T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BELİRTİSİZ TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜZGEÇ YAPILARI

Çağla SEKİN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

HAZİRAN 2018

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BELİRTİSİZ TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜZGEÇ YAPILARI

Çağla SEKİN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

HAZİRAN 2018

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BELİRTİSİZ TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜZGEÇ YAPILARI

Çağla SEKİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

Bu tez 22/06/2018 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

JÜRİ: Dr. Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU

Dr. Öğr. Üyesi Gültekin SOYLU

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

BELİRTİSİZ TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜZGEÇ YAPILARI

Çağla SEKİN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU

Haziran 2018, 62 sayfa

Bu tezde, belirtisiz topolojik uzaylarda süzgeçler çalışılmıştır. Bu kavramların belirtisiz toplojik uzaylarda anlaşılabilmesi için öncelikle klasik topolojik uzaylarda süzgeç kavramından ve özelliklerinden kısaca bahsedilmiştir. Ayrıca belirtisiz topolojik uzayın tanımı verilmiş ve özelliklerinden bahsedilerek çalışılan uzayın anlaşılması sağlanmak istenmiştir. Daha sonra belirtisiz topolojik uzaylarda süzgeç kavramları mümkün olduğunca gelişimi sırayla verilmiş ve bu kavramların iyice anlaşılması amaçlanmıştır.

Topoloji anabilim dalında çok fazla çalışılan belirtisiz topolojik uzaylarda süzgeçler kavramı geniş bir çalışma alanı yaratmıştır. Belirtisiz topolojik uzayların üzerinde birçok süzgeç kavramı tanımlanmıştır. R. Lowen, W. Gahler, M. H. Burton, M. Muraleetharan, Vicente ve Aranguren bu konu üzerinde çalışan bazı matematikçilerdir.

Bu tezde belirtisiz topolojik uzaylar üzerinde sırasıyla; önsüzgeç, genelleştirilmiş süzgeç, I-süzgeç ve supra belirtisiz süzgeç olmak üzere dört ana süzgeç kavramı ele alınmıştır. Çalışmanın amacı, belirtisiz topolojik uzaylarda çeşitlenen süzgeç kavramını sırayla vererek bu konuda çalışacak kişilere düzenli ve anlaşılır bir kaynak oluşturmaktır. Bu nedenle belirli makale, tez ve kitaplardan bu konuyla ilgili genel bilgiler toplanmış ve bu bilgiler sıralı bir şekilde verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Belirtisiz küme, Belirtisiz süzgeç, Önsüzgeç, Doygun önsüzgeç, Asal önsüzgeç, Aşkın önsüzgeç, Genelleştirilmiş süzgeç, Asal g-süzgeç, Aşkın g-süzgeç, I-Süzgeç, Supra belirtisiz süzgeç.

JÜRİ: Dr. Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU

Dr. Öğr. Üyesi Gültekin SOYLU

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

FILTER STRUCTURE ON FUZZY TOPOLOGICAL SPACES

Çağla SEKİN

MSc. Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mutlu GÜLOĞLU

June 2018, 62 pages

In the thesis, filters in fuzzy topological spaces is worked. In order for these concepts to be understood in fuzzy topological spaces, firstly the concept and features of the filter are briefly mentioned in classical topological spaces. Moreover, it is aimed to provide the understanding of the space studied by giving the definition of the indefinite topological space and talking about its properties. Then, in the indefinite topological spaces, the filter concepts are given in a pedagogical order and it is aimed to understand these concepts thoroughly.

The concept of filters in fuzzy the topological space where there is a lot of work in topology, has created a wide field of study. Many filter concepts have been defined on fuzzy topological spaces.

R. Lowen, W. Gahler, M. H. Burton, M. Muraleetharan, Vicente and Aranguren are some mathematicians working on this subject.

In this thesis, on the fuzzy topological spaces respectively the four main filter concepts are considered: prefilter, generalized filter, I-filter and supra fuzzy filter. The aim of the study is to provide a regular and understandable resource for the people who will work in this subject by giving the concept of filter which varies in fuzzy topological spaces in order. For this reason, general information about this topic is collected from specific articles, theses and books and this information is given in a sequential manner.

KEYWORDS: Fuzzy set, Fuzzy filter, Prefilter, Saturated prefilter, Prime prefilter, Ultra Prefilter, Generalised filter, Prime g-filter, Ultra g-filter, I-Filter, Supra fuzzy filter.

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Mutlu GÜLOĞLU

Asst. Prof. Dr. Gültekin SOYLU

Asst.Prof.Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerin içerikleri kabaca özetlenecek olursa:

İlk bölümde, konunun bütünlüğü ve anlaşılabilirliği için klasik topolojik uzaylarda süzgeç kavramı verilmiş ve bazı özelliklerinden söz edilmiştir. Bu sayede tezin sonraki bölümlerinde verilecek olan kavramlar için bir alt yapı oluşturulmuş, klasik mantıktan belirtisiz mantığa geçiş sağlanmaya çalışılmıştır.

İkinci bölümde, ilk olarak Zadeh'in 1965 yılında tanımlamış olduğu ve yeni bir araştırma ve uygulama alanı yarattığı "belirtisiz küme" kavramı verilmiştir. Daha sonra üzerinde çalışacağımız, Chang'ın tanımladığı "belirtisiz topolojik uzay" kavramından ve özelliklerinden söz edilmiştir. Bu bölümde, bir sonraki bölümde anlatılacak olan süzgeç yapılarının üzerinde bulunduğu uzayın özelliklerinin anlaşılması istenmiştir.

Son bölümde ise, belirtisiz topolojik uzaylar üzerinde sırasıyla; önsüzgeç, genelleştirilmiş süzgeç, I-süzgeç kavramları verilmiştir. Daha sonra bu kavramların birbirleri arasındaki bağlantıların anlaşılması için, önsüzgeçlerden genelleştirilmiş süzgeç elde edilmesi, genelleştirilmiş süzgeçlerden önsüzgeç elde edilmesi, supra belirtisiz süzgeç kavramları verilmiştir. Bir çok makale ve çalışmada belirtisiz topolojik uzaylar üzerinde farklı birçok süzgeç kavramı çalışılmıştır. Tezin bu bölümünde amaç, bu kavramların bazılarının sıralı bir şekilde verilip, daha sonra bu konuda çalışmak isteyen kişiler için düzenli ve anlaşılır bir kaynak oluşturulmasıdır.

Bu çalışma süresince, benden ilgi ve desteğini esirgemeyen, tecrübeleriyle bana her koşulda yol gösteren danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mutlu Güloğlu'na minnetimi ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her daim desteklerini hissettiğim çok kıymetli bütün hocalarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Son olarak, maddi-manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, her konuda arkamda olduklarını bildiğim anneme, babama, ablama ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT iii
ÖNSÖZ v
AKADEMİK BEYAN vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ viii
ŞEKİLLER DİZİNİ x
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK TARAMASI 3
  2.1. Klasik Topolojik Uzaylarda Süzgeçler 3
  2.2. Belirtisiz Topolojik Uzaylar 8
3. MATERYAL VE METOT 16
  3.1. Belirtisiz Topolojik Uzaylarda Süzgeçler 16
    3.1.1. Önsüzgeçler 16
    3.1.2. Genelleştirilmiş süzgeçler 29
    3.1.3. I-Süzgeçler 38
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 43
  4.1. Önsüzgeçlerden Genelleştirilmiş Süzgeç Elde Edilmesi 43
  4.2. Genelleştirilmiş Süzgeçlerden Önsüzgeç Elde Edilmesi 45
  4.3. Supra Belirtisiz Süzgeç 53
5. SONUÇLAR 59
6. KAYNAKLAR 60
ÖZGEÇMİŞ

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "BELİRTİSİZ TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜZGEÇ YAPILARI" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

22/06/2018

Çağla ŞEKİN

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

I	: $[0,1]$ kapalı aralığı
I_0	: $(0,1]$ aralığı
I_1	: $[0,1)$ aralığı
$\mathbb{F}$	: Süzgeç
$\bar{0}$	: Belirtisiz topolojik uzaylarda boş küme
$\bar{1}$	: X belirtisiz kümesi
$\mathcal{N}_p$	: p belirtisiz noktasının komşulukları ailesi
$FP(X)$	: X kümesi üzerindeki tüm belirtisiz noktalar
$FP[X]$	: $FP(X)$ in bütün alt kümeleri
$\mathcal{L}_p$	: p bellirtisiz noktasının Q-komsulukları ailesi
$pq\mu$	: p ile μ q-çakısıgımsıdır
$\mathcal{F}$	: Önsüzgeç
$c(\mathcal{F})$	: $\mathcal{F}$ Önsüzgecinin karakteristiği
$\mathcal{F}^\alpha$	: $\mathcal{F}$ Önsüzgecinin üst α-kesmesi kümesi
$\mathcal{F}_\alpha$	: $\mathcal{F}$ Önsüzgecinin alt α-kesmesi kümesi
$\widehat{\mathcal{F}}$	: $\mathcal{F}$ Önsüzgecinin doygunu
f	: Genelleştirilmiş süzgeç
$c(f)$	: f Genelleştirilmiş süzgecinin karakteristiği
f^α	: f Genelleştirilmiş süzgecinin (Üst) α-kesme süzgeci
f_α	: f Genelleştirilmiş süzgecinin (Alt) α-kesme süzgeci
$f_{\mathcal{F}}$	: $\mathcal{F}$ Önsüzgecinden elde edilen g-Süzgeç
$\mathcal{F}_f$	: f g-Süzgecinden elde edilen önsüzgeç
$\nu \wedge \mu$	: ν ve μ nün en küçüğü
$\nu \vee \mu$	: ν ve μ nün en büyüğü
$F(x)$	: X üzerinde tanımlı tüm süzgeçlerin kümesi
$G(x)$	: X üzerinde tanımlı tüm g-süzgeçlerin kümesi
S_{x_t}	: Supra belirtisiz yakınsaklık süzgeci
$\square$	: İspatın sonu

Kısaltmalar:

g-süzgeç	: Genelleştirilmiş süzgeç
SBTU	: Sezgisel Belirtisiz Topolojik Uzay

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Belirtisiz Topolojik Uzaylar ana başlığı altında birinci şekil 10

Şekil 2.2. Belirtisiz Topolojik Uzaylar ana başlığı altında ikinci şekil 10

1. GİRİŞ

Aristo'nun "her önerme ya doğrudur ya da yanlıştır." iki değerli mantığı yerine belirtisiz mantık bir önermenin doğruluk değerinin belirsiz olduğunu ve durumlara göre değişebileceğini söyler. Günlük yaşamda bazı durum ve düşünceler mutlak bir mantıkla verilemeyebilir. Örneğin, bir tartışmada iki tarafın da haklı ve haksız olduğu yanlar vardır. Bu gibi durumlarda bir tarafa kesin sen haklısın demek doğru bir davranış olmayacaktır. Klasik mantık bir kişiye haklı ya da haksız derken belirtisiz mantık iki kişinin de haklılıklarına bir değer verip karşılaştırma olanağı sunar.

Doğru ya da yanlış, klasik mantıkta kümeye ait olma ya da olmama gibi net kavramların aksine Zadeh 1965'te "Fuzzy Sets" adlı makalesiyle belirtisiz kümeleri tanımlamış ve bu sayede keskin sınırları olmayan olayları tanımlarken bu kümeler kullanılmaya başlanmıştır. Böylece kesin olmayan bilgilerin bir sayısal gösterimi elde edilmiştir. Daha sonra Zadeh'in bu tanımı büyük ilgi görmüş ve bir çok matematikçi bu kuramı kullanmış ve geliştirmiştir. Zadeh'in yaptığı bu belirtisiz küme tanımından sonra Chang 1968'de bir X kümesinin belirtisiz kümelerini açık küme kabul eden belirtisiz topolojik uzayları tanımlamıştır. Chang'ın yapmış olduğu bu tanım birçok tartışma ve bir çok farklı görüşe konu olmuştur. Lowen 1976'da Chang'ın yapmış olduğu tanıma bir koşul daha ekleyerek daha kullanışlı olan bir tanım elde etmiştir. Fakat Chang'ın ve Lowen'in yapmış olduğu tanımlarda açıklıklar derecelendirilmemiş, alt kümeler belirtisiz kümeler alınırken topoloji klasik küme olarak kalmıştır. Topolojinin belirtisizleştirilmesi ise Kubiak ve Sostak tarafından 1985 yılında farklı çalışmalarda yer bulmuş ve geliştirilmiştir.

İçeriği üç ana bölüme ayrılan bu tez çalışmasını genel hatlarıyla ele alırsak;

Birinci bölümde, klasik topolojik uzaylarda süzgeç kavramı verilmiş ve özelliklerinden kısaca bahsedilmiştir. Klasik uzayda verilen bu süzgeç tanımı ve özellikleri sonraki bölümlerde verilecek olan bazı teoremlerin kanıtında ve bazı geçişlerde kullanılmıştır. İlk olarak Henri Cartan tarafından 1937'de tanımlanan süzgeç kavramı daha sonra Bourbaki tarafından "Topologie Générale" adlı kitabında kullanılmış ve 1922 yılında E. H. Moore ve H. L. Smith tarafından geliştirilmiştir.

İkinci bölümde, Zadeh'in belirtisiz küme tanımı ve hemen ardından pekiştirilmesi adına bir örnek verilmiştir. Daha sonra belirtisiz kümelerin özellikleri ve Chang'ın tanımladığı belirtisiz topolojik uzay kavramı verilmiş, özelliklerinden bahsedilmiş ve bazı örnekler ve teoremlerle bu uzayın anlaşılması sağlanmak istenmiştir. Ayrıca Pao-Ming ve Ying-Ming'in belirtisiz nokta tanımı verilmiş ve belirtisiz noktanın komşuluk kavramından söz edilmiştir. Bu kavram tezin son bölümünde I-süzgeçler tanımı verilirken kullanılmıştır.

Tezin son bölümünde, belirtisiz topolojik uzaylarda iki ana süzgeç kavramı verilmiştir. Bunlar; öngüzgeçler ve g-süzgeçlerdir. Önsüzgeç ve g-süzgeç kavramları detaylı bir şekilde tanımlandıktan ve bazı özellikleri verildikten sonra tezin son bölümünde bu iki süzgeç kavramının birbiri tarafından nasıl elde edildiği gösterilmiştir. $S_{\mathcal{F}}(F) := \{\alpha \in (0, c] : F \in \mathcal{F}^{\alpha}\}$ kümesi tanımlanmış bu küme yardımıyla bir $\mathcal{F}$ önsüzgecinden bir f g-süzgeci elde edilmiştir ve $f_{\mathcal{F}}$ ile gösterilmiştir. Daha sonra önsüzgeçlerden üretilen g-süzgeçler ile önsüzgeçlerin karakteristiği arasında bir bağlantı bulunmuş ve bunun yardımı ile g-süzgeçlerden $\mathcal{F}_f = \{\upsilon \in I^X : \forall 0 < \alpha \leq c, \forall \beta < \alpha, \upsilon^{\beta} \in f^{c-\alpha}\}$ şeklinde bir önsüzgeç elde edilmiştir.

Önsüzgeçler I^X in bahsedilen koşulları sağlayan alt kümelerinin boştan farklı bir ailesi ve g-süzgeçler ise bahsedilen koşulları sağlayan $f : 2^X \to I$ sıfır olmayan fonksiyonlarıdır. Yani, önsüzgeçler belirtisiz kümelerle oluşturulan süzgeçlerken genelleştirilmiş süzgeçler ise klasik mantıktaki süzgeç kavramına bir açıklık derecelendirmesi yaparak onu belirtisizleştirir. Belirtisiz topolojik uzaylarda bu iki süzgeç tanımlandıktan ve özellikleri verildikten sonra daha genel olarak $I^X \to I$ dönüşümüyle tanımlanan I-süzgeç tanımı verilmiş ve özelliklerinden söz edilmiştir. Bu süzgeç yapısında ise belirtisiz kümelere de bir açıklık derecelendirmesi yapılarak bunlar üzerinde bir süzgeç yapısı oluşturulur. I-süzgeç tanımı da genişletilerek aynı dönüşüm üzerinde supra topolojik uzay ve ardından supra belirtisiz süzgeci tanımlanmıştır.

Belirtisiz topolojik uzaylarda yapılan sonraki çalışmalarda, belirtisiz kümeler tam sıralı L kafes yapısı üzerinde tanımlamıştır. Bu tezde ise $L = [0, 1]$ alınarak çalışılmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Klasik Topolojik Uzaylarda Süzgeçler

Tezin ilerleyen bölümlerinde verilecek kavramların daha iyi anlaşılabilmesi amacıyla bu bölümde klasik topolojik uzaylarda süzgeç kavramından bahsedilecektir. Böylelikle, belirtisiz topolojik uzaylarda verilecek diğer süzgeç kavramlarının klasik mantıkla ve birbiriyle karşılaştırılabilmesinin kolaylaşması amaçlanmıştır.

Klasik topolojik uzaylarda süzgeç kavramı ilk olarak 1937'de Henri Cartan tarafından verilmiştir. Daha sonra bir çok matematikçi tarafından çalışılarak geliştirilen bu kavram topolojinin temel yapılarından biridir.

Şimdi birçok kaynakta bulunabilecek süzgeç kavramı ve özelliklerinden kısaca bahsedilecektir.

Tanım 2.1 *Bir X kümesinin alt-kümelerinden oluşan bir $\mathbb{F}$ ailesi,*

S1) $\varnothing \notin \mathbb{F}$ *dir.*

S2) $A, B \in \mathbb{F}$ *ise* $A \cap B \in \mathbb{F}$ *dir.*

S3) $A \in \mathbb{F}$ *ve* $A \subset B$ *ise* $B \in \mathbb{F}$ *dir.*

koşullarını sağlıyorsa, bu aileye X üzerinde bir süzgeçtir denir.

Örnek 2.2 *(Willard 1970)*

a) X herhangi bir küme, $A \subset X$ olsun. O halde, $\{F \subset X : A \subset F\}$ X üzerinde bir süzgeçtir.

b) X bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. O halde, $\{U \subset X : A \subset U^o\}$ X üzerinde bir süzgeçtir.

Örnek 2.3 *(Karaçay 2009) (X, τ) bir topolojik uzay ise, her $x \in X$ noktası için $\mathcal{B}(x)$ komşuluklar ailesi X üzerinde bir süzgeçtir.*

S1) *$\mathcal{B}(x)$ ailesine ait her küme x noktasını içereceğinden $\varnothing \notin \mathcal{B}(x)$ dir.*

S2) *$\mathcal{B}(x)$ ailesine ait iki kümenin arakesiti yine $\mathcal{B}(x)$ ailesine aittir.*

S3) *$\mathcal{B}(x)$ ailesine ait herhangi bir kümeyi kapsayan her küme $\mathcal{B}(x)$ ailesine aittir.*

Tanım 2.4 *(Willard 1970) Aynı bir X kümesi üzerinde $\mathbb{F}_1$ ve $\mathbb{F}_2$ süzgeçleri verilmiş olsun. $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_1$ ise, $\mathbb{F}_2$ süzgeci $\mathbb{F}_1$ den daha kabadır; ya da $\mathbb{F}_1$ süzgeci $\mathbb{F}_2$ den daha incedir denir.*

Tanım 2.5 $\mathbb{B} \subset P(X)$ *ailesi,*

> ***ST1)*** $\mathbb{B} \neq \varnothing$ *ve* $\varnothing \notin \mathbb{B}$ *dir.*
>
> ***ST2)*** $A, B \in \mathbb{B}$ *ise* $C \subset A \cap B$ *olacak şekilde bir* $C \in \mathbb{B}$ *vardır.*

koşullarını sağlıyorsa, bu aileye X *kümesi üzerinde bir süzgeç tabanıdır denir.*

Örnek 2.6 $\mathfrak{b} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ *olsun. O halde* $\mathfrak{b}$, $\mathbb{R}$ *için bir süzgeç tabanıdır. Buna* $\mathbb{R}$ *üzerindeki Frechet Süzgeci denir.*

Örnek 2.7 *(Karaçay 2009)* (X, τ) *topolojik uzayında* $x \in X$ *noktasının* $\mathfrak{G}(x)$ *komşuluklar tabanı,* X *üzerinde bir süzgeç tabanıdır.*

ST1) $\mathfrak{G}(x) \neq \varnothing$ *ve her* $S \in \mathfrak{G}(x)$ *kümesi* x *noktasının bir komşuluğu olduğundan* $x \in S$ *dir. Dolayısıyla* $S \neq \varnothing$ *dir. Buradan da* $\varnothing \notin \mathfrak{G}(x)$ *olduğu görülür.*

ST2) $S_1, S_2 \in \mathfrak{G}(x)$ *olsun.* S_1 *ve* S_2 x *noktasının komşulukları olduğundan* $S_1 \cap S_2$ *arakesiti de* x *noktasının bir komşuluğudur. Dolayısıyla* $S_3 \subset S_1 \cap S_2$ *olacak şekilde bir* $S_3 \in \mathfrak{G}(x)$ *vardır.*

Tanım 2.8 X *üzerinde* $\mathbb{B}_1$ *ve* $\mathbb{B}_2$ *süzgeç tabanları verilmiş olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, bu ikisi birbirine denk iki süzgeç tabanıdır.*

a) Her $A_1 \in \mathbb{B}_1$ *kümesi bir* $A_2 \in \mathbb{B}_2$ *kümesini kapsar*

b) Her $A_2 \in \mathbb{B}_2$ *kümesi bir* $A_1 \in \mathbb{B}_1$ *kümesini kapsar.*

Önerme 2.9 *(Willard 1970)* X *üzerinde* $\mathbb{S}_1$ *ve* $\mathbb{S}_2$ *süzgeçleri verilsin ve sırasıyla* $\mathbb{B}_1$ *ve* $\mathbb{B}_2$ *bunların birer tabanı olsunlar.* $\mathbb{S}_1$ *süzgecinin* $\mathbb{S}_2$ *süzgecinden daha ince olması için gerekli ve yeterli koşul, her* $B_2 \in \mathbb{B}_2$ *kümesinin bir* $B_1 \in \mathbb{B}_1$ *kümesini kapsamasıdır.*

Önerme 2.10 X *ve* Y *kümeleri ile bir* $f : X \to Y$ *fonksiyonu verilsin.* $\mathbb{B}$ *ailesi* X *kümesi üzerinde bir süzgeç tabanı ise,*

$$f(\mathbb{B}) = \{f(A) : A \in \mathbb{B}\}$$

ailesi de Y *üzerinde bir süzgeç tabanıdır.*

İspat ST1) $\mathbb{B} \neq \varnothing \Leftrightarrow f(\mathbb{B}) \neq \varnothing$.

$A \neq \varnothing \Rightarrow f(A) \neq \varnothing$ ve $\varnothing \notin \mathbb{B}$ olduğundan $f(\mathbb{B}) \neq \varnothing$ olur.

Yani ilk aksiyom sağlanır.

ST2) $f(A), f(B) \in f(\mathbb{B})$ alalım. $\mathbb{B}$ bir süzgeç tabanı olduğundan $C \subset A \cap B$ olacak şekilde bir $C \in \mathbb{B}$ vardır. Bu durumda;

$$f(C) \subset f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

olur. Dolayısıyla istenen sağlanır. □

Tanım 2.11 *(Willard 1970) X kümesi üzerinde bir $\mathbb{F}$ süzgeci verilsin. Eğer X üzerinde $\mathbb{F}$ den daha ince bir süzgeç yoksa, $\mathbb{F}$ ye aşkın (ultra) bir süzgeçtir denir.*

Teorem 2.12 *(Willard 1970) X üzerinde $\mathbb{F}$ süzgeci aşkındır. $\Leftrightarrow \forall E \subset X$ için $E \in \mathbb{F}$ veya $X - E \in \mathbb{F}$ dir.*

İspat $(\Rightarrow)$: $\mathbb{F}$ X üzerinde bir süzgeç ve $E \subset X$ olsun. $\mathbb{F}$ süzgecinin her F elemanı ya E ile ya da $X - E$ ile kesişeceğinden, $\forall F \in \mathbb{F}$ için $F \cap E \neq \varnothing$ olsun. O halde,

$$\{F \cap E : F \in \mathbb{F}\}$$

E yi içeren $\mathbb{F}$ süzgecinden daha ince olan bir $\mathbb{G}$ süzgeci için bir süzgeç tabanıdır. $\mathbb{G}$ kesinlikle $\mathbb{F}$ süzgecinden daha ince olamayacağından, $\mathbb{G} = \mathbb{F}$ olmalıdır. Dolayısıyla, $E \in \mathbb{F}$ dir.

$(\Leftarrow)$: Her $E \subset X$ için $E \in \mathbb{F}$ veya $X - E \in \mathbb{F}$ olsun. $\mathbb{G}$ süzgeci $\mathbb{F}$ süzgecinden daha ince ise $A \notin \mathbb{F}$ olacak şekilde bir $A \in \mathbb{G}$ vardır. Fakat kabulümüze göre, $X - A \in \mathbb{F}$ olacağından, $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ dir. Buradan, $X - A \in \mathbb{G}$ ve $A \in \mathbb{G}$ olamayacağından, $\mathbb{F}$ den daha ince bir süzgeç yoktur. $\mathbb{F}$ aşkın süzgeçtir. □

Önerme 2.13 *(Willard 1970) X üzerindeki her $\mathbb{F}$ süzgecine karşılık $\mathbb{F}$ den daha ince olan bir aşkın süzgeç vardır.*

Önerme 2.14 *$\mathbb{F}$ ailesi X üzerinde bir aşkın süzgeç ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. O halde $f(\mathbb{F})$ de Y üzerinde bir aşkın süzgeçtir.*

İspat

$$\begin{aligned} A \notin \mathbb{F} &\Rightarrow f^{-1}(A) \notin \mathbb{F} \\ &\Rightarrow (f^{-1}(A))' \in \mathbb{F} \\ &\Rightarrow A \in f(\mathbb{F}) \end{aligned}$$

olur. □

Tanım 2.15 *X kümesi üzerinde bir $\mathbb{F}$ süzgeci verilsin. Her $A, B \in X$ için $A \cup B \in \mathbb{F}$ iken $A \in \mathbb{F}$ veya $B \in \mathbb{F}$ oluyorsa $\mathbb{F}$ süzgecine, asal süzgeçtir denir.*

Teorem 2.16 *$\mathbb{F}$ asal süzgeçtir $\Leftrightarrow$ $\mathbb{F}$ aşkın süzgeçtir.*

İspat $(\Rightarrow)$: $\mathbb{F}$ bir asal süzgeç olsun. $\mathbb{F}$ in aşkın süzgeç olmadığını varsayalım. O halde Teorem 2.12'dan; $E \notin \mathbb{F}$ ve $X - E \notin \mathbb{F}$ olacak şekilde bir $E \subset X$ vardır.

$E \cup (X - E) = X \in \mathbb{F}$ olduğundan bu $\mathbb{F}$ in asal olmasıyla çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır. $\mathbb{F}$ aşkın bir süzgeçtir.

$(\Leftarrow)$: $\mathbb{F}$ bir aşkın süzgeç olsun. $\mathbb{F}$ in asal süzgeç olmadığını varsayalım. O halde $A \cup B \in \mathbb{F}$ iken $A \notin \mathbb{F}$ ve $B \notin \mathbb{F}$ olsun.

$$\mathbb{S} = \{C : \varnothing \neq C \subset X, \ A \cup C \in \mathbb{F}\}$$

ailesini tanımlayalım. Bu aile X kümesi üzerinde bir süzgeçtir. Ayrıca $\mathbb{F} \subset \mathbb{S}$ ve $B \in \mathbb{S}$ dir. Fakat $\mathbb{F}$ aşkın süzgeç olduğundan $\mathbb{F} = \mathbb{S}$ olmalıdır. Dolayısıyla $B \in \mathbb{F}$ dir. Bu kabulümüzle çelişir, yani $\mathbb{F}$ asal süzgeçtir. $\square$

Tanım 2.17 *(Karaçay 2009) (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathbb{F}$ ailesi, X kümesi üzerinde bir süzgeç olsun. Eğer $\mathbb{F}$ süzgeci, bir $x \in X$ noktasının $\mathcal{B}(x)$ komşuluklar süzgecinden daha ince ise, $\mathbb{F}$ süzgeci x noktasına yakınsıyor denir.*

Bu durumda x noktasına $\mathbb{F}$ süzgecinin bir limitidir, ya da limit noktasıdır denir ve $\lim \mathbb{F} = x$ ya da $\mathbb{F} \to x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.18 *(Karaçay 2009)Bir $\mathbb{B}$ süzgeç tabanının doğurduğu (ürettiği) $\mathbb{F}$ süzgeci bir x noktasına yakınsıyorsa, $\mathbb{B}$ süzgeç tabanı x noktasına yakınsıyor denir ve $\lim \mathbb{B} = x$ veya $\mathbb{B} \to x$ şeklinde gösterilir.*

Önerme 2.19 *(Karaçay 2009) Bir $\mathbb{B}$ süzgeç tabanının bir x noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathfrak{G}(x)$ yerel tabanına ait her kümenin $\mathbb{B}$ ye ait bir kümeyi kapsıyor olmasıdır.*

İspat $\mathbb{B}$ nin doğurduğu süzgeç $\mathbb{F}$ olsun. $\mathbb{F}$ süzgecinin $\mathcal{B}(x)$ komşuluklar süzgecinden daha ince olması için önermemizdeki koşulun gerekli ve yeterli olduğunu Önerme 2.9'den biliyoruz. $\square$

Tanım 2.17 gereğince, $\mathbb{F}$ süzgeci bir x noktasına yakınsıyorsa, $\mathbb{F}$ den daha ince olan her süzgeç de x noktasına yakınsayacaktır. Benzer düşünüşle, eğer daha kaba bir topoloji alırsak, komşuluklar süzgeci daha kaba olacağından $\mathbb{F}$ süzgecinin yakınsaklığı bozulmaz. Başka bir deyişle, topolojik yapı inceldikçe yakınsak süzgeçler azalır; topolojik yapı kabalaştıkça yakınsak süzgeçler çoğalır.

Bir süzgeç ya da bir süzgeç tabanı birden çok noktaya yakınsayabilir.

Tanım 2.20 *(Karaçay 2009) (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathbb{B}$ ailesi X üzerinde bir süzgeç tabanı olsun. $\mathbb{B}$ ye ait her kümenin kaplamı tarafından içerilen bir x noktasına $\mathbb{B}$ süzgeç tabanının bir yığılma (kaplama) noktasıdır denilir.*

Eğer x noktası bir $\mathbb{B}$ süzgeç tabanının bir yığılma noktası ise, süzgeçlerin denklik tanımı uyarınca, bu nokta $\mathbb{B}$ ye denk olan her süzgeç tabanının da bir yığılma noktası olacaktır.

Önerme 2.21 *(Karaçay 2009) Bir x noktasının bir $\mathbb{B}$ süzgeç tabanının bir yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, x noktasının komşuluklar tabanına ait her kümenin $\mathbb{B}$ ye ait her kümeyle kesişmesidir.*

İspat Tanım 2.20'den hemen görülür. □

Not 1 *(Karaçay 2009) Her süzgeç özel olarak bir süzgeç tabanı olduğundan, yukarıdaki tanımda süzgeç tabanı yerine süzgeç konularak bir süzgecin yığılma noktası tanımlanabilir.*

Önerme 2.22 *(Karaçay 2009) Bir x noktasının bir $\mathbb{F}$ süzgecinin yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul, x noktasına yakınsayan ve $\mathbb{F}$ den daha ince olan bir $\mathbb{S}$ süzgecinin varlığıdır.*

İspat *(* $\Rightarrow$) : x noktası $\mathbb{F}$ süzgecinin bir yığılma noktası olsun. $\mathcal{B}(x)$ komşuluklar süzgecinin her öğesi ile $\mathbb{F}$ süzgecinin her öğesi kesiştiğinden bu iki süzgecin en küçük üst sınırı vardır; buna $\mathbb{S}$ diyelim. $\mathcal{B}(x) \subset \mathbb{S}$ olduğundan $\mathbb{S}$ süzgeci x noktasına yakınsar.

($\Leftarrow$) : Tersine olarak $\mathbb{F}$ süzgecinden daha ince olan ve x noktasına yakınsayan bir $\mathbb{S}$ süzgeci varsa $\mathbb{F} \subset \mathbb{S}$ ve $\mathcal{B}(x) \subset \mathbb{S}$ olur. Önerme 2.21 gereğince, $\mathbb{F}$ ye ait her küme $\mathcal{B}(x)$

in her kümesiyle kesişmek zorundadır. Bu durum, x noktasının $\mathbb{F}$ için bir yığılma noktası olmasını gerektirir. $\square$

Önerme 2.23 *(X,τ) ve (Y,υ) iki topolojik uzay, $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun bir $x\in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, X üzerindeki her $\mathbb{F}$ süzgeci için $\mathbb{F}\to x$ olduğunda Y üzerinde $f(\mathbb{F})\to f(x)$ olmasıdır.*

2.2. Belirtisiz Topolojik Uzaylar

Bu bölümde, üzerinde süzgeç yapısı kurulacak olan belirtisiz topolojik uzayın tanımından ve özelliklerinden söz edilecektir. Bu özelliklerin bilinmesi ve anlaşılması, süzgeç yapılarının anlaşılmasını kolaylaştıracaktır.

Klasik mantıkta boş olmayan bir kümenin, eleman olması 1, eleman olmaması 0 ile gösterilirken; belirtisiz mantıkta kümenin eleman olması $[0,1]$ aralığında bir değerdir. Yani belirtisiz kümeler, klasik anlamda kümelerden daha genel ve kapsayıcı bir kavramdır.

1883 yılında Alman matematikçi Cantor tarafından aksiyomatik bir yapıda verilen "Cantor Küme" kuramı, özellikle günlük yaşamda sık sık karşılaşılan bir kümenin ögesi olma ya da olmamanın kesin olarak belirlenemediği durumları açıklamakta yetersiz kalmaktadır.

Lotfi Aliasker Zadeh 1965 yılında belirtisiz kümeleri tanımlamış ve klasik kümelerin özellikleriyle karşılaştırmıştır. Zadeh'in yapmış olduğu bu tanım matematik dünyasında yeni bir çığır açmıştır. Bu tanım ile kümeye ait olma-olmama kavramları yerine bu aitliğe bir derecelendirme verilmiştir.

Tanım 2.24 *(Zadeh 1965) X bir küme olmak üzere, X üzerinde bir A belirtisiz kümesi; $\mu_A : X\to[0,1]$ fonksiyonu ile tanımlanır ve*

$$A=\{(x,\mu_A(x)) : x\in X\}$$

şeklinde gösterilir.

$\mu_A(x)$ e x in A kümesine ait olma derecesi ya da üyelik derecesi denir.

Birçok kaynak, belirtisiz kümeyi μ_A üyelik fonksiyonuyla ya da yalnızca μ ile gösterir.

Örnek 2.25 *Aynı uzunluğa sahip altı kişiden oluşan bir örnek uzay $X = \{$Özlem, Yağmur, Birgül, Hazal, Sevgi, Elif$\}$ şeklinde verilsin ve bu kişilerin kiloları ise,*

$$\begin{aligned}
&\textit{Hazal} &&: 45\ kg\\
&\textit{Birgül} &&: 52\ kg\\
&\textit{Sevgi} &&: 64\ kg\\
&\textit{Yağmur} &&: 50\ kg\\
&\textit{Özlem} &&: 56\ kg\\
&\textit{Elif} &&: 48\ kg
\end{aligned}$$

şeklinde olsun.

"Şişman olma" önermesi ele alındığında bu kişiler bir belirtisiz küme oluşturacaktır. Keyfi yapılan bir değerlendirme ile bu kişilerin bu kümeye ait olma dereceleri,

$$\mu_A = \{(\textit{Hazal}, 0.1), (\textit{Elif}, 0.3), (\textit{Yağmur}, 0.4), (\textit{Birgül}, 0.6), (\textit{Özlem}, 0.8), (\textit{Sevgi}, 0.9)\}$$

şeklinde verilebilir.

Benzer şekilde "şişman olma" önermesi;

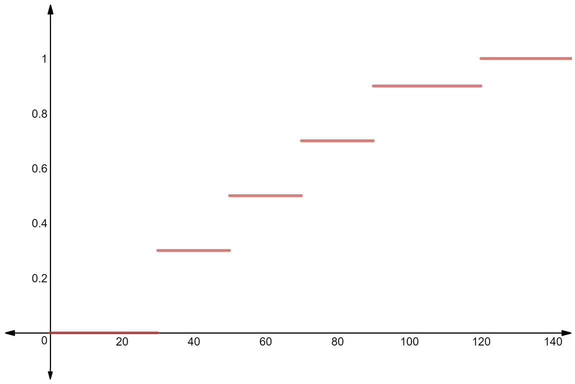
$$\mu_1(x) = \begin{cases} e^{-(\frac{x-120}{35})^2} & , 0 \leq x < 120 \textit{ ise} \\ 1 & , x \geq 120 \textit{ ise} \end{cases}$$

sürekli fonksiyonu veya,

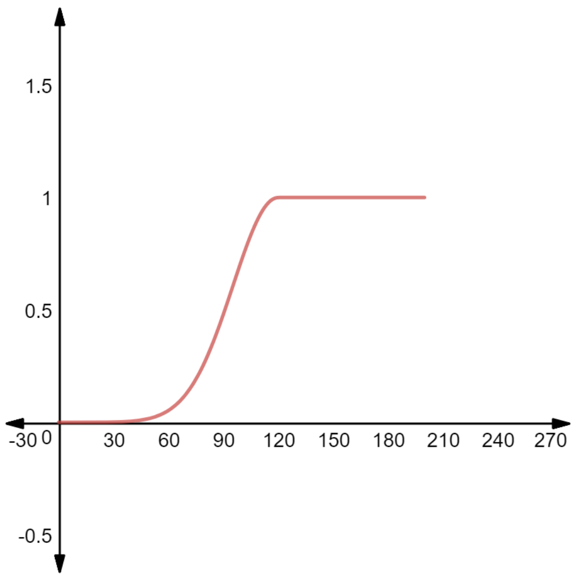
$$\mu_2(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 30 \textit{ ise} \\ 0.3 & , 30 \leq x < 50 \textit{ ise} \\ 0.5 & , 50 \leq x < 70 \textit{ ise} \\ 0.7 & , 70 \leq x < 90 \textit{ ise} \\ 0.9 & , 90 \leq x < 120 \textit{ ise} \\ 1 & , x \geq 120 \textit{ ise} \end{cases}$$

şeklinde parçalı sürekli bir fonksiyonla da verilebilir.

Bu şekilde verilen fonksiyonlar da birer belirtisiz küme oluşturur.



Şekil 2.1: μ_2 fonksiyonunun grafiği



Şekil 2.2: μ_1 fonksiyonunun grafiği

Zadeh'in yapmış olduğu belirtisiz küme kavramından sonra birçok matematikçi bu konuda çalışmış ve geliştirmiştir.

Tanım 2.26 *(Chang 1968) A ve B, X içinde iki belirtisiz küme, $\mu_A(x), \mu_B(x)$ sırasıyla x noktasında A ve B belirtisiz kümelerinin üyelik dereceleri olsun. O halde;*

$$\begin{aligned} \mu_A(x) = \mu_B(x) &\Leftrightarrow A = B && , \forall x \in X \textit{ için} \\ \mu_A(x) \leq \mu_B(x) &\Leftrightarrow A \subset B && , \forall x \in X \textit{ için} \\ C = A \cup B &\Leftrightarrow \mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} && , \forall x \in X \textit{ için} \\ D = A \cap B &\Leftrightarrow \mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} && , \forall x \in X \textit{ için} \\ E = A' &\Leftrightarrow \mu_E(x) = 1 - \mu_A(x) && , \forall x \in X \textit{ için} \end{aligned}$$

özellikleri sağlanır.

Tanım 2.27 *(Chang 1968) Daha genel olarak, $A = \{A_i : i \in I\}$ belirtisiz kümelerinin birleşimi $C = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ kesişimi, $D = \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ olmak üzere,*

$$\mu_C(x) = \sup_{i \in I}\{\mu_{A_i}(x) : x \in X\}$$
$$\mu_D(x) = \inf_{i \in I}\{\mu_{A_i}(x) : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\forall x \in X$ için $\mu_\varnothing(x) = \bar{0}$ ve $\forall x \in X$ için $\mu_X(x) = \bar{1}$ şeklindedir. Yani, $\bar{0}$ sembolü boş kümeyi ve $\bar{1}$ sembolü de X kümesini belirtisiz küme olarak göstermekte kullanılacaktır.

Chang, 1968'de belirtisiz kümeleri kullanarak belirtisiz topolojik uzayları tanımlamıştır. 1976 yılında ise Lowen, Chang'ın yapmış olduğu bu tanıma bir koşul daha ekleyerek daha kullanışlı bir tanım elde etmiştir. Karşılaştırılabilmesi açısından yapılan bu iki belirtisiz topoloji tanımı da aşağıda verilmiştir:

Tanım 2.28 *(Chang 1968) X boştan farklı bir küme olsun. X kümesi üzerinde bir belirtisiz topoloji;*

BT1) $\bar{0}, \bar{1} \in \tau$

BT2) $\forall A, B \in \tau$ *için* $A \cap B \in \tau$

BT3) $\forall i \in I$ *için* $A_i \in \tau$ *ise* $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$ *olur.*

özelliklerini sağlayan, X in belirtisiz alt kümelerinden oluşan bir τ ailesidir. (X, τ) ikilisine de bir belirtisiz topolojik uzay denir.

τ topolojisinin her elemanına açık belirtisiz küme denir. Bir belirtisiz kümenin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul tümleyeninin açık olmasıdır.

Tanım 2.29 *(Lowen 1976) $\tau \subset I^X$ olmak üzere,*

BT1) *$\forall \alpha$ sabiti için $\alpha \in \tau$*

BT2) *$\forall A, B \in \tau$ için $A \cap B \in \tau$*

BT3) *$\forall i \in I$ için $A_i \in \tau$ ise $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$ olur.*

koşulları sağlanıyorsa τ ya bir belirtisiz topolojidir denir. (X, τ) ikilisine de bir belirtisiz topolojik uzay denir.

Görüldüğü gibi Lowen'in yapmış olduğu belirtisiz topoloji tanımında değişen koşul **BT1** koşuludur.

Tanım 2.30 *(Chang 1968) Standart topolojiye benzer olarak; sadece $\bar{0}$ ve $\bar{1}$ i içeren topolojiye, ayrık olmayan belirtisiz topoloji; X kümesinin bütün belirtisiz alt kümelerinden oluşan topolojiye de ayrık belirtisiz topoloji denir.*

Tanım 2.31 *(Chang 1968) $\mathcal{U}$ ve τ, X kümesi üzerinde iki belirtisiz topoloji olsun. $\mathcal{U}$ belirtisiz topolojisi, τ belirtisiz topolojisinden daha kaba olaması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{U} \subset \tau$ olmasıdır. (Benzer olarak; τ belirtisiz topolojisi, $\mathcal{U}$ belirtisiz topolojisinden daha ince olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{U} \subset \tau$olmasıdır.)*

Tanım 2.32 *(Chang 1968) (X, τ) belirtisiz topolojik uzayında bir U belirtisiz kümesinin, A belirtisiz kümesinin bir komşuluğu olması için gerekli ve yeterli koşul $A \subset O \subset U$ olacak şekilde bir O açık belirtisiz kümesinin var olmasıdır.*

A belirtisiz kümesinin τ topolojisi içinde tüm komşulukları ailesine, A belirtisiz kümesinin komşuluk sistemi denir.

Teorem 2.33 *(Chang 1968) A belirtisiz kümesinin açık olması için gerekli ve yeterli koşul her $B \subset A$ için A kümesinin B nin bir komşuluğu olmasıdır.*

İspat $(\Rightarrow)$: A belirtisiz kümesi açık olsun. O halde $\forall B \subset A$ için $B \subset A \subseteq A$ ve A kümesi açık olduğundan A, B kümesinin bir komşuluğudur.

$(\Leftarrow)$: $A \subset A$ olduğundan; $A \subset O \subset A$ olacak şekilde bir O açık belirtisiz kümesi vardır. Buradan, $A = O$ olur ve dolayısıyla A açık kümedir. $\square$

Teorem 2.34 *(Chang 1968) $\mathcal{U}$ bir belirtisiz kümenin komşuluk sistemi ise*

1) $\mathcal{U}$ ya ait elemanların sonlu arakesitleri yine $\mathcal{U}$ ya aittir.

2) $\mathcal{U}$ nun bir elemanını içeren her belirtisiz küme yine $\mathcal{U}$ ya aittir.

özellikleri sağlanır.

İspat $\mathcal{U}$, bir A belirtisiz kümesinin bir komşuluk sistemi olsun.

1) R ve S, A belirtisiz kümesinin komşulukları olsun. O halde öyle $R_o \subset R$ ve $S_o \subset S$ açık kümeleri vardır ki; $A \subset R_o \subset R$ ve $A \subset S_o \subset S$ sağlanır. Buradan, $A \subset R_o \cap S_o \subset R \cap S$ sağlanacağından, $\mathcal{U}$ ya ait iki kümenin kesişimi de yine $\mathcal{U}$ ya ait olur.

2) R, A belirtisiz kümesinin bir komşuluğu olsun ve $R \subset S$ olsun. R, A nın komşuluğu olduğundan; $A \subset R_o \subset R$ olacak şekilde bir R_o açık kümesi vardır. Ayrıca, $A \subset R_o \subset R \subset S$ sağlanacağından, S kümesi de A belirtisiz kümesinin bir komşuluğu olur. Dolayısıyla, $S \in \mathcal{U}$ olur. □

Şimdi belirtisiz nokta tanımını ve bazı özelliklerini verelim:

Tanım 2.35 *(Pao-Ming ve Ying-Ming 1980) $0 < \lambda \leq 1$ olmak üzere, $y \in X$ için, I^X içinde bir belirtisiz nokta;*

$$x_\lambda(y) = \begin{cases} \lambda & , y = x \textit{ ise} \\ 0 & , y \neq x \textit{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.36 *(Pao-Ming ve Ying-Ming 1980) Bir x_λ belirtisiz noktasının bir A belirtisiz kümesi içinde olması;*

$$\lambda < A(x)$$

şeklinde ifade edilir ve $x_\lambda \in A$ ile gösterilir.

Tanım 2.37 *(Pao-Ming ve Ying-Ming 1980) (X, τ) belirtisiz topolojik uzayında bir A belirtisiz kümesinin, x_λ belirtisiz noktasının komşuluğu olması için gerekli ve yeterli koşul, $x_\lambda \in B \subset A$ olacak şekilde en az bir $B \in \tau$ belirtisiz kümesinin varlığıdır.*

x_λ belirtisiz noktasının, τ topolojisi içinde tüm komşulukları ailesine, x_λ noktasının komşuluk sistemi denir ve $x_\lambda = p$ olmak üzere, $\mathcal{N}_p^\tau$ ile gösterilir. (Bir karışıklık yaratmayacaksa $\mathcal{N}_p$ ile gösterilebilir.)

Önteorem 2.38 *(Pao-Ming ve Ying-Ming 1980) (X, τ) bir belirtisiz topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $p \in A$ için $A \in \mathcal{N}_p$ oluyorsa A belirtisiz kümesi açıktır denir.*

Tanım 2.39 *(Pao-Ming ve Ying-Ming 1980) Bir x_λ belirtisiz noktası ve A belirtisiz kümesi için,*

$$\lambda > A^{'}(x)$$

oluyorsa A ile x_λ q-çakışığımsıdır denir. $A^{'}$ nin tanımından $\lambda + A(x) > 1$ şeklinde de ifade edilebilir ve $x_\lambda = p$ denilirse, pqA ile gösterilir.

Tanım 2.40 *(Pao-Ming ve Ying-Ming 1980) (X, τ) belirtisiz topolojik uzayında bir A belirtisiz kümesi ile bir x_λ belirtisiz noktası verilsin. $x_\lambda qB$ ve $B \subset A$ olacak şekilde bir $B \in \tau$ varsa A ya x_λ noktasının bir Q-komşuluğudur denir. x_λ noktasının tüm Q-komşuluklarının oluşturduğu aileye ise x_λ nın Q-komşuluk sistemi denir. $x_\lambda = p$ olmak üzere, $\mathcal{L}_p$ ile gösterilir.*

Önerme 2.41 *(Pao-Ming ve Ying-Ming 1980) $\mathcal{U}_{x_\lambda}$, (X, τ) topolojik uzayında x_λ belirtisiz noktasının Q-komşuluklar ailesi olsun. O halde,*

(1) $U \in \mathcal{U}_{x_\lambda}$ ise x_λ ile U q-çakışığımsıdır.

(2) $U, V \in \mathcal{U}_{x_\lambda}$ ise $U \cap V \in \mathcal{U}_{x_\lambda}$ dır.

(3) $U \in \mathcal{U}_{x_\lambda}$ ve $U \subset V$ ise $V \in \mathcal{U}_{x_\lambda}$ dır.

(4) $U \in U_{x_\lambda}$ ise V ile q-çakışığımsı olan her x_μ noktası için $V \in U_{x_\mu}$ ve $V \subset U$ olacak şekilde bir $V \in U_{x_\lambda}$ vardır.

Tanım 2.42 *(Vicente ve Aranguren 1988) (X, τ_1) ve (Y, τ_2) belirtisiz topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer X in her p belirtisiz noktası ve $f(p)$ nin her N komşuluğu için p belirtisiz noktasının $f(M) \subset N$ olacak şekilde bir M komşuluğu bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna p noktasında belirtisiz süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu her $p \in X$ noktasında sürekli ise f fonksiyona belirtisiz süreklidir denir.*

Teorem 2.43 *(X, τ_1) ve (Y, τ_2) belirtisiz topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.*

$$f \text{ belirtisiz süreklidir} \Leftrightarrow \forall A \in \tau_2 \text{ için } f^{-1}(A) \in \tau_1 \text{ dir.}$$

Tezin bundan sonraki kısımlarında, belirtisiz kümeleri göstermekte üyelik fonksiyonlarını, yani μ, ν gibi simgeleri kullanacağız.

Bu bölümde belirtisiz topolojik uzayın tanımı ve özelliklerinden söz edildi. Bundan sonraki bölümlerde bu uzay üzerinde çeşitli süzgeç kavramları verilecektir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Belirtisiz Topolojik Uzaylarda Süzgeçler

3.1.1. Önsüzgeçler

Belirtisiz topolojik uzaylar üzerinde ilk tanımlayacağımız süzgeç kavramı önsüzgeçlerdir. İlk olarak Lowen tarafından verilen bu kavram bir çok matematikçi tarafından çalışılmış ve geliştirilmiştir.

Tanım 3.1 *(Burton vd. 1997; Lowen 1979) X kümesi üzerinde bir $\mathcal{F}$ önsüzgeci, I^X in*

ÖS1) $\nu, \mu \in \mathcal{F}$ *ise* $\nu \wedge \mu \in \mathcal{F}$ *dir.*
ÖS2) $\nu \in \mathcal{F}$ *ve* $\nu \leq \mu$ *ise* $\mu \in \mathcal{F}$ *dir.*
ÖS3) $\overline{0} \notin \mathcal{F}$ *dir.*

koşullarını sağlayan alt kümelerinin, boştan farklı bir ailesidir.

Örnek 3.2 *Tanım 2.37'de verilen bir $x_\lambda = p$ belirtisiz noktasının komşuluk sistemi $\mathcal{N}_p$ ve Tanım 2.40'da verilen x_λ belirtisiz noktasının Q-komşuluk sistemi $\mathcal{L}_p$ birer önsüzgeçtir.*

Tanım 3.3 *(Burton vd. 1997; Lowen 1979) $\mathcal{B}$, I^X in boştan farklı bir ailesi ve*

ÖST1) $\overline{0} \notin \mathcal{B}$ *dir.*
ÖST2) $\forall \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{B}$ *için* $\exists \nu_3 \in \mathcal{B},\ \nu_3 \leq \nu_1 \wedge \nu_2$ *dir.*

koşullarını sağlıyorsa $\mathcal{B}$ ye X üzerinde bir önsüzgeç tabanı denir.

Önteorem 3.4 *Her önsüzgeç bir önsüzgeç tabanıdır.*

İspat $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç olsun. $\mathcal{F}$ nin önsüzgeç tabanı koşullarını sağladığını gösterelim:

ÖST1) ÖS3 koşulundan $\overline{0} \notin \mathcal{F}$ olduğu görülür.

ÖST2) ν_1 ve $\nu_2 \in \mathcal{F}$ olsun. $\mathcal{F}$ önsüzgeç olduğundan $\nu_1 \wedge \nu_2 \in \mathcal{F}$ tir. $\nu_1 \wedge \nu_2 = \nu_3$ dersek, $\nu_3 \leq \nu_1 \wedge \nu_2$ ve $\nu_3 \in \mathcal{F}$ sağlanır. □

Tanım 3.5 *(Burton vd. 1997) $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ X kümesi üzerinde iki önsüzgeç olsunlar. $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ ise $\mathcal{F}_1$ önsüzgeci $\mathcal{F}_2$ önsüzgecinden daha incedir (ya da eşdeğer olarak, $\mathcal{F}_2$ önsüzgeci $\mathcal{F}_1$ önsüzgecinden daha kabadır) denir.*

Tanım 3.6 *$\mathcal{F} \subseteq I^X$ bir süzgeç tabanı ise*

$$< \mathcal{F} >:= \{\mu \in I^X : \exists \nu \in \mathcal{F},\ \nu \leq \mu\}$$

şeklinde tanımlanan küme ailesine, X üzerinde $\mathcal{F}$ önsüzgeç tabanının ürettiği (doğurduğu) özsüzgeç denir.

Tanım 3.7 *$\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ olmak üzere $< \mathcal{B} >= \mathcal{F}$ ise $\mathcal{B}$ ye $\mathcal{F}$ için bir önsüzgeç tabanıdır denir. Dolayısıyla, $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{F}$ için bir önsüzgeç tabanı olması için gerekli ve yeterli koşul, her $\mu \in \mathcal{F}$ için $\nu \leq \mu$ olacak şekilde bir $\nu \in \mathcal{B}$ vardır.*

Tanım 3.8 *$\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ iki önsüzgeç ve $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ise $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ den daha kabadır veya $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ den daha incedir denir.*

Önerme 3.9 *1) $\mathcal{B}$ bir önsüzgeç tabanı ise $< \mathcal{B} >$ bir önsüzgeçtir.*
2) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç ve $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ için $< \mathcal{B} >= \mathcal{F}$ ise $\mathcal{B}$ bir önsüzgeç tabanıdır.

İspat 1) $< \mathcal{B} > \neq \bar{0}$ ve $\bar{0} \notin \mathcal{B}$ olduğunu biliyoruz.

$\mu, \nu \in < \mathcal{B} >$ ise $\mu' \leq \mu$ ve $\nu' \leq \nu$ olacak şekilde $\mu', \nu' \in \mathcal{B}$ vardır. Buradan, $\lambda \leq \mu' \wedge \nu' \leq \mu \wedge \nu$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathcal{B}$ vardır. Bu nedenle, $\mu \wedge \nu \in < \mathcal{B} >$ dir.

$\mu \in < \mathcal{B} >$ ve $\mu \leq \nu$ ise $\lambda \leq \mu \leq \nu$ olacak şekilde bir $\lambda \in < \mathcal{B} >$ vardır. Dolayısıyla, $\nu \in < \mathcal{B} >$ dir. Buradan, $< \mathcal{B} >$ bir önsüzgeçtir.

2) $< \mathcal{B} > \neq \bar{0}$ dır. Böylece, $\mathcal{B} \neq \bar{0}$ dır. $\bar{0} \notin \mathcal{F} = < \mathcal{B} > \Rightarrow \bar{0} \notin \mathcal{B}$ dir.

$\mu, \nu \in \mathcal{B}$ olsun. O halde, $\mu, \nu \in \mathcal{F} = < \mathcal{B} >$ dir. Dolayısıyla, $\mu \wedge \nu \in < \mathcal{B} >$ olur. Bu nedenle, $\lambda \leq \mu \wedge \nu$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathcal{B}$ vardır. Böylece, $\mathcal{B}$ bir önsüzgeç tabanıdır. □

Tanım 3.10 *(Muraleetharan 1997) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç ve $\mu \in I^X$ olsun.*

$$C^{\mu}(\mathcal{F}) := \{\alpha \in I : \forall \nu \in \mathcal{F}, \exists x \in X : \nu(x) > \mu(x) + \alpha\}$$

şeklinde tanımlanan I nın alt kümesine $\mathcal{F}$ önsüzgecinin μ ye göre karakteristik kümesi denir.

$$c^{\mu}(\mathcal{F}) := \sup C^{\mu}(\mathcal{F})$$

şeklinde tanımlanan $c^{\mu}(\mathcal{F})$ e $\mathcal{F}$ önsüzgecinin μ ye göre karakteristiği denir.

Önerme 3.11 *(Muraleetharan 1997) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç ve $\mu \in I^X$ olsun. O halde,*

(1) $C^\mu(\mathcal{F}) = \{\alpha \in I : \mu + \alpha \notin \mathcal{F}\}$.

(2) $\{\alpha \in I : \mu + \alpha \in \mathcal{F}\} = \{1\}$ ya da $[c, 1]$, $c \in I_1$ ya da $(c, 1]$, $c \in I_1$ dir.

(3) $C^\mu(\mathcal{F}) = \varnothing$ ya da $[0, c)$, $c \in I_0$ ya da $[0, c]$, $c \in I_1$ dir.

(4) $c^\mu(\mathcal{F}) := \sup C^\mu(\mathcal{F}) = \inf\{\alpha \in I : \mu + \alpha \in \mathcal{F}\}$.

İspat (1)
$$\begin{aligned} \mu + \alpha \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow \forall \nu \in \mathcal{F},\ \mu + \alpha \ngeq \nu \\ &\Leftrightarrow \forall \nu \in \mathcal{F},\ \exists x \in X : \nu(x) > \mu(x) + \alpha \end{aligned}$$
dır.

(2) $A = \{\alpha \in I : \mu + \alpha \in \mathcal{F}\}$ olsun. O halde, $1 \in A$ dır. $\alpha \in A$ ve $\alpha \leq \beta$ ise $\beta \in A$ dır. Bu nedenle, $A = \{1\}$ ya da $[c, 1]$, $c \in I_1$ ya da $(c, 1]$, $c \in I_1$ dir.

(3) $B = C^\mu(\mathcal{F}) = \{\alpha \in I : \mu + \alpha \notin \mathcal{F}\}$ olsun. O halde, $A \cap B = \varnothing$ ve $A \cup B = I$ olur. Böylece, $B = [0, c)$, $c \in I_0$ ya da $[0, c]$, $c \in I_1$ dir.

(4) $\sup B = \inf A$ olduğundan,

$c^\mu(\mathcal{F}) := \sup C^\mu(\mathcal{F}) = \inf\{\alpha \in I : \mu + \alpha \in \mathcal{F}\}$ dir. □

Not 2 *(Muraleetharan 1997)*

(1) $C(\mathcal{F}) = \{\alpha \in I : \alpha 1_X \notin \mathcal{F}\}$.

(2) $c(\mathcal{F}) := \sup C(\mathcal{F}) = \inf\{\alpha \in I : \alpha 1_X \in \mathcal{F}\}$.

(3) $c(\mathcal{F}) = \inf\limits_{\nu \in \mathcal{F}} \sup \nu$.

(4) Bir $\mathcal{F}$ önsüzgeç tabanı için, $c(\mathcal{F}) = c(< \mathcal{F} >)$ dir.

$\mu = 0$ ise

$$C^\mu(\mathcal{F}) = C(\mathcal{F}) = \{\alpha \in I : \alpha 1_X \notin \mathcal{F}\}$$
$$c(\mathcal{F}) := \sup C(\mathcal{F}) = \inf\{\alpha \in I : \alpha 1_X \in \mathcal{F}\}$$

$\{\alpha \in I : \alpha 1_X \in \mathcal{F}\} = \{\sup \nu : \nu \in \mathcal{F}\}$ olduğunu biliyoruz. $\nu \in \mathcal{F}$ ise $(\sup \nu) 1_X \in \mathcal{F}$ ve $\alpha 1_X = \alpha$ olduğundan,

$$c(\mathcal{F}) = \inf_{\nu \in \mathcal{F}} \sup \nu$$

dir. $c(\mathcal{F})$ e $\mathcal{F}$ önsüzgecinin karakteristiği denir.

Teorem 3.12 *(Burton 1993) $c(\mathcal{F}) = c(< \mathcal{F} >)$ dir.*

İspat $\alpha = c(< \mathcal{F} >) = \inf\limits_{\mu \in < \mathcal{F} >} \sup \mu$ olsun. Bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\alpha < \sup \mu_0 < \alpha + \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\mu_0 \in< \mathcal{F} >$ vardır. $< \mathcal{F} >$ in tanımından, $\nu_0 \leq \mu_0$ olacak biçimde bir $\nu_0 \in \mathcal{F}$ vardır.

$$\beta = \inf_{\nu \in \mathcal{F}} \sup \nu \leq \sup \nu_0 \leq \sup \mu_0 < \alpha + \varepsilon$$

olur. Her $\varepsilon > 0$ için sağlanacağından, $\beta \leq \alpha$ olur. Yani, $c(\mathcal{F}) \leq c(< \mathcal{F} >)$ dir.

Diğer taraftan, $\beta = c(\mathcal{F}) = \inf_{\nu \in \mathcal{F}} \sup \nu$ dersek, bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\beta \leq \sup \nu_0 < \beta + \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\nu_0 \in \mathcal{F}$ vardır. $\nu_0 \in< \mathcal{F} >$ olacağından,

$$\alpha = \inf_{\mu \in <\mathcal{F}>} \sup \mu \leq \sup \nu_0 < \beta + \varepsilon$$

olur. Her $\varepsilon > 0$ için sağlanacağından, $\alpha \leq \beta$ olur. Yani, $c(< \mathcal{F} >) \leq c(\mathcal{F})$ dir.

Dolayısıyla ispat biter. □

Tanım 3.13 *(Burton 1993) $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ önsüzgeç tabanları olmak üzere;*

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{G} \Leftrightarrow \forall \nu \in \mathcal{F},\ \forall \mu \in \mathcal{G} \text{ için } \nu \wedge \mu \neq \bar{0}$$

koşulu sağlanıyorsa bu iki önsüzgeç tabanı kesişir denir.

Tanım 3.14 *(Burton 1993) $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ önsüzgeç tabanı kesişiyor ise*

$$\mathcal{F} \vee \mathcal{G} :=< \{\nu \wedge \mu : \nu \in \mathcal{F},\ \mu \in \mathcal{G}\} >$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ önsüzgeçlerinin ikisini de içeren en küçük önsüzgeç olur.

Tanım 3.15 *(Burton 1993) $\mathcal{F}$ ve G önsüzgeçleri için*

$$c(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \left\{ \begin{array}{ll} c(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) & , \mathcal{F} \sim \mathcal{G} \text{ ise} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.16 *(Burton vd. 1997) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç tabanı ve $c(\mathcal{F}) > 0$ ise*

$$\widehat{\mathcal{F}} = \{\sup_{\varepsilon \in I_0} (\mu_\varepsilon - \varepsilon) : (\mu_\varepsilon) \in \mathcal{F}^{I_0}\}$$

şeklinde tanımlı $\widehat{\mathcal{F}}$ ye $\mathcal{F}$ önsüzgecinin doymuşu denir.

Teorem 3.17 *(Muraleetharan 1997) $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ önsüzgeç tabanları ve $c(\mathcal{F}) \wedge c(\mathcal{G}) > 0$ olsun. O halde;*

1) $\mathcal{F} \subseteq \overset{\frown}{\mathcal{F}}$.

2) $(\forall \varepsilon \in I_0, \nu + \varepsilon \in \mathcal{F}) \Rightarrow \nu \in \overset{\frown}{\mathcal{F}}$.

3) $\overset{\frown}{\mathcal{F}}$ bir önsüzgeç tabanıdır.

4) $\overset{\frown}{\mathcal{F}} \subseteq \overset{\frown}{\mathcal{G}} \Rightarrow \overset{\frown}{\mathcal{F}} \subseteq \overset{\frown}{\mathcal{G}}$.

5) $\widetilde{\mathcal{F}} := < \overset{\frown}{\mathcal{F}} > = \widehat{< \mathcal{F} >}$.

6) $\overset{\frown}{\overset{\frown}{\mathcal{F}}} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}$.

7) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \widetilde{\mathcal{F}} \subseteq \widetilde{\mathcal{G}}$.

8) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç ise $\widetilde{\mathcal{F}} = \overset{\frown}{\mathcal{F}}$.

9) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç ise $c(\overset{\frown}{\mathcal{F}}) = c(\mathcal{F})$.

özellikleri sağlanır.

İspat 1) $\nu \in \mathcal{F}$ ve $\forall \varepsilon \in I_0$ için $\nu_\varepsilon = \nu$ olsun. O halde;

$$\sup_{\varepsilon \in I_0}(\nu_\varepsilon - \varepsilon) = \sup_{\varepsilon \in I_0}(\nu - \varepsilon) = \nu \in \overset{\frown}{\mathcal{F}}$$

dir.

2) $\forall \varepsilon \in I_0$ için $\nu + \varepsilon \in \mathcal{F}$ olsun. O halde;

$$\sup_{\varepsilon \in I_0}((\nu + \varepsilon) - \varepsilon) = \nu \in \overset{\frown}{\mathcal{F}}$$

dir.

3) $\overset{\frown}{\mathcal{F}} \neq \varnothing$ ve $0 \notin \overset{\frown}{\mathcal{F}}$ olduğunu biliyoruz.

$\mu = \sup\limits_{\varepsilon \in I_0}(\mu_\varepsilon - \varepsilon), \nu = \sup\limits_{\varepsilon \in I_0}(\nu_\varepsilon - \varepsilon) \in \overset{\frown}{\mathcal{F}}$ ve $\forall \varepsilon \in I_0$ için $\mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon \in \mathcal{F}$ olsun. O halde;

$$\begin{aligned}(\mu \wedge \nu)(x) &= \sup_{\varepsilon \in I_0}(\mu_\varepsilon - \varepsilon)(x) \wedge \sup_{\varepsilon \in I_0}(\nu_\varepsilon - \varepsilon)(x) \\ &= \sup_{\varepsilon \in I_0}\sup_{\varepsilon \in I_0}(\mu_\varepsilon - \varepsilon)(x) \wedge (\nu_\varepsilon - \varepsilon)(x) \\ &\geq \sup_{\varepsilon \in I_0}(\mu_\varepsilon \wedge \nu_\varepsilon - \varepsilon)(x)\end{aligned}$$

olur. Buradan;

$$\mu \wedge \nu \geq \sup_{\varepsilon \in I_0}(\mu_\varepsilon \wedge \nu_\varepsilon - \varepsilon)$$

olur. Fakat biz biliyoruz ki;

$$\forall \varepsilon \in I_0;\ \mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon \in \mathcal{F} \Rightarrow \forall \varepsilon \in I_0;\ \exists \lambda_\varepsilon \in \mathcal{F} \text{ öyle ki } \lambda_\varepsilon \leq \mu_\varepsilon \wedge \nu_\varepsilon$$

dur. Bu nedenle;

$$\mu \wedge \nu \geq \sup_{\varepsilon \in I_0}(\mu_\varepsilon \wedge \nu_\varepsilon - \varepsilon) \geq \sup_{\varepsilon \in I_0}(\lambda_\varepsilon - \varepsilon) \in \widehat{\mathcal{F}}$$

dir. Dolayısıyla, $\widehat{\mathcal{F}}$ bir önsüzgeç tabanıdır.

4) $\mu = \sup\limits_{\varepsilon \in I_0}(\nu_\varepsilon - \varepsilon) \in \widehat{\mathcal{F}}$ ve $\forall \varepsilon \in I_0$ için $\nu_\varepsilon \in \mathcal{F}$ olsun. O halde;

$$\forall \varepsilon \in I_0,\ \nu_\varepsilon \in \mathcal{G} \Rightarrow \mu \in \widehat{\mathcal{G}}$$

dir.

5) $\mu \in < \widehat{\mathcal{F}} >$ olsun. O halde, $\nu \leq \mu$ olacak şekilde bir $\nu \in \widehat{\mathcal{F}}$ vardır.

Bu nedenle, $\mu \geq \nu = \sup\limits_{\varepsilon \in I_0}(\nu_\varepsilon - \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\nu_\varepsilon \in F^{I_0}$ vardır.

$\forall \varepsilon \in I_0$ için $\mu_\varepsilon := \mu + \varepsilon \geq \nu_\varepsilon$ olsun. O halde, $\mu_\varepsilon \in < \mathcal{F} >$ olur. Böylece;

$$\mu = \sup_{\varepsilon \in I_0}(\mu_\varepsilon - \varepsilon) \in \widehat{< \mathcal{F} >}$$

olur. Bu nedenle;

$$< \widehat{\mathcal{F}} > \subseteq \widehat{< \mathcal{F} >}$$

olur.

$\mu \in \widehat{< \mathcal{F} >}$ olsun. O halde, $\mu = \sup\limits_{\varepsilon \in I_0}(\mu_\varepsilon - \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\mu_\varepsilon \in < \mathcal{F} >^{I_0}$ vardır.

Bu nedenle, $\forall \varepsilon \in I_0$ için $\exists \nu_\varepsilon \in \mathcal{F},\ \nu_\varepsilon \leq \mu_\varepsilon$ dur.

Buradan, $\sup\limits_{\varepsilon \in I_0}(\nu_\varepsilon - \varepsilon) \leq \mu$ ve böylece;

$\mu \in < \widehat{\mathcal{F}} >$ olur.

Dolayısıyla,

$$\widehat{< \mathcal{F} >} \subseteq < \widehat{\mathcal{F}} >$$

dir.

6) $\mu \in \widehat{\widehat{\mathcal{F}}}$ olsun. O halde, $\mu = \sup\limits_{\varepsilon \in I_0}(\mu_\varepsilon - \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\mu_\varepsilon \in \widehat{\mathcal{F}}^{I_0}$ vardır. Bu nedenle, $\mu_\varepsilon = \sup\limits_{\delta \in I_0}(\mu_\delta^\varepsilon - \delta)$ olacak şekilde en az bir $\mu_\delta^\varepsilon \in \mathcal{F}^{I_0}$ vardır. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned}
\mu &= \sup_{\varepsilon \in I_0}(\sup_{\delta \in I_0}(\mu_\delta^\varepsilon - \delta) - \varepsilon) \\
&= \sup_{\varepsilon \in I_0}\sup_{\delta \in I_0}(\mu_\delta^\varepsilon - \delta - \varepsilon) \\
&= \sup_{\alpha \in I_0}\ \sup_{\substack{\varepsilon, \delta \in I_0 \\ \varepsilon + \delta = \alpha}}(\mu_\delta^\varepsilon - \alpha) \\
&= \sup_{\alpha \in I_0}(\nu_\alpha - \alpha)
\end{aligned}$$

olur ki burada, $\nu_\alpha = \sup\limits_{\substack{\varepsilon,\delta\in I_0\\ \varepsilon+\delta=\alpha}} \mu_\delta^\varepsilon \in< \mathcal{F} >$ dir. Bu nedenle;

$$\mu \in \widehat{< \mathcal{F} >} = \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$$

dir.

7) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \widehat{\mathcal{F}} \subseteq \widehat{\mathcal{G}} \Rightarrow <\widehat{\mathcal{F}}> \subseteq <\widehat{\mathcal{G}}>$ dir.

8) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç ise $\mathcal{F} =< \mathcal{F} >$ dir. Bu nedenle; $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}} = \widehat{< \mathcal{F} >} = \widehat{\mathcal{F}}$ olur.

9) $c(\mathcal{F}) = \inf\limits_{\nu\in\mathcal{F}} \sup \nu$ olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$\mathcal{F} \subseteq \widehat{\mathcal{F}} \Rightarrow c(\mathcal{F}) \geq c(\widehat{\mathcal{F}})$$

dir. $c(\widehat{\mathcal{F}}) < \alpha < c(\mathcal{F})$ olacak şekilde öyle bir α vardır ki;

$$\inf_{\nu\in\widehat{\mathcal{F}}} \sup \nu < \alpha \Rightarrow \exists \nu \in \widehat{\mathcal{F}};\ \nu < \alpha$$

sağlanır. Dolayısıyla,

$$\text{Bir } \nu_\varepsilon \in \mathcal{F}^{I_0} \text{ vardır ki, } \nu = \sup_{\varepsilon\in I_0} (\nu_\varepsilon - \varepsilon)$$

olur. $\sup \nu < \beta < \alpha$ için $\mu = \beta 1_X$ olduğundan, $\nu < \mu$ dür. Bu nedenle,

$$\exists \delta > 0;\ \nu < \nu + \delta < \mu$$

olur. Fakat $\forall \varepsilon \in I_0$ için $\nu + \varepsilon \geq \nu_\varepsilon$ olduğundan, $\mu > \nu + \varepsilon \geq \nu_\delta$ dır.

$\mathcal{F}$ bir önsüzgeç olduğundan, $\mu \in \mathcal{F}$ dir. $\mu \in \mathcal{F}$ ve $\sup \mu = \beta \Rightarrow c(\mathcal{F}) \leq \beta < \alpha$ dır. Bu $c(\mathcal{F}) > \alpha$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $c(\mathcal{F}) = c(\widehat{\mathcal{F}})$ dir. □

Tanım 3.18 *(Burton vd. 1997) Eğer $\mathcal{F} = \widehat{\mathcal{F}}$ ise, $\mathcal{F}$ önsüzgecine doygun önsüzgeç denir.*

Teorem 3.19 *(Muraleetharan 1997) $\mathcal{F}$ önsüzgeç ise,*

1) $\mathcal{F}$ doygundur $\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in I_0,\ \nu + \varepsilon \in \mathcal{F} \Rightarrow \nu \in \mathcal{F}$.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in I_0,\ \exists \nu_\varepsilon \in \mathcal{F} : \nu_\varepsilon \leq \nu + \varepsilon \Rightarrow \nu \in \mathcal{F}$.

2) $\widehat{\mathcal{F}} = \{\mu \in I^X : \forall \varepsilon \in I_0, \mu + \varepsilon \in \mathcal{F}\}$.

3) $\widehat{\mathcal{F}}$ doygun bir önsüzgeçtir.

4) $\mathcal{F}$ önsüzgeç tabanı ise $\tilde{\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}} = \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$ dir.

koşulları sağlanır.

İspat 1) $(\Rightarrow)$: $(\forall\varepsilon \in I_0, \nu + \varepsilon \in \mathcal{F}) \Rightarrow \nu \in \widehat{\mathcal{F}}$ olduğunu biliyoruz.

Fakat, $\mathcal{F} = \widehat{\mathcal{F}}$ olduğundan, $\nu \in \mathcal{F}$ dir.

$(\Leftarrow)$: $\mu \in \widehat{\mathcal{F}}$ olsun. O halde,

$$\exists(\mu_\varepsilon : \varepsilon \in I_0) \in \mathcal{F}^{I_0};\ \mu = \sup_{\varepsilon \in I_0}(\mu_\varepsilon - \varepsilon)$$

olduğunu biliyoruz. Bu nedenle;

$$\forall\varepsilon \in I_0,\ \mu + \varepsilon \geq \mu_\varepsilon \in \mathcal{F}$$

dir. $\mathcal{F}$ önsüzgeç olduğundan, $\forall\varepsilon \in I_0$, $\mu + \varepsilon \in \mathcal{F}$ dir. Böylece, $\mu \in \mathcal{F}$ ve bu nedenle $\mathcal{F} = \widehat{\mathcal{F}}$ olur.

2)

$$\{\mu \in I^X : \forall\varepsilon \in I_0,\ \mu + \varepsilon \in \mathcal{F}\} \subseteq \widehat{\mathcal{F}}$$

olduğunu biliyoruz. $\mu \in \widehat{\mathcal{F}}$ olsun. O halde,

$$\exists(\mu_\varepsilon : \varepsilon \in I_0) \in \mathcal{F}^{I_0};\ \mu = \sup_{\varepsilon \in I_0}(\mu_\varepsilon - \varepsilon)$$

dır. Bu nedenle,

$$\forall\varepsilon \in I_0,\ \mu + \varepsilon \geq \mu_\varepsilon \in \mathcal{F}$$

dir. $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç olduğundan, $\forall\varepsilon \in I_0$, $\mu + \varepsilon \in \mathcal{F}$ olur.

3) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç ise,

$$\widetilde{\mathcal{F}} = <\widehat{\mathcal{F}}> = \widehat{<\mathcal{F}>} = \widehat{\mathcal{F}}$$

dir. Böylece $\widehat{\mathcal{F}}$ bir önsüzgeçtir.

$\forall\varepsilon \in I_0$, $\mu + \varepsilon \in \widehat{\mathcal{F}}$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
\forall\varepsilon &\in I_0,\ \forall\delta \in I_0;\ \mu + \varepsilon + \delta \in \mathcal{F} \\
&\Rightarrow \forall\alpha \in I_0,\ \mu + \alpha \in \mathcal{F} \\
&\Rightarrow \mu \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\widehat{\mathcal{F}}$ doygun önsüzgeçtir.

4) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç tabanı ise $<\mathcal{F}>$ bir önsüzgeçtir. Dolayısıyla,

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \widehat{<\mathcal{F}>} = \widehat{\widehat{<\mathcal{F}>}}$$

dir. $\widehat{\mathcal{F}}$ bir doygun önsüzgeç olduğundan,

$$\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}}} = \widehat{<\widetilde{\mathcal{F}}>} = \widehat{\widetilde{\mathcal{F}}} = \widetilde{\mathcal{F}}$$

olur. □

Tanım 3.20 *(Burton 1993) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç tabanı $c(\mathcal{F}) = c > 0$ ise,*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\alpha} &:= \{\nu^{\beta} : \nu \in \mathcal{F},\ \beta < \alpha\} \quad &, 0 < \alpha \leq c \text{ ise} \\ \mathcal{F}_{\alpha} &:=< \{\nu^{\alpha} : \nu \in \mathcal{F}\} > &, 0 \leq \alpha < c \text{ ise} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}^{\alpha}$ ve $\mathcal{F}_{\alpha}$ kümelerine sırasıyla; $\mathcal{F}$ önsüzgecinin üst $\alpha-$kesme kümesi ve alt $\alpha-$kesme kümesi denir.

Teorem 3.21 *(Burton 1993)*

a) $0 \leq \beta < \alpha \leq c$ ise $\mathcal{F}_{\beta}$ ve $\mathcal{F}^{\alpha}$ X üzerinde süzgeçtir ve $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_{\beta} \subseteq \mathcal{F}^{\alpha} \subseteq \mathcal{F}^{c}$ dir.

b) $\mathcal{F}_0 = \{F \subseteq X : 1_F \in \mathcal{F}\}$.

c) $\alpha \geq \beta > 0$ ve $\mathbb{F}$, X üzerinde bir süzgeç olsun. O halde; $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_{\alpha})_0 = (\mathbb{F}^{\alpha})_0 = (\mathbb{F}^{\alpha})^{\beta} = (\mathbb{F}^{\alpha})^{\alpha}$ dır.

d) $F \in \mathcal{F}_0$ ve $c < \gamma \leq 1$ ise $\gamma 1_F \in \mathcal{F}$ dir.

özellikleri sağlanır.

İspat a) $A \in \mathcal{F}^{\alpha}$ ve $A \subseteq B$ ise $A = \nu^{\gamma}$ olacak şekilde $\nu \in \mathcal{F}$ ve $\gamma < \alpha$ vardır. O halde, $\mu := \nu \vee 1_B \in \mathcal{F}$ ve $\mu^{\gamma} = B$ dir. Böylece, $B \in \mathcal{F}^{\alpha}$ olur.

d) $\nu_1^0 \subseteq \mathcal{F}$ ve $\sup \nu_2 < \gamma$ olacak şekilde $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{F}$ için, $\nu = \nu_1 \wedge \nu_2$ olsun. O halde, $\nu \in \mathcal{F}, \nu^0 \subseteq F, \sup \nu < \gamma$ ve $\nu \leq \gamma 1_F$ olur. □

Teorem 3.22 *(Burton vd. 1997) X bir küme ve $\mathcal{F}$, X üzerinde bir önsüzgeç tabanı, $c(\mathcal{F}) = c$, $0 < \alpha \leq c$ olsun. O halde;*

1) $< \mathcal{F} >$ bir önsüzgeçtir ve $\mathcal{F} \subseteq < \mathcal{F} >$ dir.

2) $c(\mathcal{F}) = c(< \mathcal{F} >)$.

3) $\mathcal{F}^{\alpha} = \bigcup\limits_{0<\beta<\alpha} \mathcal{F}^{\beta}$.

4) $\mathcal{F}^{\alpha}$ bir süzgeç tabanıdır.

5) $c > 0$ ise $\widehat{\mathcal{F}}$ bir önsüzgeç tabanıdır ve $\mathcal{F} \subseteq \widehat{\mathcal{F}}$ olur.

6) $c > 0$ *ise* $c(\mathcal{F}) = c(\widehat{\mathcal{F}})$.

7) $c > 0$ *ise* $\widetilde{\mathcal{F}} := <\widehat{\mathcal{F}}>$ *olarak tanımlanan* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *kümesi doygundur.*

özellikleri sağlanır.

Teorem 3.23 *(Burton vd. 1997)* X *bir küme ve* $\mathcal{F}$, X *üzerinde bir önsüzgeç,* $c(\mathcal{F}) = c > 0$, $0 < \alpha < c$ *olsun. O halde;*

1) $\widetilde{\mathcal{F}} = \widehat{\mathcal{F}}$ *bir önsüzgeçtir ve* $\mathcal{F} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}$ *olur.*

2) $\mathcal{F}^{\alpha}$ *bir süzgeçtir.*

3) $\widehat{\mathcal{F}} = \{\upsilon \in I^X : \forall\varepsilon > 0, \upsilon + \varepsilon \in \mathcal{F}\}$.

4) $c(\mathcal{F}) = \inf\{\alpha \in I : \alpha 1_X \in \mathcal{F}\} = \sup\{\alpha \in I : \alpha 1_X \notin \mathcal{F}\}$.

özellikleri sağlanır.

Teorem 3.24 *(Burton vd. 1997)* $\mathcal{F}$ *bir önsüzgeç ve* $c(\mathcal{F}) = c > 0$ *ve* $0 < \alpha \leq c$ *olsun. O halde;* $\mathcal{F}^{\alpha} = (\widehat{\mathcal{F}})^{\alpha}$ *dır.*

İspat $\mathcal{F} \subseteq \widehat{\mathcal{F}}$ olduğundan, $\mathcal{F}^{\alpha} \subseteq (\widehat{\mathcal{F}})^{\alpha}$ dır.

Ters kapsamayı göstermek için; $F \in (\widehat{\mathcal{F}})^{\alpha}$ olsun. O halde $F = \upsilon^{\beta}$ olacak şekilde bir $\upsilon \in \widehat{\mathcal{F}}$ ve $\beta < \alpha$ vardır. $2\varepsilon = \alpha - \beta$ ve $\gamma = \beta + \varepsilon$ olsun. O halde tanımdan; $\mu = \upsilon + \varepsilon \in \mathcal{F}$ ve $F = \upsilon^{\beta} = (\upsilon + \varepsilon)^{\beta+\varepsilon} = \mu^{\gamma} \in \mathcal{F}^{\alpha}$ olur. □

Sonuç 3.25 *(Burton vd. 1997)* $\mathcal{F}$ *bir önsüzgeç,* $c(\mathcal{F}) = c > 0$ *ve* $0 < \alpha \leq c$ *olsun. O halde,* $\widehat{\mathcal{F}} = \bigcap_{0<\alpha<c} (\mathcal{F}^{\alpha})^{\alpha}$ *olur.*

İspat $\widehat{\mathcal{F}}$ doygundu ayrıca $\widehat{\mathcal{F}} = \cap(\widehat{\mathcal{F}^{\alpha}})^{\alpha}$ olduğundan bir önceki teoremden istenen sonuç çıkar. □

Tanım 3.26 *(Vicente ve Aranguren 1988)* $\mathcal{F}$, X *kümesi üzerinde bir önsüzgeç olsun. Eğer* X *üzerinde* $\mathcal{F}$ *önsüzgecinden daha ince bir önsüzgeç yoksa* $\mathcal{F}$ *önsüzgecine aşkın önsüzgeç denir.*

Önteorem 3.27 *(Young vd. 1993)* $\mathcal{F}$, X *kümesi üzerinde bir aşkın önsüzgeç ve* ν, X *içinde bir belirtisiz küme olsun. O halde;* $\nu \in \mathcal{F}$ *veya* $\nu^c \in \mathcal{F}$ *dir.*

İspat 1. Yol: Varsayalım ki, $\bar{1} \backslash \nu \notin \mathcal{F}$ olsun. O halde, $\forall \gamma \in \mathcal{F}$ için, $\gamma \wedge \nu \neq \bar{0}$ olur. $\mathcal{B} = \{\gamma \wedge \nu : \gamma \in \mathcal{F}\}$ bir önsüzgeç tabanı olsun ve $\mathcal{G}$, X üzerinde $\mathcal{B}$ tarafından üretilen bir önsüzgeç olsun. O halde açıktır ki, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ve $\nu \in \mathcal{G}$ dir.

$\mathcal{F}$ aşkın süzgeç olduğundan, $\mathcal{G}$ önsüzgeci $\mathcal{F}$ den daha ince olamaz. Dolayısıyla; $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ olmalıdır ve $\nu \in \mathcal{F}$ olur.

2. Yol: $\mathcal{F}$ X üzerinde bir aşkın önsüzgeç olduğundan asal süzgeçtir. O halde; $X = \bar{1} \backslash \nu \cup A \in \mathcal{F}$ iken $(\bar{1} \backslash \nu) \in \mathcal{F}$ veya $\nu \in \mathcal{F}$ olur. □

Önteorem 3.28 *(Vicente ve Aranguren 1988) $\mathcal{F}$, X kümesi üzerinde bir aşkın önsüzgeç olsun. O halde, $\forall \nu \in I^X$ için $\nu \notin \mathcal{F}$ ise $\nu \wedge \mu = \bar{0}$ olacak şekilde en az bir $\mu \in \mathcal{F}$ vardır.*

İspat Varsayalım ki $\nu \notin \mathcal{F}$ ve $\forall \mu \in \mathcal{F}$ için $\nu \wedge \mu \neq \bar{0}$ olsun. O halde, $\mathcal{B} = \{\nu \wedge \mu : \mu \in \mathcal{F}\}$ X üzerinde bir $\mathcal{G}$ önsüzgeci için taban olur. $\nu \in \mathcal{G}$ olduğundan $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ den daha incedir. Bu $\mathcal{F}$ nin aşkın önsüzgeç olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\nu \wedge \mu = \bar{0}$ olacak şekilde bir $\mu \in \mathcal{F}$ vardır. □

Tanım 3.29 *(Burton 1993; Burton vd. 1997; Lowen 1979) Her $\mu,\nu \in I^X$ için $\nu \vee \mu \in \mathcal{F}$ iken $\nu \in \mathcal{F}$ veya $\mu \in \mathcal{F}$ oluyorsa $\mathcal{F}$ önsüzgecine, asal önsüzgeçtir denir.*

Teorem 3.30 *(Burton 1993) $\mu \in I^X$ ise $< \mu >$ asaldır $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : \exists x \in X, \mu = \alpha 1_x$ dir.*

İspat (Muraleetharan 1997)

$(\Rightarrow)$: $x_1, x_2 \in \mu^0$ ve $x_1 \neq x_2$ olsun.

$\nu_1 = \mu_1(x_1) 1_{x_1}$ ve $\nu_2(x) = \begin{cases} \mu(x) & , x \neq x_1 \\ 0 & , x = x_1 \end{cases}$ alalım. O halde, $\nu_1 \vee \nu_2 = \mu \in < \mu >$ ise ya $\nu_1 \in < \mu >$ ya da $\nu_2 \in < \mu >$ dır. Bu nedenle, $\nu_1 \geq \mu$ veya $\nu_2 \geq \mu$ olur ki bu çelişkidir. Dolayısıyla, μ^0 bir tek nokta kümesidir. Böylece, $\exists \alpha > 0, \exists x \in X : \mu = \alpha 1_x$ şeklindedir.

$(\Leftarrow)$: $\nu_1, \nu_2 \in < \alpha 1_x >$ olsun.

O halde, $\nu_1 \vee \nu_2 \geq \alpha 1_x \Rightarrow \nu_1 \vee \nu_2 \geq \alpha$ olur. Buradan, $\nu_1(x) \geq \alpha$ veya $\nu_2(x) \geq \alpha$ ve sonuç olarak; $\nu_1 \in < \alpha 1_x >$ veya $\nu_2 \in < \alpha 1_x >$ dir. Bu nedenle, $< \alpha 1_x >$ asaldır. □

Önteorem 3.31 *(Young vd. 1993) $\mathcal{F}$, X kümesi üzerinde bir aşkın önsüzgeç ise asal önsüzgeçtir.*

İspat ν ve μ X içinde iki belirtisiz küme $\nu \vee \mu \in \mathcal{F}$ olsun. Varsayalım ki, $\nu \notin \mathcal{F}$ ve $\mu \notin \mathcal{F}$ olsun. $\mathcal{F}$ aşkın önsüzgeç olduğundan, Önteorem 3.28'den $\nu \wedge \gamma_1 = \bar{0}$ ve $\mu \wedge \gamma_2 = \bar{0}$ olacak şekilde $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{F}$ vardır. $\mathcal{F}$ önsüzgeç olduğundan; $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \in \mathcal{F}$ dir. O halde, $(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \wedge \nu = \bar{0}$ ve $(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \wedge \mu = \bar{0}$ dır. Buradan, $(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \wedge (\nu \wedge \mu) = \bar{0}$ olur bu da $\nu \vee \mu \in \mathcal{F}$ olmasıyla çelişir. O halde ya $\nu \in \mathcal{F}$ ya da $\mu \in \mathcal{F}$ olmalıdır. $\square$

Klasik mantıkta da verdiğimiz aşkınlık ve asallık kavramları önsüzgeçlerde de tanımlanmış oldu. Şimdi bu iki süzgeç arasında bu kavramlar incelenecek olursa:

Teorem 3.32 *(Burton 1993) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir önsüzgeç, $c(\mathcal{F}) > 0$ ve $\mathbb{F}$, X üzerinde bir süzgeç olsun. O halde;*

a) $\mathcal{F}$ asaldır $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_0$ aşkın süzgeçtir.

b) $\mathcal{F}$ asaldır $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}^c$ dir.

c) $\mathbb{F}$ aşkın süzgeçtir $\Leftrightarrow$ $\mathbb{F}_c$ asaldır.

d) $\mathcal{F}$ önsüzgeci asal ve $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ise $\mathcal{G}$ asaldır.

İspat a) $(\Rightarrow)$: $A \cup B \in \mathcal{F}_0$ olsun. O halde $1_{A\cup B} \in \mathcal{F}$ dir. $1_{A\cup B} = 1_A \vee 1_B \in \mathcal{F}$ olur.

$\mathcal{F}$ asal olduğundan; $1_A \in \mathcal{F}$ veya $1_B \in \mathcal{F}$ dir. Bu nedenle, $A \in \mathcal{F}_0$ veya $B \in \mathcal{F}_0$ olur. Böylece $\mathcal{F}_0$ asal ve dolayısıyla aşkın süzgeçtir.

$(\Leftarrow)$: $\mu \vee \nu \in \mathcal{F}$ olsun. O halde $(\mu \vee \nu)^0 = \mu^0 \cup \nu^0 \in \mathcal{F}_0$ dır. $\mathcal{F}_0$ aşkın süzgeç olduğundan, $\mu^0 \in \mathcal{F}_0$ veya $\nu^0 \in \mathcal{F}_0$ dır. Bu durumda, $\mu \in \mathcal{F}$ veya $\nu \in \mathcal{F}$ dir. Dolayısıyla, $\mathcal{F}$ asaldır.

b) $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}^c$ ve $\mathcal{F}$ aşkın $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}^c$ dir.

c) $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_c)_0$ ve (a)'dan;

$$\mathbb{F} = (\mathbb{F}_c)_0 \text{ aşkın süzgeçtir} \Leftrightarrow \mathbb{F}_c \text{ asaldır.}$$

d) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{G}_0$ dır. Ek olarak a)'dan $\mathcal{F}$ asaldır $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_0$ aşkındır, olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, $\mathcal{G}_0$ aşkın süzgeç ve dolayısıyla $\mathcal{G}$ asaldır. $\square$

Teorem 3.33 *(Lowen 1976; 1979) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir önsüzgeç ve*

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}) := \{\mathcal{G} \in I^X : \mathcal{G} \text{ asal önsüzgeç ve } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}\}$$

olsun. O halde $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ in en küçük elemanı vardır.

Teorem 3.34 *(Lowen 1976; 1979) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir önsüzgeç ve*

$$\mathcal{P}_m(\mathcal{F}) := \{\mathcal{G} \in P(\mathcal{F}) : \mathcal{G} \text{ en küçük eleman}\}$$

olsun. O halde;

$$\mathcal{P}_m(\mathcal{F}) = \{\mathcal{F} \vee \mathbb{F} : \ \mathbb{F} \text{ bir aşkın süzgeç, } \mathcal{F} \subseteq \mathbb{F}\}$$

olur.

Tanım 3.35 *(Vicente ve Aranguren 1988) $\mathcal{F}$ önsüzgeci, p belirtisiz noktasına yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{F}$ önsüzgecinin p belirtisiz noktasının komşuluk önsüzgecinden daha ince olması yani, $\mathcal{N}_p \subset \mathcal{F}$ olmasıdır. $\mathcal{F} \to p$ ile gösterilir.*

Önteorem 3.36 *(Young vd. 1993) $\Phi : X \to Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{F}$, X üzerinde bir önszügeç olsun. O halde $\Phi(\mathcal{F})$, Y üzerinde bir önsüzgeç tabanıdır.*

İspat Önsüzgeç tabanı koşullarını sağladığını gösterelim:

ÖST1) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç olduğundan $\overline{0} \notin \mathcal{F}$ dir.

ÖST2) $\Phi(\nu)$, $\Phi(\mu) \in \Phi(\mathcal{F})$ olsun. O halde, ν, $\mu \in \mathcal{F}$ dir. $\mathcal{F}$ önsüzgeç olduğundan, $\nu \wedge \mu = \gamma$ dersek, $\gamma \in \mathcal{F}$ dir. $\Phi(\nu \wedge \mu) = \Phi(\gamma) \subseteq \Phi(\nu) \cap \Phi(\mu)$ ve $\Phi(\gamma) \in \Phi(\mathcal{F})$ olduğundan istenen sağlanır. □

Önteorem 3.37 *(Young vd. 1993) $\Phi : X \to Y$ örten bir fonksiyon ve $\mathcal{F}$, X üzerinde bir önsüzgeç olsun. O halde $\Phi(\mathcal{F})$ de Y üzerinde bir önsüzgeçtir.*

İspat $\Phi(F)$ nin önsüzgeç aksiyomlarını sağladığını gösterelim:

ÖS3) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç olduğundan $\overline{0} \notin \mathcal{F}$ dir. Φ örten bir fonksiyon olduğundan $\Phi(\mu) = \overline{0}$ olacak şekilde $\mu \in \mathcal{F}$ bulunamayacağından, $\overline{0} \notin \Phi(\mathcal{F})$ olur.

ÖS2) $\Phi(\mu) \in \Phi(\mathcal{F})$ ve $\Phi(\mu) \subset \nu$ olsun. $\nu \in \Phi(\mathcal{F})$ olduğunu göstermeliyiz.:

$\Phi(\mu) \in \Phi(\mathcal{F}) \Rightarrow \mu \in \mathcal{F}$ dir. $\mu \subset \Phi^{-1}(\Phi(\mu)) \subset \Phi^{-1}(\nu)$ olur. Buradan; $\Phi^{-1}(\Phi(\mu))$ ve $\Phi^{-1}(\nu) \in \mathcal{F}$ dir. $\Phi(\mu) \subset \Phi(\Phi^{-1}(\Phi(\mu))) \subset \Phi(\Phi^{-1}(\nu)) \overset{örtenlik}{=} \nu$ olur. Dolayısıyla, $\Phi(\mu) \subset \Phi(\Phi^{-1}(\nu)) = \nu \in \Phi(\mathcal{F})$ dir.

ÖS1) $\Phi(\mu), \Phi(\mu) \in \Phi(\mathcal{F})$ olsun. $\Phi(\mu) \cap \Phi(\nu) \in \Phi(\mathcal{F})$ olduğunu göstermeliyiz:

$\Phi(\mu), \Phi(\nu) \in \Phi(\mathcal{F}) \Rightarrow \mu, \nu \in \mathcal{F}$ dir. $\mathcal{F}$ önsüzgeç olduğundan, $\mu \wedge \nu \in \mathcal{F}$ dir. $\underbrace{\Phi(\mu \wedge \nu)}_{\in \Phi(\mathcal{F})} \subseteq \Phi(\mu) \cap \Phi(\nu)$ **ÖS2)**'den; $\Phi(\mu) \wedge \Phi(\nu) \in \Phi(\mathcal{F})$ olur. $\square$

Önteorem 3.38 *(Young vd. 1993; Vicente ve Aranguren 1988) $\Phi : X \to Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{F}$, X üzerinde bir aşkın önsüzgeç olsun. O halde, $\Phi(\mathcal{F})$ de Y üzerinde bir aşkın önszügeçtir.*

3.1.2. Genelleştirilmiş süzgeçler

Önsüzgeçler belirtisiz kümelerle kurulan bir süzgeç yapısı olmasına rağmen şimdi vereceğimiz genelleştirilmiş süzgeç kavramı ise klasik süzgeçlere bir derecelendirme yaparak bu süzgeç kavramını belirtisizleştirir.

Tanım 3.39 *(Burton vd. 1997) $f : 2^X \to I$ sıfır olmayan fonksiyonu,*

GS1) *$f(\varnothing) = 0$ dır.*
GS2) *$\forall A, B \subseteq X,\ f(A) \wedge f(B) \leq f(A \cap B)$ dir.*
GS3) *$\forall A, B \subseteq X,\ A \subseteq B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$ dir.*

koşullarını sağlıyorsa, bu fonksiyona X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş süzgeç denir.

$f : 2^X \to I$ ve $A \subseteq X$ için

$$< f > (A) := \sup_{B \subseteq A} f(B)$$

tanımlanır.

Tanım 3.40 *(Burton vd. 1997) $f : 2^X \to I$ sıfır olmayan fonksiyonu,*

GST1) *$f(\varnothing) = 0$ dır.*
GST2) *$\forall A, B \subseteq X,\ f(A) \wedge f(B) \leq < f > (A \cap B)$ dir.*

koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonuna X üzerinde bir genelleştirilmiş süzgeç tabanı denir.

Doğal olarak her genelleştirilmiş süzgeç, bir genelleştirilmiş süzgeç tabanıdır.

Teorem 3.41 *(Muraleetharan 1997) X bir küme ve f, X üzerinde bir g-süzgeç tabanı ise $< f >$ bir g-süzgeçtir.*

İspat **GS1)** $< f > (\varnothing) = \sup\limits_{A \subseteq \varnothing} f(A) = f(\varnothing) = 0.$

$< f > (X) = \sup\limits_{A \subseteq X} f(A) > 0.$

GS2) $A, B \subseteq X$ olsun.

$< f > (A) \wedge < f > (B) = 0$ ise $< f > (A) \wedge < f > (B) \leq < f > (A \cap B)$ olur.

$\alpha << f > (A) \wedge < f > (B)$ olsun.

O halde,

$$\begin{aligned} \alpha < \sup_{U \subseteq A} f(U) \wedge \sup_{V \subseteq B} f(V) &\Rightarrow \exists U \subseteq A,\ \exists V \subseteq B,\ \alpha < f(U) \wedge f(V) \leq < f > (U \cap V) \\ &\Rightarrow \exists W \subseteq U \cap V \subseteq A \cap B,\ \alpha < f(W) \\ &\Rightarrow \alpha << f > (A \cap B) \end{aligned}$$

Böylece, $< f > (A) \wedge < f > (B) \leq < f > (A \cap B)$ dir.

GS3) $A \subseteq B$ ise;

$$< f > (A) = \sup_{U \subseteq A} f(U) \leq \sup_{U \subseteq B} f(U) =< f > (B)$$

olur. □

Tanım 3.42 *(Burton vd. 1997) f, X üzerinde bir g-süzgeç tabanı ise f nin karakteristiği;*

$$c(f) = \sup_{A \subseteq X} f(A)$$

olarak tanımlanır. Tanımdan görülüyor ki; $c(f) > 0$ dır.

Önteorem 3.43 *(Burton vd. 1997) X bir küme ve f, X üzerinde bir g-süzgeç tabanı ise;*

$$c(f) = c(< f >)$$

olur.

İspat
$$\begin{aligned} c(< f >) &= \sup_{A \subseteq X} < f > (A) \\ &= \sup_{A \subseteq X} \sup_{B \subseteq X} f(B) \\ &= \sup_{B \subseteq X} f(B) \\ &= c(f) \end{aligned}$$

dir. □

Önteorem 3.44 *(Burton vd. 1997) f, X üzerinde bir g-süzgeç ve $A, B \subseteq X$ olsun. O halde;*

$$\textbf{1)}\ c(f) = f(X)$$
$$\textbf{2)}\ f(A \cap B) = f(A) \wedge f(B)$$

özellikleri sağlanır.

Tanım 3.45 *(Burton vd. 1997) f, X üzerinde bir g-süzgeç (tabanı) ve $c(f) = c$ ise;*

$0 \leq \alpha < c$ *için;* $f^\alpha = \{F \subseteq X : f(F) > \alpha\}$ *(üst) α-kesme süzgeci (tabanı)*

$0 < \alpha \leq c$ *için;* $f_\alpha = \{F \subseteq X : f(F) \geq \alpha\}$ *(alt) α-kesme süzgeci (tabanı)*

tanımlanır.

Teorem 3.46 *(Burton vd. 1997) f, X üzerinde bir g-süzgeç(tabanı), $c(f) = c$ olsun. O halde;*

(a) $0 \leq \alpha < c$ ise f^α, X üzerinde bir süzgeçtir (tabanıdır).

(b) $0 < \alpha \leq c$ ise f_α, X üzerinde bir süzgeçir (tabanıdır).

İspat (a) f, X üzerinde bir g-süzgeç olsun.

$f(X) = c > \alpha \Longrightarrow X \in f^\alpha$ olur. Dolayısıyla $f^\alpha \neq \varnothing$ dir.

$F \in f^\alpha \Rightarrow f(F) > \alpha \geq 0$ ve böylece $F \neq \varnothing$ dir.

$A, B \in f^\alpha \Rightarrow f(A) \wedge f(B) = f(A \cap B) > \alpha$ ve böylece $A \cap B \in f^\alpha$ dır.

Sonuç olarak; $A \in f^\alpha$ ve $A \subseteq B \Rightarrow f(B) \geq f(A) > \alpha$ ve buradan; $B \in f^\alpha$ olur.

(b) seçeneği (a)'ya benzer şekilde yapılır. □

Önteorem 3.47 *(Burton vd. 1997) f bir g-süzgeç (tabanı), $c(f) = c$ ve $0 \leq \alpha \leq \beta < c$ ise*

$$f_c \subseteq f^\beta \subseteq f^\alpha \subseteq f^0$$

dir.

Teorem 3.48 *(Burton vd. 1997) X bir küme olsun. $F(X)$ ile X üzerindeki bütün süzgeçlerin ailesini; $G(X)$ ile de X üzerindeki bütün g-süzgeçlerin ailesini gösterelim. Ψ:$F(X) \rightarrow G(X)$, $\Psi(\mathbb{F})$ =1_F, fonksiyonu olsun. Ψ fonksiyonu birebirdir fakat örten değildir.*

İspat Ψ fonksiyonunun birebir olduğunu görmek için karakteristiği 1 den farklı olan bir g-süzgeç bulunmalıdır. Aşağıdaki örnekleri inceleyelim:

Örnek 1: $X = \{1, 2, 3\}$ olsun. f fonksiyonu; $1 \notin f \Rightarrow f(F) = 0$ şeklinde tanımlansın.
$f(\{1\}) = f(\{1, 3\}) = \frac{1}{4}, f(\{1, 2\}) = \frac{1}{2}, f(\{1, 2, 3\}) = 1.$

Örnek 2: $U_n = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}$ olmak üzere;
$g(F) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{n} & , F = U_n \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}$ olarak tanımlansın ve $f =< g >$ olsun.

Örnek 3: $g_{\alpha,a}(F) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & , F = \{a\} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}$ ve $f_{\alpha,a} =< g_{\alpha,a} >$ olsun.

Bu g-süzgeç; $\forall A, B \subseteq X$ için $f_{\alpha,a}(A \cup B) = f_{\alpha,a}(A) \vee f_{\alpha,a}(B)$ özelliğine sahiptir.
Bu örneklerden görüleceği gibi, verilen fonksiyonlar birebirdir fakat örten değildir. □

Tanım 3.49 *(Burton vd. 1999) f, X üzerinde bir g-süzgeç olsun.*

$$\forall A, B \subseteq X \textit{ için }, f(A \cup B) = f(A) \vee f(B)$$

oluyorsa, f g-süzgecine asal g-süzgeçtir denir.

Önteorem 3.50 *(Burton vd. 1999) $\mathbb{F}$, X üzerinde bir süzgeç ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. O halde;*

$$\mathbb{F} \textit{ bir aşkın süzgeçtir} \Leftrightarrow \alpha 1_{\mathbb{F}} \textit{ asal g-süzgeçtir.}$$

İspat $(\Rightarrow)$: $\mathbb{F}$ bir aşkın süzgeç olsun. O halde, $A \cup B \in \mathbb{F}$ ise $\alpha 1_{\mathbb{F}}(A \cup B) = \alpha$ dır. Dahası, $\mathbb{F}$ bir aşkın süzgeç olduğundan, $A \in \mathbb{F}$ veya $B \in \mathbb{F}$ dir. Böylece,

$$\alpha 1_{\mathbb{F}}(A) \vee \alpha 1_{\mathbb{F}}(B) = \alpha = \alpha 1_{\mathbb{F}}(A \cup B)$$

$A \cup B \notin \mathbb{F}$ ise $\alpha 1_{\mathbb{F}}(A \cup B) = 0$ dır. $\mathbb{F}$ bir süzgeç olduğundan, $A \notin \mathbb{F}$ ve $B \notin \mathbb{F}$ ve böylece,

$$\alpha 1_{\mathbb{F}}(A) \vee \alpha 1_{\mathbb{F}}(B) = 0 = \alpha 1_{\mathbb{F}}(A \cup B)$$

olur.

$(\Leftarrow)$: $\alpha 1_{\mathbb{F}}$ asal bir g-süzgeç ve $A \cup B \in \mathbb{F}$ olsun. O halde,

$$\alpha 1_{\mathbb{F}}(A \cup B) = \alpha = \alpha 1_{\mathbb{F}}(A) \vee \alpha 1_{\mathbb{F}}(B)$$

dir.

Bu nedenle,

$$\alpha 1_{\mathbb{F}}(A) = \alpha \text{ veya } \alpha 1_{\mathbb{F}}(B) = \alpha$$

ve böylece; $A \in \mathbb{F}$ ya da $B \in \mathbb{F}$ dir. Dolayısıyla, $\mathbb{F}$ bir aşkın süzgeçtir. □

Teorem 3.51 *(Burton vd. 1999) f bir g-süzgeç ve $c(f) = c$ olsun. O halde;*

$$f \text{ asaldır } \Leftrightarrow f_c \text{ aşkın süzgeçtir.}$$

İspat $(\Rightarrow)$:

$$\begin{aligned} A \cup B \in f_c &\Leftrightarrow f(A \cup B) = f(A) \vee f(B) = c \\ &\Leftrightarrow f(A) = c \text{ veya } f(B) = c \\ &\Leftrightarrow A \in f_c \text{ veya } B \in f_c \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$: $\alpha < c$ ise,

$$\begin{aligned} \alpha < f(A \cup B) &\Rightarrow A \cup B \in f^{\alpha} = f_c \\ &\Rightarrow f(A \cup B) = c \text{ ve } A \in f_c \text{ veya } B \in f_c \\ &\Rightarrow f(A) \vee f(B) = c = f(A \cup B) \end{aligned}$$

olur. □

Sonuç 3.52 *(Burton vd. 1999) f bir asal g-süzgeç ve $c(f) = c$ ise $\forall \alpha \in [0, c)$ için, $f^{\alpha} = f^0 = f_c$ dir.*

İspat $f_c \subset f^0$ve f nin aşkın süzgeç olduğunu biliyoruz. Buradan, $\alpha \in [0, c)$ için $f_c = f^{\alpha} = f^0$ olur. □

$\mathbb{F}$ bir süzgeç olmak üzere;

$$\mathbb{P}(\mathbb{F}) \overset{\text{tanım}}{=} \{\mathbb{K} : \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K},\ \mathbb{K} \text{ aşkın süzgeç}\}$$

tanımlayalım.

Önteorem 3.53 *(Burton vd. 1999) f bir g-süzgeç, $\alpha \geq c = c(f)$ ve $\mathbb{F} \in \mathbb{P}(f^0)$ ise $\alpha 1_{\mathbb{F}}$ bir asal g-süzgeç ve $f \leq \alpha 1_{\mathbb{F}}$ tir.*

İspat Ön teorem 3.50'den, $\alpha 1_{\mathbb{F}}$ asaldır ve $A \subseteq X$ ve $f(A) > 0$ ise $A \in f^0 \subseteq \mathbb{F}$ dir. Buradan, $\alpha 1_{\mathbb{F}}(A) = \alpha \geq c = f(X) \geq f(A)$ olur. □

Teorem 3.54 *(Burton vd. 1999) f bir asal g-süzgeç, $c(f) = c$ ve $\mathbb{F} = f_c$ ise $f = c1_{\mathbb{F}}$ dir.*

İspat $A \subseteq X$ olsun. $f(A) > 0$ ise $A \in f^0 = f_c = \mathbb{F}$ ve böylece $f(A) = c = c1_{\mathbb{F}}(A)$ dır.
$f(A) = 0$ ise $A \notin \mathbb{F}$ ve böylece $f(A) = 0 = c1_{\mathbb{F}}(A)$ dır.
olacağından ispat biter. □

Teorem 3.55 *(Burton vd. 1999) f bir g-süzgeç, $c(f) = c$ olsun. O halde;*

$$\mathcal{P}(f) = \{\alpha 1_{\mathbb{F}} : \mathbb{F} \in \mathbb{P}(f^0),\ \alpha \geq c\}$$

dir.

İspat $g \in \mathcal{P}(f)$, $c(g) = \alpha$ ve $\mathbb{F} = g$ olsun. O halde, Teorem 3.54'ten $\mathbb{F}$ aşkın süzgeç olmak üzere, g=$\alpha 1_{\mathbb{F}}$ dir.

Dahası, $f \leq g$ olduğundan, $c(f) \leq \alpha = c(g)$ ve $\mathbb{F} \supseteq f^0$ dır.

Tersine, $g = \alpha 1_F$ ise Önteorem 3.53'den $g \in P(f)$ olur. (Burton vd. 1999) □

f g-süzgeci için;

$$\mathcal{P}_m(f) \overset{\text{tanım}}{=} \{g : g \text{ en küçük asal süzgeç ve } f \leq g\}$$

tanımlayalım.

Sonuç 3.56 *(Burton vd. 1999) f bir g-süzgeç ve $c(f) = c$ olsun. O halde;*

$$\mathcal{P}_m(f) = \{c1_{\mathbb{F}} : \mathbb{F} \in P(f^0)\}$$

dir.

İspat $g \in P_m(f)$ olsun. O halde bir $\alpha \geq c$ ve bir $F \in P(f^0)$ için $g = \alpha 1_{\mathbb{F}}$ olur.

$\alpha > c$ ise, $c < \beta < \alpha$ olacak şekilde bir β seçebiliriz ki bu durumda, $h = \beta 1_{\mathbb{F}} \in P(f)$, $h \leq g$ ve $h \neq g$ olacağından bu g nin minimal eleman olmasıyla çelişir. □

Tanım 3.57 *(Burton vd. 1999) $h : X \to Y$ bir fonksiyon ve $f \in I^{2^x}$, X üzerinde bir g-süzgeç tabanı olsun. f g-süzgecinin direkt görüntüsü;*

$$h(f) : 2^Y \to I,\ B \to h(f)(B)$$
$$= \begin{cases} \sup\limits_{h(A)=B} f(A) & , h(A) = B \text{ olacak şekilde bir } A \subseteq X \text{ varsa} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $h(f)$ ile gösterilir.

Teorem 3.58 *(Burton vd. 1999) $h : X \to Y$ bir fonksiyon ve f, X üzerinde bir g-süzgeç tabanı olsun. O halde, $h(f)$, Y üzerinde bir g-süzgeç tabanıdır.*

İspat GST1) f sıfır olmayan bir fonksiyon olduğundan $f(A) > 0$ olacak şekilde bir $A \subseteq X$ vardır ve dolayısıyla $h(f)(h(A)) > 0$ olur. Yani, $h(f)$ sıfır olmayan bir fonksiyondur.

Ayrıca, $h(f)(\varnothing) = \sup\limits_{h(A)=\varnothing} f(A) = f(\varnothing) = 0$ dır.

GST2) $B_1, B_2 \subseteq Y$ olsun. O halde,

$\alpha < h(f)(B_1) \wedge h(f)(B_2)$

$\Rightarrow \quad \exists A_1, A_2 \subseteq X : h(A_1) = B_1,\ h(A_2) = B_2$ ve $\alpha < f(A_1) \wedge f(A_2)$

$\Rightarrow \quad \exists A_3 \subseteq A_1 \cap A_2 : \alpha < f(A_3)$

$\Rightarrow \quad \exists B_3 = h(A_3) \subseteq B_1 \cap B_2 : \alpha < h(f)(B_3)$

$\Rightarrow \quad < h(f) > (B_1 \cap B_2) = \sup\limits_{B_3 \subseteq B_1 \cap B_2} h(f)(B_3) > \alpha$

Böylece, $h(f)(B_1) \wedge h(f)(B_2) \leq < h(f) > (B_1 \cap B_2)$ dir. □

Teorem 3.59 *(Burton vd. 1999) $h : X \to Y$ bir fonksiyon, f, X üzerinde bir g-süzgeç ve $< h(f) >$, $h(f)$ g-süzgeç tabanı tarafindan üretilen bir g-süzgeç olsun. O halde;*

1) f bir g-süzgeç ise, her $B \subseteq Y$ için $< h(f) > (B) = f(h^{-1}[B])$ dir.

2) f bir asal g-süzgeç ise $< h(f) >$ de asal g-süzgeçtir.

3) $< h(f) > = < h(< f >) >$ dir.

İspat 1) $< h(f) > (B) = \sup\limits_{B' \subseteq B} h(f)(B') = \sup\limits_{B' \subseteq B} \sup\limits_{h(A)=B'} f(A) = \sup\limits_{h(A) \subseteq B} f(A)$ dır.

$h(h^{-1}[B]) \subseteq B$ olduğundan, $f(h^{-1}[B]) \leq < h(f) > (B)$ dir. Tersine,

$h(A) \subseteq B$ ise $A \subseteq h^{-1}[h(A)] \subseteq h^{-1}[B]$ ve f bir g-süzgeç olduğundan, $f(A) \leq f(h^{-1}[B])$ dir.

2) $B_1, B_2 \subseteq Y$ olsun. O halde;

$$\begin{aligned} < h(f) > (B_1 \cup B_2) &= f(h^{-1}[B_1 \cup B_2]) \\ &= f(h^{-1}[B_1]) \vee f(h^{-1}[B_2]) \\ &= < h(f) > (B_1) \vee < h(f) > (B_2) \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $< h(f) >$ asaldır.

$$\begin{aligned} 3) \quad < h(< f >) > (B) &= \sup_{h(A) \subseteq B} < f > (A) \\ &= \sup_{h(A) \subseteq B} \sup_{h(A') \subseteq A} f(A) = \sup_{h(A') \subseteq B} f(A) \\ &= < h(f) > (B) \end{aligned}$$

dir. □

Tanım 3.60 *(Burton vd. 1999) $h : X \to Y$ bir fonksiyon ve $g \in I^{2^Y}$, Y üzerinde bir g-süzgeç tabanı olsun. g nin öngörüntüsü;*

$$h^{-1}(g) : 2^X \to I,\ A \to h^{-1}(g)(A)$$
$$= \begin{cases} \sup\limits_{h^{-1}[B]=A} g(B) & , h^{-1}[B] = A, B \subseteq Y \\ 0 & , \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $h^{-1}(g)$ ile gösterilir.

Teorem 3.61 *(Burton vd. 1999) $h : X \to Y$ bir fonksiyon ve g, Y üzerinde bir g-süzgeç tabanı ise, $h^{-1}(g)$ nin X üzerinde bir g-süzgeç tabanı olması için gerek ve yeter koşul; $h^{-1}[B] = \varnothing$ olan her $B \subseteq Y$ için $g(B) = 0$ dır.*

İspat GST1) $(\Rightarrow)$: $h^{-1}(g)$, X üzerinde bir g-süzgeç tabanı olduğundan; $0 = h^{-1}(g)(\varnothing) = \sup\limits_{h^{-1}[B]=\varnothing} g(B)$ dir ve bu nedenle, $h^{-1}[B] = \varnothing$ olan her $B \subseteq Y$ için $g(B) = 0$ dır.

$(\Leftarrow)$: g sıfır olmayan fonksiyon olduğundan, $g(B) > 0$ olacak şekilde bir $B \subseteq Y$ vardır. Bu nedenle, $h^{-1}(g)[h^{-1}[B]] = \sup\limits_{h^{-1}[B']=h^{-1}[B]} g(B') \geq g(B) > 0$ dır.

Yani $h^{-1}(g)$ sıfır fonksiyon değildir.

GST2) $A_1, A_2 \subseteq X$ olsun. O halde,

$\alpha < h^{-1}(g)(A_1) \wedge h^{-1}(g)(A_2)$

$\Rightarrow\ \exists B_1, B_2 \subseteq Y : h^{-1}[B_1] = A_1,\ h^{-1}[B_2] = A_2$ ve $\alpha < g(B_1) \wedge g(B_2)$

$\Rightarrow\ \exists B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 : \alpha < g(B_3)$

$\Rightarrow\ \exists A_3 = h^{-1}[B_3] \subseteq A_1 \cap A_2 : \alpha < h^{-1}(g)(A_3)$

$\Rightarrow\ < h^{-1}(g) > (A_1 \cap A_2) = \sup\limits_{A_3 \subseteq A_1 \cap A_2} h^{-1}(g)(A_3) > \alpha$

Böylece, $h^{-1}(g)(A_1) \wedge h^{-1}(g)(A_2) \leq < h^{-1}(g) > (A_1 \cap A_2)$ olur. □

Teorem 3.62 *(Burton vd. 1999) $h : X \to Y$ bir fonksiyon ve g, Y üzerinde bir g-süzgeç tabanı ise;*

(i) h örten ise $h^{-1}(g)$ bir g-süzgeç tabanıdır.

(ii) g bir g-süzgeç, $h^{-1}[B] = \varnothing$ olan her $B \subseteq Y$ için $g(B) = 0$ ve h birebir ise $h^{-1}(g)$ bir g-süzgeçtir.

(iii) g bir asal g-süzgeç, $h^{-1}[B] = \varnothing$ olan her $B \subseteq Y$ için $g(B) = 0$ ve h birebir ise $h^{-1}(g)$ bir asal g-süzgeçtir.

İspat (i) h örten bir fonksiyon olduğundan, $h^{-1}[B] = \varnothing$ olması için yeterli ve gerekli koşul $g(B) = 0$ olmasıdır. Dolayısıyla, $h^{-1}[B] = \varnothing$ olan her $B \subseteq Y$ için $g(B) = 0$ olur.

(ii) Her $A \subseteq X$ çin;

$$\begin{aligned} < h^{-1}(g) > (A) &= \sup_{A' \subseteq A} h^{-1}(g)(A') \\ &= \sup_{A' \subseteq A} \sup_{h^{-1}[B]=A'} g(B) \\ &= \sup_{h^{-1}[B] \subseteq A} g(B) \leq h^{-1}(g)(A) \end{aligned}$$

olduğunu kanıtlamalıyız. $\alpha << h^{-1}(g) > (A)$ ise $h^{-1}[B] \subseteq A$ ve $\alpha < g(B)$ olacak şekilde $B \subseteq Y$ vardır. $B' = h(A) \cup B$ olduğunu düşünelim. h birebir olduğundan, $h^{-1}[B'] = h^{-1}[h^{-1}(A)] \cup h^{-1}[B] = A$ olur. Diğer taraftan g bir g-süzgeç $g(B') \geq g(B) > \alpha$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $h^{-1}(g)(A) > \alpha$ dır.

(iii) $A_1, A_2 \subseteq X$ olsun. $\alpha < h^{-1}(g)(A_1 \cup A_2)$ ise $h^{-1}[B] \subseteq A_1 \cup A_2$ olacak şekilde bir $B \subseteq Y$ vardır ve $\alpha < g(B)$ dir.

$i = 1, 2$ için $B_i = (h(A_i) \cap B) \cup (B - h(X))$ olduğunu düşünelim. h birebir olduğundan;

$$\begin{aligned} h^{-1}[B_i] &= h^{-1}[h(A_i) \cap B] \\ &= h^{-1}[h(A_i)] \cap h^{-1}[B] \\ &= A_i \cap h^{-1}[B] \subseteq A_i \end{aligned}$$

sağlanır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} B_1 \cup B_2 &= (h(A_1 \cup A_2) \cap B) \cup (B - h(X)) \\ &= (h(h^{-1}[B]) \cup (B - h(X)) = B \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. g bir asal g-süzgeç olduğundan, $g(B_1) > \alpha$ veya $g(B_2) > \alpha$ dır. Bu nedenle, $h^{-1}(g)(A_1) > \alpha$ veya $h^{-1}(g)(A_2) > \alpha$ ve dolayısıyla $h^{-1}(g)$ asaldır. □

Belirtisiz topolojik uzaylarda önsüzgeç ve genelleştirilmiş süzgeç kavramları verildi. Görüldü ki, önsüzgeçler belirtisiz kümelerle oluşturulan süzgeçlerken, genelleştirilmiş süzgeçler ise klasik mantıktaki süzgeç kavramına bir açıklık derecelendirmesi yaparak onu belirtisizleştirir.

Belirtisiz topolojik uzaylarda bu iki süzgeç tanımlandıktan ve özellikleri verildikten sonra şimdi $I^X \to I$ dönüşümüyle tanımlanan I-süzgeç tanımı verilecek ve özelliklerinden söz edilecektir.

3.1.3. I-Süzgeçler

Konunun bütünlüğü ve anlaşılabilirliği için öncelikle I-belirtisiz topolojik uzay kavramından bahsedelim.

Tanım 3.63 *$\tau : I^X \to I$ dönüşümü,*

IBT1) $\tau(\bar{0}) = \tau(\bar{1}) = 1.$
IBT2) $\forall \mu_1, \mu_2 \in I^X$ *için* $\tau(\mu_1) \wedge \tau(\mu_2) \leq \tau(\mu_1 \wedge \mu_2)$ *dir.*
IBT3) *Herhangi bir* $\{\mu_i : i \in J\} \subseteq I^X$ *için* $\tau(\bigvee_{i \in J} \mu_i) \geq \bigwedge_{i \in J} \tau(\mu_i)$ *dir.*

koşullarını sağlıyorsa, τ ya X üzerinde bir I-belirtisiz topoloji; (X, τ) ikilisine de I-belirtisiz topolojik uzay denir.

I-süzgeç kavramını vermeden önce bu konuda bazı tanımlara ihtiyacımız olacaktır. $\mathcal{C} : I^X \to I$ olmak üzere, $< \mathcal{C} >: I^X \to I$ dönüşümü,

$$< \mathcal{C} > (\mu) = \sup\{\mathcal{C}(\lambda) : \lambda \in I^X,\ \lambda \leq \mu\}$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi bir $\alpha \in I_1 = [0, 1)$ için $\mathcal{C}^\alpha$ belirtisiz kümeler ailesi,

$$\mathcal{C}^\alpha = \{\mu \in I^X : \mathcal{C}(\mu) > \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır.

X kümesi üzerindeki tüm belirtisiz noktaların kümesi $FP(X)$ ile ve $FP[X]$ ile de $FP(X)$ in bütün alt kümeleri gösterilecektir.

Belirtisiz topolojik uzaylarda söz ettiğimiz, Pao-Ming ve Ying-Ming'in tanımladığı "belirtisiz noktanın Q-komşuluğu" kavramı yerine bu bölümde Sostak'ın yapmış olduğu "belirtisiz noktanın belirtisiz Q-komşuluğu" verilecektir.

Tanım 3.64 *(Sostak 1990) (X, τ) bir I-belirtisiz topolojik uzay ve $p \in FP(X)$ olsun. Eğer,*

$$\forall \alpha \in I_1 \text{ için, } \mathcal{L}_p^\alpha = \{\mu \in I^X : (\exists \lambda \in \tau^\alpha)\ pq\lambda \text{ ve } \lambda \leq \mu\}$$

eşitliği sağlanıyorsa, $\mathcal{L}_p : I^X \to I$ dönüşümüne p nin τ belirtisiz topolojisine göre Q-komşuluklar sistemi denir.

Önerme 3.65 *(Sostak 1990) (X, τ) bir I-belirtisiz topolojik uzay ve $p \in FP(X)$ olsun. $\mathcal{L}_p$ dönüşümünün τ belirtisiz topolojisine göre p noktasının Q-komşuluklar sistemi olması için gerekli ve yeterli koşul,*

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \sup\{\tau(\lambda) : \lambda \in I^X,\ pq\lambda \text{ ve } \lambda \le \mu\}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Önerme 3.66 *(Sostak 1990) (X, τ) bir I-belirtisiz topolojik uzay ve $p \in FP(X)$ olsun. Eğer $\mathcal{L}_p : I^X \to I$ dönüşümü τ topolojisine göre p noktasının Q-komşuluklar sistemi ise $\mathcal{L}_p$ dönüşümü,*

(Q1) $\forall \mu \in I^X$ *için,* $\mathcal{L}_p(\mu) > 0 \Rightarrow pq\mu$ *dür.*

(Q2) $\sup\{\mathcal{L}_p(\mu) : \mu \in I^X\} = 1.$

(Q3) $\forall \mu_1, \mu_2 \in I^X$ *için* $\mathcal{L}_p(\mu_1 \wedge \mu_2) \ge \mathcal{L}_p(\mu_1) \wedge \mathcal{L}_p(\mu_2).$

(Q4) $\forall \mu_1, \mu_2 \in I^X$ *için* $\mu_1 \le \mu_2 \Rightarrow \mathcal{L}_p(\mu_1) \le \mathcal{L}_p(\mu_2).$

(Q5) $\forall \mu \in I^X$ *için,* $\mathcal{L}_p(\mu) = \sup\{\mathcal{L}_p(\lambda) \wedge (\bigwedge_{eq\lambda} \mathcal{L}_e(\lambda)) : \lambda \in I^X, \lambda \le \mu\}.$

koşullarını sağlar.

Önerme 3.67 *(Sostak 1990) Her bir $\mathcal{L}_p : I^X \to I$ ve $p \in FP(X)$ için Önerme 3.66'da verilen (Q1)-(Q5) koşulları sağlansın. O halde,*

$$\tau(\mu) = \inf\{\mathcal{L}_p(\mu) : pq\mu\}$$

şeklinde tanımlanan $\tau : I^X \to I$ dönüşümü X üzerinde bir I-belirtisiz topoloji olur. Ayrıca, $p \in FP(X)$ için her $\mathcal{L}_p$ dönüşümü, p nin τ belirtisiz topolojisine göre, belirtisiz Q-komşuluklar sistemidir.

Tanım 3.68 *(Eklund and Gahler 1988) $F : I^X \to I$ fonksiyonu,*

IS1) $F(\bar{0}) = 0$, $F(\bar{1}) = 1.$

IS2) $\forall \mu_1, \mu_2 \in I^X$ *için* $\mu_1 \le \mu_2 \Rightarrow F(\mu_1) \le F(\mu_2)$ *dir.*

IS3) $\forall \mu_1, \mu_2 \in I^X$ *için* $F(\mu_1) \wedge F(\mu_2) \le F(\mu_1 \wedge \mu_2)$ *dir.*

koşullarını sağlıyorsa, F ye X üzerinde bir I-süzgeçtir denir.

X üzerindeki tüm I-süzgeçlerin ailesi, $IF(X)$ ile gösterilir.

Tanım 3.69 *(Eklund and Gahler 1988) $B : I^X \to I$ dönüşümü,*

> ***IST1)*** $B(\bar{0}) = 0,\ \sup\{B(\mu) : \mu \in I^X\} = 1.$
>
> ***IST2)*** $\forall \mu_1, \mu_2 \in I^X$ *için* $B(\mu_1) \wedge B(\mu_2) \leq < B > (\mu_1 \wedge \mu_2)$ *dir.*

koşullarını sağlıyorsa, B ye X üzerinde bir I-süzgeç tabanıdır denir.

B X üzerinde bir I-süzgeç tabanı ise $< B >$ X üzerinde bir I-süzgeçtir.

Önerme 3.70 *(Güloğlu ve Çoker 2005) (X, τ) bir I-belirtisiz topolojik uzay olsun. Her $p \in FP(X)$ için $\mathcal{L}_p : I^X \to I$ belirtisiz Q-komşuluklar sistemi, X üzerinde bir I-süzgeçtir. Ayrıca,*

$$\mathcal{B}_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) \wedge (\bigwedge_{eq\mu} \mathcal{L}_e(\mu))$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{B}_p : I^X \to I$ dönüşümü X üzerinde bir I-süzgeç tabanıdır.

İspat Öncelikle $\mathcal{L}_p$ dönüşümünün X üzerinde bir I-süzgeç oldugu gösterilmelidir.

(**IS1**) Önerme 3.65'ten ve (Q2) özelliğinden istenen elde edilir.

(IS2) ve (**IS3)** ise (Q4) ve (Q5) özelliğinden ortaya çıkar.

Simdi $\mathcal{B}_p : I^X \to I$ dönüşümünün X üzerinde bir I-süzgeç tabanı olduğunu ispatlayalım:

$\mathcal{B}_p(\bar{0}) = 0$ olduğu açıktır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\sup\{\mathcal{B}_p(\mu) : \mu \in I^X\} &= \sup\{\mathcal{L}_p(\mu) \wedge (\bigwedge_{eq\mu} \mathcal{L}_e(\mu)) : \mu \in I^X\} \\
&= \sup\{\mathcal{L}_p(\mu) \wedge (\bigwedge_{eq\mu} \mathcal{L}_e(\mu)) : \mu \in I^X,\ \mu \leq \bar{1}\} = \mathcal{L}_p(\bar{1}) = 1.
\end{aligned}$$

$\mu_1, \mu_2 \in I^X$ ise,

$$\begin{aligned}
< \mathcal{B}_p > (\mu_1 \wedge \mu_2) = \mathcal{L}_p(\mu_1 \wedge \mu_2) &\geq \mathcal{L}_p(\mu_1) \wedge \mathcal{L}_p(\mu_2) \\
&\geq (\mathcal{L}_p(\mu_1) \wedge (\bigwedge_{eq\mu_1} \mathcal{L}_e(\mu_1)) \wedge (\mathcal{L}_p(\mu_2) \wedge (\bigwedge_{eq\mu_2} \mathcal{L}_e(\mu_2)) \\
&= \mathcal{B}_p(\bar{\mu_1}) \wedge \mathcal{B}_p(\mu_2)
\end{aligned}$$

olur. □

Örnek 3.71 *(Güloglu ve Çoker 2005) Her $p \in FP(X)$ için,*

$$\dot{p}(\mu) = \begin{cases} 1 & , pq\mu \\ 0 & , \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\dot{p} : I^X \to I$ fonksiyonu X üzerinde bir I-süzgeçtir.

Tanım 3.72 *(Ramadan and El-Latif 2008) F bir I-süzgeç ve $F(\bar{1}) = 1$ ise F süzgecine tam belirtisiz süzgeçtir denir.*

Teorem 3.73 *(Ramadan and El-Satter 2003) F ve G, X üzerinde tam belirtisiz süzgeç ise aşağıdaki koşul sağlanır:*

$\lambda_1, \lambda_2 \in I^X$ için $F(\lambda_1) > 0$ ve $G(\lambda_2) > 0$ olsun. $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \neq \bar{0}$ olduğunu biliyoruz. $F \vee G : I^X \to I$ fonksiyonu,

$$F \vee G(\lambda) = \bigvee\{F(\lambda_1) \wedge G(\lambda_2) : \lambda = \lambda_1 \wedge \lambda_2\}$$

olarak tanımlansın. O halde $F \vee G$, F ve G den daha ince olan en kaba tam belirtisiz süzgeçtir.

Teorem 3.74 *(Eklund and Gahler 1988) $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve F, X üzerinde bir I-süzgeç olsun. $f(F) : I^Y \to I$ dönüşümü,*

$$f(F)(\mu) = F(f^{-1}(\mu))$$

olarak tanımlansın. O halde, $f(F)$ de Y üzerinde bir I-süzgeçtir.

İspat **IS1)** $f(F)(\bar{0}_Y) = F(f^{-1}(\bar{0}_Y)) = F(\bar{0}_X) = 0.$

$f(F)(\bar{1}_Y) = F(f^{-1}(\bar{1}_Y)) = F(\bar{1}_X) = 1.$

IS2) $\mu_1, \mu_2 \in I^Y$ ve $\mu_1 \leq \mu_2$ olsun. Bu durumda,

$$f^{-1}(\mu_1) \leq f^{-1}(\mu_2) \text{ ve } F(f^{-1}(\mu_1)) \leq F(f^{-1}(\mu_2))$$

olur. Dolayısıyla,

$$f(F)(\mu_1) \leq f(F)(\mu_2)$$

elde edilir.

IS3) $\mu_1, \mu_2 \in I^Y$ olsun.

$$\begin{aligned} f(F)(\mu_1 \wedge \mu_2) &= F(f^{-1}(\mu_1 \wedge \mu_2)) \\ &= F(f^{-1}(\mu_1)) \wedge F(f^{-1}(\mu_2)) \\ &\geq F(f^{-1}(\mu_1)) \wedge F(f^{-1}(\mu_2)) \\ &= f(F(\mu_1)) \wedge f(F(\mu_2)) \end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Teorem 3.75 *(Eklund and Gahler 1988) $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve F, Y üzerinde bir I-süzgeç olsun. $f^{-1}(F) : I^X \to I$ dönüşümü,*

$$f^{-1}(F)(\mu) = \sup\{F(\nu) : f^{-1}(\nu) \leq \mu\}$$

olarak tanımlansın. O halde, $f^{-1}(F)$ de X üzerinde bir I-süzgeçtir.

İspat IS1) $f^{-1}(F)(\bar{0}_Y) = \sup\{F(\nu) : f^{-1}(\nu) \leq \bar{0}_Y\} = 0.$

$f^{-1}(F)(\bar{1}_Y) = \sup\{F(\nu) : f^{-1}(\nu) \leq \bar{1}_Y\} = 1.$ ($\nu = \bar{1}_Y$ olarak alınırsa görülür.)

IS2) $\mu_1, \mu_2 \in I^X$ ve $\mu_1 \leq \mu_2$ olsun. Bu durumda,

$$f^{-1}(F)(\mu_1) = \sup\{F(\nu) : f^{-1}(\nu) \leq \mu_1\} \leq \sup\{F(\nu) : f^{-1}(\nu) \leq \mu_2\} = f^{-1}(F)(\mu_2)$$

olur.

IS3) $\mu_1, \mu_2 \in I^X$ olsun. $f^{-1}(F)(\mu_1 \wedge \mu_2) \geq f^{-1}(F)(\mu_1) \wedge f^{-1}(F)(\mu_2)$ olduğunu göstermek istiyoruz.

Aksini varsayalım. Yani $f^{-1}(F)(\mu_1 \wedge \mu_2) < f^{-1}(F)(\mu_1) \wedge f^{-1}(F)(\mu_2)$ olsun. Bu durumda,

$$f^{-1}(F)(\mu_1 \wedge \mu_2) < f^{-1}(F)(\mu_1) \text{ ve } f^{-1}(F)(\mu_1 \wedge \mu_2) < f^{-1}(F)(\mu_2)$$

olur. $\sup$ tanımından, $f^{-1}(\nu_1) \leq \mu_1$, $f^{-1}(\nu_2) \leq \mu_2$ ve

$$\sup\{F(\nu) : f^{-1}(\nu) \leq \mu_1 \wedge \mu_2\} < F(\nu_1), \ \sup\{F(\nu) : f^{-1}(\nu) \leq \mu_1 \wedge \mu_2\} < F(\nu_2)$$

olacak şekilde $\mu_1, \mu_2 \in I^Y$ vardır. Böylece,

$$\sup\{F(\nu) : f^{-1}(\nu) \leq \mu_1 \wedge \mu_2\} < F(\nu_1) \wedge F(\nu_2) = F(\nu_1 \wedge \nu_2)$$

olur. Ayrıca, $\nu_1 \wedge \nu_2$ için $f^{-1}(\nu_1 \wedge \nu_2) = f^{-1}(\nu_1) \wedge f^{-1}(\nu_2) \leq \mu_1 \wedge \mu_2$ dir. Buradan,

$$F(\nu_1 \wedge \nu_2) \leq \sup\{F(\nu) : f^{-1}(\nu) \leq \mu_1 \wedge \mu_2\} < F(\nu_1 \wedge \nu_2)$$

bir çelişki olur. Dolayısıyla varsayımımız yanlıştır. □

Bu bölümde I-süzgeç yapısının belirtisiz kümelere de bir açıklık derecelendirmesi yapılarak, bunlar üzerinde bir süzgeç yapısı oluşturduğu görüldü.

Bir sonraki bölümde ise supra belirtisiz topolojik uzay kavramı verilecektir. Bu uzay üzerinde $I^X \to I$ dönüşümü ile tanımlı supra belirtisiz süzgeç kavramından söz edilecek ve görülecektir ki bu süzgeç bir I-süzgeçtir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Önsüzgeçlerden Genelleştirilmiş Süzgeç Elde Edilmesi

Belirtisiz topolojik uzaylarda önsüzgeç ve g-süzgeç kavramları verildi. Şimdi ise bu iki süzgecin birbiri tarafından nasıl üretildiğinden bahsedilecektir:

$\mathcal{F}$, X üzerinde bir önsüzgeç ve $c(\mathcal{F}) = c$ olsun. $F \subseteq X$ için

$$S_{\mathcal{F}}(F) := \{\alpha \in (0, c] : F \in \mathcal{F}^{\alpha}\}$$

şeklinde tanımlansın.

Önteorem 4.1 *(Burton vd. 1997) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç, $c(\mathcal{F}) = c > 0$ olsun. O halde, $S_{\mathcal{F}}(F) = \varnothing$ veya $S_{\mathcal{F}}(F)$, $(\beta, c]$ şeklinde bir aralıktır.*

İspat $S_{\mathcal{F}}(F) \neq \varnothing$ ise $\alpha \in S_{\mathcal{F}}(F)$ olacak şekilde bir α vardır.

$\alpha \leq \gamma \leq c$ ise $F \in \mathcal{F}^{\alpha} \subseteq \mathcal{F}^{\gamma}$ dir ve böylece $\gamma \in S_{\mathcal{F}}(F)$ olur

$\mathcal{F}^{\alpha} = \bigcup_{0<\beta<\alpha} \mathcal{F}^{\beta}$ olduğundan
$$\begin{aligned} \alpha \in S_{\mathcal{F}}(F) &\Rightarrow F \in \mathcal{F}^{\alpha} = \bigcup_{0<\beta<\alpha} \mathcal{F}^{\beta} \\ &\Rightarrow \exists \beta < \alpha,\ F \in \mathcal{F}^{\beta} \\ &\Rightarrow \exists \beta < \alpha,\ \beta \in S_{\mathcal{F}}(F) \end{aligned}$$

olur. □

Tanım 4.2 *(Burton vd. 1997) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir önsüzgeç ve $F \subseteq X$ olmak üzere;*

$$f_{\mathcal{F}}(F) = \left\{ \begin{array}{cl} c - \inf S_{\mathcal{F}}(F) & , S_{\mathcal{F}}(F) \neq \varnothing \\ 0 & , S_{\mathcal{F}}(F) = \varnothing \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, X kümesi üzerinde $\mathcal{F}$ önsüzgecinin doğurduğu genelleştirilmiş süzgeç denir.

Teorem 4.3 *(Burton vd. 1997) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç, $c(\mathcal{F}) = c > 0$ ise $f_{\mathcal{F}}$ bir g-süzgeçtir.*

İspat **(GS1)** $\forall \alpha \leq c(\mathcal{F}), \varnothing \notin \mathcal{F}^{\alpha}$
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall \alpha \leq c(\mathcal{F}),\ \alpha \notin S_{\mathcal{F}}(\varnothing) \\ &\Rightarrow S_{\mathcal{F}}(\varnothing) = \varnothing \\ &\Rightarrow f_{\mathcal{F}}(\varnothing) = 0 \end{aligned}$$

olur.

(GS2) $A, B \subseteq X$ olsun. O halde;

$$\begin{aligned}\alpha < f_{\mathcal{F}}(A) \wedge f_{\mathcal{F}}(B) &\Rightarrow \inf S_{\mathcal{F}}(A) < c-\alpha \text{ ve } \inf S_{\mathcal{F}}(B) < c-\alpha \\ &\Rightarrow c-\alpha \in S_{\mathcal{F}}(A) \text{ ve } c-\alpha \in S_{\mathcal{F}}(B) \\ &\Rightarrow A,\ B \in \mathcal{F}^{c-\alpha} \\ &\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}^{c-\alpha} \\ &\Rightarrow c-\alpha \in S_{\mathcal{F}}(A \cap B) \\ &\Rightarrow \inf S_{\mathcal{F}}(A \cap B) \leq c-\alpha \\ &\Rightarrow c - S_{\mathcal{F}}(A \cap B) = f_{\mathcal{F}}(A \cap B) \geq \alpha\end{aligned}$$

olur ve buradan;

$$f_{\mathcal{F}}(A \cap B) \geq f_{\mathcal{F}}(A) \wedge f_{\mathcal{F}}(B)$$

elde edilir.

(GS3) $A \subseteq B \subseteq X$ olsun. O halde;

$$\begin{aligned}f_{\mathcal{F}}(A) > \alpha &\Rightarrow c - \inf S_{\mathcal{F}}(A) > \alpha \\ &\Rightarrow S_{\mathcal{F}}(A) < c-\alpha \\ &\Rightarrow c-\alpha \in S_{\mathcal{F}}(A) \\ &\Rightarrow A \in \mathcal{F}^{c-\alpha} \\ &\Rightarrow B \in \mathcal{F}^{c-\alpha} \\ &\Rightarrow c-\alpha \in S_{\mathcal{F}}(B) \\ &\Rightarrow \inf S_{\mathcal{F}}(B) \leq c-\alpha \\ &\Rightarrow c - \inf S_{\mathcal{F}}(B) = f_{\mathcal{F}}(B) \geq a\end{aligned}$$

olur ve buradan, $f_{\mathcal{F}}(A) \leq f_{\mathcal{F}}(B)$ olduğu görülür. □

Tanım 4.4 *(Burton vd. 1997) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç ve $\mu \in I^X$ ise; $\mathcal{F}$ önsüzgecinin μ ye bağlı karakteristik kümesi,*

$$\begin{aligned}\wp^{\mu}(\mathcal{F}): &= \{\alpha \in I : \forall \upsilon \in \mathcal{F},\ \exists x \in X,\ \upsilon(x) > \mu(x) + \alpha\} \\ &= \{\alpha \in I : \mu + \alpha \notin \mathcal{F}\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $c^{\mu}(\mathcal{F}) := \sup \wp^{\mu}(\mathcal{F})$ olarak tanımlanırsa, $c^{\mu}(\mathcal{F})$ sayısına, $\mathcal{F}$ önsüzgecinin μ ye bağlı karakteristik değeri denir. $F \subseteq X$ ise $c^{1_F}(\mathcal{F})$ gösterimi yerine $c^F(\mathcal{F})$ gösterimini kullanacağız.

Teorem 4.5 *(Burton vd. 1997) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç, $c(\mathcal{F}) = c > 0$ ve $F \subseteq X$ ise,*

$$f_{\mathcal{F}}(F) = c - c^F(\mathcal{F})$$

dır.

İspat Yalnızca $c^F(\mathcal{F}) = \sup \wp^F(\mathcal{F}) = \inf S_{\mathcal{F}}(F)$ olduğunu kanıtlayacağız.

Genel olarak; $F \subseteq X$ için, $1_F + \alpha = (1_F + \alpha 1_X) \wedge 1$ olarak tanımlanır ve $1_F + \alpha = \alpha 1_X \vee 1_F$ olduğu kolayca görülür. Şimdi,

$$\begin{aligned} \inf S_{\mathcal{F}}(F) < \alpha &\Rightarrow \alpha \in S_{\mathcal{F}}(F) \\ &\Rightarrow \exists \mu \in \mathcal{F},\ \exists \beta < \alpha,\ \mu \leq \beta 1_X \vee 1_{\mu^\beta} = 1_F + \beta \\ &\Rightarrow \exists \beta < \alpha,\ 1_F + \beta \in \mathcal{F} \\ &\Rightarrow \alpha \notin \wp^F(\mathcal{F}) \Rightarrow c^F(\mathcal{F}) \leq \alpha \end{aligned}$$

dır. Bu nedenle, $c^F(\mathcal{F}) \leq \inf S_{\mathcal{F}}(F)$ olur.

Dahası; $$\begin{aligned} c^F(\mathcal{F}) < \alpha &\Rightarrow \alpha \notin \wp^F(\mathcal{F}) \\ &\Rightarrow 1_F + \alpha = \alpha 1_X \vee 1_F \in \mathcal{F} \\ &\Rightarrow \forall \beta > \alpha,\ (\alpha 1_X \vee 1_F)^\alpha = F \in \mathcal{F}^\beta \\ &\Rightarrow \forall \beta > \alpha,\ \beta \in S_{\mathcal{F}}(F) \\ &\Rightarrow \inf S_{\mathcal{F}}(F) \leq \alpha \end{aligned}$$

dır. Böylece; $c^F(\mathcal{F}) = \inf S_{\mathcal{F}}(F)$ olur. □

Teorem 4.6 *(Burton vd. 1999) $\mathcal{F}$, X kümesi üzerinde bir asal önsüzgeç ve $c(\mathcal{F}) = c$ olsun. O halde $f_{\mathcal{F}}$ de asaldır.*

İspat $A, B \subseteq X$ için $f_{\mathcal{F}}(A \cup B) \leq f_{\mathcal{F}}(A) \vee f_{\mathcal{F}}(B)$ olduğunu göstermeliyiz:

Bu amaçla $0 < \alpha < f_{\mathcal{F}}(A \cup B)$ olsun. O halde,
$$\begin{aligned} &\alpha < c - \inf S_{\mathcal{F}}(A \cup B) \\ &\Leftrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}^{c-\alpha} = \mathcal{F}_0 \\ &\Leftrightarrow A \in \mathcal{F}_0 \text{ veya } B \in \mathcal{F}_0 \\ &(\mathcal{F}_0 \text{ aşkın olduğundan}) \\ &\Rightarrow \inf S_{\mathcal{F}}(A) \leq c - \alpha \text{ veya } \inf S_{\mathcal{F}}(B) \leq c - \alpha \\ &\Rightarrow f_{\mathcal{F}}(A) \geq \alpha \text{ veya } f_{\mathcal{F}}(B) \geq \alpha \\ &\Rightarrow f_{\mathcal{F}}(A) \vee f_{\mathcal{F}}(B) \geq \alpha \end{aligned}$$

α keyfi seçildiğinden ispat biter. □

4.2. Genelleştirilmiş Süzgeçlerden Önsüzgeç Elde Edilmesi

Bu bölümde g-süzgeçlerden önsüzgeç elde etmeden önce, önsüzgeçlerden üretilen g-süzgeçlerin ve önsüzgeçlerin karakteristiği arasında bir bağlantı bulalım:

Önteorem 4.7 *(Burton vd. 1997) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir önsüzgeç ve $c(\mathcal{F}) = c > 0$ ise,*

$$c(f_{\mathcal{F}}) = c(\mathcal{F})$$

dir.

İspat $c = c(\mathcal{F})$ olsun. O halde, $c(f_{\mathcal{F}}) = f_{\mathcal{F}}(X) = c - \inf S_{\mathcal{F}}(X)$ olur. Şimdi,

$$\begin{aligned} \forall\alpha \le c, X \in \mathcal{F}^{\alpha} &\Rightarrow \forall\alpha \le c,\ \alpha \in S_{\mathcal{F}}(X) \\ &\Rightarrow \inf S_{\mathcal{F}}(X) = 0 \\ &\Rightarrow c(f_{\mathcal{F}}) = f_{\mathcal{F}}(X) = c \end{aligned}$$

dir. □

Tanım 4.8 *(Burton vd. 1997) f g-süzgeci için; ($c(f) = c$)*

$$\mathcal{F}_f = \{\upsilon \in I^X : \forall 0 < \alpha \le c,\ \forall\beta < \alpha,\ \upsilon^{\beta} \in f^{c-\alpha}\}$$

şeklinde tanımlanan aile X kümesi üzerinde bir önsüzgeçtir ve bu önsüzgece, f g-süzgecinin X üzerinde doğurduğu önsüzgeç denir.

Teorem 4.9 *(Burton vd. 1997) f bir g-süzgeç ise $\mathcal{F}_f$ bir önsüzgeçtir.*

İspat **(ÖS3)** $\beta \le c(f)$, $(\bar{0})^{\beta} = \{x \in X : \bar{0}(x) > \beta\} = \varnothing$.

$\forall 0 < \alpha \le c, \forall\beta < \alpha$, $(\bar{0})^{\beta} \notin f^{c-\alpha}$ ve bu da $\bar{0} \notin \mathcal{F}_f$ olduğunu gösterir.

Diğer yandan, $c = c(f) = f(x) > 0$ olduğundan biliyoruz ki; $\forall 0 < \alpha \le c, \forall\beta < \alpha$ için $(\bar{1})^{\beta} = X \in f^{c-a}$ dır ve böylece $\bar{1} \in \mathcal{F}_f$ dir.

(ÖS2) $\mu, \upsilon \in \mathcal{F}_f$ olsun. O halde,

$\forall\beta < c(f)$, $\upsilon^{\beta} \cap \mu^{\beta} = (\upsilon \wedge \mu)^{\beta}$, $\upsilon \wedge \mu \in \mathcal{F}_f$ dir.

(ÖS1) $\upsilon \in \mathcal{F}$ ve $\upsilon \le \mu$ olsun. $0 < \alpha \le c$, $\beta < \alpha$ olsun. O halde,

$\upsilon^{\beta} \in f^{c-\alpha}$ dır. $\upsilon^{\beta} \subseteq \mu^{\beta}$ olduğundan, $f(\mu^{\beta}) \ge f(\upsilon^{\beta}) \ge c - \alpha$ olur. Böylece; $\mu \in \mathcal{F}_f$ dir. □

Önteorem 4.10 *(Burton vd. 1997) f bir süzgeç, $c(f) = c > 0$ ise,*

$$\mathcal{F}_f = \{\upsilon \in I^X : \forall 0 \le \gamma < c,\ \upsilon^{\gamma} \in f_{c-\gamma}\}$$

dir.

İspat $\hat{G} := \{\upsilon \in I^X : \forall 0 \leq \gamma < c, \upsilon^\gamma \in f_{c-\gamma}\}$ tanımlayalım. $\upsilon \in \mathcal{F}_f$ olsun. $\upsilon \in \hat{G}$ olduğunu göstereceğiz:

$0 \leq \gamma < c$ olsun. $\gamma < \alpha < c$ olacak şekilde bir α seçelim. O halde $\upsilon^\gamma \in f^{c-\alpha}$ dır. α keyfi seçildiğinden, $\forall \alpha \in (\gamma, c)$, $f(\upsilon^\gamma) > c - \alpha$ olur.

Böylece, $f(\upsilon^\gamma) \geq c - \gamma$ dır Başka bir deyişle, $\upsilon^\gamma \in f_{c-\gamma}$ dir.

Tersine, $\upsilon \in \hat{G}$ olsun. $\upsilon \in \mathcal{F}_f$ olduğunu göstereceğiz.:

$0 < \alpha \leq c$, $0 \leq \beta < \alpha$ olsun. O halde, $0 \leq \beta < c$ olur. Böylece, $\upsilon^\beta \in f_{c-\beta}$ ve buradan $f(\upsilon^\beta) \geq c - \beta > c - \alpha$ olur.

Bu nedenle, $\upsilon^\beta \in f^{c-\alpha}$ dır. □

g-süzgeç ve önsüzgeç arasındaki ilişki tamamen açık değildir.

Teorem 4.11 *(Burton vd. 1997) f bir g-süzgeç ise bu g-süzgeçten üretilen $\mathcal{F}_f$ önsüzgeci doygundur.*

İspat $\forall \varepsilon > 0$ için $\upsilon + \varepsilon \in \mathcal{F}_f$ olduğunu varsayalım. $\upsilon \in \mathcal{F}_f$ olduğunu göstermeliyiz.

Bu amaçla, $\alpha \leq c(f)$ ve $\beta < \alpha$ alalım ve $\upsilon^\beta \in f^{c-\alpha}$ olduğunu gösterelim:

$\beta < \gamma < \alpha$ olacak şekilde γ seçelim ve $\varepsilon = \gamma - \beta$ olsun. O halde, $\upsilon + \varepsilon \in \mathcal{F}_f$ olduğundan,

$(\upsilon + \varepsilon)^\gamma = (\upsilon + \varepsilon)^{\beta+\varepsilon} = \upsilon^\beta \in f^{c-\alpha}$ olur. □

Önteorem 4.7'de önsüzgecin ve onun doğurduğu g-süzgecin karakteristiği arasındaki bağlantıyı görmüştük. Şimdi, g-süzgeç ve onun doğurduğu önsüzgeç arasındaki bağlantıyı bulalım.

Teorem 4.12 *(Burton vd. 1997) f, X üzerinde bir g-süzgeç olsun. O halde, $c(\mathcal{F}_f) = c(f)$ dir.*

İspat $c(f) = c$ olsun. O halde,

$\forall \upsilon \in \mathcal{F}_f$, ve $\forall 0 \leq \beta < \alpha < c$ için $\upsilon^\beta = f^{c-\alpha}$ dır.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \forall \upsilon \in \mathcal{F}_f, , \forall 0 \leq \beta < \alpha \leq c,\ \upsilon^\beta \neq \varnothing \\
&\Rightarrow \forall \upsilon \in \mathcal{F}_f, , \forall 0 \leq \beta < \alpha \leq c,\ \sup \upsilon > c \\
&\Rightarrow \inf_{\upsilon \in \mathcal{F}_f} \sup \upsilon \geq c
\end{aligned}$$

Diğer yandan, $\forall\alpha \leq c$, ve $\forall\beta < \alpha$ için $(c1_X)^\beta = X \in f^{c-a}$ ve böylece $c1_X \in \mathcal{F}_f$ dir. Buradan;

$$c(\mathcal{F}_f) = \inf_{\upsilon \in \mathcal{F}_f} \sup \upsilon \leq \sup c1_X = c(f)$$

olur. □

Şimdi g-süzgeçlerin $\alpha-$kesmelerini inceleyelim:

Önteorem 4.13 *(Burton vd. 1997) f bir g-süzgeç, $c(f) = c$ ve $\alpha \in (0, c]$ olsun. O halde,*

$$(\mathcal{F}_f)^\alpha = f^{c-\alpha}$$

dır.

İspat $F \in (\mathcal{F}_f)^\alpha$ olsun. O halde, $\beta < \alpha$ ve $F = \upsilon^\beta$ olacak şekilde $\upsilon \in \mathcal{F}_f$, vardır. $\upsilon \in \mathcal{F}_f$ olduğundan, $\upsilon^\beta = F \in f^{c-\alpha}$ olduğunu biliyoruz.

Tersine, $F \in f^{c-\alpha}$ ise $f(F) = t > c - \alpha$ dır. $\upsilon = (c-t)1_X \vee 1_F$ olsun. $\upsilon \in \mathcal{F}_f$ olduğunu göstermek için Önteorem 4.10'u kullanacağız. Bu amaçla, $0 \leq \gamma < c$ olsun.

$\gamma \in [c-t, c)$ ise $\upsilon^\gamma = F$ ve böylece $f(\upsilon^\gamma) = f(F) = t \geq c - \gamma$ olur.

$\gamma \in [0, c-t)$ ise $\upsilon^\gamma = X$ ve böylece $f(\upsilon^\gamma) = f(X) = c \geq c - \gamma$ olur.

Bu nedenle; $\forall\gamma \in [0, c)$ için $\upsilon^\gamma \in f_{c-\gamma}$ olduğunu biliyoruz. Buradan, $\upsilon \in \mathcal{F}_f$ ve $F = \upsilon^{c-t}$, $c - t < \alpha$ dır. Böylece $F \in (\mathcal{F}_f)^\alpha$ olur. □

Önteorem 4.14 *(Burton vd. 1997) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir önsüzgeç, $c(\mathcal{F}) = c > 0$ ise $\alpha \in [0, c)$ için,*

$$(f_\mathcal{F})^\alpha = \mathcal{F}^{c-\alpha}$$

dır.

İspat
$$\begin{aligned} A \in (f_\mathcal{F})^\alpha &\Leftrightarrow f_\mathcal{F}(A) = c - \inf S_\mathcal{F}(A) > \alpha \\ &\Leftrightarrow \inf S_\mathcal{F}(A) < c - \alpha \\ &\Leftrightarrow c - \alpha \in S_\mathcal{F}(A) \\ &\Leftrightarrow A \in \mathcal{F}^{c-\alpha} \end{aligned}$$

dır. □

Önteorem 4.15 *(Burton vd. 1997) f bir g-süzgeç, $c(f) = c$ ve $0 \leq \alpha < c$ ise,*

$$f^{\alpha} = \bigcup_{c>\beta>\alpha} f^{\beta}$$

dır.

İspat $F \in f^{\alpha}$ ise $\alpha < \beta < f(F)$ olacak şekilde β seçelim. O halde, $F \in f^{\beta}$ ve böylece $F \in \bigcup_{\beta>\alpha} f^{\beta}$ dır.

Tersine, $F \in \bigcup_{c>\beta>\alpha} f^{\beta}$ olsun. O halde bazı $\beta > \alpha$ lar için $F \in f^{\beta}$ dir. Böylece, $f(\mathcal{F}) > \beta > \alpha$ olur. Buradan $F \in f^{\alpha}$ dır. □

Sonuç 4.16 *(Burton vd. 1997) f bir g-süzgeç, $c(f) = c$ ve $0 < \alpha \leq c$ ise,*

$$f^{c-\alpha} = \bigcup_{0<\beta<\alpha} f^{c-\beta}$$

dır.

Önteorem 4.17 *(Burton vd. 1997) f ve g g-süzgeçler, $c(f) \neq c(g)$ ise $f \neq g$ dir.*

Önteorem 4.18 *(Burton vd. 1997) f ve g g-süzgeçler, $c(f) = c(g) = c$ olsun. O halde,*

$$\forall \alpha < c \text{ için } f^{\alpha} = g^{\alpha} \Leftrightarrow f = g$$

dir.

İspat $\forall \alpha < c$ için $f^{\alpha} = g^{\alpha}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall \alpha < c,\ \forall A \subseteq X,\ A \in f^{\alpha} \\
&\Leftrightarrow A \in g^{\alpha} \\
&\Leftrightarrow \forall A \subseteq X,\ \forall \alpha \leq c,\ (f(A) > \alpha \Leftrightarrow g(A) > \alpha) \\
&\Leftrightarrow \forall A \subseteq X,\ f(A) = g(A) \\
&f = g
\end{aligned}$$

dir. □

Her genelleştirilmiş süzgece bir doygun önsüzgeç ve tersine olarak her önsüzgece de doygun bir g-süzgeç karşılık geldiğini gördük.

Teorem 4.19 *(Burton vd. 1997)*

$\check{S}(x) = \{\mathcal{F} \in 2^{I^X} : \mathcal{F},\ X$ *üzerinde doygun bir önsüzgeç*$\}$

$\hat{G}(x) = \{f \in 2^{I^X} : f,\ X$ *üzerinde bir g-süzgeç*$\}$

olsun. O halde, $\Psi : \underset{F}{\check{S}(x)} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{f_{\mathcal{F}}}{\hat{G}(x)}$ fonksiyonu birebir ve örtendir.

İspat Öncelikle Ψ fonksiyonunun birebir olduğunu görelim. Bu amaçla, $\mathcal{F}, \mathcal{L} \in \check{S}(x)$, $\mathcal{F} \neq \mathcal{L}$ olsun. $c(\mathcal{F}) \neq c(\mathcal{L})$ ise,

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{F}}(X) &= c(\mathcal{F}) - \inf\{\alpha \leq c(\mathcal{F}) : X \in \mathcal{F}^{\alpha}\} \\ &= c(\mathcal{F}) - 0 \\ &\neq c(\mathcal{L}) \\ &= f_{\mathcal{L}}(X) \end{aligned}$$

ve böylece $f_{\mathcal{F}} \neq f_{\mathcal{L}}$ olur.

$c(\mathcal{F}) = c(\mathcal{L}) = c$ ise $\exists \alpha \leq c$ vardır ve $\mathcal{F}^{\alpha} \neq \mathcal{L}^{\alpha}$ dır.

Bu doymuş önsüzgeçleri α-kesme süzgeçlerinden tamamen belirlenir. Varsayalım ki, $F \in \mathcal{F}^{\alpha} \backslash \mathcal{L}^{\alpha}$ olsun. O halde, $\alpha \in S_{\mathcal{F}}(F) \backslash S_{\mathcal{L}}(F)$ olur.

Buradan, $S_{\mathcal{F}}(F) < \alpha$ ve $\alpha \leq S_{\mathcal{L}}(F)$ dir. Buradan da,

$$f_{\mathcal{F}}(F) = \inf S_{\mathcal{F}}(F) > c - \alpha \geq c - \inf S_{\mathcal{F}}(F) = f_{\mathcal{L}}(F)$$

olur. Böylece $f_{\mathcal{F}} \neq f_{\mathcal{L}}$ olduğu görülür.

Ψ fonksiyonunun örten olduğunu göstermek için, $f \in \hat{G}(x)$ ve $c(\mathcal{F}) = c$ olsun. O halde;

$$\mathcal{F}_f = \{\upsilon \in I^X : \forall \alpha \leq c,\ \forall \beta < \alpha,\ \upsilon^{\beta} \in f^{c-\alpha}\}$$

dir. Şimdi Önteorem 4.13 ve Önteorem 4.14'ten;

$\forall \alpha \in [0, c)$ için $(f_{\mathcal{F}_f})^{\alpha} = (\mathcal{F}_f)^{c-\alpha} = f^{c-(c-\alpha)} = f^{\alpha}$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, Önteorem 4.18'den,

$$\Psi(\mathcal{F}_{f_{\mathcal{F}}}) = f_{\mathcal{F}_f} = f$$

dir. □

Buradan aşağıdaki sonucu çıkarıyoruz:

Sonuç 4.20 *(Burton vd. 1997) f, X üzerinde bir g-süzgeç ise*

$$f_{\mathcal{F}_f} = f$$

dir.

Sonuç 4.21 *(Burton vd. 1997) $\mathcal{F}$, X üzerinde bir doygun önsüzgeç ise*

$$\mathcal{F}_{f_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$$

dir.

İspat $\Psi : \underset{F}{\check{S}(x)} \underset{\to}{\to} \underset{f_{\mathcal{F}}}{\hat{G}(x)}$ fonksiyonunu alalım. O halde, $\Psi(\mathcal{F}) = f_{\mathcal{F}}$ ve $\Psi(\mathcal{F}_{f_{\mathcal{F}}}) = f(\mathcal{F}_{f_{\mathcal{F}}}) = f_{\mathcal{F}}$ olur.

Böylece, Ψ fonksiyonunun örtenliğinden; $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{f_{\mathcal{F}}}$ olur. □

Önteorem 4.22 *(Burton vd. 1997) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç ise $f_{\mathcal{F}} = f_{\widehat{\mathcal{F}}}$ dir.*

İspat $F \subseteq X$ için,

$$\begin{aligned} f_{\widehat{\mathcal{F}}}(F) &= c(\widehat{\mathcal{F}}) - \inf\{\alpha : F \in (\widehat{\mathcal{F}})^{\alpha}\} \\ &= c(\mathcal{F}) - \inf\{\alpha : F \in (\mathcal{F})^{\alpha}\} \\ &= f_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

dir. □

Dolayısıyla, $\mathcal{F}$ önsüzgeci için $\hat{f}_{\mathcal{F}} = f_{\mathcal{F}}$ tir.

Bunu sağlayan $\hat{f}$ nin en doğal tanımı; $\hat{f} = f$ tir.

Teorem 4.23 *(Burton vd. 1997) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç ise $\mathcal{F}_{f_{\mathcal{F}}} = \widehat{\mathcal{F}}$ tir.*

İspat Teorem 4.11'den $\mathcal{F}_{f_{\mathcal{F}}}$ in bir doygun önsüzgeç olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, $\forall\alpha \leq c(\widehat{\mathcal{F}}) = c(\mathcal{F})$, $(\mathcal{F}_{f_{\mathcal{F}}})^{\alpha} = (\widehat{\mathcal{F}})^{\alpha}$ olduğu gösterilmelidir.

$(\mathcal{F}_{f_{\mathcal{F}}})^{\alpha} = (f_{\mathcal{F}})^{c-\alpha} = \mathcal{F}^{\alpha} = (\widehat{\mathcal{F}})^{\alpha}$ olduğundan istenen görülür. □

Buradan aşağıdaki önsüzgeçlerin doygunluğunun karakterizasyonu ile ilgili son sonucu elde ederiz:

Sonuç 4.24 *(Burton vd. 1997) $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç, $c(\mathcal{F}) = c > 0$ ise,*

$$\widehat{\mathcal{F}} = \{\upsilon \in I^X : \forall 0 < \alpha \leq c,\ \forall\beta < \alpha,\ \upsilon^{\beta} \in \mathcal{F}^{\alpha}\}$$

şeklindedir.

İspat $\upsilon \in \widehat{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \upsilon \in \mathcal{F}_{f_{\mathcal{F}}}$

$\Leftrightarrow \forall 0 < \alpha \leq c, \ \forall \beta < \alpha;$

$\upsilon^{\beta} \in (f_{\mathcal{F}})^{c-\alpha} = \mathcal{F}^{\alpha}$

dır. □

Asal önsüzgeçler ve asal g-süzgeçler arasındaki bağlantıyı kurabilmek için öncelikle aşağıdaki lemmayı kanıtlayacağız:

Önteorem 4.25 *(Burton vd. 1999) $(L, \leq)$ tam sıralı bir küme ve $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Ayrıca,*

$$\varphi, \Psi : (L, \leq) \to (X, \preceq)$$

azalan fonksiyonlar olsun. Yani;

$$\forall \alpha, \beta \in L \text{ için } \alpha \leq \beta \Rightarrow \varphi(\beta) \leq \varphi(\alpha); \ \Psi(\beta) \preceq \Psi(\alpha)$$

olsun.

$F \subseteq X$, "$\forall x$ için $x \in F, x \preceq y \Rightarrow y \in F$" özelliğine sahip bir küme olsun. O halde;

$$\forall \alpha \in L, \quad \varphi(\alpha) \in F \text{ veya } \Psi(\alpha) \in F$$
$$\Leftrightarrow (\forall \alpha \in L, \ \varphi(\alpha) \in F) \text{ veya } (\forall \alpha \in L, \ \Psi(\alpha) \in F)$$

olur.

Sonuç 4.26 *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, X bir küme ve φ, Ψ,*

$$\forall \alpha, \beta \in I \text{ için } \alpha \leq \beta \Rightarrow \varphi(\beta) \subseteq \varphi(\alpha); \ \Psi(\beta) \subseteq \Psi(\alpha)$$

özelliğini sağlayan iki fonksiyon olsun. $\mathbb{F}$ de X üzerinde bir süzgeç olsun. O halde;

$$\forall \alpha \in I, \quad \varphi(\alpha) \in \mathbb{F} \text{ veya } \Psi(\alpha) \in \mathbb{F}$$
$$\Leftrightarrow (\forall \alpha \in I, \ \varphi(\alpha) \in \mathbb{F}) \text{ veya } (\forall \alpha \in I, \Psi(\alpha) \in \mathbb{F})$$

olur.

Teorem 4.27 *(Burton vd. 1999) f, X kümesi üzerinde bir asal g-süzgeç ve $c(f) = c$ olsun. O halde $\mathcal{F}_f$ asaldır.*

İspat $\mu \vee \nu \in \mathcal{F}_f$ olsun. Önteorem 4.10, Teorem 3.51 ve Sonuç 3.52'den,

$\forall \gamma \in [0, c)$, $(\mu \vee \nu)^\gamma = \mu^\gamma \cup \nu^\gamma \in f_{c-\gamma} = f_c \overset{\text{tanım}}{=} \mathbb{F}$ ve $\mathbb{F}$, X üzerinde bir aşkın süzgeçtir. Bu nedenle;

$$\forall \gamma \in [0, c), (\mu^\gamma \in \mathbb{F} \text{ veya } \nu^\gamma \in \mathbb{F})$$

olduğunu biliyoruz. Sonuç 4.26'dan

$$(\forall \gamma \in [0, c), \mu^\gamma \in \mathbb{F}) \text{ veya } (\forall \gamma \in [0, c), \nu^\gamma \in \mathbb{F})$$

olur ve Önteorem 4.10'dan, $\mu \in \mathbb{F}$ veya $\nu \in \mathbb{F}$ olduğu görülür. □

Sonuç 4.28 *(Burton vd. 1999) f bir g-süzgeç ve $\mathcal{F}$ bir önsüzgeç olmak üzere;*

$$f \text{ asaldır} \Leftrightarrow \mathcal{F}_f \text{ asaldır.}$$
$$\mathcal{F} \text{ asaldır} \Leftrightarrow f_{\mathcal{F}} \text{ asaldır.}$$

İspat Sonuç 4.20, Sonuç 4.21, Teorem 4.6 ve Teorem 4.27'den görülür. □

4.3. Supra Belirtisiz Süzgeç

Supra belirtisiz süzgecinin tanımını vermeden önce bazı gerekli bilgileri verelim.

Teorem 4.29 *(Ramadan and El-Latif 2008) (X, τ) bir I-belirtisiz topolojik uzay olsun. O halde, her $\lambda \in I^X$ ve $r \in I_0$ için $C_\tau : I^X \times I_0 \to I^X$ dönüşümünü,*

$$C_{\Im}(\lambda, r) = \bigwedge\{\mu : \lambda \leq \mu,\ \tau(\bar{1} - \mu) \geq r\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Tanım 4.30 *(Ramadan and El-Latif 2008) Her $\lambda, \mu \in I^X$ ve $r, s \in I_0$ için C_τ dönüşümü,*

(i) $C_\tau(\bar{0}, r) = \bar{0}$

(ii) $\lambda \leq C_\tau(\lambda, r)$

(iii) $C_\tau(\lambda, r) \vee C_\tau(\mu, r) = C_\tau(\lambda \vee \mu, r)$

(iv) $r \leq s$ *ise* $C_\tau(\lambda, r) \leq C_\tau(\lambda, s)$

(v) $C_\tau(C_\tau(\lambda, r), r) = C_\tau(\lambda, r)$

koşullarını sağlar.

Teorem 4.31 *(Ramadan and El-Latif 2008) (X, τ) bir I-belirtisiz topolojik uzay olsun. O halde, her $\lambda \in I^X$ ve $r \in I_0$ için $I_\tau : I^X \times I_0 \to I^X$ dönüşümünü,*

$$I_\tau(\lambda, r) = \bigvee\{\mu : \mu \leq \lambda,\ \tau(\mu) \geq r\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Her $\lambda, \mu \in I^X$ ve $r, s \in I_0$ için I_τ dönüşümü,

(i) $I_\tau(\bar{1} - \lambda, r) = \bar{1} - C_\tau(\lambda, r)$ ve $C_\tau(\bar{1} - \lambda, r) = \bar{1} - I_\tau(\lambda, r)$

(ii) $I_\tau(\bar{1}, r) = \bar{1}$

(iii) $I_\tau(\lambda, r) \leq \lambda$

(iv) $I_\tau(\lambda, r) \wedge I_\tau(\mu, r) = I_\tau(\lambda \wedge \mu, r)$

(v) $r \leq s$ ise $I_\tau(\lambda, r) \geq I_\tau(\lambda, s)$

(vi) $I_\tau(I_\tau(\lambda, r), r) = I_\tau(\lambda, r)$

koşullarını sağlar.

Tanım 4.32 *(Ramadan and El-Latif 2008) $\tau : I^X \to I$ dönüşümüne,*

SBT1) $\tau(\bar{0}) = \tau(\bar{1}) = 1$

SBT2) *Herhangi bir $\{\mu_i : i \in J\} \subseteq I^X$ için $\tau(\bigvee_{i \in J} \mu_i) \geq \bigwedge_{i \in J} \tau(\mu_i)$*

koşullarını sağlıyorsa bir supra belirtisiz topoloji; (X, τ) ikilisine de bir supra belirtisiz topolojik uzay (SBTU) denir.

τ^* bir supra belirtisiz topoloji ve $\tau \leq \tau^*$ olsun. O halde τ^* ailesine τ bir belirtisiz topolojisiyle bağlantılıdır denir.

Teorem 4.33 *(Ramadan and El-Latif 2008) (X, τ) bir supra belirtisiz topolojik uzay ve $x_t \in FP(X)$ olsun.*

$S_{x_t} : I^X \to I$ dönüşümünü,

$$S_{x_t}(\lambda) \begin{cases} \bigvee\{\tau(\nu_i) : \bigwedge_{i=1}^{n} \nu_i \leq \lambda\} & , \ x_t \in \nu_i \\ 0 & , \ x_t \notin \nu_i \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde, S_{x_t} X üzerinde bir I-süzgeçtir. Bu süzgece Supra belirtisiz yakınsaklık süzgeci denir.

İspat IS1) Açıktır.

IS2) $\lambda_1 \leq \lambda_2$ olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2 \in I^X$ alalım. Varsayalım ki

$$S_{x_t}(\lambda_1) \geq r > S_{x_t}(\lambda_2)$$

olacak şekilde bir $r \in I_0$ var olsun. $S_{x_t}(\lambda_1) \geq r$ olduğundan, S_{x_t} nin tanımından öyle $\nu_i \in I^X$, $(i = 1, 2, ..., n)$ vardır ki,

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \nu_i \leq \lambda_1 \leq \lambda_2,\ x_t \in \nu_i,\ \tau(\nu_i) \geq r,\ (i = 1, 2, ..., n)$$

olur. O halde, $S_{x_t}(\lambda_2) \geq r$ olur ki bu varsayımımızla çelişir. Dolayısıyla, $S_{x_t}(\lambda_1) \leq S_{x_t}(\lambda_2)$ dir.

IS3)

$$S_{x_t}(\lambda_1 \wedge \lambda_2) < r \leq S_{x_t}(\lambda_1) \wedge S_{x_t}(\lambda_2)$$

olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2 \in I^X$ ve $r \in I_0$ olduğunu varsayalım.

$S_{x_t}(\lambda_1) \geq r$ ve $S_{x_t}(\lambda_2) \geq r$ olduğundan ve S_{x_t} nin tanımından öyle $\nu_i, \mu_j \in I^X$, $(i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m)$ vardır ki,

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \nu_i \leq \lambda_1,\ x_t \in \nu_i,\ \tau(\nu_i) \geq r,\ (i = 1, 2, ..., n)$$

ve

$$\bigwedge_{j=1}^{m} \mu_j \leq \lambda_2,\ x_t \in \mu_j,\ \tau(\mu_j) \geq r,\ (j = 1, 2, ..., m)$$

olur. O halde, $\bigwedge_{i=1}^{n} \nu_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} \mu_j \leq \lambda_1 \wedge \lambda_2$ ve dolayısıyla her $(i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m)$ için $x_t \in \nu_i$, $x_t \in \mu_j$, $\tau(\nu_i) \geq r$ ve $\tau(\mu_j) \geq r$ olduğundan, $S_{x_t}(\lambda_1 \wedge \lambda_2) \geq r$ olur ki bu varsayımımızla çelişir.

Dolayısıyla, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in I^X$ için $S_{x_t}(\lambda_1 \wedge \lambda_2) \geq S_{x_t}(\lambda_1) \wedge S_{x_t}(\lambda_2)$ dir. □

Tanım 4.34 *(X, τ) bir SBTU ve F, X üzerinde bir I-belirtisiz süzgeç olsun. F belirtisiz süzgeci S_{x_t} supra belirtisiz yakınsaklık süzgecinden daha ince ise F süzgeci $x_t \in FP(X)$ belirtisiz noktasına supra belirtisiz yakınsaktır denir.*

Tanım 4.35 *(X, τ) bir SBTU ve F, X üzerinde bir I-belirtisiz süzgeç olsun. $r \in I_0$ olmak üzere; $x_t \in \lambda$, $\tau(\lambda) \geq r$ ve $F(\mu) \geq r$ olacak şekildeki her $\lambda, \mu \in I^X$ için $\lambda \wedge \mu \neq \overline{0}$ ise $x_t \in FP(X)$ belirtisiz noktasına, F belirtisiz süzgecinin r-supra belirtisiz yığılma noktasıdır denir.*

Tanım 4.36 *(X, τ) bir SBTU ve F, X üzerinde bir I-belirtisiz süzgeç olsun. $S_{x_t}(\lambda) \geq r$, $F(\mu) \geq r$ olacak şekildeki her $\lambda, \mu \in I^X$ için $\lambda \wedge \mu \neq \bar{0}$ ise $x_t \in FP(X)$ belirtisiz noktasına, F belirtisiz süzgecinin kesin r-supra belirtisiz yığılma noktasıdır denir.*

Not 3 *Her kesin r-supra belirtisiz yığılma noktası aynı zamanda bir r-supra belirtisiz yığılma noktasıdır.*

Örnek 4.37 *$X = \{x, y, z\}$ bir küme olsun. $\lambda_1, \lambda_2 \in I^X$ şöyle tanımlansın:*

$$\lambda_1(x) = 0.8, \quad \lambda_1(y) = 0.5, \quad \lambda_1(z) = 0.0$$
$$\lambda_2(x) = 0.8, \quad \lambda_2(y) = 0.0, \quad \lambda_2(z) = 0.5$$

$\tau : I^X \to I$ supra belirtisiz topolojisi de

$$\tau(\lambda) = \begin{cases} 1 & , \lambda = \bar{0}, \bar{1} \text{ ise} \\ 0.5 & , \lambda = \lambda_1 \vee \lambda_2 \text{ ise} \\ 0.3 & , \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\} \text{ ise} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun.

$t \leq 0.8$ ve $0 < r < 0.3$ olsun. O halde,

$$S_{x_t}(\lambda) = \begin{cases} 1 & , \lambda = \bar{1} \text{ ise} \\ 0.5 & , \lambda_1 \vee \lambda_2 \leq \lambda < \bar{1} \text{ ise} \\ 0.3 & , \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_1 \vee \lambda_2 \text{ veya } \lambda_2 \leq \lambda < \lambda_1 \vee \lambda_2 \text{ ise} \\ 0.3 & , \lambda_1 \wedge \lambda_2 \leq \lambda < \lambda_1 \text{ veya } \lambda_1 \wedge \lambda_2 \leq \lambda < \lambda_2 \text{ ise} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur.

$F : I^X \to I$, I-belirtisiz süzgeci,

$$F(\lambda) = \begin{cases} 1 & , \lambda = \bar{1} \text{ ise} \\ 0.6 & , \mathcal{X}_{\{y,z\}} \leq \lambda < \bar{1} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

O halde, x_t F I-belirtisiz süzgecinin bir r-supra belirtisiz yığılma noktasıdır fakat kesin r-supra belirtisiz yığılma noktası değildir. Çünkü, $S_{x_t}(\lambda_1 \wedge \lambda_2) = 0.3 > r$ ve $F(\mathcal{X}_{\{y,z\}}) = 0.6 > r$ fakat $(\lambda_1 \wedge \lambda_2) \wedge \mathcal{X}_{\{y,z\}} = \bar{0}$ dır.

Teorem 4.38 *(Ramadan and El-Latif 2008) (X, τ) bir SBTU ve F, X üzerinde bir I-belirtisiz süzgeç olsun. F belirtisiz süzgeci $x_t \in FP(X)$ kesin r-supra belirtisiz yığılma noktasına sahip olması için gerekli ve yeterli koşul x_t belirtisiz noktasına yakınsak olan F den daha ince bir G belirtisiz süzgecinin var olmasıdır.*

İspat x_t F belirtisiz süzgecinin bir kesin r-supra belirtisiz yığılma noktası ise $S_{x_t}(\lambda) \geq r$, $F(\mu) \geq r$ olacak şekildeki her $\lambda, \mu \in I^X$ için $\lambda \wedge \mu \neq \bar{0}$ olduğunu biliyoruz. Teorem 3.73'den $S_{x_t}(\lambda) \leq G$ ve $F \leq G$ olacak şekilde

$$G = S_{x_t} \vee F$$

tanımlanabilir. Böylece G x_t belirtisiz noktasına supra belirtisiz yakınsaktır.

Tersine, $S_{x_t} \leq G$ ve $F \leq G$ ise $S_{x_t}(\lambda) \geq r$, $F(\mu) \geq r$ olacak şekildeki her $\lambda, \mu \in I^X$ için $G(\lambda) \geq r$ ve $G(\mu) \geq r$ olur. G bir I-belirtisiz süzgeç olduğundan, $G(\lambda \wedge \mu) \geq G(\lambda) \wedge G(\mu) \geq r$ den $\lambda \wedge \mu \neq \bar{0}$ olur. Böylece x_t, F nin bir kesin r-supra belirtisiz yığılma noktasıdır. □

Teorem 4.39 *(Ramadan and El-Latif 2008) (X, τ_1) ve (Y, τ_2) supra belirtisiz topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ supra belirtisiz sürekli bir dönüşüm olsun. O halde,*

(i) $\forall \mu \in I^Y$ için $S_{f(x)_t}(\mu) \leq S_{x_t}(f^{-1}(\mu))$ dir.

(ii) X üzerindeki her F I-belirtisiz süzgeci ve $x_t \in FP(X)$ için, F belirtisiz süzgeci x_t ye supra belirtisiz yakınsak ise $f(F)$ de Y içinde $f(x)_t$ belirtisiz noktasına supra belirtisiz yakınsaktır.

İspat (i)

$$S_{f(x)_t}(\mu) \geq r > S_{x_t}(f^{-1}(\mu))$$

olacak şekilde $\mu \in I^Y$ ve $r \in I_0$ olduğunu varsayalım.

$S_{f(x)_t}(\mu) \geq r$ olduğundan $\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} \nu_i \leq \mu$ olacak şekilde $\nu_i \in I^Y$ $(f(x)_t \in \nu_i, \tau_2(\nu_i) \geq r$, $i = 1, 2, .., n)$ vardır. O halde,

$$f^{-1}(\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} \nu_i) = \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} f^{-1}(\nu_i) \leq f^{-1}(\mu) \text{ ve } x_t \in f^{-1}(\nu_i),\ i = 1, 2, ..., n$$

dir. Ayrıca $\tau_1(f^{-1}(\nu_i)) \geq \tau_2(\nu_i) \geq r$ ve dolayısıyla $S_{x_t}(f^{-1}(\mu)) \geq r$ dir. Bu bir çelişkidir. Böylece, her $\mu \in I^Y$ için $S_{f(x)_t}(\mu) \leq S_{x_t}(f^{-1}(\mu))$ olur.

(ii) f supra belirtisiz sürekli olduğundan ve (i)'den

$$S_{f(x)_t}(\mu) \leq S_{x_t}(f^{-1}(\mu)) \leq F(f^{-1}(\mu)) = f(F)(\mu)$$

olduğu görülür. O halde $S_{f(x)_t}(\mu) \leq f(F)$ dir. Böylece, $f(F)$ I-belirtisiz süzgeci $f(x)_t$ ye supra belirtisiz yakınsaktır. □

5. SONUÇLAR

Analizin en önemli uğraşlarından biri olan yakınsaklık kavramını tanımlamakta diziler yetersiz kalmıştır. Bu kavram yerine ağ ve süzgeç gibi daha genel kavramlar kullanılarak bu yetersizlik ortadan kaldırılmıştır. Ağ ve süzgeç kavramları yakınsama için eş değer kavramlardır. Fakat süzgeçler topolojinin başka alanlarında da sıkça kullanılan bir kavramdır. Bir topolojik yapı varsa buradan bir süzgeç elde edilebileceği gibi, süzgeçlerden de bir topolojik yapı kurulabilmektedir. Bu nedenle topolojik uzaylarda süzgeç kavramı oldukça önemlidir.

Bu tezde topoloji için önemli bir kavram olan süzgeç kavramı Belirtisiz Topolojik Uzaylara genişletilmiştir. Bu uzayda süzgeç kavramı verilmeden, edinilecek bilgilerin altlarının boş kalmaması için öncelikle klasik topolojik uzaylarda süzgeç kavramı kısaca anlatılmıştır. Daha sonra belirtisiz topolojik uzaydan söz edilmiştir ve böylece üzerinde süzgeç yapısı kuracağımız bu uzayın özelliklerinin bilinmesi amaçlanmıştır.

Tezin son bölümünde, belirtisiz topolojik uzaylar üzerinde önsüzgeç kavramı detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu kavram, I^X in boştan farklı alt kümelerinin ailesidir. Daha sonra genelleştirilmiş süzgeç kavramı verilmiştir. Bu kavram ise 2^{X^I} nın boştan farklı alt kümelerinin ailesidir. Tanımlarından da görülebileceği gibi, önsüzgeçler belirtisiz kümelerle oluşurken, genelleştirilmiş süzgeçler ise bir süzgecin kümelerini, böylece süzgeç kavramını belirtisizleştirir. Bu iki kavram verildikten sonra, birinin diğeri tarafından nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir.

Son olarak I^{X^I} nın bir ögesi olan I-süzgeç ve supra belirtisiz süzgeç kavramından bahsedilmiştir.

Bir çok matematikçi süzgeç kavramı üzerinde çalışarak geliştirmiştir. Örneğin Eklund ve Gahler tam sıralı kafes yapısına sahip olan latis uzaylarda L-süzgeç kavramını tanımlamıştır. Sostak ise 1985'de $L = [0, 1]$ aralığı üzerinde "Smooth fuzzy topology" tanımlamış ve bu topoloji üzerinde süzgeç kavramından bahsetmiştir.

Bu tezde ise $L = [0, 1]$ alınmıştır.

6. KAYNAKLAR

Burton, M. H. 1993. Cauchy Filters and Prefilters. *Fuzzy Sets and Systems*, 54 (3): 317-331.

Burton, M. H. 1993. Completeness in Fuzzy Uniform Spaces. *Quaestiones Math.* , 16 (1): 37-49.

Burton, M. H. 1993. Boundedness in Uniform Spaces and Fuzzy Uniform Spaces. Fuzzy Sets and Systems, 16 (1): 37-49.

Burton, M. H. , Muraleetharan, M. and Garcia, G. J. 1999. Genaralised Filters I. *Fuzzy Sets and Systems*, 106: 275-284.

Burton, M. H. , Muraleetharan, M. and Garcia, G. J. 1999. Genaralised Filters II. *Fuzzy Sets and Systems*, 106: 393-400.

Chang, C. L. 1968. Fuzzy Topological Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24: 182-190.

De Prada Vicente, M. A. and Aranguren, M. S. 1988. Fuzzy Filters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 129: 560-568.

Demirci, M. 1997. Neighborhood structures in smooth topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 92: 123-128

Eklund, P. and Gahler, W. 1988. Basic notions for fuzzy topology I. *Fuzzy Sets and Systems*, 26: 333-356.

Eklund, P. and Gahler, W. 1988. Basic notions for fuzzy topology II. *Fuzzy Sets and Systems*, 27: 171-195.

Eklund, P. and Gahler, W. 1992. Fuzzy filter functor and convergence, in: S.E. Rodabaugh, E.P. Klement, U. Höhle (Eds.), Application of Category Theory to Fuzzy Subsets, Kluwer Academic Publishers, pp. 109–136, Dordrecht.

Gahler, W. 1995. The General Fuzzuy Filter Approach to Fuzzy Topology I. *Fuzzy Sets and Systems*, 76: 205-224.

Gahler, W. 1995. The General Fuzzuy Filter Approach to Fuzzy Topology II. *Fuzzy Sets and Systems*, 76: 225-246.

Güloğlu, M. and Çoker, D. 2005. Convergence in I-fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 151: 615-623.

Karaçay, T 2009. Genel Topoloji. Başkent Üniversitesi, pp. 115-122, Ankara.

Lowen, R. 1976. Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 56: 621-633.

Lowen, R. 1979. Convergence in Fuzzy Topological Spaces. *General Topology and its Applications*, 10: 147-160.

Lowen, R. 1981. Fuzzy Uniform Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 82: 370-385.

Muraleetharan, M. 1997. GeneralisationsOf Filters And Uniform Spaces. Yüksek Lisans Tezi, Rhodes University Depertmants Of Mathematics, Grahamstown, 125.

Pao-Ming, P. and Ying-Ming, L. 1980. Fuzzy Topology. I. Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 76: 571-599.

Ramadan, A. A. , Abd El-Satter, A. ve Kim, Y. C. (2003) Some Properties Of Smooth Filters. *J. Fuzzy Math*, 11 (2): 341-354.

Ramadan, A. A. ve Abd El-Latif, A. A. (2008) Supra Fuzzy Convergence Of Fuzzy Filters. *Bull. Korean Math. Soc*. 45 (2): 207-220.

Sostak, A.P. 1985. On a fuzzy topological structure. *Rend. Circ. Matem. Palermo Ser. II*, 11: 89-103.

Sostak, A.P. 1985. On the neighborhood structure of fuzzy topological spaces. *Zb. Rad.*, 4: 7-14.

Young, L. B., Han, P. J. and Hun, P.B. 1993. Fuzzy Convergence Structures. *Fuzzy Sets and Systems*, 56: 309-315.

Zadeh, L. A. 1965. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8: 338-353.

Willard, S. 1970. General Topology. Dover Publications, pp. 77-85, Mineola, New York.

ÖZGEÇMİŞ

ÇAĞLA SEKİN

cagla.sekin@hotmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2011-2015	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya
Yüksek Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2015-2018	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Araştırma Görevlisi:	Akdeniz Üniversitesi
2017-devam	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya