (-1, 2, -1)$ *vektörüne* g*-ortogonal olan ve orijinden geçen bir düzleme göre yansımasını bulunuz.*

Çözüm: g *iç çarpımı*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1x_2 - 4y_1y_2 - 9z_1z_2$$

ile uyumlu matrise M denilirse

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Bu durumda, yansıtmayı yapan hiperbolik-Householder matrisi

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{v}} &= I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^t M}{\mathbf{v}^t M \mathbf{v}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{27}{23} & \frac{16}{23} & -\frac{18}{23} \\ -\frac{8}{23} & -\frac{9}{23} & \frac{36}{23} \\ \frac{4}{23} & \frac{16}{23} & \frac{5}{23} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu arada, $\mathbf{v}$ ile g-ortogonal ve orijinden geçen düzlem

$$-2x - 8y + 9z = 0$$

olacağından $A\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ noktasının bu düzleme göre yansıması

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbf{v}}(A) &= \begin{bmatrix} \frac{27}{23} & \frac{16}{23} & -\frac{18}{23} \\ -\frac{8}{23} & -\frac{9}{23} & \frac{36}{23} \\ \frac{4}{23} & \frac{16}{23} & \frac{5}{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{41}{23} \\ \frac{49}{46} \\ -\frac{31}{69} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.45. $\mathbf{u}$ *ve* $\mathbf{v}$ $\in \mathbb{R}^{2,1}_{a_1,a_2,a_3}$ *, null olmayan, birbirinden farklı vektörler olsun. $\|\mathbf{u}\|_g = \|\mathbf{v}\|_g$ olmak üzere,*

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$$

olacak şekilde bir g-Householder dönüşümü

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{H}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) & \mathbf{u} = -\mathbf{v} \text{ ise,} \\ \mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}(\mathbf{u}) & \mathbf{u} \neq -\mathbf{v} \text{ ve } \mathbf{u} - \mathbf{v} \text{ null değil ise,} \\ \mathcal{H}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(-\mathbf{u}) & \mathbf{u} \neq -\mathbf{v} \text{ ve } \mathbf{u} - \mathbf{v} \text{ null ise} \end{array} \right\}$$

şeklindedir (Şimşek ve Özdemir 2016).

İspat ***i.)*** $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$ *ise,*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbf{u}) &= \mathcal{H}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^t\Omega^*}{\mathbf{u}^t\Omega^*\mathbf{u}}\mathbf{u} \\ &= -\mathbf{u} \\ &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

ii.) $\mathbf{u} \neq -\mathbf{v}$ *ve* $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ *null değil ise*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbf{u}) &= \mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}(\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u} - \frac{2(\mathbf{u}-\mathbf{v})(\mathbf{u}-\mathbf{v})^t\Omega^*}{(\mathbf{u}-\mathbf{v})^t\Omega^*(\mathbf{u}-\mathbf{v})}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} - \frac{2(g(\mathbf{u},\mathbf{u}) - g(\mathbf{u},\mathbf{v}))}{2g(\mathbf{u},\mathbf{u}) - 2g(\mathbf{u},\mathbf{v})}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

iii.) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ *null ve* $\mathbf{u} \neq -\mathbf{v}$ *durumunda ise*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + & \frac{2(\mathbf{u}+\mathbf{v})(\mathbf{u}+\mathbf{v})^t\Omega^*}{(\mathbf{u}+\mathbf{v})^t\Omega^*(\mathbf{u}+\mathbf{v})}\mathbf{u} \\ &= -\mathbf{u} - \frac{2g(-\mathbf{u},\mathbf{u}+\mathbf{v})}{2(g(\mathbf{u},\mathbf{u}) + g(\mathbf{v},\mathbf{v}))}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= -\mathbf{u} + \frac{2(g(\mathbf{u},\mathbf{u}) + g(\mathbf{u},\mathbf{v})}{2(g(\mathbf{u},\mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{v},\mathbf{v}))}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

elde edilir. □

2.6. Kompleks Sayılarda Householder Dönüşümü

Householder dönüşümü, kompleks değişkenli vektörler için de incelenmiştir. Xia ve Suter (1995) tarafından bildirildiğine göre, Venkaiah ve Paulraj (1993), Householder dönüşümünü, n-boyutlu kompleks C^n uzayında, kompleks sayı vektörleri için genişletmiştir. 2004'de Mackey vd., $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ vektör uzaylarında, en genel haliyle, bilineer veya sesqulineer bir iç çarpım ile uyumlu, Householder-benzeri yansıma dönüşümlerine karşılık gelen matrisleri gruplandırmış; bu matrislerin yansıtabilme kapasitelerinin sınırlarını çizmiştir. Buna göre ortogonal, Householder-benzeri bir matris G ve $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektörleri için

$$G\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

eşitliği için gerek ve yeter koşulları sunmuş; böyle bir matrisin varlığı durumunda ise $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri ile nasıl elde edilebileceği yönünde çıkarımlarda bulunmuştur (Mackey vd. 2004).

Kompleks vektör uzayında Householder dönüşümünün ilk yapılandırılması 1932 yılında Turnbull ve Aitken tarafından ele alınmış; $\mathbf{u}$ vektörünü $\mathbf{v}$ vektörüne yansıtan; kompleks-Householder dönüşümünü, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ ve $\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \mathbf{v}^*\mathbf{v} = 1$ olmak üzere

$$R = \frac{(\mathbf{u}+\mathbf{v})(\mathbf{u}+\mathbf{v})^*}{1+\mathbf{v}^*\mathbf{u}} - I$$

şeklinde, üniter fakat hermitiyen olmayan bir dönüşüm olarak tanımlamıştır (Mackey vd. 2004). Mackey vd. (2004) tarafından bildirildiğine göre, Turnbull ve Aitken (1932), dönüşüm formülü için bilineer form yerine hermitiyen iç çarpımın kullanılmasının gerekliliği üzerinde öneride bulunmuştur; aksi takdirde, formül bir takım yansıtma sorunlarına yol açmaktadır. Bu nedenle, Mackey vd. (2004), farklı iç çarpım uzaylarında, en genel hali ile, $\mathbb{G}$-yansıtıcılar: Householder-benzeri dönüşümler adı ile yansıma dönüşümlerine karşılık gelen matris grupları oluşturmuş ve ortogonal Householder-benzeri yansıma matrislerinin varlığı için gerek ve yeter şartları, farklı iç çarpım durumlarına göre incelemiştir.

Bu bölümde, kompleks sayılarda Householder dönüşümü ve buna karşılık gelen matris incelenmiş; özellikleri belirtilmiştir. Bunun için incelenen çalışmalardan (Xia ve Suter 1995; Chung ve Yan 1997) elde edilen sonuçlar irdelendiğinde, elde edilen dönüşümlere karşılık gelen matrislerin hermitiyenlik özelliğini sağlamadığı gözlemlenmiştir.

Xia ve Suter (1995)'in belirttiğine göre, Venkaiah vd. (1993), herhangi bir kısıtlama olmaksızın Householder dönüşümünü kompleks sayılar için genişletmiş; kendi yaptıkları çalışmada ise $\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \mathbf{v}^*\mathbf{v}$ şartını sağlayan $n \times 1$ boyutlu kompleks vektörler $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ için

$$\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{H} = I - \left(1 + \frac{\mathbf{u}^*\mathbf{z}}{\mathbf{z}^*\mathbf{u}}\right) \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^*}{\mathbf{z}^*\mathbf{z}}$$

kompleks-Householder matrisindeki gerek ve yeter şartı sunmuşlar ve $\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \mathbf{v}^*\mathbf{v} \neq \mathbf{u}^*\mathbf{v}$ olması şartıyla, $\frac{\mathbf{u}^*\mathbf{z}}{\mathbf{z}^*\mathbf{u}}$ kompleks sayısının, bu matrisin tanımlanabilmesindeki yeter ve gerek şart olduğunu belirtmişlerdir. $\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \mathbf{v}^*\mathbf{v}$ eşitliğinin sağlanmaması durumunda ise matrisin zaten üniter olamayacağından bahsetmişlerdir.

Daha sonra yapılan çalışmada (Kuo ve Yan 1997) ise, Householder dönüşümüne karşılık gelen matrisin, daha önceden yapılan çalışmalardaki gibi yoğun kompleks işlemler gerektirmeyen, daha kolay elde edilebilen bir şekli sunulmuştur (Kuo ve Yan 1997). Buna göre, $\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \mathbf{v}^*\mathbf{v}$ ve $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ olmak üzere,

$$\mathbf{H} = I - \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^*}{\mathbf{z}^*\mathbf{u}}$$

ifadesinin kompleks-Householder dönüşümünü veren matris olduğu belirtilmiştir.

Her iki çalışmada da yapılan matematiksel ispatlamaların karmaşıklığı; verilen tanımlamaların yetersizliği; kullanılan iç çarpımın belli olmaması; ayrıca hermitiyenlik yönünden inceleme yapılmamış olması, elde edilen matrislerin yansıma matrisi olmasından şüphe duyulmasına sebep olmuş; bu nedenle de bir kompleks-Householder dönüşümünün elde edilebilmesi ve yansıma dönüşümüne ait tüm özelliklere sahip olmasına dair gerekli çalışmaların, tezin bu kısmında yeniden yapılmasına karar verilmiştir.

Dolayısıyla, bu çalışmada öncelikle kompleks sayılar üzerinde farklı bir iç çarpım tanımlanmış ve çalışma bu yönde ilerletilmiştir. $\mathbb{C}^n$ uzayında hermitiyen iç çarpım ile tanımlanan Householder dönüşümü, çalışmanın bu kısmında, standart kompleks iç çarpım altında ele alınmış; elde edilen Householder matrisi, hermitiyenlik ve üniterlik açısından incelenmiş; bir takım kısıtlamalar ortaya konulmuştur.

Öncelikle, kompleks sayılarla ve kompleks sayı matrisleriyle ilgili bazı özellikler verilmiştir. $\mathbb{C}^n$, n-boyutlu kompleks sayı kolon vektörlerinin kümesi olarak alınmıştır. $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere $\mathbf{u}^* = \overline{\mathbf{u}^t}$ olarak kullanılmıştır.

Tanım 2.46. $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *ve* $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n, k \in \mathbb{C}$ *olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyona kompleks iç çarpım adı verilir:*

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}_{\mathbb{C}}$

2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbb{C}}$

3. $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{k} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}}$

4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{C}} \geq 0$ *ve*

5. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \Longrightarrow \mathbf{u} = 0$

Tanım 2.47. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ *için* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ *ve* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *kolon vektörler olsunlar. Bu durumda*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} &= \overline{u}_1 v_1 + \overline{u}_2 v_2 + ... + \overline{u}_n v_n + \overline{v}_1 u_1 + \overline{v}_2 u_2 + ... + \overline{v}_n u_n \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}^* \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \mathbf{u}) \end{aligned}$$

ifadesi, yukarıdaki özellikleri sağlayan bir kompleks iç çarpımdır.

Tanım 2.48. *Yukarıdaki iç çarpımla tanımlı bir $\mathcal{R}$ dönüşümü,*

$$\langle \mathcal{R}\mathbf{u}, \mathcal{R}\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}}$$

eşitliğini sağlıyorsa $\mathcal{R}$'ye üniter dönüşüm, bu dönüşüme karşılık gelen matrise de üniter matris adı verilir.

Sonuç 2.49. *Buna göre, $\mathcal{R}$ bir üniter dönüşüm ve R, bu dönüşüme karşılık gelen matris ise,*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}\mathbf{u}, \mathcal{R}\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} \\ (R\mathbf{u})^* R\mathbf{v} + (R\mathbf{v})^* R\mathbf{u} &= \mathbf{u}^* \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}^* R^* R\mathbf{v} + \mathbf{v}^* R^* R\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \mathbf{u}$$

eşitliğinin $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ sağlanabilmesi için

$$R^* R = I$$

şartını sağlaması gerek ve yeter koşuldur.

Sonuç 2.50. *Üniter matrisin sütun(satır)ları, $\mathbb{C}^n$ için ortonormal bir küme oluşturur.*

Örnek 2.51. $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$ *matrisi incelenirse,* $\det A = \frac{1}{4} 4i = i$ *ve*

$$A^{-1} = \frac{-i}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \text{ ve } A^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

$$A^{-1} = A^{*}$$

sağlandığından, A bir üniter matristir.

Tanım 2.52. *Bir $\mathcal{S}$ dönüşümü için*

$$\langle \mathcal{S}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mathbf{u}, \mathcal{S}\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}}$$

sağlanıyorsa, $\mathcal{S}$ hermitiyen dönüşüm; bu dönüşüme karşılık gelen matris de hermitiyen matris adını alır.

Sonuç 2.53. *$\mathcal{S}$ hermitiyen bir dönüşüm ve S, bu dönüşüme karşılık gelen matris olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} &= \langle \mathbf{u}, \mathcal{S}\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} \\ (S\mathbf{u})^{*}\mathbf{v} + \mathbf{v}^{*}S\mathbf{u} &= \mathbf{u}^{*}S\mathbf{v} + (S\mathbf{v})^{*}\mathbf{u} \\ \mathbf{u}^{*}S^{*}\mathbf{v} + \mathbf{v}^{*}S\mathbf{u} &= \mathbf{u}^{*}S\mathbf{v} + \mathbf{v}^{*}S^{*}\mathbf{u} \end{aligned}$$

eşitliğinin $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n}$ sağlanabilmesi için

$$S^{*} = S$$

sağlanması gereklidir.

Sonuç 2.54. *S bir skew-hermitiyen matris ise*

$$S^{*} = -S$$

olmalıdır.

Sonuç 2.55. *Hermitiyen bir matrisin asal köşegen elemanları reel sayı olup, köşegene göre simetrik elemanlar da birbirinin eşleniğidir. Bu durumda, $\mathbb{C}^{n}$ uzayında bir $\mathcal{H}$ Householder dönüşümü üniter ve hermitiyen olmalıdır.*

Teorem 2.56. *$\mathbb{C}^{n}$ uzayında verilen sıfır olmayan sütun vektörler $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ olmak üzere, $\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{v}^{\perp_{\mathbb{C}}}$ hiper-düzlemine göre yansımasını veren $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ Householder dönüşümüne karşılık gelen matris*

$$H_{\mathbb{C}} = I - \frac{(\mathbf{v}^{*}\mathbf{u} + \mathbf{u}^{*}\mathbf{v})\mathbf{v}\mathbf{u}^{*}}{(\mathbf{v}^{*}\mathbf{v})(\mathbf{u}^{*}\mathbf{u})}$$

şeklindedir.

İspat $\mathbf{u}$ *ve* $\mathbf{v}$, $\mathbb{C}^n$ *uzayında sütun vektörler olsunlar.* $\mathbf{v}$ *vektörüne kompleks-ortogonal olan vektörlerden oluşan hiper-düzlem*

$$\mathbf{v}^{\perp_{\mathbb{C}}} = \{\mathbf{w} : \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} = 0, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n\}$$

olarak yazılır. Bu durumda, $\mathbf{u}$ *vektörünün* $\mathbf{v}$ *üzerindeki projeksiyon vektörü* $r\mathbf{v}(r \in \mathbb{R})$ *olmak üzere;* $\mathbf{u} - r\mathbf{v}$*, bu hiper-düzlem üzerinde olur. Yani,*

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - r\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} = 0$$

sağlanır. Sırasıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\mathbf{v}^*(\mathbf{u}-r\mathbf{v}) + (\mathbf{u} - r\mathbf{v})^* \mathbf{v}\right) &= 0, \\ \mathbf{v}^*\mathbf{u} - r\mathbf{v}^*\mathbf{v} + \mathbf{u}^*\mathbf{v} - r\mathbf{v}^*\mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

olacağından

$$r = \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{v}}{2\mathbf{v}^*\mathbf{v}} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}}}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}}}$$

elde edilir.

$\mathbf{u} - 2r\mathbf{v}$ *vektörü,* $\mathbf{u}$ *vektörünün* $\mathbf{v}^{\perp_{\mathbb{C}}}$ *hiper-düzlemine göre yansımasını vereceğinden, bu yansımayı gerçekleştiren bir* $\mathcal{H}$ *householder dönüşümü aşağıdaki şekilde yazılabilir:*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - 2r\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} - 2\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}}}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}}}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} - \mathbf{v}\frac{\mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{v}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{u} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{v}\mathbf{u}^*\mathbf{v}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} \end{aligned}$$

Elde edilen ifadenin kesir kısmı $\mathbf{u}^*\mathbf{u}$ *ile çarpılıp bölünürse,*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^*\mathbf{u}\mathbf{u}^*\mathbf{u} + \mathbf{v}\mathbf{u}^*\mathbf{v}\mathbf{u}^*\mathbf{u}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}\mathbf{u}^*\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{u} - \frac{\mathbf{v}^*\mathbf{u}(\mathbf{v}\mathbf{u}^*) + \mathbf{u}^*\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{u}^*)}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{v})\mathbf{v}\mathbf{u}^*}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}\mathbf{u} \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm bulunur. Bu eşitlik,

$$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) = \left(I - \frac{(\mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{v})\mathbf{v}\mathbf{u}^*}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}\right)\mathbf{u}$$

şeklinde yazılırsa,

$$H_{\mathbb{C}} = I - \frac{(\mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{v})\mathbf{v}\mathbf{u}^*}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}$$

matrisi, bu dönüşüme karşılık gelen matristir. □

Bu arada

$$(H_{\mathbb{C}})^* = I - \frac{(\mathbf{u}^*\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}$$

eşitliğine bakıldığında $H_{\mathbb{C}}$ Householder matrisi ile aynı olmadığı gözlemlenir. Dolayısıyla $H_{\mathbb{C}}$ hermitiyen olmaz. Hermitiyenlik şartının sağlanabilmesi için de

$$\mathbf{v}\mathbf{u}^* = \mathbf{u}\mathbf{v}^*$$

olması gerekmektedir.

Benzer şekilde, $H_{\mathbb{C}}$ matrisinin kompleks-ortogonal olabilmesi için de

$$H_{\mathbb{C}}^* H_{\mathbb{C}} = I$$

eşitliğini sağlaması gereklidir. Buna göre, $\mathbf{v}\mathbf{u}^* = \mathbf{u}\mathbf{v}^*$ şartı altında;

$$\begin{aligned}
H_{\mathbb{C}}^* H_{\mathbb{C}} &= \left(I - \frac{(\mathbf{u}^*\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}\right)\left(I - \frac{(\mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{v})\mathbf{v}\mathbf{u}^*}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}\right) \\
&= \left(I - \frac{(\mathbf{u}^*\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}\right)^2 \\
&= I - \frac{4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\,\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_{\mathbb{C}}} + \frac{4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\,\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_{\mathbb{C}}\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_{\mathbb{C}}} \\
&= I - \frac{4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\,\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_{\mathbb{C}}} + \frac{2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}^*\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{u})\,\mathbf{u}\overbrace{\mathbf{v}^*\mathbf{u}}^{\in\mathbb{C}}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}\mathbf{u}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{v}\mathbf{u}^*\mathbf{u}} \\
&= I - \frac{4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\,\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_{\mathbb{C}}} + \frac{2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}^*\mathbf{v}\mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{v}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{u})\,\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}\mathbf{u}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{v}\mathbf{u}^*\mathbf{u}} \\
&= I - \frac{4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\,\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_{\mathbb{C}}} + \frac{2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}^*\mathbf{v})(\mathbf{v}^*\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\underbrace{\mathbf{v}\mathbf{u}^*}_{\mathbf{u}\mathbf{v}^*}\underbrace{\mathbf{u}\mathbf{v}^*}_{\mathbf{v}\mathbf{u}^*}\mathbf{v}\mathbf{u}^*\mathbf{u}} + \frac{2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\,\mathbf{v}^*\overbrace{\mathbf{u}\mathbf{v}^*}^{\mathbf{v}\mathbf{u}^*}\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}\mathbf{u}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{v}\mathbf{u}^*\mathbf{u}} \\
&= I - \frac{4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\,\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_{\mathbb{C}}} + \frac{2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}^*\mathbf{v})(\mathbf{v}^*\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{(\mathbf{v}^*\mathbf{u})\mathbf{v}^*\mathbf{v}(\mathbf{u}^*\mathbf{v})\mathbf{u}^*\mathbf{u}} + \frac{2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})\mathbf{v}^*\mathbf{v}\mathbf{u}^*\mathbf{u}} \\
&= I - \frac{4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\,\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_{\mathbb{C}}} + \frac{4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\,\mathbf{u}\mathbf{v}^*}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_{\mathbb{C}}\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_{\mathbb{C}}} \\
&= I
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Tüm bu sonuçlar, aşağıdaki teoremle özetlenebilir:

Teorem 2.57. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in\mathbb{C}^n$, *sıfır olmayan kolon vektörleri için,* $\mathbf{u}$ *vektörünün bir*

$$\mathbf{v}^{\perp_{\mathbb{C}}} = \{\mathbf{w} : \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} = 0, \mathbf{w} \in\mathbb{C}^n\}$$

hiper-düzlemine göre yansımasının olabilmesi için

$$\mathbf{v}\mathbf{u}^* = \mathbf{u}\mathbf{v}^*$$

şartının sağlanması gerekmektedir. Bu durumda, Householder-yansıma dönüşümü $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ *olmak üzere,*

$$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\mathbf{u}) = \left(I - \frac{(\mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{v})\mathbf{v}\mathbf{u}^*}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})} \right) \mathbf{u}$$

ve bu dönüşüme karşılık gelen $H_{\mathbb{C}}$ *Householder matrisi de*

$$H_{\mathbb{C}} = I - \frac{(\mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{v})\mathbf{v}\mathbf{u}^*}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}$$

şeklindedir.

Önteorem 2.58. $\mathbf{u}_{n\times 1}, \mathbf{v}_{n\times 1} \in\mathbb{C}^n$ *ve* $\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{C}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{C}}$ *olmak üzere,* $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ *ile* $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ *kompleks-ortogonaldir.*

İspat $\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{C}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{C}}$ *olduğundan* $\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \mathbf{v}^*\mathbf{v}$ *elde edilir; buradan* $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}}$ *incelenirse*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{u} + \mathbf{v})^* (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})^* (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \right] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}^*\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{u} - \mathbf{v}^*\mathbf{v} + \mathbf{u}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\mathbf{u} - \mathbf{v}^*\mathbf{v}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Teorem 2.59. *Sıfır olmayan, farklı iki kolon vektör,* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in\mathbb{C}^n$ *ve* $\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{C}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{C}}$ *olsun.* $\mathbf{u}$ *vektörünü* $\mathbf{v}$ *vektörüne yansıtacak bir Householder dönüşümü,* $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{z}$ *olmak üzere*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \left(I - \frac{(\mathbf{z}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{z})\mathbf{z}\mathbf{u}^*}{(\mathbf{z}^*\mathbf{z})\,(\mathbf{u}^*\mathbf{u})} \right) \mathbf{u}$$

olur. Dolayısıyla bu dönüşüme karşılık gelen matris de

$$H_{\mathbf{u}-\mathbf{v}} = I - \frac{(\mathbf{z}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{z})\mathbf{z}\mathbf{u}^*}{(\mathbf{z}^*\mathbf{z})\,(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}$$

şeklindedir.

İspat $\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{C}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{C}}$ olduğundan, $\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \mathbf{v}^*\mathbf{v}$ ve $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}(\mathbf{u}) &= \left(I - \frac{(\mathbf{u}^*\mathbf{u} - \mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}-\mathbf{v})\mathbf{u}^*}{(\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*)(\mathbf{u}-\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}\right)\mathbf{u} \\
&= \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u}^*\mathbf{u} - \mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{v}^*\mathbf{v} - \mathbf{u}^*\mathbf{v})\,(\mathbf{u}-\mathbf{v})\,\mathbf{u}^*\mathbf{u}}{(\mathbf{u}^*\mathbf{u} - \mathbf{v}^*\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{v})\,\mathbf{u}^*\mathbf{u}} \\
&= \mathbf{u} - \mathbf{u} + \mathbf{v} \\
&= \mathbf{v}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Bu şekilde oluşturulan kompleks Householder dönüşümü hermitiyenlik ve üniterlik açısından incelenirse,

$$H_{\mathbf{u}-\mathbf{v}} = I - \frac{(\mathbf{z}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{z})\mathbf{z}\mathbf{u}^*}{(\mathbf{z}^*\mathbf{z})\,(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}$$

matrisi için

$$H^*_{\mathbf{u}-\mathbf{v}} = H_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}$$

sağlanması gereklidir. Buradan

$$H^*_{\mathbf{u}-\mathbf{v}} = I - \frac{(\mathbf{z}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{z})\mathbf{u}\mathbf{z}^*}{(\mathbf{z}^*\mathbf{z})\,(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}$$

elde edilir ki hermitiyen bir matris elde edilebilmesi için

$$\mathbf{z}\mathbf{u}^* = \mathbf{u}\mathbf{z}^*$$

olması gereklidir. Bu eşitlikte

$$\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}-\mathbf{v})\mathbf{u}^* &= \mathbf{u}(\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*) \\
\mathbf{u}\mathbf{u}^* - \mathbf{v}\mathbf{u}^* &= \mathbf{u}\mathbf{u}^* - \mathbf{u}\mathbf{v}^* \\
\mathbf{v}\mathbf{u}^* &= \mathbf{u}\mathbf{v}^*
\end{aligned}$$

şartı yine oluşmaktadır. Bu şartı sağlayan $H_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}$ matrisinin aynı zaman da üniter olduğu görülür.

3. MATERYAL VE METOT

Bu tezde matematiksel yöntemler ve kanıtlar kullanılarak, daha önce reel vektörler ve kompleks vektörler için yapılan çalışmalardan yararlanılarak hiperbolik ve hibrit sayı vektörleri için Householder dönüşümü verilecektir.

Öncelikle, Householder dönüşümü tarihi süreci ve tanımıyla birlikte verilmiş ve geometrik uygulamaları gösterilmiştir. Householder matrislerinin yansıma matrisi olması, uzayda ve düzlemde simetri ve yansımanın kullanıldığı bir çok problemde kullanılabilmesine olanak vermiştir. Dönüşümler, matrisler yardımıyla incelendiği için, matris teorisinin bir çok teorem ve tanımı kullanılmıştır. İddiaların kanıtlanmasında ise, genellikle doğrudan ispat yöntemi kullanılmış, gerektiğinde tümevarım ve olmayana ergi yöntemlerinden yararlanılmıştır.

Bu tezin oluşmasındaki en önemli materyaller, bu konuda yapılmış daha önceki çalışmalar ile bu konuda yazılmış kitaplardır. Bunların en önemlileri kısaca Özdemir (2016, 2018); Özdemir ve Erdoğdu (2015); Şimşek ve Özdemir (2016); Aragón-González vd. (2009) ve Mackey vd. (2004)'e ait çalışmalardır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Perpleks Householder Dönüşümü

Tezin bu kısmında, hiperbolik sayı vektörleri için Householder dönüşümünün nasıl tanımlanacağı incelenmiştir. n-boyutlu hiperbolik sayı modülü $\mathbb{P}^n$ olmak üzere, $\mathbf{u} \in \mathbb{P}^n$ vektörünün bu modüldeki bir hiper-düzleme göre yansıma vektörü bulunmuştur. Bu yansıma dönüşümüne karşılık gelen matris elde edilmiş; yansıma özellikleri açısından irdelendikten sonra n-boyutlu hiperbolik sayı modülündeki Householder matrisi elde edilmiştir.

Ayrıca, eş norma sahip hiperbolik sayılarla kurulmuş vektörleri, bir hiper-düzlem boyunca birbirine yansıtan hiperbolik-Householder dönüşümü ve ona karşılık gelen matris tanımlanmıştır. Bunun için de bir takım kısıtlamalar ön koşul olarak belirmiş; bu sınırlılıkların olması gerektiği yönündeki ispatlamalar yapılmıştır.

Sonuç olarak, tezin bu kısmında

1. Hiperbolik sayı vektörleri üzerinde tanımlanan bir iç çarpım aracılığı ile hiperbolik vektörlerin bazı özelliklerinden bahsedilmiş;

2. Hiperbolik bir vektörün bir hiper-düzleme göre yansımasını veren hiperbolik-Householder dönüşümü elde edilmiş;

3. Eşit norma sahip iki hiperbolik vektörü birbirine yansıtan bir hiperbolik-Householder dönüşümünün varlığı araştırılmış ve böyle bir dönüşümün tanımlanabilmesi için gerek ve yeter koşullar sunularak ispatlamalar yapılmıştır.

Öncelikle, hiperbolik sayıların bazı özellikleri verilmiştir; daha sonra bu sayılar arasındaki iç çarpım ve vektörel çarpım tanımlanarak yansıma dönüşümünün özellikleri verilmiş ve bu uzayda tanımlı bir hiperbolik-Householder dönüşümü ile bu dönüşüme karşılık gelen matris elde edilmiştir.

4.1.1. Hiperbolik sayılar (perpleks sayılar ya da double sayılar)

Hiperbolik sayılar kümesi

$$\mathbb{P} = \{z = x + \mathbf{h}y : \mathbf{h}^2 = 1, x, y \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Hiperbolik sayılar kümesi, aşağıdaki toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halka belirtir:

$\mathbf{z}_1 = x_1 + \mathbf{h}y_1$ ve $\mathbf{z}_2 = x_2 + \mathbf{h}y_2$ birer hiperbolik sayı olmak üzere,

Eşitlik:	$\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$
Toplama:	$+ : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}, \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = (x_1 + x_2) + \mathbf{h}(y_1 + y_2)$
Çarpma:	$\cdot : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}, \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + \mathbf{h}(x_1y_2 + x_2y_1)$

Bunun yanı sıra, $\overline{\mathbf{z}} = x - \mathbf{h}y$ ifadesi, $\mathbf{z} = x + \mathbf{h}y$ hiperbolik sayısının eşleniği;

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

ifadesi de $\mathbf{z}$ hiperbolik sayısının normu olarak tanımlanmıştır (Sobczyk 1995; Fjelstad ve Gal Sorin 2001).

Tanım 4.60. $\mathbf{z} = a + \mathbf{h}b$ *hiperbolik sayısı için*

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= k\rho\left(\cosh\theta + \mathbf{h}\sinh\theta\right) \\ &= k\rho e^{\mathbf{h}\theta} \end{aligned}$$

ifadesinde

$$\mathbf{z} = k\left(a + \mathbf{h}b\right) \leftrightarrow k\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = k\rho\begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

eşitliği, $\mathbf{z}$ *için matris gösterimidir. Burada* $k \in \{1, -1, \mathbf{h}, -\mathbf{h}\}$, $\rho = \sqrt{a^2 - b^2}$ *ve*

$$\theta = \ln\frac{|a+b|}{\sqrt{|a^2 - b^2|}}$$

ile ifade edilir.

Böylece, Lorentziyen dönmeler, hiperbolik sayılarla açıklanabilir (Çakır 2017).

4.1.2. Hiperbolik sayıların modülü

Hiperbolik sayılar kümesi cisim olmadığından değişmeli bir halka belirtir. $\mathbb{P}^n$ uzayı da bir vektör uzayı belirtmez; modül olur. Dolayısıyla, hiperbolik sayılar modülü olarak isimlendirilir ve

$$\mathbb{P}^n = \left\{\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n) : u_i = x + \mathbf{h}y, \mathbf{h}^2 = 1, x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

ile gösterilir. Bu modülün elemanlarına vektör denilecektir.

Not : Bir halka üzerinde tanımlanmış modül, bir cisim üzerinde tanımlanmış vektör uzayının genelleştirilmişidir.

R bir halka ve 1_R, bu halkanın çarpımsal birim elemanı olmak üzere, soldan R-modülü olan G, bir abel G grubu ile $\cdot : R \times G \to G$, $(\lambda, \mathbf{x}) \to \lambda\mathbf{x}$ şeklinde tanımlanmış bir işlemden oluşur. $\forall \alpha, \beta \in R$ ve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$M_1 : \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

$M_2 : (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

$M_3 : (\alpha \cdot \beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta \cdot \mathbf{x})$

$M_4 : 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

4.1.3. $n-$boyutlu hiperbolik vektörler için iç çarpım

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ vektörleri için

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} = (\overline{u}_1 v_1 + \overline{u}_2 v_2 + \cdots + \overline{u}_n v_n)$$

ifadesine hiperbolik sayılarda hermitiyen iç çarpım adı verilir ve $\mathbf{u}^*$ ifadesi, $\mathbf{u}_{n\times 1}$ vektörünün eşlenik transpozunu göstermek üzere, matris formu olarak da

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} = \mathbf{u}^* \mathbf{v}$$

şeklinde yazılabilir (Çakır 2017). Bu arada, $\mathbf{u}$ hiperbolik sayısının normu da

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{h\mathbb{P}}|}$$

şekinde ifade edilebilir. Bunun sonucunda aşağıdaki sınıflandırma söz konusu olur :

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{h\mathbb{P}} > 0$ ise $\mathbf{u}$ spacelike bir vektördür

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{h\mathbb{P}} < 0$ ise $\mathbf{u}$ timelike;

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{h\mathbb{P}} = 0$ ise $\mathbf{u}$ null bir vektör olur.

Bu sınıflandırmanın gerekliliğinden ötürü, hiperbolik sayılara split karmaşık sayılar ismi de verilir (Borota vd. 2000).

4.1.4. n- boyutlu hiperbolik vektörler için vektörel çarpım

$\mathbb{P}^n$ modülünde verilen $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin hiperbolik ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır. $\mathbf{u}_1 \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{u}_2 \times_{h\mathbb{P}} \cdots \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{u}_{n-1}$ ifadesi ile elde edilen vektör, $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{n-1}$ vektörlerinden her birine ortogonal olacağından hiperbolik vektörler için vektörel çarpımın tanımlanması gereklidir.

Tanım 4.61. $\mathbf{u}_1 = (u_{11}, u_{12}, ..., u_{1n})$,... , $\mathbf{u}_{n-1} = (u_{(n-1)1}, u_{(n-1)2}, ..., u_{(n-1)n})$ *vektörleri için hiperbolik vektörel çarpım*

$$\mathbf{u}_1 \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{u}_2 \times_{h\mathbb{P}} \cdots \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{u}_{n-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ \overline{u}_{11} & \overline{u}_{12} & \cdots & \overline{u}_{1n} \\ \overline{u}_{21} & \overline{u}_{22} & \cdots & \overline{u}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{u}_{(n-1)1} & \overline{u}_{(n-1)2} & \cdots & \overline{u}_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

ile tanımlıdır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

1.) $\mathbf{u} \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{u}$

2.) $\mathbf{u} \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{u} = \mathbf{0}$

3.) $\lambda \in \mathbb{R}, (\lambda \mathbf{u}) \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times_{h\mathbb{P}} (\lambda \mathbf{v})$

4.) $\mathbf{u} \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ *(*$\lambda \in \mathbb{R}$*); bu da* $\mathbf{u}$ *ve* $\mathbf{v}$ *vektörlerinin aynı doğrultulu vektörler olduğu anlamını taşır (Çakır 2017).*

Bu durumda, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ hiperbolik vektörleri için hiperbolik vektörel çarpım,

$$\mathbf{u} \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \overline{u}_1 & \overline{u}_2 & \overline{u}_3 \\ \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \overline{v}_3 \end{vmatrix}$$

şeklindedir (Çakır 2017).

Örnek 4.62. $\mathbf{u} = (1 + 2\mathbf{h}, 2 + \mathbf{h}, 1 - \mathbf{h})$ *ve* $\mathbf{v} = (2 + \mathbf{h}, 2 - \mathbf{h}, 3 + \mathbf{h})$ *için*

$$\mathbf{u} \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 - 2\mathbf{h} & 2 - \mathbf{h} & 1 + \mathbf{h} \\ 2 - \mathbf{h} & 2 + \mathbf{h} & 3 - \mathbf{h} \end{vmatrix} = (2 - 4\mathbf{h}, 6\mathbf{h}, \mathbf{h} - 5).$$

$\mathbf{u} \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{v}$ *vektörünün* $\mathbf{u}$ *ve* $\mathbf{v}$ *vektörlerinin her ikisine de hiperbolik-ortogonal olduğu aşikardır.*

4.1.5. Hiperbolik sayı vektörlerinde Householder dönüşümü

$\mathbb{P}^n$ modülünde null olmayan $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasında hermitiyen iç çarpım ve karşılık gelen matris gösterimi yazılırsa,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} = (\overline{u}_1 v_1 + \overline{u}_2 v_2 + \cdots + \overline{u}_n v_n)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} = \mathbf{u}^* \mathbf{v}$$

olur. $\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{v}$ üzerindeki projeksiyon vektörü $r\mathbf{v}$ $(r \in \mathbb{P})$ şeklinde olsun. $r\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}$ için

$$r\mathbf{v} \times_{h\mathbb{P}} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

eşitliği sağlandığından aynı doğrultulu vektörler oldukları söylenebilir.

Böylece, $\mathbf{u}-r\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}$ hiperbolik-ortogonal olur. Yani,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}-r\mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} = 0$$
$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{h\mathbb{P}} - r \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} = 0$$

sağlanır. Buradan,

$$r = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{h\mathbb{P}}}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}}}$$

elde edilir.

Bu aşamada

$$\mathcal{H}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) := \mathbf{u} - 2r\mathbf{v}$$

dönüşümü tanımlanırsa, $\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{v}$ vektörüne ortogonal bir hiper-düzleme göre yansıma vektörü elde edilmiş olur. Bu eşitlikte, r değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - 2\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{h\mathbb{P}}}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}}}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} - 2\mathbf{v}\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{h\mathbb{P}}}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}}} \\ &= \mathbf{u} - 2\mathbf{v}\frac{\mathbf{v}^*\mathbf{u}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\mathbf{u} \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4.63. *Bu şekilde elde edilen*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\mathbf{u}$$

dönüşümüne hiperbolik-Householder dönüşümü denir; bu dönüşüm, null olmayan $\mathbf{v}$ *vektörüne ortogonal vektörlerin oluşturduğu hiper-düzleme göre yansıma verir. Bu dönüşümün matris formu olan*

$$H_{\mathbf{v}} = I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}$$

matrisine de hiperbolik-Householder matrisi adı verilir.

Tanım 4.64. $\mathbf{u}$,$\mathbf{v} \in \mathbb{P}^n$ *vektörleri için*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{P}} = \langle \mathcal{R}\mathbf{u}, \mathcal{R}\mathbf{v} \rangle_{\mathbb{P}}$$

eşitliğini sağlayan $\mathcal{R}$ *dönüşümüne hiperbolik-üniter dönüşüm denir; bu dönüşüme karşılık gelen matris de hiperbolik-üniter matris olarak isimlendirilir.*

Önteorem 4.65. *Bir* R *matrisinin hiperbolik-üniter olması için gerek ve yeter koşul*

$$R^* R = I$$

olmasıdır.

İspat $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{P}^n$ olmak üzere, R matrisi, $\mathcal{R}$ hiperbolik-üniter dönüşümüne karşılık gelen matris olmak üzere,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} = \langle \mathcal{R}\mathbf{u}, \mathcal{R}\mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}}$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda,

$$(R\mathbf{u})^* R\mathbf{v} = \mathbf{u}^*\mathbf{v}$$

$$\mathbf{u}^* R^* R\mathbf{v} = \mathbf{u}^*\mathbf{v}$$

$$R^* R = I$$

bulunur. □

Tanım 4.66. $\mathbf{u}$,$\mathbf{v} \in \mathbb{P}^n$ *olmak üzere,* $\langle \mathcal{S}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} = \langle \mathbf{u}, \mathcal{S}\mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}}$ *eşitliğini sağlayan* $\mathcal{S}$ *dönüşümüne hiperbolik-hermitiyen dönüşüm adı verilir ve* $\mathcal{S}$ *dönüşümü ile uyumlu matris de benzer şekilde hiperbolik-hermitiyen matris şeklinde isimlendirilir*

Önteorem 4.67. *S, bir $\mathcal{S}$ hiperbolik-hermitiyen dönüşümü ile uyumlu hiperbolik-hermitiyen matris olsun. Bu durumda $S^* = S$ eşitliği vardır.*

İspat $\mathcal{S}$ hiperbolik-hermitiyen dönüşümüne karşılık gelen matris S olsun. Bu durumda, $\mathbf{u}$,$\mathbf{v} \in \mathbb{P}^{\mathbf{n}}$ için

$$\langle \mathcal{S}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} = \langle \mathbf{u}, \mathcal{S}\mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}}$$

$$(S\mathbf{u})^*\mathbf{v} = \mathbf{u}^* S\mathbf{v}$$

$$\mathbf{u}^* S^* \mathbf{v} = \mathbf{u}^* S\mathbf{v}$$

$$S^* = S$$

sağlandığı görülür. □

Teorem 4.68. *Hiperbolik-Householder matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar:*

i) Hiperbolik-üniter bir matristir.

ii) Hiperbolik-hermitiyen bir matristir.

iii) $H = H^{-1}$

iv) $\det H = -1$

İspat $\mathbf{v}$ ile oluşturulmuş; $\mathbf{v}$ vektörüne ortogonal hiper-düzleme göre yansıma veren hiperbolik- Householder matrisi

$$H_{\mathbf{v}} = I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}$$

olsun. Bu durumda,

i) $H_{\mathbf{v}}$ hiperbolik-üniterdir. Çünkü

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{v}}^* H_{\mathbf{v}} &= \left(I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\right)^* \left(I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}\right) \\ &= I - \frac{4\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} + \frac{4\mathbf{v}\mathbf{v}^*\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}\mathbf{v}^*\mathbf{v}} \\ &= I - \frac{4\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} + \frac{4\mathbf{v}\mathbf{v}^*(\mathbf{v}^*\mathbf{v})}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}(\mathbf{v}^*\mathbf{v})} \\ &= I \end{aligned}$$

sağlanır.

ii) $H_{\mathbf{v}}^{*} = I - \dfrac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^{*}}{\mathbf{v}^{*}\mathbf{v}}$ yazılırsa, $H_{\mathbf{v}}^{*} = H_{\mathbf{v}}$ sağlandığı görülür. Bu durumda, $H_{\mathbf{v}}$ hiperbolik-hermitiyendir.

iii) i and ii 'den

$$H^{*}H = I$$
$$HH = I$$
$$H^{-1} = H$$

bulunur.

iv) $HH = I$ sağlandığından $(\det H)^2 = 1$ elde edilir. H matrisi yansıma matrisi olduğundan

$$\det H = -1$$

bulunur. □

Böylece, hiperbolik-Householder dönüşümünün normları koruyan bir dönüşüm olduğu; ayrıca, tersi aracılığı ile de vektörü tekrar kendisine yansıttığı söylenebilir ki bu da bir yansıma dönüşümü olduğunu doğrular.

Bu kısımda, normları eşit iki hiperbolik vektörü birbirine yansıtan bir Householder dönüşümünün tanımı yapılacaktır.

Şekil 2.4**'** de görüldüğü üzere, hiperbolik null olmayan bir $\mathbf{u}$ vektörünün, eşit normlu bir başka $\mathbf{v}$ vektörüne yansıtılması için, yansıma düzlemine ortogonal olan bir vektör tanımlanması gerekmektedir. Buna göre, $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ vektörünün, yansıma düzlemi olarak belirlenen $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ vektörüne ortogonal olup olmadığının incelenmesi gereklidir. Buradan

$$\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{h\mathbb{P}} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{h\mathbb{P}} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}}$$

yazılırsa $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ eş normlu olduklarından

$$\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{h\mathbb{P}} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{h\mathbb{P}}$$

elde edilir.

Önteorem 4.69. *Null olmayan* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{P}^n$ *vektörleri için* $\|\mathbf{u}\|_{h\mathbb{P}} = \|\mathbf{v}\|_{h\mathbb{P}}$ *olsun.*

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \textit{ ve } (\mathbf{u} - \mathbf{v})$$

vektörlerinin hiperbolik-ortogonal olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{u}^*\mathbf{v} = \mathbf{v}^*\mathbf{u}$$

olmasıdır.

İspat $(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ ve $(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ hiperbolik anlamda ortogonal olsunlar. Bu durumda,

$$\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle_{h\mathbb{P}} = 0$$

olmalıdır. Buradan,

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{h\mathbb{P}} + \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle_{h\mathbb{P}} - \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle_{h\mathbb{P}} = 0$$
$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{h\mathbb{P}} = \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle_{h\mathbb{P}}$$

elde edilir ki, bu da

$$\mathbf{u}^*\mathbf{v} = \mathbf{v}^*\mathbf{u}$$

olmasını gerektirir. Benzer şekilde tersi de gösterilebilir. □

Teorem 4.70. *Null olmayan, farklı* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{P}^n$ *için* $\|\mathbf{u}\|_{h\mathbb{P}} = \|\mathbf{v}\|_{h\mathbb{P}}$ *ve* $\mathbf{u}^*\mathbf{v} = \mathbf{v}^*\mathbf{u}$ *sağlansın.*

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$$

dönüşümü, $\mathbf{u}$ *vektörünü* $\mathbf{v}$ *vektörüne yansıtan hiperbolik-Householder dönüşümüdür.*

İspat

$$\mathcal{H}_{\mathbf{v}} = I - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^*}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}$$

eşitliğinde, $\mathbf{v}$ yerine $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ yazılırsa

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = I - \frac{2(\mathbf{u}-\mathbf{v})(\mathbf{u}-\mathbf{v})^*}{(\mathbf{u}-\mathbf{v})^*(\mathbf{u}-\mathbf{v})}$$

elde edilir. Buradan gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - \frac{2(\mathbf{u}-\mathbf{v})(\mathbf{u}-\mathbf{v})^*\mathbf{u}}{(\mathbf{u}-\mathbf{v})^*(\mathbf{u}-\mathbf{v})} \\
&= \mathbf{u} - \frac{2(\mathbf{u}\mathbf{u}^*\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{u} - \mathbf{v}\mathbf{u}^*\mathbf{u} + \mathbf{v}\mathbf{v}^*\mathbf{u})}{\mathbf{u}^*\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{v}^*\mathbf{v}} \\
&= \mathbf{u} - \frac{2((\mathbf{u}-\mathbf{v})\mathbf{u}^*\mathbf{u} - (\mathbf{u}-\mathbf{v})\mathbf{v}^*\mathbf{u})}{2(\mathbf{u}^*\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\mathbf{v})} \\
&= \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u}-\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u} - \mathbf{v}^*\mathbf{u})}{\mathbf{u}^*\mathbf{u} - \mathbf{v}^*\mathbf{u}} \\
&= \mathbf{v}
\end{aligned}$$

bulunur. $\square$

Örnek 4.71. $\mathbf{u} = (5+4\mathbf{h}, 2-\mathbf{h}, 5+\mathbf{h})$ *ve* $\mathbf{v}$ =$(2+\mathbf{h}, 3+4\mathbf{h}, -7-3\mathbf{h})$ *vektörleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

$\|\mathbf{u}\|_{h\mathbb{P}} = \|\mathbf{v}\|_{h\mathbb{P}} = 6$

$\mathbf{u}^*\mathbf{v} = \mathbf{v}^*\mathbf{u} = -16$

$\mathbf{u}-\mathbf{v} = (3+3\mathbf{h}, -1-5\mathbf{h}, 12+4\mathbf{h})$ *olduğundan, hiperbolik-Householder matrisi*

$$H_{\mathbf{u}-\mathbf{v}} = I - \frac{2(\mathbf{u}-\mathbf{v})(\mathbf{u}-\mathbf{v})^*}{(\mathbf{u}-\mathbf{v})^*(\mathbf{u}-\mathbf{v})}$$

olarak yazılırsa,

$$H_{\mathbf{u}-\mathbf{v}} = \frac{1}{52}\begin{bmatrix} 52 & -12-12\mathbf{h} & -24-24\mathbf{h} \\ -12+12\mathbf{h} & 76 & -8+56\mathbf{h} \\ -24+24\mathbf{h} & -8-56\mathbf{h} & -76 \end{bmatrix}$$

elde edilmiş olur. $H_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}$ *matrisi incelendiğinde*

$H^*_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}H_{\mathbf{u}-\mathbf{v}} = I$

$H^*_{\mathbf{u}-\mathbf{v}} = H$

$\det H = -1$

$H_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ *eşitliklerinin sağlandığı görülür.*

4.1.6. Farklı iç çarpım altında perplex-Householder dönüşümü

Tezin bu kısmında hiperbolik sayılarda tanımlanan Householder dönüşümü, farklı bir iç çarpım tanımlanarak incelenecektir. Elde edilen dönüşümün ve bu dönüşüme karşılık gelen matrisin hiperbolik-üniterlik ve hiperbolik-hermitiyenlik şartlarını sağlayabilmesi için herhangi bir kısıtlamanın söz konusu olup olmayacağı yönünden değerlendirme yapılacaktır.

Tanım 4.72. $n \times 1$ *boyutlu* $\mathbf{u}$ *ve* $\mathbf{v}$ $\in\mathbb{P}^n$ *olmak üzere,*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbb{P}} = \frac{\mathbf{u}^*\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{u}}{2}$$

ifadesi, hiperbolik sayı vektörleri için bir iç çarpım tanımlar.

Bu iç çarpıma göre bir hiperbolik-Householder dönüşümü ve bu dönüşüme karşılık gelen matris incelendiğinde, $\mathbb{C}^n$ uzayında elde edilen sonuçlar elde edilmiştir. Buna göre yeni iç çarpım altında elde edilen hiperbolik-Householder dönüşümü

$$\mathcal{H}_{\mathbb{P}}(\mathbf{u}) = \left(I - \frac{(\mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{v})\mathbf{v}\mathbf{u}^*}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}\right)\mathbf{u}$$

ve bu dönüşüme karşılık gelen matris de

$$\mathcal{H}_{\mathbb{P}} = \left(I - \frac{(\mathbf{v}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{v})\mathbf{v}\mathbf{u}^*}{(\mathbf{v}^*\mathbf{v})(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}\right)$$

şeklinde olmuştur. Bu matrisin bir yansıma matrisi belirtebilmesi için hiperbolik-üniterlik ve hiperbolik-hermitiyenlik açılarından bakıldığında ise yine benzer şekilde, $n-$boyutlu karmaşık sayı vektör uzayında olduğu gibi bir takım kısıtlamaların konulması gerekliliği belirmiştir. Buna göre, $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$ matrisinin hiperbolik-üniter olduğu görülmüş; fakat hiperbolik-hermitiyen olabilmesi için

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^* = \mathbf{v}\mathbf{u}^*$$

eşitliğini sağlaması gerekmiştir.

Yine benzer şekilde, eş norma sahip iki hiperbolik vektörü birbirine yansıtan hiperbolik-Householder dönüşümünün

$$\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{v}\mathbf{u}^* = \mathbf{u}\mathbf{v}^*$$

şartı altında

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \left(I - \frac{(\mathbf{z}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{z})\mathbf{z}\mathbf{u}^*}{(\mathbf{z}^*\mathbf{z})\,(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}\right)\mathbf{u}$$

olduğu ve bu dönüşüme karşılık gelen matrisin de

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u}-\mathbf{v}} = \left(I - \frac{(\mathbf{z}^*\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{z})\mathbf{z}\mathbf{u}^*}{(\mathbf{z}^*\mathbf{z})\,(\mathbf{u}^*\mathbf{u})}\right)$$

olduğu gözlemlenmiştir.

4.2. Hibrit Sayıların Vektör Gösterimi İçin Householder Dönüşümü

Kompleks, hiperbolik ve dual sayıların genelleştirilmesi olarak düşünülen hibrit sayılar kümesi, literatürde henüz yeni bir çalışma alanı olmakla birlikte tezin bu kısmında Householder dönüşümünün hibrit sayılarla tanımlanmasına yer verilmiştir.

Hibrit sayılara ilişkin tanım ve özellikler, Özdemir (2018)' de geniş bir şekilde yer almaktadır. Tezin bu kısmında, hibrit sayılara ait bazı özelliklere değinildikten sonra, Householder yansıma dönüşümü incelenecek; özellikleri ispatlanarak sunulacaktır.

Tanım 4.73. *Hibrit sayılar kümesi*

$$\mathbb{K} = \left\{ a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, \mathbf{i}^2 = -1, \boldsymbol{\varepsilon}^2 = 0, \mathbf{h}^2 = 1, \mathbf{ih} = -\mathbf{hi} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{i} \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Özdemir 2018).

Buna göre, $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \varepsilon$ ve $\mathbf{h}$ hibrit birimler olarak; herhangi iki hibrit sayı için toplama işlemi, sayıların karşılıklı gelen bileşke elemanların toplamı ve çarpma işlemi ise, birimlerin çarpımsal sıralarına dikkat edilmek üzere, bileşenlerin birer birer dağılma özelliği ile çarpılması şeklinde tanımlanmıştır ve aşağıdaki tablo oluşturulmuştur:

$\cdot$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\mathbf{h}$
$\mathbf{1}$	1	i	ε	h
$\mathbf{i}$	i	-1	$1-h$	$\varepsilon+i$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	ε	$h+1$	0	$-\varepsilon$
$\mathbf{h}$	h	$-\varepsilon-i$	ε	1

Tanım 4.74. *Bir* $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ *hibrit sayısının eşleniği* $\bar{\mathbf{Z}}$ *olmak üzere*

$$\bar{\mathbf{Z}} = a - b\mathbf{i} - c\boldsymbol{\varepsilon} - d\mathbf{h}$$

ile tanımlıdır (Özdemir 2018)

Tanım 4.75. $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ *hibrit sayısı için*

$$C(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{Z} = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2$$

reel sayısına $\mathbf{Z}$*'nin karakteri adı verilir.*

Bu durumda $\mathbf{Z}$ *hibrit sayısı,*

$$\begin{aligned} C(\mathbf{Z}) &< 0 \text{ ise spacelike,} \\ C(\mathbf{Z}) &> 0 \text{ ise timelike,} \\ C(\mathbf{Z}) &= 0 \text{ ise lightlike} \end{aligned}$$

olarak isimlendirilir.

Ayrıca, $\mathbf{Z}$ *hibrit sayısının normu da*

$$\|\mathbf{Z}\| = \sqrt{|C(\mathbf{Z})|}$$

olarak tanımlıdır (Özdemir 2018).

Buna göre $\mathbf{Z}$ hibrit sayısı için

$$C(\mathbf{Z}) = \langle \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_1 \rangle$$

olmaktadır.

Tanım 4.76. $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ *hibrit sayısı için*

$$\mathcal{V}_{\mathbf{Z}} = (a, (b - c), c, d)$$

ifadesine $\mathbf{Z}$*'nin vektörel gösterimi adı verilir (Özdemir 2018).*

Bu durumda, herhangi bir hibrit sayı, vektör olarak da temsil edilebilir.; hibrit sayıların vektör gösterimlerinden yararlanılarak, $(-, -, +, +)$ işareti ile uyumlu 4-boyutlu $\mathbb{E}_2^4$ öklit uzayı için yazılabilecek bir iç çarpım uzayı tanımlanabilir:

Tanım 4.77. $\mathbf{Z}_1 = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\boldsymbol{\varepsilon} + d_1\mathbf{h}$ *ve* $\mathbf{Z}_2 = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\boldsymbol{\varepsilon} + d_2\mathbf{h}$ *hibrit sayıları için vektörel yazılımları* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} = (a_1, (b_1 - c_1), c_1, d_1)$ *ve* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} = (a_2, (b_2 - c_2), c_2, d_2)$ *olmak üzere,*

$$\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle_{\mathbb{E}_2^4} = -a_1a_2 - (b_1 - c_1)(b_2 - c_2) + c_1c_2 + d_1d_2$$

ifadesi hibrit sayı vektörleri için simetrik bir iç çarpımdır.

Bu iç çarpım ile uyumlu matris gösterimi de $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ *ve* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ *sütun vektörleri ve*

$$I^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

bu iç çarpıma karşılık gelen matris olmak üzere

$$\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle_{\mathbb{E}_2^4} = \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$$

şeklinde yapılabilir (Özdemir 2018).

NOT : $\mathbf{Z}_1$ *ve* $\mathbf{Z}_2$ *hibrit sayılarının hibrit anlamda ortogonal olması için* $\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle_{\mathbb{E}^4_2} = 0$ *olmalıdır.*

Buradan yola çıkarak hibrit sayılarda Householder dönüşümünün nasıl olabileceği üzerine bir çalışma yapılırsa, null olmayan $\mathbf{Z}_1$ ve $\mathbf{Z}_2$ hibrit sayılarına karşılık gelen $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ ve $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ vektörleri göz önünde bulundurularak, $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ vektörünün $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ üzerindeki projeksiyon vektörü $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $r\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - r\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ vektörü,

$$\mathcal{V}^{\perp}_{\mathbf{Z_2}} = \left\{ \mathbf{W} : \langle \mathbf{W}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle_{\mathbb{E}^4_2} = 0 \right\}$$

hiper-düzlemine ortogonal olur. Böylece

$$\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - r\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle = 0$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$r = \frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle} = 0$$

elde edilir. $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ vektörünün $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ vektörüne ortogonal hiper-düzleme göre yansımasını veren dönüşüm $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ olmak üzere

$$\mathcal{H}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}) = \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2r\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$$

yazılarak r değeri yerine konulursa

$$\mathcal{H}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}) = \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle}$$

bulunur. Bu ifade, $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ ve $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ sütun vektörler olmak üzere, matris formu ile

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}) &= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \frac{\mathcal{V}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{Z_2}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}}{\mathcal{V}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{Z_2}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}} \\ &= \left(I - \frac{2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \mathcal{V}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{Z_2}} I^*}{\mathcal{V}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{Z_2}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}} \right) \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilirse, hibrit-Householder dönüşümüne karşılık gelen hibrit-Householder matrisi

$$H_{\mathbb{K}} = I - \frac{2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \mathcal{V}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{Z_2}} I^*}{\mathcal{V}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{Z_2}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}$$

olur.

Teorem 4.78. *$\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ dönüşümü, $\mathbb{E}_2^4$ uzayında uzunluğu koruyan bir yansıma dönüşümüdür*

İspat *$\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$, bir $\mathbf{Z}_1$ hibrit sayısını temsil eden, $\mathbb{E}_2^4$ uzayında tanımlı $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ sütun vektörünü $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}})$ vektörüne dönüştüren bir hibrit-Householder dönüşümü olsun.*

$$\|\mathbf{Z}_1\| = \sqrt{\left|-\left\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\right\rangle\right|}$$

şeklinde ifade edilsin. Bu durumda,

$$\|\mathcal{H}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}})\| = \sqrt{\left|\left\langle \mathcal{H}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}), \mathcal{H}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}})\right\rangle\right|}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}})\| &= \sqrt{\left|\left\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}\right\rangle\right|} \\
&= \sqrt{\left|\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle - 4\frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle + 4\left(\frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}\right)^2 \langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle\right|} \\
&= \sqrt{\left|\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle - 4\frac{(\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle)^2}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle} + 4\frac{(\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle)^2}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}\right|} \\
&= \sqrt{\left|\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle\right|}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ dönüşümünün, normu, dolayısıyla karakteri koruduğu görülür. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathbb{K}}\left(\mathcal{H}_{\mathbb{K}}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\right)\right) &= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle} - \frac{2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\left\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle} \\
&= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle} \\
&\quad - \frac{2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}\left(\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle - 2\frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle\right) \\
&= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \frac{4\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle} + \frac{4\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{(\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle)^2} \\
&= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}
\end{aligned}$$

olması, $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ dönüşümünün bir yansıma dönüşümü olduğunu gösterir. □

Tanım 4.79. *$\mathbb{E}_2^4$ uzayında verilen bir $\mathcal{S}$ dönüşümüne karşılık gelen matris S olmak üzere, $\forall \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{E}_2^4$ vektörleri için*

$$\langle S\mathbf{U}, \mathbf{V}\rangle_{\mathbb{E}_2^4} = \langle \mathbf{U}, S\mathbf{V}\rangle_{\mathbb{E}_2^4}$$

sağlayan matrise hibrit simetrik matris; bu matrise karşılık gelen dönüşüme de hibrit simetrik dönüşüm denir.

Önteorem 4.80. $\mathbb{E}_2^4$ *'de verilen bir simetrik $\mathcal{S}$ dönüşümüne karşılık gelen hibrit simetrik matris S için*

$$S^t I^* = I^* S$$

olur.

İspat $\mathbb{E}_2^4$*'de S simetrik matrisi için*

$$\langle S\mathbf{U}, \mathbf{V}\rangle_{\mathbb{E}_2^4} = \langle \mathbf{U}, S\mathbf{V}\rangle_{\mathbb{E}_2^4}$$

sağlandığından

$$\begin{aligned} (S\mathbf{U})^t I^* \mathbf{V} &= \mathbf{U}^t I^* S \mathbf{V} \\ \mathbf{U}^t S^t I^* \mathbf{V} &= \mathbf{U}^t I^* S \mathbf{V} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$S^t I^* = I^* S$$

elde edilir. □

Tanım 4.81. $\mathbb{E}_2^4$ *uzayında verilen bir $\mathcal{R}$ dönüşümüne karşılık gelen matris R olmak üzere, $\forall \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{E}_2^4$ vektörleri için*

$$\langle R\mathbf{U}, R\mathbf{V}\rangle_{\mathbb{E}_2^4} = \langle \mathbf{U}, \mathbf{V}\rangle_{\mathbb{E}_2^4}$$

sağlayan matrise hibrit ortogonal matris; bu matrisle temsil edilen dönüşüme de hibrit ortogonal dönüşüm adı verilir.

Önteorem 4.82. $\mathbb{E}_2^4$*' de verilen ortogonal bir $\mathcal{R}$ dönüşümüne karşılık gelen R matrisi için*

$$R^t I^* R = I^*$$

eşitliği sağlanır.

İspat $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{E}_2^4$ *olmak üzere, ortogonal $\mathcal{R}$ dönüşümüne karşılık gelen matris R olsun. Bu durumda*

$$\langle R\mathbf{U}, R\mathbf{V}\rangle_{\mathbb{E}_2^4} = \langle \mathbf{U}, \mathbf{V}\rangle_{\mathbb{E}_2^4}$$

eşitliği sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} (R\mathbf{U})^t I^* R\mathbf{V} &= \mathbf{U}^t I^* \mathbf{V} \\ \mathbf{U}^t R^t I^* R\mathbf{V} &= \mathbf{U}^t I^* \mathbf{V} \\ R^t I^* R &= I^* \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.83. *$\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ hibrit- Householder dönüşümüne karşılık gelen $H_{\mathbb{K}}$ matrisi, aşağıdaki özellikleri sağlar:*

1. *Hibrit-ortogonaldir.*
2. *Hibrit-simetriktir.*
3. $(H_{\mathbb{K}})^{-1} = H_{\mathbb{K}}$.
4. $\det(H_{\mathbb{K}}) = -1$.

İspat

1. $H_{\mathbb{K}} = I - \frac{2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^*}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}$ *matrisi için*

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{K}}^t I^* H_{\mathbb{K}} &= \left(I - \frac{2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^*}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}\right)^t I^* \left(I - \frac{2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^*}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}\right) \\ &= \left(I^* - \frac{2I^*\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^*}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}\right) \left(I - \frac{2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^*}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}\right) \\ &= I^* - \frac{2I^*\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^*}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}} - \frac{2I^*\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^*}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}} + \frac{4I^*\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^*}{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)^2} \\ &= I^* - 4\frac{I^*\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^*}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}} + 4\frac{I^*\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^*}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}} \\ &= I^* \end{aligned}$$

sağlandığından $H_{\mathbb{K}}$ ortogonaldir.

2. *Hibrit-Householder matrisi için*

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{K}}^{t} I^{*} &= \left(I - \frac{2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^{*}}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^{*}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}} \right)^{t} I^{*} \\ &= I^{*} - \frac{2I^{*}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^{*}}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^{*}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}} \\ &= I^{*}\left(I - \frac{2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^{*}}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^{*}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}} \right) \\ &= I^{*} H_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

eşitliği sağlandığından $H_{\mathbb{K}}$ hibrit-simetriktir.

3. *2.'den elde edilen*

$$H_{\mathbb{K}}^{t} I^{*} = I^{*} H_{\mathbb{K}}$$

eşitliği, 1.' den elde edilen

$$H_{\mathbb{K}}^{t} I^{*} H_{\mathbb{K}} = I^{*}$$

eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \underbrace{H_{\mathbb{K}}^{t} I^{*}}_{I^{*} H_{\mathbb{K}}} H_{\mathbb{K}} &= I^{*} \\ I^{*} H_{\mathbb{K}} H_{\mathbb{K}} &= I^{*} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her iki taraf I^{*} ile çarpılırsa

$$(H_{\mathbb{K}})^{2} = I$$

bulunur; böylece

$$H_{\mathbb{K}} = (H_{\mathbb{K}})^{-1}$$

olur.

4. *3.'den elde edilen eşitlik*

$$H_{\mathbb{K}} H_{\mathbb{K}} = I$$

olduğundan

$$(\det H_{\mathbb{K}})^{2} = 1$$

eide edilir. $H_{\mathbb{K}}$ yansıma matrisi olduğu için de

$$\det H_{\mathbb{K}} = -1$$

olur.

□

Teorem 4.84. $\mathbf{Z}_1$ *ve* $\mathbf{Z}_2$ *null olmayan, eşit norma sahip iki farklı hibrit sayı olsun.* $\mathbb{E}_2^4$ *uzayında bu sayılara karşılık gelen vektörler sırasıyla* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ *ve* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ *olmak üzere,* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ *vektörünü* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ *vektörüne yansıtan hibrit-Householder dönüşümü*

$$\mathcal{H}_{\mathbb{K}} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)} & \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \neq -\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} (\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \textit{ null değil}) \\ \mathcal{H}_{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}} & \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} = -\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \\ \mathcal{H}_{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}\left(\mathcal{H}_{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}+\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}\right) & \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \neq -\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} (\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \textit{ null}) \end{array} \right\}$$

şeklindedir.

İspat *Eşit normlu, farklı* $\mathbf{Z}_1$ *ve* $\mathbf{Z}_2$ *hibrit sayılarını vektör olarak temsil eden* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ *ve* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ *için*

$$\|\mathbf{Z}_1\| = \|\mathbf{Z}_2\| \Longrightarrow |\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \rangle| = |\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle|$$

olur.

a.) $\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \rangle = \langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle$ *olsun:*

i-) $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \neq -\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ *ve* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ *null olmasın. Bu durumda* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ *vektörünü* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ *vektörüne yansıtacak hibrit Householder dönüşümü* $\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}$ *için*

$$K = \mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}) = \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right) \frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} K &= \mathcal{H}_{(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}})}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}) \\ &= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right) \frac{[\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \rangle - \langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle]}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \rangle - \langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle - \langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \rangle + \langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle} \\ &= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right) \frac{[\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \rangle - \langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle]}{2\,[\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \rangle - \langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle]} \\ &= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} + \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \\ &= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \end{aligned}$$

elde edilir. □

İspat ii-) $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} = -\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\right)}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\right) &= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \rangle} \\ &= -\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} + 2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \\ &= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \end{aligned}$$

bulunur.

iii-) $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \neq -\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ ve $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ null olsun. Bu durumda $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ vektörünü yansıtan hibrit-Householder dönüşümü

$$\mathcal{H}_{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}\left(\mathcal{H}_{(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}+\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}})}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\right)\right) = \mathcal{H}_{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}+\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)\frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} + \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}+\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}+\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}\right)$$

olarak yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}\left(\mathcal{H}_{(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}+\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}})}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\right)\right) &= \mathcal{H}_{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}+\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)\frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle + \langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{2\left(\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle + \langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle\right)}\right) \\
&= \mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}\left(-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right) \\
&= -\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} - 2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\frac{\langle -\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle} \\
&= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}
\end{aligned}$$

eşitliğini sağlamış olur.

b) $\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle = -\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle$ durumunda ise vektörlerin; dolayısıyla bu vektörler tarafından temsil edilen hibrit sayıların farklı karakterde oldukları görülmektedir. Bu durumda $\mathcal{H}_{\mathbb{K}}$ karakteri koruyan bir dönüşüm olduğundan eş normlu fakat farklı karakterdeki hibrit sayıları birbirine yansıtan bir hibrit-Householder dönüşümü bulunamaz. □

Örnek 4.85. $\mathbf{Z}_1 = -2+3\mathbf{i}-4\varepsilon+\mathbf{h}$ *ve* $\mathbf{Z}_2 = 1+2\mathbf{i}-2\varepsilon-7\mathbf{h}$ *hibrit sayıları düşünüldüğünde normlarının eşit*

$$\|\mathbf{Z}_1\| = \|\mathbf{Z}_2\| = 6$$

ve karakterlerinin farklı

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\left(\mathbf{Z}_1\right) &= 36 \\
\mathcal{C}\left(\mathbf{Z}_2\right) &= -36
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu sayıların vektörel temsilleri ise

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} &= (-2, 7, -4, 1) \\
\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} &= (1, 4, -2, -7)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu durumda yazılabilecek bir yansıma dönüşümü $\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}$ *olmak üzere*

$$\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\right) = \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)\frac{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}$$

eşitliğinden

$$\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} = (-3, 3, -2, 8)$$

yazılırsa,

$$\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\right) = \left(-\frac{83}{25}, \frac{208}{25}, -\frac{122}{25}, \frac{113}{25}\right)$$

bulunur. $\mathbf{Z}_1$ *hibrit sayısının yansımasının* $\mathbf{Z}_2$ *olması beklenirken farklı bir vektör bulunmuştur.*

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(-\frac{83}{25}, \frac{208}{25}, -\frac{122}{25}, \frac{113}{25}\right)$$

denilirse $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = -36$ *ve* $\mathcal{C}(\boldsymbol{\alpha}) = 36$ *olur. Yani,* $\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}$ *dönüşümü ile* $\mathbf{Z}_1$ *hibrit sayısı, eş normlu ve aynı karakterli bir sayıya dönüşmüş olur.*

Teorem 4.86. $\mathbf{Z}_1$ *ve* $\mathbf{Z}_2$ *hibrit sayıları eş normlu, null olmayan, farklı karaktere sahip hibrit sayılar;* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ *ve* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$*, bu hibrit sayılara karşılık gelen vektörler olmak üzere*

$$\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\right) = \left[I + \frac{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)^t I^*}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}^{\mathbf{t}} I \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}\right] \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$$

hibrit-Householder dönüşümü, $\mathbf{Z}_1$ *hibrit sayısını, eş normlu ve aynı karakterli başka bir hibrit sayıya dönüştürür.*

İspat $\mathbb{E}_2^4$ *uzayında tanımlı* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ *ve* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$*,* $\mathbf{Z}_1$ *ve* $\mathbf{Z}_2$ *hibrit sayılarını temsil eden vektörler olsunlar.* $\mathbf{Z}_1$ *ve* $\mathbf{Z}_2$ *eş norma sahip, farklı karakterdeki hibrit sayılar olduğundan*

$$\left\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \right\rangle = -\left\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \right\rangle$$

sağlanır. Bu durumda $\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}$ *hibrit-Householder dönüşümü yazılırsa*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\right) &= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} + \frac{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)\left[\left\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \right\rangle - \left\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \right\rangle\right]}{\left\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \right\rangle} \\
&= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} + \frac{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}{\left\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \right\rangle}\left[\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\right] \\
&= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} + \left[\frac{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}{\left\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \right\rangle}\left[\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}^{\mathbf{t}} I^* - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^*\right]\right] \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \\
&= \left(I + \frac{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}{\left\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \right\rangle}\left[\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}^{\mathbf{t}} I^* - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^*\right]\right) \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\right) = \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$$

olduğu kabul edilirse,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} &= \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}+\frac{(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}})\left[\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle-\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle\right]}{\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle} \\ 0 &= (\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}})\left[I+\frac{(\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle-\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle)\,I}{\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}\right]\end{aligned}$$

elde edilir. $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ *ve* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$*, birbirinden farklı vektörler olduğundan*

$$I+\frac{(\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle-\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle)\,I}{\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}=0$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}I &= \frac{(\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle-\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle)}{\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle}I \\ \langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle\,I &= \langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle\,I-\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle\,I\end{aligned}$$

bulunur ki

$$\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle=0$$

olması bir çelişkidir. Bu durumda $\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}$ *dönüşümü,* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ *vektörünü,* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ *vektöründen farklı bir vektöre dönüştürmektedir. Bu aşamada*

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle &= -\langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle=\alpha \\ \langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\rangle &= \beta\end{aligned}$$

denilerek

$$\left\langle\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}),\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}})\right\rangle$$

incelenirse,

$$\begin{aligned}\left\langle\mathcal{H}_{(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}})}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}),\mathcal{H}_{(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}})}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}})\right\rangle &= \alpha+2\frac{(\alpha-\beta)^2}{\beta}+(\alpha-2\beta-\alpha)\frac{(\alpha-\beta)^2}{\beta^2} \\ &= \alpha+\frac{(\alpha-\beta)^2\,(2\beta+\alpha-2\beta-\alpha)}{\beta^2} \\ &= \alpha \\ &= \langle\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}},\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\rangle\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani, $\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}})$ *vektörü,* $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ *ile aynı karakterde olmaktadır. Dolayısıyla, farklı karakterdeki vektörleri birbirine dönüştüren bir hibrit-Householder dönüşümü bulunamamaktadır.* □

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada Householder dönüşümü, farklı vektör uzaylarında ve modüllerde ele alınmış, tanımlanan iç çarpım ile belli bir hiper-düzleme göre bir yansıma dönüşümü belirtip belirtmediği yönünde bazı ispatlamalar sunulmuştur.

Bir yansıma vektörü elde edebilmek için kullanışlı bir yöntem olan Householder dönüşümü, özellikle elektronik mühendisliği ve programlama alanlarında sık başvurulan bir yöntem olmakla birlikte, nümerik analizde ve lineer cebir alanlarında, simetrik bir matrisin köşegenleştirilmesinde de geniş bir kullanım alanına sahiptir.

Çalışmanın ilk bölümlerinde Householder dönüşümü, reel vektör uzaylarında öncelikle standart iç çarpım altında ele alınmış; bir yansıma dönüşümü belirttiği ispatlanmış; daha sonra iç çarpımın genelleştirilmesi halindeki durumu incelenmiştir.

Daha sonraki bölümlerde ise kompleks sayılarla oluşturulan n-boyutlu vektör uzayında referans alınan kaynağa göre bir çalışma yapılmış; fakat elde edilen dönüşümün hermitiyen olmadığı görülmüş; bunun için seçilen vektörlere bir kısıtlama getirilmesi gerekliliği üzerinde durulmuştur. Daha sonra, referans alınan kaynakta kullanılan hermitiyen iç çarpım yerine, standart kompleks iç çarpımla aynı çalışmalar yapılmış fakat yine aynı kısıtlamalarla karşılaşılmıştır. Bunun üzerine, kompleks sayılar için Householder dönüşümü, standart kompleks iç çarpım altında ele alınarak bulunan sonuçlar sunulmuştur.

Hiperbolik sayılar modülünde ise kompleks vektörlerde olduğu gibi,eş normlu vektörler birbirine yansıtılırken karşılaşılan hermitiyenlik sorunu burada da karşımıza çıkmış; bu da vektörlerin seçiminde bazı sınırlandırmalar olması gerektiği yönünde çalışmaya bir yön vermiştir.

Householder dönüşümü, tezin üçüncü kısmında ise hibrit sayılar üzerinde incelenmiştir. Hibrit sayılar (Özdemir 2018)**,** henüz literatürde yeni çalışılmakta olan bir konu olduğundan bir hibrit-Householder dönüşümü tanımı, daha önceki çalışmalarda rastlanılmamış; bu tezde ilk kez çalışılmıştır. Bu amaçla, hibrit sayıların vektör temsillerinden yararlanılmıştır (Özdemir 2018). Her bir hibrit $\mathbf{Z} = a + b\mathbf{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{h}$ sayısı, $\mathbb{E}_2^4$ uzayında $\mathcal{V}_{\mathbf{Z}} = (a, (b-c), c, d)$ şeklinde bir vektöre karşılık geldiğinden, bir hibrit-Householder dönüşümü tanımlanırken hibrit sayıların vektör temsilleri ile aralarındaki

$\langle \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}, \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \rangle = a_1a_2 + (b_1 - c_1)(b_2 - c_2) + c_1c_2 + d_1d_2$ iç çarpım ile bir hibrit-iç çarpım uzayı oluşturulmuştur. Böylece, null olmayan bir $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ vektörünün, null olmayan bir $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ vektörüne hibrit anlamda ortogonal hiper-düzleme göre yansımasını veren hibrit-Householder dönüşümü,

$$\mathcal{H}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}) = \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - 2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \frac{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}$$

olarak tanımlanmış; bu dönüşüme karşılık gelen hibrit-Householder matrisi ise

$$H_{\mathbb{K}} = I - \frac{2\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^*}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}^{\mathbf{t}} I^* \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}$$

şeklinde ispatlanarak bulunmuştur.

Bu dönüşümün; dolayısıyla dönüşümle uyumlu $H_{\mathbb{K}}$ matrisinin hibrit-ortogonal ve hibrit-simetrik olduğu ispatlanarak gösterilmiştir.

$H_{\mathbb{K}}$ matrisinin, normu ve karakteri koruyan bir matris olduğu, yani bir yansıma matrisi belirttiği ve $\det(H_{\mathbb{K}}) = -1$ şeklinde, yansıma dönüşümüne ait özelliklerin tümünü sağladığı, yine ispatlarla sunulmuştur.

Daha sonra, aynı norma sahip iki hibrit sayının birbirlerine yansımasını sağlayacak bir hibrit-Householder dönüşümü üzerinde çalışılmıştır. Bu durum, eşit norma sahip fakat karakterleri aynı olmayan hibrit sayılara karşılık gelen vektörler için ayrıca bir inceleme yapma gereğini zorunlu kılmıştır.

Buna göre, eş normlu ve aynı karaktere sahip $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ ve $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ vektörlerini birbirine yansıtan bir hibrit-Householder dönüşümü

$$\mathcal{H}_{\mathbb{K}} = \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{H}_{(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}})} & \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \neq -\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} & (\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \text{ null değil}) \\ \mathcal{H}_{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}} & \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} = -\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} & \\ \mathcal{H}_{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}\left(\mathcal{H}_{(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} + \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}})}\right) & \mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} \neq -\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} & (\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}} - \mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}} \text{ null}) \end{array} \right\}$$

olarak ispatlanmıştır.

Bu arada, hibrit-Householder dönüşümünün karakteri koruyan bir dönüşüm olması sebebiyle, normları eşit ama karakterleri farklı, null olmayan iki hibrit sayıdan birini diğerine yansıtabilen bir hibrit-Householder dönüşümünün olamayacağı belirtilmiştir.

Bunun yanısıra, sayısal bir örnekle, normları aynı fakat karakterleri farklı, null olmayan iki hibrit sayı seçilerek birbirlerine yansıtılıp yansıtılamayacağı üzerine çalışma yapılmış ve ilginç bir sonuçla karşılaşılmıştır. Örnekte verilen hibrit sayılar, birbirine değil; yansıması bulunmak istenen vektörle aynı norma ve aynı karaktere sahip başka bir vektöre yansıtılmıştır.

Bunun üzerine, normları eşit, karakterleri farklı null olmayan iki hibrit sayı kullanılarak elde edilen

$$\mathcal{H}_{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)}\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}\right)=\left[I+\frac{\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)\left(\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}-\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}\right)^{t}I^{*}}{\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}^{\mathbf{t}}I\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}}\right]\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$$

dönüşümünün tanımı yapılmış; bu dönüşümün sonucunda elde edilen vektörün $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_2}}$ olmadığı; $\mathcal{V}_{\mathbf{Z_1}}$ ile aynı karaktere sahip, eş normlu bir başka vektör olduğu ispatlanarak sunulmuştur.

6. KAYNAKLAR

Aragón-González, G., Aragón, J. L.and Rodríguez-Andrade, M. A. 2006. The decomposition of an orthogonal transformation as a product of reflections *J. Math. Phys.*, 47 Art. No. 013509.

Aragón-González, G., Aragón, J. L., Rodríguez-Andrade, M. A. and Verde-Star, L. 2009. Reflections, Rotations, and Pythagorean Numbers. *Adv. appl. Clifford alg.*, 19: 1-14.

Borota, N. A., Flores, E., and Osler, T. J.2000. Spacetime Numbers The Easy Way, *Mathematics and Computer Education*, 34: 159-168.

Cipra, B A.2000. The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms, *SIAM News*, 33 (4).

Çakır, H. 2017. Hiperbolik Sayilar ve Hiperbolik Sayi Matrislerinin Cebirsel ve Geometrik Uygulamalari. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Universitesi FBE, Antalya, 116.

Chung, K. L. and Yan, W. M. 1997. The Complex Householder Transform.

Fjelstad, P.and Gal Sorin, G. 2001. Two Dimensional Geometries, Topologies, Trigonometries and Pysics Generated By Complex-Type Numbers, *Advances In Applied Clifford Algebras*, 11: 81.

Fuller, C. 2011. A constructive proof of the Cartan-Dieudonné-Scherk theorem in the real or complex case. *Journal of Pure And Applied Algebra*, 215: 1116-1126.

Gallier, J. H. 2011. Geometric methods and applications, for computer science and engineering. *Texts in Applied Mathematics*, 38: 680.

Mackey, D. S., Mackey, N. and Tisseur, F. 2004. G-reflectors : Analogues of Householder transformations in scalar product spaces. *Linear Algebra and its Applications*, *385*: 187–213.

Özdemir, M. and Erdoğdu, M. 2015. On reflections and in Minkowski 3-space. *Journal of geometry symmetry in physics,* 39: 1-16.

Özdemir, M. 2016. An Alternative Approach To Elliptical Motion. *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 26: 279-304. (*published online* August 22, 2015).

Özdemir, M. 2018. Introduction to hybrid numbers. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 28:11

Rodríguez-Andrade, M. A., Aragón-González, G., Aragón, J. L., and Verde-Star, L. 2011. An algorithm for the Cartan-Dieudonné theorem on generalized scalar product spaces. *Linear Algebra and Its Applications,* 434 (5): 1238-1254.

Sobczyk, G.,1995. Hyperbolic Number Plane, also published in College Mathematics Journal, 26: 268-80.

Şimşek, H., Özdemir, M. 2016. Generating hyperbolical rotation matrix for a given hyperboloid. *Linear Algebra And It's Applications,* 496: 221-245.

Uhlig, F. 2001. Constructive ways for generating (generalized) real orthogonal matrices as products of (generalized) symmetries. *Linear Algebra Appl*., 332–334, 459–467.

Venkaiah, V. C., Krishna, V. V., and Paulraj, A.1993. Householder Transform In $\mathbb{C}^m$ *Digital Signal Process,* 3: 226-227.

Xia, X. G.and Suter, B. W. 1995. On The Householder Transform In $\mathbb{C}^m$, *Digital Signal Processing* 5: 116-117.

ÖZGEÇMİŞ

DUYGU SOYLU

duyguersoz@hotmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2016-2019	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans	Ortadoğu Teknik Üniversitesi
1993-1998	Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretmen	Özel Bilfen Antalya Anadolu Lisesi
2017 - Devam Ediyor	MEB öğretmen.

ESERLER

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Özdemir, M. and Soylu, D. 2018. Householder Transformation with Hyperbolic Numbers. 16^{th} International Geometry Symposium, ss. 228-229, July 4-7,

Celal Bayar University, Manisa-Turkey