T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIE CEBİRLERİ VE SINIFLARI

Mohammad ZMMO

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIE CEBİRLERİ VE SINIFLARI

Mohammad ZMMO

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 19/6/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ALBAYRAK

ÖZET

LIE CEBİRLERİ VE SINIFLARI

Mohammad ZMMO

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ
Temmuz 2017, 65 sayfa

Post-Lie cebirler, posetlerin parçalanış homologileri ile ilişkili olarak Valette tarafından tanıtılmış ve üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Pre-Lie cebirler özellikle geometri ve fizik gibi birçok alanda önemli rol oynar. Bir post-Lie cebir, pre-Lie cebrin bir genellemesidir.

Lie cebir çifti (L, n) için post-lie cebir yapısı incelenmiş, yarıbasitlik ve çözülebilirlik için post lie cebrin varlık kriteleri Burde (2009), Burde (2016) ve Burde (2012) teknikleri yenilenerek incelenmiştir.

N-türev kavramı, türev ve 3-lü türev kavramının doğal bir genellemesedir. L sonlu boyutlu bir Cartan altcebir tarafından derecelendirilmiş bir Lie cebir olsun. L nin türev cebri ile N-türev cebri ilişkisi incelenmiş ve çakışmaları için koşullar Lian ve Chen (2016) teknikleriyle belirtilmiştir.

Schrödinger-Virasora cebir, Kac-Moody cebirlerde uygulanmıştır. Ayrıca, basit cebirler için $(\alpha, \beta, \gamma)-$türev kavramı ve özellikleri araştırılmıştır. Genelleşmiş türevler kullanılarak post-Lie cebir yapısı sınıflandırılabileceği belirlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Lie cebir, post-Lie cebir, türev, Cartan algebra, genelleşmiş türev, N-türev.

JÜRİ: Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ (Danışman)
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ALBAYRAK

ABSTRACT

LIE ALGEBRAS AND CLASSES

Mohammad ZMMO

MSc Thesis in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ
July 2017, 65 pages

Post-Lie algebras were introduced by Valette in relation to the disintegration homologies of the posets and various studies were carried out on them.

Pre-Lie algebras play an important role in many areas, especially geometry and physics.

The post-lie algebraic structure for the Lie algebra pair (L, n) is examined, and the post-lie algebra entity criterion for semi-simplicity and solvability has been investigated by revising the Burde (2009), Burde (2016) and Burde (2012) techniques.

The concept of the N-derivative is a natural generalization of the derivative and the 3-dimension derivative concept. Let L be a Lie algebra rated by a Cartan subtype of finite dimension. The N-derivative algebra and the $N-$derivative algebraic relation have been studied and the conditions for overlapping Lian ve Chen (2016) have been reported.

Schrdinger-Virasora algebra, Kac-Moody algebra. In addition, (α, β, γ) - derivative concept and its properties have been investigated for simple algebras. It has been determined that post-Lie algebraic structure can be classifiedusing generalized derivatives. A post-Lie algebra is a generalization of pre-Lie algebra.

KEYWORDS: Lie algebra,post-Lie algebra, derivation, Cartan algebra, generalized algebra, N-derivation.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ (Supervisor)
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Asst. Prof. Dr. Mehmet ALBAYRAK

ÖNSÖZ

Lie teorisi matematiğin her dalında geniş kullanım alanına sahiptir. Lie grupları ve cebirleri diferensiyel denklem sistemlerinin integrasyonu ile ilgili çalışmalarda Norveç'li matematikçi Sophus Lie (1842-1899) tarafından geliştirilmiştir. Lie teorisi, matematiğin diferensiyel geometri, analiz, topoloji ve cebir gibi birçok dalında uygulamalara sahiptir.

Tez giriş, kurumsal bilgiler - kaynak tramaları ve bulgular olmak üzere üç ana bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde : Lie cebirleri, Lie altcebirleri, idealleri, Lie homomorfizmleri ve Lie cebri temsilleri kavramları tanıtılarak Kartan kriteri ve Killing formu ifade edilmiştir. Ayrıca Lie cebirlerin örnekleri için ilişkili Lie grupların örneklerı verilmiştir.

İkinci bölüm de ise, Levi ayrışımı ifade edilerek, yarı basit Lie-cebri ve kök sistemleri ile $sl(3, \mathbb{C})$ temsilleri ve kökleri, ikili temsili ile $se(3)$, $su(2)$ cebirleri ve temsilleri üzerinde durulmuştur.

Bulgular kısım adı altında Post-Lie cebri, Pre-Lie cebri tanıtılarak, Post-Lie cebir yapısı üzerinde durulmuştur. Bu kavramların çözülebilir ve nilpotent Lie cebirleri ile ilişkisi incelenmiştir.

Lie cebir türevleri, çift Lie cebir türevleri, sonlu üretilen Lie cebirler için N-türev, (α, β, γ)-türev kavramları ve özellikleri araştırılmıştır. Lie cebrin N-türevi için esas teoremi Schrödinger-virasoro cebri, Mc-Moody cebri için uygulanmıstır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, gurbette geçtiğim zor durumlarda motivasyonumu yükselten ve yardım eden, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanlarını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan saygıdeğer hocam Sayın Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Rahmetli babam, annem, ailem ve bana destek veren teyzemin oğlu Wessam ZEMMO'ya teşekkürlerimi sunarim. Ayrıca Antalya'daki ikinci ailem özellikle Ahmet PEHLİVAN ve Ramazan KALKAN ağabeylerim, bana Türkçe öğreten hocalarım'a teşekkür etmek istiyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ v
1. GİRİŞ 1
1.1. Lie Cebirleri ve Grupları 1
1.1.1. Lie alt cebiri , idealleri ve bölüm cebri 3
1.1.2. Lie homomorfizmleri 4
1.1.3. Lie cebiri eşlenik temsilleri 5
1.1.4. Çözülebilir, yarıbasit ve nilpotent Lie cebir 6
2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI 14
2.1. Yarı-basit Lie Cebiri ve Kök Sistemleri 14
2.1.1. Bir Yarı Basit Lie Cebirinin Kök Sistemi 14
2.1.2. $sl(n, \mathbb{C})$ 'nin Temsilleri 16
2.1.3. $su(2)$ ve $se(3)$ lie cebirleri 25
3. BULGULAR 29
3.1. Post-Lie Cebiri 29
3.1.1. Çift Lie cebirin türevleri ve Lie cebir özdeşlikleri 41
3.2. Sonlu üretilen Lie cebirler için N-türevi 49
3.2.1. Lie cebirin N-türevi için esas teoremi 51
3.2.2. Lie cebir (α, β, γ) türevleri 55
4. SONUÇ 62
5. KAYNAKLAR 64
ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

F	Cisim
$\mathbb{N}$	Negatif olmayan tamsayların kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayıların kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık saylar kümesi
L	Lie cebiri
$\mathbb{C}^{nxn}$	Kompleks girdili $n \times n$ matris halkasıdır
$[,]$	Lie işlemi, x ile y'nin kömütatörü
V	vektör uzayı
$End(V)$	Endomorfizmlerin kümesi
$gl(v)$	End(V)'nin Lie cebiri
$C(A)$	A'nin merkezliyicisi
$ker(\varphi)$	φ'nin çekirdeği
$im(\varphi)$	φ'nin görüntüsü
$C^k(U,R)$	C^k sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi
D	türev
$Der(A)$	A'nın türevlerinin kümesi
adx	$x \in L$ için eşlenik temsili
adL	eşlenik temsillerin kümesi
$\bigoplus_{\alpha \in G} L_\alpha$	L_α cebirlerinin direkt toplamı
$rad(L)$	L'nim radikal ideali
η	Cartan altcebiri

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1. ($\mathbf{8}$ temsili) 19

2.2. ($\mathbf{3}$ temsili) 21

2.3. ($\bar{\mathbf{3}}$ temsili) 22

2.4. ($\mathbf{6}$ temsili) 23

2.5. ($\mathbf{10}$ temsili) 24

1. GİRİŞ

Bu bölümde Lie cebirlerinin, Lie gruplarının temel kavramlarını ve ileriki bölümlerde kullanılacak olan temel özellikleri ifade edeceğiz. Bu bölümdeki kavramlar hakkında ayrıntılı bilgi için Erdmann ve Wildon (2006), Kirillov (2008), Semenov (1983), Kutsal (2005) ve Cahn (2014) kaynakları incelenebilir.

1.1. Lie Cebirleri ve Grupları

Tanım 1.1 (Lie cebiri). F bir cisim olmak üzere ve L, F üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bu durumda, $[.,.] : L \times L \to L, (x, y) \to [x, y]$ fonksiyonu

(a) bilineer,
(b) her $x \in L$ için $[x, x] = 0$,
(c) her $x, y, z \in L$ için, $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

koşullarını sağlarsa L'ye F üzerinde bir Lie cebir denir.

Yukarıdaki tanımda (3) koşulu Jakobi özdeşliği olarak bilinir. L , F üzerinde bir Lie cebir ise kısaca $''$ L bir lie cebirdir$''$ denir. $x, y \in L$ için Lie işlemi $[x, y]$'ye x ile y'nin komütatörü diyeceğiz.

Lie cebrin değişmeli olması için gerekli ve yeterli koşul, her $x, y \in L$ için $[x, y] = 0$ dır.

Her $x \in L$ için $[x, x] = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul, her $x, y \in L$ için $[x, y] = -[y, x]$ dir. Şöyleki; her $x \in L$ için $[x, x] = 0$ ise her $x, y \in L$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [x + y, x + y] \\ &= [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] \\ &= [x, y] + [y, x] \Rightarrow [x, y] = -[y, x]. \end{aligned}$$

Diğer yandan $[x, y] = -[y, x]$ ise $[x, x] = -[x, x]$ ve $[x, x] = 0$'dır. Her $x, y, z \in L$ için $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ ancak ve ancak $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ dır.

Örnek. (1) A , F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $x, y \in A$ için $[x, y] = xy-yx$ tanımlayalım. Bu durumda A 'nın bir Lie cebir olduğu şöyle gösterilebilir:

(a) $a, b \in F$ ve $x, y, z \in A$ için $[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y]$ olur.
(b) Her $x \in A$ için $[x, x] = xx - xx = 0$ dır.
(c) Her $x, y, z \in A$ için

$$\begin{aligned}[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] &= [x,yz-zy]+[y,zx-xz]+[z,xy-yx]\\ &= xyz-xzy-yzx+zyx+yzx-yxz\\ &-zxy+xzy+zxy-zyx-xyz+yxz\\ &= 0\end{aligned}$$

dır.

(2) $C^{n\times n}, C$ üzerinde bir Lie cebirdir. Burada $C^{n\times n}$, kompleks girdili $n\times n$ matris halkasıdır. $(C^{n\times n},+,.)$ bir vektör uzayı ve $M_1,M_2\in C^{n\times n}$ için $[M_1,M_2]=M_1M_2-M_2M_1$ tanımlanırsa $C^{n\times n}$, C üzerinde bir Lie cebiri olur.

(3) V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve End(V)={ $g:V\to V$ bir endomorfizm} olsun. Bu durumda $f,g\in End(V)$ için $[f,g]=f\circ g-g\circ f$ tanımlanırsa End(V), F üzerinde bir Lie cebir olur. Bu cebri $gl(V)$ ile göstereceğiz.

(4) $F=R$ ve $X=(x_1,x_2,x_3), Y=(y_1,y_2,y_3), Z=(z_1,z_2,z_3)\in R^3$ için

$$[X,Y]=(x_2y_3-x_3y_2,x_3y_1-x_1y_3,x_1y_2-x_2y_1)$$

tanımıyla R^3, R üzerinde bir Lie cebiridir.

(a) $a,b\in R$ ve $X,Y,Z\in R^3$ için

$$\begin{aligned}[aX+bY,Z] &= [(ax_1+by_1,ax_2+by_2,ax_3+by_3),(z_1,z_2,z_3)]\\ &= ((ax_2+by_2)z_3-(ax_3by_3)z_2,(ax_3+by_3)z_1-\\ &(ax_1+by_1)z_3,(ax_1+by_1)z_2-(ax_2+by_2)z_1)\\ &= (ax_2z3+by_2z_3-ax_3z_2-by_3z_2,ax_3z_1+by_3z_1\\ &-ax_1z_3-by_1z_3,ax_1z_2+by_1z_2-ax_2z_1-by_2z_1)\\ &= a(x_2z_3-x_3z_2,x_3z_1-x_1z_3,x_1z_2-x_2z_1)+\\ &b(y_2z_3-y_3z_2,y_3z_1-y_1z_3,y_1z_2-y_2z_1)\\ &= a[X,Z]+b[Y,Z]\end{aligned}$$

Aynı şekilde $[Z,aX+bY]=a[Z,X]+b[Z,Y]$ olur.

(b) Her $X=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ için

$[X,X]=(x_2x_3-x_3x_2,x_3x_1-x_1x_3,x_1x_2-x_2x_1)=(0,0,0)$ dır.

(c) $X=(x_1,x_2,x_3), Y=(y_1,y_2,y_3), Z=(z_1,z_2,z_3)\in R^3$ için

$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]] &= (x_2y_1z_3-x_2y_2z_1-x_3y_3z_1+x_3y_1z_3,x_3y_2z_3-x_3y_3z_2\\ &-x_1y_1z_2+x_1y_2z_1,x_1y_3z_1-x_1y_1z_3-x_2y_2z_3+x_2y_3z_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[Y,[Z,X]] &= (y_2z_1x_2-y_2z_2x_1-y_3z_3x_1+y_3z_1x_3,y_3z_1x_3-y_3z_3x_2\\ &-y_1z_1x_2+y_1z_2x_1,y_1z_3x-y_1z_1x_3-y_2z_1x_3+y_2z_3x_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[Z,[X,Y]] &= (z_2x_1y_2-z_2x_2y_1-z_3x_3y_1+z_3x_1y_3,z_3x_2y_3-z_3x_3y_2\\ &-z_1x_1y_2+z_1x_2y_1,z_1x_3y_1-z_1x_1y_3-z_2x_2y_3+z_2x_3y_2)\end{aligned}$$

O halde, $X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ dır.

1.1.1. Lie alt cebiri , idealleri ve bölüm cebri

Tanım 1.2. L bir lie cebiri olmak üzere K, L'nin bir alt vektör uzayı olsun. Her $x, y \in K$ için $[x, y] \in K$ olursa K'ya L'nin bir alt cebiri denir.

Tanım 1.3. L bir lie cebiri olmak üzere. I, L'nin bir alt vektör uzayı olsun. Her $x \in L$, $y \in I$ için $[x, y] \in I$ olursa I'ya L'nin bir sol ideali denir ve her $x \in L$, $y \in I$ için $[y, x] \in I$ olursa I'ya L'nin bir sağ ideali denir. Her $x, y \in L$ için $[x, y] = -[y, x]$ olduğundan L'nin her sol ideali bir sağ idealidir. Bu durumda I 'ya L 'nin ideali denir.

Her Lie cebirinde en az iki ideal vardır: kendisi ve sıfırdır.

Tanım 1.4. L bir lie cebiri olmak üzere. I, L'nin bir ideali olsun. $L/I = \{x+I : x \in L\}$ kümesine L'nin I ya göre bölüm cebri denir.

L/I ' deki lie işlemi : her $x, y \in L$ için $[x+I, y+I] = [x, y]+I$ olarak tanımlanır. Bu işlemler iyi tanımlıdır. Çünkü, eğer $x + I = x_1 + I$ ve $y + I = y_1 + I$ ise $x_1 - x \in I$ ve $y_1 - y \in I$ dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} [x_1, y_1] &= [x + (x_1 - x), y + (y_1 - y)] \\ &= [x, y] + [x_1 - x, y] + [x, y_1 - y] + [x_1 - x, y_1 - y] \end{aligned}$$

$[x_1 - x, y] \in I$, $[x, y_1 - y] \in I$, $[x_1 - x, y_1 - y] \in I$ olduğundan $[x_1, y_1] + I = [x, y] + I$ dır.

Tanım 1.5. a) L bir lie cebiri olmak üzere. A, L'de boş olmayan bir alt küme olsun. Bu durumda

$$C(A) = \{x \in L; \text{her } v \in A \text{ için } [x, v] = 0 \text{ dır}\}$$

kümesine A'nın merkezleyicisi denir.

b) $C = \{c \in L;\text{her } v \in L \text{ için } [c, v] = 0\}$ ile tanımlanan kümeye lie cebrinin merkezi denir.

L bir lie cebiri olmak üzere. A, L'de boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda $C(A)$, L'nin bir lie alt cebiridir. Şöyle görebiliriz; $x, y \in C(A)$ ve $a \in A$ olsun. Bu durumda $[[x, y], a] = -[[y, a], x] - [[a, x], y] = -[0, x] - [0, y] = 0$ dir.

L bir lie cebiri olmak üzere. I, L'nin bir ideali olsun. Bu durumda $C(I)$, L'nin bir idealidir. Benzer şekilde, $c \in C(I), v \in L$ ve $x \in I$ olsun. Bu durumda, $[[c, v], x] = -[[v, x], c] - [[x, c], v]$ fakat $c \in C(I)$ olduğu için $[x, c] = 0$ olur , $[v, x] \in I$ olduğundan $[[v, x], c] = 0$'dır.

Tanım 1.6. L değişmeli olmayan bir lie cebiri olmak üzere. L'nin $\{0\}$ ve kendisinden başka bir ideali yoksa , L'ye bir basit lie cebiri denir.

Tanım 1.7. L bir lie cebiri olmak üzere I ve J , L'nin iki ideali olsun. Bu durumda $L = I \oplus J$ olarak yazılırsa L 'ye I ve J ideallerinin direk toplamı denir.

Tanım 1.8. L bir lie cebiri olmak üzere A, B , L nin iki ideali olsun .Bu durumda $[A, B] = \{[a, b]; a \in A, b \in B\}$ ye komütatör ideali denir.

Tanım 1.9. Bir Lie cebrinin kendi komütatör idealine eşit olması halinde mükemmeldir denir.

Lie cebrinin her elemanı komütatörler tarafından yaratılan idealde olduğu takdirde bir Lie cebri mükemmel olarak söylenir.

Örnek. $L = sl(2, \mathbb{C}) = \{x \in gl(2, \mathbb{C}); tr(x) = 0\}$ *ve* $T = \{e, h, f\}$*;* $e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *onun tabanı olsun. Bu durumda, bir basit lie cebiridir. Çünkü, basit değilse,* $I \neq \{0\}$ *ve* $sl(2, \mathbb{C})$*'den farklı bir I ideali vardır.* $0 \neq v \in I$ *alırsa* $v = \alpha e + \beta f + \gamma h; \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *olarak yazılabilir.* $[h, e] = he - eh = 2e$ *,* $[h, f] = -2f$ *,* $[e, f] = h$ *olur. Şimdi* $\alpha \neq 0$ *ise* $[v, f] = (\alpha e + \beta f + \gamma h)f - f(\alpha e + \beta f + \gamma h)$ *dır. O halde* $[v, f] = \alpha h - 2\gamma f \in I$ *ve* $[[v, f], f] = -2\alpha f \in I$ *olur.* $f \in I$ *ise* $h = [e, f] \in I \Rightarrow e = 1/2[h, e] \in I$ *, o halde* $\alpha \neq 0$ *için* $I = L$ *dir. Benzer şekilde* $\beta \neq 0$ *ise,* $I = L$ *dir. Son olarak* $\gamma \neq 0$ *ise,* $[v, e] = -\beta h + 2\gamma e \in I$*, o halde* $I = L$ *olur. Sonuç olarak* $L = sl(2, \mathbb{C})$ *bir basit lie cebirdir.*

1.1.2. Lie homomorfizmleri

Tanım 1.10. L_1 ve L_2 iki Lie cebiri olsun. Eğer $\varphi : L_1 \to L_2$ bir lineer dönüşümü ve her $x, y \in L_1$ için $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ koşulu sağlanırsa φ'ye L_1'den L_2'ye bir lie homomorfizmi denir. $ker(\varphi) = \{x \in L_1; \varphi(x) = 0\}$ kümesine φ'nin çekirdeği denir. $Im(\varphi) = \{y \in L_2; \exists x \in L_1$ ve $\varphi(x) = y\}$ kümesine φ'nin görüntüsü denir.

$ker(\varphi)$, L_1 üzerinde bir idealidir ve $\imath m(\varphi)$, L_2'nin bir lie alt cebridir.

Teorem 1.11 (izomorfizm teoremi)**.** *a)* L_1*ve* L_2 *iki lie cebiri olmak üzere.* $\varphi : L_1 \to L_2$ *bir lie homomorfizmi olsun. Bu durumda* $L_1/ker(\varphi) \cong im(\varphi)$ *olur.*

b) L *bir lie cebiri ve* I, J *L'nin iki ideali olmak üzere :*

1) $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$*.*

2) Eğer $I \subseteq J$ *ise* $J/I, L/I$*'nin bir ideali ve* $(L/I)/(J/I) \cong L/J$ *dir.*

İspat. (Erdmann ve Wildon 2006). □

Örnek. *F bir cisim olmak üzere* $sl(n,F) = \{A \in F^{n\times n}; tr(A) = 0\}$ *ve* $gl(n,F) = \{A \in F^{n\times n}; det(A) \neq 0\}$ *olsun.* $tr : gl(n,F) \to F, x \mapsto tr(x)$ *dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda* tr *bir lie cebiri homomorfizmi olur. Çünkü,* tr *lineer dönüşümü ve* $tr([x,y]) = tr(xy - yx) = tr(xy) - tr(yx) = 0$ *olduğundan* $tr[x,y] = [tr(x), tr(y)] = 0$ *dır ,* tr *örten ve* $ker(tr) = sl(n,F)$ *dir. O halde* $gl(n,F)/sl(n,F) \cong F$ *olur.*

Tanım 1.12. F bir cisim ve A, F üzerinde bir cebir olsun. F cismi üzerinde bir lineer dönüşümü $D : A \to A$ her $a,b \in A$ için $D(a.b) = a.D(b) + D(a).b$ sağlanırsa D'ye A'nın türevidir denir ve A'nın türevlerinin kümesi $Der(A)$ ile gösterilir.

$D_1, D_2 \in Der(A)$ için $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ olarak tanımlanırsa

1) $Der(A), gl(A)$'nın bir alt lie cebridir.

2) $Der(A), gl(A)$ üzerinde bir lie cebirdir.

Tanım 1.13. L bir lie cebiri olmak üzere I ,L 'nin bir ideal olsun. Bu durumda L 'nin her D türevi için $D(I) \subset I$ ise I ya L 'nin bir karakteristik ideali denir.

$L' = [L,L]$ bir karakterstik idealdir. Öyleki; her $D \in Der(L)$ için :

$$D(L') = D\,[L,L] = [D(L), L] + [L, D(L)] \subset [L,L] + [L,L] = [L,L] = L'.$$

Örnek. $A = C^\infty R$ *tüm sonsuz türevlenebilir fonksiyonların vektör uzayı olmak üzere.* $f, g \in A$ *ve* $x \in R$ *olsun.* f *ile* g*'nin çarpımı* $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ *ile tanımlanırsa A birleşmeli bir cebir olur.*

1.1.3. Lie cebiri eşlenik temsilleri

L bir lie cebiri olsun. Her $x \in L$ için $adx : L \to L$ her $y \in L$ için $adx(y) = [x,y]$ ile tanımlanan fonksiyonuna adx lineer operatörü denir ve her $x \in L$ için adx lerden oluşan küme adL ile göstelirlir .

Jakobi özdeşliğinden adx lineer operatörü lie bir türevi olur. Çünkü, her $u, v \in L$ için

$$\begin{aligned} adx[u,v] &= [x,[u,v]] \\ &= -[u,[v,x]] - [v,[x,u]] \\ &= [u,[x,v]] + [[x,u],v] \\ &= [u, adx(v)] + [adx(u), v] \end{aligned}$$

dir. adx 'e L 'nin eşlenik temsili denir.

L bir lie cebir olmak üzere $ad : L \to Der(L); x \mapsto adx$ dönüşümü L'den $Der(L)$'ye bir lie homomorfizmi olur. Çünkü, her $x, y \in L$ için $ad(x+y) = adx + ady$

dir. İspatlayalım: her $z \in L$ için

$$\begin{aligned} ad(x+y)(z) &= [x+y,z] \\ &= [x,z]+[y,z] \\ &= adx(z)+ady(z) \\ &= (adx+ady)(z) \end{aligned}$$

dir.

2) Her $\alpha \in F$ için $ad(\alpha x) = \alpha(adx)$ dir. Şöyle ispatlayalım: $ad(\alpha x)(z) = [\alpha x, z] = \alpha[x,z] = \alpha adx(z)$.

3) Her $x, y \in L$ için $ad[x,y] = [adx, ady]$ ispatlayalım: her $z \in L$ için

$$\begin{aligned} ad[x,y](z) &= [[x,y],z] \\ &= -[[y,z],x]-[[z,x],y] \\ &= [x,[y,z]]-[y,[x,z]] \\ &= adx(ady(z))-ady(adx(z)) \\ &= adx(ady(z))-ady(adx(z)) \\ &= (adx \circ ady - ady \circ adx)(z) \end{aligned}$$

dir. $adL, Der(L)$'de bir idealdir. Çünkü, her $x \in L$ için $[D, adx] = ad(Dx)$ dir. Her $x \in L$ ve her $D \in Der(L)$ ve her $y \in L$ için

$$\begin{aligned} [D,adx](y) &= (D \circ adx - adx \circ D)(y) \\ &= D[x,y]-[x,Dy] \\ &= [Dx,y] = ad(Dx)(y) \end{aligned}$$

dir.

1.1.4. Çözülebilir, yarıbasit ve nilpotent Lie cebir

L bir lie cebiri olmak üzere $L' := [L, L]$ ye L'nin türevidir. L', her $x, y \in L$ için $[x, y]$ çarpımı ile üretilir ve her $x, y, z \in L$ için $[[x, y], z] \in [L, L] = L'$ olur.

Tanım 1.14. L bir lie cebir olmak üzere.

$$L^{(0)}=L \supset L^{(1)} = L' \supset L^{(2)}=[L',L'] \supset ... \supset L^{(i)} \supset L^{(i+1)} = [L^{(i)},L^{(i)}] \supset ...$$

serisine L'nin türetilmiş serisi denir. Uygun bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $L^{(k)} = \{0\}$ ise L'ye çözülebilir bir cebir denir.

Her i için $L^{(i)}$ bir karakteristik idealdir.

Önerme 1.15. *L bir lie cebir olmak üzere I, L 'nin bir ideali olsun. Bu durumda, L çözülebilirdir ancak ve ancak I , J çözülebilirdir.*

İspat. $\pi : L \to L/I$ doğal homomorfizm ve tümevarım kullanımıyla ispatlanır. □

Sonuç 1.16. *L bir lie cebir olmak üzere I ve J , L 'nin bir ideali olsun. Bu durumda I ve J çözülebilirse $I + J$ ideali çözülebilirdir.*

İspat. $x \in L$ olmak üzere $[x, I + J] = [x, I]+[x, J] \subset I+J$ dir. Bu durumda $I+J$ L 'nin bir idealıdır. Şimdi, homomorfizm teoreminden $(I + J)/J \approxeq I/(I \cap J)$ olur. $I/(I \cap J)$ çözülebilir olduğundan $(I + J)/J$, $I + J$ çözülebilirdir. □

Tanım 1.17. $\Re s = \{I; I,$ L'nin çözülebilir bir idealidir$\}$'ye L nin çözülebilir radikali denir. Eğer $\Re s = \{0\}$ ise L'ye yarıbasit lie cebir denir.

Bundan sonraki kavramlar hakkında bilgi için Erdmann ve Wildon (2006) , Cahn (2014) ve Gonzalez (2007) kaynakları incelenebilir.

Tanım 1.18. L bir Lie cebiri olmak üzere $L_{(1)} = [L, L]$, $L_{(2)} = \left[L, L_{(1)}\right] = [L, [L, L]]$, $L_{(k)} = \left[L, L_{(k-1)}\right]$ serisine L nin alt merkezi serisi denir. Uygun bir $m \geq 1$ için $L_{(k)} = 0$ ise L ye nilpotent Lie cebiri denir.

Teorem 1.19. *(Lie teoremi) V sıfırdan farklı ve karmaşık vektör uzayı olsun. L, $gl(V)$ nin çözülebilir bir Lie altcebridir. Bu durumda $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, V nin tabanı ise L nin her elemanın üst üçgensel matrisi vardır.*

İspat. (Gonzalez 2007). □

Teorem 1.20. *L, F cisim üzerinde bir Lie cebir olmak üzere L' nilpotent ise L çözülebilir bir cebirdir.*

İspat. (Gonzalez 2007). □

Tanım 1.21. L, F üzerinde bir lie cebiri olsun. Bu durumda

$$B : L \times\ L \to F; (x, y) \mapsto tr(adx \circ ady)$$

dönüşümün'e L, üzerinde killing formu denir.

$B(y, x) = tr(ady \circ adx) = tr(adx \circ ady) = B(x, y)$ olduğundan killing formu simetrik olur. $x_1, x_2, x_3 \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ için

$$\begin{aligned} B(\alpha x_1 + \beta x_2, y) &= tr(ad(\alpha x_1 + \beta x_2) \circ ady) = tr((\alpha adx_1 + \beta adx_2) \circ ady) \\ &= \alpha tr(adx_1 \circ ady) + \beta tr(adx_2 \circ ady) \\ &= \alpha B(x_1, y) + \beta B(x_2, y) \end{aligned}$$

olduğundan $B(x,y)$ bilineerdir.

Lemma 1.22. *L bir Lie cebir olsun. Bu durumda her $x, y, z \in L$ için $B([x,y], z) = B(x, [y,z])$ olur.*

İspat. $tr([adx, ady] \circ adz) = tr(adx \circ [ady, adz])$ olduğundan $tr(ad[x,y] \circ adz) = tr(adx \circ ad[y,z])$ o halde $B([x,y], z) = B(x, [y,z])$ dir. □

Teorem 1.23. *L, F üzerinde bir lie cebiri olsun. Bu durumda L çözülebilirdir ancak ve ancak her $x \in [L,L]$ ve $y \in L$ için $B(x,y) = 0$ dır.*

İspat. (Erdmann ve Wildon 2006). □

Teorem 1.24. *B, F üzerinde bir bilineer formu olsun. Eğer sıfırdan farklı her $x \in F$ için $(x,y) \neq 0$ olacak şekilde bir $y \in F$ varsa B'ye dejenere değildir denir.*

İspat. (Erdmann ve Wildon 2006). □

Teorem 1.25. *B, F üzerinde bir bilineer form ve A, F üzerinde verilen β tabanına göre B'nin matrisi olsun. Bu durumda , B dejenere değildir ancak ve ancak A tekil olmayan bir matristir.*

İspat. (Erdmann ve Wildon 2006). □

Teorem 1.26. *L, Füzerinde bir lie cebiri olsun. Bu durumda, L yarıbasittir ancak ve ancak B dejenere değildir.*

İspat. (Erdmann ve Wildon 2006). □

Örnek. *$L = sl(2,C)$ olmak üzere $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ L'nin standart tabanı $\{e, f, h\}$ olsun. Bu durumda*

$$\begin{array}{lll} ade(e) = [e,e] = 0 & ade(f) = [e,f] = h & ade(h) = [e,h] = -2e \\ adf(e) = [f,e] = -h & adf(f) = [f,f] = 0 & adf(h) = [f,h] = 2f \\ adh(e) = [h,e] = 2e & adh(f) = [h,f] = -2f & adh(h) = [h,h] = 0 \end{array}$$

$$ade = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, adf = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, adh = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak temsil edilir.

$$B(e,e) = tr(ade \circ ade) = tr \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$B(e,f) = tr(ade \circ adf) = tr \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 4$$

$$B(e,h) = tr(ade \circ adh) = tr \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$B(f,f) = tr(adf \circ adf) = tr \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$B(f,h) = tr(adf \circ adh) = tr \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$B(h,h) = tr(adh \circ adh) = tr \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 8 \text{ dır.}$$

Bu durumda (e,f,h) taban üzerinde B'nin matrisi $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ dır, $det(A) = -128 \neq 0$ olduğundan B dejenere değildir. Bu durumda L yarıbasittir.

Tanım 1.27. $\rho : L \to gl(V)$ bir homomorfizm ve $\rho([s,t]) = [\rho(s), \rho(t)]$ ise ρ ya L'nin bir temsili denir.

L bir Lie cebir olmak üzere ve V bir vektör uzayı ve $f : L \to gl(V)$ bir temsil olsun. Burada V vektör uzayına f nin temsil uzayı ve V nin boyutuna da f temsilinin boyutu denir .

$f : L \to gl(V)$ L nin bir temsili ve W, V nin bir alt uzayı olsun. Her $x \in L$ için $(\varphi(x))(W) \subset W$ oluyorsa W ya bir alt temsil uzayı, f nin W ya kısıtlanışına alt temsil denir.

Tanım 1.28. F bir cisim olmak üzere L , F üzerinde bir Lie cebir ve V, F üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer V üzerinde L 'nin temsili varsa V ya L-modulu denir ve V üzerinde L temsil edilmiş söyleyebiliriz.

Tanım 1.29. V , π temsiliyle L-modulu olmak üzere U, V nin alt vektör uzayı olsun. Eğer her $x \in L$ için U , tüm $\pi(x)$ öperatörların altında değişmez ise U ya bir L-alt modulu denir.

Tanım 1.30. π, V üzerinde L 'nin temsili olsun. Eğer V nin $\{0\}$ ve kendisinden başka L-altmodulu yoksa π ye indirgenemez temsili denir ve V ye indirgenemez L-modulu denir.

Tanım 1.31. F bir cisim olmak üzere L , F üzerinde bir Lie cebir ve Vve W , F üzerinde iki vektör uzayı , $\pi_1 : L \to gl(V)$ ve $\pi_2 : L \to gl(W)$ L 'nin iki temsilleri olsun. Bu durumda, eğer her $x \in L$ için $\top : V \to W$ lineer dönüşümü ve $\pi_2(x) \circ \top = \top \circ \pi_1(x)$ sağlanıyorsa $\top$ ye π_1 ve π_2 nin iç-içe temsili denir.

Teorem 1.32. *($L = sl(2, \mathbb{C})$'nin temel temsil teoremi)*

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ olacak şekilde $(e, f, h), L$'nin standart tabanı, V karmaşık vektör uzayı ve π,V üzerinde L'nin indirgenemez temsili olsun. Bu durumda $\pi(h)$ 'nin öz vektörü v_0 ve onun özdeğeri $\lambda\pi(e)v_0 = 0$ 'dir. Her $j \in \mathbb{Z}^+$ için $v_j = (\pi(f))^j v_0$ olsun. Bu durumda :

1. özdeğeri $\lambda = n$ pozitif tam sayı.

2. $v_{n+1} = 0$.

3. $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$, V 'nin bir tabanıdır.

4. $\pi(f)v_j = v_{j+1}$.

5. $\pi(h)v_j = (n - 2j)v_j$. Böylece tabanın her v_j vektörü , $\pi(h)$'nin özvektörüdür.

6. $\pi(e)v_j = j(n - j + 1)v_{j-1}$.

İspat. V karmaşık vektör uzayı olduğundan lineer öperatörü $\pi(h)$'nin özdeğeri μ karmaşıktır. $\pi(h)$'nin π 'ün karşılık gelen özvektörü v olsun.

$$\begin{aligned} \pi(h)(\pi(e)v) &= \pi(e)(\pi(h)v) + (\pi(h)\pi(e) - \pi(e)\pi(h))(v) \\ &= \mu\pi(e)v + [\pi(h), \pi(e)]v \\ &= \mu\pi(e)v + \pi[h, e](v) \\ &= \mu\pi(e)v + 2\pi(e)v \\ &= (\mu + 2)\pi(e)v \end{aligned}$$

dir.$\pi(e)v$'nin karşılık gelen özdeğeri $(\mu + 2)$'dir. $\pi(e)^2(v) = \pi(e)(\pi(e)v)$ olduğundan $\pi(e)^2v$ 'nin karşılık gelen özdeğeri $(\mu + 4)$ olur. Böylece $\pi(e)^s v$ 'nin karşılik gelen öz değeri $(\mu + 2s)$ olur. Şimdi $\pi(e)$'nin özdeğerleri sonlu olduğundan uygun bir $s \in \mathbb{N}$ için $\pi(e)^s v = 0$ dır. $\pi(e)^s v \neq 0$ fakat $\pi(e)^{s+1}v \neq 0$ olacak biçimde en küçük pozitif tam sayı s olsun . $v_0 = \pi(e)^s v$ olursa $\pi(e)v_0 = 0$ dır. v_0 , $\pi(h)$'nin özvektörü ve $\lambda = (\mu+2s)$ onun özdeğeridir. Şimdi her $j \in N$ için $v_j = \pi(f)^j v_0$ tanımlanırsa (4) ispatlanir. Her $j \in \mathbb{Z}^+$ için tümvarım kullanarak $\pi(h)v_j = (\lambda - 2j)v_j$ ispatlayalım. $j = 0$ için $\pi(h)v_0 = \lambda v_0$, v_j için $\pi(h)v_j = (\lambda - 2j)v_j$ kabul edelim ve v_{j+1} için doğru olduğunu ispatlayalım.

$$\begin{aligned} \pi(h)v_{j+1} &= \pi(h)(\pi(f)v_j) \\ &= \pi(f)(\pi(h)v_j) + [\pi(h), \pi(f)](v_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda - 2j)\pi(f)(v_j) + \pi[h,f](v_j)\\
&= (\lambda - 2j)v_{j+1} - 2\pi(f)(v_j)\\
&= (\lambda - 2j)v_{j+1} - 2v_{j+1}\\
&= (\lambda - 2(j+1))v_{j+1}
\end{aligned}$$

dir. Eğer $v_j \neq 0$ ise $\pi(h)$'nin özdeğerini $\lambda - 2j$ ise karşılık gelen özvektörü v_j'dir. V sonlu olduğundan uygun bir $j \in \mathbb{N}$ için $v_j = 0$ dir $v_n \neq 0$ ve $v_{n+1} = 0$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı n olsun. Bu durumda $j \geq 1$ için tümevarım kullanarak $\pi(e)v_j = j(\lambda - j + 1)v_{j-1}$ ispatlayalım $j = 1$ için $\pi(e)v_1 = \pi(e)(\pi(f)v_0) = \pi(f)(\pi(e)v_0) + \pi[e,f]v_0 = 0 + \pi(h)v_0 = \lambda v_0$, Genel olarak $j \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\pi(e)v_{j+1} &= \pi(e)(\pi(f)v_j)\\
&= \pi(f)(\pi(e)v_j) + \pi[e,f]v_j\\
&= j(\lambda - j + 1)\pi(f)v_{j-1} + \pi(h)v_j\\
&= j(\lambda - j + 1)v_j + (\lambda - 2j)v_j\\
&= (j+1)(\lambda - j)v_j
\end{aligned}$$

dir. Şimdi $v_{n+1} = 0$ olduğundan $0 = \pi(e)\, v_{n+1} = (n+1)(\lambda - n)v_n$ olur. $v_n \neq 0$ olduğundan $(n+1)(\lambda - n) = 0$'dır , bu durumda $\lambda = n$ olur. $\lambda = n$ için $\pi(h)v_j = (\lambda - 2j)v_j$ ve $\pi(e)v_j = j(\lambda - j + 1)v_{j-1}$ den (5) ve (6) görünür. $(v_0, ..., v_n)$ vektörleri kesinlikle lineer bağımsız vektörlerdir . Onlar $\pi(h)$' nin özvektörleri ve farklı özdeğerlerine karşılık gelendir. (4),(5) ve (6) den $(v_0, ..., v_n)$'nin $\mathbb{C}$-spanı $\pi(h)$, $\pi(e)$ ve $\pi(f)$ altında değişmeyendir. (e, f, g), L'nin tabanı olduğu için doğrusal bir L-değişmez altuzay olduğunu görüyoruz. V indirgenemez L-modül olduğundan (3)'ü ispatlar . □

Teoremin anlamı şöyledir: $\pi(h), V$ üzerinde yarıbasit lineer operatörü ve $n, (n-2), ..., -(n-2), -n$ onun özdeğerleridir. $\pi(e)$ ve $\pi(f)$ nilpotent öperatölerdir.

$\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ tabanına ait $\pi(e)$'nin matrisi üst üçgen bir matristir ve $\pi(f)$'nin matrisi alt üçgen bir matristir.

Burada Lie grubun tanımını ve bazı örneklerini ifade edeceğiz. Ayrıntılı bilgi için Kutsal (2005) ve Gallier J (2012) kaynakları incelenebilir.

U, R^n de bir açık altküme olmak üzere eğer bir $f : U \to R$ fonksiyonunundur. k. mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli ise f, fonksiyonu C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. U da C^k sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^k(U, R)$ ile gösterilir, yani

$C^k(U, R) = \{f, f : U \to R$ ve f fonksiyonu C^k sınıfından diferensiyellenebilir$\}$ dir.

Tanım 1.33. **(Lie grubu)** Bir G küme verilsin. Bu durumda

(a) G bir diferensiyellenebilir manifolddur.

(b) $(G, \cdot)$ bir grupdur.
(c) $\cdot : G \times G \to G, (x, y) \to x \cdot y^{-1}$ diferensiyellenebilir fonksiyondur

koşulları sağlanırsa G'ye bir lie gruptur denir.

Örnekler:

1) $\mathbf{GL}(\mathbf{n},\mathbb{C})$ **grubu**, kompleks regüler matrislerin genel lineer grubudur.

$M \in \mathbf{GL}(\mathbf{n},\mathbb{C})$ için $det(M) \neq 0$, $\mathbf{GL}(\mathbf{n},\mathbb{C})$ nin boyutu $r = 2n^2$ dir.

2) $\mathbf{SL}(\mathbf{n},\mathbb{C})$ **grubu**, özel lineer grup, $GL(n, \mathbb{C})$ grubunun bir alt grubudur .

$M \in \mathbf{SL}(\mathbf{n},\mathbb{C})$ için $det(M) = 1$. $\mathbf{SL}(\mathbf{n},\mathbb{C})$ nin boyutu $r = 2(n^2 - 1)$dir.

3) $\mathbf{GL}(\mathbf{n},\mathbb{R})$ **grubu,** reel regüler matrislerin genel lineer grubudur.

$M \in \mathbf{GL}(\mathbf{n},\mathbb{R})$ için $det(M) \neq 0$, boyutu $r = 2n^2$ dir.

4) $\mathbf{SL}(\mathbf{n},\mathbb{R})$ **grubu**, özel lineer grup. $GL(n, \mathbb{R})$ grubunun bir alt grubudur. $M \in \mathbf{SL}(\mathbf{n},\mathbb{R})$, $det(M) = 1$, $\mathbf{SL}(\mathbf{n},\mathbb{R})$ nin boyutu $r = n^2 - 1$ dir.

5) $\mathbf{U}(\mathbf{n})$ **grubu**, $u.u^t = u^t.u = 1$ koşulunu sağlayan kompleks matrislerin üniter gurubudur. u da u matrisinin kompleks eşleniğidir. $\mathbf{U}(\mathbf{n})$ nin boyutu $r = n^2$dir

6) $\mathbf{SU}(\mathbf{n})$, özel üniter grup , $U(n)$ grubunun alt grubudur. $u \in \mathbf{SU}(\mathbf{n})$ için $det(u) = 1$. $\mathbf{SU}(\mathbf{n})$ boyutu $r = n^2 - 1$ dir.

$$U(n) = \left\{ A : \bar{A}^T = A^{-1}, A \in \mathbb{C}^{n \times n} \right\}$$

ve $SU(n)$, $U(n)$ in determinati 1 olan alt gruplarıdır

$$SU(n) = \left\{ A : \bar{A}^T = A^{-1} \text{ ve } det(A) = 1, A \in \mathbb{C}^{n \times n} \right\}$$

7) $\mathbf{O}(\mathbf{n})$, n×n tipinde reel katsayılı tersi transpozuna eşit olan matrislerin kümesidir.

$$O(n) = \left\{ A : \ A^T = A^{-1}, A \in \mathbb{R}^{n \times n} \right\}$$

8) $\mathbf{SP}(\mathbf{n})$, simpletik grubudur: terimleri kuaternion olan tersi eşleniğinin transpozuna eşit olan , n×n tipindeki matrislerin kümesidir.

$$SP(n) = \left\{ A : A^T = A^{-1}, A \in H^{n \times n} \right\}$$

dir. Burada $H = \{x + iy + jz + kw : x, y, z, w \in \mathbb{R} \text{ ve } i^2 = j^2 = k^2, ijk = 1\} \approxeq \mathbb{R}^4$ dir kuaternionlar halkasıdır.

Örnek. $G = GL(n,R) = \{A = [a_{ij}] : detA \neq 0\}$ *matris çarpımı işlemine göre bir grup olup, üstelik bir Lie grubudur: Bütün* $n \times n$ *tipindeki reel matrislerin cümlesi olan* $gl(n,R)$*, reel saylar cismi üzerinde* n^2*-boyutlu bir vektörü uzaydır ve dolayısıyla bir manifolddur.*

Her bir $a = [a_{ij}] \in gl(n,R)$ için $[a_{ij}] = (a_{11},a_{21},...,a_{n1}, a_{12},...,a_{n2}, ...,a_{1n},...,a_{nn})$ alıp $b_i = a_{ij} + (j-1)n$ dersek $gl(n,R)$ nin $a = [a_{ij}]$ matrisine R^{n^2} nin $(b_1, b_2, ..., b_n)$ noktasını karşılık tutabiliriz. Böylece $gl(n,R)$ ile R^{n^2} arasında birebir tekabül kurmuş oluruz. Bu $gl(n,R)$ den R^{n^2} ye bir lineer izomorfizm, dolayısıyla koordinat sistemi verir. $GL(n,R) = \{g \in gl(n,R); detg \neq 0\}$ kümesi matris çarpımı altında bir gruptur.

$det : gl(n,R) \to R$, $A \to detA = det[a_{ij}] = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$, $\sigma \in S_n$ determinant fonksiyonu diferensiyellenebilir fonksiyonların çarpımlarının toplamına eşit olduğundan diferensiyellenebilirdir ve dolayısıyla süreklidir. Sürekli bir fonksiyonda, değer kümesinde bir kapalı (veya açık) kümein ters görüntüsü yine kapalı (veya açık)dır.

$det : gl(n,R) \to R$ fonksiyonu sürekli ve $\{0\}$cümlesi R de kapalı olduğundan $det^{-1}\{0\} = \{g \in gl(n,R); detg = 0\}$ kümesi $gl(n,R)$ de kapalıdır. Bu küme ise $gl(n,R)$ ye göre $GL(n,R)$nin tümleyenidir. O halde $GL(n,R)$ kümesi $gl(n,R)$ nin bir açık altkümesidir. Böylece $GL(n,R)$ bir manifolddur.

Şimdi $a, b \in GL(n,R)$ için, $GL(n,R) \times GL(n,R) \to GL(n,R)$, $(a,b) \to ab^{-1}$grup işlemi (matris çarpımı) nin diferensiyellenebilir olduğunu gösterelim: $a = [a_{ij}]$, $b = [b_{ij}]$ ve $b^{-1} = [b_{ij}/ |b|]$ için $ab^{-1} = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ij} / |b|]$ olarak yazılır.

Burada $[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ij} / |b|]$ fonksiyonları diferensiyellenebilir olduğundan ab^{-1} diferensiyellenebilirdir. Böylece $GL(n,R)$ bir Lie grubudur.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

Bu bölümde sl(3,$\mathbb{C}$) 'nin temsillerini ve kök sistemlerini inceleyeceğiz. Ek olarak se(3) ve su(2) nin temsilleri uygulama olarak verilecektir. Bu bölümdaki kavramlar hakkında ayrıntılı bilgi için Vasja Susic (2011) ve Kosmann-Schwarzbach (2009) kaynakları incelenebilir.

2.1. Yarı-basit Lie Cebiri ve Kök Sistemleri

Burada sl(3,$\mathbb{C}$) 'nin temsillerini ve kök sistemlerini inceleyeceğiz.

Tanım 2.1. L bir Lie cebri olmak üzere ve I, L'nin bir ideali olsun. Bu durumda

$$\left\{x \in L; n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } x^n \in I\right\}$$

kümesine L'nin radikali denir ve $rad(L)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2. ***(Levi ayrışımı)***. *Her Lie cebiri L'nin bir Levi ayrışımı vardır*

$$L = rad(L) \oplus L_{ss}$$

Burada $rad(L)$ L'nin Radikali, ve L_{ss} de L'nin bir yarı basit altcebirdir.

İspat. (Vasja Susic 2011). □

Bu sonuç bize, bir Lie cebirini, maksimal ideal olan (Radikal) kendi "Abelyen" ve "Abelyen olmayan" parçalarına ve hiçbir kalan ideal içermeyen bazı kalanlara (bir yarı basit Lie cebiri) her zaman ayrıştırabileceğimizi söyler.

Önerme 2.3. *Bir Lie cebiri L, L_i'nin basit Lie cebirleri olmak üzere, $L = \oplus L_I$ ise yarı basit halkadır. Dolayısıyla, bir yarı basit Lie cebiri L'yi, kendi idealleri için sadece 0'a ve L_i'ye sahip basit Lie Cebirleri L_i'nin bir direk toplamı olarak görebiliriz. Bilhassa, her bir basit Lie cebiri aynı zamanda yarı basit cebirdir..*

İspat. (Vasja Susic 2011). □

2.1.1. Bir Yarı Basit Lie Cebirinin Kök Sistemi

Tanım 2.4. (Toral, Cartan Alt cebirler).

1. Bir $\eta \subseteq L$ alt cebiri komütatif ve her için $h \in \eta$ için $[h, .]$ köşegenleştirilebilir ise (vektör uzayı g üzerindeki doğrusal dönüşüm gibi) $toraldır$ denir.

2. L'nin bir yarı basit Lie cebiri olduğunu düşünelim.

Bu durumda eğer bir toral alt cebir ve $C(\eta)$ merkez olmak üzere, $C(\eta) = \eta$ ise η

bir Cartan alt cebirdir. Bu da bize her zamanki aşina olduğumuz Cartan alt cebir tanımını verir. Yani, eğer bir maksimal toral alt cebir ise η'nin bir Cartan alt cebir olduğu anlaşılır, ve bu alt cebirde $[h_1, h_2] = 0$ olduğu için köşegenleştirilebilir elemanların maksimal alt cebiridir (vektör uzayı L'de köşegenleştirilebilir). Cartan alt cebirin varlığı konusuna detaylı girmeyeceğiz; sadece her türlü karmaşık yarı basit halka Lie cebirinin aslında bir Cartan alt cebire sahip olduğunu belirteceğiz.

Tanım 2.5. (İndirgenmiş Kök Sistemi). V, bir öklit vektör uzayı olsun (sonlu - kanonik iç çarpımlı (.,.) reel vektör zayı). Bu durumda aşağıdaki özelliklere sahip $R \subseteq V \backslash \{0\}$ bir indirgenmiş kök sistemi denir.

1. R sonludur ve V vektör uzayının bir tabanını içerir.

2. $\alpha, \beta \in R$ kökleri için $n_{\alpha\beta}$ 'nin tam sayı olmasını isteriz

$$n_{\alpha\beta} \equiv \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}$$

3. Eğer $s_\alpha = V \to V$, $s_\alpha(V) = \lambda - \frac{2(\alpha,\lambda)}{(\alpha,\alpha)}$ ise, tüm $\alpha, \beta \in R$ için $s_\alpha(\beta) \in R$ olur.

4. Eğer birkaç reel c için $\alpha, c\alpha \in R$ ise, o halde $c = 1$ veya $c = -1$ olur.

Her ne kadar bu koşulları biçimsel bir tarzda yazmış olsak da, bunları görselleştirmeyi denemek de öğreticidir . Dolayısıyla, bütün V öklit uzayını kapsayan, noktaların bir sonlu toplanması ile başlayacağız. β kökü yönü üzerine α 'nın bir izdüşümüdür.

Üçüncü koşul, α yönünde bir λ vektöründen λ'nin iki katı izdüşümünü çıkaran bir s_α fonksiyonu oluşturur: tek bir çıkarma bize α vektörünün dikey tümleyenini verecektir (ki bu da eşboyut hiperdüzlemi 1'dir), ama iki katı bir çıkarma aslında λ vektörünün α-bileşenini tersine çevirir: lambda,

$L_\alpha = \{\lambda \in V; (\lambda, \alpha) = 0\} = \{R_\alpha\}^\perp$ hiperdüzlemi üzerine yansıtılır. Dolayısıyla üçüncü koşul bir $\beta \in R$ kökü için indirgenmiş R kök sistemi'nin aynı zamanda, R'deki kökler tarafından oluşturulmuş, hiperdüzlemler üzerindeki tüm β yansımalarını içermesinin zorunlu olduğunu belirtir.

Dördüncü koşul, bu yapıya bir indirgenmiş kök sistemi denmesinin sebebidir. Yani, $\alpha \in R$ denmesinin. O halde, sadece ilk üç koşul dikkate alındığında hangi $c\alpha$'ların da R'de olmasına izin verildiğini bilmek isteriz. İkinci koşul bize $2n_{c\alpha,\alpha} = 2c \in \mathbb{Z}$ olduğunu söyler, ki bu da c'nin yarım-tam sayı olması gerektiği anlamına gelir. Aynısı $2_{\alpha,c\alpha} = 2/c \in \mathbb{Z}$ için geçerlidir. Eğer c ve 1/c yarım-tam sayı ise, olasılıklar sadece şunlardır: $c \in \{\pm 2, \pm 1, \pm 1/2\}$. Dördüncü koşul buna biraz daha sınırlama getirir ve böylece altı olasılıktan sadece 2 tanesine izin veririz.

Bu koşulların yine de köklerin daha ileri özelliklerini ifade ettiğini göreceğiz. Örneğin biliyoruz ki, kök vektörler $\alpha, \beta \in R$ olduğunda ve ϕ onlar arasındaki açı iken, V öklit uzayında standart skaler çarpım $(\alpha, \beta) = |\alpha| \cdot |\beta| cos\phi$ değerini verir. Bununla birlikte, $n_{\alpha\beta}$ sayılarını şu şekilde yeniden yazabiliriz

$$\begin{aligned} n_{\alpha\beta} &= 2\frac{|\alpha| \,.\, |\beta| \cos\varphi}{|\beta| \,.\, |\beta|} = 2\frac{|\alpha|}{|\beta|} \cos\varphi \\ n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} &= 2\cos^2\varphi \end{aligned}$$

$n_{\alpha\beta}, n_{\beta\alpha} \in Z$ olduğu ve ayrıca $\frac{n_{\alpha\beta}}{n_{\beta\alpha}} = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}$ olduğu için, iki kök arasında ve aynı zamanda bunların nispi uzunluğunda ϕ açısı üzerinde kısıtlamalar elde ederiz.

2.1.2. $sl(n, \mathbb{C})$ ’nin Temsilleri

$sl(n, \mathbb{C})$ içinde trace’i sıfır olan köşegen matrislerin abelyen Lie altcebrini η ile gösterelim. η, $sl(n, \mathbb{C})$ içinde abelyen maksimal Lie alt cebirdir. $sl(n, \mathbb{C})$ içinde η yi kapsayan köşegen olmayan matris cebri, non abelyendir ve köşegen traceless her matrisle değişmeli köşegen olmayan matris yoktur. $sl(n, \mathbb{C})$ içinde η ye $sl(n, \mathbb{C})$ nin Cartan altcebri denir.

E_{ij} : i, j girdisi 1, değerleri 0 oln matris olsun. $H_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}$ diyelim. $sl(n, \mathbb{C})$, E_{ij} ile üretilir, $1 \leq i \leq n$,$1 \leq j \leq n$, $i \neq j$, burada H_i $i = 1, 2, ..., n-1$, η nin tabanıdır.

$$\begin{aligned} E_{ij} E_{kl} &= \delta_{jk} E_{il} \text{ ve} \\ [E_{ij}, E_{kl}] &= \delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj} \\ [H, E_{ij}] &= (\lambda_i - \lambda_j)(H) E_{ij} \end{aligned}$$

ve $\lambda_i : H \to \lambda_i(H)$ η den $\mathbb{C}$ ye doğrusal dönüşümdür.

Örnek olarak $sl(3, \mathbb{C})$’nin temsilleri inceleyeceğiz.

1. $sl(3, \mathbb{C})$’nin Temsilleri:

$sl(3, \mathbb{C})$ ’nin Cartan alt cebiri η’nun boyutu 2 ve onun tabanı $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ dir. $sl(3, \mathbb{C})$ ’nin değişmeli lie alt cebiri η olsun. Üst üçgensel matrislerin oluşturduğu vektör uzayının tabanını alalım:

$$E_1 = E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ve}$$

alt üçgen matrislerin vektör uzayının tabanı olarak haline getirebliriz

$F_1 = E_1^t = E_{21}$, $F_2 = E_2^t = E_{32}$, $F_3 = E_3^t = E_{31}$, $H_3 = H_1 + H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} [H_1, H_2] &= H_1H_2 - H_2H_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

dır.

Aynı şekilde [E_1,E_2]= E_3 [E_i,F_i] $= H_i$ $;i = 1, 2, 3$ için

[F_1,F_2] =- F_3 , [E_1,E_3] $= 0$, [E_2,E_3] $= 0$, [F_1,F_3] $= 0$, [F_2,F_3] $= 0$ dır.

ve [E_1,F_2]=0 [E_2,F_1]=0 [E_1,F_3]=-F_2 [E_3,F_1]=-E_2 [E_2,F_3]=F_1 [E_3,F_2]=E_1 dır.

$$\begin{aligned} [H_1, E_1] &= H_1E_1 - E_1H_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2E_1 \end{aligned}$$

dır.

Bu bağıntılardan bazıları $sl(3, \mathbb{C})$ nun endomorfizlerin ad_{H_1} ve ad_{H_2} ortak özvektörlerin E_1, E_2, E_3 olduğunu ifade eder.

$$[H_1, E_1] = 2E_1 \qquad [H_2, E_1] = -E_1$$

$$[H_1, E_2] = -E_2 \qquad [H_2, E_1] = 2E_2$$

$$[H_1, E_1] = E_3 \qquad [H_2, E_3] = E_3$$

Bu bağıntılardan bazıları $sl(3, \mathbb{C})$ nun endomorfizlerin ad_{H_1} ve ad_{H_2} ortak özvektörlerin F_1, F_2, F_3 olduğunu ifade eder.

$[H_1, F_1] = -2F_1 \qquad [H_2, F_1] = E_1$

$[H_1, F_2] = F_2 \qquad [H_2, F_2] = -2F_2$

$[H_1, F_3] = -F_3 \qquad [H_2, F_3] = -F_3$

$\alpha_1(H_1)$, ad_{H_1} 'nin özdeğeri olsun. Bu durumda $\alpha_1(H_1) = 2$, $\alpha_1(H_1) = -1$ Cartan altcebiri η'nun her elemani H_1 ve H_2 'nin birleşimi kombinasyon olarak yazılır. Bu da η üzerinde α_1 lineer formunu tanımlar. (H_1, H_2) vektörlerin tabanlarının üzerinde bu lineer formların değerleri $(2, -1)$'dir. Aynı şekilde , E_2 özvektörü için $H \in \eta$ 'nun özdeğeri şöyle olur:

$\alpha_2(H_1) = -1$, $\alpha_2(H_2) = 2$ dir. Son olarak E_3 özvektörü için $H \in \eta$ 'nun özdeğeri

$\alpha_3(H_1) = 1$, $\alpha_3(H_2) = 1$ ve $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ olur.

$[H_i, E_j] = \alpha_j(H_i)E_j$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$

$[H_i, F_j] = \alpha_j(H_i)F_j$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$ olur.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3$ ye η üzerinde $sl(3, \mathbb{C})$ 'n kökleri denir.

$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3$, $\alpha_3 = \lambda_1 - \lambda_3$ dır .

η'nun (I_3, Y) ve (I_3, T_8) tabanları $sl(3, \mathbb{C})$ 'nin Cartan altcebiri η'nun yeni tabanı (I_3, Y) şöyle tanımlanır:

$$I_3 = \tfrac{1}{2}H_1, Y = \tfrac{1}{3}(H_1 + 2H_2) = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ ve } T_8 = \frac{2\sqrt[2]{3}}{2}Y = \frac{1}{2\sqrt[2]{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$(I_3, T_8), sl(3, \mathbb{C})$ 'nin Cartan altcebiri η'nun bir tabani olur.

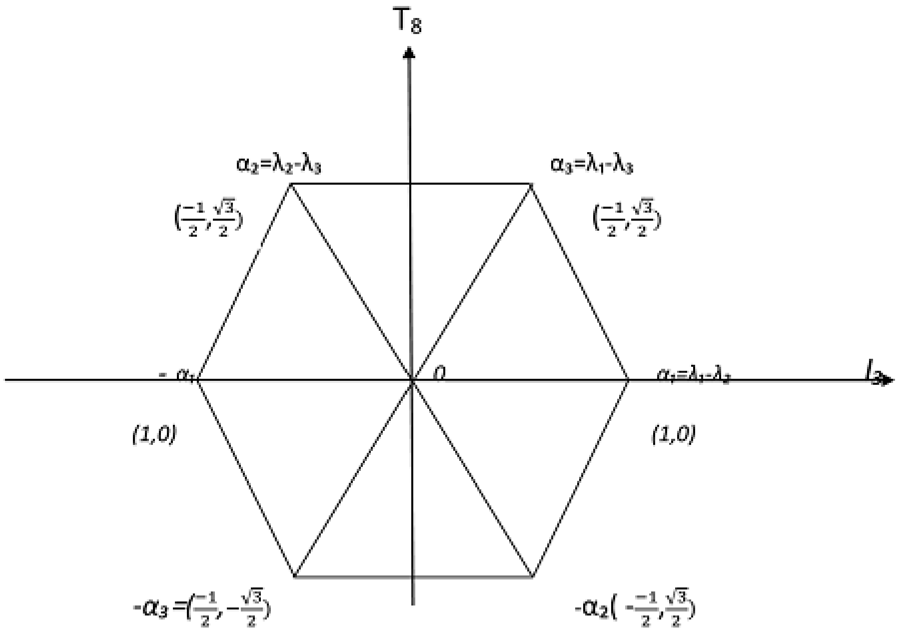
2. Adjoint temsili ve kökleri:

ρ temsilinin ağırlığı w, η üzerinde bir lineer formudur. Her $H \in \eta$ için $\rho(H)v = w(H)v$ olacak şekilde $v \neq 0, v \in E$ vardır.

$$H = \begin{bmatrix} \lambda_1(H) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(H) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(H) \end{bmatrix}$$, tanımlasın ve $[H, E_{ij}] = (\lambda_i(H) - \lambda_i(H))E_{ij}$ olsun. Bu durumda $sl(3, \mathbb{C})$ ün kökleri aşağıdaki tablodaki gibidir:

kök	ilişki	(I_3, Y) tabanı	(I_3, T_8) tabanı
α_1	$[I_3, E_1] = E_1$, $[Y, E_1] = 0$	$(1, 0)$	$(1, 0)$
α_2	$[I_3, E_2] = -\frac{1}{2}E_2$, $[Y, E_2] = E_2$	$(-\frac{1}{2}, 1)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt[2]{3}}{2})$
α_3	$[I_3, E_3] = \frac{1}{2}E_3$, $[Y, E_3] = E_3$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt[2]{3}}{2})$
α'_1	$[I_3, F_1] = -F_1$,$[Y, F_1] = 0$	$(-1, 0)$	$(-1, 0)$
α'_2	$[I_3, F_2] = \frac{1}{2}F_2$, $[Y, F_2] = -F_2$	$(\frac{1}{2}, -1)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt[2]{3}}{2})$
α'_3	$[I_3, F_3] = -\frac{1}{2}F_3$, $[Y, F_3] = -F_3$	$(-\frac{1}{2}, -1)$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt[2]{3}}{2})$

Tabloda $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha'_1 = -\alpha_1$, $\alpha'_2 = -\alpha_2$, $\alpha'_3 = -\alpha_3$'tür ve onun şekli Şekil 2.1 dir. Jaobi özdeşliğinden



Şekil 2.1. (8 temsili)

$$
\begin{aligned}
[H_i, E_3] &= [H_i, [H_1, E_2]] \\
&= [[H_i, E_1], E_2] + [E_1, [H_i, E_2]] \\
&= \alpha_1 (H_i) [H_1, E_2] + \alpha_2 (H_i) [H_1, E_2] + (\alpha_1 + \alpha_2) (H_i) E_3
\end{aligned}
$$

tür. Temel temsili:

$$
H_1 e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_1
$$

$$H_1e_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -e_2$$

$$H_2e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_2$$

$$H_1e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -e_3$$

$$H_2e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_2 \text{ dir.}$$

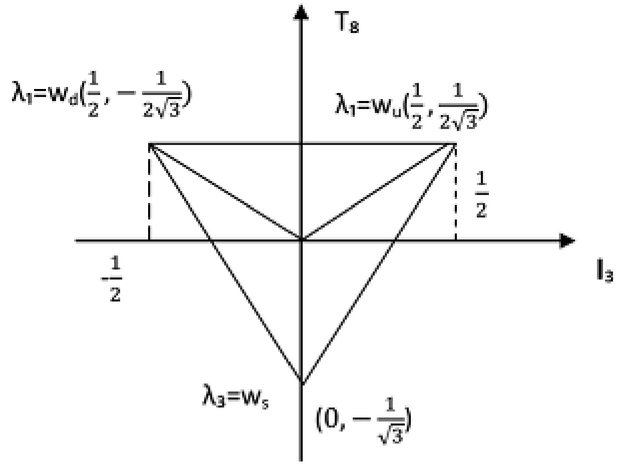
Bu temsilin ağırlıkları , η üzerinde λ_1, λ_2 ve λ_3 formlarıdır. $H \in \eta$ için $He_i = \lambda_i(H)e_i$. (H_1, H_2) tabanında ağırlıkları $\lambda_1 = (1, 0)$, $\lambda_2 = (-1, 0)$, $\lambda_3 = (0, -1)$ dir.

ağırlık	ilişki	(I_3, Y) tabanı	(I_3, T_8) tabanı	sembol
λ_1	$I_3.e_1 = \frac{1}{2}e_1$, $Y.e_1 = \frac{1}{3}e_1$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt[2]{3}})$	u
λ_2	$I_3.e_2 = -\frac{1}{2}e_2$, $Y.e_2 = \frac{1}{3}e_2$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt[2]{3}})$	d
λ_3	$I_3.e_3 = 0$, $Y.e_3 = -\frac{2}{3}e_3$	$(0, -\frac{2}{3})$	$(0, \frac{1}{2\sqrt[2]{3}})$	s

(I_3, T_8) tabanında eşkenar üçgenden $\lambda_1 = w_u$, $\lambda_2 = w_d$, $\lambda_3 = w_s$ temel temsilin ağırlıkları $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ olur. $sl(3, \mathbb{C})$'nin temel temsilin ağırlıklarin çizelgisine **3** ile gösterileceğiz ve onun şekli Şekil 2.2 dir.

3. ***Temel temsilin duali:***

Temel temsilden dual, $X \in sl(3, \mathbb{C})$ matrisi yerine $X' = -X^t$ değişimiyle geçilir ve $H_j'e_i = -\lambda_i(H_j)e_i$ ve $H_1'e_1 = -e_1$, $H_2'e_1 = 0$, $H_1'e_2 = e_2$, $H_2'e_2 = -e_2$, $H_1'e_3 = 0$, $H_2'e_3 = e_3$ olur. Bu durumda (H_1, H_2) tabanında ağırlıkları $\lambda_1' = (-1, 0)$, $\lambda_2' = (1, -1)$, $\lambda_3' = (0, 1)$ olur.



Şekil 2.2. (**3** temsili)

ağırlık	ilişki	(I_3, Y) tabanı	(I_3, T_8) tabanı	sembol
$\lambda_1^{'}$	$I_3.e_1 = -\frac{1}{2}e_1, Y.e_1 = -\frac{1}{3}e_1$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt[2]{3}})$	$\bar{u}$
$\lambda_2^{'}$	$I_3.e_2 = \frac{1}{2}e_2$, $Y.e_2 = -\frac{1}{3}e_2$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt[2]{3}})$	$\bar{d}$
$\lambda_3^{'}$	$I_3.e_3 = 0$, $Y.e_3 = \frac{2}{3}e_3$	$(0, \frac{2}{3})$	$(0, \frac{1}{3\sqrt[2]{3}})$	$\bar{s}$

$\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$ ağırlık vektörlere antikuarklar denir. (I_3, T_8) tabanında eşkenar üçgendan $\lambda_1^{'} = w_{\bar{u}}$,$\lambda_2^{'} = w'_{\bar{d}}$, $\lambda_3^{'} = w_{\bar{s}}$ temel temsilin ağırlıkları $\lambda_1^{'} + \lambda_2^{'} + \lambda_3^{'} = 0$ olur. $sl(3, \mathbb{C})$'nin temel temsili dualinin ağırlıklarini çizelgisine $\bar{\mathbf{3}}$ diyeceğiz ve onun şekli Şekil 2.3 dir.

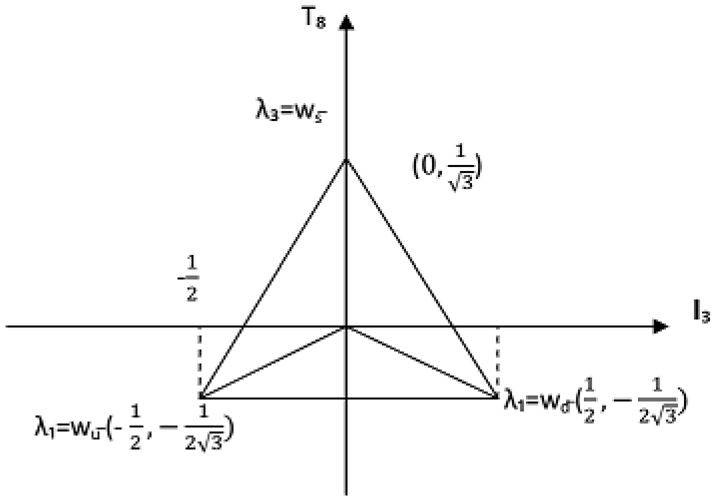
4. Bir sonlu-boyutlu temsil en yüksek ağırlığı:

Eğer bir temsilin kendisi ve $\{0\}$ dışında alt temsili yoksa bu temsile indirgenemez temsil denir .

L bir Lie cebir olmak üzere ve V bir vektör uzayı olsun. Bu durumda $sl(n, \mathbb{C})$ nin indirgenemez temsillerini sınıflandırırken özdeğerlere bir sıralama veririz. Genel durumda, ağırlıkların böyle bir lineer sıralaması söz konusu olmayabilir. Fakat yine de en yüksek ağırlık olarak adlandırılan farklı ağırlıklar vardır.

$f : L \to gl(V)$ temsilinin bir en yüksek ağırlığı, f nin bir en yüksek ağırlık vektörünün ağırlığıdır. Sıfır olmayan bir skalar ile çarpımına göre tanımlanan en yüksek ağırlığa karşılık gelen bir özvektör, en yüksek ağırlık vektörü olarak adlandırılır.

Örnek. *3 te en yüksek ağırlık $\lambda_1 = w_u$ onun özvektörü de $e_1 = u$. Bu durumda aşağıdaki özellikleri doğrudur.*



Şekil 2.3. ($\bar{\mathbf{3}}$ temsili)

(i) $H_1 e_1 = e_1, H_2 e_1 = 0$, (her $H \in \eta$ için e_1 bir özvektördur)

(ii) $E_{ij} e_1 = 0$, $i = 1, 2, 3.$

Ayrıca e_1 üzerinde F_1, F_2 ve F_3 tarafından e_2 ve e_3 elde edilir: $F_1 e_1 = e_2$, $F_2 e_1 = 0$, $F_3 e_1 = e_3$ dir. $\bar{3}$ te en yüksek ağırlık $\lambda_3^{'} = w_{\bar{s}}$ onun özvektörü de $e_3 = \bar{s}$. Bu durumda aşağıdaki özellikleri doğrudur.

(i) $H_1^{'} e_3 = 0, H_2^{'} e_3 = e_3$, (her $H \in \eta$ için e_3 bir özvektördür)

(ii) $E_i^{'} e_3 = -F_i e_3 = 0, i = 1, 2, 3.$ Ayrıca e_1 üzerinde $F_1^{'}$,$F_2^{'}$ ve $F_3^{'}$ tarafından e_2 ve e_3 elde edilirki: $F_1^{'} e_3 = -E_1 e_3 = 0, F_2^{'} e_3 = -E_2 e_3 = -e_2, F_3^{'} e_3 = -E_3 e_3 = -e_1$olur. **8** de en yüksek ağırlık α_3 tür ve onun özvektörü de E_3 tür.

(i) $[H_1, E_3] = E_3$, $[H_2, E_3] = E_3$ (her $H \in \eta$ için E_3 bir özvektördur)

(ii) $[H_i, E_3] = 0, i = 1, 2, 3.$

burada $E_1, E_2, F_1, F_2, F_3, H_1, H_2$; F_1, F_2 ve F_3 tarafından elde edilir:

$[F_1, E_3] = E_2$, $[F_2, E_3] = -E_1$, $[F_3, E_3] = -H_3$

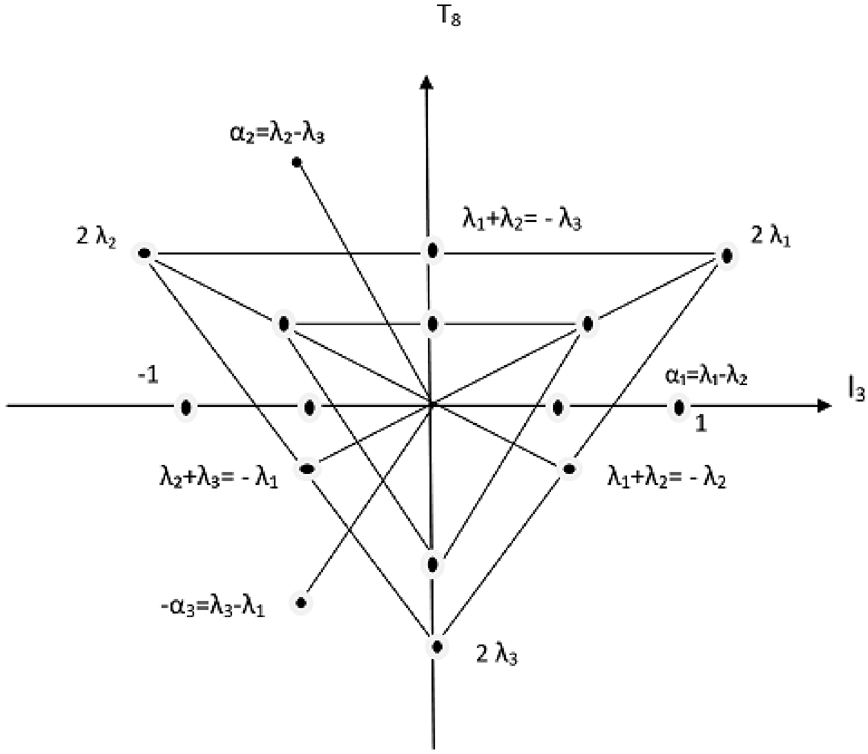
$[F_2, [F_1, E_3]] = -H_2, [F_3, [F_1, E_3]] = -F_1, [F_1, [F_2, E_3]] = -H_1, [F_3, [F_2, E_3]] = F_2, [F_3, [F_3, E_3]] = -2F_3$ olur.

Örnek. *6 da en yüksek ağırlığın gösterimi $w = 2\lambda_1$olsun. Başka ağırlıkları $\lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda_2 - \lambda_3$ ve $\lambda_1 - \lambda_3$ olur ve en yüksek ağırlığın vektörü olsun. Bu durumda ve tanımdan:*

$H_1v = 2v$, $H_2v = 0$, $E_1v = E_2v = E_3v = 0$ dır. $Hv = w(H)v$ ve (1) den dolayı $H(F_iv) = (w - \alpha_i)(H)(F_iv)$, burada; $H(F_1v) = (w - (\lambda_1 - \lambda_2))(H)(F_1v) = (\lambda_1 + \lambda_2)\,(H)(F_1v) = -\lambda_3(H)(F_1v)$

$$H(F_3v) = (w - (\lambda_1 - \lambda_3))(H)(F_3v) = (\lambda_1 + \lambda 3)\,(H)(F_3v) = -\lambda_2(H)(F_3v).$$

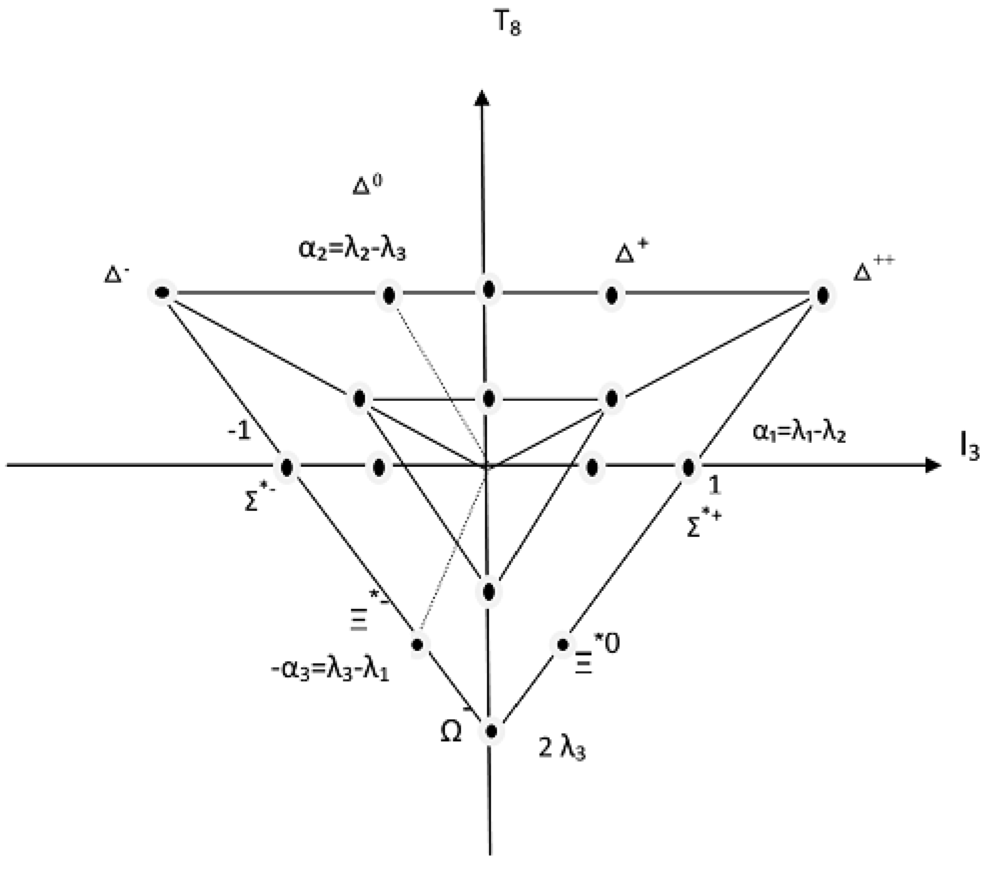
F_1, F_2 ve F_3 için tekrar edersek 6 temsili elde edilir ve şekli 2.4 tür.



Şekil 2.4. (**6** temsili)

Örnek. ***10*** *da en yüksek ağırlığın gösterimini* $w = 3\lambda_1$ *ve* $Q = \frac{1}{2}Y + I_3$ *olsun. Bu temsilin ağırlıklarının listesi aşağıdadır:*

w ağırlığı	$w(I_3)$	$w(Y)$	$w(T_8)$	$w(Q)$	sembol
$3\lambda_1$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{\sqrt[2]{3}}{2}$	2	$\triangle^{++}$
$2\lambda_1 + \lambda_2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt[2]{3}}{2}$	1	$\triangle^{+}$
$\lambda_2 - \lambda_3 = \lambda_1 + 2\lambda_2$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt[2]{3}}{2}$	0	$\triangle^{0}$
$2\lambda_3$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{\sqrt[2]{3}}{2}$	-1	$\triangle^{-}$
$\lambda_2 - \lambda_1 = 2\lambda_2 + \lambda_3$	-1	0	0	-1	Σ^{*-}
$\lambda_3 - \lambda_1 = \lambda_2 + 2\lambda_3$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt[2]{3}}{2}$	-1	Ξ^{*-}
$3\lambda_3 = 2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2$	0	-2	$-\sqrt[2]{3}$	-1	Ω^{-}
$\lambda_2 - \lambda_3 = 2\lambda_3 + \lambda_1$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt[2]{3}}{2}$	0	Ξ^{*0}
$\lambda_3 + 2\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_2$	1	0	0	1	Σ^{*+}
0	0	0	0	0	Σ^{*0}



Şekil 2.5. (**10** temsili)

2.1.3. $su(2)$ ve $se(3)$ lie cebirleri

Bu bölümde Lie cebirleri için bazi örnekler ve adjoint temsilleri ifade edeceğiz. Bu bölümdaki kavramlar hakkında ayrıntılı bilgi için Kutsal (2005) ve Bakhturin (1985) kaynakları incelenebilir.

1. $su(2)$ Lie cebiri

Üç boyutlu uzayda bir vektör geometrik olarak girdileri x, y ve z olan bir sütun vektör ile temsil edilebilir. Bir vektörün dönmesi (rotasyon), 3×3 tipinde bir matris ile temsil edilebilir. Özel olarak, z ekseninde bir φ dönmesi $\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisiyle verilebilir. Küçük rotasyonlar için

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq I - i\varphi T_z,$$

$\mathrm{T}_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Benzer şekilde T_x= $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$ ve $\mathrm{T}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir.

$$\begin{aligned}
[T_x, T_y] &= T_xT_y - T_yT_x \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= iT_z
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $[T_y, T_z] = iT_x$ ve $[T_z, T_x] = iT_y$ şimdi **lie cebri** oluşturalım anti-simetrik özelliği: $[at + bt, ct] = [at, ct] + [bt, ct]$ ve $[at, bt] = [-bt, at]$.

Jakobi özdeşliği : $[at, [bt, ct]] + [bt, [ct, at]] + [ct, [at, bt]] = 0$ dır.

$[at, at] = at.at - at.at = 0$ dır. $t_+ = t_x + it_y$, $t_- = t_x - it_y$ tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
[t_z, t_+] &= [t_z, t_x + it_y] = [T_z, T_x] + i\,[t_z, t_y] \\
&= it_y + i(-it_x) = it_y + t_x = t_+
\end{aligned}$$

Benzer şekilde : $[t_z, t_-] = -t_-$ ve $[t_+, t_-] = 2t_z$ dir.

Şimdi $t'_x i$ T_x olarak temsil edilmiş olduğunu farz edelim $t_y \longrightarrow T_y$ ve $t_z \longrightarrow T_z$. v_j , v'nin bir girdisi ve $T_z v_j = j v_j$, $T_+ v_j = 0$ tanımlasın. Bu durumda $[T_z, T_-] = T_z T_- - T_- T_z \Rightarrow -T_- = T_z T_- - T_- T_z \Rightarrow T_z T_- = -T_- T_z - T_-$ dir. O halde

$$\begin{aligned} T_z T_- v_j &= (-T_- T_Z - T_-) - v_j \\ &= -T_- T_Z v_j - T_- v_j \\ &= (j-1) T_- v_j \end{aligned}$$

Şimdi $T_- v_j = v_{j-1}$ olsun, benzer şekilde $v_{k-1} = T_- v_k$ v sonlu ise $T_- v_q = 0$'dir.

2. $se(3)$ **lie cebiri**

$se(3) = \left\{ s = \begin{bmatrix} w & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; w \in R^{3\times 3}; v \in R^3; w^T = -w \right\}$ ile tanımlanır.

$s = \begin{bmatrix} w & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w_1 & w_2 & v_1 \\ w_3 & 0 & -w_1 & v_2 \\ -w_2 & w_1 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ biçiminde yazılabilir.

$$\begin{aligned} s \;=\; & w_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + w_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + v_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$s = w_1 L_1 + w_2 L_2 + w_3 L_3 + v_1 L_4 + v_2 L_5 + v_3 L_5$

$se(3) = \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6\}$ dir, burada

L_1, X ekseni etrafındaki dönme

L_2, Y ekseni etrafındaki dönme

L_3, Z ekseni etrafındaki dönme

L_4, X ekseni boyunca öteleme

L_5, Y ekseni boyunca öteleme

L_6, Z ekseni boyunca öteleme'ye karşılık gelen matrislerdir.

3. $se(3)$ **Lie cebirinin adjoint temsili**

$x = w_1L_1 + w_2L_2 + w_3L_3 + v_1L_4 + v_2L_5 + v_3L_5 \in se(3)$ olmak üzere.

$$\begin{aligned} adxL_1 &= [x, L_1] = [w_1L_1 + w_2L_2 + w_3L_3 + v_1L_4 + v_2L_5 + v_3L_5, L_1] \\ &= w_1\ [L_1, L_1] + w_2\,[L_2, L_1] + w_3\,[L_3, L_1] + v_1\,[L_4, L_1] \\ &\quad +v_2\,[L_5, L_1] + v_3\,[L_6, L_1] \\ &= 0L_1 + w_3L_2 - w_2L_3 + 0L_4 + v_3L_5 - v_2L_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} adxL_2 &= [x, L_2] = [w_1L_1 + w_2L_2 + w_3L_3 + v_1L_4 + v_2L_5 + v_3L_5,\ L_2] \\ &= w_1\ [L_1, L_2] + w_2\,[L_2, L_2] + w_3\,[L_3, L_2] + v_1\,[L_4, L_2] \\ &\quad +v_2\,[L_5, L_2] + v_3\,[L_6, L_2] \\ &= -w_3L_1 + 0L_2 + w_1L_3 - v_3L_4 + 0L_5 + v_1L_6\ d\imath r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} adxL_3 &= [x, L_3] = [w_1L_1 + w_2L_2 + w_3L_3 + v_1L_4 + v_2L_5 + v_3L_5,\ L_3] \\ &= w_1\ [L_1, L_3] + w_2\,[L_2, L_3] + w_3\,[L_3, L_3] + v_1\,[L_4, L_3] \\ &\quad +v_2\,[L_5, L_3] + v_3\,[L_6, L_3] \\ &= w_2L_1 - w_1L_2 + 0L_3 + v_2L_4 - v_1L_5 + 0L_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} axL_4 &= [x, L_4] = [w_1L_1 + w_2L_2 + w_3L_3 + v_1L_4 + v_2L_5 + v_3L_5, L_4] \\ &= w_1\,[L_1, L_4] + w_2\,[L_2, L_4] + w_3\,[L_3, L_4] + v_1\,[L_4, L_4] \\ &\quad +v_2\,[L_5, L_4] + v_3\,[L_6, L_4] \\ &= 0L + 0w_1L_2 + 0L_3 + 0L_4 + w_3L_5 - w_2L_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} adxL_5 &= [x, L_5] = [w_1L_1 + w_2L_2 + w_3L_3 + v_1L_4 + v_2L_5 + v_3L_5, L_5] \\ &= w_1\ [L_1, L_5] + w_2\,[L_2, L_5] + w_3\,[L_3, L_5] + v_1\,[L_4, L_5] \\ &\quad +v_2\,[L_5, L_5] + v_3\,[L_6, L_5] \\ &= 0L + 0w_1L_2 + 0L_3 - w_3L_4 + 0L_5 + w_1L_6 \text{ dır.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} adxL_5 &= [x, L_5] = [w_1L_1 + w_2L_2 + w_3L_3 + v_1L_4 + v_2L_5 + v_3L_5, L_5] \\ &= w_1\,[L_1, L_5] + w_2\,[L_2, L_5] + w_3\,[L_3, L_5] + v_1\,[L_4, L_5] \\ &\quad +v_2\,[L_5, L_5] + v_3\,[L_6, L_5] \\ &= 0L + 0w_1L_2 + 0L_3 - w_3L_4 + 0L_5 + w_1L_6 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
adxL_6 &= [x, L_6] = [w_1L_1 + w_2L_2 + w_3L_3 + v_1L_4 + v_2L_5 + v_3L_5, L_6] \\
&= w_1\ [L_1, L_6] + w_2\,[L_2, L_6] + w_3\,[L_3, L_6] + v_1\,[L_4, L_6] \\
&\quad +v_2\,[L_5, L_6] + v_3\,[L_6, L_6] \\
&= 0L + 0w_1L_2 + 0L_3 + w_2L_4 - w_1L_5 + 0L_6
\end{aligned}
$$

dır. Temsili, $\begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 & 0 & 0 & 0 \\ w_3 & 0 & -w_1 & 0 & 0 & 0 \\ -w_2 & w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_3 & v_2 & 0 & -w_3 & w_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 & w_3 & 0 & -w_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 & -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir.

Ω ve $[v]$ anti-simetrik matrisler olmak üzere $[adx]$ matrisi kısaca $adx = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ [v] & \Omega \end{bmatrix}$ şeklinde de yazılır.

3. BULGULAR

Bu bölümde Post-Lie cebiri, Post-Lie cebir yapısı, Lie cebir bazı türevleri ifade edeceğiz. Bu bölümdeki kavramlar hakkında ayrıntılı bilgi için Burde (2009) , Burde (2012) , Burde (2016) ve Ayupov ve Kudaybergenov (2016) kaynakları incelenebilir.

3.1. Post-Lie Cebiri

Tanım 3.1. F bir cisim olmak üzere V , F üzerinde bir vektör uzayı , $x.y$ ve $\{x, y\}$ iki F-bilineer operatörleri olsun. Bu durumda $(V,\{,\})$ bir Lie cebri ve her $x, y, z \in V$ için

$$\begin{aligned} \{x, y\}.z &= (y.x).z - y.(x.z) - (x.y).z + x(y.z) && (3.1) \\ x.\{y, z\} &= \{x.y, z\} + \{y, x.z\} && (3.2) \end{aligned}$$

koşulları sağlanıyorsa $(V, \cdot, \{,\})$ ye bir **post-Lie cebiri** denir.

Tanım 3.2 (pre-Lie cebiri)**.** V bir vektör uzayı olmak üzere $\cdot : V \times V \to V$ lineer dönüşümü ve her $x, y, z \in V$ için

$$(x.y).z - x.(y.z) = (y.x).z - y.(x.z)$$

koşulunu sağlıyorsa $(V, \cdot)$' ye pre-Lie cebiri denir.

Tanım 3.3. V bir vektör uzayı olmak üzere $\cdot : V \times V \to V$ lineer dönüşümü ve her $x, y, z \in V$ için

$$x.(y.z) - (x.y).z = y.(x.z) - (y.x).z$$

koşulunu sağlıyorsa $(V, \cdot)$' ye LR-yapısı denir.

Tanım 3.4. V bir vektör uzayı olmak üzere $\cdot : V \times V \to V$ lineer dönüşümü ve her $x, y, z \in V$ için

$$(x, y, z) = (y, x, z)$$

koşulunu sağlıyorsa $(V, \cdot)$' ye LSA-yapısı denir.

Post-Lie cebiri tanımın'da eğer $\{x, y\} = 0$ ise Post-Lie cebiri bir Pre-Lie cebiri olur. İkinci koşulu $L(x)y = x.y$ için $L(x)$, $(V, \{,\})$ Lie cebrinin bir türevi olur. Çünkü;

$L(x)\{y, z\} = x.\{y, z\} = \{x.y, z\} + \{y, x.z\} = \{L(x)y, z\} + \{y, L(x)z\}$ dır.

Önerme 3.5. $(V, ., \{,\})$ *Post- Lie cebiri ile diğer parantez arasindaki ilişki her* $x, y \in V$

için

$$[x, y] = x.y - y.x + \{x, y\} \tag{3.3}$$

dir.

İspat. Her $x, y, z \in V$ için

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] &= [x, y.z - z.y + \{y, z\}] \\ &= [x, y.z] - [x, z.y] + [x, \{y; z\}] \\ &= x.(y.z) - (yz)x + \{x, yz\} - x(zy) + (zy)x \\ &\quad - \{x, zy\} + x\{y, z\} - \{y, z\}.x + \{x, \{y, z\}\} \end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= \{x, y, z\} + \{y, z, x\} + \{z, x, y\} + \{xy, z\} \\ &\quad + \{z, xy\} - \{y, xz\} + y.\{z, x\} + \{x, yz\} \\ &\quad - \{z, yx\} + z.\{x, y\} + \{y, zx\} - \{x, zy\} \\ &\quad +(yx)z - y(xz) - (xy)z + x(yz) + \{x, y\} z \\ &\quad +(xz)y - x(zy) - (zx)y + z(xy) - \{z, x\} y \\ &\quad +(zy)x - z(yx) - (yz)x + y(zx) - \{y, z\} x \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. □

Önerme 3.6. $(V, ., \{,\})$ *bir post Lie cebir olsun . Bu durumda*

$$[x, y].z = x.(y.z) - y.(x.z) \tag{3.4}$$

koşulu sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned} [x, y].z &= (x.y - y.x + \{x, y\}).z \\ &= (xy)z - (yx)z + \{x, y\}.z \\ &= (xy)z - (yx)z + (y.x).z - (yx)z - y.(xz) - (xy)z + x(yz) \\ &= x(yz) - y(xz) \end{aligned}$$

□

$L : V \to End(V);\ \ x \longmapsto L(x)$, $(V, [,])$ Lie cebirinin bir temsili olduğunu ifade eder.

Tanım 3.7. V vektör uzayı üzerinde $g = (V, [,])$ ve $\eta = (V, \{,\})$ iki Lie cebri olsun . Bu durumda (g, η) ye bir Lie cebir çifti denir.Vektör uzayı olarak $g = \eta = V$ dir.

Tanım 3.8. (g, η) bir Lie cebir çifti olmak üzere v üzerinde F-bilineer çarpımı

$$\begin{aligned} x.y - y.x &= [x, y] - \{x, y\} && (3.5) \\ [x, y].z &= x.(y.z) - y.(x.z) && (3.6) \\ x.\{y, z\} &= \{x.y, z\} + \{y, xz\} && (3.7) \end{aligned}$$

koşullarını sağlıyorsa $x.y$ 'ye (g, η) üzerinde bir Post Lie cebir yapısı denir.

Açıktır ki $(V, \cdot, \{,\})$, ikinci Lie cebir ile ilişkili Post-Lie cebirdir.

Lemma 3.9. *Önceki tanımın koşulları aşağıdaki özellikleri ifade eder: her $x, y, z \in V$ için:*

$$\begin{aligned} \{x, y\}.z &= (y.x).z - y.(x.z) - (x.y).z + x(y.z) && (3.8) \\ z[x, y] &= z(xy) - z(yx) + z\{x; y\} && (3.9) \\ [xy, z] + [y, xz] - x[y, z] &= (xy)z - (xz)y + y(xz) \\ &\quad -x(yz) + x(zy) - z(xy) && (3.10) \\ x\{y, z\} + y\{z, x\} + z\{x, y\} &= \{[x, y], z\} + \{[y, z], x\} + \{[z, x], y\} && (3.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{x, y\}z + \{y, z\}x + \{z, x\}y &= \{[x, y], z\} + \{[y, z], x\} + \{[z, x], y\} \\ &\quad + [\{x, y\}, z] + [\{y, z\}, x] + [\{z; x\}, y] && (3.12) \end{aligned}$$

İspat. (3.8) için (3.5) ve (3.6)'dan

$$\begin{aligned} \{x, y\}.z &= ([x, y] - x.y + y.x).z \\ &= [x, y]z - (x.y).z + (y.x).z \\ &= (y.x).z - y.(x.z) - (x.y).z + x.(y.z) \end{aligned}$$

dir. (3.9) için

$$\begin{aligned} z[x, y] &= z.(x.y - y.x + [x, y]\ ) \\ &= z(xy) - z(yx) + z\{x, y\} \end{aligned}$$

dir. (3.10) için (3.5) ve (3.7)yi kullanarak

$$\begin{aligned} x(yz) - x(zy) &= x(yz - zy) \\ &= x([y, z] - [y, z]) \\ &= x[y; z] - x\{y, z\} \\ &= x[y; z] - \{xy, z\} - \{y, xz\} \\ &= x[y, z] - ([xy, z] + z(xy) - (xy)z) \\ &\quad -([y; xz] + (xz)y - y(xz)) \end{aligned}$$

dir. (3.11) için

$$\begin{aligned}
0 &= \{\{x,y\},z\}+\{\{y,z\},x\}+\{\{z,x\},y\} \\
&= \{[x,y]-xy+yx,z\}+\{[y,z]-yz+zy,x\}+\{[z,x]-zx+xz,y\} \\
&= \{[x,y],z\}-\{xy,z\}+\{yx,z\}+\{[y,z],x\}-\{yz,x\}+\{zy,x\} \\
&\quad +\{[z,x],y\}-\{zx,y\}+\{xz,y\} \\
&= \{[x,y],z\}+\{[y,z],x\}+\{[z,x],y\}-x\{y,z\}-y\{z,x\}-z\{x,y\}
\end{aligned}$$

(3.12) için (3.5) i kullanarak

$$\begin{aligned}
0 &= \{\{x,y\},z\}+\{\{y,z\},x\}+\{\{z,x\},y\} \\
&= [\{x,y\},z]-\{x,y\}z+z\{x,y\}+[\{y,z\},x] \\
&\quad -\{y,z\}x+x\{y,z\}+[\{z,x\},y]-\{z,x\}y+y[z,x]
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek. *Her $x,y\in V$ için $x.y=0$ ise $[x,y]=\{x,y\}$ olur ve bu durumda $(g,[,])=(\eta,\{,\})$ dir.*

Örnek. *η abelyan ise her $x,y\in V$ için $\{x,y\}=0$ dir. Bu durumda :*

1) $x.y-y.x=[x,y]$

2) $[x,y].z=x.(y.z)-y.(xz)$

yani x.y , g üzerinde bir pre-Lie cebri çarpımıdır.

Örnek. *g abelyan ise koşullar*

1) $x.y-y.x=-\{x,y\}$

2) $x.(y.z)=y.(x.z)$

3) $(x.y).z=(x.z).y$

şeklinde indirgenebilir, yani $-x.y$, η üzerinde bir LR-çarpımıdır.

Tanım 3.10. Eğer $Der(\eta)=ad(\eta)$ ve $C(\eta)=0$ ise η ye tam Lie cebri denir.

Önerme 3.11. *$x.y$, (g,η) bir post -Lie cebir yapısı olmak üzere . η tam bir Lie cebir olsun . Bu durumda $x.y=\{\varphi(x),y\}$ olacak şekilde $\varphi:V\to V$ lineer dönüşümü vardır ve $L(x)=ad(\varphi(x))$ sağlanır.*

İspat. Her $x\in V$ için $L(x)\in Der(\eta)=ad(\eta)$ olur ve η nin merkezi sıfırdır.

$L(x) = ad(\varphi(x))$ için $\varphi(x) \in \eta$ vardır $\varphi : V \to V$; $x, y, x' \in V$ için

$$\begin{aligned}
\{\varphi(x + x'), y\} &= (x + x').y \\
&= x.y + x'.y \\
&= \{\varphi(x), y\} + \{\varphi(x'), y\} \\
&= \{\varphi(x) + \varphi(x'), y\}
\end{aligned}$$

$\varphi(x) + \varphi(x') = \varphi(x + x')$, çünkü η nun merkezi sıfırdır. □

Önerme 3.12. *(g, η) Lie cebrin çifti olmak üzere η 'nun merkezi sıfır ve $\varphi \in End(V)$ olsun. Bu durumda $x.y = \{\varphi(x), y\}$, (g, η) üzerinde bir Post-Lie cebir yapısı ancak ve ancak her $x, y \in V$ için*

$$\{\varphi(x), y\} + \{x, \varphi(y)\} = [x, y] - \{x, y\} \tag{3.13}$$

$\varphi([x, y]) = \{\varphi(x), \varphi(y)\}$ dır.

İspat. $\Rightarrow) x.y = \{\varphi(x), y\}$ bir Post-Lie cebir yapısı olsun bu durumda (3.5)'ten

$$\begin{aligned}
\{\varphi([x, y]), z\} &= [x, y].z \\
&= x.(y.z) - y.(xz) \\
&= x\{\varphi(y), z\} - y.\{\varphi(x), z\} \\
&= \{\varphi(x), \{\varphi(y), z\}\} - \{\varphi(y), \{\varphi(x), z\}\} \\
&= \{\{\varphi(x), \varphi(y)\}, z\} \text{ dır.}
\end{aligned}$$

$C(\eta) = 0$ olduğundan iddamiz doğrudur , yani $\varphi : g \to \eta$ bir Lie cebir homomorfizmdir.

$\Leftarrow)$ (3.1) $x.y - y.x = \{\varphi(x), y\} - \{\varphi(y), x\} = [x, y] - \{x, y\}$ dir. (3.2) için

$$\begin{aligned}
[x, y].z &= \{\varphi([x, y]), z\} \\
&= \{\{\varphi(x), \varphi(y)\}, z\} \\
&= \{\varphi(x), \{\varphi(y), z\}\} - \{\varphi(y), \{\varphi(x), z\}\} \\
&= x.\{\varphi(y), z\} - y.\{\varphi(x), z\} \\
&= x.(y.z) - y.(xz) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

(3.3) için Jakobi özdeşliğinden $x.\{y, z\} = \{x.y, z\} + \{y, x.z\}$ dir. □

$\varphi : g \to \eta \rtimes Der(\eta)$; $x \mapsto (x, L(x))$ dönüşümü alalım ve $\eta \rtimes Der(\eta)$ üzerinde Lie öperatörü şöyle tanımlasın:

$$[(x, D), (x', D')] = (\{x, x'\} + D(x') - D'(x), [D, D'])$$

Önerme 3.13. *$x.y$, (g, η) üzerinde bir Post Lie cebir yapısı olsun.*

Bu durumda $\varphi : g \to \eta \rtimes Der(\eta);\ x \mapsto (x, L(x))$ bir Lie cebirlerinin $1-1$ homomorfizmdir ve tersine birinci çarpım üzerindeki birim dönüşüm özdeşliği ile (g,η) üzerinde bir Post Lie cebir yapısı elde edilir.

İspat. $x.y,\ (g,\eta)$ üzerinde bir Post Lie cebir yapısı olsun. Bu durumda :

$$\begin{aligned}
[\varphi(x), \varphi(y)] &= [(x, L(x)), (y, L(y))] \\
&= (\{x,y\} + x.y - y.x, [\ L(x), L(y)] \\
&= ([x,y]\,, L([x,y]) = \varphi([x,y])
\end{aligned}$$

dır. O halde φ homomorfizm olur. □

Önerme 3.14. *(g,η) çift Lie cebri olmak üzere $\lambda \notin \{0,1\}$ olsun . Bu durumda*

$$x.y = \lambda.\,[x,y]\,, (g,\eta)$$

üzerinde bir bir post- Lie cebir yapısı ancak ve ancak

$$\{x,y\} = (1-2\lambda).\,[x,y]$$

g ve η nilpotent ve sınıfları en fazla sıfırdır.

İspat. $x.y = \lambda.\,[x,y]$ bir post- Lie cebir yapısı olsun. (3.5) ten $x.y - y.x = [x,y] - \{x,y\}$ $(y.x = \lambda.\,[y,x] = -\lambda.\,[x,y])$

$$\lambda.\,[x,y] + \lambda.\,[x,y] = [x,y] - \{x,y\} \Rightarrow\ 2\lambda.\,[x,y] = [x,y] - \{x,y\}$$

$$\Rightarrow\ \{x,y\} = (1-2\lambda).\,[x,y]$$

$\Leftarrow)\ \ \{x,y\} = (1-2\lambda)\ .[x,y]\ ,x.y = \lambda.\,[x,y]$. (3.5) ’i ispatlayalım:

$$\begin{aligned}
T_1 &= [x,y] - \{x,y\} \\
&= [x,y] - (1-2\lambda).\,[x,y] \\
&= [x,y] - [x,y] + 2\lambda.\,[x,y] = 2\lambda\,[x,y] \\
&= \lambda\,[x,y] + \lambda\,[x,y] \\
&= \lambda\,[x,y] - \lambda\,[y,x] \\
&= x.y - y.x = T_2
\end{aligned}$$

dir. (3.6)yı ispatlamak (3.5) gibidir. (3.7)yi ispatlamak için $\mu = \frac{1-2\lambda}{\lambda}$ olmak üzere . Bu durumda $\{x,y\} = 2x.y$

$$\begin{aligned}
x.\,\{y,z\} &= \mu.x.(y.z) \\
&= \mu.\lambda^2\,[x,[y,z]] \\
&= \mu.\lambda^2\,[[x,y]\,,z] + \mu.\lambda^2\,[y,[x,z]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mu(x.t).z + \mu.y(x.z) \\ &= \{x.y, z\} + \{y, x.z\} \end{aligned}$$

dir. □

Burada bazı özel durumları not edelım:

$\lambda = 0$ ise $x.y = 0$ ve $[x, y] = \{x, y\}$ olur. Bu durumde Post- Lie cebir yapısına (g, g) üzere bir basit $[x, y] = -\{x, y\}$ yapısı denir.

* $\lambda = 1$ için $x.y = [x, y] = -\{x, y\}$ olur ve bu durumda her Lie cebir g için (g,-g) üzerinde Post- Lie cebir yapısı olur.

* $\lambda = \frac{1}{2}$ için $x.y = \frac{1}{2}[x, y]$ ve $\{x, y\} = 0$ olur. Bu durumda η abelyen ve Pre- Lie cebir tanımlar.

Önceki gibi eğer $[x, y] = (1 + 2\mu).\{x, y\}$ ve g, η iki nilpotenttir. Post- Lie cebir tanımlar. Eğer $\mu = -\frac{1}{2}$, g abelyan ve $x.y = -\frac{1}{2}\{x, y\}$ ise LR-yapısı tanımlar.

Örnek. *$p \notin \{0, 1\}$ ve $\{x, y\} = p[x, y]$ olsun. Bu durumda $x.y$, (g, η) üzerinde bir Post- Lie cebir yapısı ancak ve ancak*

1) $x.y - y.x = (1 - p).[x, y]$

2) $(1 - p)(x.(y.z) - y.(xz)) = (x.y).z - (y.x).z$

3) $x.(y.z) - y.(xz) = (x.y).z - z(x.y) - (x.z).y + x.(z.y)$

koşulları sağlanır.

Örnek. *$\{x, y\} = [x, y]$ olmak üzere , $x.y$, (g, η) üzerinde bir Post- Lie cebir yapısı ancak ve ancak*

1) $x.y = y.x$

2) $[x, y].z = x.(y.z) - y.(xz)$

3) $x.[y, z] = [x.y, z] + [y, x.z]$

dir.

Tanım 3.15. Heisenberg Lie cebiri : 3-boyutlu Lie cebirdir üreteçleri X, Y, Z ve $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = 0$, $[Y, Z] = 0$ bağıntılarını sağlanır, $\eta_3(\mathbb{C})$ ile gösterilir.

Heisenberg Lie cebiri $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri ile temsil edilebilir.

Örnek. *Heisenberg Lie cebiri $\eta_3(\mathbb{C}), \mathbb{C}^3$ün tabanı (e_1, e_2, e_3) olsun . g nin operatörü $[e_1, e_2] = e_3$ ve η nün operatörü $\{e_1, e_2\} = e_3$ ve $g = \eta = \eta_3(\mathbb{C})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ve $\beta \neq 0$ olsun. Bu durumda*

1) $e_1.e_2 = e_1 - \beta^{-1}e_2 + \alpha e_3$

2) $e_1.e_2 = e_2.e_1 = \beta e_1 - e_2 + \frac{\gamma+\alpha\beta^2}{2\beta} e_3$

3) $e_2.e_2 = \beta^2 e_1 - \beta e_2 + \gamma e_3$

koşulları sağlıyorsa (g,η) üzerinde değişmeli Post- Lie cebir yapısı tanımlanır.

1. durum : $(g, [,])$ ve $(\eta, \{,\})$ abelyan olsunlar. Bu durumda V nin tabanı (e_1, e_2) olsun $[e_1, e_2] = \{e_1, e_2\} = 0$ dır. (5)'ten $x.y = y.x$, (3.6)'dan $x.(y.z) = y.(xz)$ ve (3.7) doğrudur. $x.(z.y) = x.(y.z) = y.(x.z) = (x.z).y$ olur ondan dolayı $(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ üzerinde Post- Lie cebir yapısı 2- boyutlu değişmeli ve cebirlere karşılık gelir. Aşağıdaki cebirler yukarıdaki koşulları sağlar

V	çarpım	$[,]$	$\{,\}$
V_1	$--$	$[e_1, e_2] = 0$	$\{e_1, e_2\} = 0$
V_2	$e_1.e_2 = e_1$	$[e_1, e_2] = 0$	$\{e_1, e_2\} = 0$
V_3	$e_1.e_1 = e_1, e_2.e_2 = e_2$	$[e_1, e_2] = 0$	$\{e_1, e_2\} = 0$
V_4	$e_1.e_2 = e_1, e_2.e_1 = e_1, e_2.e_2 = e_2$	$[e_1, e_2] = 0$	$\{e_1, e_2\} = 0$
V_5	$e_2.e_2 = e_2$	$[e_1, e_2] = 0$	$\{e_1, e_2\} = 0$

2. durum: $(g, [,])$ abelyen ve $(\eta, \{,\})$ abelyan değildir. Burada V'nin tabanı (e_1, e_2) olsun ve $[e_1, e_2] = 0$, $\{e_1, e_2\} = -e_1$ olsun. Bu durumda $(\mathbb{C}^3, \tau_3 (\mathbb{C}))$ üzerinde post-Lie cebir yapısı η üzerinnde sadece LR-yapısı olur.

V	çarpım	$[,]$	$\{,\}$
V_6	$e_1.e_1 = e_1$, $e_2.e_2 = -e_1$	$[e_1, e_2] = 0$	$\{e_1, e_2\} = -e_1$
V_7	$e_1.e_2 = e_1$	$[e_1, e_2] = 0$	$\{e_1, e_2\} = -e_1$
V_8	$e_2.e_2 = -e_1$	$[e_1, e_2] = 0$	$\{e_1, e_2\} = -e_1$

3. durum : $(g, [,])$ abelyan değildir ve $(\eta, \{,\})$ abelyendir .Burada V'nin tabanı (e_1, e_2) olsun ve $[e_1, e_2] = e_1$, $\{e_1, e_2\} = 0$. Bu durumda $(\tau_2 (\mathbb{C}), \mathbb{C}^2)$ (üzerinde Post-Lie cebir yapısı η üzerinde sadece LSA-yapısı olur)

V	çarpım	[,]	{,}
$V_9(\alpha)$	$e_2.e_1 = -e_1$,$e_2.e_2 = \alpha e_2$	$[e_1, e_2] = e_2$	$\{e_1, e_2\} = 0$
$V_{10}(\beta)$,$\beta \neq 0$	$e_1.e_2$=βe_1,$e_2.e_1$=(β-1)e_1,$e_2.e_2$=βe_2	$[e_1, e_2] = e_2$	$\{e_1, e_2\} = 0$
V_{11}	$e_2.e_1 = -e_1$, $e_2.e_2 = e_1 - e_2$	$[e_1, e_2] = e_2$	$\{e_1, e_2\} = 0$
V_{12}	$e_1.e_1$=e_2, $e_2.e_1$=-e_1, $e_2.e_2$=-2e_2	$[e_1, e_2] = e_2$	$\{e_1, e_2\} = 0$
V_{13}	$e_1.e_2 = e_1, e_2.e_2 = e_1 + e_2$	$[e_1, e_2] = e_2$	$\{e_1, e_2\} = 0$

4. durum: $(g, [,])$ ve $(\eta, \{,\})$ ikisi abelyan değildir. Burada V'nin tabanı (e_1, e_2) olsun ve $[e_1, e_2] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, $\{e_1, e_2\} = e_1$. α_1 veya α_2 başka varsayımlar yapmamaya dikkat edelim. Ancak (3.5),(3.6),(3.7) koşulları çok hale gelir ve şunu ifade eder $\alpha_2 = 0$ ve $\alpha_1 \neq 0$ dır. Bu durumda mümkün tüm çarpımları kolaylıkla listeleyebiliriz. Post-Lie cebir homomorfizm bağımsız olarak iki cebir ailesini elde ediyoruz.

İlk: $e_2.e_1 = (1 - \alpha_2)e_1, e_2.e_2 = \alpha e_1$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{C}$ vardır.

İkincisi: $e_1.e_2 = -e_1, e_2.e_1 = -\ \alpha_1 e_1, e_2.e_2 = \beta e_1$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{C}$ kayfi bir sayı vardır.

$\varphi = (\varphi_{ij})$ $\in$End(V). φ, η nun bir otomorfizmdir ancak ve ancak $\varphi_{21} = 0, \varphi_{22} = 1$ ve $det(\varphi) = \varphi_{11} \neq 0$

V	çarpım	[,]	{,}
V_{14,α_1},$\alpha_1 \neq 0$	$e_2.e_1 = (1 - \alpha_1)e_1$	$[e_1, e_2] = \alpha_1 e_1$	$\{e_1, e_2\} = e_1$
V_{15}	$e_2.e_2 = e_1$	$[e_1, e_2] = e_1$	$\{e_1, e_2\} = e_1$
$V_{16,\alpha_1}, \alpha_1 \neq 0$	$e_1.e_2 = e_1$,$e_2.e_1 = -\alpha_1 e_1$	$[e_1, e_2] = \alpha_1 e_1$	$\{e_1, e_2\} = e_1$
V_{17}	$e_1.e_2$=$-e_1$, $e_2.e_1$=e_1, $e_2.e_2$=e_1	$[e_1, e_2] = -e_1$	$\{e_1, e_2\} = e_1$

$(V_{14}, \alpha_1, .)$ ve $(V_{15}, .)$ LR ve LSA dır. Fakat $(V_{16}, \alpha_1, .)$ ve $(V_{17}, .)$ değildir. Bu durumda her $x, y, z \in V$ için $x.(y.z) + y.(x.z) + z.(x.y) = (y.z).x + (x.z).y + (x.y).z$ dir.

Lemma 3.16. *n 2-adım nilpotent Lie cebri ve m, abelyen Lie cebir olsun. İkisinin vektör uzayı V dir . Bu durumda $\Psi : n \rtimes Der(n) \to m \rtimes Der(m) = m \rtimes\ gl(m)$, $(x, D) \mapsto (x, \frac{1}{2}ad(x) + D)$ Lie cebir homomorfizmdir. ($\rtimes$: semidirekt çarpım sembolüdür).*

İspat. n 2-adım nilpotent olduğundan $ad([x, y]) = 0$ dır.

$[D, ad(x)] = ad(D(x))$ kullanarak

$$\begin{aligned}\Psi([(x_1, D_1), (x_2, D_2)]) &= \Psi([x_1, x_2] + D_1(x_2) - D_2(x_1), [D_1, D_2]) \\ &= ([x_1, x_2] + D_1(x_2) - D_2(x_1), ad(D_1(x_2)) \\ &\quad -\frac{1}{2}ad(D_2(x_1)) + [D_1, D_2] \text{ dır.}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\Psi((x_1, D_1)), \Psi((x_2, D_2))] &= \left[(x_1, \frac{1}{2}ad(x_1) + D_1), (x_2, \frac{1}{2}ad(x_2) + D_2)\right] \\
&= (\frac{1}{2}ad(x_1)(x_2) - \frac{1}{2}ad(x_2)(x_1) + D_1(x_2) \\
&\quad -D_2(x_1), \left[\frac{1}{2}ad(x_1) + D_1, \frac{1}{2}ad(x_2) + D_2\right]) \\
&= ([x_1, x_2] + D_1(x_2) - D_2(x_1), \frac{1}{2}\left[ad(x_1) + D_2\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[D_1, ad(x_2)\right] + [D_1, D_2]) \\
&= ([x_1, x_2] + D_1(x_2) - D_2(x_1), \frac{1}{2}ad(D, x_2) \\
&\quad -\frac{1}{2}ad(D_2(x_1)) + [D_1, D_2])
\end{aligned}$$

dır. □

Örnek. *η yarı basit bir Lie cebir olsun . Bu durumda (g, η) üzerinde iki açık Post-Lie cebir yapısı vardır. ya $\varphi = 0$ yada $\varphi = -id$ dir. Öylese $[x, y] = \mp \{x, y\}$ dir. Yani , eğer $\varphi = 0$ ise $x.y = 0$ ve $[x, y] = \{x, y\}$. eğer $\varphi = -id$ ise $x.y = [x, y] = -\{x, y\}$olur.*

Önerme 3.17. *$x.y = \{\varphi(x), y\}, (g, \eta)$ üzerinde bir Post-Lie cebir yapısı olmak üzere η ve g yarı-basit Lie cebirleri olsun. Bu durumda ya $\varphi = 0$ yada $\varphi = -id$ dir. İkinci durumunda g ve η izomorftur.*

İspat. g ve η yatı-basit olduğu durumda bakalım. g ve η izomorf olduğunu sanırım. Bu durumda basit faktölerden kaynaklanan post-Lie cebir yapılar vardır.Öte yandan, post-Lie cebir yapıları bulabilir. Örnek olarak $L = sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$ ve onun taban

$\{e_1, f_1, h_1, e_2, f_2, h\}$ olsun. Bu durumda $\{e_1, f_1\} = h_1$, $\{e_2, f_2\} = h_2$, $\{e_1, h_1\} = -2e_1$, $\{e_2, h_2\} = -2e_2$, $\{f_1, h_1\} = 2f_1$, $\{f_2, h_2\} = 2f_2$ olur.

Bu durumda $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ dir ve $\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}$ dır. □

Örnek. *$\eta = sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$ ve $(e_1, f_1, h_1, e_2, f_2, h_2)$ onun tabanı olsun. Lie operatörleri şöyle tanımlasın:*

$$\begin{aligned}
\{e_1, f_1\} &= h_1 & \{e_2, f_2\} &= h_2 \\
\{e_1, h_1\} &= -2e_1 & \{e_2, h_2\} &= -2e_2 \\
\{f_1, h_1\} &= 2f_1 & \{f_2, h_2\} &= 2f_2
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ için } \varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \text{ tanımlasın.}$$

$x.y = \{\varphi(x), y\}$, (g, η) üzerinde bir post-Lie cebir yapısı olur ve x.y şöyle tanımlanır:

$$e_1.e_2 = -4e_2 + h_2 \;,\; f_1.e_2 = 2e_2 - h_2 \;,\; h_1.e_2 = 6e_2 - 2h_2$$

$$e_1.f_2 = 4f_2 + 4h_2 \;,\; f_1.f_2 = -2f_2 - h_2 \;,\; h_1.f_2 = -6f_2 - 4h_2$$

$$e_1h_2 = -8e_2 - 2f_2 \;,\; f_1h_2 = 2e_2 + 2f_2 \;,\; h_1h_2 = 8e_2 + 4f_2$$

çünkü,

$$\begin{aligned} e_1.e_2 &= \{\varphi(e_1), e_2\} = \{4e_1 - f_2 - 2h_2, e_2\} \\ &= 4\{e_2, h_2\} - \{f_2, e_2\} - 2\{h_2, e_2\} = -4e_2 + h_2 \end{aligned}$$

g Lie cebri için Lie öperatörleri şöyle olur: $[x, y] = -\{x, y\}$

$[\mathrm{e}_1, \mathrm{f}_1]=\mathrm{h}_1$	$[\mathrm{f}_1, \mathrm{h}_1] = 2f_1$	$[\mathrm{h}_1, \mathrm{f}_2] = -6f_2 - 4h_2$
$[\mathrm{e}_1, \mathrm{h}_1]=-2\mathrm{e}_2$	$[\mathrm{f}_1, \mathrm{e}_2] = 2e_2 - h_2$	$[\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2] = 8e_2 + 4f_2$
$[\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2]=-4\mathrm{e}_2+\mathrm{h}_2$	$[\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2] = -2f_2 - h_2$	$[\mathrm{e}_1, \mathrm{f}_2] = h_2$
$[\mathrm{e}_1, \mathrm{f}_2]=4\mathrm{f}_2+4\mathrm{h}_2$	$[\mathrm{f}_1, \mathrm{h}_2] = 2e_2 + 2f_2$	$[\mathrm{e}_2, \mathrm{h}_2] = -2e_2$
$[\mathrm{e}_1, \mathrm{h}_2]=-8\mathrm{e}_2-2\mathrm{f}_2$	$[\mathrm{h}_1, \mathrm{e}_2] = 6e_2 - 2h_2$	$[\mathrm{f}_2, \mathrm{h}_2] = 2f_2$

Bu durumda g, η ye izomorftur. g unimodular ve $\eta = sl(2, \mathbb{C}) \oplus sl(2, \mathbb{C})$ olmak üzere (g, η) üzerinde tüm Post-Lie cebir yapılarını hesaplamak için mümkündür. φ matrisi aşağıdakilerden biri olabilir:

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}, \varphi = \begin{bmatrix} -id & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}, \varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & -id \end{bmatrix}, \varphi = \begin{bmatrix} -id & 0 \\ A & -id \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki örnek $\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}$ ve $A = \begin{bmatrix} \alpha & \frac{-\beta^2}{4\alpha} & \beta \\ \gamma & \frac{-\delta^2}{4\gamma} & \delta \\ \frac{-\varepsilon}{2} & \frac{-\beta\delta}{2\varepsilon} & \frac{1-\beta\delta}{2\alpha} \end{bmatrix}$ ile genelleştirebilir; burada $\alpha\gamma \neq 0; \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0; \varepsilon = \alpha\delta - \beta\gamma; \varepsilon^2 + 4\alpha\gamma = 0$ dır. $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (4, -4, -1, 2, 4)$ alırsak önceki örneğine döneriz.

Önerme 3.18. *Farz edelimki (g, n) üzerinde bir Post-Lie cebir yapısı mevcuttur. Bu durumda eğer g nilpotent ise, n çözülebilirdir .*

İspat. $\varphi : g \to n \rtimes Der(n)$, $x \mapsto x(x, L(x))$ Post-Lie cebir yapısı tarafından indirgenmiştir. Bu durumda $\eta = L(g)$ bir nilpotant Lie cebiridir. $n \rtimes \eta = \varphi(g) \oplus \eta$ olduğunu farzedelim . Aslında , $(x, y) \in n \rtimes \eta$ için $(x, y) - \varphi(x) = (x, y) - (x, L(x)) = (0, y - L(x))$

tir . Bu nedenle $(x, y) = \varphi(x) + (0, y - L(x)) \in \varphi(g) \oplus \eta$. Tersine , $(x, y) \in n \rtimes \eta$ için $(x, y) = \varphi(a) + (0, L(b)) = (a, L(a) + L(b)) = (a, L(a + b)) \in n \rtimes \eta$ olacak şekilde $a, b \in g$ vardır. Böylece, $n \rtimes \eta$, iki nilpotent Lie cebrinin direkt vektör uzayı toplamıdır. İki nilpotent Lie cebrinin toplamın çözülebilirdir. Dolayısıyla, $n \rtimes \eta$ çözülebilir ve böylece n kendisi çözülebilirdir. □

Önerme 3.19. *(g, n) üzerinde bir Post-Lie cebir yapısı olduğunu varsayalım , Eğer n çözülebilir ve nilpotent değil ise , g mükemmel değildir.*

İspat. Varsayım ile n'nin nilradikali $nil(n)$, n'den farklıdır. $g \neq [g, g]$ göstermeliyiz . Tüm $x \in n$ için sol çarpma $L(x)$, n'nin bir türevidir. Her D türevi için $D(rad(n)) \subseteq nil(n)$ dir. n çözülebilir olduğu için $D(n) \subseteq nil(n)$ dir . Özel olarak $n.n \in nil(n)$ olduğu için ve her $x, y \in g$ için $[x, y] = xy - yx + \{x, y\} \in nil(n)$ dir . Bu nedenle $[g, g] \subseteq nil(n) \subsetneq n = g$ vektör uzayıdır. Bu yüzden $g \neq [g, g]$ dir. □

Önerme 3.20. *$x.y$, (g, n) üzerinde bir post-Lie cebir yapısı olmak üzere g ve n basittir . Bu durumda ya $x.y = 0$ ve her x, y için $[x, y] = \{x, y\}$ ya da $x.y = [x, y] = -\{x, y\}$ dir.*

İspat. Herhangi bir post-Lie cebri yapısı $n \oplus n$ 'nin η bir alt cebire karşılık gelir ve $n \oplus n$ için $p_1 - p_2 : n \oplus n \to n$ dönüşümü η 'nin g 'ye izomorfizmini belirler . g basit olduğu için η de basittir. Her iki projeksiyon dönüşümleri p_1 ve p_2 , η üzerine Lie cebri homomorfizmleridir . Bu nedenle, çekirdeklerin $ker(p_1(\eta))$ ve $ker(p_2(\eta))$, η'de idealdir ve dolayısıyla ya 0 ya da η olmalıdır. Üç durum vardır:

1. durum: $p_2(\eta) = 0$ dır. Bu durumda $\eta = \{(x, 0); x \in n\}$ çünkü, her $x \in L$ için $L(x) = ad(0) = 0$ dır.Bu durumda $x.y = 0$ ve her $x, y \in n$ için $[x, y] = \{x, y\}$ dir. burada $g = n$ dir.

2. durum: $p_1(\eta) = 0$ dır. Bu durumda $\eta = \{(0, x); x \in n\}$ çünkü, her $x \in L$ için $L(x) = -ad(x)$ dır.Bu durumda her $x, y \in n$ için $[x, y] = -\{x, y\}$ dir. burada $g = -n$ dir.

3 durum: $p_1(\eta) \neq 0$ ve $p_2(\eta) \neq 0$ dır. Bu durumda $ker(p_{1|\eta}) = ker(p_{2|\eta}) = 0$ dır. p_1 ve p_2 $1 - 1$ olduğundan $\eta = \{(x, \varphi(x)) : x \in n\}$ olacak şekilde $\varphi : n \to n$, $1 - 1$ lineer dönüşümü vardır. η , $n \oplus n$ nin alt vektör uzayı olduğu gibi her $x, y \in n$ için $[(x, \varphi(x)), (y, \varphi(y))] \in \eta$ dir. Bu durumda bazı $z \in n$ için $(\{x, y\}, \{\varphi(x), \varphi(y)\}) = (z, \varphi(z))$ dır. O halde $z = \{x, y\}$ dir.

$$\varphi(\{x, y\}) = \varphi(z) = \{\varphi(x), \varphi(y)\}$$

ve $\varphi \in Aut(n)$ dir. N. Jacobson (1962) inden $\lambda = 1$, φ nin bir özdeğeridir. Bu durumda $p_1 - p_2 : h \to g : (x, \varphi(x)) \to x - \varphi(x)$ izomorfizm değildir ve bu bir çelişkidir. □

Önerme 3.21. *$x.y$, (g, η) üzerinde bir post-Lie cebir yapısı olsun. Bu durumda $\eta = sl(2, \mathbb{C})$ ise g ,ya $\eta(sl(2, \mathbb{C})$ yada $\lambda \neq -1$ için $r_{3,\lambda}(\mathbb{C})$ (çözülebilir non-nilpotent Lie cebri)' ye izomorftur.*

İspat. (Burde 2012). □

Önerme 3.22. $(\eta, \{,\})$ *bir Lie cebir ve* η *=A⊕B olacak şekilde iki altcebiri A ,B nin vektör uzayı olarak direkt toplamı olsun. (g,{, }) Lie cebiri A⊕B ve üzerinde parantez Lie çarpımı* $[a+b, a'+b'] = \{a, a\prime\} - \{b, b'\}$ *olsun. Bu durumda ,* (g, η) *lie cebir çifti üzerinde Post-Lie cebir yapısı* $(a+b).(a' + b') = -\{b, a'+b'\}$ *ile elde edilir.*

İspat. $\Psi : g \to$A⊕B; $\Psi(a+b) = a-b$ tanımlasın. Bu durumda ,Ψ bir Lie homomorfizmi olur . g bir lie cebir ve genel olarak η den farklıdır, çünkü A ve B nin direkt lie cebir toplamı değildir . Şimdi: $x = a+b, y = a' + b'$ olsun. $x, y \in A \oplus B$, bu durumda

$$\begin{aligned} x.y - y.x &= (a+b).(a'+b') - (a'+b').(a+b) \\ &= \{b, a'+b'\} + \{b', a+b\} \\ &= \{a', b\} + 2\{b', b\} + \{b', a\} \\ &= \{a, a\prime\} - \{b, b'\} - \{a+b, a'+b'\} \\ &= [a+b, a'+b'] - \{a+b, a'+b'\} \\ &= \{x, y\} - \{x, y\} \end{aligned}$$

dir. (3.2) için:

$$\begin{aligned} [x, y].z &= (\{a, a\prime\} - \{b, b'\}).z \\ &= \{\{b, b'\}, z\} \\ &= \{b, \{b', z\}\} - \{b', \{b, z\}\} \\ &= -\{b, \{b', z\}\} + \{b', \{b, z\}\} \\ &= (a+b).((a'+b').z) - (a'+b').((a+b).z) \\ &= x.(y.z) - y.(x.z) \end{aligned}$$

dır. (3.3) için:

$$\begin{aligned} x.\{y, z\} &= -\{b, \{y, z\}\} \\ &= -\{\{z, b\}, y\} - \{\{b, y\}, z\} \\ &= \{y, -\{b, z\}\} + \{-\{b, y\}, z\} \\ &= \{y, x.y\} + \{x.y, z\} \end{aligned}$$

dir. □

3.1.1. Çift Lie cebirin türevleri ve Lie cebir özdeşlikleri

L bir Lie cebir ve D , L'nin bir türevi olsun.

Soru 1) Hangi D türevleri için skw simetik bilineer dönüşüm $[x, y]_D = D([x, y])$ Jakobi özdeşliğini sağlar.

Soru 2) Hangi Lie cebirleri , her $D \in Der(L)$ içim $[x, y]_D = D([x, y])$ özdeşliğine sahiptir ve Jakobi özdeşliğini sağlar.

Bu bölümde soru 1 ve soru 2 ile ilgileneceğiz ve gerekli özdeşlikleri inceleyeceğiz.

Tanım 3.23. a) V, F üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere ve $L = (V, [,])$, V üzerinde bir Lie cebir olsun. Bu durumda eğer $R : L \to L$;

$$[x, y]_R = [R(x), y] + [x, R(y)]$$

lineer dönüşümü bir Lie parantezini tanımlarsa klasik bir R-matrisi olarak adlandırılır. (g, R) ye çift Lie cebri denir.

b) $B_R(x, y) = [R(x), R(y)] - R([R(x), y] + [x, R(y)])$ tanımlayalım.

Önerme 3.24. *L bir Lie cebir olmak üzere her $x, y, w \in L$ için;*

$$[x, y]_R = [R(x), y] + [x, R(y)]$$

parantezi jakobi özdeşliği sağlanması için gerekli ve yeterli koşul;

$$[B_R(x, y), w] + [B_R(y, w), x] + [B_R(w, x), y] = 0$$

dir.

İspat.

$$B_R(x, y) = [R(x), R(y)] - R([R(x), y] + [x, R(y)])$$

olduğundan,

$$R(x, y) = [R(x), R(y)] - R([x, y]_R)$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned}[B_R(x, y), w] + [B_R(y, w), x] + [B_R(w, x), y] &= [[R(x), R(y)] - R([x, y]_R), w] \\ &\quad + [[R(y), R(w)] - R([y, w]_R), x] \\ &\quad + [[R(w), R(x)] - R([w, x]_R), y]\end{aligned}$$

dır.

$$[x, y]_R = [R(x), y] + [x, R(y)]$$

ve jakobi özdeşliğini kullanılırsa;

$$[B_R(x, y), w] + [B_R(y, w), x] + [B_R(w, x), y] = 0$$

dir. □

Tanım 3.25. $\lambda \in F$ ve her $x, y \in L$ için

$$B_R(x,y) + \lambda[x,y] = 0$$

özdeşliğine MYBE özdeşliği denir (modified Yang-Baxter equation) MYBE'nin her bir çözümünün bir klasik R -matris olduğu açıktır. Karşıtı genelde doğru olmayabilir.

Soru 1 ile ilgili olarak aşağıdaki sonuca sahibiz.

Önerme 3.26. *L bir Lie cebir olmak üzere ve $D \in Der(L)$ bir türevi olsun. Bu durumda ,her $x, y, w \in L$ için D nin Jakobi özdeşliğini sağlanması için gerekli ve yeterli koşul*

$$D([D(x),[y,w]] + [D(y),[w,x]] + [D(w),[x,y]]) = 0 \tag{3.14}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}[[x,y]_D, w]_D &= [[D(x),y] + [x,D(y)], w]_D \\ &= D([[D(x),y],w]) + D([[x,D(y)],w])\end{aligned}$$

olduğu için

$$\begin{aligned}[[\mathrm{x},\mathrm{y}]_D,\mathrm{w}]_D+[[\mathrm{y},\mathrm{w}]_D,\mathrm{x}]_D+[[\mathrm{w},\mathrm{x}]_D,\mathrm{y}]_D &= D([[D(x),y],w]) + D([[x,D(y)],w]) \\ &+ D([[D(y),w],x]) + D([[y,D(w)],x]) \\ &+ D([[D(w),x],y]) + D([[w,D(x)],y]) \\ &= -D([[y,w],D(x)] + [[w,x],D(y)] \\ &+ [[x,y],D(w)])\end{aligned}$$

dir. Son adımda jakobi özdeşliğini 3 defa kullanırsak

$$[[D(x),y],w] + [[y,w],D(x)] + [[w,D(x)],y] = 0$$

dir. Aynı şekilde $D(y)$ve $D(w)$ için ispatlanır. □

(3.14) özdeşliği aşağıdaki biçimde de ifade edilebilir

$$\begin{aligned}0 &= [x,[D(y),D()]] + [y,[D(w),D(x)]] + [w,[D(x),D(y)]] \\ &+ [D^2(y),[x,w]] + [D^2(w),[y,x]] + [D^2(x),[w,y]]\end{aligned}$$

dir.

Tanım 3.27. a) L bir Lie cebir ve $D \in Der(L)$ bir türevi olsun. Bu durumda $[x,y]_D = D([x,y])$ başka bir Lie parantezi L_D tanımlarsa (g,D)'ya çift Lie cebir türevi denir.

b) Bir $D : L \to L$ dönüşümü ve $x,y,z \in L$ için

$$[D(x),[y,z]] + [D(y),[z,x]] + [D(z),[x,y]] = 0 \tag{3.15}$$

dir. Hom-Jacobi özdeşliği denir.

Sonuç 3.28. *L bir Lie cebir olmak üzere ve $z \in L$ olsun. Bu durumda $[x,y]_D = [z,[x,y]]$ parantezi jakobi özdeşliğini sağlanması için gerekli ve yeterli koşul her $x,y,w \in L$ için*

$$[z,[[z,x],[y,w]]] + [z,[[z,y],[w,x]]] + [z,[[z,w],[x,y]]] = 0 \tag{3.16}$$

dir.

İspat. Önerme 2.24 de $D = ad(z)$ olmalı ispat için yeterlidir. □

(3.16) özdeşliğinde $z = w$ alırsak her $x,y \in L$ için

$$[z,[[z,x],[z,y]]] = 0 \tag{3.17}$$

elde edilir.

Lemma 3.29. *L bir Lie cebri olsun ve $D = ad(z)$ klasik bir R-matrisi olduğunu varsayalım. Bu nedenle $[x,y]_D = [z,[x,y]]$ ikinci bir Lie parantezi tanımlar ve $ad(z)^3$, L'nin türevidir.*

İspat. $D = ad(z)$ ve (3.17) özdeşliğinden

$$0 = D([D(x),D(y)]) = [D^2(x),D(y)] + [D(x),D^2(y)]$$

dir. Buradan

$$D^3([x,y]) = \left[D^3(x),y\right] + \left[x,D^3(y)\right]$$

dır. O halde $D^3 = ad(z)^3$ bir türevi dir. Karşıt olarak, $ad(z)^3$, L'nin türevi $3 \neq 0$ ise (3.17) sağlanır. □

Eğer $f_z : L \to K$; her $x \in L$ için $[z,[z,x]] = f_z(x)z$ lineer bir dönüşümü varsa Lie cebrinin elemanı z 'ye extremal denir. $[e_1,e_2] = e_2$ ve $[e_1,e_3] = e_3$ ile verilen 3-boyutlu çözülebilir Lie cebiri denir ve $r_{3,1}(C)$ ile gösterilir. Premet'in bilinen sonucuna göre karakterstiği 2 ve 3 olmayan cebirsel kapalı cisim üzerinde her Lie cebrin extemal elemanı vardır. Her extremal eleman $z \in L$ için $ad(z)^3 = 0$ dır.

Önerme 3.30. *$L = sl(2,C)$ olsun. O halde, $R = ad(z)$ tüm $z \in L$ için klasik bir R*

-matrisidir. Lie cebiri L_R, tüm $z \neq 0$ için $r_{3,1}(C)$ ile izomorftur.

İspat. (e_1, e_2, e_3), $sl(2, C)$ 'nin standart tabanı olsun ve $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = -2e_1$, $[e_2, e_3] = 2e_2$ $z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$ olsun. $[x, y]_R = [z, [x, y]]$ kullanarak

$$[e_1, e_2]_R = [z, [e_1, e_2]] = [z, e_3] = -2z_1e_1 + 2z_2e_2$$
$$[e_1, e_3]_R = [z, [e_1, e_3]] = [z, -2e_1] = -2z_3e_1 + 2z_2e_3$$
$$[e_2, e_3]_R = [z, [e_2, e_3]] = [z, 2e_2] = -2z_3e_2 + 2z_1e_3$$

ve

$$[e_1, [e_2, e_3]_R]_R = [e_1, -2z_3e_2 + 2z_1e_3]_R = -4z_2z_3e_2 + 4z_1z_2e_3$$
$$[e_2, [e_3, e_1]_R]_R = [e_2, 2z_3e_1 - 2z_2e_3]_R = 4z_1z_3e_1 - 4z_1z_2e_3$$
$$[e_3, [e_1, e_2]_R]_R = [e_3, -2z_1e_1 + 2z_2e_2]_R = -4z_1z_3e_1 + 4z_2z_3e_2$$

o halde

$$[e_1, [e_2, e_3]_R]_R + [e_2, [e_3, e_1]_R]_R + [e_3, [e_1, e_2]_R]_R = 0$$

dir. Elde edilen Lie cebrini L_R , $z = 0$ dışında $r_{3,1}(C)$ ile izomorftur. □

Teorem 3.31. *F cebirsel olarak kapalı ve karakteristiği sıfır bir cisim olsun. L, F üzerinde derecesi $r \geq 2$ basit bir Lie cebri olsun ve $z \in L$ $R = ad(z)$ klasik bir R- matrisi olduğunu varsayalım. O halde $z = 0$ ve $R = 0$ dır.*

İspat. (Burde 2016). □

Sonuç 3.32. *F cebirsel olarak kapalı ve Karakteristiği sıfır bir cisim olsun. L, F üzerinde derecesi $r \geq 2$ basit bir Lie cebri olsun $R = ad(z)$ özdeşliği modified Yang-Baxter özdeşliğini sağlarsa, her $x, y \in L$ için*

$$[z, [z, [x, y]] = [[z, x], [z, y]] + \lambda[x, y] \tag{3.18}$$

dir.

İspat. Burde (2016) dan $z = 0$ ve $\lambda = 0$ ve her $x \in L$ için

$$ad(z)^2 ad(x) - ad(z)ad(x)ad(z) + ad(x)ad(z)^2 = \lambda ad(x)$$

olur. □

Sonuç 3.33. *$L = sl(2, F)$ ve onun standart tabanı $\{e_1, e_2, e_3\}$ ve $z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$ olsun . Bu durumda $R = ad(z)$ her $z \in L$ ve her $\lambda \in F$ için MYBE özdeşliğini sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda = 4(z_1z_2 + z_3^2)$ dir .*

İspat. Önerme 2-24 ve (3.15) özdeşliğinden direkt hisapla elde edilir. □

Sonuç 3.34. *F cebirsel olarak kapalı ve karakteristiği sıfır bir cisim olsun. L , F üzerinde bir Lie cebir ve D, L'nin bir türevi olsun . Bu durumda D, (3.15) özdeşliği sağlarsa $D = 0$ olur .*

İspat. (Burde 2016). □

Sonuç 3.35. *L nilpotent bir Lie cebir olsun . (3.14) ve (3.15) özdeşliklerini sağlayan $D \in Der(L)$, L nin bir türevi vardır.*

İspat. (Burde 2016). □

Tanım 3.36. (3.15) özdeşliğin bir sonucu olarak $D = ad(z)$ alarak $[[z, x], [z, y]] = 0$ özdeşliğini dikkate alalım. Bu özdeşliği sağlayan Lie cebire metabelyen denir, yani $L^{(2)} = 0$ dır.

Burada aksi söylenmedikçe karakterstik 0 kabul edilecektir.

Lemma 3.37. *F karakterstiği 2 olmayan bir cisim olmak üzere. L , F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. Bu durumda L metabelian ancak ve ancak her $x, y, z \in L$ için $[[z, x], [z, y]] = 0$ özdeşliği sağlanır.*

İspat. L nin metabeliyen olduğunu, diğer bir deyişle,

$$[[z, x], [w, y]] = 0$$

özdeşliğini sağladığını varsayalım. $w = z$ gerekli özdeşliği elde ederiz. Tersine,

$$[[z, x], [z, y]] = 0$$

olarak kabul edersek ve resmi olarak $u + v$ ile değiştirirsek tüm x, y, u, v için

$$[[u, x], [v, y]] = [[u, y][v, x]]$$

olur . Şimdi bu özdeşliğini ve skew-simetriyi iki kere kullanıyoruz :

$$\begin{aligned} [[z, x], [w, y]] &= [[w, y], [x, z]] \\ &= [[w, z], [x, y]] \\ &= [[z, w], [y, x]] \\ &= [[z, x], [y, w]] \end{aligned}$$

dir. $2[[z, x], [w, y]] = 0$ dir . □

Önerme 3.38. *L (3.15) özdeşliği sağlayan bir Lie cebri olsun . Bu durumda L metabeliyeldir.*

İspat. (3.15) özdeşliğinde $D = ad(w)$ alırak her $x, y, z, w \in L$ için

$$[[w, x], [y, z]] + [[w, y], [z, x]] + [[w, z], [x, y]] = 0$$

olur. $w = z$ alırsak $x, y, z, \in L$ için

$$[[z, x], [z, y]] = 0$$

dir. Önceki lemmadan L metabeliyendir. □

Örnek. *L, 4 boyutlu nilpotent olmayan ve metabeliyen Lie cebri tabanı $\{e_1, ..., e_4\}$ olsun. Parantezleri $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = e_2$, $[e_1, e_4] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_4$ ile tanımlanır . $D = diag(0, \lambda, \lambda, 2\lambda)$, (3.14) ve (3.15) özdeşliklerini sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda = 0$ dir.*

$$[D(e_1), [e_2, e_3]] + [D(e_2), [e_3, e_1]] + [D(e_3), [e_1, e_2]] = -2e_4$$

Lie cebiri L'nin özdeşliğini (3.15) karşılaması için, $g^2 = [g, [g, g]] = 0$ gibi şartlar da vardır.

Örnek. *L_λ Aşağıdaki kompleks 7-boyutlu nilpotent Lie parantezleri tarafindan verilen cebir olsun. $[x_1, x_2] = x_4$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_1, x_4] = x_5$, $[x_1, x_5] = x_7$, $[x_2, x_3] = x_5$, $[x_2, x_4] = x_6$, $[x_2, x_6] = x_7$, $[x_3, x_4] = (1 - \lambda)x_7$ olsun. Bu durumda* (3.14) *sağlanır ancak ve ancak* (3.15) *sağlanır. O halde $\lambda = 0$ her $\lambda \in C$ için $c(L_\lambda) = 4$, $d(L_\lambda) = 2$ ve* $boyDer(L) = \left\{ \begin{array}{l} 13,\ \lambda = -1 \textit{ için} \\ 12, \lambda \neq -1 \textit{ için} \end{array} \right\}$ *dır.*

Önerme 3.39. *F karakterstiği sıfır olmayan bir cisim olmak üzere ve Lie cebri $sl(2, F)$ için sonlu bir tabanı (3.16) özdeşliği ve 5 dereceden standart özdeşliği ile verilir.*

$$\sum_{\pi \in S_4} (-1)^\pi [x_{\pi(1)}, [x_{\pi(2)}, [x_{\pi(3)}, [x_{\pi(4)}, x_0]]]] = 0$$

dir.

$$[z, [[w, x], [w, y]]] = [w, [[z, w], [x, y]]]$$

İspat. (M. A. Semenov 1983). □

Önerme 3.40. *(3.18) özdeşliği (3.16) özdeşliğinin sonucudur.*

İspat. (3.16) özdeşliğinde z yerinde $z + v$ yazarsak

$$\begin{aligned} 0 &= [z{+}v, [[z + v, x], [y, w]]]{+}[z + v, [[z + v, y], [w, x]]]{+}[z + v, [[z + v, w], [x, y]]] \\ &= [z, [[z, x], [y, w]]] + [z, [[v, x], [y, w]]] + [v, [[z, x], [y, w]]]{+}[v, [[v, x], [y, w]]] \\ &\quad + [z, [[z, y], [w, x]]] + [z, [[v, y], [w, x]]] + [v, [[z, y], [w, x]]]{+}[v, [[v, y], [w, x]]] \end{aligned}$$

$$+ [z, [[z, w], [x, y]]] + [z, [[v, w], [x, y]]] + [v, [[z, w], [x, y]]] + [v, [[v, w], [x, y]]]$$

dir. Şimdi (3.16) özdeşliğinden elde ettiğimiz terimlerin ilk ve son sütununa alırsak:

$$\begin{aligned} 0 &= [z, [[v, x], [y, w]]] + [z, [[v, y], [w, x]]] + [z, [[v, w], [x, y]]] \\ &+ [v, [[z, x], [y, w]]] + [v, [[z, y], [w, x]]] + [v, [[z, w], [x, y]]] \end{aligned}$$

dir. (3.16) özdeşliğinde $v = w$'nin ayarlanması ve z ve w'nin değiştirilmesi ile ;

$$[w, [[w, x], [y, z]]] + [w, [[w, y], [z, x]] = [w, [z, w], [x, y]]]$$

dir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} 0 &= 2[z, [[w, x], [y, w]]] + [w, [[z, x], [y, w]]] \\ &+ [w, [[z, y], [w, x]]] + [w, [[z, w], [x, y]] \\ &= 2[z, [[w, x], [y, w]]] + 2[w, [[z, w], [x, y]]] \end{aligned}$$

dir. Yani (3.18) özdeşliği elde edilir. □

L bir Lie cebir $x, y, z, w \in L$ ve $D \in Der(L)$ için aşağıdaki inceledik özdeşlikleri

$$\begin{aligned} &D([D(x), [y, w]] + [D(y), [w, x]] + [D(w), [x, y]]) = 0 \\ &[D(x), [y, z]] + [D(y), [z, x]] + [D(z), [x, y]] = 0 \\ &[z, [[z, x], [y, w]]] + [z, [[z, y], [w, x]]] + [z, [[z, w], [x, y]]] = 0 \\ &[z, [[z, x], [z, y]]] = 0 \\ &[z, [z, [x, y]]] - [[z, x], [z, y]] + [x, y] = 0 \\ &[z, [[w, x], [w, y]]] - [w, [[z, w], [x, y]]] = 0 \end{aligned}$$

Bunlar litartürde çok yer bulan, Lie cebir teoresine önderlik eden özdeşliklerdir. Açıkça görülebilirki $(3.14) \Rightarrow (3.15) \Rightarrow (3.16) \Rightarrow (3.17)$ dir.

Soru 2 ile ilgili olarak (3.14) sağlanır ancak ve ancak $[x, y]_D = D([x, y])$ her $D \in Der(L)$ dir.

$N \leq 4$ boyutlu kompleks Lie cebirlerindan hangisi (3.14), (3.15), (3.16) ve (3.17) özdeşliklerini sağlıyorsa aşağıdaki tabloda göstereceğiz:

L	Lie parantezi	(14)	(15)	(16)	(17)
$r_2(\mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_2$	×	×	×	×
$r_{3,\lambda}(\mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = \lambda e_3$	×	×	×	×
$sl(2, \mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_3$,$[e_1,e_3] = -2e_1$,$[e_2,e_3] = 2e_2$	×	−	×	×
$r_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^2$	$[e_1, e_2] = e_2$	×	×	×	×
$r_2(\mathbb{C}) \oplus r_2(\mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_4$	×	×	×	×
$sl(2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$[e_1,e_2] = e_3$,$[e_1,e_3] = -2e_1$,$[e_2,e_3]$=$2e_2$	×	−	×	×

3.2. Sonlu üretilen Lie cebirler için N-türevi

Burada L cebrin N-türevi ve asas teoremi ifade edeceğiz. Schrödinger-Virasoro cebiri ve Kac-Noody cebri uygulama olarak verileceğiz.Bu bölümdeki kavramlar hakkında ayrıntılı bilgi için Lian ve Chen (2016) kaynağı incelenebilir.

Tanım 3.41. L , F cismi üzerinde bir Lie cebri olmak üzere $N \geq 2$ pozitif bir tam sayı olsun. Bu durumda, eğer φ, L'den kendisine bir lineer dönüşüm ve

$$\varphi([x_1, x_2, ..., x_{N-1}, x_N]) = \sum_{i=1}^{i=N} [x_1, x_2, ..., x_{i-1}, \varphi(x_i), x_{i+1}..., x_{N-1}, x_N]$$

koşulu sağlanıyorsa ; φ'ye L'nin N-türevi denir ve $Der^{(N)}(L)$ gösterilir.

$N = 2$ için $Der^{(2)}(L) = Der(L)$ dır. Çünkü; $\varphi([x_1, x_2]) = [\varphi(x_1), x_2] + [x_1, \varphi(x_2)]$ olur. Lie türevi $Der(L)$, L'nin bir N-türevidir ve $Der(L) \subseteq Der^{(N)}(L)$olur. Genel olarak $N \geq 3$ için $Der(L)$, $Der^{(N)}(L)$'nin altcebirdir.

Tanım 3.42. L , F cismi üzerinde bir Lie cebri olmak üzere . φ, L'den kendisine bir lineer dönüşümü ve her $a, b, c \in L$ için ;

$$\varphi([[a, b], c]) = [[\varphi(a), b], c] + [[a, \varphi(b)], c] + [[a, b], \varphi(c)]$$

koşulu sağlanıyorsa φ'ye L'nin üçlü türev denir.

G değişmeli bir grup olmak üzere . $L = \bigoplus_{\alpha\in G} L_\alpha$, G-dereceli Lie cebri olsun. $x_1, x_2, ..., x_{N-1}, x_N \in L$ için $[x_1, x_2, ..., x_{N-1}, x_N] = [x_1.... [x_{N-2}, , [x_{N-1}, x_N]] ....]$ dır.

$N \geq 2$ pozitif bir tam sayı olsun. Yukarıdaki gibi $Der^{(N)}(L), Der(L)$, L'nin tüm N-türevlerinin ve tüm L türevlerinin kümesi olmak üzere $Der(L) \subseteq Der^{(N)}(L)$ $\forall\alpha, \beta \in G$ için $\varphi(L_\beta) \subseteq L_{\alpha+\beta}$ ise, N-türevi φ, α dereceli homojen N-türevi olarak adlandırılır.

$$Der_\alpha^{(N)}(L) = \left\{\varphi \in Der^{(N)}(L); \deg\varphi = \alpha\right\}$$

tanımlanır.

Lemma 3.43. *G değişmeli bir grup olmak üzere her $L = \bigoplus_{\alpha\in G} L_\alpha$ G-dereceli Lie cebri için;*

$$Der^{(N)}(L) = \bigoplus_{\alpha\in G} Der_\alpha^{(N)}(L)$$

dır.

İspat. Her $\alpha \in L$ için $\rho_\alpha : L \to L_\alpha$ kanonik projeksiyonu ve S, L yi üreten sonlu bir altküme ve

$$Y := S \cup \{[x_1, x_2, ..., x_m] \ ; x_1, x_2, ..., x_m \in S \, ; m = 2, 3, ..., N-1\}$$

olsun. Y, L'nin sonlu bir alt kümesidir. Y, bir N-Lie cebri olarak L'yi üretir (yani, L, Y'yi içeren ve $[x_1, ..., x_N]$ biçimindeki yinelenmiş parantez altına alınarak sabit olan en küçük altuzaydır). $\varphi \in Der^{(N)}(L)$ için,

$$Y \cup \varphi(Y) \subset \sum_{\alpha \in K} L_\alpha$$

olacak şekilde sonlu küme $K \subseteq L$ vardır. $\alpha \in G$ için

$$\varphi_\alpha := \sum_{\beta \in G} \rho_{\alpha+\beta} \varphi \rho_\beta ; x_{\beta_i} \in L_{\beta_i}$$

$i = 1, 2, ..., N$ için tanımlıyalım ve

$$s := \varphi_\alpha \left([x_{\beta 1}, x_{\beta 2}, ..., x_{\beta N}] \right) = \rho_{\alpha+\beta_1+\beta_2+.....+\beta_N} \varphi x_{\beta 1}, x_{\beta 2}, ..., x_{\beta N}$$

için

$$\begin{aligned} s &= \rho_{\alpha+\beta_1+\beta_2+...+\beta_N} (\sum_{i=1}^{i=N} [x_{\beta 1}, x_{\beta 2}, ..., x_{\beta i-1}, \varphi(x_{\beta i}), x_{\beta i+1} ..., x_{\beta N-1}, x_{\beta N}] \\ &= \sum_{i=1}^{i=N} x_{\beta 1}, x_{\beta 2}, ..., x_{\beta i-1}, \rho_{\alpha+\beta_i} \varphi(x_{\beta i}), x_{\beta i+1} ..., x_{\beta N-1}, x_{\beta N} \\ &= \sum_{i=1}^{i=N} [x_{\beta 1}, x_{\beta 2}, ..., x_{\beta i-1}, \varphi_\alpha(x_{\beta i}), x_{\beta i+1} ..., x_{\beta N-1}, x_{\beta N}] \end{aligned}$$

Bu durumda $\varphi_\alpha \in Der_\alpha^{(N)}(L)$ olur

$$T := \{\alpha - \beta ; \alpha, \beta \in K\}$$

olsun . T sonludur ve her $y \in Y$ için

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \sum_{\alpha, \beta \in K} \rho_\alpha \varphi \rho_\beta(y) = \sum_{\alpha, \beta \in K} \rho_{\alpha-\beta+\beta} \varphi \rho_\beta(y) \\ &= \sum_{\beta \in K} \sum_{\gamma \in K-\beta} \rho_{\gamma+\beta} \varphi \rho_\beta(y) = \sum_{\alpha \in K} \sum_{\gamma \in T} \rho_{\gamma+\beta} \varphi \rho_\beta(y) \\ &= \sum_{\gamma \in T} \sum_{\beta \in F} \rho_{\gamma+\beta} \varphi \rho_\beta(y) = \sum_{\gamma \in T} \sum_{\beta \in G} \rho_{\gamma+\beta} \varphi \rho_\beta(y) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\gamma\in T} \varphi_\gamma(y)$$

böylece φ ve $\sum_{\gamma\in T} \varphi_\gamma$, Y üzerinde iki Lie cebrinin N-türevidir ve eşittir. □

3.2.1. Lie cebirin N-türevi için esas teoremi

L, aşikar olmayan sonlu boyutlu bir Cartan alt-cebri H tarafından derecelendirilmiş üretilen bir Lie cebri olsun. H^*, H 'nin dual uzayı olsun. $\alpha \in H^*$ için

$$L_\alpha = \{x \in L; [h, x] = \alpha(h)x \text{ her } h \in H \text{ için}\}$$

L_α, α ile ilişkilendirilmiş kök uzayı

$$R = \{\alpha \in H^*; L_\alpha \neq \{0\}\}$$

olmak üzere R'ye L'nin H ile ilgili kök sistemi denir. Bu durumda $L = \bigoplus_{\alpha\in R} L_\alpha$ ve $L_0 = H$ olur.

$$R^\times = \{\alpha \in R; \alpha \neq 0\}$$

$$R_\pm = \{\alpha \in R^\times; -\alpha \in R\}$$

tanımlasın.

Tanım 3.44. L, F üzerinde bir Lie cebir olmak üzere $\alpha \in R_\pm$ ve her $x_\alpha \in L_\alpha$ için

(P_1) $y_{\alpha-\beta} \in L_{\alpha-\beta}$, $y_\beta \in L_\beta$ ve $\beta \notin \{0, \alpha\}$ için $x_\alpha = [y_{\alpha-\beta}, y_\beta]$

(P_2) $x_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$ için $[x_\alpha, x_\alpha, x_{-\alpha}] \neq 0$

Koşullardan biri sağlıyorsa L ye (P) özelliğini sağlayan bir cebirdir denir.

Teorem 3.45. *L, aşikar olmayan sonlu boyutlu bir Cartan alt-cebri H tarafından derecelendirilmiş üretilen bir Lie cebri, N $\geq$ 3 pozitif bir tamsayı olsun. Eğer N çift veya L, (P) yi sağılıyorsa, $Der^{(N)}(L) = Der(L)$ olur.*

İspat. H, R'yi yukarıdaki gibi kabul edelim ve $Q = \mathbb{Z}R$ abel grubu olsun. Açıkçası, L bir sonlu olarak üretilen Q-dereceli Lie cebridir. Önceki lemma kullanarak

$$Der^{(N)}(L) = \bigoplus_{\alpha\in Q} Der^{(N)}_\alpha(L)$$

olur. $\varphi \in Der^{(N)}_\gamma(L), \gamma \in Q$ olsun. Aşağıda, φ'nin bir türev olduğunu ispatlayacağız. Tartışmayı iki durumda inceleyeceğiz.

1. durum: $\gamma = 0$; $x, y \in H$ için

$$\varphi([x,y]) = 0 = [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]$$

olur. ve $0 \neq y \in L_\alpha$, $\alpha \in R^\times$ olsun. Bu durumda $\alpha(h_\alpha) = 1$ olacak şekilde bir $h_\alpha \in H$ vardır. $y = [\underbrace{h_\alpha, \cdots, h_\alpha}_{N-1}, y]$ alırsak,

$$\varphi(y) = (N-1)\alpha(\varphi(h_\alpha))y + \varphi(y)$$

olduğu için $\alpha(\varphi(h_\alpha)) = 0$ olur. $x \in L$ için φ,

$$[x,y] = [x, \underbrace{h_\alpha, \cdots, h_\alpha}_{N-2}, y]$$

alırsak $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]$ elde ederiz.

2. durum : $\gamma \neq 0$; Bu durumda $\gamma(h_\gamma) = 1$ olacak şekilde bir $h_\gamma \in H$ var, $h \in H$ için

$$0 = [\underbrace{h_\gamma, \cdots, h_\gamma}_{N-1}, h]$$

üzerinde φ alırsak $0 = [\varphi(h_\gamma), h] + \varphi(h)$ olur , o halde $\varphi(h) = (-ad\varphi(h\gamma))(h)$ dir. $\Psi = \gamma + ad\varphi(h\gamma)$ tanımlıyalım, Ψ, N-türevidir ve $\Psi(H) = \{0\}$dır. $0 \neq x_\alpha \in L_\alpha, \alpha \in R^\times$ için $\Psi(x_\alpha) = 0$ olduğunu görmek için iki alt durum kullanacağız. Böylece $\varphi = -ad\varphi(h\gamma)$ bir türevidir.

1.altdurumu: N çifttir veya $\gamma \neq -2\alpha$ olsun $\alpha(\overline{h})^{N-1} \neq (\alpha+\gamma)(\overline{h})^{N-1}$ olacak şekilde bir $\overline{h} \in H$ vardır .

$$\alpha(\overline{h})^{N-1} x_\alpha = [\underbrace{\overline{h}, \cdots, \overline{h}}_{N-1}, x_\alpha]$$

üzerinde φ alırsak :

$$\alpha(\overline{h})^{N-1}\Psi(x_\alpha) = (\alpha+\gamma)(\overline{h})^{N-1}\Psi(x_\alpha)$$

olur . O halde $\Psi(x_\alpha) = 0$ olur.

2. altdurum: N tektir ve $\gamma = -2\alpha$ dır. $\alpha \neq 0$ olduğu için $\alpha(h_\alpha) = 1$ olacak şekilde bir $h_\alpha \in H$ vardır . Eğer $L_{-\alpha} = \{0\}$ ise $\Psi(x_\alpha) = 0$ olur.$L_{-\alpha} \neq \{0\}, x_\alpha \in L_\alpha$ farz edelim . Eğer x_α , (P_1) özelliği sağlıyorsa uygun $y_{\alpha-\beta} \in L_{\alpha-\beta}$ ve $y_\beta \in L_\beta$ için ve $\beta \notin \{0, \alpha\}$

$x_\alpha = [y_{\alpha-\beta}, y_\beta]$ dır. 1.altdurumu kullanılarak ve

$$x_\alpha = [\underbrace{h_\alpha, \cdots, h_\alpha}_{N-2}, y_{\alpha-\beta}, y_\beta]$$

Ψ uygularsak $\Psi(x_\alpha) = 0$ olur . Eğer x_α ,(P_2) özelliği sağlıyorsa ve bazı $-\alpha \in L_{-\alpha}$ için $[x_\alpha, x_\alpha, x_{-\alpha}] \neq 0$ olur. öncelikle, 1.altdurumu kullanılarak $\Psi(x_{-\alpha}) = 0$ olur. Sonra; Ψ,

$$x_\alpha = [\underbrace{h_\alpha, \cdots, h_\alpha}_{N-2}, y_{-\alpha}, y_\alpha]$$

üzerinde alırsak $(-2)^{N-2}[x_{-\alpha}, \Psi(x_\alpha)] = 0$ dır ve $[x_{-\alpha}, \Psi(x_\alpha)] = 0$ dır . Son olarak: N tek olduğundan $h\prime = [x_\alpha, x_{-\alpha}]$ ve

$$\alpha(h\prime)^{N-2}x_\alpha = [\underbrace{h\prime, \cdots, h\prime}_{N-3}, x_\alpha, x_{-\alpha}, x_\alpha]$$

üzerinde Ψ alırsak ;

$$\alpha(h\prime)^{N-2}x_\alpha = \left[\underbrace{h\prime, \cdots, h\prime}_{N-3}, \Psi(x_\alpha), x_{-\alpha}, x_\alpha\right] = -\alpha(h\prime)^{N-2}\Psi(x_\alpha)$$

olur. $[x_\alpha, x_\alpha, x_{-\alpha}] \neq 0$ olduğu için $\alpha(h\prime) \neq 0$ olur. Bu durumda $\Psi(x_\alpha) = 0$ dır. Bu nedenle homojen derece γ'nın her N-türevi bir türevdir. □

Bu kısımda uygulamalarındam bir kaç örnek verelim.

1. Schrödinger-Virasoro cebiri

Örnek. *Schrödinger-Virasoro cebri* ***so*** *,* $\mathbb{C}$ *tabanlı* $\left\{L_n, M_n, Y_{n+\frac{1}{2}}, C \mid N \in Z\right\}$ *sonsuz boyutlu bir Lie cebirdir ve aşağıdaki Lie parantezlerine tabidir:*

$$\begin{array}{ll}
[L_m, L_n] = (n-m)L_{n+m} + \delta_{m+n,0}\frac{n3-n}{12}C & [L_m, M_n] = nM_{n+m} \\
[L_m, Y_{n+\frac{1}{2}}] = (n + \frac{1-m}{2})Y_{m+n+\frac{1}{2}} & [Y_{m+\frac{1}{2}}, Y_{n+\frac{1}{2}}] = (n-m)M_{m+n+1} \\
[M_m, M_n] = [M_m, Y_{n+\frac{1}{2}}] = 0 & [\mathbf{so}, C] = \{0\}
\end{array}$$

$Der^{(N)}$(**so**) $=Der$(**so**) dır.

Örnek. *$K = span_{\mathbb{C}}\{L_0, M_1, M_{-1}\}$* ***so*** *'nun altcebri olsun. K, Cartan altcebri* $\boldsymbol{H} = \mathbb{C}L_0$ *olan sonlu olarak üretilen bir Lie cebiridir. Fakat (P) özelliğini sağlamaz.* $\varphi : K \to K$ *lineer dönüşümü öyleki* $\varphi(L_0) = \varphi(M_{-1}) = 0, \varphi(M_1) = M_{-1}$ *olsun* $[L_0, M_1] = M_1$ *üzerinde* φ *yi uygularsak,* φ*, K'nın bir türevi değildir. Fakat* $n \geq 3$*' tek tamsayı ise* φ, K *'nın* N *-türevi dir.*

2. Kac-Moody cebri

$A = [a_{ij}]$ $n \times n$ tipinde bir matris aşağıdaki koşulları sağlıyorsa genelleştirilmiş bir Cartan matrisi denir:

1) $a_{ii} = 2$, $i = 1, ..., n$.

2) a_{ij} , $i \neq j$ için pozitif olmayan tamsayılar .

3) $a_{ij} = 0$ ise $a_{ji} = 0$ dir.

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ matrisi genelleştirilmiş bir Cartan matrisi ve rankı l olsun. $(\eta, \sqcap, \sqcap^{\vee})$ üçlüşüne A'nın gerçeklenişi denirdir, burada η bir $2n-1$ boyutlu karmaşık vektör uzayıdır, $\sqcap = \{\alpha_1, ...\alpha_n\} \subset \eta^*$, $\sqcap^{\vee} = \{\alpha_1^{\vee}, ...\alpha_n^{\vee}\} \subset \eta$ sırasıyla η^* ve η nin doğrusal bağımsız alt kümeleri ve $i, j = 1, ..., n$ için $\alpha_j(\alpha_i^{\vee}) = a_{ij}$ dir .

Tanım 3.46. Kac–Moody cebiri Lie cebiri L dir ve üreteçleri tarafından tanımlanan

$h, e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n$ tarafından üretilen karmaşık bir Lie cebri $L(A)$, A ile ilişkili Kac-Moody cebridir ve bağıntıları

$$\begin{aligned} [e_i, f_j] &= \delta_{ij}\alpha_i^{\vee} \text{ , } (i, j = 1, ..., n) \\ \left[h, h^{'}\right] &= 0 \text{ , } (h, h^{'} \in \eta) \\ [h, e_i] &= \alpha_i(h)e_i \text{ , } (i = 1, ..., n) \\ ad(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) &= ad(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0 \text{ , } (i \neq j) \end{aligned}$$

dır.

$Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_i$ kök kafesi ve $Q^+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{N}\alpha_i$ olsun . Bu durumda ;

$$L(A) = (\bigoplus_{\alpha \in Q; \alpha \neq 0} L_{-\alpha}) \oplus \eta \oplus (\bigoplus_{\alpha \in Q^+; \alpha \neq 0} L_{\alpha})$$

Cartan altcebri η ile ilişkili Q -dereceli Lie cebirdir. Burada

$L_{\alpha} = \{x \in L(A); [h, x = \alpha(h)x] \, ; \text{her } h \in \eta \text{ için } \}$

α ile bağlı bir kök uzayıdır . $\alpha \gneqq 0$ için $L_{\alpha}, [e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{is}]$ (sırasyla $[f_{i1}, f_{i2}, ..., f_{is}]$) formunda elemanların ürettiği uzaydır; öyle ki

$\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + ... + \alpha_{is} = \alpha$ (sırasyla= $-\alpha$) dır gibidir.

1) $L_{\alpha_i} = \mathbb{C}e_i$, $L_{-\alpha} = \mathbb{C}f_i$, $i \in \{1, ..., n\}$

2) $L_{s\alpha_i} = \{0\}$, $i \in \{1, ..., n\}$,$|s| \succ 1$,

3) $[e_i, f_i, e_i] = 2e_i \neq 0$, $[f_i, e_i, f_i] = 2f_i \neq 0$, $i \in \{1, ..., n\}$

4) $[e_{i1}, ..., e_{is}] = [e_{i1}, [e_{i2}, .., e_{is}]]$, $[f_{i1}, ..., f_{is}] = [f_{i1}, [f_{i2}, .., f_{is}]]$; $i_1, .., i_s \in \{1, ..., n\}$, $s \geq 2$.

Sonuç 3.47. *$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ matrisi genelleştirilmiş bir Cartan matrisi $L(A)$ ve*

$$\mathbf{b}^{\pm} = \bigoplus_{\alpha \in Q^+} L_{\pm\alpha}$$

olsun . Bu durumda ,eğer $N \geq 3$ ise ; $Der^{(N)}(L(A)) = Der(L(A))$ ve $Der^{(N)}(\mathbf{b}^{\pm}) = Der(\mathbf{b}^{\pm})$ dır.

İspat. Esas teoreminden elde edilir. □

3.2.2. Lie cebir (α, β, γ) türevleri

Bu bölümdaki kavramlar hakkında ayrıntılı bilgi için Burde (2016) ve Burde (2012) kaynakları incelenebilir.

Tanım 3.48. L, F cismi üzerinde bir Lie cebir olmak üzere. $A \in End(L)$ lineer dönüşümü ve $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda her $x, y \in L$ için

$$\alpha.A.[x, y] = \beta.[Ax, y] + \gamma [x, Ay] \tag{3.19}$$

koşullu sağlanıyorsa A ya (α, β, γ) - türevi denir. L nin (α, β, γ) türevleri uzayı

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = \left\{ \begin{array}{c} A \in End(L) : \\ \alpha.A [x, y] = \beta.[Ax, y] + \gamma [x, Ay] \quad ; \forall\, x, y \in L \end{array} \right\}$$ dir. $D(\alpha, \beta, \gamma)$, $End(L)$'nin alt uzayıdır.

Lemma 3.49. *her $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ için*

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = D(0, \beta - \gamma, \gamma - \beta) \cap D(2\alpha, \beta + \gamma, \gamma + \beta)$$

İspat. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, A \in D(\alpha, \beta, \gamma)$, ve $x, y \in L$ olsun.

$$\alpha.A.[x, y] = \beta.[Ax, y] + \gamma [x, Ay]$$

(2) $\alpha.A.[y, x] = \beta.[Ay, x] + \gamma [y, Ax]$ toplayalım:

$$\begin{aligned} 0 &= \beta.[Ax, y] + \gamma [x, Ay] - \beta.[Ay, x] - \gamma [y, Ax] \\ &= [Ax, y] (\beta - \gamma) - [x, Ay] (\beta - \gamma) \\ &= (\beta - \gamma)([Ax, y] - [x, Ay]) \end{aligned}$$

(3) Çıkaralım:

$$\begin{aligned} 2\alpha.A.[y,x] &= \beta.[Ax,y]+\gamma[x,Ay]-\beta.[Ay,x]-\gamma[y,Ax] \\ &= \beta.[Ax,y]+\gamma[x,Ay]+\beta.[x,Ay]+\gamma[Ax,y] \end{aligned}$$

$2\alpha.A.[y,x]=(\beta+\gamma)(\,[Ax,y]+[x,Ay])$ dır. Bundan dolayı

$$D(\alpha,\beta,\gamma)\subset D(0,\beta-\gamma,\gamma-\beta)\cap D(2\alpha,\beta+\gamma,\gamma+\beta)$$

dır. Tersini (2) ve (3) den elde edilir

$$D(\alpha,\beta,\gamma)=D(0,\beta-\gamma,\gamma-\beta)\cap D(2\alpha,\beta+\gamma,\gamma+\beta)$$

dır. □

Önerme 3.50. *L karmaşık bir Lie cebri ve $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ olsun . Bu durumda $D(\alpha,\beta,\gamma)$, $End(L)$'nin aşağıdaki altuzaylarından birine eşittir.*

a) $D(0,0,0)=End(L)$
b) $D(1,0,0)=\{\varphi\in End(L);\varphi([L,L])=0\}$
c) $D(0,1,-1)=QC(L)$
d) $D(1,1,-1)=D(0,1,-1)\cap D(1,0,0)$
e) $D(\delta,1,1);\delta\in C$
f) $D(\delta,1,0)=D(0,1,-1)\cap D(\delta,1,1)$

İspat. (1) $\beta+\gamma=0$ olsun. Bu durumda ya $\beta=\gamma=0$ yada $\beta=-\gamma\neq 0$

(a) $\beta=\gamma=0$ için $D(\alpha,\beta,\gamma)=D(\alpha,0,0)$

(b) $\beta=-\gamma\neq 0$ için

$$\begin{aligned} D(\alpha,\beta,\gamma) &= D(0,\beta-\gamma,\gamma-\beta)\cap D(2\alpha,0,0) \\ &= D(0,1,-1)\cap D(\alpha,0,0) \end{aligned}$$

ve

$$D(\alpha,1,-1)=D(0,2,-2)\cap D(\mathbf{2}\alpha,0,0)=D(0,1,-1)\cap D(\alpha,0,0)$$

$\Rightarrow D(\alpha,\beta,\gamma)=D(\alpha,1,-1)$ olur. (2) $\beta+\gamma\neq 0$ olsun. Bu durumda ya $\beta-\gamma\neq 0$ yada $\beta=\gamma\neq 0$ a) $\beta-\gamma\neq 0$ için

$$\begin{aligned} D(\alpha,\beta,\gamma) &= D(0,\beta-\gamma,\gamma-\beta)\cap D(2\alpha,\beta+\gamma,\gamma+\beta) \\ &= D(0,1,-1)\cap D(\frac{2\alpha}{\beta+\alpha},1,1) \end{aligned}$$

(5)'e göre $D(\alpha,\beta,\gamma)=D(\frac{\alpha}{\beta+\gamma},1,0)$ dır.

(b) $\beta = \gamma \neq 0$ olsun . Bu durumda $D(\alpha, \beta, \gamma)$ $=$$D(\frac{\alpha}{\beta}, 1, 1)$ olur. Şimdi teoremin olası sonuçlarını parametrenin değeri $\delta \in \mathbb{C}$ yı görelim.

(1) $D(\delta, 0, 0)$**:**

(a) $\delta = 0$ için $D(0, 0, 0)$ $=$$End(L)$

(b) $\delta \neq 0$ için $D(1, 0, 0)$ altuzayı türevsel cebir $L^2 = [L, L]$ yi sıfır vektörle eşleştirir.

$$\begin{aligned} D(1,0,0) &= \{A; End(L); A\,[x,y] = 0, \forall x, y \in L\} \\ &= \left\{A; End(L); A(L^2) = 0\right\} \end{aligned}$$

dır.

(2) $D(\delta, 1, -1)$**:** (a) $\delta = 0$ için :

$$D(0,1,1) = \{A; End(L); [Ax, y] = [x, Ay]\,, \forall x, y \in L\}$$

jordan cebri olur. $D(0, 1, 1) \subset jor(L)$ olur.

(b) $\delta \neq 0$ için

$$\begin{aligned} D(\delta,0,0) &= D(0,1,-1) \cap D(\delta,0,0) \\ &= D(0,1,-1) \cap D(1,0,0) \\ &= D(1,1,-1) \cap D(1,1,-1) \subset jor(L) \end{aligned}$$

olur.

(3) $D(\delta, 1, 0)$ için inceleyelim;

(a) $\delta = 0$ için L vektör uzayının tüm doğrusal öperatörlerinin birleşik bir cebir elde edilir.

$$D(\delta,1,0) = \{A; End(L); A(L) \subset c(L)\}$$

(b) $\delta = 1$ için $D(1, 1, 0)$, $gl(L)$ üzerinde $ad(L)$ nin adjoint temsilidir.

(c) kalan δ değerleri için

$$D(\delta,1,0) = D(0,1,-1) \cap D(2\delta,0,0)$$

olur.

(4) $D(\delta,1,1)$**;**

(a) $D(0,1,1) = \{A; End(L); [Ax,y] = -[x,Ay], \forall x,y \in L\}$

Lie cebiri olur.

(b) $\delta = 1$ için $D(1,1,1) = der(L)$

(c) kalan değerleri için genel olarak $D(\delta,1,1)$ bir Lie cebiridir fakat $End(L)$ nin alt vektör uzayıdır. $\square$

(α,β,γ) türevini tanımladık ve burada $(\alpha,\beta,\gamma) = (1,\delta,\delta),(1,1,0),(0,1,-1)$ durumlarda duracağız.

1) Filippov $\delta-$Türevlerinin uzayı;

$$D(1,\delta,\delta) = \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in End(L): \\ \varphi([x,y]) = \delta[\varphi(x),y] + \delta[x,\varphi(y)]; \forall x,y \in L \end{array} \right\}$$

2) $(1,1,0)-$ türevlerinin uzayı;

$$D(1,1,0) = \{\varphi \in End(L); \varphi([x,y]) = [\varphi(x),y]; \forall x,y \in L\}$$

L nin merkezine eşittir;

$$C(L) = \{\varphi \in End(L); \varphi \circ ad(x) = ad(x) \circ \varphi; \forall x \in L\}$$

dır. Çünkü $\varphi \in D(1,1,0)$ için;

$$\varphi([x,y]) = -\varphi([y,x]) = -[\varphi(y),x] = [x,\varphi(y)]$$

olur .

3) $(0,1,-1)-$türevlerinin uzayı:

$$D(0,1,-1) = \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in End(L): \\ ([\varphi(x),y]) = [x,\varphi(y)]; \forall x,y \in L \end{array} \right\} = QC(L)$$

L'nin quasicentroid adı verilir. L'nin merkezi, $End(L)$'in birleşmeli altcebirdir, öyle ki;

$$[C(L), C(L)]] \subseteq Hom(L/[L, L], Z(L))$$

dır. Özellikle eğer L mükemmel veya merkezsiz ise, $C(L)$ değişmelidir.

Tanım 3.51. L'nin genelleştirilmiş türevlerinin uzayı

$$GDer(L) = \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in End(L) : \exists \top, \sigma \in End(L); \\ \top([x, y]) = [\varphi(x), y] + [x, \sigma(y)] ; \forall x, y \in L \end{array} \right\}$$

L'nin yarı türevlerinin uzayı

$$QDer(L) = \left\{ \begin{array}{c} \varphi \in End(L) : \exists \top \in End(L); \\ \top([x, y]) = [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)] ; \forall x, y \in L \end{array} \right\}$$

ile tanımlanır.

Görebilinir ki:

$$ad(L) \subseteq Der(L) \subseteq QDer(L) \subseteq GDer(L) \subseteq End(L)$$

ve

$$\begin{aligned} QDer(L) + QC(L) &= GDer(L) \\ Der(L) + C(L) &\subseteq QDer(L) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.52. *1) L karmaşık bir merkezsiz ve tam Lie cebri olsun. Bu durumda* $QC(L) = C(L)$ *ve* $GDer(L) = QDer(L)$ *dir. Burada* $Z(L) = 0$ *ve* $[L, L] = L$ *dir.*

2) L karmaşık bir bir basit Lie cebir olsun. Bu durumda $D(0, 1, -1) = QC(L) = C(L) = C.id$ *dir.*

3) L nin karmaşık bir basit lie cebri ve derecesi en az iki olsun. Bu durumda $QDer(L) = ad(L)C.id$ *dir.*

İspat. (Burde 2016). □

Önerme 3.53. $L = sl(2, C)$ *için* $Der(L) = End(L)$ *dir.*$[e, f] = h$, $[h, e] = 2e$ *ve* $[h, f] = -2f$ *olacak şekilde* (e, f, h)*,* $sl(2, C)$ *'nin standart tabanı olsun. Bu durumda* $\varphi \in End(L)$ *ve* $\varphi = (x_{ij})$ *olsun ve* $\top \in End(L)$

$$\top = \begin{bmatrix} x_{11} + x_{33} & -x_{12} & -2x_{32} \\ -x_{21} & x_{22} + x_{33} & -2x_{31} \\ \frac{-x_{23}}{2} & \frac{-x_{13}}{2} & x_{11} + x_{22} \end{bmatrix}$$

ile tanımlasın.

$$\top([a, b]) = [\varphi(a), b] + [a, \varphi(b)]$$

sağlanır ve her $x, y \in L$ ve her $\varphi \in End(L)$ bir yarı türevidir.

Teorem 3.54. *n , $sl(2, C)$'nin kopyalarının direkt bir toplamı olmayan yarıbasit bir Lie cebri olsun. Bu durumda bazı $z \in n$ ve $\lambda \in C$ için*

$$x.y = \{\{z, x\}, y\} + \lambda \{x, y\}$$

(L, n) üzerinde bir Post Lie cebir yapısıdır . O halde ne $x.y = 0$ ve $[x, y] = \{x, y\}$ ne de $x.y = -\{x, y\}$ ve $[x, y] = -\{x, y\}$ dir.

İspat. $x.y = \{\varphi(x), y\}$; $\varphi(x) = \{z, x\} + \lambda x$ alalım. Bu durumda $x.y$, (L, n) üzerinde bir Post-Lie cebir yapısı ancak ve ancak her $x, y \in n$ için

$$\begin{aligned} \{\varphi(x), y\} + \{x, \varphi(y)\} &= [x, y] - \{x, y\} \\ \varphi([x, y]) &= \{\varphi(x), \varphi(y)\} \end{aligned}$$

koşullarini sağlardır. O halde

$$\begin{aligned} [x, y] &= \{z, \{x, y\}\} + (2\lambda + 1)\{x, y\} \\ \{\{z, x\}, \{z, y\}\} &= \{z, \{z, \{x, y\}\}\} + (2\lambda + 1)\{z, \{x, y\}\} + (\lambda^2 + \lambda)\{x, y\} \end{aligned}$$

$ad(z)(x) = \{z, x\}$'nin adjoint operatörleri ve $x = z$ alırak önceki özdeşlikten

$$ad(z)^3 + (2\lambda + 1)ad(z)^2 + (\lambda^2 + \lambda)ad(z) = 0$$

olur ve $ad(z)$ 'nin minimum polinomu

$$t^3 + (2\lambda + 1)t^2 + (\lambda^2 + \lambda)t = t(t + \lambda + 1)(t + \lambda)$$

yi böler . Bu nedenli $ad(z)$ 'nin mümkün özdeğerleri 0 , $-\lambda - 1$ ya da $-\lambda$ dir .

1. durum : $\lambda = 0$ dır. n yarı-basit olduğundan $tr(ad(z)) = 0$ dır. Şimdi $sd(z)$ nin tüm özdeğerleri 0 ve bazı $m \geq 1$ için $ad(z)^m = 0$ olduğundan $ad(z)^3 = -ad(z)^2$ dir. $ad(z)^2 = ... = \pm ad(z)^m = 0$ olduğunu sanırım. Bu durumda z bir savdviçtir. Jakobi özdeşliğinden her $x \in n$ için $ad(z)ad(x)ad(z) = 0$ dır. Bu durumda $(ad(z)ad(x))^2 = 0$ dır. O halde er $x \in n$ için killing form $tr(ad(z)ad(x)) = 0$ dır. Bu form degenere olmadiği için $z = 0$ dır. Bu durumda $\varphi = 0$ve $x \cdot y = 0$ dır.

2. durum: $\lambda = -1$. $tr(ad(z)) = 0$ olduğunan $ad(z)$ nin tüm özdeğerleri sıfırdır. öneki gibi $z = 0$ ve $ad(z)^3 = ad(z)^2$ dır. Bu durumda $\varphi = -id$ ve $x \cdot y = -\{x, y\}$ dir.

3. durum: $\lambda \neq 0, -1$ sanırımki $ad(z)$ nin 3 özdeğeri vardır. Bunlar $0, -\lambda, -1-\lambda$ dır. minimum polinom direkt faktörlerle $t(t+\lambda+1)(t+\lambda)$ olsun . $ad(z)$ köşegenleştirilebilirdir. Bu durumda $0 = \alpha + \beta = -\lambda - 1 - \lambda$ dır. O halde $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\alpha = -\beta = \frac{1}{2}$ ve $n = V_0 \oplus V_{\frac{1}{2}} \oplus V_{-\frac{1}{2}}$ dır. $x, y \in V_0$ için $\{z, x\} = \{z, y\} = 0$ ve $(\lambda_2 + \lambda)\{x, y\} = 0$ dır. varsayımla $\{x, y\} = 0$ dır. Bu durumda $\{V_0, V_0\} = 0$ dır. Önceki lemmadan $\left\{V_{\frac{1}{2}}, V_{\frac{1}{2}}\right\} = \left\{V_{\frac{-1}{2}}, V_{\frac{-1}{2}}\right\} = 0$ dır. n , V_0, V_α, V_β nin direkt toplamı olduğundan $n = sl(2,\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus sl(2,\mathbb{C})$ dır. □

Önerme 3.55. *Let $n = sl(2,\mathbb{C})$ ve bazı $z \in n, \lambda \in \mathbb{C}$ için $x \cdot y = \{\{z, x\}, y\} + \lambda\{x, y\}$, (L, n) üzerinde bir post-Lie cebir yapısı olsun. O halde aşağı durumlardan biridir*

(a) $z = 0, \lambda = 0, x \cdot y = 0$ ve $[x, y] = \{x, y\}$.

(b) $z = 0, \lambda = -1, x \cdot y = -\{x, y\}$ ve $[x, y] = -\{x, y\}$.

(c) $z \neq 0, \lambda = -\frac{1}{2}, x \cdot y = \{\{z, x\}, y\} - \frac{1}{2}\{x, y\}$ ve $[x, y] = \{\{z, x\}, y\}$

L lie cebri $r_{3,1}(\mathbb{C})$ ye izomorftur.

İspat. Önceki teoreminden 3. durumdan $\lambda = \frac{-1}{2}$ ise ,

$$x.y = \{\{z, x\}, y\} - \frac{1}{2}\{x, y\}$$

alırsak $z = \alpha e + \beta f + \gamma h$ yazabilirz. Kolay bir hesaplama, bu ürünün (L, n) üzerinde bir post-Lie cebir yapısı olduğunu gösterir ancak ve ancak $\frac{\alpha\beta+\gamma^2}{16} = 1$ dir . Özellikle $z \neq 0$ için L 'nin öperatörleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
[e, f] &= -2\alpha e + 2\beta f \\
[e, h] &= -4\gamma e + 2\beta h \\
[f, h] &= -4\gamma f + 2\alpha h
\end{aligned}$$

olur. □

4. SONUÇ

Post-Lie cebirler, posetlerin parçalanış homologileri ile ilişkili olarak Valette tarafından tanıtılmış ve üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Pre-Lie cebirler özellikle geometri ve fizik gibi birçok alanda önemli rol oynar. Bir post-Lie cebir, pre-Lie cebrin bir genellemesidir. Lie cebir çifti (L, n) için post-lie cebir yapısı incelenmiş ve cebirlerden birinin yarıbasit, çözülebilir olması durumlarında post-lie cebir çiftinin varlığı üzerinde durulmuştur.

Eğer $Der(\eta) = ad(\eta)$ ve $C(\eta) = 0$ ise η ye tam Lie cebri denir.

$x.y$, (g, η) bir post -Lie cebir yapısı olmak üzere . η tam bir Lie cebir olsun . Bu durumda $x.y = \{\varphi(x), y\}$ olacak şekilde $\varphi : V \to V$ lineer dönüşümü vardır ve $L(x) = ad(\varphi(x))$ sağlanır.

(g, η) çift Lie cebri olmak üzere $\lambda \notin \{0, 1\}$ olsun . Bu durumda $x.y = \lambda. [x, y]$, (g, η) üzerinde bir bir post- Lie cebir yapısı ancak ve ancak $\{x, y\} = (1 - 2\lambda). [x, y]$ g ve η nilpotent ve sınıfları en fazla sıfırdır.

(g, n) üzerinde bir Post-Lie cebir yapısı olduğunu varsayalım , Eğer n çözülebilir ve nilpotent değil ise , g mükemmel değildir.

$x.y$, (g, n) üzerinde bir post-Lie cebir yapısı olmak üzere g ve n basittir. Bu durumda ya $x.y = 0$ ve her x, y için $[x, y] = \{x, y\}$ ya da $x.y = [x, y] = -\{x, y\}$ dir .

Yarıbasit L, çözülebilir n için (L, n) üzerinde post-lie cebir yapısı yoktur. Yarıbasit n, çözülebilir L için post-Lie cebir yapısı oluşturulabilir. Diğer yandan yarıbasit n ve çözülebilir, unimodüler L için post-Lie cebir yapısı yoktur. Ayrıca $(\alpha, \beta, \gamma)-$türev kavramı ve özellikleri incelenmiştir. Genelleşmiş türevler kullanılarak post-Lie cebir yapısı sınıflandırılabilir.

N-türev kavramı, türev ve 3-lü türev kavramının doğal bir genellemesedir. L sonlu boyutlu bir Cartan altcebir tarafından derecelendirilmiş bir Lie cebir olsun. L nin türev cebri ile N-türev cebrinin çakışması için yeterli koşul incelenmiştir. L, aşikar olmayan sonlu boyutlu bir Cartan alt-cebri H tarafından derecelendirilmiş, sonlu olarak üretilen bir Lie cebri olsun. H^*, H 'nin dual uzayı olsun. $\alpha \in H^*$ için ,

$$L_\alpha = \{x \in L; [h, x] = \alpha(h)x \text{ her } h \in H \},$$

L_α, α ile ilişkilendirilmiş kök uzayı

$$R = \{\alpha \in H^*; L_\alpha \neq \{0\}\}$$

olsun, R'ye L'nin H ile ilgili kök sistemi denir. Bu durumda $L = \bigoplus_{\alpha \in R} L_\alpha$ ve $L_0 = H$

olur. $R^{\times} = \{\alpha \in R; \alpha \neq 0\}$ ve $R_{\pm} = \{\alpha \in R^{\times}; -\alpha \in R\}$ kümelerini dikkate alalım. L, F üzerinde bir Lie cebir olmak üzere $\alpha \in R_{\pm}$ ve her $x_\alpha \in L_\alpha$ için :

(P$_1$) $x_\alpha = [y_{\alpha-\beta}, y_\beta]$, $y_{\alpha-\beta} \in L_{\alpha-\beta}$ ve $y_\beta \in L_\beta$ için ;$\beta \notin \{0, \alpha\}$.

(P$_2$) $[x_\alpha, x_\alpha, x_{-\alpha}] \neq 0$ dır. $x_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$ için $[x_\alpha, x_\alpha, x_\alpha] = 0$ dır. Koşullardan biri sağlıyora L ye (P) özelliğini sağlayan bir cebirdir denir.

L, trivial olmayan sonlu boyutlu bir Cartan alt-cebri H ile sonlu olarak üretilen bir Lie cebri ve $N \geq 3$ pozitif bir tamsayı olsun. Eğer N çift veya L, (P) yi sağılıyorsa, $Der^{(N)}(L) = Der(L)$ olur.

Uygulama olarak Schrödinger-Virasora cebir, Kac-Moody cebirler verilebilir.

L'nin yarı türevlerin uzayı $QDer(L)$, genelleştirilmiş türevleri uzayı $GDer(L)$ olmak üzere,

1) L karmaşık bir merkezsiz ve tam Lie cebri ise $QC(L) = C(L)$ ve $GDer(L) = QDer(L)$ dir. Burada $Z(L) = 0$ ve $[L, L] = L$ dir.

2) L karmaşık bir bir basit Lie cebir ise, $D(0, 1, -1) = QC(L) = C(L) = C.id$ dir.

3) L karmaşık bir basit lie cebri ve derecesi en az iki ise $QDer(L) = ad(L)C.id$ dir.

L karmaşık bir Lie cebri ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ olsun . Bu durumda $D(\alpha, \beta, \gamma)$, $End(L)$'nin $D(0, 0, 0)$, $D(1, 0, 0)$, $D(0, 1, -1)$, $D(1, 1, -1)$, $D(\delta, 1, 1)$, $D(\delta, 1, 0)$ altuzaylarından birine eşittir.

5. KAYNAKLAR

ALEXANDER, S. B., BERG, I. D., and BİSHOP, R. L. 1993. Geometric curvature bounds in Riemannian manifolds with boundary. *Transactions of the American Mathematical Societ*y, 339(2): 703-716.

AYUPOV, S. and KUDAYBERGENOV, K. 2016. Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 493:381–398.

BAKHTURIN, Y. A. 1985. Identities in Lie Algebras Nauka, Moscow. VNU Science Press, Utrecht.

BURDE, D. 2006. Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics. *Central European Journal of Mathematics,* 4(3): 323–357.

BURDE, D., DEKİMP, K. and DESCHAMPS, S. 2009. Affine actions on nilpotent Lie groups. *Forum Math,* 21(5): 921–934.

BENEŠ, T. and BURDE, D. 2009. Degenerations of pre-Lie algebras. *Journal of Mathematical Physics*, 50(11):112102.

BURDE, D., DEKIMPE, K. and VERCAMMEN, K. 2012. Affine actions on Lie groups and post-Lie algebra structures. *Linear Algebra and its Applications*, 437(5):1250–1263.

BURDE, D. 2016. Derivation double Lie algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*, 15(6):1650114.

CAHN, R. N. 2014. Semi-simple Lie algebras and their representations. Courier Corporation.

COHEN, A. M., IVANYOS, G. and ROOZEMOND, D. 2008. Simple Lie algebras having extremal elements. *Indagationes Mathematicae*, 19(2):177-188.

ERDMANN, K. and WILDON, M.J. 2006. Introduction to Lie algebras. Springer.

GALLIAR, J. 2012. Notes on differential geometry and Lie groups. University of Pennsylvannia.

GONZALEZ, F. B. 2007. Lie Algebras.

https://pdfs.semanticscholar.org/eff6/6cd27f16ab06f900f860d73e5ce837705a07.

JACOBSON, N.1962. A note on automorphisms of Lie algebras. *Pacific J. Math*. 12(1): 303–315.

KIRILLOV, A. 2008. An introduction to Lie groups and Lie algebras. Cambridge University Press, 113.

KOSMANN-SCHWARZBACH, Y. 2009. Groups and symmetries: from finite groups to lie groups. Springer.

KUTSAL B. 2005. İstisnai Lie Gruplarının Self Homotopi Gruplarının Demeti, Ankara Üniversitesi, Ankara.

LIAN, H. and CHEN, C. 2016. N-Derivations for Finitely Generated Graded Lie Algebras. *Algebra Colloquium*, 23: 205–212.

SEMOV-TYAN-SHANSHII, M. A. 1983. What is a classical R-matrix? *Functional. Analysis and Applications* 17(4): 17–33.

SEZGIN, M. 1998. SU (2) ve SU (1, 1) gruplarıyla bağlantı integrallenebilir kuantum sistemler. Trakya Üniv. YL tezi.

VASJA SUSIC. 2011. Classification of Semisimple Lie Algebras. University of Ljubljana. Seminar for symmetric in Physics. 10-14. http://www-f1.ijs.si/~ziherl/Susic11.

ÖZGEÇMİŞ

Mohammad ZMMO , 1988 yılında Suriyenin Lazkiye şehirin'de doğdu. İlk, orta ve Lise öğrenimini Lazkiye'de tamamladı. 2006 yılında girdiği Tişrin üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2010 yılında birinci olarak mezun oldu. 2011 yılında Tişrin üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve ve Yüksek Lisans öğrenimine başladı . Suriye savaşından dolayı 2012 yılı'nda öğrenimini ve görevini bırakıp Türkiye'ye geldi. Türkiyedeki mülteci Suriyelilerin Kamplarında hem Matematik öğretmeni hem de Okul müdürü olarak çalıştı. Eylul 2013 yılında Türkçe öğrenmeye başladı ve Haziran 2014 yılında bitirdi. Eylül 2014 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı . Hatay-Yayladağı ilçesi Umut Geçici Eğitim Merkezinde Matematik öğretmeni ve Okul müdürü olarak gönüllülü çalışmasına devam etmektedir. Mohammad ZMMO evli ve iki çocuk babasıdır.