T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

ESNEK KÜMELER VE TOPOLOJİSİ ÜZERİNE

Müge ÇERÇİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2018

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

ESNEK KÜMELER VE TOPOLOJİSİ ÜZERİNE

Müge ÇERÇİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2018

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK KÜMELER VE TOPOLOJİSİ ÜZERİNE

Müge ÇERÇİ

MATEMATİK

DOKTORA TEZİ

Bu tez 21/06/2018 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Dr.Öğr. Üyesi Gültekin SOYLU (Danışman)

Prof.Dr. Gabil ADİLOV

Prof.Dr. Salih AYTAR.

Dr.Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU

Dr.Öğr. Üyesi Özlem ELMALI

ÖZET

ESNEK KÜMELER VE TOPOLOJİSİ ÜZERİNE

Müge ÇERÇİ

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr.Öğr. Üyesi Gültekin SOYLU

Haziran 2018, 49 sayfa

1999 yılında Molodtsov tarafından çeşitli belirsizlikleri kaldırmak amacıyla ortaya atılan esnek küme teorisi, dikkatleri hızla üzerine çekmiş ve birçok araştırmacı tarafından yeni bir matematiksel araç olarak kabul edilmiştir. Bu yeni alanda çalışan matematikçiler, konunun gelişmesine önemli katkılarda bulunmuşlardır. Bir yandan klasik teori kullanılarak esnek teoriyi geliştirmek amaçlanırken, bir yandan da elde edilen yeni kavramların yine klasik teori ile bağlantısı üzerinde durulmuştur. Bu tez çalışmasında, esnek küme teorisinin temelini oluşturan tanımlara yer verilerek konun tanıtılması sağlanmış ve bu tanımlardan hareketle esnek Kuratowski kapanış ve esnek iç operatörleri aracılığıyla esnek topolojik uzayların inşaası yapılmıştır. Ardından, literatürde yer alan farklı esnek nokta tanımlarından hareketle esnek iç, esnek kapanış, esnek dış, esnek sınır noktaları tanımları ve bunlar aracılığıyla elde edilen esnek kümeler tekrardan tanımlanmıştır. Bu tanımlar ışığında esnek topolojik uzaylar yeniden incelenmiştir. Sonuç olarak, klasik küme teorisi ve klasik topolojik uzaylardan aşina olunandan bazı farklı sonuçlar elde edilmiştir. Bunlara ek olarak esnek metrik uzaylar üzerine çalışılmış ve esnek metrik uzaylar ile klasik metrik uzaylar arasındaki ilişkiye değinilmiştir. Bu noktada, klasik metrik uzayların genellemeleri olan bazı metrik yapıları göz önünde bulundurulmuş ve esnek metriklerin aslında bu genellemelerden biri olan koni metrik kavramına karşılık geldiği gözlemlenmiştir. Böylelikle, koni metrik uzaylar üzerinde elde edilen bütün sabit nokta teoremlerinin esnek metrik uzaylara ek bir koşul gerekmeksizin aktarılabildiği sonucuna varılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Esnek küme, Esnek metrik, Esnek nokta, Esnek topoloji, Esnek iç, Esnek kapanış, Esnek dış, Esnek sınır

JÜRİ: Prof.Dr. Gabil ADİLOV

Prof.Dr. Salih AYTAR

Dr.Öğr. Üyesi Gültekin SOYLU

Dr.Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU

Dr.Öğr. Üyesi Özlem ELMALI

ABSTRACT

ON SOFT SETS AND TOPOLOGY

Müge ÇERÇİ

PhD Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Asst.Prof.Dr. Gültekin SOYLU

June 2018, 49 pages

In 1999, the soft set theory introduced by Molodtsov to remove various uncertainties quickly attracted attention and was accepted by many researchers as a new mathematical tool. Mathematicians working in this new field have made important contributions to the development of the subject. On the one hand, it is aimed to develop soft theory by using classical theory, while on the other hand the relation of new concepts obtained with classical theory is emphasized. In this thesis, the definitions which constitute the basis of the soft set theory are given and the soft topological spaces are constructed by soft Kuratowski closure and soft interior operators. Then, soft interior, soft cluster, soft exterior, soft boundary definations and derived from them are soft sets defined from, based on different soft point definitions in the literature. Soft topological spaces have been reexamined in the light of these definitions. As a result, it has been obtained some different results familiar from classical set theory and classical topological spaces. In addition, soft metric spaces have been studied and the relationship between soft metric spaces and classical metric spaces has been described. At this point, some metric constructions which are generalizations of classical metric spaces are considered and it is observed that soft metrics actually correspond to conic metric concept which is one of these generalizations. Thus, conclusions have been reached that all fixed point theorems obtained on conic metric spaces can be transferred to soft metric spaces without any additional condition.

KEYWORDS: Soft set, Soft metric, Soft point, Soft topology, Sof interior, Soft closure, Soft exterior, Soft boundary

COMMITTEE: Prof.Dr. Gabil ADİLOV

Prof.Dr. Salih AYTAR

Asst.Prof.Dr. Gültekin SOYLU

Asst.Prof.Dr. Mutlu GÜLOĞLU

Asst.Prof.Dr. Özlem ELMALI

ÖNSÖZ

Günlük hayatı matematiksel olarak modelleyebilmek adına ortaya atılan teorilere 1999 yılında Molodtsov tarafından esnek küme teorisi adı altında bir yenisi eklenmiştir. Molodtsov, bu teori ile birlikte; fonksiyonların düzgünlüğü, oyun teorisi, yöneylem araştırması, Riemann-integrali, Perron integrali, olasılık ve ölçüm teorisi gibi konuların uygulaması üzerinde durmuştur. Bu yeni teori, birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve buradan hareketle teorinin geliştirilmesine odaklanılmıştır. Ancak bu çalışmalar, literatürde birçok açık problemi de beraberinde getirmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak, konuyu tanıtmak amacıyla konunun temelini oluşturan tanımlara yer verilmiştir. Konu esnek nokta tanımına geldiğinde ise literatürde üç farklı esnek nokta tanımıyla karşılaşılmış ve her birinin farklı birtakım sonuçlar doğurduğu gözlemlenmiştir. Buradan hareketle, kıyaslamalı olarak bu sonuçların uygulamasına yer verilerek daha geniş bir perspektiften konuyu ele almak amaçlanmıştır. Ardından esnek metrik uzaylar üzerine çalışılmış ve klasik metrik uzaylar ile arasındaki ilişkiye vurgu yapılmıştır.

Bu tez çalışması boyunca desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Dr.Öğr. Üyesi Gültekin SOYLU'ya, tez izleme komitemde bulunan ve konuya getirdikleri değişik bakış açılarıyla tez çalışmamın şekillenmesinde önemli rol oynayan Sayın Prof.Dr. Gabil ADİLOV ve Sayın Dr.Öğr. Üyesi Mutlu GÜLOĞLU'na, akademik yolculuğum boyunca her an yanımda olan ve bu yolda beni hiçbir şekilde yalnız bırakmayan babam Necdet ÇERÇİ ile annem Aycan ÇERÇİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum “Esnek Kümeler ve Topolojisi Üzerine” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

21/06/2018

Müge ÇERÇİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

E	Parametreler kümesi
$\wp(U_E)$	U_E nin kuvvet kümesi
(F, E)	Esnek küme
$SS(E, U)$	Esnek kümelerin ailesi
Φ_E	Esnek boş küme
U_E	Esnek mutlak küme
(u, E)	Esnek nokta
F_e^u	Esnek nokta
$SP(U_E)$	Bütün esnek noktaların kümesi
$\Re(E, U)$	E den U ya olan bütün ikili bağıntıların kümesi
$\mathcal{F}(E, U)$	E den 2^U ya olan bütün küme değer dönüşümlerinin kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\beta(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ nin bütün boştan farklı sınırlı alt kümelerinin bir ailesi
$\widetilde{r}$	Esnek reel sayı
$\mathbb{R}(E)$	Bütün esnek reel sayıların kümesi
$\mathbb{R}(E)^*$	Negatif olmayan bütün esnek reel sayıların kümesi

1. GİRİŞ

Birçok alandaki belirsizlikleri ortadan kaldırmak amacıyla geçmişten günümüze kadar çeşitli teoriler ortaya atılmıştır. Bu teoriler, aslında karşılaşılan problemleri modellemek adına geliştirilmiş matematiksel araçlar olarak düşünülebilir. Bulanık küme teorisi, sezgisel bulanık küme teorisi, olasılık teorisi gibi teoriler bu matematiksel araçların başında gelmektedir.

Molodtsov (1999), yeni bir matematiksel araç olarak esnek küme teorisini ortaya koymuştur. Bu yeni teori, hızla ilgileri üzerine çekmiş ve çok sayıda araştırmacı tarafından esnek küme teorisinin uygulamarı ile matematiğin diğer branşları arasındaki bağlantıları üzerinde durulmuştur. Maji vd. (2003) esnek küme teorisindeki birçok temel kavramı tanıtmış ve esnek kümelerin ilk pratik uygulamasını vermiştir. Shabir ve Naz (2011), esnek topolojik uzayların çalışılmasına öncülük ederken, bir esnek topolojik uzayın, topolojik uzayların bir parametreler ailesini verdiğini göstererek klasik topolojik uzaylar ile esnek topolojik uzaylar arasındaki bağlantıyı incelemiştir. Bu çalışmanın devamında Aygünoğlu ve Aygün (2012), Çağman ve Enginoğlu (2011) ve daha sonra Georgiou vd. (2013) esnek topolojik uzay kavramının gelişmesine önemli katkılarda bulunmuşlardır. Aktaş ve Çağman (2007), esnek grup teorisinin temel düzeyde bir çalışmasını ortaya koymuştur ki bu çalışma aslında esnek kümelerin cebirsel inşaasını içeren bir grubun genişlemesidir.

Yapılan çalışmalar, esnek küme teorisini geliştirmeye odaklanırken birçok açık problemi de beraberinde getirmiştir. Bunlardan en dikkat çekeni, bir esnek kümenin elemanlarını belirleme noktasında üç farklı yaklaşım ile karşılaşılmasıdır. Matejdes (2016) yaptığı çalışmada, küme değerli dönüşümler ve ikili bağıntılar arasındaki benzerliği temel alan esnek topolojik uzayları incelemeye devam ederek bu iki kavram arasındaki yakın ilişkiye vurgu yapmış ve küme değerli dönüşümler aracılığıyla tanımlanan esnek küme ile ikili bağıntılar aracılığıyla tanımlanan esnek kümenin tanımlarının birbirine denk olduğunu göstermiştir. Buradan hareketle, $(E \times U)$ çarpım uzayı ile esnek topolojik uzay arasında birebir bir eşleme oluşturarak bu iki kavramın matematiksel olarak aynı olduğunu ortaya koymuştur. Böylece, elde edilen homeomorfik yapı sonucu Das ve Samanta (2013b) tarafından tanımlanan esnek nokta, çarpım topolojisindeki herhangi bir nokta olarak düşünülebilir. Sonuç olarak Matejdes (2016), birçok esnek topolojik kavram ve sonucun aslında genel topolojiden türetilebilineceğini elde etmiştir. Hemen ardından Matejdes (2017a,b) esnek ayırma aksiyomlarını yeniden ele almıştır. Bu nokta yapısı temel alındığında, bir diğer araştırma alanı olarak Das ve Samanta (2013b) tarafından sunulan esnek metrik kavramından söz etmek mümkündür. Das ve Samanta (2013a) her esnek metriğin bir esnek topoloji doğurduğunu göstermiştir. Öte yandan, klasik metrik uzayların genellemelerine yönelik birçok çalışmada bulunulmuştur. Bunun bir incelemesini An vd. (2015) tarafından yapılan çalışmada bulmak mümkündür. Bu genellemeler arasında bulunan koni metrikler, Khani ve Pourmahdian (2011) ile Ercan (2014) tarafından koni metrik uzayların metriklenebilirliğinin ele alınmasıyla birlikte yeni bir kavram olmaktan çıkmıştır. Bu bilgiler ışığında her esnek metriğin aslında bir koni metrik olarak düşünülebileceğini göstermek, esnek metrik uzayların topolojik yapısının daha iyi anlaşılmasına yol açacaktır. Bu tez çalışmasında, bu bağlantının kurulmasıyla birlikte özellikle sabit nokta teoremleriyle ilgili yapılan çalışmaların artık koni metrik uzaylardan elde edilen sonuçlarla aktarılabilir kılındığı sonucu elde edilmiştir.

Bir diğer esnek nokta tanımı Zorlutuna vd. (2012) tarafından tanımlanmıştır ki bu nokta yapısı özel halde Das ve Samanta (2013b) tarafından verilen nokta yapısına karşılık gelmektedir. Bu kısımda ilk dikkat çeken durum, bir esnek noktayı içermeyen iki farklı esnek kümenin birleşiminin beklenenin aksine bu esnek noktayı içerebilmesi durumudur.

Üçüncü esnek nokta tanımı ise Shabir ve Naz (2011) tarafından tanımlanan ilginç bir nokta yapısı olmakla birlikte klasik küme teorisinden aşina olunan bazı kavramları karşılamamakta ve bunun sonucu olarak da esnek küme terosindeki bazı teoremlerin ispatını alternatif bir yöntem olmadığı takdirde ispatlanamaz kılmaktadır. Bu tez çalışmasında, üç farklı esnek nokta tanımı da ele alınmış, bu tanımlar ışığında esnek küme teorsinde karşılaşılabilecek farklılıklara vurgu yapılmıştır. Buradan hareketle, bu çalışma boyunca esnek nokta tanımlarına ilişkin yapılan gözlemler, ne tür problemlerin kanıtlanabilineceği veya kanıtlanamayacağı hususuna açıklık getirmesi açısından önem teşkil etmektedir.

Bu tez çalışması Giriş ve Kaynaklar bölümü dışında üç kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda kaynak taraması yapılarak tez çalışması boyunca gerekli olan temel bilgiler verilmiş ve bu konuda daha önceden yapılmış çalışmalar hakkında kısa bilgilendirmelerde bulunulmuştur. Yukarıda bahsi geçen üç farklı esnek nokta tanımı ve bu esnek nokta tanımlarıyla ilişkili bazı diğer tanımlar, her biri ayrı bir alt bölümde verilmek üzere ele alınmıştır. Bununla birlikte noktasal olmayan tanımlar aracılığıyla klasik topolojinin benzer bir uygulaması olarak verilebilecek birtakım teoremler ve bunların örneklerine yer verilmiştir.

İkinci kısım, üç alt bölümden oluşmaktadır.

-Birinci bölümde, Shabir ve Naz (2011) tarafından tanımlanan nokta yapısıyla birlikte klasik küme teorisi ve klasik topolojik uzaylar ile ilgili bilinen bazı özelliklerin sağlanmadığına dair ters örnekler verilerek oluşan farklılıklar üzerinde durulmuştur.

-İkinci bölümde, Das ve Samanta (2013b) tarafından tanımlanan esnek nokta tanımı esas alınarak elde edilen esnek metrik uzaylar ile koni metrik uzaylar arasındaki bağlantıya ve dolayısıyla klasik metrik uzaylar ile arasındaki yakın ilişkiye değinilmiştir.

-Üçüncü bölümde ise Zorlutuna vd. (2012) tarafından tanımlanan esnek nokta tanımına yer verilerek bu esnek noktayı içermeyen iki farklı esnek kümenin birleşiminin beklenenin aksine bu esnek noktayı içerebilmesi ile ilgili bir örnek verilmiştir.

Üçüncü kısım ise tez çalışması boyunca elde edilen sonuçların ifade edildiği kısımdır.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde tez boyunca sıkça kullanılan bazı temel kavramların tanımı ve önemli sonuçları verilecektir. Bu bölümdeki temal kavramlar için; Ali vd. (2009), Das ve Samanta (2012, 2013b), Feng vd. (2008), Georgiou ve Megaritis (2014), Huang ve Zhang (2007), Hussain ve Ahmad (2011), Maji vd. (2003), Matejdes (2015, 2016), Molodtsov (1999), Shabir ve Naz (2011), Zorlutuna vd. (2012) makalelerinden yararlanılmıştır. Diğer özel kavramların tanımı ve sonuçları tez boyunca konu içerisinde uygun yerlerde açıklanacaktır.

Bu bölümün ilk kısmında, esnek küme kuramı ve ardından esnek topolojik uzaylar ile ilgili bazı temel kavramlar ifade edilecektir. Daha sonra, bu kavramlar yardımıyla literatürde yerini alan bazı teoremler verilecektir. Bu kısımda verilen bütün tanım ve teoremler aslında, klasik küme teorisi ve klasik topolojik uzayların benzer bir uygulamasından ibarettir.

Tanım 2.1. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi ve $\wp(U)$ da U nun kuvvet kümesi olsun. $F : E \longrightarrow \wp(U)$ bir dönüşüm olmak üzere (F, E) ikilisine U üzerinde bir esnek küme denir.*

Tanım 2.2. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi olmak üzere (F, E) ve (G, E), U üzerinde iki esnek küme olsun. Her $e \in E$ için $F(e) \subseteq G(e)$ oluyorsa (F, E) esnek kümesi, (G, E) esnek kümesinin bir esnek alt kümesidir denir ve*

$$(F, E)\widetilde{\subset}(G, E)$$

ile gösterilir.

Tanım 2.3. *(F, E) ve (G, E), U üzerinde iki esnek küme olsun. (F, E) esnek kümesi (G, E) esnek kümesinin bir esnek alt kümesi ve (G, E) esnek kümesi de (F, E) esnek kümesinin bir esnek alt kümesi ise (F, E) ile (G, E) esnek kümeleri eşittir denir.*

Tanım 2.4. *U boştan farklı bir küme, (F, E), U üzerinde bir esnek küme olsun.*

$F^c : E \to \wp(U)$ dönüşümü, her $e \in E$ için $F^c(e) = U - F(e)$ ile tanımlansın. Bu durumda,

$$(F, E)^c := (F^c, E)$$

esnek kümesine (F, E) esnek kümesinin esnek tümleyeni denir.

Tanım 2.5. *U boştan farklı bir küme olmak üzere U üzerindeki bir (F, E) esnek kümesi, her $e \in E$ için $F(e) = \varnothing$ koşulunu sağlıyorsa (F, E) esnek kümesine, esnek boş küme denir ve Φ_E ile gösterilir.*

Tanım 2.6. *U boştan farklı bir küme olmak üzere U üzerindeki bir (F, E) esnek kümesi, her $e \in E$ için $F(e) = U$ koşulunu sağlıyorsa (F, E) esnek kümesine, esnek mutlak küme denir ve U_E ile gösterilir.*

Tanım 2.7. *(F, E) ve (G, E), U üzerinde iki esnek küme olmak üzere bu iki esnek kümenin esnek birleşimi, her $e \in E$ için $H(e) = F(e) \cup G(e)$ koşulunu sağlayan ve*

$$(H, E) := (F, E)\widetilde{\cup}(G, E)$$

ile gösterilen esnek kümesidir.

Tanım 2.8. *(F, E) ve (G, E), U üzerinde iki esnek küme olmak üzere bu iki esnek kümenin esnek kesişimi, her $e \in E$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ koşulunu sağlayan ve*

$$(H, E) := (F, E)\widetilde{\cap}(G, E)$$

ile gösterilen esnek kümesidir.

Tanım 2.9. *U boştan farklı bir küme ve E parametreler kümesi olsun. U üzerindeki (F, E) ve (G, E) esnek kümelerinin esnek farkı, her $e \in E$ için $H(e) = F(e)\backslash G(e)$ koşulunu sağlayan ve*

$$(H, E) := (F, E)\widetilde{\backslash}(G, E)$$

ile gösterilen esnek kümesidir.

Tanım 2.10. *U boştan farklı bir küme ve E parametreler kümesi olsun. U üzerindeki (F, E) ve (G, E) esnek kümelerinin esnek simetrik farkı,*

her $e \in E$ için $H(e) = (F(e)\backslash G(e)) \cup (G(e)\backslash F(e))$ koşulunu sağlayan ve

$$(H, E) := (F, E)\widetilde{\triangle}(G, E)$$

ile gösterilen esnek kümesidir.

Tanım 2.11. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi ve τ da U üzerindeki esnek kümelerin bir ailesi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan τ ailesine U üzerinde bir esnek topolojidir denir:*

i) $\Phi_E, U_E \widetilde{\in} \tau$,

ii) τ ailesine ait herhangi sayıdaki esnek kümenin esnek birleşimi yine τ ailesine aittir,

iii) τ ailesine ait herhangi iki esnek kümenin esnek kesişimi yine τ ailesine aittir.

(U, τ, E) üçlüsüne U üzerinde bir esnek topolojik uzay denir.

Tanım 2.12. *(U, τ, E), U üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. τ ailesinin elemanlarına U üzerinde esnek açık küme denir.*

Tanım 2.13. *(U, τ, E), U üzerinde bir esnek topolojik uzay ve (F, E), U üzerinde bir esnek küme olsun. (F, E) esnek kümesinin $(F, E)^c$ esnek tümleyen kümesi τ ailesine ait ise (F, E) esnek kümesine U üzerinde bir esnek kapalı küme denir.*

Önerme 2.14. *(U, τ, E), U üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:*

i) Φ_E ve U_E esnek kümeleri esnek kapalı kümelerdir.

ii) Herhangi sayıdaki esnek kapalı kümenin esnek kesişimi, U üzerinde bir esnek kapalı kümedir.

iii) Herhangi iki esnek kapalı kümenin esnek birleşimi, U üzerinde bir esnek kapalı kümedir.

Tanım 2.15. *(F, E) esnek kümesini kapsayan bütün esnek kapalı kümelerin kesişimine (F, E) esnek kümesinin kapanışı denir ve $\overline{(F, E)}$ ile gösterilir. Yani,*

$$\overline{(F,E)} := \widetilde{\bigcap} \left\{ (K,E) \widetilde{\subset} U_E : (K,E) \text{ esnek kapalı ve } (F,E) \widetilde{\subset} (K,E) \right\}$$

olur.

Açıktır ki, $\overline{(F, E)}$ esnek kümesi, (F, E) esnek kümesini kapsayan en küçük esnek kapalı kümedir.

Teorem 2.16. *(U,τ,E) bir esnek topolojik uzay olmak üzere (F,E) ve (G,E) U üzerinde iki esnek küme olsun.Bu durumda, aşağıdaki özellikler geçerlidir:*

i) $\Phi_E = \overline{\Phi_E}$ *ve* $U_E = \overline{U_E}$,

ii) $(F,E)\widetilde{\subset}\overline{(F,E)}$,

iii) (F,E) *esnek kapalı bir kümedir* $\Longleftrightarrow$ $(F,E) = \overline{(F,E)}$,

iv) $\overline{\overline{(F,E)}} = \overline{(F,E)}$,

v) $(F,E)\widetilde{\subset}(G,E)$ *ise* $\overline{(F,E)}\widetilde{\subset}\overline{(G,E)}$,

vi) $\overline{(F,E)\widetilde{\cup}(G,E)} = \overline{(F,E)}\widetilde{\cup}\overline{(G,E)}$,

vii) $\overline{(F,E)\widetilde{\cap}(G,E)}\widetilde{\subset}\overline{(F,E)}\widetilde{\cap}\overline{(G,E)}$.

Tanım 2.17. *(F,E) esnek kümesinin bütün esnek açık alt kümelerin birleşimine (F,E) esnek kümesinin içi denir ve $(F,E)^\circ$ ile gösterilir. Yani,*

$$(F,E)^\circ := \widetilde{\bigcup}\left\{(G,E)\widetilde{\subset}U_E : (G,E)\widetilde{\in}\tau \text{ ve } (G,E)\widetilde{\subset}(F,E)\right\}$$

olur.

Açıktır ki, $(F,E)^\circ$ esnek kümesi, (F,E) esnek kümesi tarafindan kapsanan en büyük esnek açık kümedir.

Teorem 2.18. *(U,τ,E) bir esnek topolojik uzay olmak üzere (F,E) ve (G,E) U üzerinde iki esnek küme olsun.Bu durumda, aşağıdaki özellikler geçerlidir:*

i) $\Phi_E^\circ = \Phi_E$ *ve* $U_E^\circ = U_E$,

ii) $(F,E)^\circ\widetilde{\subset}(F,E)$,

iii) $((F,E)^\circ)^\circ = (F,E)^\circ$

iv) (F,E) *esnek açık bir kümedir* $\Longleftrightarrow$ $(F,E)^\circ = (F,E)$,

v) $(F,E)\widetilde{\subset}(G,E)$ *ise* $(F,E)^\circ \,\widetilde{\subset}\, (G,E)^\circ$,

vi) $\big((F,E)\widetilde{\cap}(G,E)\big)^\circ = (F,E)^\circ \,\widetilde{\cap}\, (G,E)^\circ$,

vii) $(F,E)^\circ \,\widetilde{\cup}\, (G,E)^\circ \,\widetilde{\subset}\, \big((F,E)\widetilde{\cup}(G,E)\big)^\circ$.

Teorem 2.19. *(U,τ,E), U üzerinde bir esnek topolojik uzay ve (F,E), U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda, aşağıdakiler vardır:*

i) $((F,E)^c)^\circ = \left(\overline{(F,E)}\right)^c$,

ii) $\overline{((F,E)^c)} = ((F,E)^\circ)^c$,

iii) $(F,E)^\circ = \left(\overline{((F,E)^c)}\right)^c$.

Tanım 2.20. *(U, τ, E), U üzerinde bir esnek topolojik uzay ve (F, E), U üzerinde bir esnek küme olsun. $(F, E)^c$ esnek kümesinin içine (F, E) esnek kümesinin esnek dışı denir ve $(F, E)_\circ$ ile gösterilir. Yani,*

$$(F, E)_\circ := ((F, E)^c)^\circ$$

esnek kümesine (F, E) esnek kümesinin esnek dışı denir.

Tanım 2.21. *(U, τ, E), U üzerinde bir esnek topolojik uzay ve (F, E), U üzerinde bir esnek küme olsun. (F, E) esnek kümesinin esnek sınırı; $\underline{(F, E)}$ ile gösterilen ve*

$$\underline{(F, E)} := \overline{(F, E)} \widetilde{\cap} \overline{(F, E)^c}$$

ile tanımlanan esnek kümesidir.

Teorem 2.22. *(U, τ, E), U üzerinde bir esnek topolojik uzay ve (F, E), U üzerinde bir esnek küme olsun. O zaman aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

i) $\left(\underline{(F, E)}\right)^c = (F, E)^\circ \widetilde{\cup} ((F, E)^c)^\circ = (F, E)^\circ \widetilde{\cup} (F, E)_\circ$

ii) $\overline{(F, E)} = (F, E)^\circ \widetilde{\cup} \underline{(F, E)}$

iii) $\underline{(F, E)} = \overline{(F, E)} \widetilde{\cap} \overline{(F, E)^c} = \overline{(F, E)} \widetilde{\setminus} (F, E)^\circ$

iv) $(F, E)^\circ = (F, E) \widetilde{\setminus} \underline{(F, E)}$.

2.1. (u, E) Esnek Noktası

Shabir ve Naz (2011), (u, E) ile gösterilen esnek nokta tanımını ortaya atmıştır. Bu kısımda, (u, E) esnek nokta tanımı ve bu esnek nokta yardımıyla bir esnek kümenin içi, kapanışı, dışı ve sınır kümeleri tekrar tanımlanacaktır. Bu tanımların kullanıldığı bazı teorem ve sonuçları, alternatif bir yöntem uygulanmadığı taktirde klasik teoriden aşina olunan teorem ve sonuçlarıyla birtakım farklılıklar göstermektedir. Bu farklılıklara 'Bulgular ve Tartışma' kısmında değinilecektir.

Tanım 2.23. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi, (F, E), U üzerinde bir esnek küme ve $u \in U$ olsun.*

Her $e \in E$ için $F(e) = \{u\}$ oluyorsa (F, E) esnek kümesine bir esnek noktadır denir ve (u, E) ile gösterilir.

Eğer her $e \in E$ için $u \in F(e)$ oluyorsa (u, E) esnek noktası (F, E) esnek kümesine aittir denir ve $(u, E)\widetilde{\in}(F, E)$ ile gösterilir.

Eğer bir $e \in E$ için $u \notin F(e)$ ise o zaman (u, E) esnek noktası (F, E) esnek kümesine ait değildir denir ve $(u, E)\widetilde{\notin}(F, E)$ ile gösterilir.

Tanım 2.24. *(U, τ, E), bir esnek topolojik uzay ve (F, E), U üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $(u, E)\widetilde{\in}(F, E)$ esnek noktası için, $(u, E)\widetilde{\in}(G, E)$ ve $(G, E)\widetilde{\subset}(F, E)$ olacak şekilde bir (G, E) esnek açık kümesi varsa (u, E) esnek noktasına (F, E) esnek kümesinin esnek iç noktasıdır denir.*

Tanım 2.25. *(F, E) esnek kümesinin bütün esnek iç noktalarından oluşan esnek kümeye, (F, E) esnek kümesinin içi denir ve $(F, E)^{\circ}$ ile gösterilir.*

(u, E) esnek noktası yardımıyla esnek iç nokta tanımı yapılırken esnek kapanış noktası, esnek dış nokta ve esnek sınır noktası ile bu noktaların oluşturduğu esnek küme tanımları üzerinde durulmamıştır. Yine klasik teoriden esinlenerek yapılacak olan bu tanımlar doğrultusunda öngörülenin aksine bir takım sonuçlar gözlemlenmiştir. Bahsi geçen tanım ve sonuçlara 'Bulgular ve Tartışma' kısmında değinilecektir.

2.2. e_F Esnek Noktası

Bir diğer esnek nokta tanımı, Zorlutuna vd. (2012) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 2.26. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi, (F, E), U üzerinde bir esnek küme olsun. Bir $e \in E$ için $F(e) \neq \varnothing$ ve her $e' \in E \setminus \{e\}$ için $F(e') = \varnothing$ oluyorsa (F, E) esnek kümesine bir esnek noktadır denir ve e_F ile gösterilir.*

Tanım 2.27. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi, (G, E), U üzerinde bir esnek küme ve e_F bir esnek nokta olsun. Eğer her $e \in E$ için $F(e) \subseteq G(e)$ oluyorsa e_F esnek noktası (G, E) esnek kümesindedir denir ve $e_F\widetilde{\in}(G, E)$ ile gösterilir.*

Önerme 2.28. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi, (G, E), U üzerinde bir esnek küme ve e_F bir esnek nokta olsun. Bu durumda,*

$$e_F\widetilde{\in}(G, E) \implies e_F\widetilde{\notin}(G, E)^c$$

vardır.

Önerme 2.29. *Önerme 2.28'in tersi genel halde geçerli değildir.*

Örnek 2.30. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *ve* $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ *olsun.* $e_{2F} = \{(e_2, \{u_1, u_2, u_3\})\}$ *bir esnek nokta ve* $(G, E) = \{(e_1, \{u_1, u_4\}), (e_2, \{u_1, u_3\})\}$ *esnek kümesi alınsın. Bu durumda,* $e_{2F} \widetilde{\notin} (G, E)$ *olur. Ayrıca,* $(G, E)^c = \{(e_1, \{u_2, u_3\}), (e_2, \{u_2, u_4\}), (e_3, U)\}$ *olduğundan* $e_{2F} \widetilde{\notin} (G, E)^c$ *elde edilir.*

2.3. F_e^u Esnek Noktası

Üçüncü esnek nokta tanımı Das ve Samanta (2013b) tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra Matejdes (2015, 2016), bu esnek nokta tanımı yardımıyla esnek topolojiler ile klasik çarpım topolojierinin birbirine homeomorf olduğunu göstermiştir. Bu kısımda, ilk olarak Das ve Samanta'nın tanımladığı esnek nokta ve ardından Matejdes'in kurmuş olduğu homeomorfizm verilecektir. Daha sonra, yine Das ve Samanta tarafından tanımlanan esnek reel sayılar ve esnek metrik tanımlarına yer verilecektir. Söz konusu esnek metrik uzaylar olduğunda, bu esnek nokta tanımı esas alınarak birtakım ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlara 'Bulgular ve Tartışma' kısmında yer verilecektir.

Tanım 2.31. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi ve (F, E), U üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer bir $u \in U$ için $F(e) = \{u\}$ olacak şekilde bir $e \in E$ var ve her $e' \in E \backslash e$ için $F(e') = \varnothing$ oluyorsa (F, E) esnek kümesine bir esnek noktadır denir ve F_e^u ile gösterilir.*

Bütün esnek noktaların kümesi $SP(U)$ ile gösterilir.

Dikkat edilirse, F_e^u esnek noktası e_F esnek noktasının özel bir halidir.

Tanım 2.32. *U boştan farklı bir küme, (G, E), U üzerinde bir esnek küme ve F_e^u bir esnek nokta olsun. Eğer, $e \in E$ için $F(e) = \{u\} \subset G(e)$ ise F_e^u esnek noktası (G, E) esnek kümesine aittir denir ve $F_e^u \widetilde{\in} (G, E)$ ile gösterilir.*

Tanım 2.33. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi, $x, y \in U$, $\lambda, \mu \in E$ ve F_λ^x ile F_μ^y iki esnek nokta olsun.*

Eğer, $\lambda = \mu$ ve $F(\lambda) = F(\mu)$ ise (yani, $x = y$) o zaman, F_λ^x ve F_μ^y noktaları esnek eşittir denir.

Böylece, $F_\lambda^x \neq F_\mu^y \iff \lambda \neq \mu$ vardır.

Önerme 2.34. *Esnek noktaların herhangi bir ailesinin birleşimi bir esnek küme olarak düşünülebilir. Her esnek küme de bu kümeye ait olan bütün esnek noktaların birleşimi olarak ifade edilebilir. Yani bir* (G, E) *esnek kümesi;*

$$(G, E) = \widetilde{\bigcup_{F_e^u \widetilde{\in} (G,E)}} F_e^u$$

şeklinde belirlenebilir.

Önerme 2.35. (G, E) *ve* (H, E) *iki esnek küme olsun.*

$$(G, E) \widetilde{\subset} (H, E) \Longleftrightarrow \left[F_e^u \widetilde{\in} (G, E) \Longrightarrow F_e^u \widetilde{\in} (H, E) \right]$$

ve

$$(G, E) = (H, E) \Longleftrightarrow \left[F_e^u \widetilde{\in} (G, E) \Longleftrightarrow F_e^u \widetilde{\in} (H, E) \right]$$

özellikleri vardır.

Önerme 2.36. *Bir* F_e^u *esnek noktası için aşağıdakiler vardır:*

i) $F_e^u \widetilde{\in} (G, E) \Longleftrightarrow F_e^u \widetilde{\notin} (G, E)^c$,

ii) $F_e^u \widetilde{\in} (G, E) \widetilde{\cup} (H, E) \Longleftrightarrow F_e^u \widetilde{\in} (G, E)$ *veya* $F_e^u \widetilde{\in} (H, E)$,

iii) $F_e^u \widetilde{\in} (G, E) \widetilde{\cap} (H, E) \Longleftrightarrow F_e^u \widetilde{\in} (G, E)$ *ve* $F_e^u \widetilde{\in} (H, E)$.

Bu esnek nokta tanımı yardımıyla esnek topolojiler ile klasik çarpım topolojieri arasında homeomorfik bir yapı oluşturmak mümkündür. Bu homeomorfik yapıyı oluştururken Matejdes (2015, 2016) aşağıdaki açıklamalarda bulunmuştur:

"$E \times U$ kartezyen çarpımının herhangi bir S alt kümesine E den U ya bir ikili bağıntı denir. E den U ya bütün ikili bağıntıların kümesi $\Re(E, U)$ ile gösterilsin.

$$S[e] := \{u \in U : [e, u] \in S\}$$

E den U nun kuvvet kümesine olan küme değerli dönüşüm $F : E \longrightarrow 2^U$ ile gösterilir. E den 2^U ya olan bütün küme değerli dönüşümlerin kümesi $\mathcal{F}(E, U)$ ile gösterilsin. F nin grafiği;

$$Gr(F) := \{[e, u] \in E \times U : u \in F(e)\}$$

kümesidir ve $E \times U$ kümesinin bir alt kümesidir. O halde, $Gr(F) \in \Re(E, U)$ olur. Bu yüzden, herhangi bir F küme değerli dönüşüm, $\Re(E, U)$ nun

$$R_F := \{[e, u] \in E \times U : u \in F(e)\} = Gr(F)$$

ile gösterilen bir ikili bağıntısını belirler.

Diğer yandan, herhangi bir $S \in \Re(E,U)$ bağıntısı, $F_S(e) = S[e]$ olmak üzere $F_S : E \longrightarrow 2^U$ küme değerli dönüşümünü belirler. Bu yüzden, bir $S \in \Re(E,U)$ bağıntısı ile bir $G \in \mathcal{F}(E,U)$ küme değerli dönüşümü arasında bire-bir bir eşleme vardır. Yani, $S \longmapsto F_S$, $F_S(e) = S[e]$, $G \longmapsto R_G$, $R_G[e] = G(e)$, $F_{R_G} = G$, $R_{F_S} = S$"

Tanım 2.37. *$F : E \longrightarrow 2^U$ bir küme değerli dönüşüm olmak üzere (F,E) ikilisine U üzerinde bir esnek küme denir. U üzerindeki bütün esnek kümelerin ailesi $SS(E,U)$ ile gösterilir. $\tau \subset SS(E,U)$ bir esnek topoloji olmak üzere (U,τ,E) üçlüsüne esnek topolojik uzay denir.*

Yukarıda da belirtildiği gibi bir F küme değerli dönüşümünün grafiği ile $\Re(E,U)$ nun bir elemanı olan $Gr(F) \subset E \times U$ bağıntısı arasında hiçbir farklılık yoktur. Bu yüzden, bir esnek küme aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

Tanım 2.38. *E bir parametreler kümesi olmak üzere U kümesi üzerindeki herhangi bir esnek küme, $E \times U$ kümesinin herhangi bir alt kümesidir. Bu yüzden, bir esnek küme, $\Re(E,U)$ nun bir elemanıdır.*

Önerme 2.39. *U boştan farklı bir küme ve E parametreler kümesi olsun. $F \in \mathcal{F}(E,U)$ ve $\tau \subset SS(E,U)$ esnek topolojisi F küme değerli dönüşümlerin bir ailesi olmak üzere her F küme değerli dönüşümü $R_F \in \Re(E,U)$ ile gösterilen bir ikili bağıntı belirlesin. $E \times U$ kümesi üzerindeki $\tau_{E\times U}$ topolojisi*

$$\tau_{E\times U} := \{R \in \Re(E,U) : (F_R, E) \in \tau\}$$

olarak alınsın. U üzerindeki $\tau_{E,U}$ esnek topolojisi ise,

$$\tau_{E,U} = \{(G,E) \in SS(E,U) : R_G \in \tau_{E\times U}\}$$

olarak alınsın. Bu durumda,

$(U,\tau_{E,U},E)$ bir esnek topolojik uzaydır. $\Longleftrightarrow$ $(E\times U, \tau_{E\times U})$ bir topolojik uzaydır.

Teorem 2.40. *Herhangi bir (U,τ,E) esnek topolojik uzayı ile $(E\times U,\tau_{E\times U})$ topolojik uzayı homeomorfiktir ve $h : (SS_0(E,U),\tau) \longrightarrow (E\times U,\tau_{E\times U})$ homeomorfizmi,*

$$h(F_e^u) = [e,u]$$

eşitliği ile verilir.

Teorem 2.41. *i) Bir (G, E) esnek kümesi, (U, τ, E) esnek topolojik uzayında bir esnek açık kümedir.*
$\Longleftrightarrow$ *R_G, $(E \times U, \tau)$ topolojik uzayında açıktır.*

ii) S, $(E \times U, \tau)$ topolojik uzayında açıktır $\Longleftrightarrow$ (F_S, E), (U, τ, E) esnek topolojik uzayında bir esnek açık kümedir.

2.3.1. Esnek metrik uzaylar

Bu alt bölümde Das ve Samanta (2013b) tarafından bir diğer araştırma alanı olarak ortaya atılan ve F_e^u esnek noktası göz önünde bulundurularak çalışılan esnek metrik kavramı üzerinde durulacak. Das ve Samanta yaptıkları çalışmada, her esnek metriğin bir esnek topoloji doğurduğunu gösterdi. Buradan hareketle özellikle sabit nokta teoremlerinin esnek teoriye uyarlaması niteliğinde birçok çalışma da literatürde yerini aldı.

Öte yandan, metrik uzayların genellemelerine yönelik çok sayıda çalışma bulunmaktadır. An vd. (2015) bu genellemelerin detaylı bir incelemesini yapmıştır. Bu genellemeler arasında koni metrik uzaylar da bulunmaktadır. 'Bulgular ve Tartışma' kısmında esnek metrik uzaylar ve koni metrik uzaylar arasındaki ilişkiye değinileceğinden dolayı bu alt bölümde ilgili tanım ve teoremleri ifade etmek uygun olacaktır.

Bu çalışma boyunca , E parametre kümesinin boştan farklı sonlu bir küme olduğu varsayılacak ve eleman sayısı $s(E)$ ile gösterilecek. Bu varsayım sınırlayıcı bir koşul gibi düşünülmemelidir. Pratik nedenlerden dolayı sonsuz bir parametre kümesi beklenmemektedir.

Tanım 2.42. *$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $\beta(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ nin bütün boştan farklı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi olsun. E kümesi de parametrelerin bir kümesi olarak alınsın. $F : E \longrightarrow \beta(\mathbb{R})$ dönüşümüne bir esnek reel küme denir ve (F, E) ile gösterilir.*

Eğer özel olarak, her $e \in E$ için $F(e)$ değeri; tek elemanlı bir küme ise o zaman, (F, E) esnek kümesine bir esnek reel sayı denir. Esnek reel sayıların gösteriliminde $\widetilde{r}$, $\widetilde{s}$, $\widetilde{t}$ şeklinde gösterilecektir. Özel olarak, her $e \in E$ için $\overline{r}(e) = r$ olacak şekildeki esnek reel sayılar $\overline{r}$, $\overline{s}$, $\overline{t}$ ile gösterilir. Örneğin, $\overline{0}$ esnek reel sayısı, her $e \in E$ için $\overline{0} = 0$ şeklindedir.

$s(E) = n$ olmak üzere bir E parametre kümesi için, bir $\widetilde{r}$ esnek reel sayısının $\mathbb{R}^n$ deki

$$\widetilde{r} \longleftrightarrow (\widetilde{r}(e_1), \widetilde{r}(e_2), ..., \widetilde{r}(e_n))$$

vektörü ile bire-bir eşleştirilebileceğini gözlemlemek mümkündür.

Tanım 2.43. *$\widetilde{r}$ ve $\widetilde{s}$ esnek reel sayıları için kısmi sıralama ve kesin kısmi sıralama bağıntıları aşağıdaki gibi verilebilir:*

i) $\forall e \in E$ için $\widetilde{r}(e) \leq \widetilde{s}(e) \Longrightarrow \widetilde{r}\widetilde{\leq}\widetilde{s}$,

ii) $\forall e \in E$ için $\widetilde{r}(e) \geq \widetilde{s}(e) \Longrightarrow \widetilde{r}\widetilde{\geq}\widetilde{s}$,

iii) $\forall e \in E$ için $\widetilde{r}(e) > \widetilde{s}(e) \Longrightarrow \widetilde{r}\widetilde{>}\widetilde{s}$,

iv) $\forall e \in E$ için $\widetilde{r}(e) < \widetilde{s}(e) \Longrightarrow \widetilde{r}\widetilde{<}\widetilde{s}$.

Tanım 2.44. *(F, E) ve (G, E) iki esnek reel küme olsun. O zaman, bu iki esnek reel küme arasındaki toplam, fark, çarpım ve bölüm işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

i) $\forall e \in E$ için $\left(F\widetilde{+}G\right)(e) = \{a + b : a \in F(e), b \in G(e)\}$,

ii) $\forall e \in E$ için $\left(F\widetilde{-}G\right)(e) = \{a - b : a \in F(e), b \in G(e)\}$,

iii) $\forall e \in E$ için $(F\widetilde{.}G)(e) = \{a.b : a \in F(e), b \in G(e)\}$,

iv) $\forall e \in E$ ve $0 \notin G(e)$ için $\left(F\widetilde{\div}G\right)(e) = \{a\backslash b : a \in F(e), b \in G(e) \setminus \{0\}\}$.

Tanım 2.45. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi ve U_E esnek mutlak küme olsun. $SP(U_E)$, U_E nin bütün esnek noktalarının ailesi ve $\mathbb{R}(E)^*$ de negatif olmayan bütün esnek reel sayıların kümesi olsun. Esnek noktalar kullanılarak esnek metrik aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$\widetilde{d} : SP(U_E) \times SP(U_E) \longrightarrow \mathbb{R}(E)^*$ bir dönüşüm olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan $\widetilde{d}$ dönüşümüne U_E esnek kümesi üzerinde bir esnek metriktir denir:

M$_1$) $\forall F^x_\lambda, F^y_\mu \widetilde{\in} U_E$ için $\widetilde{d}(F^x_\lambda, F^y_\mu)\widetilde{\geq}\overline{0}$,

M$_2$) $\widetilde{d}(F^x_\lambda, F^y_\mu) = \overline{0} \Longleftrightarrow F^x_\lambda = F^y_\mu$,

M$_3$) $\forall F^x_\lambda, F^y_\mu \widetilde{\in} U_E$ için $\widetilde{d}(F^x_\lambda, F^y_\mu) = \widetilde{d}(F^y_\mu, F^x_\lambda)$,

M$_4$) $\forall F^x_\lambda, F^y_\mu, F^z_\gamma \widetilde{\in} U_E$ için $\widetilde{d}(F^x_\lambda, F^z_\gamma)\widetilde{\leq}\widetilde{d}(F^x_\lambda, F^y_\mu) \mathbin{\widetilde{+}} \widetilde{d}(F^y_\mu, F^z_\gamma)$.

U_E üzerindeki bir $\widetilde{d}$ esnek metriği ile U_E esnek kümesine esnek metrik uzay denir ve $(U_E, \widetilde{d}, E)$ veya $(U_E, \widetilde{d})$ ile gösterilir. (M$_1$),(M$_2$),(M$_3$),(M$_4$) koşullarına esnek metrik aksiyomları denir.

Burada esnek metriğin U_E esnek uzayı ya da U klasik uzayı üzerinde tanımlanmasının pratikte bir öneminin olmadığını belirtmekte fayda var. Çünkü esnek metrik kavramı, klasik metrikten tanım kümesi ile değil değer kümesi ile ayrılır.

Örnek 2.46. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi ve U_E esnek mutlak küme olsun. $\widetilde{d} : SP(U_E) \times SP(U_E) \to \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü,*

$$\widetilde{d}(F^x_\lambda, F^y_\mu) = \begin{cases} \overline{0}, & F^x_\lambda = F^y_\mu \text{ ise;} \\ \overline{1}, & F^x_\lambda \neq F^y_\mu \text{ ise;} \end{cases}$$

ile tanımlansın. $\widetilde{d}$ dönüşümü, esnek metrik aksiyomlarını sağlar. Böylece $\widetilde{d}$, U_E esnek kümesi üzerinde bir esnek metriktir. $\widetilde{d}$ esnek metriğine U_E esnek kümesi üzerinde esnek ayrık metrik denir. $(U_E, \widetilde{d})$ ikilisine de esnek ayrık metrik uzay denir.

Tanım 2.47. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay olsun. Eğer, $\forall F^x_\lambda, F^y_\mu \widetilde{\in} U_E$ için $\widetilde{d}(F^x_\lambda, F^y_\mu) \widetilde{\leq} \widetilde{k}$ olacak şekilde bir $\widetilde{k}$ pozitif esnek reel sayısı varsa o zaman $(U_E, \widetilde{d})$ esnek metrik uzayına sınırlı esnek metrik uzay denir. Aksi takdirde, $(U_E, \widetilde{d})$ esnek metrik uzayı sınırsız esnek metrik uzaydır.*

Tanım 2.48. *$\widetilde{d} : SP(U_E) \times SP(U_E) \to \mathbb{R}(E)^*$ bir dönüşüm olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan $\widetilde{d}$ dönüşümüne U_E esnek kümesi üzerinde bir esnek pseudo-metriktir denir:*

P$_1$) $\forall F^x_\lambda, F^y_\mu \widetilde{\in} U_E$ için $\widetilde{d}(F^x_\lambda, F^y_\mu) \widetilde{\geq} \overline{0}$,

P$_2$) $F^x_\lambda = F^y_\mu \implies \widetilde{d}(F^x_\lambda, F^y_\mu) = \overline{0}$,

P$_3$) $\forall F^x_\lambda, F^y_\mu \widetilde{\in} U_E$ için $\widetilde{d}(F^x_\lambda, F^y_\mu) = \widetilde{d}(F^y_\mu, F^x_\lambda)$,

P$_4$) $\forall F^x_\lambda, F^y_\mu, F^z_\gamma \widetilde{\in} U_E$ için $\widetilde{d}(F^x_\lambda, F^z_\gamma) \widetilde{\leq} \widetilde{d}(F^x_\lambda, F^y_\mu) \widetilde{+} \widetilde{d}(F^y_\mu, F^z_\gamma)$.

U_E üzerindeki bir $\widetilde{d}$ esnek pseudo-metriği ile birlikte U_E esnek kümesine esnek pseudo-metrik uzay denir ve $(U_E, \widetilde{d}, E)$ veya $(U_E, \widetilde{d})$ ile gösterilir.

Örnek 2.49. *U, en az iki elemandan oluşan klasik bir küme, E parametrelerin boştan farklı bir kümesi ve U_E de E üzerindeki esnek mutlak küme olsun.*

$\widetilde{d} : SP(U_E) \times SP(U_E) \to \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü, $\forall F^x_\lambda, F^y_\mu \widetilde{\in} U_E$ için

$$\widetilde{d}(F^x_\lambda, F^y_\mu) = \overline{0}$$

ile tanımlansın. O zaman, $\widetilde{d}$ dönüşümü U_E esnek kümesi üzerinde bir esnek pseudo-metriktir. $\widetilde{d}$ nin bir esnek metrik olmadığını belirtmekte fayda vardır.

Tanım 2.50. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve (Y, E), U_E esnek mutlak kümesinin boştan farklı bir esnek alt kümesi olsun. O zaman, $\widetilde{d}_Y : SP(Y, E) \times SP(Y, E) \to \mathbb{R}(E)^*$ olmak üzere $\forall F_\lambda^x, F_\mu^y \widetilde{\in} (Y, E)$ için*

$$\widetilde{d}_Y(F_\lambda^x, F_\mu^y) = \widetilde{d}(F_\lambda^x, F_\mu^y)$$

ile verilen $\widetilde{d}_Y$ dönüşümü (Y, E) üzerinde bir esnek metriktir. $\widetilde{d}_Y$ metriği, (Y, E) üzerinde $\widetilde{d}$ tarafından indirgenen esnek metrik olarak adlandırılır. $(Y, \widetilde{d}_Y, E)$ esnek metrik uzayına $(U_E, \widetilde{d}, E)$ esnek metrik uzayının bir esnek alt uzayı denir.

Tanım 2.51. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve (Y, E), U_E esnek mutlak kümesinin boştan farklı bir esnek alt kümesi olsun. O zaman, $\forall \gamma \in E$ için*

$$\delta\left((Y, E)\right)(\gamma) = \sup\left\{\widetilde{d}(F_\lambda^x, F_\mu^y)(\gamma) : F_\lambda^x, F_\mu^y \widetilde{\in} (Y, E)\right\}$$

ile tanımlanan $\delta\left((Y, E)\right)$ esnek kümesine (Y, E) esnek kümesinin çapı denir.

Eğer, herhangi bir $\lambda \in E$ için supremum sonlu değil ise, (Y, E) esnek kümesi sonsuz çaplı bir esnek kümedir.

Açıktır ki, U_E esnek mutlak kümesinin boştan farklı bir (Y, E) esnek kümesi için

$$\delta\left((Y, E)\right) \widetilde{\geq} \overline{0}$$

olur.

Teorem 2.52. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay olsun. O zaman, aşağıdakiler vardır:*

i) $\delta\left((Y, E)\right) = \overline{0} \iff (Y, E)$ bir tek esnek elemandan oluşmaktadır.

ii) U_E esnek mutlak kümesinin her (Y, E),(Z, E) esnek alt kümesi için,

$$(Y, E) \widetilde{\subset} (Z, E) \implies \delta\left((Y, E)\right) \widetilde{\leq} \delta\left((Z, E)\right)$$

vardır.

iii) U_E esnek mutlak kümesinin $(Y, E) \widetilde{\cap} (Z, E) \neq \Phi_E$ koşulunu sağlayan her (Y, E), (Z, E) esnek alt kümeleri için,

$$\delta\left((Y, E) \widetilde{\cup} (Z, E)\right) \widetilde{\leq} \delta\left((Y, E)\right) \widetilde{+} \delta\left((Z, E)\right)$$

eşitsizliği vardır.

Tanım 2.53. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay olsun. F_e^a, U_E esnek mutlak kümesinin bir esnek sabit noktası ve (S,E) de U_E nin boştan farklı bir esnek alt kümesi olsun. O zaman, F_e^a esnek noktasının (S,E) esnek kümesine uzaklığı $\delta\left(F_e^a,(S,E)\right)$ ile gösterilen ve*

$$\delta\left(F_e^a,(S,E)\right)(\gamma) := \inf\left\{\widetilde{d}(F_e^a, F_\lambda^x)(\gamma) : F_\lambda^x \widetilde{\in} (S,E)\right\}$$

ile tanımlanan esnek kümesidir.

Tanım 2.54. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve (Y,E), (Z,E) esnek kümeleri de U_E esnek mutlak kümesinin boştan farklı iki esnek alt kümesi olsun. (Y,E) ile (Z,E) esnek kümeleri arasındaki uzaklık, $\delta\left((Y,E),(Z,E)\right)$ ile gösterilen ve*

$$\delta\left((Y,E),(Z,E)\right)(e) := \inf\left\{\widetilde{d}(F_\lambda^x, F_\mu^y)(e) : F_\lambda^x \widetilde{\in} (Y,E), F_\mu^y \widetilde{\in} (Z,E)\right\}$$

ile tanımlanan esnek kümesidir.

Tanım 2.55. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $\widetilde{r}$ negatif olmayan bir esnek reel sayı olsun. Herhangi bir $F_e^a \widetilde{\in} U_E$ esnek noktası için F_e^a merkezli, $\widetilde{r}$ yarıçaplı bir açık yuvar, U_E esnek mutlak kümesinin $\widetilde{d}(F_\lambda^x, F_e^a) \widetilde{<} \widetilde{r}$ koşulunu sağlayan esnek noktalarının bir ailesidir ve $B(F_e^a, \widetilde{r})$ ile gösterilir. Böylece,*

$$B(F_e^a, \widetilde{r}) = \left\{F_\lambda^x \widetilde{\in} U_E : \widetilde{d}(F_\lambda^x, F_e^a) \widetilde{<} \widetilde{r}\right\} \widetilde{\subset} SP(U_E)$$

ve $SS\left(B(F_e^a, \widetilde{r})\right)$; F_e^a merkezli, $\widetilde{r}$ yarıçaplı bir esnek açık yuvar olarak adlandırılır.

Tanım 2.56. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $\widetilde{r}$ negatif olmayan bir esnek reel sayı olsun. Herhangi bir $F_e^a \widetilde{\in} U_E$ esnek noktası için F_e^a merkezli, $\widetilde{r}$ yarıçaplı bir kapalı yuvar, U_E esnek mutlak kümesinin $\widetilde{d}(F_\lambda^x, F_e^a) \widetilde{\leq} \widetilde{r}$ koşulunu sağlayan esnek noktalarının bir ailesidir.$B\left[F_e^a, \widetilde{r}\right]$ ile gösterilir. Böylece,*

$$B\left[F_e^a, \widetilde{r}\right] = \left\{F_\lambda^x \widetilde{\in} U_E : \widetilde{d}(F_\lambda^x, F_e^a) \widetilde{\leq} \widetilde{r}\right\} \widetilde{\subset} SP(U_E)$$

ve $SS\left(B\left[F_e^a, \widetilde{r}\right]\right)$; F_e^a merkezli, $\widetilde{r}$ yarıçaplı bir esnek kapalı yuvar olarak adlandırılır.

Tanım 2.57. *$(U_E, \widetilde{d})$ en az iki esnek noktaya sahip olan bir esnek metrik uzay olsun. Eğer, U_E esnek mutlak kümesinin F_e^a, F_f^b noktaları $d(F_e^a, F_f^b)\widetilde{\geq}\bar{0}$ koşulunu sağlıyorsa o zaman,*

$$SS\left(B(F_e^a, \widetilde{r})\right)\widetilde{\cap}SS\left(B(F_f^b, \widetilde{r})\right) = \Phi_E$$

olacak şekilde F_e^a merkezli, $\widetilde{r}\widetilde{\geq}\bar{0}$ yarıçaplı $SS\left(B(F_e^a, \widetilde{r})\right)$ açık yuvarı ve F_f^b merkezli, $\widetilde{r}\widetilde{\geq}\bar{0}$ yarıçaplı $SS\left(B(F_f^b, \widetilde{r})\right)$ açık yuvarı var olsun. Bu durumda, $(U_E, \widetilde{d})$ esnek metrik uzayı Hausdorff özelliğine sahiptir denir.

Teorem 2.58. *Her esnek metrik uzay Hausdorff'tur.*

Tanım 2.59. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $F_e^a\widetilde{\in}U_E$ olsun. $N(F_e^a)$, F_e^a esnek noktasını içeren esnek noktaların bir ailesi olmak üzere eğer,*

$$F_e^a\widetilde{\in}B(F_e^a, \widetilde{r}) \subset N(F_e^a)$$

olacak şekilde bir $\widetilde{r}$ pozitif esnek reel sayısı varsa, $N(F_e^a)$ ailesine, F_e^a esnek noktasının esnek komşuluğu denir. $SS\left(N(F_e^a)\right)$, F_e^a esnek noktasının bir esnek komşuluğu olarak adlandırılır.

Teorem 2.60. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $F_e^a\widetilde{\in}U_E$ olmak üzere N_1 ve N_2, $(U_E, \widetilde{d})$ esnek metrik uzayında F_e^a nın esnek komşulukları olsun. O zaman, $SS(N_1)\widetilde{\cap}SS(N_2)$, $(U_E, \widetilde{d})$ esnek metrik uzayında F_e^a esnek noktasının bir esnek komşuluğudur.*

Teorem 2.61. *Her esnek açık yuvar, kendi esnek noktalarının bir esnek komşuluğudur.*

Tanım 2.62. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve (Y, E), U_E esnek mutlak kümesinin esnek boş kümeden farklı bir esnek alt kümesi olsun. Eğer,*

$$F_e^a\widetilde{\in}SS\left(B(F_e^a, \widetilde{r})\right)\widetilde{\subset}SP(Y, E)$$

olacak şekilde bir $\widetilde{r}$ esnek reel sayısı varsa, F_e^a esnek noktasına (Y, E) esnek kümesinin bir esnek iç noktası denir.

Tanım 2.63. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve (Y, E), U_E esnek mutlak kümesinin esnek boş kümeden farklı bir esnek alt kümesi olsun. O zaman, (Y, E) esnek kümesinin içi, (Y, E) esnek kümesinin bütün iç noktalarından oluşan küme olarak tanımlanır ve $(Y, E)^\circ$ ile gösterilir. Yani,*

$$(Y, E)^\circ = \left\{F_\lambda^x\widetilde{\in}(Y, E) : F_\lambda^x\widetilde{\in}B(F_\lambda^x, \widetilde{r})\widetilde{\subset}SP(Y, E)\right\}$$

$SS\left((Y, E)^\circ\right)$ esnek kümesi (Y, E) esnek kümesinin esnek içi olarak adlandırılır.

Teorem 2.64. $(U_E, \widetilde{d})$ *bir esnek metrik uzay ve* (Y, E), (Z, E) *esnek kümeleri de esnek boş kümeden farklı esnek alt kümeler olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:*

i) $SS\left((Y,E)^{\circ}\right) \widetilde{\subset} (Y,E)$,

ii) $(Y,E) \widetilde{\subset} (Z,E) \implies SS\left((Y,E)^{\circ}\right) \widetilde{\subset} SS\left((Z,E)^{\circ}\right)$,

iii) $SS\left((Y,E)^{\circ}\right) \widetilde{\cap} SS\left((Z,E)^{\circ}\right) = SS\left((Y,E)^{\circ} \widetilde{\cap} (Z,E)^{\circ}\right)$,

iv) $SS\left((Y,E)^{\circ} \widetilde{\cup} (Z,E)^{\circ}\right) \widetilde{\supset} SS\left((Y,E)^{\circ}\right) \widetilde{\cup} SS\left((Z,E)^{\circ}\right)$.

Tanım 2.65. $(U_E, \widetilde{d})$ *bir esnek metrik uzay ve* (Y, E), U_E *esnek mutlak kümesinin esnek boş kümeden farklı bir esnek alt kümesi olsun. O zaman,*

(Y, E) *esnek kümesi, bir esnek açık kümedir.* $\Longleftrightarrow$ (Y, E) *esnek kümesinin bütün esnek noktaları iç noktalarıdır.*

Teorem 2.66. *Herhangi bir* $(U_E, \widetilde{d})$ *esnek metrik uzayında,*

i) Φ_E *esnek boş kümesi, esnek açık kümedir;*

ii) U_E *esnek mutlak kümesi, esnek açık kümedir;*

iii) Esnek açık kümelerin keyfi birleşimi, esnek açıktır;

iv) Esnek açık kümelerin sonlu sayıdaki kesişimi esnek açıktır.

Sonuç 2.67. *Teorem 2.66 gereğince* $(U_E, \widetilde{d})$ *esnek metrik uzayındaki bütün esnek açık kümelerin* τ *ailesi,* U *üzerinde tanımlanan esnek topoloji formundadır. Buradan hareketle, bir* U_E *esnek kümesi üzerinde verilen her esnek metriğin* U *üzerinde bir esnek topoloji belirlediği söylenebilir. Böylece, her* $(U_E, \widetilde{d}, E)$ *esnek metrik uzayı aynı zamanda bir* (U_E, τ, E) *esnek topolojik uzayıdır.*

Son olarak metrik uzayların bir genellemesi olarak bahsi geçen koni metrik uzaylar ve ilgili tanımları vermek uygun olacaktır. Burada, norm yardımıyla tanımlanan metriğe göre tam olan normlu uzaya Banach uzayı denildiğini hatırlatmakta fayda vardır.

Tanım 2.68. B *bir reel Banach uzayı ve* P, B *nin bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan* P *kümesine bir konidir denir:*

i) P *kapalı, boştan farklı ve* $P \neq \{0\}$,

ii) Her $x, y \in P$ *ve* a, b *negatif olmayan reel sayıları için* $ax + by \in P$,

iii) $P \cap (-P) = \{0\}$.

Verilen bir $P \subset B$ konisi için P ye göre bir $\preceq$ kısmi sıralaması;

$$x \preceq y \iff y - x \in P$$

ile tanımlanabilir. Buradan hareketle, $x \prec y$ gösterimi ile $x \preceq y$ ve $x \neq y$ koşulları ifade edilmektedir. Son olarak $intP$, P nin içini göstermek üzere $y - x \in intP$ koşulu $x \ll y$ gösterimi ile ifade edilecektir.

Tanım 2.69. *U boştan farklı bir küme ve B bir reel Banach uzayı ve $P \subseteq B$ bir koni olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $d : U \times U \to P$ dönüşümüne U üzerinde bir koni metrik denir:*

d_1) $\forall x, y \in U$ için $0 \preceq d(x, y)$ ve $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

d_2) $\forall x, y \in U$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

d_3) $\forall x, y, z \in U$ için $d(x, y) \preceq d(x, z) + d(y, z)$.

(U, d) ikilisine bir koni metrik uzay denir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde ilk olarak Kaynak Taraması bölümünün ilk kısmında verilen tanımlar yardımıyla literatürde yer verilmeyen ve klasik topolojik uzaylar motivasyonuyla elde edilebilen bazı teoremlere yer verilecektir. Öncelikle, Esnek Kuratowski Kapanış Operatörü ve bunun bir uygulamasını aşağıdaki şekilde incelemek uygun olacaktır.

Teorem 3.70. *Bir (U,τ,E) esnek topolojik uzayındaki $\widetilde{\varphi}:\wp(U_E)\to\wp(U_E)$,*

$$\widetilde{\varphi}((F,E))=\overline{(F,E)}$$

ile verilen operatörü aşağıdaki dört özeliği sağlıyorsa $\widetilde{\varphi}$ ye esnek Kuratowski kapanış operatörü denir:

K$_a$) $(F,E)\widetilde{\subset}\widetilde{\varphi}((F,E))$,

K$_b$) $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\varphi}((F,E)))=\widetilde{\varphi}((F,E))$,

K$_c$) $\widetilde{\varphi}\left((F,E)\widetilde{\cup}(G,E)\right)=\widetilde{\varphi}((F,E))\widetilde{\cup}\widetilde{\varphi}((G,E))$,

K$_d$) $\widetilde{\varphi}(\Phi_E)=\Phi_E$.

Tersine bir $\widetilde{\varphi}:\wp(U_E)\to\wp(U_E)$ dönüşümü yukarıdaki dört özelliği sağlıyorsa U üzerinde öyle bir $\tau_{\widetilde{\varphi}}$ esnek topolojisi vardır ki bu $\tau_{\widetilde{\varphi}}$ esnek topolojisine göre U üzerindeki her (F,E) esnek kümesinin kapanışı $\widetilde{\varphi}((F,E))$ esnek kümesidir.

İspat Teorem 2.16'dan dolayı, (K$_a$)-(K$_d$) özellikleri geçerlidir.

Teoremin ikinci kısmı için τ esnek topolojisi,

$$\tau=\left\{(F,E)\widetilde{\subset}U_E:\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right)=U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right\}$$

olarak alınsın. τ esnek kümeler ailesinin bir esnek topoloji olduğu gösterilmelidir.

t$_1$) $\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}U_E\right)=\widetilde{\varphi}(\Phi_E)$ dir. (K$_d$) özelliğinden $\widetilde{\varphi}(\Phi_E)=\Phi_E=U_E\widetilde{\setminus}U_E$ olduğundan $U_E\in\tau$ olur.

Diğer yandan $\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}\Phi_E\right)=\widetilde{\varphi}(U_E)=U_E=U_E\widetilde{\setminus}\Phi_E$ olduğundan $\Phi_E\in\tau$ olur.

t$_2$) $(F,E),(G,E)\in\tau$ olsun. O zaman,

$$\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right)=U_E\widetilde{\setminus}(F,E)$$

ve

$$\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(G,E)\right)=U_E\widetilde{\setminus}(G,E)$$

olur. De Morgan kuralından dolayı,

$$\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}((F,E)\widetilde{\cap}(G,E)\right) = \widetilde{\varphi}\left(\left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right)\widetilde{\cup}\left(U_E\widetilde{\setminus}(G,E)\right)\right)$$

eşitliği vardır.

(K_c) özelliğinden dolayı

$$\widetilde{\varphi}\left(\left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right)\widetilde{\cup}\left(U_E\widetilde{\setminus}(G,E)\right)\right) = \widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right)\widetilde{\cup}\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(G,E)\right)$$

elde edilir.

(F,E) ve (G,E) esnek açık kümeler olduğundan

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right)\widetilde{\cup}\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(G,E)\right) &= \left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right)\widetilde{\cup}\left(U_E\widetilde{\setminus}(G,E)\right)\\ &= U_E\widetilde{\setminus}\left((F,E)\widetilde{\cap}(G,E)\right)\end{aligned}$$

olur. Yani, $(F,E)\widetilde{\cap}(G,E)\in\tau$ elde edilir.

t$_3$) $\forall i\in I$ için $(F_i,E)\in\tau$ olsun. $\widetilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i,E)\in\tau$ olduğu gösterilmelidir. Yani, $\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}\widetilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i,E)\right) = U_E\widetilde{\setminus}\widetilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i,E)$ eşitliği gösterilmelidir.

$\forall i\in I$ için $(F_i,E)\widetilde{\subset}\widetilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i,E)$ vardır. Buradan, $U_E\widetilde{\setminus}\widetilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i,E)\widetilde{\subset}U_E\widetilde{\setminus}(F_i,E)$ elde edilir.

O halde, (K_c) özelliğinin bir sonucu olarak $\forall i\in I$ için

$$\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}\widetilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i,E)\right)\widetilde{\subset}\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F_i,E)\right)$$

kapsaması vardır.

(F_i,E) esnek kümelerinin herbiri esnek açık küme olduğundan

$$\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F_i,E)\right) = U_E\widetilde{\setminus}(F_i,E)$$

elde edilir.

Böylece, $\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}\widetilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i,E)\right)\widetilde{\subset}\widetilde{\bigcap}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F_i,E)\right)$ olur. De Morgan'dan,

$$\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}\widetilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i,E)\right)\widetilde{\subset}\left(U_E\widetilde{\setminus}\widetilde{\bigcup_{i\in I}}(F_i,E)\right) \tag{3.1}$$

olur.

Diğer yandan, (K_a) koşulunda, $(F,E) = U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\bigcup_{i\in I}} (F_i,E)$ alınırsa,

$$U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\bigcup_{i\in I}} (F_i,E) \widetilde{\subset} \widetilde{\varphi} \left(U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\bigcup_{i\in I}} (F_i,E) \right) \tag{3.2}$$

olur. (3.1) ve (3.2) kapsamalarından dolayı,

$$\widetilde{\varphi} \left(U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\bigcup_{i\in I}} (F_i,E) \right) = U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\bigcup_{i\in I}} (F_i,E)$$

eşitliği elde edilir. O halde, $\widetilde{\bigcup_{i\in I}} (F_i,E)$ esnek kümesi, bir esnek açık kümedir.

Sonuç olarak, $\tau = \left\{ (F,E) \widetilde{\subset} U_E : \widetilde{\varphi} \left(U_E \widetilde{\setminus} (F,E) \right) = U_E \widetilde{\setminus} (F,E) \right\}$ bir esnek topolojidir.

İspatın tamamlanması için $\widetilde{\varphi}\left((F,E)\right) = \overline{(F,E)}$ olduğunu göstermek gerekir.

$(F,E) \widetilde{\subset} \overline{(F,E)}$ kapsaması daima vardır. O halde, $\widetilde{\varphi}\left((F,E)\right) \widetilde{\subseteq} \widetilde{\varphi} \left(\overline{(F,E)} \right)$ olur. $\overline{(F,E)}$ esnek kapalı küme olduğundan, $\widetilde{\varphi} \left(\overline{(F,E)} \right) = \overline{(F,E)}$ dır. Böylece,

$$\widetilde{\varphi}\left((F,E)\right) \widetilde{\subset} \overline{(F,E)} \tag{3.3}$$

kapsaması elde edilir.

Diğer kapsama için, (F,E) esnek kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\overline{(F,E)}$ olduğundan $\widetilde{\varphi}((F,E))$ esnek kümesinin bir esnek kapalı küme olduğunu göstermek yeterlidir. (K_b) özelliğinden dolayı $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\varphi}((F,E))) = \widetilde{\varphi}((F,E))$ eşitliği var olduğundan

$$\widetilde{\varphi} \left(U_E \widetilde{\setminus} \left(U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\varphi}(F,E) \right) \right) = U_E \widetilde{\setminus} \left(U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\varphi}(F,E) \right)$$

olur. Buradan, $U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\varphi}((F,E))$ esnek açık bir kümedir. O halde $\widetilde{\varphi}((F,E))$ esnek kapalı bir kümedir.Böylece,

$$\overline{(F,E)} \widetilde{\subset} \widetilde{\varphi}((F,E)) \tag{3.4}$$

kapsaması vardır.

(3.3) ve (3.4) kapsamalarından dolayı,

$$\widetilde{\varphi}((F,E)) = \overline{(F,E)}$$

eşitliği elde edilir. □

Örnek 3.71. *$(\mathbb{R}, \tau_d, E)$, $\mathbb{R}$ üzerinde esnek standart topolojik uzay ve $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. $\widetilde{\varphi} : \wp(\mathbb{R}_E) \to \wp(\mathbb{R}_E)$ dönüşümü aşağıdaki şekilde verilsin:*

$$\widetilde{\varphi}((F,E)) = \begin{cases} \Phi_E, & (F,E) = \Phi_E; \\ (F,E)\widetilde{\cup}(\sqrt{2},E) & (F,E) \neq \Phi_E; \end{cases}$$

$\widetilde{\varphi}$ dönüşümünün bir esnek Kuratowski kapanış operatörü olduğunu göstermek için dört özelliğin sağlandığı gösterilmelidir.

K_a) $(F,E) = \Phi_E$ ise $\Phi_E \widetilde{\subseteq} \widetilde{\varphi}(\Phi_E) = \Phi_E$ olduğundan açıktır.

$(F,E) \neq \Phi_E$ olsun. Bu durumda, $\widetilde{\varphi}(\Phi_E) = \Phi_E = (F,E)\widetilde{\cup}(\sqrt{2},E)$ olduğundan $(F,E)\widetilde{\subseteq}(F,E)\widetilde{\cup}(\sqrt{2},E) = \widetilde{\varphi}((F,E))$ olur.

O halde, $(F,E)\widetilde{\subseteq}\widetilde{\varphi}((F,E))$ elde edilir.

K_b) $(F,E) = \Phi_E$ ise $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\varphi}((F,E))) = \widetilde{\varphi}(\Phi_E) = \Phi_E = \widetilde{\varphi}(\Phi_E) = \Phi_E = \widetilde{\varphi}((F,E))$ elde edilir.

$(F,E) \neq \Phi_E$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(\widetilde{\varphi}((F,E))) &= \widetilde{\varphi}((F,E)\widetilde{\cup}(\sqrt{2},E)) \\ &= ((F,E)\widetilde{\cup}(\sqrt{2},E))\widetilde{\cup}(\sqrt{2},E) \\ &= (F,E)\widetilde{\cup}(\sqrt{2},E) \\ &= \widetilde{\varphi}((F,E)) \end{aligned}$$

olur.

K_c) i) $(F,E) = (G,E) = \Phi_E$ olsun. O zaman, $(F,E)\widetilde{\cup}(G,E) = \Phi_E$ olur. Böylece, $\widetilde{\varphi}((F,E)\widetilde{\cup}(G,E)) = \widetilde{\varphi}(\Phi_E) = \Phi_E$ elde edilir.

Diğer yandan $\widetilde{\varphi}((F,E)) = \widetilde{\varphi}(\Phi_E) = \Phi_E$ ve $\widetilde{\varphi}((G,E)) = \widetilde{\varphi}(\Phi_E) = \Phi_E$ olduğundan $\widetilde{\varphi}((F,E))\widetilde{\cup}\widetilde{\varphi}((G,E)) = \Phi_E$ olur.

Böylece, $\widetilde{\varphi}((F,E)\widetilde{\cup}(G,E)) = \widetilde{\varphi}((F,E))\widetilde{\cup}\widetilde{\varphi}((G,E))$ elde edilir.

ii) $(F,E) = \Phi_E$ ve $(G,E) \neq \Phi_E$ olsun. O zaman, $(F,E)\widetilde{\cup}(G,E) = (G,E)$ olur.

O halde,

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}((F,E)\widetilde{\cup}(G,E)) &= (F,E)\widetilde{\cup}(G,E)\widetilde{\cup}(\sqrt{2},E) \\ &= \Phi_E\widetilde{\cup}(G,E)\widetilde{\cup}(\sqrt{2},E) \\ &= \widetilde{\varphi}((F,E))\widetilde{\cup}\widetilde{\varphi}((G,E)) \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $(F,E) \neq \Phi_E$ *ve* $(G,E) \neq \Phi_E$ *olsun. O zaman,* $(F,E)\widetilde{\cup}(G,E) \neq \Phi_E$ *olur.*

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}((F,E)\widetilde{\cup}(G,E)) &= (F,E)\widetilde{\cup}(G,E)\widetilde{\cup}(\sqrt{2},E) \\ &= ((F,E)\widetilde{\cup}(\sqrt{2},E))\widetilde{\cup}((G,E)\widetilde{\cup}(\sqrt{2},E)) \\ &= \widetilde{\varphi}((F,E))\widetilde{\cup}\widetilde{\varphi}((G,E)) \end{aligned}$$

elde edilir.

K_d) $\widetilde{\varphi}$ *dönüşümünün tanımlanışından* $\widetilde{\varphi}(\Phi_E) = \Phi_E$ *olduğu açıktır.*

Böylece, $\widetilde{\varphi}$ *bir esnek Kuratowski kapanış operatörüdür.*

$\widetilde{\varphi}$ *ile oluşturulan esnek kapalıların kümesi;*

$$\kappa_{\widetilde{\varphi}} = \left\{(K,E)\widetilde{\subset}\mathbb{R}_E : \widetilde{\varphi}((K,E)) = (K,E)\right\}$$

şeklindedir.

O halde, $\widetilde{\varphi}$ *dönüşümünün belirlediği esnek topoloji*

$$\tau_{\widetilde{\varphi}} = \left\{(K,E)^c\widetilde{\subset}\mathbb{R}_E : (K,E) \in \kappa_{\widetilde{\varphi}}\right\} = \left\{(F,E) : (\sqrt{2},E)\widetilde{\subset}(F,E)^c\right\}\widetilde{\cup}\mathbb{R}_E$$

olur.

Esnek Kuratowski Kapanış Operatörü'ne benzer şekilde esnek iç operatörü aşağıdaki teorem ile verilebilir:

Teorem 3.72. *Bir* (U,τ,E) *esnek topolojik uzayındaki* $\widetilde{\Psi} : \wp(U_E) \to \wp(U_E)$,

$$\widetilde{\Psi}((F,E)) = (F,E)^\circ$$

ile verilen operatörü aşağıdaki dört özeliği sağlıyorsa $\widetilde{\Psi}$ *ye esnek iç operatörü denir:*

I_a) $\widetilde{\Psi}((F,E))\widetilde{\subset}(F,E)$,

I_b) $\widetilde{\Psi}\left(\widetilde{\Psi}((F,E))\right) = \widetilde{\Psi}((F,E))$,

I_c) $\widetilde{\Psi}\left((F,E)\widetilde{\cap}(G,E)\right) = \widetilde{\Psi}((F,E))\widetilde{\cap}\widetilde{\Psi}((G,E))$,

I_d) $\widetilde{\Psi}(U_E) = U_E$.

Tersine $\widetilde{\Psi} : \wp(U_E) \to \wp(U_E)$ *dönüşümü, yukarıdaki dört özelliği sağlıyorsa* U *üzerinde öyle bir* $\tau_{\widetilde{\Psi}}$ *esnek topolojisi vardır ki bu* $\tau_{\widetilde{\Psi}}$ *esnek topolojisine göre her* $(F,E)\widetilde{\subset}U_E$ *için* (F,E) *esnek kümesinin esnek içi* $\widetilde{\Psi}((F,E))$ *esnek kümesidir.*

İspat Teorem 2.18'den dolayı (I_a)-(I_d) özellikleri geçerlidir.

Teoremin diğer yönü için

$$\widetilde{\varphi}((F,E)) = U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\Psi}\left(U_E \widetilde{\setminus}(F,E)\right)$$

dönüşümü alınsın.

$\widetilde{\varphi}$ dönüşümünün bir esnek Kuratowski kapanış operatörü olduğunu göstermek için dört özelliği sağladığı gösterilmelidir:

K_a) $\widetilde{\varphi}((F,E)) = U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\Psi}\left(U_E \widetilde{\setminus}(F,E)\right)$ ve (I_a) koşulundan dolayı

$$\widetilde{\Psi}\left(U_E \widetilde{\setminus}(F,E)\right) \widetilde{\subset} U_E \widetilde{\setminus}(F,E)$$

olur.

O halde, $\widetilde{\varphi}((F,E)) = U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\Psi}\left(U_E \widetilde{\setminus}(F,E)\right) \widetilde{\supset} U_E \widetilde{\setminus}\left(U_E \widetilde{\setminus}(F,E)\right) = (F,E)$ olur.

Böylece, $(F,E) \widetilde{\subset} \widetilde{\varphi}((F,E))$ elde edilir.

K_b)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}\left(\widetilde{\varphi}((F,E))\right) &= \widetilde{\varphi}\left(U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\Psi}\left(U_E \widetilde{\setminus}(F,E)\right)\right) \\
&= U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\Psi}\left(U_E \widetilde{\setminus} U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\Psi}\left(U_E \widetilde{\setminus}(F,E)\right)\right) \\
&= U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\Psi}\left(\widetilde{\Psi}\left(U_E \widetilde{\setminus}(F,E)\right)\right)
\end{aligned}$$

olur.

Ayrıca (I_b) koşulundan dolayı,

$$\begin{aligned}
U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\Psi}\left(\widetilde{\Psi}\left(U_E \widetilde{\setminus}(F,E)\right)\right) &= U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\Psi}\left(U_E \widetilde{\setminus}(F,E)\right) \\
&= \widetilde{\varphi}((F,E)
\end{aligned}$$

olur.

Böylece, $\widetilde{\varphi}\left(\widetilde{\varphi}((F,E))\right) = \widetilde{\varphi}((F,E))$ elde edilir.

K_c)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}\left((F,E) \widetilde{\cup} (G,E)\right) &= U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\Psi}\left(U_E \widetilde{\setminus}\left((F,E) \widetilde{\cup} (G,E)\right)\right) \\
&= U_E \widetilde{\setminus} \widetilde{\Psi}\left((U_E \widetilde{\setminus}(F,E)) \widetilde{\cap} U_E \widetilde{\setminus}(G,E)\right)
\end{aligned}$$

olur.

Ayrıca ($\mathrm{I_c}$) koşulundan dolayı,

$$\begin{aligned} U_E\widetilde{\setminus}\widetilde{\Psi}((U_E\widetilde{\setminus}(F,E))\widetilde{\cap}(U_E\widetilde{\setminus}(G,E))) &= U_E\widetilde{\setminus}\left(\widetilde{\Psi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right)\widetilde{\cap}\widetilde{\Psi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(G,E)\right)\right) \\ &= U_E\widetilde{\setminus}\left(\widetilde{\Psi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right)\widetilde{\cup}U_E\widetilde{\setminus}\left(\widetilde{\Psi}\left((U_E\widetilde{\setminus}(G,E)\right)\right)\right) \\ &= \widetilde{\varphi}((F,E))\widetilde{\cup}\widetilde{\varphi}((G,E)) \end{aligned}$$

olur.

Böylece, $\widetilde{\varphi}\left((F,E)\widetilde{\cup}(G,E)\right) = \widetilde{\varphi}((F,E))\widetilde{\cup}\widetilde{\varphi}((G,E))$ elde edilir.

$\mathrm{K_d}$) $\widetilde{\varphi}(\Phi_E) = U_E\widetilde{\setminus}\left(\widetilde{\Psi}\left(U_E\widetilde{\setminus}\Phi_E\right)\right) = U_E\widetilde{\setminus}\left(\widetilde{\Psi}(U_E)\right)$ ve ($\mathrm{I_d}$) koşulundan dolayı, $U_E\widetilde{\setminus}\left(\widetilde{\Psi}(U_E)\right) = U_E\widetilde{\setminus}U_E = \Phi_E$ olduğundan $\widetilde{\varphi}(\Phi_E) = \Phi_E$ elde edilir.

O halde, $\widetilde{\varphi}$ bir esnek Kuratowski kapanış operatörüdür.

Teoremin ikinci kısmının ispatı için öncelikle Teorem 3.70'in ispatında

$$\tau_{\widetilde{\varphi}} = \left\{(F,E)\widetilde{\subset}U_E : \widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right) = U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right\}$$

ailesinin bir esnek topoloji olduğunun gösterildiğini hatırlatmakta fayda vardır.

$\widetilde{\Psi} : \wp(U_E) \to \wp(U_E)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau_{\widetilde{\varphi}} &= \left\{(F,E)\widetilde{\subset}U_E : U_E\widetilde{\setminus}\left(\widetilde{\Psi}\left(U_E\widetilde{\setminus}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right)\right)\right) = U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right\} \\ &= \left\{(F,E)\widetilde{\subset}U_E : U_E\widetilde{\setminus}\left(\widetilde{\Psi}((F,E))\right) = U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right\} \\ &= \left\{(F,E)\widetilde{\subset}U_E : \widetilde{\Psi}((F,E)) = (F,E)\right\} \end{aligned}$$

olur. Son olarak, $(F,E)^\circ = \widetilde{\Psi}((F,E))$ eşitliği gösterilmelidir. (F,E) esnek kümesi, $\tau_{\widetilde{\varphi}}$ esnek topolojisine göre esnek açık bir küme ise

$$\widetilde{\Psi}((F,E)) = (F,E)$$

eşitliği vardır. Böylece $\widetilde{\Psi}((F,E))$, $\tau_{\widetilde{\varphi}}$ esnek topolojisine göre esnek açık bir kümedir.

Diğer yandan,

$$\begin{aligned} (F,E)^\circ &= U_E\widetilde{\setminus}\left(\overline{U_E\widetilde{\setminus}(F,E)}\right) \\ &= U_E\widetilde{\setminus}\widetilde{\varphi}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right) \\ &= U_E\widetilde{\setminus}\left(U_E\widetilde{\setminus}\widetilde{\Psi}U_E\widetilde{\setminus}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right)\right) \\ &= \widetilde{\Psi}\left(U_E\widetilde{\setminus}\left(U_E\widetilde{\setminus}(F,E)\right)\right) \\ &= \widetilde{\Psi}((F,E)) \end{aligned}$$

$\square$

Örnek 3.73. *$(\mathbb{R}, \tau_d, E)$, $\mathbb{R}$ üzerinde esnek standart topolojik uzay ve $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. $\widetilde{\Psi} : \wp(\mathbb{R}_E) \to \wp(\mathbb{R}_E)$ dönüşümü aşağıdaki şekilde verilsin:*

$$\widetilde{\Psi}((F,E)) = \begin{cases} \mathbb{R}_E, & (F,E) = \mathbb{R}_E; \\ (F,E)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E) & (F,E) \neq \mathbb{R}_E; \end{cases}$$

Bu durumda $\widetilde{\Psi}$ bir esnek iç operatörüdür.

$\widetilde{\Psi}$ dönüşümünün bir esnek iç operatörü olduğunu göstermek için dört özelliğin sağlandığını göstermek gerekmektedir.

I_a) $(F,E) = \mathbb{R}_E$ ise $\widetilde{\Psi}((F,E)) = \widetilde{\Psi}(\mathbb{R}_E) = \mathbb{R}_E \widetilde{\subset} \mathbb{R}_E$ olduğundan açıktır.

$(F,E) \neq \mathbb{R}_E$ olsun. Bu durumda, $\widetilde{\Psi}((F,E)) = (F,E)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E)$ olduğundan

$$\widetilde{\Psi}((F,E)) = (F,E)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E)\widetilde{\subset}(F,E)$$

olur.

O halde, $\widetilde{\Psi}((F,E))\widetilde{\subset}(F,E)$ elde edilir.

I_b) $(F,E) = \mathbb{R}_E$ ise $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\Psi}((F,E))) = \widetilde{\Psi}(\mathbb{R}_E) = \mathbb{R}_E = \widetilde{\Psi}((F,E))$ olur.

$(F,E) \neq \mathbb{R}_E$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}\left(\widetilde{\Psi}((F,E))\right) &= \widetilde{\Psi}\left((F,E)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E)\right) \\ &= \left((F,E)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E)\right)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E) \\ &= (F,E)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E) \\ &= \widetilde{\Psi}((F,E)) \end{aligned}$$

olur.

I_c) i) $(F,E) = (G,E) = \mathbb{R}_E$ olsun. O zaman, $(F,E)\widetilde{\cap}(G,E) = \mathbb{R}_E$ olur. Böylece, $\widetilde{\Psi}\left((F,E)\widetilde{\cap}(G,E)\right) = \widetilde{\Psi}(\mathbb{R}_E) = \mathbb{R}_E$ elde edilir.

Diğer yandan $\widetilde{\Psi}((F,E)) = \widetilde{\Psi}(\mathbb{R}_E) = \mathbb{R}_E$ ve $\widetilde{\Psi}((G,E)) = \widetilde{\Psi}(\mathbb{R}_E) = \mathbb{R}_E$ olduğundan $\widetilde{\Psi}((F,E))\widetilde{\cap}\widetilde{\Psi}((G,E)) = \mathbb{R}_E$ olur.

Yani, $\widetilde{\Psi}((F,E)\widetilde{\cap}(G,E)) = \widetilde{\Psi}((F,E))\widetilde{\cap}\widetilde{\Psi}((G,E))$ elde edilir.

ii) $(F,E) = \mathbb{R}_E$ ve $(G,E) \neq \mathbb{R}_E$ olsun. O zaman, $(F,E)\widetilde{\cap}(G,E) = (G,E)$ olur. O halde, $\widetilde{\Psi}\left((F,E)\widetilde{\cap}(G,E)\right) = \widetilde{\Psi}((G,E)) = (G,E)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E)$ elde edilir.

Diğer yandan, $\widetilde{\Psi}((F,E)) = \widetilde{\Psi}(\mathbb{R}_E) = \mathbb{R}_E$ *ve* $\widetilde{\Psi}((G,E)) = (G,E)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E)$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}\Big((F,E))\widetilde{\cap}\widetilde{\Psi}((G,E)\Big) &= \mathbb{R}_E\widetilde{\cap}\Big((G,E)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E)\Big) \\ &= (G,E)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E) \end{aligned}$$

olur.

Böylece, $\widetilde{\Psi}((F,E)\widetilde{\cap}(G,E)) = \widetilde{\Psi}((F,E))\widetilde{\cap}\widetilde{\Psi}((G,E))$ *olur.*

iii) $(F,E) \neq \mathbb{R}_E$ *ve* $(G,E) \neq \mathbb{R}_E$ *olsun. O zaman,*

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}\big((F,E)\widetilde{\cap}(G,E)\big) &= \big((F,E)\widetilde{\cap}(G,E)\big)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E) \\ &= \Big((F,E)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E)\Big)\widetilde{\cap}\Big((G,E)\widetilde{\setminus}(\sqrt{2},E)\Big) \\ &= \widetilde{\Psi}((F,E))\widetilde{\cap}\widetilde{\Psi}((G,E)) \end{aligned}$$

elde edilir.

I_d) $\widetilde{\Psi}$ *dönüşümünün tanımından* $\widetilde{\Psi}(\mathbb{R}_E) = \mathbb{R}_E$ *olduğu açıktır.*

Böylece, $\widetilde{\Psi}$ *bir esnek iç operatörüdür.*

Kuratowski Kapanış-Tümleyen Teoremi olarak bilinen ve ilk olarak 1922 yılında Polonyalı matematikçi Kazimierz Kuratowski tarafından oluşturulup ispatlanmış daha sonra Greg Strabel (2014) tarafından geliştirilmiş teoremin esnek kümeler yardımıyla ifadesini aşağıdaki teorem ile vermek mümkündür. Elbette ki, bu teorem de klasik topolojik uzaylardaki karşılığının birebir esnek topolojiye aktarılmasından ibarettir.

Teorem 3.74. (U,τ,E) *bir esnek topolojik uzay ve* (F,E)*,* U *üzerinde bir esnek küme olsun.* (F,E) *esnek kümesine esnek tümleyen ve esnek kapanış işlemleri uygulanarak en fazla 14 farklı esnek küme elde edilebilir.*

Teoremin ispatına geçmeden önce ispatta kullanılacak operatörler ile ilgili bazı kavramları ifade etmek uygun olacaktır.

(U,τ,E), U üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. (F,E) esnek kümesi üzerindeki esnek tümleyen operatörü a ve esnek kapanış operatörü b sırasıyla $a((F,E)) = (F,E)^c$ ve $b((F,E)) = \overline{(F,E)}$ ile tanımlansın. $aa((F,E)) = (F,E)$ eşitliği vardır. O zaman, verilen herhangi bir (U,τ,E) esnek topolojik uzayı üzerindeki bütün farklı operatörlerin kümesi, $\{a,b\}$ kümesinin elemanları aracılığıyla üretilir ve aa (veya id) birim elemanıyla birlikte bir monoiddir. Bu monoide, (U, τ, E) esnek topolojik uzayı üzerinde Kuratowski monoidi denir.

Herhangi bir (U, τ, E) esnek topolojik uzayı üzerinde doğal bir kısmi sıralama vardır. Eğer, $\circ_1 ve \circ_2$ operatörleri, (U, τ, E) esnek topolojik uzayı üzerindeki bir Kuratowski monoidinin iki elemanı ise, $\leq$ kısmi sıralaması; $\circ_1 ((F, E)) \widetilde{\subseteq} \circ_2 ((F, E))$ koşulunu sağlayan her (F, E) esnek kümesi için $\circ_1 \leq \circ_2$ şeklinde verilir.

Bu bilgiler doğrultusunda teoremin ispatı aşağıdaki gibidir:

İspat (U, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. $aa = id$ ve $bb = b$ olmak üzere (U, τ, E) esnek topolojik uzayı üzerindeki Kuratowski monoidinin operatörleri aşağıdaki şekilde belirlenir:

id, a, b, ab, ba, aba, bab, $abab$, $baba$, $ababa$, $babab$, $abab...ab$, $baba...ba$, $abab...aba$ ya da $baba...bab$.

$bab = bababab$ eşitliği gösterilirse $\{a, b\}$ üzerindeki 7 den daha uzun bir sözcüğün en fazla 7 uzunluğundaki bir sözcüğe denk olması gerektiği sonucuna varılır.

Bunun için ilk olarak, Teorem 2.19 ve Tanım 2.21 gereğince,

$$\begin{aligned} aba((F, E)) &= ab\left(U_E \widetilde{\setminus} (F, E)\right) \\ &= a\left(\left(U_E \widetilde{\setminus} (F, E)\right)^\circ \widetilde{\cup} \underline{(F, E)}\right) \\ &= (F, E)^\circ \end{aligned}$$

olduğunu belirtmekte fayda vardır.

O zaman, $bab((F, E))$ esnek kümesinin içi; $ababab((F, E))$ esnek kümesi olduğundan $ababab \leq bab$ sıralaması vardır. $bb = b$ olmasından dolayı $bababab \leq bbab = bab$ olur. Ayrıca, $b((F, E))$ esnek kümesinin içi; $abab((F, E))$ esnek kümesi olduğundan $babab \leq b$ olur. Böylece, $babab \leq bb = b$ elde edilir. O zaman, $ababab \geq ab$ ve buradan $bababab \geq bab$ bulunur. Sonuç olarak, $bab = bababab$ eşitliği elde edilir.

Bu yüzden, $\{a, b\}$ üzerindeki 7 den daha uzun bir kelime en fazla 7 uzunluğundaki bir kelimeye denk olmak zorundadır. Böylece, herhangi bir (U, τ, E) esnek topolojik uzayı üzerindeki Kuratowki monoidinin her bir esnek operatörü en azından aşağıdakilerden birine denktir:

id, a, b, ab, ba, aba, bab, $abab$, $baba$, $ababa$, $babab$, $ababab$, $bababa$, $abababa$, $bababab$.

Buradan, verilen herhangi bir (U, τ, E) esnek topolojik uzayı üzerindeki Kuratowski monoidi en fazla 14 sıralamaya sahiptir ve böylece herhangi bir (F, E) esnek kümesinin esnek kapanış ve esnek tümleyenleri alınarak en fazla 14 farklı esnek küme üretilebilir. $\square$

Aşağıdaki örnek, 14 farklı esnek kümenin gerçekten üretilebileceğine dair bir örnektir.

Örnek 3.75. *$(\mathbb{R}, \tau_d, E)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir esnek standart topolojik uzay ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun. (F, E) esnek kümesi;*

$$(F, E) = \{(e_1, (0, 1)), (e_2, (1, 2)), (e_3, \{3\}), (e_4, [4, 5] \cap \mathbb{Q})\} \textit{ (i)}$$

ile tanımlansın. Bu durumda, Kuratowski monoidinin elemanlarıyla üretilebilen esnek kümeler aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$a(F, E) = \left\{ \begin{array}{c} (e_1, (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)), (e_2, (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)), \\ (e_3, (-\infty, 3] \cup (3, +\infty)), (e_4, (-\infty, 4) \cup (5, +\infty) \cup ([4, 5] \cap I)) \end{array} \right\} \textit{ (ii)}$$

$$b(F, E) = \{(e_1, [0, 1]), (e_2, [1, 2]), (e_3, \{3\}), (e_4, [4, 5])\} \textit{ (iii)}$$

$$ab(F, E) = \left\{ \begin{array}{c} (e_1, (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)), (e_2, (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)), \\ (e_3, (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)), (e_4, (-\infty, 4) \cup (5, +\infty)) \end{array} \right\} \textit{ (iv)}$$

$$ba(F, E) = \left\{ \begin{array}{c} (e_1, (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)), (e_2, (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)), \\ (e_3, \mathbb{R}), (e_4, \mathbb{R}) \end{array} \right\} \textit{ (v)}$$

$$aba(F, E) = \{(e_1, (0, 1)), (e_2, (1, 2))\} \textit{ (vi)}$$

$$bab(F, E) = \left\{ \begin{array}{c} (e_1, (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)), (e_2, (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)), \\ (e_3, \mathbb{R}), (e_4, (-\infty, 4] \cup [5, +\infty)) \end{array} \right\} \textit{ (vii)}$$

$$abab(F, E) = \{(e_1, (0, 1)), (e_2, (1, 2)), (e_4, (4, 5))\} \textit{ (viii)}$$

$$baba(F, E) = \{(e_1, [0, 1]), (e_2, [1, 2])\} \textit{ (ix)}$$

$$ababa\,(F,E) = \left\{ \begin{array}{c} (e_1, (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)), (e_2, (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)), \\ (e_3, \mathbb{R}), (e_4, \mathbb{R}) \end{array} \right\} \textit{(x)}$$

$$babab\,(F,E) = \{(e_1, [0,1]), (e_2, [1,2]), (e_4, [4,5])\} \textit{ (xi)}$$

$$ababab\,(F,E) = \left\{ \begin{array}{c} (e_1, (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)), (e_2, (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)), \\ (e_3, \mathbb{R}), (e_4, (-\infty, 4) \cup (5, +\infty)) \end{array} \right\} \textit{(xii)}$$

$$bababa\,(F,E) = \left\{ \begin{array}{c} (e_1, (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)), (e_2, (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)), \\ (e_3, \mathbb{R}), (e_4, \mathbb{R}) \end{array} \right\} \textit{(xiii)}$$

$$abababa\,(F,E) = \{(e_1, (0,1)), (e_2, (1,2))\} \textit{ (xiv)}$$

3.1. (u, E) Esnek Noktası Aracılığıyla Elde Edilen Bazı Sonuçlar

Bu kısımda (u, E) esnek noktası esas alındığında karşılaşılan birtakım ilginç sonuçlardan bahsedilecektir. Bunlardan ilk dikkat çekeni; bir esnek kümeye ait olmayan bir noktanın bu kümenin tümleyenine ait olmasının genel halde geçerli olmamasıdır. Buradan hareketle ispatı yapılırken içinde elemanı olmama durumundan faydanalınan teoremler, alternatif bir ispat yöntemi olmadığı taktirde ispatlanamaz kılınmıştır.

Önerme 3.76. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi ve (F, E) de U üzerinde bir esnek küme olsun.*

$(u, E) \,\widetilde{\in}\, (F, E)$ ise $(u, E) \,\widetilde{\notin}\, (F, E)^c$ dir.

İspat $(u, E) \,\widetilde{\in}\, (F, E)$ olsun. O halde, $\forall e \in E$ için $\{u\} \in F(e)$ olur. Buradan, $\forall e \in E$ için $\{u\} \notin U - F(e)$ vardır. Bu ise, $(u, E) \,\widetilde{\notin}\, (F, E)^c$ olmasını gerektirir. $\square$

Önerme 3.77. *Önerme 3.76'nın tersi genel halde geçerli değildir. Yani, $(u, E) \,\widetilde{\notin}\, (F, E)$ ise $(u, E) \,\widetilde{\in}\, (F, E)^c$ olmak zorunda değildir.*

Örnek 3.78. *$E = \{e_1, e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi ve $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ olmak üzere $(F, E) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_1, u_3\})\}$, U üzerinde bir esnek küme olsun.*

Bu durumda, $(F, E)^c = \{(e_1, \{u_3\}), (e_2, \{u_2\}), (e_3, U)\}$ olur.

$e_3 \in E$ için $\{u_1\} \notin F(e_3)$ olduğundan $(u_1, E) \widetilde{\notin} (F, E)$ dir. Ayrıca, $e_1, e_2 \in E$ için $\{u_1\} \notin F^c(e_1)$ ve $\{u_1\} \notin F^c(e_2)$ olduğundan $(u_1, E) \widetilde{\notin} (F, E)^c$ olduğu görülür.

Benzer şekilde, $e_2, e_3 \in E$ için $\{u_2\} \notin F(e_2)$ ve $\{u_2\} \notin F(e_3)$ olduğundan dolayı $(u_2, E) \widetilde{\notin} (F, E)$ dir. Ayrıca, $e_1 \in E$ için $\{u_2\} \notin F^c(e_1)$ olduğundan $(u_2, E) \widetilde{\notin} (F, E)^c$ olduğu görülür.

(u_3, E) esnek noktası için de benzer durum geçerlidir.

(F, E) esnek kümesinin elemanlarının kümesini $\bigcap\limits_{e \in E} F(e)$ kümesi ile ifade etmek mümkündür. Bir diğer ifadeyle, bir $e \in E$ için $F(e) = \varnothing$ ise (F, E) esnek kümesinin hiçbir esnek elemanı yok denilebiir.

Dikkat edilirse, $e_3 \in E$ için $F(e_3) = \varnothing$ olduğundan (F, E) esnek kümesinin hiçbir esnek elemanı yoktur.

Önerme 3.79. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi, (G_1, E) ve (G_2, E); U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda,*

$(u, E) \widetilde{\notin} (G_1, E)$ ve $(u, E) \widetilde{\notin} (G_2, E)$ iken $(u, E) \widetilde{\notin} (G_1, E) \widetilde{\cup} (G_2, E)$ genel halde geçerli değildir.

Örnek 3.80. *$E = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi ve $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ olmak üzere $(G_1, E) = \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \{u_2, u_3\})\}$ ve $(G_2, E) = \{(e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_1, u_2\})\}$ olsun. Bu durumda, $(G_1, E) \widetilde{\cup} (G_2, E) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, U)\}$ olur.*

$(u_1, E) \widetilde{\notin} (G_1, E)$ ve $(u_1, E) \widetilde{\notin} (G_2, E)$ iken $(u_1, E) \widetilde{\in} (G_1, E) \widetilde{\cup} (G_2, E)$ bulunur. Benzer şekilde, $(u_2, E) \widetilde{\notin} (G_1, E)$ ve $(u_2, E) \widetilde{\notin} (G_2, E)$ iken $(u_2, E) \widetilde{\in} (G_1, E) \widetilde{\cup} (G_2, E)$ elde edilir.

Önerme 3.81. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi ve (F, E) U üzerinde bir esnek küme olsun. (F, E) ve $(F, E)^c$ esnek kümeleri hiçbir esnek noktaya sahip olmasalar bile $(F, E) \widetilde{\cup} (F, E)^c = U_E$ eşitliği geçerlidir.*

Örnek 3.82. *$E = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi ve $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ olmak üzere $(F, E) = \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \{u_2\})\}$ olsun.*

Bu durumda, $(F, E)^c = \{(e_1, \{u_2, u_3\}), (e_2, \{u_1, u_3\})\}$ *olur.*

O halde, $(F, E)\,\widetilde{\cup}\,(F, E)^c = U_E$ *eşitliği elde edilir. Böylece,* (F, E) *ve* $(F, E)^c$ *esnek kümeleri hiçbir esnek noktaya sahip olmamasına rağmen bu iki esnek kümenin birleşimi,* U *kümesi üzerinde* E *parametre kümesiyle elde edilen bütün esnek noktaları içeren* U_E *esnek mutlak kümesine eşittir.*

Bir diğer ilginç sonuç ise, klasik kümeler kuramında bilinen, bir kümenin aslında kendi noktalarının birleşiminden ibaret olması durumunun esnek kümeler için geçerli olmamasıdır. Bunu aşağıdaki şekilde örneklemek uygun olacaktır.

Önerme 3.83. *Bir* (F, E) *esnek kümesi, kendisine ait esnek noktaların birleşimi şeklinde yazılamayabilir.*

Örnek 3.84. *Örnek 3.78 göz önünde bulundurulduğunda,* $e_2 \in E$ *için* $\{u_3\} \in F(e_2)$ *iken* $e_1, e_3 \in E$ *için* $\{u_3\} \notin F(e_1)$ *ve* $\{u_3\} \notin F(e_3)$ *olduğundan* $(u_3, E)\,\widetilde{\notin}\,(F, E)$ *olur. Böylece,*

$$(F, E) \neq \widetilde{\bigcup_{(u,E)\widetilde{\in}(F,E)}} (u, E)$$

elde edilir.

Tanım 3.85. (U, τ, E)*, bir esnek topolojik uzay ve* (F, E)*,* U *üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer bir* $(u, E)\widetilde{\in}U_E$ *esnek noktasını bulunduran bütün esnek açık kümeler,* (F, E) *esnek kümesi ile kesişiyorsa* (u, E) *esnek noktasına* (F, E) *esnek kümesinin bir esnek kapanış noktasıdır denir.*

Tanım 3.86. (F, E) *esnek kümesinin bütün esnek kapanış noktalarından oluşan esnek kümeye,* (F, E) *esnek kümesinin kapanışı denir ve* $\overline{(F, E)}$ *ile gösterilir.*

Tanım 3.87. (U, τ, E)*, bir esnek topolojik uzay ve* (F, E)*,* U *üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer* $(u, E)\widetilde{\in}U_E$ *esnek noktası,* (F, E) *esnek kümesinin esnek tümleyeninin bir esnek iç noktası ise* (u, E) *esnek noktasına* (F, E) *esnek kümesinin esnek dış noktasıdır denir.*

Tanım 3.88. (F, E) *esnek kümesinin bütün esnek dış noktalarından oluşan esnek kümeye,* (F, E) *esnek kümesinin dışı denir ve* $(F, E)_\circ$ *ile gösterilir.*

Tanım 3.89. *(U, τ, E), bir esnek topolojik uzay ve (F, E), U üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $(u, E)\widetilde{\in}U_E$ esnek noktası, ne esnek iç nokta ne de esnek dış nokta ise (u, E) esnek noktasına (F, E) esnek kümesinin bir esnek sınır noktasıdır denir.*

Tanım 3.90. *(F, E) esnek kümesinin bütün esnek sınır noktalarından oluşan esnek kümeye, (F, E) esnek kümesinin sınırı denir ve $\underline{(F, E)}$ ile gösterilir.*

Teorem 2.19 (ii) ve (iii)'de kümeler yardımıyla verilen tanımlar sonucu elde edilen eşitlik, (u, E) esnek noktası yardımıyla yeniden tanımlanan esnek kümenin içi ve kapanışı göz önünde bulundurulduğunda genel halde geçerli değildir. Bu durum, aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Önerme 3.91. *i) $\overline{((G, E)^c)} = ((G, E)^\circ)^c$,*
ii) $(G, E)^\circ = \left(\overline{((G, E)^c)}\right)^c$ eşitlikleri genel halde geçerli değildir.

Örnek 3.92. *$U = \{u_1, u_2, u_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ olsun.*
$(F_1, E) = \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \{u_1\})\}$,
$(F_2, E) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_1\})\}$,
$(F_3, E) = \{(e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_1, u_2\})\}$,
$(F_4, E) = \{(e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_1\})\}$,
$(F_5, E) = \{(e_2, \{u_1\})\}$,
$(F_6, E) = \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \{u_1, u_3\})\}$,
$(F_7, E) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_1, u_3\})\}$,
$(F_8, E) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, U)\}$,
$(F_9, E) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_1, u_2\})\}$ *olmak üzere*

$$\tau = \{\Phi_E, U_E, (F_i, E) : i = 1, ..., 9\}$$

olsun.

Bu durumda, τ ailesinin bir esnek topoloji olduğu açıktır.

$(G, E) = \{(e_1, U), (e_2, \{u_1, u_3\})\}$ esnek kümesi göz önünde bulundurulsun.

i) $(u_1, E)\widetilde{\in}(F_1, E)\widetilde{\subset}(G, E)$ ve $(F_1, E) \in \tau$ olduğundan (u_1, E) esnek noktası (G, E) esnek kümesinin bir iç noktasıdır. Böylece,

$$(G, E)^\circ = (u_1, E) \tag{3.5}$$

bulunur. Bu durumda,

$$((G,E)^{\circ})^{c} = \{(e_1,\{u_2,u_3\}),(e_2,\{u_2,u_3\})\} \tag{3.6}$$

olur.

Diğer yandan, $(G,E)^c = \{(e_2,\{u_2\})\}$ *olmak üzere*

$$\overline{((G,E)^c)} = (u_2,E) \tag{3.7}$$

olur.

O halde, (3.6) ve (3.7)'den $\overline{((G,E)^c)} \neq ((G,E)^{\circ})^{c}$ *olduğu görülür.*

ii) $(G,E)^{\circ} = (u_{1,}E)$ *olduğundan*

$$((G,E)^c)^{\circ} = \Phi_E \tag{3.8}$$

bulunur.

Diğer yandan, (3.7)'den dolayı $\overline{((G,E)^c)} = (u_2,E)$ *olduğu biliniyor. O halde,*

$$\left(\overline{((G,E)^c)}\right)^{c} = \{(e_1,\{u_1,u_3\}),(e_2,\{u_1,u_3\})\} \tag{3.9}$$

bulunur.

(3.8) ve (3.9)'dan

$$((G,E)^c)^{\circ} \neq \left(\overline{((G,E)^c)}\right)^{c}$$

elde edilir.

Önerme 3.93. $\underline{(G,E)} = \overline{(G,E)}\widetilde{\cap}\overline{((G,E)^c)}$ *eşitliği genel halde geçerli değildir.*

Örnek 3.94. *Örnek 3.92 göz önünde bulundurulduğunda,*

$$(G,E)^{\circ} = (u_{1,}E)$$

ve

$$((G,E)^c)^{\circ} = \Phi_E$$

bulunur. O halde,

$$\underline{(G,E)} = \left((G,E)^{\circ}\,\widetilde{\cup}\,((G,E)^c)^{\circ}\right)^{c} = \{(e_1,\{u_2,u_3\}),(e_2,\{u_2,u_3\})\} \tag{3.10}$$

olur.

Diğer yandan, $(u_1, E), (u_3, E)\widetilde{\in}(G, E)$ *ve* $(G, E)\widetilde{\subset}\overline{(G, E)}$ *olduğundan* (u_1, E) *ve* (u_3, E) *esnek noktaları* (G, E) *esnek kümesinin esnek kapanış noktalarıdır.*

$(u_2, E)\widetilde{\in}\ (F_3, E)$ *ve* $(F_3, E)\widetilde{\cap}(G, E) = \{(e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_1\})\} \neq \Phi_E$,

$(u_{2,}E)\widetilde{\in}(F_8, E)$ *ve* $(F_8, E)\widetilde{\cap}(G, E) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_1, u_3\})\} \neq \Phi_E$,

$(u_{2,}E)\widetilde{\in}(F_9, E)$ *ve* $(F_9, E)\widetilde{\cap}(G, E) = \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_1\})\} \neq \Phi_E$, *olduğundan* (u_2, E) *esnek noktası* (G, E) *esnek kümesinin bir esnek kapanış noktasıdır.*

Böylece, $\overline{(G, E)} = U_E$ *bulunur. (3.7) gereğince* $\overline{((G, E)^c)} = (u_2, E)$ *olduğundan*

$$\overline{(G, E)}\widetilde{\cap}\overline{((G, E)^c)} = (u_2, E) \tag{3.11}$$

bulunur.

(3.10) ve (3.11)'dan

$$\underline{(G, E)} = \left((G, E)^\circ\,\widetilde{\cup}\,((G, E)^c)^\circ\right)^c \neq \overline{(G, E)}\widetilde{\cap}\overline{((G, E)^c)}$$

elde edilir.

Hussain ve Ahmad, Teorem 2.22'nin ispatını yaparken Tanım 2.21'i göz önünde bulundurarak ispat yapmışlardır. Önerme 3.93'te (u, E) esnek noktası yardımıyla oluşturulan tanımlar göz önünde bulundurulduğunda bu eşitliğin genel halde geçerli olmadığı gösterildiğinden (G, E) esnek kümesinin esnek sınırı olarak $\overline{(G, E)}\widetilde{\cap}\overline{((G, E)^c)}$ esnek kümesi alındığında Teorem 2.22 eşitliklerinin genel halde geçerli olmadığı görülür.

Önerme 3.95. (U, τ, E) *bir esnek topolojik uzay* (F, E) *esnek kümesi de bu uzayda esnek kapalı bir küme olsun.*

$$(F, E) = \overline{(F, E)}$$

eşitliği genel halde geçerli değildir.

Örnek 3.96. *Örnek 3.92 göz önünde bulundurulsun.* (F_2, E) *esnek açık bir kümedir.*

O halde,

$$(F_2, E)^c = \{(e_1, \{u_3\}), (e_2, \{u_2, u_3\})\} \tag{3.12}$$

esnek kümesi, esnek kapalı bir kümedir.

$(u_3, E)\widetilde{\in}(F_2, E)^c$ *ve* $(F_2, E)^c\widetilde{\subset}\overline{((F_2, E)^c)}$ *olduğundan* $(u_3, E)\widetilde{\in}\overline{((F_2, E)^c)}$ *olur.*

$(u_2, E)\widetilde{\in}\ (F_3, E)$ *ve* $(F_3, E)\widetilde{\cap}(F_2, E)^c = \{(e_2, \{u_2\})\} \neq \Phi_E$,

$(u_{2,}E)\widetilde{\in}(F_8,E)$ *ve* $(F_8,E)\widetilde{\cap}(F_2,E)^c = \{(e_2,\{u_2,u_3\})\} \neq \Phi_E$,

$(u_{2,}E)\widetilde{\in}(F_9,E)$ *ve* $(F_9,E)\widetilde{\cap}(F_2,E)^c = \{(e_2,\{u_2\})\} \neq \Phi_E$, *olduğundan* (u_2,E) *esnek noktası* $(F_2,E)^c$ *esnek kümesinin bir esnek kapanış noktasıdır. Böylece,*

$$\overline{(F_2,E)^c} = \{(e_1,\{u_2,u_3\}),(e_2,\{u_2,u_3\})\} \tag{3.13}$$

bulunur.

(3.12) ve (3.13)'den,

$$(F_2,E)^c \neq \overline{(F_2,E)^c}$$

Önerme 3.97. *Esnek bir kümenin iç, dış ve sınır kümelerinin esnek birleşimi daima* U_E *esnek mutlak kümesine eşit olmak zorunda değildir. Yani,*

$$(G,E)^\circ\,\widetilde{\cup}(G,E)_\circ\widetilde{\cup}\underline{(G,E)} \neq U_E$$

Örnek 3.98. *Örnek 3.92 göz önünde bulundurulsun.* $(G,E)^\circ = (u_1,E)$, $(G,E)_\circ = \Phi_E$ *ve* $\underline{(G,E)} = \Phi_E$ *olduğu biliniyor. O halde, bu kümelerin esnek birleşimi;*

$$(G,E)^\circ\,\widetilde{\cup}(G,E)_\circ\widetilde{\cup}\underline{(G,E)} = (u_{1,}E) \neq U_E$$

olarak bulunur.

Bir sonraki örnek, Tanım 2.17 ve Tanım 2.25 ile verilen esnek iç kümeleri tanımlarımlarının örtüşmediğine dair bir örnek olacaktır. Burada, karışıklık olmaması için Tanım 2.17 ve Tanım 2.25'te verilen esnek iç kümeleri sırasıyla $(G,E)^{\circ_1}$ ve $(G,E)^{\circ_2}$ ile gösterilecektir.

Örnek 3.99. *Örnek 3.92 göz önünde bulundurulsun.* $(F_1,E)\,\widetilde{\subset}\,(G,E)$, $(F_2,E)\,\widetilde{\subset}\,(G,E)$, $(F_4,E)\,\widetilde{\subset}\,(G,E)$, $(F_5,E)\,\widetilde{\subset}\,(G,E)$, $(F_6,E)\,\widetilde{\subset}\,(G,E)$, $(F_7,E)\,\widetilde{\subset}\,(G,E)$ *ve bu esnek kümelerin herbiri* (G,E) *esnek kümesinin esnek açık alt kümeleri olduğundan Tanım 2.17 gereğince bu esnek alt kümelerin birleşimi* $(G,E)^{\circ_1}$ *esnek kümesine eşittir. O halde,*

$$(G,E)^{\circ_1} = \{(e_1,\{u_1,u_2\}),(e_2,\{u_1,u_3\})\} \tag{3.14}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (3.5) gereğince

$$(G,E)^{\circ_2} = (u_1,E) \tag{3.15}$$

elde edilir. Böylece (3.14) ve (3.15)'ten $(G,E)^{\circ_1} \neq (G,E)^{\circ_2}$ *elde edilir.*

Bir sonraki örnek, Tanım 2.15 ve Tanım 3.86 ile verilen esnek kapanış kümeleri tanımlarının örtüşmediğine dair bir örnek olacaktır. Burada, karışıklık olmaması için Tanım 2.15 ve Tanım 3.86'da verilen kapanış kümeleri sırasıyla $\overline{(F,E)}^1$ ve $\overline{(F,E)}^2$ ile gösterilecektir.

Örnek 3.100. *Örnek 3.92 gözönünde bulundurulsun.* $(F,E)=\{(e_1,\{u_1,u2\}),(e_2,\{u_3\})\}$ *olsun. Bu durumda,* $\tau=\{\Phi_E,U_E,(F_i,E):i=1,...,9\}$ *olmak üzere* τ *ailesinin esnek tümleyen ailesi olan* κ *esnek kapalılar ailesi aşağıdaki şekilde belirlenir:*

$(F_1^c,E)=\{(e_1,\{u_2,u_3\}),(e_2,\{u_2,u_3\})\}$,
$(F_2^c,E)=\{(e_1,\{u_3\}),(e_2,\{u_2,u_3\})\}$,
$(F_3^c,E)=\{(e_1,\{u_1,u_3\}),(e_2,\{u_3\})\}$,
$(F_4^c,E)=\{(e_1,\{u_1,u_3\}),(e_2,\{u_2,u_3\})\}$,
$(F_5^c,E)=\{(e_1,U),(e_2,\{u_2,u_3\})\}$,
$(F_6^c,E)=\{(e_1,\{u_2,u_3\}),(e_2,\{u_2\})\}$,
$(F_7^c,E)=\{(e_1,\{u_3\}),(e_2,\{u_2\})\}$,
$(F_8^c,E)=\{(e_1,\{u_3\})\}$,
$(F_9^c,E)=\{(e_1,\{u_3\}),(e_2,\{u_3\})\}$ *olmak üzere*

$$\kappa=\{\Phi_E,U_E,(F_i^c,E):i=1,...,9\}$$

olur.

(F,E) *esnek kümesini kapsayan en küçük kapalı küme* (F_5^c,E) *olduğundan Tanım 2.15 gereğince;* $\overline{(F,E)}^1=(F_5^c,E)$ *bulunur. Böylece,*

$$\overline{(F,E)}^1=\{(e_1,U),(e_2,\{u_2,u_3\})\} \tag{3.16}$$

elde edilir.

Diğer taraftan (F,E) *esnek kümesinin esnek kapanış noktaları,* (u_1,E), (u_2,E) *ve* (u_3,E) *esnek noktaları olup bu noktaların kümesi Tanım 3.86 gereğince* $\overline{(F,E)}^2=U_E$ *olur.*

Gerçekten, $(u_1,E)\widetilde{\in}(F_1,E)$ *ve* $(F_1,E)\widetilde{\cap}(F,E)=\{(e_1,\{u_1\})\}\neq\Phi_E$,
$(u_{1,}E)\widetilde{\in}(F_2,E)$ *ve* $(F_2,E)\widetilde{\cap}(F,E)=\{(e_1,\{u_1,u_2\})\}\neq\Phi_E$,
$(u_{1,}E)\widetilde{\in}(F_6,E)$ *ve* $(F_6,E)\widetilde{\cap}(F,E)=\{(e_1,\{u_1\}),(e_2,\{u_3\})\}\neq\Phi_E$,
$(u_1,E)\widetilde{\in}(F_7,E)$ *ve* $(F_7,E)\widetilde{\cap}(F,E)=\{(e_1,\{u_1,u_2\},(e_2,\{u_3\}))\}\neq\Phi_E$,

$(u_{1,}E)\widetilde{\in}(F_8,E)$ *ve* $(F_8,E)\widetilde{\cap}(F,E)=\{(e_1,\{u_1,u_2\}),(e_2,\{u_3\})\}\neq\Phi_E$,

$(u_{1,}E)\widetilde{\in}(F_9,E)$ *ve* $(F_9,E)\widetilde{\cap}(F,E)=\{(e_1,\{u_1,u_2\})\}\neq\Phi_E$,

olduğundan (u_1,E) *esnek noktası* (F,E) *esnek kümesinin bir esnek kapanış noktasıdır.*

Benzer şekilde, $(u_2,E)\widetilde{\in}(F_3,E)$ *ve* $(F_3,E)\widetilde{\cap}(F,E)=\{(e_1,\{u_2\})\}\neq\Phi_E$,

$(u_{2,}E)\widetilde{\in}(F_8,E)$ *ve* $(F_8,E)\widetilde{\cap}(F,E)=\{(e_1,\{u_1,u_2\}),(e_2,\{u_3\})\}\neq\Phi_E$,

$(u_{2,}E)\widetilde{\in}(F_9,E)$ *ve* $(F_9,E)\widetilde{\cap}(F,E)=\{(e_1,\{u_1,u_2\})\}\neq\Phi_E$, *olduğundan* (u_2,E) *esnek noktası* (F,E) *esnek kümesinin bir esnek kapanış noktasıdır.*

Son olarak, $(u_{3,}E)\widetilde{\in}U_E$ *ve* $U_E\widetilde{\cap}(F,E)=\{(e_1,\{u_1,u2\}),(e_2,\{u_3\})\}\neq\Phi_E$ *olduğundan* (u_3,E) *esnek noktası* (F,E) *esnek kümesinin bir esnek kapanış noktasıdır.*

Böylece,

$$\overline{(F,E)}^{2}=U_E \tag{3.17}$$

elde edilir.

(3.16) ve (3.17)'den $\overline{(F,E)}^{1}\neq\overline{(F,E)}^{2}$ *elde edilir.*

3.2. e_F Esnek Noktası Aracılığıyla Elde Edilen Bazı Sonuçlar

(u,E) gösterimiyle tanımlanan esnek nokta göz önünde bulundurulduğunda, bir esnek kümenin kendi esnek noktalarının birleşimi şeklinde yazılamayabileceğine Örnek3.84'te yer verilmiştir. Bu sorunun, F_e^u ile gösterilen diğer bir esnek nokta yapısı esas alındığında ortadan kalktığı sonucuna Önerme2.34'te vurgu yapılmıştır. e_F esnek noktasının özel halde F_e^u esnek noktasına karşılık gelmesi de göz önünde bulundurulduğunda bu nokta tanımıyla birlikte yine bir esnek kümeyi kendi esnek noktalarının birleşimi şeklinde ifade edebilmek mümkün olacaktır. Bu nokta yapısında gözlemlenen ve aşina olunanın aksine dikkat çeken durum ise bir e_F esnek noktasını içermeyen iki farklı esnek kümenin birleşiminin bu esnek noktayı içerebilmesi durumudur. Bu bölümde, sözü geçen her iki durumun da ifadesine yer verilecektir.

Önerme 3.101. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi ve (G,E), U üzerinde bir esnek küme olsun. Esnek noktaların herhangi bir ailesinin birleşimi bir esnek küme olarak düşünülebilir. Her esnek küme de bu kümeye ait olan bütün esnek noktaların bir-*

leşimi olarak ifade edilebilir. Yani bir (G,E) esnek kümesi;

$$(G,E)=\widetilde{\bigcup_{e_F\widetilde{\in}(G,E)}}e_F$$

şeklinde belirlenebilir.

Önerme 3.102. *U boştan farklı bir küme, E parametreler kümesi, (G_1,E), (G_2,E); U üzerinde iki esnek küme ve e_F bir esnek nokta olsun. $e_F\widetilde{\notin}(G_1,E)$ ve $e_F\widetilde{\notin}(G_2,E)$ iken $e_F\widetilde{\notin}(G_1,E)\widetilde{\cup}(G_2,E)$ genel halde geçerli değildir.*

Örnek 3.103. *$U=\{u_1,u_2,u_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $e_F=\{(e_1,\{u_1,u_2\})\}$ olsun.*

$(G_1,E)=\{(e_1,\{u_1\}),(e_2,\{u_1\})\}$ ve $(G_2,E)=\{(e_1,\{u_2\}),(e_2,\{u_2\})\}$ alınsın. $e_F\widetilde{\notin}(G_1,E)$ ve $e_F\widetilde{\notin}(G_2,E)$ olduğu açıktır.

Fakat, $(H,E)=(G_1,E)\widetilde{\cup}(G_2,E)=\{(e_1,\{u_1,u_2\}),(e_2,\{u_1,u_2\})\}$ ve $\forall e\in E$ için $F(e)\subseteq H(e)$ olduğundan $e_F\widetilde{\in}(H,E)$ elde edilir.

3.3. F_e^u Esnek Noktası Aracılığıyla Elde Edilen Bazı Sonuçlar

Önerme 3.104. *$U\subset\mathbb{R}$ boştan farklı bir küme, $E\subset\mathbb{R}$ parametrelerin boştan farklı bir kümesi ve U_E esnek mutlak küme olsun. $\forall\lambda\in E$ için $\bar{x}(\lambda)=x$ olacak şekildeki esnek reel sayılar da $\bar{x}$ ile gösterilsin. $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ klasik bir metrik olmak üzere $\widetilde{d}:SP(U_E)\times SP(U_E)\to\mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü, $\forall P_\lambda^x,P_\mu^y\widetilde{\in}U_E$ için*

$$\widetilde{d}(F_\lambda^x,F_\mu^y)=d\left(\bar{x}-\bar{y}\right)\widetilde{+}d\left(\bar{\lambda}-\bar{\mu}\right)$$

ile tanımlansın. O zaman, $\widetilde{d}$, U_E esnek kümesi üzerinde bir esnek metriktir.

$\widetilde{d}$ dönüşümünün esnek metrik olduğunu göstermek için esnek metrik aksiyomlarını sağladığını göstermek gerekir:

M₁) $\forall F_\lambda^x,F_\mu^y\widetilde{\in}U_E$ için $\widetilde{d}(F_\lambda^x,F_\mu^y)\widetilde{\geq}\bar{0}$ olduğu açıktır.

M₂) $\widetilde{d}(F_\lambda^x,F_\mu^y)=\bar{0}\iff d\left(\bar{x}-\bar{y}\right)\widetilde{+}d\left(\bar{\lambda}-\bar{\mu}\right)=\bar{0}\iff d\left(\bar{x}-\bar{y}\right)=\bar{0}$ ve $d\left(\bar{\lambda}-\bar{\mu}\right)=\bar{0}\iff x=y$ ve $\lambda=\mu\iff F_\lambda^x=F_\mu^y$.

M₃) $\forall F_\lambda^x,F_\mu^y\widetilde{\in}U_E$ için

$$\begin{aligned}\widetilde{d}(F_\lambda^x,F_\mu^y)&=d\left(\bar{x}-\bar{y}\right)\widetilde{+}d\left(\bar{\lambda}-\bar{\mu}\right)\\&=d\left(\bar{y}-\bar{x}\right)\widetilde{+}d\left(\bar{\mu}-\bar{\lambda}\right)=\widetilde{d}(F_\mu^y,F_\lambda^x)\end{aligned}$$

M₄) $\forall F_\lambda^x, F_\mu^y, F_\gamma^z \widetilde{\in} U_E$ *için*

$$\begin{aligned}
\widetilde{d}(F_\lambda^x, F_\gamma^z) &= d\left(\bar{x}-\bar{z}\right)\widetilde{+}d\left(\bar{\lambda}-\bar{\gamma}\right) \\
&= d\left(\bar{x}-\bar{y}+\bar{y}-\bar{z}\right)\widetilde{+}d\left(\bar{\lambda}-\bar{\mu}+\bar{\mu}-\bar{\lambda}\right) \\
&\widetilde{\leq}\left(d\left(\bar{x}-\bar{y}\right)\widetilde{+}d\left(\bar{\lambda}-\bar{\mu}\right)\right)\widetilde{+}\left(d\left(\bar{y}-\bar{z}\right)\widetilde{+}d\left(\bar{\mu}-\bar{\lambda}\right)\right) \\
&\widetilde{\leq}\widetilde{d}(F_\lambda^x, F_\mu^y)\widetilde{+}\widetilde{d}(F_\mu^y, F_\gamma^z)
\end{aligned}$$

Böylece, $\widetilde{d}$, U_E esnek kümesi üzerinde bir esnek metriktir.

Teorem 3.105. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay olmak üzere $\widetilde{d} : SP(U_E) \times SP(U_E) \to \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümünün herhangi $i \in 1, 2, ..., n$ için i. girdisine kısıtlanışı $d_i(F_\lambda^x, F_\mu^y)$ ile gösterilsin. Bu durumda, $d_1(F_\lambda^x, F_\mu^y), d_2(F_\lambda^x, F_\mu^y), ..., d_n(F_\lambda^x, F_\mu^y)$ dönüşümlerinin herbiri bir klasik metriktir.*

İspat M₁) $\forall F_\lambda^x, F_\mu^y \widetilde{\in} U_E$ için

$$\widetilde{d}(F_\lambda^x, F_\mu^y)\widetilde{\geq}\bar{0}$$

olduğundan $\forall i = 1, 2, ..., n$ için $d_i(F_\lambda^x, F_\mu^y) \geq 0_i = 0$ olur.

M₂) $\widetilde{d}(F_\lambda^x, F_\mu^y) = \bar{0} \iff F_\lambda^x = F_\mu^y$ olduğundan $\forall i = 1, 2, ..., n$ için

$$d_i(F_\lambda^x, F_\mu^y) = 0_i = 0$$

olur. Böylece, $F_\lambda^x = F_\mu^y$ elde edilir.

M₃) $\forall F_\lambda^x, F_\mu^y \widetilde{\in} U_E$ için $\widetilde{d}(F_\lambda^x, F_\mu^y) = \widetilde{d}(F_\mu^y, F_\lambda^x)$ olduğundan $\forall i = 1, 2, ..., n$ için

$$d_i(F_\lambda^x, F_\mu^y) = d_i(F_\mu^y, F_\lambda^x)$$

olur.

M₄) $\forall F_\lambda^x, F_\mu^y, F_\gamma^z \widetilde{\in} U_E$ için $\widetilde{d}$ bir esnek metrik olduğundan

$$\widetilde{d}(F_\lambda^x, F_\gamma^z)\widetilde{\leq}\widetilde{d}(F_\lambda^x, F_\mu^y)\widetilde{+}\widetilde{d}(F_\mu^y, F_\gamma^z)$$

eşitsizliği vardır. $\widetilde{d}(F_\lambda^x, F_\gamma^z) = \widetilde{k}$, $\widetilde{d}(F_\lambda^x, F_\mu^y) = \widetilde{t}$ ve $\widetilde{d}(F_\mu^y, F_\gamma^z) = \widetilde{q}$ olarak alınsın. Bu durumda, $\forall i = 1, 2, ..., n$ için

$$k_i \leq t_i + q_i$$

elde edilir. Buradan, $\forall i = 1, 2, ..., n$ için

$$d_i(F^x_\lambda, F^z_\gamma) \leq d_i(F^x_\lambda, F^y_\mu) + d_i(F^y_\mu, F^z_\gamma)$$

eşitsizliği elde edilir. □

Teorem 3.106. *$(U_E, \widetilde{d})$ bir esnek metrik uzay olmak üzere $\widetilde{d} : SP(U_E) \times SP(U_E) \to \mathbb{R}(E)^*$ dönüşümü;*

$$\widetilde{d}(F^x_\lambda, F^y_\mu) = \big(d_1(F^x_\lambda, F^y_\mu), d_2(F^x_\lambda, F^y_\mu), ..., d_n(F^x_\lambda, F^y_\mu)\big)$$

ile verilsin. Eğer, $\forall i = 1, 2, ..., n$ için d_i metrikleri denk metrikler ise, o zaman $\widetilde{d}$ esnek metriğinin ürettiği topoloji, $d_1, d_2, ..., d_n$ metriklerinin ürettiği topolojiye eşittir.

İspat $\widetilde{r} = (r_1, r_2, ...r_n)$ ve $d_1(P^x_\lambda, P^y_\mu), d_2(P^x_\lambda, P^y_\mu), ..., d_n(P^x_\lambda, P^y_\mu)$ metrikleri denk metrikler olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} B(F^x_\lambda, \widetilde{r}) &= \left\{F^y_\mu \widetilde{\in} U_E : \widetilde{d}(F^x_\lambda, F^y_\mu) \widetilde{<} \widetilde{r}\right\} \\ &= \left\{F^y_\mu \widetilde{\in} U_E : d_1(F^x_\lambda, F^y_\mu) < r_1, d_2(F^x_\lambda, F^y_\mu) < r_2, ..., d_n(F^x_\lambda, F^y_\mu) < r_n\right\} \end{aligned}$$

olur.

$d_1(F^x_\lambda, F^y_\mu), d_2(F^x_\lambda, F^y_\mu), ..., d_n(F^x_\lambda, F^y_\mu)$ metriklerinin en küçüğüne d_{i_1} denilsin. d_{i_1} metriği çıkarıldıktan sonra kalan metriklerin en küçüğüne d_{i_2} denilsin ve bu işlem n defa tekrarlansın. Böylece, $d_{i_1} < d_{i_2} < ... < d_{i_n}$ sıralaması elde edilir.

$d_1(F^x_\lambda, F^y_\mu), d_2(F^x_\lambda, F^y_\mu), ..., d_n(F^x_\lambda, F^y_\mu)$ metrikleri denk metrikler olduğundan

$$B_{d_{i_1}}(F^x_\lambda, r_i) \subset B_{d_{i_2}}(F^x_\lambda, r_i) \subset ... \subset B_{d_{i_n}}(F^x_\lambda, r_i)$$

kapsaması vardır.

O halde, $B_{d_{i_1}}(F^x_\lambda, r_i) \cap B_{d_{i_2}}(F^x_\lambda, r_i) \cap ... \cap B_{d_{i_n}}(F^x_\lambda, r_i) = B_{d_{i_1}}(F^x_\lambda, r_i)$ olur.

Böylece, $\tau_{\widetilde{d}} = \tau_{d_{i_1}}$ elde edilir. □

3.3.1. Esnek metrik uzaylar ile koni metrik uzaylar arasındaki ilişki

Kaynak Taraması bölümünde Matejdes (2016) tarafından herhangi bir esnek topolojik uzayın $(E \times U)$ üzerinde bir topolojiye homeomorfik olduğunu göstermesi ile ilgili yapılan çalışmadan ve Das ve Samanta (2013b) tarafından her esnek metriğin bir esnek topoloji doğurmasıyla ilgili yapılan çalışmadan bahsedildi. Bu yüzden, herhangi bir esnek metriğin $(E \times U)$ üzerinde bir topoloji doğurduğu sonucuna varılabilir. Bu alt kısımda, bu topolojinin, esnek metrikten elde edilen bir metrik ile metriklenebildiği gösterilecek. Esnek metrik kavramının daha iyi anlaşılması amacı esas alınarak bir esnek metriğin, vektör değerli bir metrik olduğu, daha kesin bir ifadeyle koni metriğin özel bir hali olduğu gösterilecek.

Bu çalışma boyunca $\mathbb{R}^n$ üzerindeki standart topoloji ele alınacak ve $\|\cdot\|_\infty$ ile de alışılmış norm gösterilecek.

Önerme 3.107. *E parametre kümesi olmak üzere E üzerindeki bütün negatif olmayan esnek reel sayıların kümesi $\mathbb{R}(E)^*$ olsun. Bu durumda, $\mathbb{R}(E)^*$ kümesi $\mathbb{R}^{s(E)}$ üzerinde bir konidir.*

İspat $\mathbb{R}^{s(E)}$ nin bir Banach uzayı olduğu ve $\mathbb{R}(E)^*$ kümesinin $\mathbb{R}^{s(E)}$ nin bir alt kümesi olduğu açıktır.

i) $\mathbb{R}(E)^*$ kümesinin $\mathbb{R}^{s(E)}$ üzerindeki standart topolojiye göre kapalı olduğunu göstermek gerekir. $\widetilde{x} \in (\mathbb{R}(E)^*)^c$ ve $\widetilde{r} = \|\widetilde{x}\|_\infty$ olsun. $\widetilde{r} > 0$ olduğundan $B(\widetilde{x}, \widetilde{r}) \subset (\mathbb{R}(E)^*)^c$ vardır. Buradan, $(\mathbb{R}(E)^*)^c$ açık bir kümedir. Böylece, $\mathbb{R}(E)^*$ kapalı bir kümedir.

ii) $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbb{R}(E)^*$ ve a, b negatif olmayan iki reel sayı olsun. $a\widetilde{x} + b\widetilde{y}$ lineer kombinasyonunun $\mathbb{R}^{s(E)}$ uzayında negatif olmayan bir vektör olduğu açıktır. Böylece, $a\widetilde{x} + b\widetilde{y} \in \mathbb{R}(E)^*$ olur.

iii) $\widetilde{x} \in \mathbb{R}(E)^*$ olsun. Eğer $\widetilde{x} \neq \overline{0}$ ise $-\widetilde{x} \notin \mathbb{R}(E)^*$ ve eğer $\widetilde{x} = \overline{0}$ ise $-\widetilde{x} = \overline{0} \in \mathbb{R}(E)^*$ olur. Buradan, $\mathbb{R}(E)^* \cap (-\mathbb{R}(E)^*) = \overline{0}$ elde edilir. □

Önerme 3.108. *$\mathbb{R}(E)^*$ konisi tarafindan üretilen $\preceq$ sıralaması ile $\mathbb{R}(E)^*$ üzerinde tanımlanan $\widetilde{\leq}$ sıralaması çakışır.*

İspat $\widetilde{x} \widetilde{\leq} \widetilde{y}$ olsun. O zaman $\forall e \in \{1, 2, ..., s(E)\}$ için $\widetilde{x}(e) \leq \widetilde{y}(e)$ olur.

Bu, $\forall e \in \{1, 2, ..., s(E)\}$ için $\widetilde{x}(e) - \widetilde{y}(e) = 0$ olmasını gerektirir. O halde, $\widetilde{y} - \widetilde{x} \in \mathbb{R}(E)^*$ olur. Buradan, $\widetilde{x} \preceq \widetilde{y}$ elde edilir. Bu gerektirme çift yönlü geçerli olduğundan $\preceq$ sıralaması ile $\widetilde{\leq}$ sıralaması çakışır. □

Sonuç 3.109. *U boştan farklı bir küme, E parametrelerin sonlu bir kümesi ve $\widetilde{d}$ de U_E esnek kümesi üzerinde bir esnek metrik olsun. $d_c : (E \times U) \times (E \times U) \longrightarrow \mathbb{R}(E)^*$ olmak üzere $d_c((\lambda, x), (\mu, y)) = \widetilde{d}\left(F_\lambda^x, F_\mu^y\right)$ ile tanımlansın. Bu durumda, d_c dönüşümü bir koni metriktir.*

İspat Önerme 3.107 ve Önerme 3.108'in bir sonucudur. □

Her esnek metriğin aslında bir koni metrik olduğu gözlemi, koni metrikler için elde edilen bütün sonuçların esnek metriklere taşınmasını sağlar. Koni metrik uzayların metriklenebilirliği Khani (2011) ve Ercan (2014) tarafından detaylı olarak incelenmiştir. Özel halde esnek metrik uzaylar için daha temel bir ispat aşağıdaki şekilde verilebilir:

Teorem 3.110. *U boştan farklı bir küme, E parametrelerin sonlu bir kümesi ve d bir esnek metrik olsun. $(E \times U)$ üzerinde d esnek metriğinin doğurduğu topoloji,*

$$D((\lambda, x), (\mu, y)) = \|d_c((\lambda, x), (\mu, y))\|_\infty$$

dönüşümü ile metriklenebilirdir.

İspat $D((\lambda, x), (\mu, y)) = \|d_c((\lambda, x), (\mu, y))\|_\infty$ dönüşümünün $(E \times U)$ üzerinde bir metrik olduğu açıktır. O halde, D ile d nin $(E \times U)$ üzerinde aynı topolojiyi doğurduğunu göstermek, ispatı tamamlamak için yeterli olacaktır. Bunun için, $(E \times U, d)$ uzayındaki her $B_d((\lambda, x), r)$ açık yuvarının $(E \times U, D)$ uzayında açık bir küme ve $(E \times U, D)$ uzayındaki her $B_D((\lambda, x), r)$ açık yuvarının $(E \times U, d)$ uzayında bir açık küme olduğunu göstermek gerekir. $r \in \mathbb{R}(E)^*$ olmak üzere $B_d((\lambda, x), r)$ açık yuvarı göz önünde bulundurulsun. $(\mu, y) \neq (\lambda, x)$ olmak üzere $(\mu, y) \in B_d((\lambda, x), r)$ olsun. $c = r - d\left(P_\lambda^x, P_\mu^y\right)$ olarak alınsın. $\overline{0} \widetilde{<} c$ ve $B_d((\mu, y), c) \subset B_d((\lambda, x), r)$ olduğu açıktır. c nin en küçük bileşeni olarak c' seçilsin. O halde, $B_D((\mu, y), c') \subset B_d((\mu, y), c) \subset B_d((\lambda, x), r)$ olur. Buradan, $B_d((\lambda, x), r)$ kümesinin her noktası D metriğine göre bir iç noktadır. Böylece, $B_d((\lambda, x), r)$ kümesi $(E \times U, D)$ uzayında bir açık kümedir. Tersine, $(\mu, y) \neq (\lambda, x)$ olmak üzere $(\mu, y) \in B_D((\lambda, x), r)$, $c = r - D((\lambda, x), (\mu, y))$ ve $\overline{c}$ bir esnek reel sayı olsun.

$D\left(\left(\lambda,x\right),\left(\mu,y\right)\right)=\left\|d_c\left(\left(\lambda,x\right),\left(\mu,y\right)\right)\right\|_\infty$ ve $d_c\left(\left(\lambda,x\right),\left(\mu,y\right)\right)=d\left(P_\lambda^x,P_\mu^y\right)<\overline{c}$ olduğundan, $B_d\left(\left(\mu,y\right),\overline{c}\right)=B_D\left(\left(\mu,y\right),c\right)\subset B_d\left(\left(\lambda,x\right),r\right)$ olur ve buradan $B_D\left(\left(\lambda,x\right),r\right)$ yuvarı, esnek metriğin doğurduğu topolojik uzayda açıktır. □

Aşağıdaki değişmeli diagram, tez boyunca bahsedilen esnek topoloji, klasik topoloji, esnek metrik, klasik metrik ve koni metrik arasındaki ilişkinin özeti niteliğindedir:

$$\begin{tikzcd}
\text{Esnek Topoloji} \arrow[dd, "\text{(Homeormorf)}"'] & \text{Esnek Metrik} \arrow[l] \arrow[d] \\
& \text{Koni Metrik} \arrow[d] \\
\text{Klasik Topoloji} \arrow[r, "\text{(Metriklenebilirlik)}"] & \text{Klasik Metrik}
\end{tikzcd}$$

4. SONUÇLAR

Bu tez çalışması, Giriş kısmı dışında Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taraması, Bulgular ve Tartışma, Sonuçlar olmak üzere üç ana başlıktan oluşmaktadır. Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taraması kısmında tez boyunca kullanılacak tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Daha sonra, literatürde yer alan üç farklı esnek nokta tanımı alt başlıklar halinde verilmiştir. Bunlardan ilki, (u, E) ile gösterilen esnek noktası olup klasik küme kuramının bazı temel özelliklerini karşılamamaktadır. İkinci esnek nokta, F_e^u ile gösterilen esnek noktasıdır. Bu esnek nokta tanımı aracılığıyla iki kümenin kartezyen çarpımı üzerindeki topolojik yapı ile homeomorfik bir bağlantı kurulan esnek topolojik uzaylar incelenmiş, oluşturulan homeomorfizm sebebiyle birçok esnek topolojik kavramın, ilgili topolojik uzayda çalışılabileceğine vurgu yapılmıştır. Üçüncü esnek nokta; e_F gösterimi ile literatürde yerini alan, özel halde F_e^u esnek noktasına karşılık gelen esnek noktasıdır.

Bugular ve Tartışma kısmında, ilk olarak Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taraması kısmında kümesel bazda verilen tanımlar yardımıyla esnek Kuratowski kapanış operatörü ve esnek iç operatörü kavramlarına yer verilmiş ardından bunların birer uygulaması yapılmıştır. Daha sonra Kuratowski Kapanış-Tümleyen Teoremi olarak bilinen çalışmanın esnek kümeler aracılığıyla yeniden ifadesi ve ispatı verilmiştir. Yine bu kısımda önceki çalışmalarda karşılaşılan üç farklı esnek nokta tanımından hareketle elde edilen farklı sonuçlar, her biri ayrı bir alt başlıkta verilmek üzere ele alınmıştır. Son olarak, F_e^u esnek noktası yardımıyla esnek metrik uzaylar incelenmiş ve klasik metrik uzaylar ile arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Klasik metriklerin bir genellemesi olarak sunulan koni metrik kavramı göz önünde bulundurulduğunda, her esnek metriğin aslında bir koni metrik olduğu ve koni metriklerin de metriklenebilir olması sonucu esnek metriğin yeni bir kavram olmadığı elde edilmiştir. Esnek metrikler, standart metrik aracılığıyla bir topoloji doğurduğundan herhangi bir özgün sonuca sebep olmayacağı sonucuna varılmıştır. Sabit nokta teoremleri söz konusu olduğundaysa koni metrik uzaylardan elde edilen tüm sonuçların ek bir koşul olmaksızın esnek metrik uzaylara aktarılabildiği sonucu ortaya konulmuştur.

Bu çalışma, esnek küme kuramı, esnek topolojik uzaylar ve esnek metrik uzaylar üzerine çalışan matematikçiler ve mühendisler için bir yardımcı kaynak olarak düşünülebilir.

5. KAYNAKLAR

Aktaş H., Çağman N. 2007. Soft sets and soft groups. *Information Sciences*, 177: 2726-2735.

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. and Shabir, M. 2009. On some new operations in soft set theory. *Comput. Math. Appl.*, 57: 1547-1553.

Aygünoğlu, A. and Aygün, H. 2012. Some notes on soft topological spaces. *Neural Comput. Appl.*, 21(1): 113-119.

Çağman, N., Karataş, S. and Enginoğlu, S. 2011. Soft topology. *Computers and Mathematics with Applications*, 62: 351-358.

Das, D. and Samanta, S. K. 2012. Soft real sets, soft real numbers and their properties. *J. Fuzzy Math.*, 20(3): 551-576.

Das, D. and Samanta, S. K. 2013. On soft metric spaces. *J. Fuzzy Math.*, 21(3): 207-213.

Das, D. and Samanta, S. K. 2013. Soft metric. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 6: 77-94.

Ercan, Z. 2014. On the end of the cone metric spaces. *Topology Appl.*, 166: 10-14.

Feng, F., Jun, Y. B., Zhao, X. Z. 2008. Soft semirings. *Computer and Mathematics with Applications*, 56: 2621-2628.

Georgiou, D. N., Megaritis, A. C. and Petropoulos, V. I. 2013. On soft topological spaces. *Appl. Math. Inf. Sci.*, 7(5): 1889-1901.

Georgiou, D. N. and Megaritis, A. C. 2014. Soft set theory and topology. *Appl. Gen. Topol.*, 15(1): 93-109.

Huang, L. G. , Zhang, X. 2007. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 332: 1468-1476.

Hussain, S. and Ahmad, B. 2011. Some properties of soft topological spaces. *Computers and Mathematics with Applications* , 62: 4058-4067.

Khani, M., Pourmahdian, M. 2011. On the metrizability of cone metric spaces. *Topology Appl.*, 158(2): 190-193.

Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A.R. 2003. Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45: 555-562.

Matejdes, M. 2015. Soft topological questions and answers. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 104(2): 237-247.

Matejdes, M. 2016. Soft topological spaces and topology on the cartesian product. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 45(4): 1091-1100.

Matejdes, M. 2017. On soft regularity. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 116(1): 197-200.

Matejdes, M. 2017. Some remarks on soft separation axioms. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 116(1): 191-195.

Molodtsov, D. 1999. Soft set theory-first results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37: 19-31.

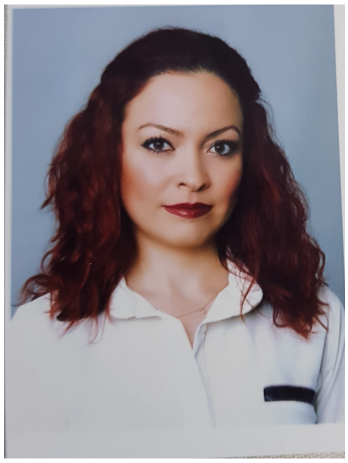
Shabir, M. and Naz, M. 2011. On soft topological spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, 61: 1786-1799.

Strabel, G. 2014. The Kuratowski closure-complement theorem. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.159.4744&rep=rep1&type=pdf.

An, T. V., Dung, N. V., Kadelburg, Z. and Radenović, S. 2015. Various generalizations of metric spaces and fixed point theorems. *RACSAM 109*, 175-198.

Zorlutuna, İ., Akdağ, M. Min, W.K. and Atmaca, S. 2012. Remarks on soft topological spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 3(2): 171-185.

ÖZGEÇMİŞ



MÜGE ÇERÇİ

cercimuge@hotmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2009-2012	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Antalya
Lisans 2003-2008	Ege Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya