T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR GRUP İLE MODÜL VE HALKA KARAKTERİZASYONU

Mehmet UC

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2017

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR GRUP İLE MODÜL VE HALKA KARAKTERİZASYONU

Mehmet UC

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 17/03/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ

Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE

Yrd. Doç. Dr. Semail ÜLGEN

Yrd. Doç. Dr. Seçil ÇEKEN

ÖZET

BİR GRUP İLE MODÜL VE HALKA KARAKTERİZASYONU

Mehmet UC

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Mart 2017, 62 sayfa

Bu tezin amacı, değişmeli bir halka üzerinde tanımlı bir modülü, modülün endomorfizma halkası yardımıyla, sonlu bir grup üzerinde tanımlı grup halkasının bir modülü yapmamızı sağlayan bir yapı geliştirmektir ve bu yapı sayesinde tanımlanan kavramlarla modül ve halka karakterizasyonları ile özel tanımlı bazı modül sınıflarının birbirleriyle karşılıklı ilişkilerini belirlemektir. Ayrıca, grup modüllerin altmodül karakterizasyonunu ve altmodüllerine ayrışımını tespit etmektir.

Tez çalışmamızın giriş bölümünde, halka ve modül teorisinin kullanacağımız temel bazı kavramları ve teorileri verilmiştir. Grup halkası, grup halkaları üzerinde tanımlı modül, grup modül kavramları ve bu kavramlarla ilgili literatürde yer alan tez çalışmamızın tartışma ve bulgular bölümünde kullanılacak sonuçlar, kuramsal bilgiler ve kaynak taramaları bölümünde anlatılmıştır. Tezimizdeki özgün çalışmaların anlatıldığı tartışma-bulgular bölümü ise üç altbölümden oluşmaktadır. Birincisi, "Sonlu Grup Üzerinde Tanımlı RG–Modüller, Maschke Teoremi"; ikincisi, "Sonlu Grup Üzerinde Tanımlı RG–Modüllerin Sokulu"; üçüncüsü ise "Grup Modüllerin Altmodül Karakterizasyonu ve Altmodüllerine Ayrışımıdır".

"Sonlu Grup Üzerinde Tanımlı RG–Modüller, Maschke Teoremi" başlığı altında, tezimizin ilk temel amacı olan, değişmeli bir halka üzerinde tanımlı bir modülü, modülün endomorfizma halkası yardımıyla, sonlu bir grup üzerinde tanımlı grup halkasının bir modülü yapmamızı sağlayan yapı anlatılmıştır ve bu yapı ile ilgili örnekler verilmiştir. Daha sonra, bu yapı sayesinde modüllerin, halkanın ve grup halkasının modülleri olarak, radikalleri arasındaki ilişkiler incelenmiş; injektiflik ve projektiflikleri ile ilgili karakterizasyonları yapılmıştır. Son olarak, modüllerin injektiflik ile ilgili karakterizasyonları yardımıyla Maschke Teoremi için alternatif bir ispat verilmiştir. "Sonlu Grup Üzerinde Tanımlı RG–Modüllerin Sokulu" başlığı altında, halkanın ve grup halkasının modülleri olarak, modüllerin basit altmodülleri ve sokulları arasındaki ilişkiler geliştirdiğimiz yapı sayesinde incelenmiştir. Son olarak, grup modüllerin altmodül karakterizasyonları belirlenmiştir. Ayrıca, grup modüllerin altmodüllerine ayrışımı, grup halkalarının althalkalarına ayrışımında kullanılan kavramlar grup modüllere uyarlanarak grup modüller üzerinde elde edilen yeni ve benzer kavramlar yardımıyla yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Grup Halkası, Grup Modül, İnjektif Modül, Projektif Modül, Radikal, Sokul, Yarı-basit Modül.

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ALKAN (Danışman)
Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ
Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE
Yrd. Doç. Dr. Semail ÜLGEN
Yrd. Doç. Dr. Seçil ÇEKEN

ABSTRACT

CHARACTERIZATION OF MODULES AND RINGS WITH THE AID OF A GROUP

Mehmet UC

PhD Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
March 2017, 62 pages

The objective of the thesis is to define a structure for a module over a commutative ring to make it a module over the group ring of a finite group by the endomorphism ring of the module, and to study the relations between the properties of some class of modules over the commutative ring and some class of modules over the group ring by the characterization on modules and rings via the notions defined on the structure. In addition, another objective of the thesis is to determine the characterization of submodules of a group module by a module over a group ring and the decomposition of the group module into its submodules for a finite group.

In the introductory chapter of the thesis, some notions and theories on the ring and the module theory which will be used in the subsequent chapters is given as preliminary information. Group ring, group module, the properties of modules over a group ring and the theories on these notions in the literature used for our discussion and results in the thesis are given in the chapter for the theoretical information and the literature review. The chapter for the discussion-results where our original studies told consist of three sections. The first section is entitled "RG–Modules Defined over a Finite Group, Maschke's Theorem"; the second section is "The Socle of the RG–Modules Defined over a Finite Group"; the third section is "Submodule Characterization and Decomposition of Group Modules".

Under the title of "RG–Modules Defined over a Finite Group, Maschke's Theorem", a structure is defined for a module over a commutative ring to make it a module over the group ring of a finite group by the endomorphism ring of the module, and this is the first main purpose of our thesis as told before. Moreover, some examples concerning this structure is given in this chapter. After that, the relations between the radicals of modules, the characterization of injective and projective modules, as modules of not only the ring but also the group ring, is studied by this structure. An alternative proof of Maschke's Theorem is given by the results obtained on the characterization of injective and projective modules. Under the title of "The Socle of the RG–Modules Defined over a Finite Group", the simple submodules and the socle of the modules defined on the structure is investigated as modules of not only the ring but also the group ring. Lastly, the submodule characterization of group modules is studied and the decomposition of group modules into their submodules is determined by adapting the analogous notions and theories used for the decomposition of group rings into their subrings.

KEYWORDS: Group Ring, Group Module, Injective Module, Projective Module, Radical, Socle, Semisimple Module.

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ALKAN (Supervisor)
Assoc. Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ
Assoc. Prof. Dr. Gültekin TINAZTEPE
Asst. Prof. Dr. Semail ÜLGEN
Asst. Prof. Dr. Seçil ÇEKEN

ÖNSÖZ

Grup halkaları teorisi birçok cebirsel teorinin birleşme noktasıdır. Özellikle grup teorisinin ve halka teorisinin önemli sonuçlarının birleştirilmesini sağlamıştır. Bu sonuçlar ise grup temsilleri ve grup karakterleri teorisi, Green ve Mackey funktor teorileri gibi cebirsel alanların gelişmesinde merkezi rol oynamıştır. Grup halkaları teorisi ve grup halkarı üzerinde tanımlı modüller son yıllarda zorlu sorular ortaya koymuş ve cebirsel birçok iyi soruya cevap vermiştir. Böylece, grup halkaları cebirin cebirsel topoloji ve homolojik cebir gibi alanları için önem kazanmıştır. Bu nedenle, grup halkaları teorisinin geliştirilecek, genişletilecek ve matematiğin diğer alanları ile ilişkilendirilecek konuları ve yeni sonuçları vardır.

Grup halkaları ve grup halkaları üzerinde tanımlı modüller teorisinde halka, grup ve modül arasındaki ilişkiler incelenerek cebirsel kavramların birçok karakterizasyonu bugüne kadar yapılmıştır. Ayrıca, birimli bir halka üzerinde tanımlı bir modül, bir grup üzerinde bir "grup modül"e genişletilerek ve böylece grup halkası üzerinde tanımlı bir modül yapılarak grup halkalarında ve grup halkaları üzerinde tanımlı modüllerde bilinen bazı kavramlar ve sonuçlar da; örneğin, projektif, injektif, yarı-basit, regüler modül ve Maschke Teoremi gibi; incelenmiştir. Bu tez çalışmasında ise birimli değişmeli halka üzerinde tanımlı bir modülü, genişletmeden, modülün endomorfizma halkası yardımıyla bu halkanın sonlu bir grup üzerindeki grup halkası üzerinde tanımlı modül yapmamızı sağlayan bir yapı tanımlanmıştır. Halkalar ve grup halkaları ile modül teorisinde tanımlanan kavramlar, bazı özel tanımlı modüller ve grup halkaları teorisi için temel bazı teoriler bu yapı ile çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlar sayesinde halka ve grup halkası üzerinde tanımlanan modüllerin ve altmodüllerin arasındaki ilişkiler incelenmiştir ve bu modüllerin karakterizasyonu yapılmıştır. Bundan başka, grup modülün bölüm modülü ve ilgili modülün bölüm modülü arasındaki ilişki ve grup modüllerin altmodüllerinin bazı özellikleri araştırılmış; grup modüllerin altmodüllere ayrışımı üzerinde çalışılmıştır. Bu tez çalışması, grup halkaları, grup halkaları üzerinde tanımlı modüller ve grup modülleri konularının gelişimine katkıda bulunacaktır.

Tez çalışmam boyunca yaptığım tüm çalışmalarda bilgisini, deneyimlerini ve zamanını benimle paylaşan ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa Alkan'a ve akademik çalışmalarımdaki yardımlarından dolayı Sayın Prof. Dr. Yılmaz Şimşek'e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler:

$\subset$	Kapsama
$\subsetneq$	Kesin olarak kapsama
M_R	Sağ R-modül
${}_RM$	Sol R-modül
$\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$	M_i modüllerinin direkt toplamı
$\prod\limits_{i\in I} M_i$	M_i modüllerinin direkt çarpımı
$M_n(D)$	D halkası üzerindeki $n \times n$ tipinde matrisler halkası
$H \leq G$	H, G'nin altgrubu
$H \trianglelefteq G$	H,G'nin normal altgrubu
$\|H\|$	H grubunun mertebesi
$N \leq M$	N, M'nin altmodülü
$N \leq_e M$	N, M'nin esas altmodülü
$N << M$	N, M'nin atık altmodülü
$N <<_{RG} M$	N, M'nin RG–modül olarak atık altmodülü
$\mathcal{S}(G)$	G grubunun tüm altgruplarının kümesi
e	Bir grubun birim elemanı
$l_M(I)$	$I \subseteq R$'nin M'deki sol sıfırlayanı
1_R	R halkasının birimi
1_Re	RG grup halkasının birimi
RG	R'nin G üzerindeki grup halkası
MG	RG üzerinde M tarafından G'nin grup modülü
$(MG)_{RG}$	RG–modül olarak MG
$(MG)_R$	R–modül olarak MG
$\dim_R M$	M'nin R–modül olarak boyutu
$\varphi \|_X$	φ fonksiyonunun X üzerine kısıtlanışı
$Çek\ f$	f homomorfizmasının çekirdeği
$Gör\ f$	f homomorfizmasının görüntüsü
$Hom_R(M,N)$	M'den N'ye R-modül homomorfizmalarının kümesi
End_RM	M modülünün R–endomorfizmalarının halkası
$Rad_R(M)$	M modülünün R–modül olarak radikali
$Soc_R(M)$	M modülünün R–modül olarak sokulu
$char(R)$	R halkasının karakteristiği
ε_R	Augmentasyon fonksiyon
$\triangle(RG)$	RG grup halkasının augmentasyon ideali
ε_M	$MG \longrightarrow M$, $\sum\limits_{g\in G} m_g g \longmapsto \sum\limits_{g\in G} m_g$ tanımlı homomorfizma
$\triangle(MG)$	$Çek\ \varepsilon_M$
$\mathbb{N}$	Negatif olmayan tamsayıların kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayıların kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi

1. GİRİŞ

Tez çalışmamızın esas iki bölümü olan Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taramalar ile Bulgular-Tartışma bölümlerinde kullanılacak olan halka ve modül teorisinin bazı temel tanım ve sonuçları bu bölümde verilecektir. Bu bölümde verilen bilgiler Anderson ve Fuller (1992), Lam (1991), Wisbauer (1991), Milies ve Sehgal (2002), Fethi Çallıalp (2009) kaynaklarından alınmıştır ve verilen bilgilerin yanına hangi kaynaktan alındığı yazılmıştır. Ayrıca, değinilmeyen tanım ve sonuçlar için bu kaynaklara başvurulabilir.

Bu tez çalışması boyunca aksi belirtilmedikçe R bir birimli değişmeli halka olarak alınmıştır ve halkanın birimi 1_R ile gösterilmiştir; modüller ise birimsel (unitary) modüller olarak kabul edilmiştir. G bir grubu göstermek üzere bir sonlu grup olarak kabul edilecek ise bölümler içinde ifade edilecektir. e, G grubunun birimini göstermektedir. 1_Re grup halkası RG'nin birimini göstermektedir, gerekli bölümlerde 1_Re yerine 1 kullanılmıştır. "$\leq$" sembolü, gruplar için G bir grup olmak üzere H, G'nin bir altgrubu ise $H \leq G$ olarak; modüller için M bir modül olmak üzere N, M'nin bir altmodülü ise $N \leq M$ olarak kullanılmıştır. "$\trianglelefteq$" sembolü, gruplar için G bir grup olmak üzere H, G'nin bir normal altgrubu ise $H \trianglelefteq G$ olarak; idealler için R bir halka olmak üzere I, R'nin bir ideali ise $I \trianglelefteq R$ olarak kullanılmıştır. M, R üzerinde bir sol modül ise ${}_RM$, bir sağ modül ise M_R ile gösterilmiştir. Regüler sol (sağ) R–modül ise ${}_RR$ (R_R) ile gösterilmiştir.

Bir homomorfizma örten ise bu homomorfizmaya epimorfizma, bire-bir ise monomorfizma, hem örten hem bire-bir ise izomorfizma denir. $Hom_R(M,N)$, M'den N'ye R-modül homomorfizmalarının kümesini göstermektedir. M, RG–modül ise End_RM, M'nin R–endomorfizmalarının halkasını; $End_{RG}M$, RG–endomorfizmaların halkasını göstermektedir.

1.1. Direkt Toplam, Projeksiyon ve Eşkare Endomorfizmalar

Direkt toplam ve direkt toplanan kavramları modüllerin ayrışımı teorisinde önemli yer tutar. Bu altbölümde direkt toplamın, direkt toplananın, projeksiyonun ve eşkarelerin tanımları ve bazı özellikleri üzerinde durulacaktır. Çalışmamızın sonraki bölümlerinde yarı-basit modülleri ve halkaları, özellikle grup halkaları üzerinde tanımlı yarı-basit modülleri ve grup modüllerin ayrışımını, incelerken bu kavramlar sıkça kullanılacaktır. Bu bölümde verilen

Tanım 1.1.1 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R–modül, M_1 ve M_2, M'nin R–altmodülleri olsun. $M_1 \times M_2$, M_1 ve M_2'nin kartezyen çarpımını göstersin. $M_1 \times M_2$'den M'ye bir kanonik R–homomorfizma $i : M_1 \times M_2 \longrightarrow M$, $i : (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$, $((x_1, x_2) \in M_1 \times M_2)$ vardır. Eğer i bir izomorfizma ise $M = M_1 + M_2$ ve $M_1 \cap M_2 = 0$ koşullarını sağlayan R–modül M'ye M_1 ve M_2'nin direkt toplamı denir ve $M = M_1 \oplus M_2$ olarak yazılır. M_1 ve M_2'ye M'nin direkt toplananları ve M_1 ve M_2'ye birbirlerinin direkt tümleyeni denir.*

Bu tanımdan dolayı, $M = M_1 \oplus M_2$'dir ancak ve ancak her $x \in M$ için $x = x_1 + x_2$ olacak şekilde bir tek $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ vardır. Bir R–modül M'nin tüm altmodülleri böyle bir direkt toplamda görünmek zorunda değildir. Diğer yandan, bütün altmodülleri direkt toplanan olan modüller ilgi çekicidir. Bu özellikte ki modüller üzerinde sonraki bölümlerde durulacaktır.

Lemma 1.1.2 *(Anderson ve Fuller 1992) M ve N, R–modüller olsun. $f : M \longrightarrow N$ ve $f' : N \longrightarrow M$ birer R–homomorfizma ve $ff' = 1_N$ ise f bir epimorfizma, f' bir monomorfizmadır ve $M =$Çek $f \oplus$ Gör f'dir.*

Tanım 1.1.3 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R–modül, K ve K', M'nin R–altmodülleri ve $M = K \oplus K'$ olsun. $p_K : M \longrightarrow K$, $p_K : k + k' \longmapsto k$, $(k \in K, k' \in K')$ ile ifade edilen R–epimorfizmasına M'nin K üzerindeki K' boyunca projeksiyonu denir.*

Teorem 1.1.4 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R–modül olmak üzere $M = K \oplus K'$ ise M'nin K üzerinde K' boyunca projeksiyonu, $(p_K \mid K) = 1_K$ ve Çek $p_K = K'$'yi sağlayan tek $M \xrightarrow{p_K} K \longrightarrow 0$ epimorfizmasıdır.*

Eğer p_K, M'nin K üzerindeki K' boyunca projeksiyonu ise p_K, $p_K : m \longmapsto m - p_K(m)$, $(m \in M)$ ile karakterize edilebilir. Ayrıca, genel olarak, bir modülün bir direkt toplananının birçok direkt toplanan tümleyeni vardır; projeksiyon bunların faydalı bir karakterizasyonunu sağlar.

Tanım 1.1.5 *(Anderson ve Fuller 1992) R bir halka olsun.*

(1) $f \in R$ ve $f^2 = f$ ise f'ye R'de bir eşkare (idempotent) denir.

(2) $f \in R$ bir eşkare olsun. Her $x \in R$ için $fx = xf$ ise f'ye merkezi eşkare (central idempotent) denir.

(3) f_1 ve $f_2 \in R$ iki eşkare olsun. Eğer $f_1 f_2 = 0 = f_2 f_1$ ise f_1 ve f_2'ye dik eşkareler (orthogonal idempotents) denir.

(4) $0 \neq f \in R$ bir eşkare ve $f = f_1 + f_2$ olacak şekilde her f_1, f_2 dik eşkare çifti için $f_1 = 0$ veya $f_2 = 0$ oluyorsa f'ye ilkel eşkare (primitive idempotent) denir.

Teorem 1.1.6 *(Anderson ve Fuller 1992) $M = K \oplus K'$, M'nin K üzerinde K' boyunca projeksiyonu p_K ve L, M'nin bir R–altmodülü olsun. O halde, $M = L \oplus K'$'dir ancak ve ancak $(p_K \mid L) : L \longrightarrow K$ bir izomorfizmadır.*

Lemma 1.1.7 *(Anderson ve Fuller 1992) f $End_R({}_RM)$'de bir eşkare eleman olsun. $1 - f$, $End_R({}_RM)$'de*

$$\begin{aligned} \text{Çek } f &= \{x \in_R M : x = x(1-f)\} = \text{Gör } (1-f) \\ \text{Gör } f &= \{x \in_R M : x = xf\} = \text{Çek } (1-f) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir eşkaredir ve $M = Mf \oplus M(1-f)$'dir.

Teorem 1.1.8 *(Anderson ve Fuller 1992) $_RM = K \oplus K'$ ise $K = Mf_K$ ve $K' = M(1 - f_K)$ olacak şekilde bir tek $f_K \in End(_RM)$ eşkare elemanı vardır.*

Teorem 1.1.9 *(Anderson ve Fuller 1992) $f \in End_R(_RM)$ bir eşkare eleman olsun. Bu durumda her $s \in End_R(_RM)$ ve her $x \in M$ için $\phi : fEnd_R(_RM)f \longrightarrow End_R(_RMf)$, $\phi(fsf) : xf \longmapsto xfsf$ olacak şekilde bir halka izomorfizması vardır.*

Tanım 1.1.10 *(Anderson ve Fuller 1992) $M \neq 0$ olmak üzere bir R–modül M'nin 0 ve M den başka direkt toplananı yoksa M'ye ayrışamaz (indecomposable) modül denir.*

Teorem 1.1.11 *(Anderson ve Fuller 1992) $M \neq 0$ olmak üzere bir R–modül M için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M ayrışamaz modüldür.

(2) $End_R(M)$'de 0 ve 1'den başka eşkare yoktur.

(3) 1, $End_R(M)$'de bir ilkel eşkaredir.

1.2. Esas ve Atık Altmodüller

Bu altbölümde, çalışmamızın sonraki bölümlerinde önemli yer tutacak olan esas altmodül ve esas altmodülün duali olan atık altmodül kavramlarının tanımları ve bazı özellikleri üzerinde durulacaktır.

Tanım 1.2.1 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R–modül ve K, M'nin bir altmodülü olsun. M'nin her $K \cap L = 0$ koşulunu sağlayan altmodülü L için $L = 0$ ise K, M'nin bir esas (essential veya large) altmodülüdür denir ve $K \leq_e M$ ile gösterilir. Bu durumda M'ye K'nın esas genişlemesi (essetial extension) denir.*

Tanım 1.2.2 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R–modül olsun. M'nin sıfırdan farklı her altmodülü M içinde esas altmodül ise M'ye düzgün (uniform) modül denir.*

Tanım 1.2.3 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R–modül ve K, M'nin bir altmodülü olsun. Bir $f : K \longrightarrow M$ monomorfizması için Gör $f \leq_e M$ ise f'ye esas (essential) monomorfizma denir.*

Teorem 1.2.4 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R–modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) $K \leq_e M$'dir ancak ve ancak her $0 \neq x \in M$ için öyle bir $r \in R$ vardır ki $0 \neq xr \in K$'dır.

(2) $K \leq M$ olsun. $K \leq_e M$'dir ancak ve ancak $i_K : K \longrightarrow M$ içerme fonksiyonu bir esas momomorfizmadır.

(3) $f : N \longrightarrow M$ bir R–modül homomorfizması ve $K \leq_e M$ ise $f^{-1}(A) \leq_e N$'dir.

(4) $K \leq N \leq M$ *olsun.* $K \leq_e M$*'dir ancak ve ancak* $K \leq_e N$ *ve* $N \leq_e M$*'dir.*

(5) $H, K \leq M$ *olsun.* $H \cap K \leq_e M$*'dir ancak ve ancak* $H \leq_e M$ *ve* $K \leq_e M$*'dir.*

(6) $M = M_1 \oplus M_2$, $K_1 \leq M_1 \leq M$ *ve* $K_2 \leq M_2 \leq M$ *olsun.* $K_1 \oplus K_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$*'dir ancak ve ancak* $K_1 \leq_e M_1$ *ve* $K_2 \leq_e M_2$*'dir.*

Tanım 1.2.5 *(Anderson ve Fuller 1992) R–modül* M*'nin bir altmodülü* K *olsun.* M*'nin her* $K + L = M$ *koşulunu sağlayan altmodülü* L *için* $L = M$ *ise* K, M*'nin bir atık (superfluous veya small) altmodülüdür denir ve* $K << M$ *ile gösterilir.*

Tanım 1.2.6 *(Anderson ve Fuller 1992)* M *bir R–modül ve* N, M*'nin bir altmodülü olsun. Bir* $g : M \longrightarrow N$ *epimorfizması için Çek* $g << M$ *ise* g*'ye atık (superfluous) epimorfizma denir.*

Teorem 1.2.7 *(Anderson ve Fuller 1992)* M *bir R–modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) $K \leq N \leq M$ *olsun.* $N << M$*'dir ancak ve ancak* $K << M$ *ve* $N/K << M/K$*'dir.*

(2) $H, K \leq M$ *olsun.* $H+K << M$*'dir ancak ve ancak* $H << M$ *ve* $K << M$*'dir.*

(3) $K << M$ *ve* $f : M \longrightarrow N$ *bir R–modül homomorfizması ise* $f(K) << N$*'dir. Özel olarak,* $K << M \leq N$ *ise* $K << N$*'dir.*

(4) $M = M_1 \oplus M_2$, $K_1 \leq M_1 \leq M$ *ve* $K_2 \leq M_2 \leq M$ *olsun.* $K_1 \oplus K_2 << M_1 \oplus M_2$*'dir ancak ve ancak* $K_1 << M_1$ *ve* $K_2 << M_2$*'dir.*

1.3. Üretme, Eşüretme ve İz (Trace), Rejekt (Reject) Kavramları

Bu altbölümde, çalışmamızda sonraki bölümlerde çok önemli yer tutan bir modülün sokulu ve radikali kavramlarının tanımlanması ve daha iyi anlaşılması için gerekli olan modül kategorilerinde üretme ve eşüretme ile bir modül sınıfı için iz ve rejekt kavramları üzerinde durulacaktır.

Tanım 1.3.1 *(Anderson ve Fuller 1992)* M *bir R–modül,* X, M*'nin bir altkümesi ve* A, X*'i kapsayan* M*'nin tüm altmodüllerinin kümesi olmak üzere* A*'nın tüm elemanlarının kesişimi ile elde edilen altmodüle* M*'nin* X *ile gerilmiş (spanned) altmodülü denir.* $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$, M*'nin altmodüllerinin bir kümesi olmak üzere* $M = \sum_A M_\alpha$ *ise* $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$, M *modülünü gerer (span) denir.*

Tanım 1.3.2 *(Anderson ve Fuller 1992)* X, ${}_RM$*'nin bir altkümesi olmak üzere* $M = \sum_{x \in X} Rx$ *ise* X, M*'yi gerer ya da* X*'e* M*'nin germe kümesi (spanning set) denir. Bir modülün germe kümesi sonlu ise bu modüle sonlu gerilmiş (finitely spanned) denir. Bir modülün germe kümesi tek bir elemandan oluşuyorsa bu modüle devirli (cyclic) modül denir. Bu durumda* $x \in M$ *olmak üzere* $M = Rx = \{rx : r \in R\}$ *yazılır.*

Bir modülün germe kümesi kategorik bir kavram değildir ve doğal bir duali yoktur. Ancak, üretme ve eşüretme kavramları kategorik, birbirinin duali ve modül kategorilerinde önemli kavramlardır.

Tanım 1.3.3 *(Anderson ve Fuller 1992)* $\mathcal{U}$ *bir modül sınıfı ve* M *bir* R*–modül olsun.* $\mathcal{U}$ *içinde indeksli bir küme* $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ *ve* $\bigoplus_{\alpha\in A} U_\alpha \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *olacak şekilde bir epimorfizma varsa* M*'ye* $\mathcal{U}$ *ile üretilmiş modül ya da* $\mathcal{U}$, M*'yi üretir denir.* $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, $\mathcal{U}$ *içinde sonlu indeksli bir küme ise* M*'ye* $\mathcal{U}$ *ile sonlu üretilmiş modül ya da* $\mathcal{U}$, M*'yi sonlu üretir denir. Eğer* $\mathcal{U} = \{U\}$ *bir tek öğeli küme ise* U, M*'yi üretir denir.*

$\mathcal{U}$ bir modül sınıfı olmak üzere $\mathcal{U}$ ile üretilen tüm modüllerin sınıfı $Gen(\mathcal{U})$ ve $\mathcal{U}$ ile sonlu üretilen tüm modüllerin sınıfı $FGen(\mathcal{U})$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.3.4 *(Anderson ve Fuller 1992)* $\mathcal{U}$ *bir modül sınıfı ve* M *bir* R*–modül olsun.* $\mathcal{U}$ *içinde indeksli bir küme* $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ *ve* $0 \longrightarrow M \longrightarrow \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ *olacak şekilde bir monomorfizma varsa* M*'ye* $\mathcal{U}$ *ile eşüretilmiş modül ya da* $\mathcal{U}$, M*'yi eşüretir denir.* $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, $\mathcal{U}$ *içinde sonlu indeksli bir küme ise* M*'ye* $\mathcal{U}$ *ile sonlu eşüretilmiş modül ya da* $\mathcal{U}$, M*'yi sonlu üretir denir. Eğer* $\mathcal{U} = \{U\}$ *bir tek öğeli küme ise* U, M*'yi eşüretir denir.*

$\mathcal{U}$ bir modül sınıfı olmak üzere $\mathcal{U}$ ile eşüretilen tüm modüllerin sınıfı $Gog(\mathcal{U})$ ve $\mathcal{U}$ ile sonlu eşüretilen modüllerin sınıfı $FGog(\mathcal{U})$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.3.5 *(Anderson ve Fuller 1992)* $\mathcal{U}$ *bir modül sınıfı,* G *ve* C *birer* R*–modül olmak üzere* $Gen(\mathcal{U}) = Gen(G)$ *ise* G*'ye* $Gen(U)$ *için bir üreteç (generator) denir;* $Cog(\mathcal{U}) = Cog(C)$ *ise* C*'ye* $Cog(\mathcal{U})$ *için bir eşüreteç (cogenerator) denir.*

Tanım 1.3.6 *(Anderson ve Fuller 1992)* $\mathcal{U}$ *bir modül sınıfı ve* $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ *olsun.* $\mathcal{U}$ *içindeki her bir modül* $\mathcal{U}'$ *içindeki bir modüle izomorf ise* $\mathcal{U}'$ *sınıfına* $\mathcal{U}$*'nun bir temsilciler sınıfı (class of representatives) denir.*

Önerme 1.3.7 *(Anderson ve Fuller 1992)* $\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}$*'nun bir temsilciler sınıfı olmak üzere* $Gen(\mathcal{U}) = Gen(\mathcal{U}')$ *ve* $Cog(\mathcal{U}) = Cog(\mathcal{U}')$*'dir.*

Önerme 1.3.8 *(Anderson ve Fuller 1992)* $\mathcal{U}$ *bir modül sınıfı olmak üzere* $\mathcal{U}$*'nun bir* $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ *temsilciler kümesi varsa:*

(1) $\bigoplus_{\alpha\in A} U_\alpha$, $Gen(\mathcal{U})$ *için bir üreteçtir.*

(2) $\bigoplus_{\alpha\in A} U_\alpha$ *ve* $\prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, $Gog(\mathcal{U})$ *için birer eşüreteçtir.*

Tanım 1.3.9 *(Anderson ve Fuller 1992)* $\mathcal{U}$ *bir modül sınıfı ve* M *bir* R*–modül olsun.*

(1) $Tr_M(\mathcal{U}) = \sum \{Gör\ h \mid h : U \longrightarrow M,\ bazı\ U \in \mathcal{U}\ için\}$ *kümesi* $\mathcal{U}$ *modül sınıfının* M*'de izi (trace) olarak tanımlanır.*

(2) $Rej_M(\mathcal{U}) = \bigcap \{Çek\ h \mid h : M \longrightarrow U,\ bazı\ U \in \mathcal{U}\ için\}$ *kümesi* $\mathcal{U}$ *modül sınıfının* M*'de rejekti (reject) olarak tanımlanır.*

$Tr_M(\mathcal{U})$ ve $Rej_M(\mathcal{U})$ kümeleri M'nin altmodülleridir.

Önerme 1.3.10 *(Anderson ve Fuller 1992)* $\mathcal{U}$ *bir modül sınıfı ve* M *bir* R*–modül olsun. O halde,*

(1) $Tr_M(\mathcal{U})$, M*'nin* $\mathcal{U}$ *ile üretilen tek en büyük altmodülüdür.*

(2) $Rej_M(\mathcal{U})$, $M/Rej_M(\mathcal{U})$*'nin* $\mathcal{U}$ *ile eş üretildiği* M*'nin tek en küçük altmodülüdür.*

Sonuç 1.3.11 *(Anderson ve Fuller 1992)* $\mathcal{U}$ *bir modül sınıfı ve* M *bir* R*–modül olsun. O halde,*

(1) M, $\mathcal{U}$ *ile üretilmiş bir modüldür ancak ve ancak* $Tr_M(\mathcal{U}) = M$*'dir*

(2) M, $\mathcal{U}$ *ile eşüretilmiş bir modüldür ancak ve ancak* $Rej_M(\mathcal{U}) = 0$*'dir.*

1.4. Yarı-basit Modüller

Bir vektör uzayının her alt vektör uzayı bu vektör uzayının bir direkt toplananıdır. Ancak bu, genel olarak, herhangi bir halka üzerindeki her modül için doğru değildir. Bir halka üzerinde tanımlı modülün altmodüllerinin direkt toplamı olarak yazılabilmesi sadece o modülün cebirsel yapısını ve diğer cebirsel özelliklerini incelememiz için değil; ayrıca o modülün üzerinde tanımlı olduğu halkanın yapısal özelliklerini ve halka-modül arasındaki bazı cebirsel ilişkileri incelememiz için de önem taşır. Bu altbölümde, bu özelliğe sahip modüller üzerinde durulacaktır.

Tanım 1.4.1 *(Anderson ve Fuller 1992)* M *sıfırdan farklı bir* R*–modül olmak üzere* M*'nin kendisinden ve sıfırdan başka bir altmodülü yoksa* M*'ye basit (simple) modül denir.*

Lemma 1.4.2 *(Schur Lemma) (Milies ve Sehgal 2002)* R *bir halka,* M *ve* N *basit* R*–modüller ve* $f : M \longrightarrow N$ *sıfırdan farklı bir* R*–homomorfizma olsun. Bu durumda* f *bir* R*–izomorfizmadır.*

Tanım 1.4.3 *(Anderson ve Fuller 1992)* M *bir* R*–modül ve* $(T_i)_{i\in I}$ M*'nin basit altmodüllerinin indekslendirilmiş bir kümesi olsun.* M *bu kümenin bir direkt toplamı ise* $M = \bigoplus_{i\in I} T_i$, M*'nin yarı-basit (semisimple) ayrışımıdır denir. Bir* R*–modül* M*'nin yarı-basit ayrışımı varsa* M*'ye yarı-basit (semisimple) modül denir.*

Teorem 1.4.4 *(Anderson ve Fuller 1992)* M *bir* R*–modül olmak üzere aşağıda ifade edilen koşullar denktir:*

(1) M yarı-basittir.

(2) M basit modüller ile üretilir.

(3) M basit alt modüllerinin bir direkt toplamıdır.

(4) M basit alt modüllerinin bir toplamıdır (direkt toplam olmasına gerek olmadan).

(5) M'nin her alt modülü M'nin bir direkt toplananıdır.

(6) L ve N, R–modüller olmak üzere R–modüllerin her kısa tam dizisi

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

parçalanır. Burada, L ve N de birer yarı-basit modüldür.

Eğer bir yarı-basit R–modülün ayrışımını basit R–alt modüllerin bir direkt toplamı olarak bilirsek yarı-basit modülün bütün alt modüllerinin yapısını belirleyebiliriz.

Önerme 1.4.5 *(Milies ve Sehgal 2002) M bir yarı-basit R–modül ve $(0) \neq N$, M'nin bir altmodülü olsun. O halde, N yarı-basit bir R–modüldür ve N bir basit R–altmodül içerir.*

Sonuç 1.4.6 *(Milies ve Sehgal 2002) M bir yarı-basit R–modül olsun. M'nin basit alt modüllerinin direkt toplamı olarak ayrışımı $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ ve N, M'nin bir R–altmodülü ise I indeksinin bir altkümesi $J \subset I$ için $N \simeq \bigoplus_{j\in J} M_j$ dir.*

1.5. Radikal ve Sokul Kavramları

Bu altbölümde, basit modüllerin direkt toplamlarını araştırırken, herhangi bir modülü yarı-basit modüllerle nasıl ilişkilendirebileceğimizi incelerken ve modüller arası başka bazı özellikleri belirlerken kullanılan temel öneme sahip sokul ve radikal kavramları üzerinde durulacaktır. Bu altbölümde, $\mathcal{S}$ tüm basit sol R–altmodülerin sınıfını göstermektedir.

Tanım 1.5.1 *(Anderson ve Fuller 1992) Her R–modül M'nin bir tek en büyük yarı-basit altmodülü vardır. M bir sol R–modül olsun. $Soc_R M = Tr_M(\mathcal{S})$ olarak tanımlanan M'nin $Soc_R M$ altmodülüne M'nin sokulu (socle) denir.*

Önerme 1.5.2 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir sol R–modül olmak üzere*

$$\begin{aligned} Soc_R M &= \sum \{K \leq M : K,\ M\text{'nin basit altmodülü}\} \\ &= \bigcap \{L \leq M : L,\ M\text{'nin esas altmodülü}\} \end{aligned}$$

dir.

Önerme 1.5.3 *(Anderson ve Fuller 1992) M ve N sol R–modüller ve $f : M \longrightarrow N$ bir R–modül homomorfizması olsun. Bu durumda, $f(Soc_R M) \leq Soc_R N$'dir.Özel olarak $Soc_R M$, M'nin sol R–altmodülüdür ve M'nin sağ $End_R({}_R M)$–altmodülüdür.*

Sonuç 1.5.4 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R–modül ve K, M'nin bir altmodülü olsun. Bu durumda $Soc_R K = K \cap Soc_R M$ dir. Ayrıca, $Soc_R(Soc_R M) = Soc_R M$'dir.*

Sonuç 1.5.5 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir sol R–modül olsun. $Soc_R M \leq_e M$'dir ancak ve ancak M'nin sıfırdan farklı her altmodülü bir basit altmodül içerir.*

Önerme 1.5.6 *(Anderson ve Fuller 1992) $M = \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ olmak üzere $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$, M'nin altmodüllerinin indekslendirilmiş bir kümesi ise*

$$Soc_R(\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha) = \bigoplus_{\alpha\in A} Soc_R(M_\alpha)$$

dir.

Tanım 1.5.7 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir sol R–modül olsun. $Rad_R M = Rej_M(S)$ olarak tanımlanan M'nin $Rad_R M$ altmodülüne M'nin radikali denir.*

Tanım 1.5.8 *(Anderson ve Fuller 1992) Bir R–modül M'nin bir öz altmodülü N olsun. M'nin N'yi kapsayan N'den başka hiçbir öz altmodülü yoksa N'ye M'nin bir maksimal altmodülü denir.*

Önerme 1.5.9 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir sol R–modül olmak üzere*

$$\begin{aligned} Rad_R M &= \bigcap \{K \leq M : K,\ M\text{'nin maksimal altmodülü}\} \\ &= \sum \{L \leq M : L,\ M\text{'nin atık altmodülü}\} \end{aligned}$$

dir.

Önerme 1.5.10 *(Anderson ve Fuller 1992) M ve N sol R–modüller ve $f : M \longrightarrow N$ bir R–modül homomorfizması olsun. Bu durumda, $f(Rad_R M) \leq Rad_R N$'dir. Özel olarak $Rad_R M$, M'nin sol R–altmodülüdür ve M'nin sağ $End_R({}_R M)$–altmodülüdür.*

Önerme 1.5.11 *(Anderson ve Fuller 1992) M ve N sol R–modüller ve $f : M \longrightarrow N$ bir R–modül epimorfizması olsun. $Çek f \leq Rad_R M$ ise $Rad_R N = f(Rad_R M)$'dir. Özel olarak, $Rad_R(M/Rad_R M) = 0$'dir.*

Önerme 1.5.12 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir sol R–modül olsun. $Rad_R M = 0$'dır ancak ve ancak M, basit R–modüller sınıfı ile eşüretilmişdir. Özel olarak, M bir yarı-basit modül ise $Rad_R M = 0$'dır.*

Önerme 1.5.13 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir sol R–modül olsun. M'nin her öz altmodülü M'nin bir maksimal altmodülü tarafından kapsanıyorsa $Rad_R M$ M'nin tek en büyük atık altmodülüdür.*

Önerme 1.5.14 *(Anderson ve Fuller 1992) $M = \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ olmak üzere $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$*

M'nin altmodüllerinin indekslendirilmiş bir kümesi ise

$$Rad_R(\bigoplus_{\alpha\in A} U_\alpha) = \bigoplus_{\alpha\in A} Rad_R(U_\alpha)$$

dir.

Tanım 1.5.15 *(Wisbauer 1991) R bir halka ve M bir R–modül olsun. M'nin bir altmodülü L olmak üzere M'nin her ϕ endomorfizması için $\phi(L) \subseteq L$ oluyorsa L'ye M'nin tam değişmez (fully invariant) altmodülü denir.*

Önerme 1.5.16 *(Wisbauer 1991) M bir R–modül olmak üzere $Soc_R M$ ve $Rad_R M$, M'nin tam değişmez altmodülleridir.*

1.6. Sonlu Üretilmiş ve Sonlu Eşüretilmiş Modüller

Bu bölümde, sonlu üretilmiş ve sonlu eşüretilmiş modül kavramları anlatılacak ve temel bazı sonuçlar verilecektir.

Tanım 1.6.1 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R–modül olsun. M'nin M'yi geren her altmodül kümesi $\mathcal{A}$ için sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, M'yi geriyorsa, diğer bir ifadeyle, $\sum_{A\in\mathcal{A}} A = M$ olması $\sum_{F\in\mathcal{F}} F = M$ olmasını gerektiriyorsa M'ye sonlu üretilmiş (finitely generated) modül denir.*

Önerme 1.6.2 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir sol R–modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) M sonlu üretilmiştir.

(2) Her $\sum_{\alpha\in A} Gör\ f_\alpha = M$'yi sağlayan $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow M$ $(\alpha \in A)$ R–modül homomorfizmaları kümesi için $\sum_{\beta\in F} Gör\ f_\beta = M$'yi sağlayan sonlu bir $F \subseteq A$ kümesi vardır.

(3) R–modüllerin her indekslendirilmiş kümesi $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ ve $f : \bigoplus_{\alpha\in A} U_\alpha \longrightarrow M$ epimorfizması için sonlu bir altkümesi $F \subseteq A$ ve $g : \bigoplus_{\beta\in F} U_\beta \longrightarrow M$ epimorfizması vardır.

(4) M'yi üreten her modül M'yi sonlu üretir.

(5) M sonlu bir germe kümesini kapsar.

Tanım 1.6.3 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R–modül olsun. M'nin $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = (0)$'yi sağlayan her altmodül kümesi $\mathcal{A}$ için $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = (0)$'yi sağlayan sonlu bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ varsa M'ye sonlu eşüretilmiş (finitely cogenerated) modül denir.*

Önerme 1.6.4 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir sol R–modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) M sonlu eşüretilmiştir.

(2) Her $\bigcap_{\alpha\in A}$ *Çek* $f_\alpha = (0)$*'yi sağlayan* $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow M$ $(\alpha \in A)$ *R–modül homomorfizmaları kümesi için* $\bigcap_{\beta\in F}$*Çek* $f_\beta = (0)$*'yi sağlayan sonlu bir* $F \subseteq A$ *kümesi vardır.*

(3) R–modüllerin her indekslendirilmiş kümesi $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ *ve* $h : M \longrightarrow \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ *monomorfizması için sonlu bir altkümesi* $F \subseteq A$ *ve* $t : M \longrightarrow \prod_{\beta\in F} U_\beta$ *monomorfizması vardır.*

Sonlu üretilmiş ve sonlu eşüretimiş modüller $Soc_R M$ ve $Rad_R M$ ile belirlenip karakterize edilebilir. Aşağıdaki teorem bu temel karakterizasyonu ifade etmektedir.

Teorem 1.6.5 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir sol R–modül olsun. Bu durumda,*

(1) M sonlu üretilmiştir ancak ve ancak $M/Rad_R M$ *sonlu üretilmiştir. Ayrıca,* $Rad_R M << M$*'dir.*

(2) M sonlu eşüretilmiştir ancak ve ancak $Soc_R M$ *sonlu eşüretilmiştir. Ayrıca,* $Soc_R M \trianglelefteq M$*'dir.*

Sonuç 1.6.6 *(Anderson ve Fuller 1992) M sıfırdan farklı bir R–modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) M sonlu üretilmiş ise M'nin bir maksimal altmodülü vardır.

(2) M sonlu eşüretilmiş ise M'nin bir basit altmodülü vardır.

1.7. Noether ve Artin Modüller

Bu altbölümde Noether ve Artin modül ve halka kavramları tanımlanacak, bu kavramların bazı özellikleri verilecektir. Ayrıca, Krull-Schmidt Teoremi ifade edilecektir.

Önerme 1.7.1 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M bir Noether modüldür.

(2) M'nin her altmodülü sonlu üretilmiştir.

(3) M'nin altmodüllerinin boştan farklı her kümesinin bir maksimal elemanı vardır.

Önerme 1.7.2 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M bir Artin modüldür.

(2) M'nin her bölüm modülü sonlu eşüretilmiştir

(3) M'nin altmodüllerinin boştan farklı her altkümesinin bir minimal elemanı vardır.

Sonuç 1.7.3 *(Anderson ve Fuller 1992) M sıfırdan farklı bir R-modül olsun.*

(1) M bir Noether modül ise M'nin bir maksimal altmodülü vardır ve $Rad_R M$, M'nin bir atık altmodülüdür.

(2) M bir Artin modül ise M'nin bir basit altmodülü vardır ve $Soc_R M$, M'nin bir esas altmodülüdür.

Önerme 1.7.4 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R-modül ve $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ olsun. Bu durumda, M bir Noether (Artin) modüldür ancak ve ancak $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için her M_i Noether (Artin) modüldür.*

Önerme 1.7.5 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R-modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) $Rad_R M = (0)$'dır ve M bir Artin modüldür.

(2) $Rad_R M = (0)$'dır ve M bir Noether modüldür.

(3) M yarı-basittir ve sonlu üretilmiştir.

(4) M yarı-basittir ve Noether modüldür.

(5) M basit altmodüllerinin sonlu bir kümesinin direkt toplamıdır.

Tanım 1.7.6 *(Anderson ve Fuller 1992)*

(1) R halkası sol (sağ) R–modül olarak Noether ise, R'ye sol (sağ) Noether halka denir. R hem sol hem de sağ Noether bir halka ise R'ye Noether halka denir.

(2) R halkası sol (sağ) R-modül olarak Artin ise, R'ye sol (sağ) Artin halka denir. R hem sol hem de sağ Artin bir halka ise R'ye Artin halka denir.

Örnek 1.7.7 *(Anderson ve Fuller 1992) Elemanları $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $\gamma \in \mathbb{Q}$, olmak üzere tüm 2×2 üst üçgenel matrislerin R halkası hem sol Noether hem de sol Artin halkadır; ancak sağ Noether veya sağ Artin halka değildir.*

Tanım 1.7.8 *(Anderson ve Fuller 1992) M bir R–modül olsun. M hem Noether hem Artin modül ise M'ye sonlu uzunluktadır (finite length) denir.*

Teorem 1.7.9 *(Krull-Schmidt Teoremi) (Anderson ve Fuller 1992) M sıfırdan farklı sonlu uzunlukta bir R–modül olsun. Bu durumda her bir M_i, M'nin ayrışamaz altmodülü olmak üzere*

$$M = M_1 \oplus ... \oplus M_n$$

olacak şekilde M'nin bir ayrışımı vardır. Her bir N_i, M'nin ayrışamaz altmodülü olmak üzere

$$M = N_1 \oplus ... \oplus N_k$$

olacak şekilde M'nin herhangi bir ayrışımı için $n = k$'dır. Ayrıca, $\{1, ..., n\}$'nin

$$M_{\sigma(i)} \simeq N_i$$

olacak şekilde bir σ permütasyonu vardır ve her bir $1 \leq t \leq n$ için,

$$M = M_{\sigma(1)} \oplus ... \oplus M_{\sigma(t)} \oplus N_{t+1} \oplus ... \oplus N_n$$

dir.

1.8. Yarı-basit Halkalar

Bu altbölümde, halka teorisinde önemli bir halka sınıfı olan yarı-basit halkaların tanımı, bazı özellikleri ve yapısı incelenecektir. Ayrıca, Artin-Weddernburn Teoremi ifade edilecektir.

Teorem 1.8.1 *(Lam 1991) R bir halka olsun. Aşağıdakiler denktir.*

(1) Sol (sağ) R–modüllerin tüm kısa tam dizileri parçalanır.

(2) Tüm sol (sağ) R–modüller yarı-basittir.

(3) Tüm sonlu üretilmiş sol (sağ) R–modüller yarı-basittir.

(4) Tüm devirli sol (sağ) R–modüller yarı-basittir.

(5) Regüler sol (sağ) R–modül ${}_RR$ (R_R) yarı-basittir.

(6) R sonlu sayıda minimal sol (sağ) ideallerin direkt toplamıdır.

Tanım 1.8.2 *(Lam 1991) Teorem 1.8.1'deki denk koşullardan herhangi birini sağlayan R halkasına sol (sağ) yarı-basit halka denir.*

Teorem 1.8.3 *(Lam 1991) R halkası bir sol yarı-basit halkadır ancak ve ancak R halkası bir sağ yarı-basit halkadır.*

Tanım 1.8.4 *(Lam 1991) R halkası sol veya sağ yarı-basit halka ise R halkasına yarı-basit halka denir.*

Teorem 1.8.5 *(Milies ve Sehgal 2002) R bir yarı-basit halka ve R'nin minimal sol ideallerin direkt toplamı olarak ayrışımı $R = \bigoplus_{i=1}^{t} L_i$ olsun. Bu durumda R'nin sıfırdan farklı eşkarelerinden oluşan $\{e_1, e_2, ..., e_t\}$ kümesi vardır ve $\{e_1, e_2, ..., e_t\}$ kümesinin elemanları aşağıdaki koşulları sağlar.*

(1) $i, j \in \{1, 2, ..., t\}$ ve $i \neq j$ ise $e_i e_j = 0$'dır.

(2) $e_1 + e_2 + ... + e_t = 1$ dir.

(3) $i \in \{1, 2, ..., t\}$ olmak üzere e_i', $e_i'' \neq 0$ ve $e_i' e_i'' = 0$ koşullarını sağlayan e_i', e_i'' eşkareler için $e_i = e_i' + e_i''$ olarak yazılamaz.

Diğer yandan, yukarıda ifade edilen koşulları sağlayan $\{e_1, e_2, ..., e_t\}$ eşkare kümesi varsa sol idealler $L_i = Re_i$ minimaldir.

Tanım 1.8.6 *(Milies ve Shegal 2002) Teorem 1.8.5'de ilk iki koşulu sağlayan eşkare ailesine dik eşkarelerin tam ailesi (complete family of orthogonal idempotents) denir.*

Teorem 1.8.7 *(Artin-Weddernburn Teoremi) (Milies ve Shegal 2002) R bir yarı-basit halkadır ancak ve ancak R,*

$$R \simeq M_{n_1}(D_1) \oplus M_{n_2}(D_2) \oplus ... \oplus M_{n_s}(D_s)$$

olacak şekilde bölüm halkaları üzerinde tanımlı sonlu sayıda matris halkalarının direkt toplamı olarak ayrışır ve bu ayrışım tek türlüdür.

1.9. İnjektif ve Projektif Modüller

Bu altbölümde, modül teorisinde çok önemli kavramlar olan injektif modül ve projektif modülün tanımları verilecek ve bazı özellikleri incelenecektir. Ayrıca, yarı-basit modüllerle injektif ve projektif modüller arasındaki ilişkiler anlatılacaktır.

Tanım 1.9.1 *(Anderson ve Fuller 1992)*

(1) U, M ve N sol R–modüller olsun. Her bir $g : M \longrightarrow N$ R–epimorfizması ve her bir $\gamma : U \longrightarrow N$ R–homomorfizması için $g\bar{\gamma} = \gamma$ olacak şekilde bir R–homomorfizma $\bar{\gamma} : U \longrightarrow M$ varsa U'ya M–projektif (M'ye göre projektif) modül denir. P bir sol R–modül olmak üzere P her R–modül M'ye göre M–projektif ise P'ye projektif modül denir.

(2) U, M ve K sol R–modüller olsun. Her $f : K \longrightarrow M$, R–monomorfizması ve her $\gamma : K \longrightarrow U$, R–homomorfizması için $\bar{\gamma}f = \gamma$ olacak şekilde bir R–homomorfizma $\bar{\gamma} : M \longrightarrow U$ varsa U'ya M–injektif (M'ye göre injektif) modül denir. Q bir sol R–modül olmak üzere, Q her R–modül M'ye göre M–injektif ise Q'ya injektif modül denir.

Teorem 1.9.2 *(Çallıalp 2009) R bir halka, M, N ve P, R–modüller olmak üzere R–modül P için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) P projektif R–modüldür.

(2) Her $M \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$, R–epimorfizması için, $f\alpha = 1_P$ olacak şekilde bir $\alpha : P \longrightarrow M$, R–homomorfizması vardır.

(3) P, bir serbest R–modülün bir direkt toplananına izomorftur.

(4) Her $M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$, R–epimorfizması ve her $h : P \longrightarrow N$, R–homomorfizması için, $g\tilde{h} = h$ olacak şekilde bir $\tilde{h} : P \longrightarrow M$ R–homomorfizması vardır.

Sonuç 1.9.3 *(Çallıalp 2009) Projektif modüllerin direkt toplamları ve direkt toplananları da projektiftir.*

Teorem 1.9.4 *(Çallıalp 2009) R bir halka, M, N, L ve E, R–modüller olmak üzere R–modül P için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) E injektif R–modüldür.

(2) Her $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} L$, R–monomorfizması için, $\alpha f = 1_E$ olacak şekilde bir $\alpha : L \longrightarrow E$, R–homomorfizması vardır.

(3) Her $0 \longrightarrow M \xrightarrow{g} N$, R–monomorfizması, her $h : M \longrightarrow E$, R–homomorfizması için, $h = \tilde{h}g$ olacak şekilde bir $\tilde{h} : N \longrightarrow E$, R–homomorfizması vardır.

Önerme 1.9.5 *(Çallıalp 2009) İnjektif modüllerin direkt toplananları ve direkt çarpımları da injektiftir.*

Teorem 1.9.6 *(Lam 1991) R bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) R yarı-basit halkadır.

(2) Tüm R–modüller hem projektif hem injektiftir.

(3) Sonlu üretilmiş tüm R–modüller hem projektif hem injektiftir.

(4) Tüm devirli R–modüller hem projektif hem injektiftir.

2. KURAMSAL BİLGİLER ve KAYNAK TARAMALARI

Grup halkaları ilk olarak A. Cayley tarafından 1854 yılında "On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$" başlıklı makalesinde ortaya atılmıştır. Bu makale soyut grup teorisinin başlangıcı olarak kabul edilmektedir. A. Cayley makalesinde, matematiğin cebir ve sayılar teorisi alanının en temel yapılarından birisi olan grup tanımını ilk defa aksiyomatik olarak ifade etmiş, bazı grupları sınıflandırmış ve grup halkalarından kısaca söz etmiştir.

T. Molien, 1890'larda yaptığı çalışmalarla açık bir şekilde grup halkalarını tanıtmıştır. T. Molien'in hiperkompleks sistemler ve grup temsilleri teorisi, özellikle sonlu grupların kompleks temsilleri teorisi, üzerine çalışmaları bu alanların en temel sonuçlarını ortaya koymuştur. Bu dönemde, yarı-basit grup cebirlerinin yapısı ile ilgili 1898 yılında H. Maschke tarafından ortaya atılan meşhur Maschke Teoremi ve 1896 yılında F. G. Frobenius tarafından ortaya atılan Frobenius Karşılıklılık Teorisi (Frobenius Reciprocity Theory) grup halkaları teorisinin en temel teorileri olmuştur. F. G. Frobenius'un (1896a, 1896a, 1896a, 1897) grup temsilleri teorisi üzerine çalışmaları temsil teorisi ile grup cebirlerini bir araya getirmiştir. 1927-1929 yılları arasında yayınladıkları makalelerde R. Brauer ve E. Noether grup cebirlerinin yapısı ve grup temsilleri teorisi arasındaki ilişkileri gösteren önemli temel sonuçları ifade etmişlerdir. G. Higman (1940), M. Auslendar (1957), J.E. Mclaughlin (1958) çalışmalarıyla ve Kaplansky (1957, 1970) grup halkaları ile ilgili sorularıyla konunun önemini arttırmışlardır.

Grup halkaları alanında yapılan en önemli çalışmalardan biri ise I.G. Connell'in "On the group rings" başlıklı makalesidir. Bu makalesinde I.G. Connell (1963) grup halkalarının idealleri, regüler grup halkaları ve grup halkasının augmentasyon ideali üzerine önemli sonuçlar elde etmiş ve Maschke Teoremi'ni genellemiştir. H. Maschke (1898) tarafından ortaya atılan Maschke Teoremi'ne göre K bir cisim ve G sonlu bir grup olmak üzere $char(K)$, G'nin mertebesini bölmüyorsa KG yarı-basittir. I.G. Connell (1963)'in genelleştirilmiş Maschke Teoremi'ne göre ise R bir halka ve G bir grup olmak üzere grup halkası RG yarı-basit Artindir ancak ve ancak R yarı-basit Artindir, G sonlu bir gruptur ve $|G|$, R'de terslenebilir.

Takip eden yıllarda, J. Lambeck (1966) ve P. Ribenboim (1969) kitaplarında grup halkalarına yer vererek grup halkaları konusunun gelişimini açıkça ortaya koymuşlardır. D.A.R. Wallace (1962, 1967, 1968, 1969, 1970) ve P.F. Smith (1970, 1971a, 1971b, 1972) tarafından grup halkaları ve grup cebirleri üzerine yapılan çalışmalar bu alana ilgiyi arttırmıştır. Özellikle, D.A.R. Wallace'ın grup cebirlerinin Jacobson radikalleri ve P.F. Smith'in grup halkalarının Krull-boyutu üzerine elde ettikleri sonuçlar dikkat çekici olmuştur. Son dönemde ise bir çok matematikçinin bireysel ve ortak çalışmaları ile bulunan önemli sonuçlar (Sehgal 1978, Karpilovsky 1983, 1986, 1987, 1990, Ritter ve Sehgal 1990, Millies ve Sehgal 2002, Passmann 1977,1979, 1983, 1984, 2011) grup halkaları konusunu geliştirmiş ve grup halkalarının farklı cebirsel alanlarla ilişkilendirilmesini hızlandırmıştır. Grup temsilleri teorisi ve sonlu grupların karakter teorisi üzerine yapılan çalışmalar (T. Hawkins 1971, 1974, 1978, C.W. Curtis ve I. Reiner 1987, 1990, 2006, C.W. Curtis 1992) bu teoriler ile grup halkalarının ve üzerinde tanımlı modüllerin ilişkilerini göstermiştir.

Grup modül kavramı ilk olarak 2014 yılında Koşan, Lee ve Zhou tarafından tanımlanmıştır. Koşan, Lee ve Zhou (2014) bir R–modül M'yi bir grup modüle (RG–modül MG'ye) genişleterek grup halkalarında bilinen bazı sonuçların; örneğin grup modüllerde projektiflik, injektiflik, regülerlik ve yarı-basitlik; modül teorik versiyonunu ispatlamışlardır. Bu sonuçları grup modül MG'yi MG'nin üzerinde tanımlı olduğu grup ve modülün özelliklerini kullanıp karakterize ederek elde etmişlerdir.

Bu bölümde, grup halkaları ve grup modüllerle ilgili literatürde yer alan bazı bilgiler verilecektir. Bu bölümde verilen bilgiler Passi (1979), Lam (2001), Milies ve Sehgal (2002) kitaplarından; Connel (1963), Renault (1971), Zelmanowitz (1972), Koşan, Lee ve Zhou (2014) makalelerinden alınmıştır ve verilen bilgilerin yanına hangi kaynaktan alındığı yazılmıştır. Ayrıca, değinilmeyen tanım ve sonuçlar için bu kaynaklara başvurulabilir.

2.1. Grup Halkaları

G bir grup ve R bir birimli halka olsun. RG elemanları $r_g \in R$ olmak üzere $\sum_{g\in G} r_g g$ şeklindeki tüm sonlu lineer toplamlardan oluşur ve hemen hemen her $g \in G$ için $r_g = 0$'dır; diğer bir ifadeyle, bu elemanların her birinde sadece sonlu sayıda katsayı sıfırdan farklıdır.

$\alpha = \sum_{g\in G} a_g g$, $\beta = \sum_{g\in G} b_g g \in RG$ olmak üzere, $\alpha = \beta$ ise her $g \in G$ için $a_g = b_g$'dir.

RG'de toplama işlemi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\alpha + \beta = \sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) g.$$

$\alpha = \sum_{g\in G} a_g g$, $\beta = \sum_{h\in G} b_h h \in RG$ olmak üzere RG'de çarpma işlemi ise aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (\sum_{g\in G} a_g g)(\sum_{h\in G} b_h h) \\ &= \sum_{g,h\in G} a_g b_h gh \\ &= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} (a_g b_{h^{-1}g}) g. \end{aligned}$$

RG'nin elemanlarının R'nin elemanlarıyla çarpma işlemi, $\alpha = \sum_{g\in G} a_g g \in$

RG ve $\lambda \in R$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned} \lambda\alpha &= \lambda(\sum_{g\in G} a_g g) \\ &= \sum_{g\in G}(\lambda a_g)g. \end{aligned}$$

Yukarıda verilen toplama ve çarpma işlemleriyle RG bir halkadır.

Tanım 2.1.1 *(Milies ve Sehgal 2002) RG halkasına R'nin G üzerindeki grup halkası denir. R bir değişmeli halka ise RG'ye R'nin G üzerindeki grup cebiri denir.*

Ayrıca, R bir değişmeli halka ve G sonlu ise RG sonlu boyutlu bir R–cebiridir.

RG'nin birimi vardır. e, G'nin birim elemanını ve 1_{RG}, RG'nin birimini göstermek üzere $1_{RG} = \sum_{g\in G} a_g g$'de e'nin katsayısı 1_R ve diğer $g \in G$'lerin katsayıları 0'dır. Diğer bir ifadeyle, $1_{RG} = 1_R e$'dir. Buna ek olarak, $\alpha = \sum\limits_{g\in G} a_g g \in RG$ olmak üzere $supp(\alpha) := \{g \in G : a_g \neq 0\}$ olarak tanımlanır.

Önerme 2.1.2 *(Milies ve Sehgal 2002) R bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. Bu durumda $IG = \{\sum_{g\in G} a_g g : a_g \in I\}$, RG'nin bir idealidir ve $RG/IG \simeq (R/I)G$'dir.*

Teorem 2.1.3 *(Karpilovsky 1987) R bir değişmeli halka, G ve H grup olsun. Bu durumda,*

$$R(G \times H) \simeq (RG)H \simeq (RH)G$$

dir.

Önerme 2.1.4 *(Milies ve Sehgal 2002) R değişmeli birimli bir halka olsun.*

$$^* : \ RG \longrightarrow RG \ , \ \sum_{g\in G} r_g g \longmapsto \sum_{g\in G} r_g g^{-1}$$

ile ifade edilen fonksiyon bir kıvrılmadır (involution) ve her $\alpha, \beta \in RG$ için aşağıdakileri sağlar.

(1) $(\alpha+\beta)^* = \alpha^* + \beta^*$

(2) $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$

(3) $\alpha^{**} = \alpha$

R bir değişmeli halka ise grup halkası RG bir kıvrılmalı halkadır (ring with involution).

2.2. Grup Halkalarında Augmentasyon İdeal Kavramı

Tanım 2.2.1 *(Passi 1979, Milies ve Sehgal 2002) RG'den R'ye bir fonksiyon*

$$\varepsilon_R : \; RG \longrightarrow R \;, \; \sum_{g\in G} r_g g \longmapsto \sum_{g\in G} r_g$$

ile ifade edilsin. Bu fonksiyon, augmentasyon fonksiyon (augmentation map) olarak adlandırılır.

Her $r \in R$ için $\varepsilon_R(r.e) = r$ olduğundan ε_R örten bir fonksiyondur. Her $r \in R$ ve $h \neq g \in G$ için $\varepsilon_R(rh) = r = \varepsilon_R(rg)$ olduğu için ε_R bire-bir bir fonksiyon değildir.

Lemma 2.2.2 *(Passi 1979, Milies ve Sehgal 2002) ε_R: $RG \longrightarrow R$ bir halka homomorfizmasıdır.*

İspat. $r = \sum_{g\in G} r_g g$, $s = \sum_{g\in G} s_g g \in RG$ için

$$\begin{aligned}
\varepsilon_R(r+s) &= \varepsilon_R(\sum_{g\in G}(r_g+s_g)g) \\
&= \sum_{g\in G}(r_g+s_g) \\
&= \varepsilon_R(r)+\varepsilon_R(s).
\end{aligned}$$

ve $s = \sum_{g\in G} s_h h \in RG$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varepsilon_R(rs) &= \varepsilon_R(\sum_{g,h\in G}(r_g s_h)gh) \\
&= \sum_{g,h\in G} r_g s_h \\
&= \sum_{g\in G} r_g \sum_{h\in G} s_h \\
&= \varepsilon_R(r)\varepsilon_R(s).
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece, ε_R bir halka homomorfizmasıdır. ∎

Tanım 2.2.3 *(Passi 1979, Milies ve Sehgal 2002) RG'nin*

$$Çek\varepsilon_R = \{r = \textstyle\sum_{g\in G} r_g g \in RG : \varepsilon_R(r) = \sum_{g\in G} r_g = 0\}$$

idealine augmentasyon ideal adı verilir. Augmentasyon ideal $\triangle(RG)$ ile gösterilir.

$0 \neq r \in R$, g, $h \in G$ ve $g \neq h$ olmak üzere

$\varepsilon_R(rg + (-rh)) = r - r = 0$

elde edilir. O halde $rg + (-rh) \in$Çek ε_R'dir. Yani, $\triangle(RG)$ sıfırdan farklıdır.

Lemma 2.2.4 *(Passi 1979, Milies ve Sehgal 2002) $S = \{g - 1 : g \in G, g \neq e\}$ kümesi R üzerinde $\triangle(RG)$ için bir tabandır. $\triangle(RG)$'nin R üzerindeki boyutu $|G| - 1$'dir.*

İspat. $\mu = \sum_{g \in G} r_g g \in \triangle(RG)$ için $\mu \in$Çek ε_R'dir ve böylece $\sum_{g \in G} r_g = 0$'dır. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in G} r_g g &= \sum_{g \in G} r_g g - 0 \\
&= \sum_{g \in G} r_g g - \sum_{g \in G} r_g \\
&= \sum_{g \in G} r_g (g - 1)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu nedenle, $S = \{g - 1 : g \in G, g \neq e\}$, $\triangle(RG)$'yi geren bir kümedir.

Lineer bağımsızlığı ispatlamak için, $\sum_{g \in G} r_g(g - 1) = 0$ ise

$$0 = \sum_{g \in G} r_g g - \sum_{g \in G} r_g = \sum_{g \in G} r_g g$$

eşitliği elde edilir. Böylece, $\sum_{g \in G} r_g g = 0$'dır. RG'nin elemanlarının tanımı gereği, $\sum_{g \in G} r_g g = 0$ ancak ve ancak her $g \in G$ için $r_g = 0$'dır. Bu nedenle,

$$S = \{g - 1 : g \in G, g \neq e\}$$

kümesi R–üzerinde lineer bağımsızdır. ∎

$H \leq G$ olmak üzere RG'nin $\{h - 1 : h \in H, h \neq e\}$ kümesi ile üretilen sol ideali $\{\sum_{h \in H, h \neq e} \alpha_h(h - 1) : \alpha_h \in RG\}$'dir ve $\triangle_R(G, H)$ ile gösterilir. $H = G$ için $\triangle_R(G, G) = \triangle(RG)$ olduğu açıktır.

Lemma 2.2.5 *(Passi 1979, Milies ve Sehgal 2002) H, G'nin bir altgrubu ve S, H'ın bir üreteç kümesi olsun. Bu durumda $\{s - 1 : s \in S\}$ kümesi RG'nin sol ideali olarak $\triangle_R(G, H)$'ın bir üreteç kümesidir.*

Önerme 2.2.6 *(Passi 1979, Milies ve Sehgal 2002) H, G'nin bir altgrubu olsun ve $\mathcal{T} = \{q_i\}_{i \in I}$, G'de H'ın sol kosetlerinin temsilcilerinin bir tam kümesi (transversal) olsun.*

$$B_H = \{q(h - 1) : q \in \mathcal{T}, h \in H, h \neq e\}$$

kümesi R üzerinde $\triangle_R(G, H)$ için bir tabandır.

Önerme 2.2.7 *(Passi 1979, Milies ve Sehgal 2002) H, G'nin bir normal altgrubu ve $\omega : G \longrightarrow G/H$, doğal grup homomorfizması olsun. ω grup homomorfizması, $\omega^* : RG \longrightarrow R(G/H)$, $\sum_{g\in G} r_g g \in RG$,*

$$\omega^*(\sum_{g\in G} r_g g) = \sum_{g\in G} r_g \omega(g)$$

olmak üzere bir halka endomorfizmasına genişletilebilir ve Çek$\omega^* = \triangle_R(G,H)$'tır.

Önerme 2.2.8 *(Passi 1979) H, G'nin bir normal altgrubu olsun. Bu durumda*

$$\triangle_R(G,H) = \triangle(RH).RG = RG.\triangle(RH)$$

dir.

2.3. Yarı-basit Grup Halkaları ve Grup Halkalarının Ayrışımı

Bu altbölümde, yarı-basit grup halkalarının ayrışımı için önemli bir karakterizasyonu veren genelleştirilmiş Maschke Teoremi ifade edilecektir. Ayrıca, yarı-basit grup halkalarının ayrışımı ile ilgili bazı önemli sonuçlar verilecektir ve yarı-basit grup halkalarının ayrışımında augmentasyon idealin rolü anlatılacaktır.

Teorem 2.3.1 *(Maschke 1898) (Maschke Teoremi) K bir cisim ve G sonlu bir grup olsun. $char(K)$, G'nin mertebesini bölmüyorsa KG yarı-basittir.*

Teorem 2.3.2 *(Connel 1963) (Genelleştirilmiş Maschke Teoremi) R bir halka ve G bir grup olsun. Bu durumda grup halkası RG yarı-basit Artindir ancak ve ancak R yarı-basit Artindir, G sonlu bir gruptur ve $|G|$, R'de terslenebilir.*

Lemma 2.3.3 *(Milies ve Sehgal 2002) Augmentasyon ideal $\triangle(RG)$, RG'nin bir direkt toplananı ise G bir sonlu gruptur ve $|G|$, R'de terslenebilir.*

Sonuç 2.3.4 *(Milies ve Sehgal 2002) K bir cisim ve G sonlu bir grup olsun. Bu durumda KG yarı-basittir ancak ve ancak $char(K)$, G'nin mertebesini bölmez.*

Genelleştirilmiş Maschke Teoremi ve Artin-Weddernburn Teoremi'nden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.5 *(Milies ve Sehgal 2002) G sonlu bir grup ve K bir cebirsel kapalı cisim ve $char(K) \nmid |G|$ olmak üzere*

$$KG \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(K)$$

ve $n_1^2 + n_2^2 + ... + n_r^2 = |G|$ dir.

Örnek 2.3.6 *Aşağıda verilen örneklerdeki grup halkalarının ayrışımı Sonuç 2.3.5-dan faydalanılarak incelenmiştir.*

(1) $R = \mathbb{Z}_2$ *ve* $G = C_4 = \langle a : a^4 = e \rangle$ *olsun.* $char(\mathbb{Z}_2) = 2$ *ve* $2 \mid 4$ *olduğundan* $\mathbb{Z}_2 C_4$ *yarı-basit değildir ve* $\bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$ *(*D_i *bir bölüm halkası) olarak ayrışamaz.*

(2) $R = \mathbb{C}$ *ve* $G = D_6 = \langle a, b : a^2 = b^3 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ *olsun.* $char(\mathbb{C}) = 0$ *ve* $0 \mid 6$ *olduğundan* $\mathbb{C}D_6$*,*

$$\mathbb{C}D_6 \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$$

olarak ayrışır. $n_1^2 + n_2^2 + ... + n_r^2 = 6$ *olması gerektiğinden dolayı,* $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ *veya* $6 = 1 + 1 + 2^2$ *dir. Bu durumda* $\mathbb{C}D_6 \simeq \bigoplus_{i=1}^{6} \mathbb{C}$ *veya* $\mathbb{C}D_6 \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$ *dır.* $\mathbb{C}D_6$ *değişmesiz bir grup halkasıdır; fakat* $\bigoplus_{i=1}^{6} \mathbb{C}$ *değişmelidir. Bu nedenle* $\mathbb{C}D_6 \not\simeq \bigoplus_{i=1}^{6} \mathbb{C}$ *dir. O halde,*

$$\mathbb{C}D_6 \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$$

dir.

G bir grup ve $H = \{h_1, h_2, ..., h_n\}$, G'nin bir sonlu altgrubu olsun. Bu durumda $\hat{H} = h_1 + h_2 + ... + h_n \in RH$'dir.

Lemma 2.3.7 *(Milies ve Sehgal 2002)* R *birimli bir halka,* G *bir grup ve* H*,* G*'nin bir sonlu altgrubu olsun.* $|H|$*,* R*'de terslenebilirse* $e_H = \frac{1}{|H|}\hat{H}$*,* RG*'de bir eşkaredir. Ayrıca,* H*,* G*'nin bir sonlu normal altgrubu ise* $e_H = \frac{1}{|H|}\hat{H}$*,* RG*'de bir merkezi eşkaredir.*

Teorem 2.3.8 *(Milies ve Sehgal 2002)* R *birimli bir halka,* G *bir grup ve* H*,* G*'nin bir sonlu normal altgrubu olsun.* $|H|$*,* R*'de terslenebilirse* $e_H = \frac{1}{|H|}\hat{H}$ *için*

$$RG = RGe_H \oplus RG(1 - e_H)$$

ve $RGe_H \simeq R(G/H)$*,* $RG(1 - e_H) \simeq \triangle_R(G, H)$*'dir.*

Sonuç 2.3.9 *(Passi 1979, Milies ve Sehgal 2002)* H*,* G*'nin bir normal altgrubu olsun. Bu durumda* $\triangle_R(G, H)$*,* RG*'nin bir çift yönlü idealidir ve*

$$RG/\triangle_R(G, H) \simeq R(G/H)$$

dir.

Sonuç 2.3.10 *(Milies ve Sehgal 2002)* R *bir halka,* G *bir sonlu grup olsun ve* $|G|$*,* *R'de terslenebilsin. Bu durumda*

$$RG = R \oplus \triangle(RG)$$

dir.

2.4. Grup Modüller

R bir birimli halka, M bir birimsel R–modül ve G bir grup olsun. MG, $m_g \in M$ olmak üzere ve hemen hemen her $g \in G$ için $m_g = 0$ olacak şekilde $\sum_{g\in G} m_g g$ şeklindeki tüm ifadelerin kümesini göstersin. $\mu = \sum_{g\in G} m_g g$, $\eta = \sum_{g\in G} n_g g \in MG$ ve $\mu = \eta$ ise her $g \in G$ için $m_g = n_g$'dir.

MG'de toplama işlemi, bileşen bileşen toplama şeklindedir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\mu + \eta = \sum_{g\in G} m_g g + \sum_{g\in G} n_g g = \sum_{g\in G} (m_g + n_g) g.$$

MG'de skaler çarpma ise $r = \sum_{g\in G} r_g g \in RG$ olmak üzere aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\mu r = (\sum_{g\in G} m_g g)(\sum_{g\in G} r_g g) = \sum_{g\in G} k_g g.$$

Burada, $k_g = \sum_{hh'=g} m_h r_{h'}$'dir.

Teorem 2.4.1 *(Koşan, Lee ve Zhou 2014) MG, RG üzerinde M tarafından G'nin grup modülü olarak adlandırılır ve yukarıda ifade edilen toplama ve skaler çarpma işlemleri ile RG grup halkası üzerinde tanımlı bir sağ modüldür.*

İspat. Öncelikle MG için yukarıda ifade edilen toplama işlemine göre MG'nin bir Abel grup olduğunu göstereceğiz. Her $\mu = \sum_{g\in G} m_g g$, $\eta = \sum_{g\in G} n_g g$, $\vartheta = \sum_{g\in G} t_g g \in MG$ için

(1) $\mu + \eta = \sum_{g\in G}(m_g + n_g) g \in MG$ 'dir.

(2) M, R–modül olduğu için M üzerinde tanımlı toplama işlemine göre birleşmelidir. Böylece, aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned}(\mu + \eta) + \vartheta &= \sum_{g\in G}(m_g + n_g)g + \sum_{g\in G} t_g g \\ &= \sum_{g\in G}(m_g + n_g + t_g)g \\ &= \sum_{g\in G} m_g g + \sum_{g\in G}(n_g + t_g)g\end{aligned}$$

$$= \mu + (\eta + \vartheta).$$

(3) Her $\mu \in MG$ için $\mu+\xi = \xi+\mu = \mu$ olacak şekilde her $g \in G$ için $a_g = 0$ olmak üzere $\xi = \sum_{g\in G} a_g g \in MG$ vardır ve $\xi = \sum_{g\in G} a_g g = 0$ toplama işlemine göre birim elemandır.

(4) Her $\mu = \sum_{g\in G} m_g g \in MG$ için $\mu + \gamma = \gamma + \mu = \xi$ olacak şekilde, $\gamma = \sum_{g\in G} t_g g = \sum_{g\in G}(-m_g)g$, toplamaya göre ters elemanı vardır.

(5) Her $\mu = \sum_{g\in G} m_g g$, $\eta = \sum_{g\in G} n_g g \in MG$ için M bir R–modül olduğundan M üzerindeki toplama işlemine göre değişmelidir ve

$$\begin{aligned}
\mu + \eta &= \sum_{g\in G}(m_g + n_g)g \\
&= \sum_{g\in G} n_g g + \sum_{g\in G} m_g g \\
&= \eta + \mu.
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Böylece, MG yukarıda ifade edilen toplama işlemine göre değişmelidir. Sonuç olarak, MG bir Abel gruptur.

(6) Her $r = \sum_{g\in G} r_g g \in RG$ için

$$\begin{aligned}
(\mu + \eta)r &= (\sum_{g\in G}(m_g + n_g)g)(\sum_{g\in G} r_g g) \\
&= \sum_{g\in G}(\sum_{hh'=g}(m_h + n_h)r_{h'})g \\
&= \sum_{g\in G}(\sum_{hh'=g} m_h r_{h'})g + \sum_{g\in G}(\sum_{hh'=g} n_h r_{h'})g \\
&= (\sum_{g\in G} m_g g)(\sum_{g\in G} r_g g) + (\sum_{g\in G} n_g g)(\sum_{g\in G} r_g g) \\
&= \mu r + \eta r
\end{aligned}$$

(7) Her $r = \sum_{g\in G} r_g g$, $s = \sum_{g\in G} s_g g \in RG$ için

$$\begin{aligned}
\mu(r + s) &= (\sum_{g\in G} m_g g)(\sum_{g\in G}(r_g + s_g)g) \\
&= \sum_{g\in G}(\sum_{hh'=g} m_h(r_{h'} + s_{h'}))g \\
&= \sum_{g\in G}(\sum_{hh'=g} m_h r_{h'})g + \sum_{g\in G}(\sum_{hh'=g} m_h s_{h'})g \\
&= (\sum_{g\in G} m_g g)(\sum_{g\in G} r_g g) + (\sum_{g\in G} m_g g)(\sum_{g\in G} s_g g) \\
&= \mu r + \mu s.
\end{aligned}$$

(8) Her $r = \sum_{g\in G} r_g g$, $s = \sum_{t\in G} s_t t \in RG$ için

$$\begin{aligned}(\mu r)s &= (\sum_{g\in G}(\sum_{hh'=g} m_h r_{h'})g)(\sum_{t\in G} s_t t)\\ &= (\sum_{g,t\in G}((\sum_{hh'=g} m_h r_{h'})s_t)gt)\\ &= (\sum_{g\in G} m_g g)(\sum_{g\in G}(\sum_{hh'=g} r_h s_{h'})g)\\ &= (\sum_{g\in G} m_g g)((\sum_{g\in G} r_g g))(\sum_{t\in G} s_t t))\\ &= \mu(rs).\end{aligned}$$

(9) Her $\mu = \sum\limits_{g\in G} m_g g \in MG$ için

$$\begin{aligned}\mu.1_{RG} &= \sum_{g\in G}(m_g 1_R)ge\\ &= \mu.\end{aligned}$$

∎

Her $m \in M$, $me \in MG$ ile ifade edilirse M, MG'nin bir R–altmodülüdür.

$M = R$ olarak halkanın kendisi alınırsa MG, grup halkası RG ile aynı olur. Eğer I, R'nin bir sağ ideali ise ve $M = I$ alınırsa $MG = IG$, RG'nin bir sağ ideali olur. T bir RG–modül olsun. T, RG–modül olarak ifade edilirken $(T)_{RG}$ ve T, R–modül olarak ifade edilirken $(T)_R$ olarak gösterilecektir.

$$\varepsilon_M : MG \longrightarrow M,\ \sum_{g\in G} m_g g \longmapsto \sum_{g\in G} m_g$$

ile tanımlı bir fonksiyon verilsin. Çek ε_M, $\triangle(MG)$ ile gösterilir.

Lemma 2.4.2 *(Koşan, Lee ve Zhou 2014) MG, RG üzerinde M tarafından G'nin bir grup modülü ve*

$$\varepsilon_M : MG \longrightarrow M,\ \sum_{g\in G} m_g g \longmapsto \sum_{g\in G} m_g$$

olarak tanımlı fonksiyon için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) Her $x \in MG$ ve her $\alpha \in RG$ için

$$\varepsilon_M(x\alpha) = \varepsilon_M(x)\varepsilon_R(\alpha)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, ε_M bir R–homomorfizmadır.

(2) $\triangle(MG) = \{\sum_{g\in G} m_g(g-1) : g \in G, m_g \in M\}$*'dir.*

(3) $\triangle(MG)$*,* MG*'nin bir* RG*–altmodüldür.*

İspat.

(1) $x = \sum_{g\in G} m_g g \in MG$ ve $\alpha = \sum_{g\in G} r_g g \in RG$ için

$$\begin{aligned}
\varepsilon_M(x\alpha) &= \varepsilon_M((\sum_{g\in G} m_g g)(\sum_{g\in G} r_g g)) \\
&= \sum_{g\in G}(\sum_{hh'\in G} m_h r_{h'}) \\
&= (\sum_{g\in G} m_g)(\sum_{g\in G} r_g) \\
&= \varepsilon_M(x)\varepsilon_R(\alpha)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, $y = \sum_{g\in G} n_g g \in MG$ ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}
\varepsilon_M(x+y) &= \varepsilon_M(\sum_{g\in G}(m_g + n_g)g) \\
&= \sum_{g\in G}(m_g + n_g) \\
&= \varepsilon_M(x) + \varepsilon_M(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_M(xr) &= \varepsilon_M(\sum_{g\in G}(m_g r)g) \\
&= (\sum_{g\in G} m_g)r \\
&= \varepsilon_M(x)r
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle, ε_M bir R–homomorfizmadır.

(2) $x = \sum_{g\in G} m_g g \in \triangle(MG)$ olsun. O halde, $\sum_{g\in G} m_g = 0$'dır. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G} m_g g &= \sum_{g\in G} m_g g - 0 \\
&= \sum_{g\in G} m_g g - \sum_{g\in G} m_g \\
&= \sum_{g\in G} m_g(g-1)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, $\triangle(MG) \subseteq \{\sum_{g\in G} m_g(g-1) : g \in G, m_g \in M\}$'dir. Her $\sum_{g\in G} m_g(g-1)$ elemanı için

$$\begin{aligned}
\varepsilon_M(\sum_{g\in G} m_g(g-1)) &= \varepsilon_M(\sum_{g\in G} m_g g - \sum_{g\in G} m_g) \\
&= \varepsilon_M(\sum_{g\in G} m_g g) - \varepsilon_M(\sum_{g\in G} m_g) \\
&= \sum_{g\in G} m_g - \sum_{g\in G} m_g \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan dolayı $\sum_{g\in G} m_g(g-1) \in$Çek $\varepsilon_M = \triangle(MG)$'dir. O halde,

$$\{\sum_{g\in G} m_g(g-1) : g \in G, m_g \in M\} \subseteq \triangle(MG)$$

dir. Bu nedenle, $\triangle(MG) = \{\sum_{g\in G} m_g(g-1) : g \in G, m_g \in M\}$'dir.

(3) $\triangle(MG) = \{\sum_{g\in G} m_g(g-1) : g \in G, m_g \in M\}$ olduğu için $\triangle(MG) \subset MG$'dir. Öncelikle, her $h \in G$ için $(g-1)h = (1-h) - (1-gh)$'tır.
Her $x = \sum_{g\in G} m_g(g-1) \in \triangle(MG)$ ve $r \in R$ için

$$xr = \sum_{g\in G}(m_g r)(g-1),\ m_g r \in M$$

olduğundan dolayı $xr \in \triangle(MG)$'dir. Ayrıca, her $h \in G$ için

$$\begin{aligned}
xh &= (\sum_{g\in G} m_g(g-1))h \\
&= \sum_{g\in G} m_g(g-1)h \\
&= \sum_{g\in G} m_g((1-h)-(1-gh)) \\
&= \sum_{g\in G} m_g(1-h) - \sum_{g\in G} m_g(1-gh)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. $\triangle(MG) = \{\sum_{g\in G} m_g(g-1) : g \in G, m_g \in M\ \}$ olduğu için $xh \in \triangle(MG)$'dir. Böylece, $\triangle(MG)$, MG'nin bir RG–altmodülüdür.

∎

Her $m \in M$ için $\varepsilon_M(me) = m$ olduğundan ε_M örten fonksiyondur. Her $m \in M$, $h \neq g \in G$ için $\varepsilon_R(mh) = \varepsilon_R(mg) = m$'dir. Böylece, ε_M bire-bir fonksiyon değildir.

Lemma 2.4.3 *(Koşan, Lee ve Zhou 2014) $\{M_i : i \in I\}$ bir sağ R–modüller ailesi ve G bir grup olsun. Bu durumda*

$$\left(\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) G\right)_{RG} \cong \left(\bigoplus_{i\in I} M_i G\right)_{RG}$$

dir.

İspat. $(\bigoplus_{i\in I} M_i)G$'den $\bigoplus_{i\in I} M_i G$'ye bir fonksiyon aşağıdaki şekilde verilsin.

$$\theta : \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) G \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i G \ , \ \sum_{g\in G}(..., m_g^{(i)}, ...)g \longmapsto \sum_{g\in G}(..., m_g^{(i)} g, ..)$$

θ bir RG–izomorfizmadır. ∎

Teorem 2.4.4 *(Koşan, Lee ve Zhou 2014) M bir sağ R–modül olsun. M projektiftir ancak ve ancak $(MG)_{RG}$ projektiftir.*

İspat. M'nin bir projektif sağ R–modül olduğunu kabul edelim. Bu durumda A bir sağ R–modül olmak üzere bir indeks I için $(R)^{(I)} \simeq M \oplus A$'dır. Böylece Lemma 2.4.3'den

$$\begin{aligned} ((RG)^{(I)})_{RG} &\simeq ((R)^{(I)}G)_{RG} \\ &\simeq ((M \oplus A)G)_{RG} \\ &\simeq (MG)_{RG} \oplus (AG)_{RG} \end{aligned}$$

Böylece, $(MG)_{RG}$ projektiftir.

Tersine, $(MG)_{RG}$'nin projektif olduğunu kabul edelim. Bu durumda bir indeks I için B bir sağ RG–modül olmak üzere $((RG)^{(I)})_{RG} \simeq (MG)_{RG} \oplus B$'dir. Bu ifadedeki tüm modüller, ayrıca birer R–modüllerdir. Böylece, $((RG)^{(I)})_R \simeq (MG)_R \oplus B_R$ yazabiliriz. $(RG)_R$ bir serbest modül olduğu için $((RG)^{(I)})_R$ da bir serbest modüldür. O halde, $(MG)_R$ bir serbest modülün direkt toplananıdır. $(MG)_R$ bir serbest modülün direkt toplananı olduğu için projektiftir. Bu nedenle, M bir projektif sağ R–modüldür. ∎

Tanım 2.4.5 *(Koşan, Lee ve Zhou 2014) G bir grup olsun. G'nin sonlu sayıda elemanı tarafından üretilen her altgrubu sonlu ise G'ye yerel sonlu (locally finite) grup denir.*

Tanım 2.4.6 *(Zelmanowitz 1972) M_R bir modül olsun. Her $m \in M$ için $f \in Hom_R(M, R)$ olmak üzere $m = mf(m)$ ise M_R'ye regüler modül denir.*

Teorem 2.4.7 *(Koşan, Lee ve Zhou 2014) M_R sıfırdan farklı bir modül ve G bir grup olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) MG bir regüler RG–modüldür.

(2) M_R bir regüler modüldür, G bir yerel sonlu gruptur ve G'nin her bir altgrubunun mertebesi $End_R(M)$'de terslenebilir.

Tanım 2.4.8 *(Koşan, Lee ve Zhou 2014) R bir halka olmak üzere R–modül R_R injektif ise R'ye kendi-injektif (self-injective) halka denir.*

Teorem 2.4.9 *(Koşan, Lee ve Zhou 2014) M_R sıfırdan farklı bir modül ve G bir grup olsun. $(MG)_{RG}$ injektiftir ancak ve ancak M_R injektiftir ve G bir sonlu gruptur.*

Sonuç 2.4.10 *(Connell 1963, Renault 1971) Grup halkası RG sağ kendi-injektiftir ancak ve ancak R sağ kendi-injektiftir ve G bir sonlu gruptur.*

2.5. Yarı-basit Grup Modüller

Bu altbölümde, genelleştirilmiş Maschke Teoremi'nin (Connell 1963) modül teorik bir versiyonu verilmiş ve ispatlanmıştır.

Lemma 2.5.1 *(Koşan, Lee ve Zhou 2014) M sıfırdan farklı bir R–modül olsun. $(MG)_{RG}$'nin sıfırdan farklı bir altmodülü Y için $Y \cap \triangle(MG) = 0$ ise G bir sonlu gruptur.*

İspat. $g_1, ..., g_n$ G'nin birbirinden farklı elemanları ve tüm $m_i g_i \neq 0$ olmak üzere $0 \neq y = m_1g_1 + ... + m_ng_n \in Y$ olsun. G bir sonsuz grup ise $i = 1, ..., n$ için $g_1h \neq g_i$ olacak şekilde bir $h \in G$ vardır. Böylece,

$$y(1-h) = (m_1g_1 + ... + m_ng_n) - (m_1g_1h + ... + m_ng_nh) \neq 0$$

dır. Ancak, $g(1-h) = (g-1) - (gh-1)$ olduğu için

$$\begin{aligned} y(1-h) &= \sum_{s_i \in S} m_i g_i (1-h) \\ &= \sum_{s_i \in S} m_i(g_i - 1) - \sum_{s_i \in S} m_i(g_ih - 1) \in Y \cap \triangle(MG) \end{aligned}$$

dir. Bu bir çelişkidir. ∎

Lemma 2.5.2 *(Lam 2001, Koşan, Lee ve Zhou 2014) $W \leq V$ sağ RG–modüller, G sonlu bir grup ve $|G|$, $End_R(V)$'de terslenebilir olsun. W, R–modül olarak V'nin bir direkt toplananı ise RG–modül olarak da V'nin bir direkt toplananıdır.*

İspat. Y, V'nin bir R–altmodülü olmak üzere $V_R = W \oplus Y$ ve $\pi : V \longrightarrow W$, Y boyunca projeksiyon olsun.

$$\bar{\pi} : V \longrightarrow V,\ v \longmapsto \sum_{h \in G} \pi(|G|^{-1}\, vh)h^{-1}$$

olarak tanımlanan $\bar{\pi}$, $|G|^{-1} \in End_R(V)$ olduğu için iyi tanımlıdır. Her $v \in V$ için $r \in R$ ve $g \in G$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}(vr) &= \sum_{h\in G} \pi(|G|^{-1} vrh)h^{-1} \\
&= (\sum_{h\in G} \pi(|G|^{-1} vh)h^{-1})r \\
&= \bar{\pi}(v)r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}(vg) &= \sum_{h\in G} \pi(|G|^{-1} vgh)h^{-1} \\
&= \sum_{t\in G} \pi(|G|^{-1} vt)t^{-1}g,\ t = gh \\
&= (\sum_{t\in G} \pi(|G|^{-1} vt)t^{-1})g \\
&= \bar{\pi}(v)g.
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece, $\bar{\pi}$ bir RG–homomorfizmadır ve $\bar{\pi}(V) \subseteq W$'dir.

Ayrıca,

$$V_R = |G|\, V_R = |G|\,(W \oplus Y) = |G|\, W \oplus |G|\, Y$$

dir. Böylece, $|G|\, W = W$ ve $|G|^{-1} W = W$'dir. W V'nin bir RG–altmodülü olduğu için her $h \in G$ için $|G|^{-1} wh \in W$'dir. O halde,

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}(w) &= \sum_{h\in G} \pi(|G|^{-1} wh)h^{-1} \\
&= (\sum_{h\in G} |G|^{-1} wh)h^{-1} \\
&= |G|\, |G|^{-1} w \\
&= w
\end{aligned}$$

dir. Bu nedenle, $\bar{\pi}(V) = W$'dir. Ayrıca, her $w \in W$ için

$$\bar{\pi}^2(w) = \bar{\pi}(\bar{\pi}(w)) = \bar{\pi}(w) = w$$

olduğundan $\bar{\pi}^2 = \bar{\pi}$'dir. Bu nedenle, W_{RG}, V_{RG}'nin bir direkt toplananıdır. ∎

Teorem 2.5.3 *(Koşan, Lee ve Zhou 2014) M_R sıfırdan farklı bir modül ve G bir grup olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) MG bir yarı-basit RG–modüldür.

(2) M_R bir yarı-basit modüldür, G bir sonlu gruptur ve $|G|^{-1} \in End_R(M)$'dir.

İspat. (2) $\Longrightarrow$ (1). M bir yarı-basit R–modül, G bir sonlu grup, $|G|^{-1} \in End_R(M)$

ve $X_{RG} \leq (MG)_{RG}$ olsun. M_R yarı-basit olduğu için $(MG)_R$ de yarı-basittir. O halde, X_R, $(MG)_R$'nin bir direkt toplananıdır. G bir sonlu grup ve $|G|^{-1} \in End_R(M)$ olduğu için $|G|^{-1} \in End_R(MG)$'dir. Böylece, Lemma 2.5.2'den $(X)_{RG}$, $(MG)_{RG}$'nin bir direkt toplananıdır. Bu nedenle, MG_{RG} yarı-basittir.

(1) $\Longrightarrow$ (2). MG bir yarı-basit RG–modül olsun. $\triangle(MG) \neq MG$ olduğundan $\triangle(MG)$, $(MG)_{RG}$'nin bir öz direkt toplananıdır. Böylece, Lemma 2.5.1'den G bir sonlu gruptur. $N_R \leq M_R$ olsun. Bu durumda $(NG)_{RG} \leq (MG)_{RG}$'dir. $(MG)_{RG}$ yarı-basit olduğu için $(NG)_{RG}$, $(MG)_{RG}$'nin bir direkt toplananıdır. Böylece, $\delta^2 = \delta \in End_{RG}(MG)$ için $\delta(MG) = NG$'dir.

$$\rho : M \xrightarrow{\delta|_M} MG \xrightarrow{\varepsilon_M} M$$

fonksiyonların kompozisyonu olsun. Bu durumda $\rho \in End_R(M)$'dir. $\rho(M) \subseteq N$ olduğu açıktır. Her $z \in N$ için $y \in MG$ olmak üzere $z = \delta(y)$'dir. Bu durumda

$$\rho(z) = \varepsilon_M \delta(\delta(y)) = \varepsilon_M \delta(y) = \varepsilon_M(z) = z$$

dir. Bu nedenle, $\rho(M) = N$ ve $\rho^2 = \rho$'dir. Böylece, N_R, M_R'nin bir direkt toplananıdır ve M_R yarı-basittir.

Tersine, $|G|^{-1} \notin End_R(M)$ olduğunu kabul edelim. O halde, $|G|$'nin bir p asal böleni vardır ve $p^{-1} \notin End_R(M)$'dir. $p : M \longrightarrow M$ ile tanımlı R–homomorfizmanın bire-bir olmadığını göstermek gerekir. $p : M \longrightarrow M$'yi bire-bir kabul edelim. Bu durumda $p^{-1} \notin End_R(M)$ olduğu için $pM \neq M$'dir. M_R yarı-basit olduğu için X M'nin bir R–altmodülü olmak üzere $M = pM \oplus X$'dir. $pX \subseteq pM \cap X$ olduğundan $pX = 0$'dır. Bu nedenle, $p : M \longrightarrow M$ bire-bir değildir. Böylece, M_R yarı-basit olduğu için $pN = 0$ olmak üzere M_R'nin sıfırdan farklı bir N direkt toplananı vardır. $|G|\, N = 0$ olduğu için $\hat{G} = \sum_{g \in G} g$ göstermek üzere $N\hat{G} \subseteq \triangle(NG)$'dir. Ayrıca, $N\hat{G}$, $(NG)_{RG}$'nin bir RG–altmodülüdür. $\triangle(NG)$'nin $(NG)_{RG}$'nin bir esas altmodülü olduğunu göstermek gerekmektedir. Bunun için, $\sum_{g \in G} m_g g \in NG/\triangle(NG)$ olsun. Bu durumda $0 \neq \sum_{g \in G} m_g \in N$'dir. Böylece, $(\sum_{g \in G} m_g g)\hat{G} = (\sum_{g \in G} m_g)\hat{G}$, $\triangle(NG)$'nin sıfırdan farklı bir elemanıdır. Bu nedenle, $\triangle(NG)$, $(NG)_{RG}$'nin bir esas altmodülüdür. $(NG)_{RG}$, $(MG)_{RG}$'nin altmodülü olduğu için yarı-basittir ve $NG = \triangle(NG)$'dir. Böylece,

$$0 = \varepsilon_N(\triangle(NG)) = \varepsilon_N(NG) = N$$

dir. Bu bir çelişkidir. Bu durumda $|G|^{-1} \in End_R(M)$'dir. ∎

Sonuç 2.5.4 *(Koşan, Lee ve Zhou 2014) Teorem 2.5.3'de $M = R_R$ olarak alınırsa sonuç genelleştirilmiş Maschke Teoremidir.*

3. BULGULAR–TARTIŞMA

Bu bölümde, aksi belirtilmedikçe, R değişmeli birimli halka, M birimsel (unitary) R–modül ve G bir sonlu gruptur. Bu bölümün ilk kısmında, Uc, Ones ve Alkan (2016) tarafından tanımlanan, bir R–modül M'yi RG–modül yapmak için M'nin endomorfizma halkası $End_R(M)$'nin yardımıyla R–modül M üzerinde bir yapı tanıtılmıştır ve böylece bu yapı sayesinde R–modüller ile RG–modüller arasındaki bazı ilişkiler anlatılmıştır. Öncelikle, M'nin esas (atık) R–modül olması ile esas (atık) RG–modül olması arasındaki ve Rad_RM ile $Rad_{RG}M$ arasındaki ilişki incelenmiştir. Daha sonra, M'nin R–modül olarak injektif (projektif) olması ile RG–modül olarak injektif (projektif) olması arasındaki ilişki araştırılmıştır. Ayrıca, genelleştirilmiş Maschke Teoremi için alternatif oldukça kısa bir ispat verilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında, yine bu yapı sayesinde, M'nin basit R–altmodülleri ile basit RG–altmodülleri arasındaki ve Soc_RM ile $Soc_{RG}M$ arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son olarak, Kosan, Lee ve Zhou (2014) tarafından tanımlanan grup modülleri kavramı ile ilgili bazı modül teorik sonuçlar verilmiştir.

3.1. Sonlu Grup Üzerinde Tanımlı RG–Modüller, Maschke Teoremi

Bu altbölümde, $End_R(M)$'yi kullanarak bir R–modül M'yi RG–modül yapmak için bir yapı tanımlanacaktır. Ayrıca, bu yapı üzerinden RG–modüllerin özellikleri de çalışılacaktır.

Tanım 3.1.1 *τ, G'den $End_R(M)$'e bir grup homomorfizması olsun. Her $g \in G$, $m \in M$ için mg çarpımı*

$$mg = \tau(g)(m).$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.1.2 *M, R halkası üzerinde tanımlı bir modül ve τ, G'den $End_R(M)$'e bir grup homomorfizması olsun. M, her $g \in G$, $m \in M$ için $mg = \tau(g)(m)$ ile tanımlanan bu çarpımla bir RG–modüldür.*

İspat. M bir R–modül olduğu için ve her $\rho_1 = \sum_{g_i \in G} r_i g_i$, $\rho_2 = \sum_{g_i \in G} s_i g_i \in RG$ ve her m, m_1, $m_2 \in M$ için M aşağıdaki şartları sağladığından bir RG–modüldür.

(1) $m_1\rho_1 = m_1(\sum_{g_i \in G} r_i g_i) = \sum_{g_i \in G} r_i(m_1 g_i) = \sum_{g_i \in G} r_i(\tau(g_i)(m_1)) \in M.$

(2)

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)\rho_1 &= (m_1+m_2)(\sum_{g_i \in G} r_i g_i)\\ &= \sum_{g_i \in G} r_i(m_1+m_2)g_i\\ &= \sum_{g_i \in G} r_i(\tau(g_i)(m_1+m_2))\\ &= \sum_{g_i \in G} r_i(\tau(g_i)(m_1)) + \sum_{g_i \in G} r_i(\tau(g_i)(m_2))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{g_i \in G} r_i(g_i m_1) + \sum_{g_i \in G} r_i(g_i m_2) \\
&= m_1(\sum_{g_i \in G} r_i g_i) + m_2(\sum_{g_i \in G} r_i g_i) \\
&= m_1\rho_1 + m_2\rho_1.
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
m_1(\rho_1+\rho_2) &= m_1(\sum_{g_i \in G} r_i g_i + \sum_{g_i \in G} s_i g_i) \\
&= \sum_{g_i \in G} r_i(m_1 g_i) + \sum_{g_i \in G} s_i(m_1 g_i) \\
&= \sum_{g_i \in G} r_i(\tau(g_i)(m_1)) + \sum_{g_i \in G} s_i(\tau(g_i)(m_1)) \\
&= \sum_{g_i \in G} r_i(g_i m_1) + \sum_{g_i \in G} s_i(g_i m_1) \\
&= m_1 \sum_{g_i \in G} r_i g_i + m_1 \sum_{g_i \in G} s_i g_i \\
&= m_1\rho_1 + m_1\rho_2
\end{aligned}
$$

(4) $\rho_2 = \sum_{g_i \in G} s_i g_i$'yi $\rho_2 = \sum_{g_j \in G} s_j g_j$ olarak yazabiliriz. Böylece,

$$
\begin{aligned}
m_1(\rho_1\rho_2) &= m_1((\sum_{g_i \in G} r_i g_i)(\sum_{g_j \in G} s_j g_j)) \\
&= m_1(\sum_{g_i, g_j \in G} (r_i s_j)(g_i g_j)) \\
&= \sum_{g_i, g_j \in G} (r_i s_j)(\tau(g_j g_i)(m_1)) \\
&= \sum_{g_i, g_j \in G} (r_i s_j)(\tau(g_j)\tau(g_i)(m_1)) \\
&= \sum_{g_i, g_j \in G} (r_i s_j)(\tau(g_j)(\tau(g_i)(m_1))) \\
&= \sum_{g_i, g_j \in G} (r_i s_j)((g_j(g_i m_1)) \\
&= (m_1(\sum_{g_i \in G} r_i g_i))(\sum_{g_j \in G} s_j g_j) \\
&= (m_1\rho_1)\rho_2.
\end{aligned}
$$

(5) $m_1 1_{RG} = m_1 1_R e = \tau(e) m_1 = m_1$.

∎

Tanım 3.1.3 *Çarpımdaki grup homomorfizması τ, R üzerinde M için G'nin bir temsili olarak adlandırılır.*

Her $g \in G$ için $\tau(g) = 1_{End_R(M)}$ ise bir RG–modülün yapısı R–modül yapısıyla aynıdır.

Bir RG–modül M'nin çarpımsal yapısını göstermek için aşağıdaki örnekler verilmiştir.

Örnek 3.1.4 *$R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $G = C_2 = \{e, a\}$ olsun. $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$'in bir R–modül olduğu açıktır.*

(1) M'den M'ye bir fonksiyon f ve $m = (x, y) \in M$ için

$$f: \; M \longrightarrow M \;, \; (x, y) \longmapsto f(x, y) = (3x - 4y, 2x - 3y)$$

olsun. $f \in End_R M$ olduğu açıktır.

G'den $End_R M$'ye grup homomorfizması τ, $\tau(e) = 1$ (1, M'den M'e özdeşlik dönüşümü) ve $\tau(a) = f$ şeklinde tanımlansın. τ'nun bir grup homomorfizması olduğunu göstermek gerekir. Öncelikle

$$\tau(a)\tau(e)(m) = (f \circ 1)(m) = f(m) = \tau(a)(m) = \tau(ae)(m)$$

eşitliği sağlanır. Her $m = (x, y) \in M$, $g_1 = a$, $g_2 = a \in C_2$ için

$$\tau(aa)(m) = \tau(a)\tau(a)(m)$$

olduğu da gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} \tau(a)\tau(a)(m) &= (f \circ f)(m) \\ &= f(f((x, y))) \\ &= f(3x - 4y, 2x - 3y) \\ &= (x, y) \\ &= \tau(e)(m) \\ &= \tau(aa)(m). \end{aligned}$$

olduğu için τ bir grup homomorfizmasıdır. O halde, Teorem 3.1.2'den M bir RG–modüldür. Her $m = (x, y) \in M$ için

$$ma = \tau(a)(m) = f(m) = (3x - 4y, 2x - 3y)$$

dir.

(2) M'den M'ye bir fonksiyon f ve $m = (x, y) \in M$ için

$$f: \; M \longrightarrow M \;, \; (x, y) \longmapsto f(x, y) = (x, -y)$$

olsun. $f \in End_R M$ olduğu açıktır.

G'den $End_R M$'ye grup homomorfizması τ, $\tau(e) = 1$ (1, M'den M'e özdeşlik dönüşümü) ve $\tau(a) = f$ şeklinde tanımlansın. τ'nun bir grup homomorfizması olduğunu göstermek gerekir. Öncelikle

$$\tau(a)\tau(e)(m) = (f \circ 1)(m) = f(m) = \tau(a)(m) = \tau(ae)(m)$$

eşitliği sağlanır. Her $m = (x, y) \in M$, $g_1 = a$, $g_2 = a \in C_2$ *için*

$$\tau(aa)(m) = \tau(a)\tau(a)(m)$$

olduğu da göstermek gerekir.

$$\begin{aligned} \tau(a)\tau(a)(m) &= f(f((x, y))) \\ &= f(x, -y) \\ &= (x, y) \\ &= \tau(e)(m) \\ &= \tau(aa)(m) \end{aligned}$$

olduğu için τ *bir grup homomorfizmasıdır.* τ *bir grup homomorfizması olduğu için Teorem 3.1.2'den* M *bir* RG*–modüldür. Her* $m = (x, y) \in M$ *için*

$$ma = \tau(a)(m) = f(m) = (x, -y)$$

dir.

Dikkat edilirse, yukarıdaki örneklerde görüldüğü üzere tanımlanan çarpımla bir R–modül M iki farklı şekilde RG–modül yapıldı.

M'nin R–modül yapısı ile RG–modül yapısı bir çok farklı özelliklere sahiptir. Bir sonraki örnekte, bir RG–modül M'nin altmodülü N, RG–altmodül olarak ayrışamaz modülken R–altmodül olarak ayrışabilir modüldür.

Örnek 3.1.5 $R = \mathbb{C}$, $M = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ *olsun.* M*'den* M*'ye iki farklı fonksiyon* f_1, f_2

$$\begin{array}{llllll} f_1 : & M & \longrightarrow & M, & (x, y) & \longmapsto & f_1(x, y) = (-y, x) \\ f_2 : & M & \longrightarrow & M, & (x, y) & \longmapsto & f_2(x, y) = (x, -y) \end{array}$$

olsun. f_1, $f_2 \in End_R M$ *olduğu açıktır.*

G*'den* $End_R M$*'e bir fonksiyon* τ, $\tau(e) = 1$ *(1,* M*'den* M*'e özdeşlik dönüşümü),* $\tau(a) = f_1$ *ve* $\tau(b) = f_2$ *şeklinde tanımlansın.* τ*'nun bir grup homomorfizması olduğunu göstermek gerekir. Öncelikle*

$$\begin{array}{c} \tau(a)\tau(e)(m) = (f_1 \circ 1)(m) = f_1(m) = \tau(a)(m) = \tau(ae)(m) \\ \tau(b)\tau(e)(m) = (f_2 \circ 1)(m) = f_2(m) = \tau(b)(m) = \tau(be)(m) \end{array}$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca, her $m = (x, y) \in M$, $g_1 = a^{i_1}b^{j_1}$, $g_2 = a^{i_2}b^{j_2} \in D_8$, $1 \leq i, j \leq 3$, *için*

$$\tau(g_1g_2)(m) = \tau(a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2})(m) = \tau(g_1)\tau(g_2)(m)$$

olduğu gösterilmelidir. Bunun için $\tau(ab)(m) = \tau(a)\tau(b)(m)$ *olduğunu göstermek yeterli olacaktır.*

$$\begin{aligned}
\tau(a)\tau(b)(m) &= f_1(f_2(m))\\
&= \tau(a)(\tau(b)(x,y))\\
&= \tau(a)(-y,x)\\
&= (-yi,-xi)\\
&= (x,y)(ab)\\
&= \tau(ab)(m)
\end{aligned}$$

olduğundan τ *bir grup homomorfizmasıdır. Ayrıca, her* $m = (x,y) \in M$ *için*

$$\begin{array}{ll}
ma = (x,y)a = f_1(x,y) = (-y,x), & (x,y)a^2 = (-x,-y),\\
(x,y)a^3 = (y,-x), & mb = (x,y)b = f_2(x,y) = (x,-y),\\
(x,y)ba = (y,x), & (x,y)ba^2 = (-x,y),\\
(x,y)ba^3 = (-y,-x) &
\end{array}$$

olarak elde edilir. RG *ayrışabilir halka olduğu için* M *de bir ayrışabilir* RG*–modüldür.* M*'nin bir öz altmodülü* N *varsa ve* $N \neq M$ *ise* $\dim_R N = 1$*'dir. Bu durumda* $(\alpha,\beta) \in M$ *için* $N = R(\alpha,\beta)$*'dir ve bu sebeple*

$$\begin{array}{l}
(\alpha,\beta)a = f_1(\alpha,\beta) = (-\beta,\alpha)\\
(\alpha,\beta)b = f_2(\alpha,\beta) = (\alpha,-\beta)
\end{array}$$

elde edilir. N*,* M*'nin bir* RG*–altmodülü olduğu için* (α,β)*,* $(-\beta,\alpha)$*,* $(\alpha,-\beta) \in N$*'dir. Ayrıca,* $(\alpha,\beta)+$ $(\alpha,-\beta) = (2\alpha,0) \in N$ *ve* $0 \neq r_1 \in RG$ *için* $(2\alpha,0) = (\alpha,\beta)r_1$*'dir. Bu sebeple,* $\beta = 0$*'dır. Buna ek olarak,* $(\alpha,\beta)-(\alpha,-\beta) = (0,2\beta) \in N$ *ve* $0 \neq r_2 \in RG$ *için* $(0,2\beta) = r_2(\alpha,\beta)$*'dir. Bu sebeple* $\alpha = 0$*'dır. Yani,* $\alpha = \beta = 0$*'dır. Dolayısıyla,* $N = \{0\}$*'dır ve* M *basit* RG*–modüldür. Bu durumda* M *bir devirli* RG*–modüldür (*$m \in M$*,* $RGm = M$*). Fakat,* $\dim_R M = 2$*'dir ve* M*'nin* R*–altmodülleri vardır.*

RG–modül M'nin her RG–altmodülünün R–altmodül olduğu açıktır; fakat genel olarak bunun tersi doğru değildir. G'den $End_R(M)$'e bir grup homomorfizması τ için $\tau(G) \subseteq End_R(M)$'dir.

Tanım 3.1.6 *M bir RG–modül ve N, M'nin $R-$altmodülü olmak üzere, her $f \in \tau(G)$ için $f(N) \subseteq N$ ise N'ye τ–tam değişmez altmodül denir.*

Lemma 3.1.7 *N bir RG–modül M'nin R–altmodülü olmak üzere $G(N) = \sum_{g\in G} Ng$, N'yi içeren minimal RG–altmodüldür.*

İspat. $G(N)$'nin bir RG–altmodül olduğu açıktır. $G(N)$'nin N'yi içeren minimal RG–altmodül olduğu gösterilmelidir. N_1, $N \subset N_1 \subset G(N)$ koşulunu sağlayan bir RG–altmodül olsun. N_1, N yi içeren bir RG–altmodül olduğu için, $n \in N$ olmak üzere her $g \in G$ için $ng \in N_1$'dir. Bu yüzden, $N_1 = G(N)$ olmak zorundadır. ∎

Lemma 3.1.8 *N bir RG–modül M'nin maksimal R–altmodülü ise $G(N) = N$ veya $G(N) = M$'dir. Ayrıca, N, τ–tam değişmez altmodül ise $G(N) = N$'dir. N, τ–tam değişmez altmodül değilse $G(N) = M$'dir.*

İspat. $N \subseteq G(N) \subseteq M$ olduğu açıktır. N, τ–tam değişmez altmodül ise her $f \in \tau(G)$ için $f(N) \subseteq N$'dir. Böylece, her $g \in G$ için $Ng \subseteq N$ ve $G(N) = N$'dir. Ayrıca, N, τ–tam değişmez altmodül değilse N maksimal olduğu için $G(N) = M$'dir. ∎

Teorem 3.1.9 *M sonlu üretilmiş RG–modül ve N, M'nin tek maksimal R–altmodülü olsun. N, τ–tam değişmez altmodül değilse M devirli RG–modüldür.*

İspat. N, τ–tam değişmez altmodül olmadığı için $N \neq G(N)$ ve $G(N) = M$'dir. Böylece $ng \in G(N)$, $ng \notin N$ olacak şekilde $g \in G$, $n \in N$ vardır. Bu nedenle, $ngRG$, M'nin RG–altmodülüdür ve N, $ngRG$'yi içermez. Ayrıca, $ngRG$, M'nin R–altmodülüdür. N, M'nin tek maksimal R–altmodülü olduğu için $ngRG = M$'dir. ∎

Lemma 3.1.10 *M bir RG–modül olsun. N, M'nin esas R–altmodülü ise $G(N)$, M'nin esas RG–altmodülüdür.*

İspat. L, $G(N) \cap L = 0$ olacak şekilde M'nin RG–altmodülü olsun. N, M'nin büyük R–altmodülü olduğu için $N \cap L = 0$'dır. Böylece, $L = 0$'dır. Bu nedenle, $G(N)$, M'nin esas RG–altmodülüdür. ∎

Lemma 3.1.11 *τ, G'den $End(M)$'e bir grup homomorfizası olsun. N, M'nin atık R–altmodülü ise $Ng = \tau(g)(N)$, M'nin atık R–altmodülüdür.*

İspat. L, M'nin RG–altmodülü olsun. $L + \tau(g)(N) = M$ olduğunu kabul edelim. O halde, N, M'nin atık R–altmodülü olduğu için $(\tau(g))^{-1}(L) + N = M$'dir. Böylece, $M = (\tau(g))^{-1}(L)$'dir. Bu $L = M$ demektir ve Ng, M'nin atık R–altmodülüdür. ∎

Lemma 3.1.12 *M sonlu üretilmiş RG–modül olsun. N, M'nin atık R–altmodülü ise $G(N)$, M'nin atık RG–altmodülüdür.*

İspat. $G(N) = M$ olduğunu kabul edilirse $G = \{e, g_1, ..., g_k\}$ için

$$G(N) = \sum_{g \in G} Ng = Ne + Ng_1 + ... + Ng_k = M$$

sonucu elde edelir. N, M'nin atık R–altmodülü olduğu için $Ng_1 + ... + Ng_k = M$ dir. O halde, Lemma 3.1.11'den Ng_1, M'nin küçük R–altmodülüdür ve $Ng_2 + ... + Ng_k = M$'dir. Böyle devam edilirse Ng_{k-1}, M'nin atık R–altmodülü olduğu için $Ng_k = M$'dir. Bu bir çelişkidir ve $G(N) \neq M$'dir.

Diğer yandan, $G(N) = N + Ng_1 + ... + Ng_n$, M'nin atık R–altmodüllerinin homomorf görüntülerinin toplamı olduğu için $G(N)$, M'nin atık R–altmodülüdür. L,

$G(N)+L = M$ olacak şekilde M'nin RG–altmodülü olsun. L M'nin R–altmodülü de olduğu için $G(N) + L = M$'dir. Böylece, $L = M$'dir ve $G(N)$, M'nin atık RG–altmodülüdür. ∎

Teorem 3.1.13 *M bir RG–modül olmak üzere $Rad_R M$, M'nin bir RG–altmodülüdür ve $Rad_R M \subseteq Rad_{RG} M$'dir.*

İspat. $Rad_R M$, M'nin atık R–altmodüllerinin toplamıdır ve $Rad_R M$, M'nin tam değişmez R–altmodülüdür. Bu yüzden, $(G)(Rad_R M) \subseteq Rad_R M$'dir ve $Rad_R M$ M'nin RG–altmodülüdür. Ayrıca, Lemma 3.1.12'den

$$Rad_R M = \sum_{N<<_R M} N \subseteq \sum_{N<<_{RG} M} G(N) \subseteq Rad_{RG} M.$$

elde edilir. Bu nedenle, $Rad_R M \subseteq Rad_{RG} M$'dir. ∎

Lemma 3.1.14 *M bir serbest RG–modül ve H, G'nin bir altgrubu olsun. Bu durumda M bir serbest RH–modüldür ve serbest R–modüldür.*

İspat. $S = \{m_i : i \in I\}$, M'nin bir RG–bazı ve $m \in M$ olsun. Bu durumda m, S bazı ile sonlu toplam olarak tek şekilde yazılabilir ve $m = \sum_{i \in I} r_i m_i$ için $r_i = \sum_{g_i \in G} g_i r_{g_i} \in RG$. $T = \{y_j : y_j \in G,\ j \in J\}$ G'de H'nin bir sağ transversali olsun. Bu durumda her i için $j \in J$ vardır; öyle ki $g_i \in Hy_j$'dir. Böylece, $h_{ji} \in H$ için $g_i = h_{ji} y_j$'dir. O halde, $r_{h_{ji}} = r_{g_i}$ olmak üzere $r_i = \sum_{h_{ji} \in T} h_{ji} r_{h_{ji}} y_j$'dir ve m, RH'nin elemanlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılırsa $m = \sum_{h_{ji} \in T} h_{ji} r_{h_{ji}} (y_j m_i)$'dir. Böylece, yeni $S' = \{y_j m_i : i \in I,\ j \in J\}$ kümesi elde edilir.

S' kümesinin lineer bağımsız olduğu gösterilmelidir. Bazı $i \in I$, $j \in J$ için $r_{ji} \in RH$ olmak üzere $\sum_{i \in I, j \in J} (y_j m_i) r_{ji} = 0$ olduğu kabul edilirse S, M'nin bir RG–bazı ve $y_j r_{ji} \in RG$ olduğundan her $i \in I$, $j \in J$ için $(y_j r_{ji}) = 0$'dır. Buradan $r_{ji} = 0$ ve $S' = \{y_j m_i : i \in I, j \in J\}$'nin lineer bağımsız olduğu görülür. Böylece, M bir serbest RH–modüldür.

Özel olarak, $H = \{e\}$ için M bir serbest $R\{e\}$–modüldür. Dolayısıyla, M bir serbest R–modüldür. ∎

Lemma 3.1.14'ün tersi genel olarak doğru değildir.

Teorem 3.1.15 *M bir RG–modül, G sonlu bir grup ve $|G|$, R'de terslenebilir olsun. O halde, M bir projektif R–modüldür ancak ve ancak M bir projektif RG–modüldür.*

İspat. M bir projektif R–modül olsun. Bu durumda A ve B, RG–modüller ve α ve

β, RG–homomorfizmalar olmak üzere aşağıdaki diagram var olsun.

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \downarrow^{\beta} & & \\ A & \underset{\alpha}{\longrightarrow} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

A ve B'nin R–modüller ve α ve β'nın R–homomorfizmalar olduğu açıktır. M'den A'ya bir R–homomorfizma φ vardır ve $\beta = \alpha\varphi$'dir. M'den A'ya her $m \in M$ için $\bar{\varphi}$'yi şöyle tanımlansın:

$$\bar{\varphi}(m) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(mg)g^{-1}$$

$\bar{\varphi}$'nün bir R–homomorfizma olduğu açıktır. Her $m \in M$, $h \in G$ için

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(mh) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(mhg)g^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G}\varphi(mg')g'^{-1}h,\ g' = hg \\ &= (\frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G}\varphi(mg')g'^{-1})h \\ &= \bar{\varphi}(m)h. \end{aligned}$$

dir. Bu nedenle, $\bar{\varphi}$ bir RG–homomorfizmadır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \alpha\ \bar{\varphi}(m) &= \alpha(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(mg)g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(\varphi(mg)g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\alpha\varphi(mg))g^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\beta(mg)g^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\beta(mgg^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\beta(m) \\ &= \frac{1}{|G|}\,|G|\,\beta(m) \\ &= \beta(m) \end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı, $\bar{\varphi}$ istenen RG–homomorfizmadır ve M projektif RG–modüldür.

Tersine, M bir projektif RG–modül olsun. Bu durumda $F = M \oplus N$ olacak şekilde bir serbest RG–modül F ve bir RG–modül N vardır. Lemma 3.1.14'den, F serbest R–modüldür ve M bir projektif R–modüldür. ∎

Teorem 3.1.16 *M sonlu üretilmiş projektif R–modül olsun. RB ayrışamaz RB–modül ve RA halka olarak $\bigoplus_{i=1}^{n} R$'ye ($n = |A|$) izomorf olacak şekilde G'nin A, B altgrupları için $G = AB$ şeklinde G'nin bir ayrışımı varsa M serbest R–modüldür.*

İspat. Eğer M projektif R–modül ise M projektif RG–modüldür. Böylece bir pozitif tamsayı m ve RG–modül N için $\oplus_{i=1}^{m} RG \cong M \oplus N$ dir.

Hipoteze göre RA, halka olarak $\oplus_{i=1}^{n} R$ 'ye izomorftur. $RG = R(AB) = (RA)B$'dir (Karpilovsky 1987). Böylece, RG halka olarak $\oplus_{i=1}^{n} RB$'ye izomorftur. Sonuç olarak, $K = \oplus_{i=1}^{m} (\oplus_{i=1}^{n} RB) \cong M \oplus N$ elde edilir. Bu nedenle, M Krull-Schmidt Teoremi'nden K'nın sonlu sayıda ayrışamaz RB–altmodüllerinin direkt toplamına izomorftur. Diğer yandan, RB ayrışamaz RB–modül olduğu için M, RB'lerin direkt toplamına izomorftur. Bu nedenle, M serbest RB–modüldür ve Lemma 3.1.14'den M serbest R–modüldür. ∎

Teorem 3.1.17 *M bir RG–modül, G bir sonlu grup ve $|G|$ R'de terslenebilir olsun. M injektif R–modüldür ancak ve ancak M injektif RG–modüldür.*

İspat. M bir injektif R–modül olsun. I, RG'nin bir ideali, α bir RG–homomorfizma, i bir RG–içerme fonksiyonu olsun. O halde, I ve RG, R–modüldür; α bir R–homomorfizmadır ve i bir R–içerme fonksiyonudur. M bir injektif R–modül olduğu için $\varphi i = \alpha$ olacak şekilde aşağıdaki değişmeli diagramı sağlayan RG–homomorfizma φ vardır.

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \uparrow^{\alpha} & \nwarrow^{\varphi} & \\ 0 & \longrightarrow & I & \underset{i}{\longrightarrow} & RG \end{array}$$

$m \in M$ için RG'den M'e $\bar{\varphi}(m) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \varphi(mg)g^{-1}$ fonksiyonu ele alınırsa $\bar{\varphi}$'nin bir RG–homomorfizma olduğu Teorem 3.1.15'in ispatında gösterilmiştir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}i(m) &= \bar{\varphi}(m) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \varphi(mg)g^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \varphi(i(mg))g^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(mg)g^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(mgg^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(m) \\ &= \frac{1}{|G|}\,|G|\,\alpha(m) \\ &= \alpha(m). \end{aligned}$$

dir. Böylece, $\bar{\varphi}$ istenen RG–homomorfizmadır ve M bir injektif RG–modüldür.

Tersine, M injektif RG–modül olsun. I, R'nin bir ideali, f bir R–homomorfizma ve i, R–içerim fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki şekilde yazılsın.

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & & \uparrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \underset{i}{\longrightarrow} & R \end{array}$$

Diğer yandan IG, RG'nin bir idealidir ve $\bar{f}$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\bar{f}(\sum_{g\in G} r_g g) = \sum_{g\in G} f(r_g)g.$$

$\bar{f}$ 'nin RG–homomorfizmadır; çünkü $r_g \in I$ için

$$\begin{aligned} \bar{f}(\sum_{g\in G} r_g gh) &= \sum_{g\in G} f(r_g)gh \\ &= (\sum_{g\in G} f(r_g)g)h \\ &= \bar{f}(\sum_{g\in G} r_g g)h \end{aligned}$$

dir.

M injektif RG–modül olduğu için $m \in M$ için $\bar{f}(\sum_{g\in G} r_g g) = m(\sum_{g\in G} r_g g)$-dir. Ayrıca, $x \in I$, $xe \in IG$'dir. Böylece, $\bar{f}(xe) = f(x)e$'dir ve

$$\bar{f}(xe) = mxe = mex = mx = f(x)e = f(x)$$

dir. Bu nedenle, R'den M'e istenen R–homomorfizma g, $g(r) = mr$ $(r \in R)$ şeklinde tanımlanır. Böylece, M injektif R–modüldür. ∎

Teorem 3.1.18 *(Genelleştirilmiş Maschke Teoremi) R bir değişmeli halka, G bir sonlu grup ve $|G|$, R'de terslenebilir olmak üzere RG yarı-basittir ancak ve ancak R yarı-basittir.*

İspat. RG yarı-basit, G bir sonlu grup ve G'nin mertebesi $|G|$, R'de terslenebilir olsun. Her R–modül M, her $g \in G$ için $\tau : G \longrightarrow End_R(M)$, $g \mapsto 1$ tanımı ile bir RG–modüldür. Teorem 3.1.17'den her injektif RG–modül M bir injektif R–modül olduğu için R üzerinde tanımlı her sağ modül injektif olur. Böylece, R yarı-basittir.

Diğer taraftan, R yarı-basit, G bir sonlu grup ve $|G|$, R'de terslenebilir olsun. Her RG–modül M bir R–modüldür. R yarıbasit olduğu için M injektif R–modüldür. Teorem 3.1.17'den her injektif R–modül M injektif RG–modüldür. Bu nedenle RG üzerinde tanımlı her modül injektiftir. Böylece, RG yarı-basittir. ∎

3.2. Sonlu Grup Üzerinde Tanımlı RG–Modüllerin Sokulu

Altbölüm 3.1.'de, G bir sonlu grup olmak üzere $End_R(M)$'yi kullanarak bir R–modül M'yi RG–modül yapmak için gerekli yapı tanıtılmıştır ve $Rad_R M$ ile $Rad_{RG} M$ arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu altbölümde, bu yapı sayesinde M'nin sokulu hem R–modül hem de RG–modül olarak incelenmiştir; $Soc_R M$ ve $Soc_{RG} M$ arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

M bir RG–modül olsun. R yarı-basit halka ve G'nin mertebesi R halkasının terslenebilir bir elemanı ise genelleştirilmiş Maschke Teoremi gereği RG de yarı-basit bir halkadır. Bu yüzden, her RG–modül hem R–modül hem RG–modül olarak yarı-basittir ve $M = Soc_R M = Soc_{RG} M$'dir. Bu sonuçlar üzerinden ve bu bakış açısıyla düşünülecek olunursa genel olarak hangi koşullarda $Soc_R M$'nin $Soc_{RG} M$'ye eşit olduğu ($Soc_R M = Soc_{RG} M$) sorusunu sormak doğaldır. Diğer yandan, aşağıdaki Örnek 3.2.1 bir RG–modül M'nin basit RG–altmodüllerinin basit R–modül olmak zorunda olmadığını gösterir.

Örnek 3.2.1 *$R = \mathbb{C}$, $M = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ ve $G = Q_8 = \langle a, b : a^4 = e, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ olmak üzere f_1, f_2 aşağıdaki gibi verilsin. $m = (x, y) \in M$ için*

$$\begin{array}{rcccccl} f_1 : & M & \longrightarrow & M & , & (x,y) & \longmapsto & f_1(x,y) = (xi, -yi). \\ f_2 : & M & \longrightarrow & M & , & (x,y) & \longmapsto & f_2(x,y) = (-y, x). \end{array}$$

olsun. f_1, $f_2 \in End_R M$ olduğu açıktır.

G'den $End_R M$'e τ, $\tau(e) = 1$ (1, M'den M'e özdeşlik dönüşümü) ve $\tau(a) = f_1$ ve $\tau(b) = f_2$ ile tanımlansın. τ'nun bir grup homomorfizması olduğunu göstermek gerekir. Öncelikle

$$\tau(a)\tau(e)(m) = (f_1 \circ 1)(m) = f_1(m) = \tau(a)(m) = \tau(ae)(m)$$
$$\tau(b)\tau(e)(m) = (f_2 \circ 1)(m) = f_2(m) = \tau(b)(m) = \tau(be)(m)$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca, her $m = (x, y) \in M$*,* $g_1 = a^{i_1}b^{j_1}$*,* $g_2 = a^{i_2}b^{j_2} \in D_6$*,* $1 \leq i, j \leq 2$ *için*

$$\tau(g_1g_2)(m) = \tau(a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2})(m) = \tau(g_1)\tau(g_2)(m)$$

olduğunu gösterilmelidir. Bunun için $\tau(ab)(m) = \tau(a)\tau(b)(m)$ *olduğunu göstermek yeterli olacaktır.*

$$\begin{aligned}
\tau(a)\tau(b)(m) &= f_1(f_2(m)) \\
&= \tau(a)(\tau(b)(x, y)) \\
&= \tau(a)(-y, x) \\
&= (-yi, -xi) \\
&= (x, y)(ab) \\
&= \tau(ab)(m)
\end{aligned}$$

Böylece, τ*'nun bir grup homomorfizmasıdır. Her* $m = (x, y) \in M$ *için*

$$\begin{array}{ll}
ma = (x, y)a = f_1(x, y) = (xi, -yi), & (x, y)a^2 = (-x, -y), \\
(x, y)a^3 = (-xi, yi), & mb = (x, y)b = f_2(x, y) = (-y, x), \\
(x, y)ab = (yi, xi), & (x, y)a^2b = (y, -x), \\
(x, y)a^3b = (-yi, -xi) &
\end{array}$$

elde edilir. Bu nedenle, M *bir* RG*–modüldür. Ayrıca,* RG *halkası üzerinde* M *bir yarı-basit modüldür; çünkü* RG *bir yarı-basit halkadır.* RG *halkası üzerinde* M*'nin bir basit modül olduğunu göstermek gerekir.*

M*'nin* RG *halkası üzerinde basit bir modül olmadığı kabul edilsin. O halde,* M*'nin bir öz* RG*–altmodülü vardır. Bu* RG*–modül* N *ile gösterilsin.* N*,* M*'nin bir* RG*–altmodülü olduğu için aynı zamanda bir* R*–altmodülüdür.* $\dim_R N = 2$ *ise* $M = N$ *olur. Bu mümkün değildir. Böylece* $\dim_R N \leq 1$*'dir.* $\dim_R N = 1$ *ise* $N = \{(\alpha, \beta)r \mid \alpha, \beta \in R, r \in R\}$ *yazılabilir.* N*,* M*'nin* RG*–altmodülü olduğu için aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

$$(\alpha, \beta)a = f_1(\alpha, \beta) = (\alpha i, -\beta i).$$
$$(\alpha, \beta)b = f_2(\alpha, \beta) = (-\beta, \alpha).$$

Böylece, (α, β)*,* $(\alpha i, -\beta i)$*,* $(-\beta, \alpha) \in N$*'dir. Buna ek olarak,* $(\alpha i, -\beta i)i = (-\alpha, \beta) \in N$ *ve* $(\alpha i, -\beta i)(-i) = (\alpha, -\beta) \in N$*'dir.*

$\alpha \neq 0$ *ise* $(\alpha, \beta)+ (\alpha, -\beta) = (2\alpha, 0) \in N$*'dir ve* $0 \neq r_1 \in R$ *için* $(2\alpha, 0) = (\alpha, \beta)r_1$*'dir. Bu nedenle,* $\beta = 0$*'dır. Bu durumda* $(\alpha, 0)b = (0, \alpha) \in N$ *ve* $\alpha = 0$*'dır.*

$\alpha = 0$ *ise* $(0, \beta)b = (\beta, 0) \in N$ *ve* $\beta = 0$*'dır. Böylece,* $\alpha = \beta = 0$ *sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla,* $N = \{0\}$*'dır ve* RG *halkası üzerinde* M *bir basit modüldür. Diğer taraftan,* $\dim_R M = 2$*'dir. Böylece,* M*'nin* R *halkası üzerinde tanımlı öz alt-*

modüllerinin var olduğu anlaşılır. Bu nedenle, R halkası üzerinde M bir basit modül değildir.

Lemma 3.2.2 *M, RG halkası üzerinde bir modül olsun. $Soc_R M$, M'nin bir RG–altmodülüdür.*

İspat. $Soc_R M$, $End_R(M)$'nin bir R–altmodülüdür. Dolayısıyla M'nin tam değişmez R–altmodülüdür. Bu nedenle, $\tau(g)(m) = gm$ eşitliğinden her $g \in G$ için $(Soc_R M)g = \tau(g)(Soc_R M) \subseteq Soc_R M$ 'dir ve $G(Soc_R M) = Soc_R M$'dir. Böylece $Soc_R M$, M'nin bir RG–altmodülüdür. ∎

Lemma 3.2.3 *M, RG halkası üzerinde bir modül olsun. M'nin $Soc_R M \leq B$ ve $Soc_{RG} M \leq B$ olacak şekilde bir RG–altmodülü B vardır.*

İspat. $Soc_R M$, M'nin tüm esas R–altmodüllerinin kesişimi olduğu için $i \in I$ ve I, M'nin tüm esas R–altmodülleri için bir indeks ve $N_i \leq_e M$ olmak üzere $Soc_R M = \bigcap_{N_i \leq_e M} N_i$'dir. Benzer şekilde, $Soc_{RG} M$ M'nin tüm esas RG–altmodüllerinin kesişimi olduğu için $j \in J$ ve J, M'nin tüm esas RG–altmodülleri için bir indeks ve $L_j \leq_e M$ olmak üzere $Soc_{RG} M = \bigcap_{L_j \leq_e M} L_j$'dir. $B = \bigcap_{N_i \leq_e M} G(N_i)$ (M'nin tüm R–altmodülleri N_i için) olarak alalım. $G(N_i)$, $i \in I$ olmak üzere, M'nin bir RG–altmodülüdür; çünkü $n \in N_i$, $g, h \in G$, $r \in R$ için $ng \in N_i G$, $rh \in RG$ ve $(ng)rh = (rn)gh \in G(N_i)$'dir. Bu yüzden, B M'nin RG–altmodüllerinin kesişimi olduğu için M'nin bir RG–altmodülüdür. Böylece, M'nin bir R–altmodülüdür. Ayrıca, N_i, M'nin bir esas R–altmodülü olduğu için Lemma 3.1.10'dan $G(N_i)$, M'nin bir esas RG–altmodülüdür. Lemma 3.1.7'den $G(N_i)$ N_i'yi içeren minimal RG–altmodül olduğu için

$$Soc_R M = \bigcap_{N_i \leq_e M} N_i \leq \bigcap_{N_i \leq_e M} G(N_i)$$

ve

$$Soc_{RG} M = \bigcap_{L_j \leq_e M} L_j \leq \bigcap_{N_i \leq_e M} G(N_i)$$

dir. Bu nedenle, $B = \bigcap_{N_i \leq_e M} G(N_i)$ hem $Soc_R M$ ve hem $Soc_{RG} M$ için bir üst sınırdır. ∎

Bir sonraki örnekte görüleceği üzere RG–modül M'nin basit R–altmodülü S için $G(S)$, M'nin bir RG–altmodülü değildir. Ayrıca, RG–modül M'nin bir basit R–altmodülü S için $G(S)$'nin M'nin basit RG–altmodülü olduğu durumlar da vardır.

Örnek 3.2.4 *$R = \mathbb{Z}_3$ ve $G = C_2 = \langle a : a^2 = e \rangle$ olmak üzere $RG = \mathbb{Z}_3 C_2$ grup halkasını ele alalım. Maschke Teoremi gereği, $|C_2| \leq \infty$ ve $\mathbb{Z}_3$ cisminin karakteri 3 grubun mertebesi $|C_2| = 2$'ye bölünmediği için $\mathbb{Z}_3 C_2$ yarı-basittir. $\mathbb{Z}_3 C_2$ yarı-basit olduğu için Artin-Weddernburn Teoremi'ne göre bir tek ayrışımı vardır. Bu durumda $|C_2| = 2$ olduğu için R–modül olarak $\mathbb{Z}_3 C_2 \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$'dir. Burada $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3 C_2$'nin bir* *basit R–altmodülüdür. Ayrıca, RG–modül olarak $\mathbb{Z}_3C_2 \simeq \mathbb{Z}_3C_2(\frac{1+a}{2}) \oplus \mathbb{Z}_3C_2(\frac{1-a}{2})$'dir. Burada $\mathbb{Z}_3C_2(\frac{1+a}{2})$ ve $\mathbb{Z}_3C_2(\frac{1-a}{2})$ $\mathbb{Z}_3C_2$'nin basit RG–altmodülleridir.*

Regüler RG–modül $M = \mathbb{Z}_3C_2$ ve M'nin basit R–modülü $S = \mathbb{Z}_3$ düşünülecek olursa $G(S)$ bir RG–modüldür; fakat $G(S) = \mathbb{Z}_3C_2 = M$ yukarıdaki açıklamalardan anlaşılacağı üzere bir basit RG–modül değildir.

M, RG halkası üzerinde tanımlı bir modül olsun. M'nin sıfırdan farklı bir basit R–altmodülü T için $G(T)$'nin sıfırdan farklı olduğu açıktır. S, M'nin bir RG–altmodülü ve basit R–altmodülü ise her RG–altmodül bir R–altmodül olduğu için S, M'nin basit RG–altmodülüdür. Ayrıca, S, M'nin basit R–altmodülü ise $G(S)$, M'nin bir yarı-basit RG–altmodülüdür.

Teorem 3.2.5 *M bir RG–modül ve S, M'nin bir basit R–altmodülü olsun. Eğer S, $G(S)$'nin bir esas basit R–altmodülü ise $G(S)$, M'nin bir basit RG–altmodülüdür.*

İspat. $\mathcal{D} \neq \{0\}$, $G(S)$'nin bir RG–altmodülü olsun. Bu durumda $\mathcal{D}$, $G(S)$'nin bir R–altmodülüdür ve hipotez gereği $\mathcal{D} \cap S = S$ sonucunu elde edilir. Bu yüzden, $S \leq \mathcal{D}$'dir. Böylece, $G(S) = \mathcal{D}$'dir. ∎

Aşağıda ifade edilen sonuçlar ile bir basit R–altmodülden basit RG–altmodülün nasıl elde edildiği üzerine odaklanarak $Soc_R M$ ve $Soc_{RG} M$ arasındaki diğer bazı ilişkiler verilecektir.

Lemma 3.2.6 *M bir RG–modül ve S, M'nin τ–tam değişmez basit R–altmodülü olsun. Bu durumda S, M'nin basit RG–altmodülüdür.*

İspat. S, M'nin bir τ–tam değişmez R–altmodülü olduğu için M'nin bir RG–altmodülüdür. Ayrıca S, M'nin basit R–altmodülüdür. Bu durumda her RG–altmodül bir R–modül olduğu için S, M'nin basit RG–altmodülüdür. ∎

Sonuç 3.2.7 *M bir RG–modül ve M'nin her basit R–altmodülü τ–tam değişmez ise $Soc_R M \subseteq Soc_{RG} M$'dir.*

İspat. $Soc_R M$ M'nin tüm R–altmodüllerinin toplamıdır ve Lemma 3.2.6'dan

$$Soc_R M = \{\sum_{i \in I} S_i \mid S_i \subseteq M\} \subseteq \{\sum_{i \in I} T_i \mid T_i \subseteq M\} = Soc_{RG} M$$

dir. Burada $\{S_i \mid i \in I\}$ M'nin tüm R–altmodülleridir ve $\{T_i \mid i \in I\}$, M'nin tüm RG–altmodülleridir. ∎

Teorem 3.2.8 *M bir RG–modül olmak üzere M'nin hiçbir basit R–altmodülü birbirine izomorf değil ise $Soc_R M \subseteq Soc_{RG} M$'dir.*

İspat. $Soc_R M$, M'nin tüm basit R–altmodüllerinin toplamıdır. I, M'nin tüm basit

R–altmodülleri için bir indeks, $i \in I$ için S_i, M'nin bir basit R–altmodülü ve $J = \{K : K \simeq S_i\}$ olsun. Kabul gereği, $J = \{S_i\}$'dir. τ, $G = \{e, g_1, ..., g_k\}$ olmak üzere, G'den $End_R(M)$'e bir grup homomorfizması ise tüm $i \in I$ ve $1 \leq j \leq k$ için $S_i g_j = \tau(g_j)S_i \in J$ veya 0'dır. Bu durumda her $i \in I$ için S_i bir RG–altmodüldür. Böylece her $i \in I$ için S_i bir basit RG–altmodüldür. Bu nedenle, $Soc_R M \subseteq Soc_{RG} M$'dir. ∎

3.3. Grup Modüllerin Altmodül Karakterizasyonu ve Grup Modüllerin Altmodüllerine Ayrışımı

Bu altbölümde, Koşan, Lee ve Zhou (2014)'nun literatüre kazandırdıkları grup modül üzerine çalışılmıştır. Grup modülün bölüm modülü ve alakalı modülün bölüm modülü arasındaki ilişki, grup modüllerin altmodüllerinin bazı özellikleri ve grup modüllerin altmodüllere ayrışımı üzerine yeni sonuçlar verilmiştir. Ayrıca, grup halkarı teorisinde önemli bir yer tutan augmentasyon fonksiyon ve augmentasyon idealin grup modüller için karşılıkları, bunlar sayesinde elde edilen bazı kavramlar ve teoriler grup modüllere genişletilerek kullanılmış ve ispatlanmıştır.

Teorem 3.3.1 *G bir sonlu grup, M, R halkası üzerinde tanımlı bir modül ve N, M'nin bir R–altmodülü olsun. NG, MG'nin bir RG–altmodülüdür. Ayrıca, RG–modüller olarak $MG/NG \simeq (M/N)G$'dir.*

İspat. Öncelikle, NG'nin MG'nin bir RG–altmodülü olduğu gösterilecektir. Bunun için her $r \in R$, her $h \in G$ ve $\eta = \sum_{g\in G} n_g g \in NG$ için $\eta r \in NG$ ve $\eta h \in NG$ olduğunu göstermek yeterlidir. MG'deki skalar çarpım tanımı gereği $\eta r = (\sum_{g\in G} n_g g)r = \sum_{g\in G}(n_g r)g$'dir. N, M'nin R–altmodülü olduğu için $n_g r \in N$, $\sum_{g\in G}(n_g r)g \in NG$'dir. Ayrıca, $\eta h = (\sum_{g\in G} n_g g)h = \sum_{gh\in G} n_{gh} gh \in NG$'dir. Bu yüzden, NG, MG'nin bir RG–altmodülüdür.

MG'den $(M/N)G$'ye bir θ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\theta : \; MG \longrightarrow (M/N)G \;, \; \sum_{h\in G} a_h h \longmapsto \theta(\sum_{h\in G} a_h h) = \sum_{h\in G}(a_h + N)h.$$

Her $\alpha = \sum_{h\in G} a_h h$, $\beta = \sum_{h\in G} b_h h \in MG$ ve her $r \in R$, $g \in G$ için

$$\begin{aligned}\theta(\alpha+\beta) &= \sum_{h\in G}(a_h + b_h + N)h \\ &= \sum_{h\in G}(a_h + N)h + \sum_{h\in G}(b_h + N)h \\ &= \theta(\alpha) + \theta(\beta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta(\alpha r) &= \sum_{h\in G}(a_h r + N)h \\ &= (\sum_{h\in G}(a_h + N)h)r\end{aligned}$$

$$= \theta(\alpha)r.$$

$$\begin{aligned}
\theta(\alpha g) &= \theta((\sum_{h\in G} a_h h)g) \\
&= \theta(\sum_{hg\in G} a_{hg} hg) \\
&= (\sum_{h\in G}(a_h + N)h)g \\
&= \theta(\alpha)g.
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığı için θ bir RG–homomorfizmadır. Her $\sum_{h\in G}(a_h+N)h \in (M/N)G$ için $\theta(\sum_{h\in G} a_h h) = \sum_{h\in G}(a_h + N)h$ olacak şekilde $\sum_{h\in G} a_h h \in MG$ olduğu için θ bir RG–epimorfizmadır. Ayrıca,

$$Çek\ \theta = \{\alpha = \sum_{h\in G} a_h h \in MG \mid \theta(\alpha) = \theta(\sum_{h\in G} a_h h) = \sum_{h\in G}(a_h+N)h = \sum_{h\in G} Nh\}$$

dir. O halde, her $h \in H$ için $a_h \in N$ ve $\sum_{h\in G} a_h h \in NG$'dir. Böylece, $Çek\ \theta = NG$'dir. Modüller için Birinci İzomorfizma Teoremi gereği $MG/NG \simeq (M/N)G$'dir. ∎

Lemma 3.3.2 *L, MG'nin bir RG–altmodülü ve $m_{g_i} \in M$, $g_i \in G$ olmak üzere $L_M = \{m \in M : \exists x \in L, x = me + \mu, \mu \in MG\}$, M'nin bir R–altmodülüdür. Ayrıca, $m_{g_1}g_1 + m_{g_2}g_2 + ... + m_{g_t}g_t \in L$'dir ancak ve ancak her $g_i \in G$, $1 \le i \le t$ için $m_{g_i} \in L_M$'dir.*

İspat. Öncelikle, her $m \in L_M$ için L_M'nin tanımı gereği $m \in M$ ve $L_M \subseteq M$'dir. Ayrıca, her m_1, $m_2 \in L_M$ için $\exists x_1 \in L$, $x_1 = m_1e + \mu_1 \in MG$ ve $\exists x_2 \in L$, $x_2 = m_2e + \mu_2$ ve m_1, $m_2 \in L_M$, μ_1, $\mu_2 \in MG$'dir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 \\
&= m_1e + \mu_1 + m_2e + \mu_2 \\
&= (m_1 + m_2)e + (\mu_1 + m_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $m_1 + m_2 \in M$ ve $(\mu_1 + \mu_2) \in MG$ ve L_M'nin tanımı gereği $m_1 + m_2 \in L_M$'dir.

Her $r \in R$ ve her $m \in L_M$ için $\exists x \in L$, $x = me + \mu$, $\mu \in MG$'dir. Buradan

$$\begin{aligned}
xr &= (me + \mu)r \\
&= mre + \mu r
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. M bir R–modül olduğu için $mr \in M$ ve $\mu \in MG$ olduğu için $\mu r \in MG$'dir. L_M'nin tanımı gereği $mr \in L_M$ olur. Böylece, L_M, M'nin bir R–altmodülüdür.

Ayrıca, her $g_i \in G$, $1 \leq i \leq t$ için $m_{g_i} \in L_M$ ise L_M'nin tanımı gereği $m_{g_1}g_1 + m_{g_2}g_2 + ... + m_{g_t}g_t \in L$'dir. $m_{g_1}g_1 + m_{g_2}g_2 + ... + m_{g_t}g_t \in L$ ise L, MG'nin bir RG–altmodülü olduğu için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}(m_{g_1}g_1 + ... + m_{g_t}g_t)g_1^{-1} &= m_{g_1}g_1g_1^{-1} + m_{g_2}g_2g_1^{-1} + ... + m_{g_t}g_tg_1^{-1} \\ &= m_{g_1}e + m_{g_2}g_2g_1^{-1} + ... + m_{g_t}g_tg_1^{-1} \in L.\end{aligned}$$

$m_{g_2}g_2g_1^{-1} + ... + m_{g_t}g_tg_1^{-1} \in MG$ olduğu için ve L_M'nin tanımı gereği $m_{g_1} \in L_M$'dir. Benzer şekilde, $g_i \in G$, $1 \leq i \leq t$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}(m_{g_1}g_1 + ... + m_{gi}g_i + ... + m_{g_t}g_t)g_i^{-1} &= m_{g_1}g_1g_i^{-1} + m_{g_2}g_2g_i^{-1} + ... \\ &\quad + m_{g_i}g_ig_i^{-1} + ... + m_{g_t}g_tg_i^{-1} \\ &= m_{g_i}e + m_{g_1}g_1g_i^{-1} + \\ &\quad m_{g_2}g_2g_i^{-1} + ... + m_{g_t}g_tg_i^{-1}\end{aligned}$$

$m_{g_1}g_1g_i^{-1} + m_{g_2}g_2g_i^{-1} + ...m_{g_{i-1}}g_{i-1}g_{i-1}^{-1} + m_{g_{i+1}}g_{i+1}g_{i-1}^{-1} + ...m_{g_t}g_tg_i^{-1} \in MG$ olduğu için ve L_M'nin tanımı gereği $m_{g_i} \in L_M$'dir. Benzer şekilde devam edilirse G sonlu bir grup olduğundan $1 \leq i \leq t$ için $m_{g_i} \in L$ elde edilir. ∎

Teorem 3.3.3 *M bir R–modül ve N, M'nin bir R–altmodülü ise $NG_M = N$'dir.*

İspat. Tanım gereği, $NG_M = \{m \in M : \exists x \in NG, x = me + \mu, \mu \in MG\}$'dir. $x = me + \mu$, $\mu \in MG$ olacak şekilde $x \in NG$ olsun. $m \in NG_M$'dir. NG'nin tanımı gereği $m \in N$'dir ve $NG_M \subseteq N$'dir. Her $m \in N$ için $x = me + \mu$ ve $\mu \in MG$ ise NG'nin tanımı gereği $\mu \in NG$ ve $x = me + \mu \in NG$'dir. Dolayısıyla, $m \in NG_M$ ve $N \subseteq NG_M$'dir. Böylece, $NG_M = N$'dir. ∎

Teorem 3.3.4 *M bir R–modül olmak üzere N_1 ve N_2, M'nin R–altmodülleri olsun. Bu durumda $N_1G + N_2G = MG$'dir ancak ve ancak $N_1 + N_2 = M$'dir.*

İspat. N_1 ve N_2, M'nin R–altmodülleri olmak üzere $N_1G + N_2G = MG$ olsun. Herhangi bir $m \in M$ elemanı için $me \in MG$'dir. $N_1G + N_2G = MG$ olduğunundan $k_{g_i} \in N_1$ ve $n_{g_j} \in N_2$ için $\sum_{g_i \in G} k_{g_i}g_i \in N_1G$ ve $\sum_{g_j \in G} n_{g_j}g_j \in N_2G$ olmak üzere $me = \sum_{g_i \in G} k_{g_i}g_i + \sum_{g_j \in G} n_{g_j}g_j$ yazabiliriz. Bu eşitlikten dolayı bazı i, j için $g_i = g_j = e$ ve $me = k_{g_i}e + n_{g_j}e = (k_{g_i} + n_{g_j})e$'dir. O halde, $m = k_{g_i} + n_{g_j}$'dir ve $N_1 + N_2 = M$'dir.

Tersine, $N_1 + N_2 = M$ olsun. $\alpha = \sum_{g \in G} m_g g$, MG'nin herhangi bir elemanı olsun. Her $g \in G$ için $n_g \in N_1$ ve $n_g^{'} \in N_2$ olmak üzere $m_g = n_g + n_g^{'}$ yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{g \in G}(n_g + n_g^{'})g \\ &= \sum_{g \in G} n_g g + \sum_{g \in G} n_g^{'} g\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\sum_{g\in G} n_g g \in N_1G$, $\sum_{g\in G} n_g^{'} g \in N_2G$'dir. Böylece, $\alpha = \sum_{g\in G} n_g g + \sum_{g\in G} n_g^{'} g \in N_1G + N_2G$'dir. Bu nedenle, $N_1G + N_2G = MG$'dir. ∎

Teorem 3.3.5 *M bir R–modül olmak üzere N_1 ve N_2 M'nin R–altmodülleri olsun. Bu durumda $N_1G \cap N_2G = 0$'dir ancak ve ancak $N_1 \cap N_2 = 0$'dir.*

İspat. N_1 ve N_2 M'nin R–altmodülleri olmak üzere $N_1G \cap N_2G = 0$ olsun. Herhangi bir $x \in N_1 \cap N_2$ elemanı için $xe \in N_1G \cap N_2G$'dir. $N_1G \cap N_2G = 0$ olduğundan $xe = 0$'dır. MG'nin tanımı gereği $x = 0$'dır.

Tersine, $N_1 \cap N_2 = 0$ ve $\alpha = \sum_{g_i\in G} n_{g_i} g_i$ $N_1G \cap N_2G$'nin herhangi bir elemanı olsun. Bu durumda hem $\alpha = \sum_{g_i\in G} n_{g_i} g_i \in N_1G$ hem de $\alpha = \sum_{g_i\in G} n_{g_i} g_i \in N_2G$'dir. Her $g_i \in G$ için $n_{g_i} \in N_1$ ve $n_{g_i} \in N_2$'dir ve $n_{g_i} \in N_1 \cap N_2 = 0$'dır. Dolayısıyla, her $g_i \in G$ için $n_{g_i} = 0$'dır. Böylece, $\alpha = \sum_{g_i\in G} n_{g_i} g_i = 0$'dır. Bu nedenle, $N_1G \cap N_2G = 0$'dır. ∎

Teorem 3.3.6 *M ve L, R–modüller olsun. MG, LG–injektif ise M, L–injektiftir.*

İspat. I, L'nin bir R–altmodülü ve f, I'dan M'ye bir R–homomorfizma olsun. Öncelikle, IG Lemma 3.3.1'den LG'nin bir RG–altmodülüdür. Bu durumda IG'den MG'ye bir fonksiyon $\hat{f}$, $\sum_{g_i\in G} n_{g_i} g_i \in IG$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\hat{f}(\sum_{g_i\in G} n_{g_i} g_i) = \sum_{g_i\in G} f(n_{g_i}) g_i.$$

$\hat{f}$'nın bir RG–homomorfizma olduğu gösterilecektir. Her $r \in R$ ve $\eta = \sum_{g_i\in G} n_{g_i} g_i \in IG$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\eta r) &= \hat{f}(\sum_{g_i\in G} (n_{g_i} r) g_i) \\
&= \sum_{g_i\in G} f(n_{g_i} r) g_i \\
&= (\sum_{g_i\in G} f(n_{g_i}) g_i) r \\
&= \hat{f}(\eta) r.
\end{aligned}$$

Ayrıca, her $g \in G$ için aşağıdaki eşitlik de geçerlidir:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\eta g) &= \hat{f}(\sum_{g_i\in G} n_{g_i} (g_i g)) \\
&= \sum_{g_i\in G} f(n_{g_i}) (g_i g) \\
&= (\sum_{g_i\in G} f(n_{g_i}) g_i) g
\end{aligned}$$

$$= \hat{f}(\eta)g.$$

O halde $\hat{f}$, IG'den MG'ye bir RG–homomorfizmadır. MG, LG injektif olduğu için LG'den MG'ye bir RG–homomorfizma $\tilde{\varphi}$ vardır; öyle ki $\tilde{\varphi}\mid_{IG}=\hat{f}$'dır. O halde, $i: IG \longrightarrow LG$ içerme homomorfizmasını göstermek üzere aşağıdaki diagram sağlanır.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & IG & \xrightarrow{i} & LG \\ & & \hat{f}\uparrow & \swarrow\tilde{\varphi} & \\ & & MG & & \end{array}$$

Bu durumda her $k \in L$ için $ke \in LG$'dir ve $\tilde{\varphi}(ke) \in MG$'dir. Bazı $m, m_g \in M$ için

$$\tilde{\varphi}(ke) = me + \sum_{g \neq e \in G} m_g g$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu ifade üzerinden L'den M'ye bir R–homomorfizma $k \in L$, $m \in M$ için $\varphi(k) = m$ olarak tanımlansın. O halde, $l \in I$ için $\tilde{\varphi}(le) = \hat{f}(le) = f(l)e \in MG$ olduğu için $\varphi\mid_I = f$'dir. Bu nedenle, $i: I \longrightarrow L$ içerme homomorfizma olmak üzere $\varphi: L \longrightarrow M$ tanımlıdır ve aşağıdaki diagram sağlanır.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & L \\ & & f\uparrow & \swarrow\varphi & \\ & & M & & \end{array}$$

Bu nedenle, M, L–injektiftir. ∎

Grup halkalarında özel tanımlı bir eşkare yardımıyla RG grup halkasının althalkalarına ayrışımı Millies ve Sehgal (2002)'de anlatılmıştır. RG–modül MG benzer fikirle RG–altmodüllerine ayrışılacaktır.

$H = \{h_1, h_2, ..., h_n\}$, G'nin bir altgrubu olmak üzere $\hat{H} = h_1 + h_2 + ... + h_n \in RH$'tır.

Lemma 3.3.7 *G bir grup ve H, G'nin bir sonlu normal altgrubu, R birimli bir halka ve M bir R–modül olsun. $|H|$, R'de terslenebilirse $e_H = \frac{\hat{H}}{|H|}$, $End_{RG}(MG)$'de bir merkezi eşkaredir.*

İspat. İlk olarak, e_H'ın MG üzerinde bir RG–homomorfizma olduğu gösterilecektir. Her $h_i \in H$ için $h_i g = g h_{ig}$ olacak şekilde $h_{ig} \in H$ vardır. Bu nedenle, $\hat{H}g = \sum_{h_i \in H} h_i g = \sum_{h_i \in H} g h_{ig} = g\hat{H}$ eşitliği elde edilir. Bu yüzden, $r \in R$, $g \in G$ için

$\frac{\hat{H}}{|H|}rg = rg\frac{\hat{H}}{|H|}$'dir ve $\mu \in MG$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}(\mu(rg))e_H &= (\mu)((rg)\frac{\hat{H}}{|H|}) \\ &= (\mu)\frac{\hat{H}}{|H|}(rg) \\ &= e_H(\mu)(rg).\end{aligned}$$

O halde, $\rho = \sum_{g\in G} r_g g \in RG$ için

$$\begin{aligned}(\mu\rho)e_H &= (\mu)\frac{\hat{H}}{|H|}(\sum_{g\in G} r_g g) \\ &= e_H(\mu)\rho.\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $\mu = \sum_{g\in G} m_g g$, $\eta = \sum_{g\in G} n_g g \in MG$ için

$$\begin{aligned}(\mu+\eta)e_H &= \sum_{g\in G}(m_g+n_g)(g\frac{\hat{H}}{|H|}) \\ &= (\sum_{g\in G} m_g g)\frac{\hat{H}}{|H|} + (\sum_{g\in G} n_g g)\frac{\hat{H}}{|H|} \\ &= e_H(\mu) + e_H(\eta)\end{aligned}$$

dir.

İkinci olarak, e_H'ın bir eşkare olduğu ispatlanacaktır. Bunun için öncelikle $\hat{H}\hat{H} = |H|\,\hat{H}$ eşitliği gösterilir.

$$\begin{aligned}\hat{H}\hat{H} &= h_1(h_1+h_2+...+h_n) + h_2(h_1+h_2+...+h_n) \\ &\quad +... + h_n(h_1+h_2+...+h_n) \\ &= |H|\,h_1 + |H|\,h_2 + ... + |H|\,h_n \\ &= |H|\,\hat{H}.\end{aligned}$$

O halde, $\mu \in MG$ için

$$\begin{aligned}((\mu)e_H)e_H &= (\mu\frac{\hat{H}}{|H|})\frac{\hat{H}}{|H|} \\ &= \mu\frac{1}{|H|}\frac{1}{|H|}\,|H|\,\hat{H} \\ &= \mu\frac{\hat{H}}{|H|} \\ &= (\mu)e_H\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır ve e_H bir eşkaredir.

Son olarak, H, G'nin bir normal altgrubu ise e_H'ın $End_{RG}(MG)$'de bir merkezi eşkare olduğu ispatlanacaktır. e_H'ın $End_{RG}(M)$'nin her elemanı ile değişmeli olduğunu göstermek gerekir. f, $End_{RG}(MG)$'nin bir elemanı olsun. f bir RG–homomorfizma olduğundan $\mu \in MG$ için $(\mu)f\hat{H} = (\mu\hat{H})f$'dır. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}(\mu)fe_H &= (\mu)f\frac{\hat{H}}{|H|}\\ &= (\mu\frac{\hat{H}}{|H|})f\\ &= (\mu)e_Hf\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. ∎

Açıklama 3.3.8 *N, G'nin bir normal altgrubu olsun. G/N üzerinde $g,\ h \in G$ için*

$$G \times G/N \longrightarrow G/N,\ g(hN) = ghN$$

olarak tanımlı bir grup etkisi vardır. Buradan yola çıkarak her $h \in G$ için $m_h \in M$ olmak üzere

$$(\sum_{h\in G} m_h(hN))g = (\sum_{h\in G} m_h(hgN)$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 3.3.9 *M bir R–modül ve N, G'nin bir normal altgrubu olsun. Bu durumda $g \in G$, $\sum_{h\in G} m_h(hN) \in M(G/N)$ için $(\sum_{h\in G} m_h(hN))g = \sum_{h\in G} m_h(hgN)$ ile tanımlı grup etkisi ile $M(G/N)$, MG'nin bir RG–altmodülüdür.*

İspat. Öncelikle, $M(G/N) \subseteq MG$'dir.

Her $\rho = \sum_{g\in G} r_g g \in RG$ ve her $\mu = \sum_{h\in G} m_h(hN) \in M(G/N)$ için

$$\begin{aligned}\mu\rho &= (\sum_{h\in G} m_h(hN))(\sum_{g\in G} r_g g)\\ &= \sum_{g,h\in G}(m_h r_g)(hN)g\\ &= \sum_{g,h\in G}(m_h r_g)(hgN)\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. $m_h r_g \in M$ ve $hgN \in G/N$ olduğu için $\mu\rho = \sum_{g,h\in G}(m_h r_g)(hgN) \in M(G/N)$'dir. Bu nedenle, $M(G/N)$, MG'nin bir RG–altmodülüdür. ∎

Önerme 3.3.10 *M bir R–modül, G bir grup ve $H \leq G$ olmak üzere $\{h-1 : h \in H, h \neq e\}$ ile üretilen küme $\{\sum_{h\in H, h\neq e}\beta_h(h-1) : \beta_h \in MG\}$, $\triangle_M(G,H)\}$ ile gösterilsin. $\triangle_M(G,H)$, MG'nin bir RG–altmodülüdür.*

İspat. $\triangle_M(G,H) \subset MG$ olduğu açıktır. Her $\sum_{h\in H}\beta_h(h-1) \in \triangle_M(G,H)$ için $\beta_h \in MG$ olduğundan $\triangle_M(G,H)$, MG'nin bir R–altmodülüdür. Her $g \in G$ ve $\sum_{h\in H}\beta_h(h-1) \in \triangle_M(G,H)$ için

$$\begin{aligned}(\sum_{h\in H, h\neq e}\beta_h(h-1))g &= \sum_{h\in H, h\neq e}\beta_h((hg-1)-(g-1)) \\ &= \sum_{h\in H, h\neq e}\beta_h(hg-1) - \sum_{h\in H, h\neq e}\beta_h(g-1) \in \triangle_M(G,H)\end{aligned}$$

olduğundan $\triangle_M(G,H)$, MG'nin bir RG–altmodülüdür. ∎

$H = G$ için $\triangle_M(G,G) = \triangle(MG)$ olduğu açıktır.

R–modül M ve R halkasının bir altkümesi I için $l_M(I) = \{m \in M : mi = 0$ her $i \in I\}$, I'nın M'deki sol sıfırlayanını göstersin. Aşağıda verilen Lemma 3.3.11, Kosan, Lee ve Zhou (2014)'deki Lemma 3.2'nin e_H ve $\triangle_M(G,H)$ için bir sonucu olarak elde edilmiştir.

Lemma 3.3.11 *M bir R–modül, G bir grup ve H G'nin bir sonlu altgrubu olsun. Bu durumda $l_{MG}(e_H) = \triangle_M(G,H)$'dir.*

İspat. Öncelikle, H sonlu olduğu için $(h-1)\widehat{H} = \widehat{H} - \widehat{H} = 0$'dır. Her $\sum_{h\in H}\beta_h(h-1) \in \triangle_M(G,H)$ için

$$\begin{aligned}(\sum_{h\in H}\beta_h(h-1))e_H &= (\sum_{h\in H}\beta_h(h-1))\frac{\widehat{H}}{|H|} \\ &= \frac{1}{|H|}(\sum_{h\in H}\beta_h(h-1)\widehat{H}) \\ &= \frac{1}{|H|}(\sum_{h\in H}\beta_h(\widehat{H}-\widehat{H})) \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan $\triangle_M(G,H) \subseteq l_{MG}(e_H)$'dir.

$\sum_{g\in G} m_g g \in l_{MG}(e_H)$ ve $\{g_1H, g_2H, ...\}$, H'nin G'deki birbirinden farklı sol kosetleri olsun. Bu durumda $g_t \in \{g_1H, g_2H, ...\}$ olmak üzere

$$0 = (\sum_{g\in G} m_g g)e_H$$

$$\begin{aligned}
&= (\sum_t \sum_{g\in g_tH} m_g g)e_H \\
&= \frac{1}{|H|}(\sum_t \sum_{g\in g_tH} m_g g\widehat{H})
\end{aligned}$$

dir. O halde, her t için $\sum_{g\in g_tH} m_g g\widehat{H} = 0$. Böylece,

$$\sum_{g\in g_tH} m_g g\widehat{H} = \sum_{g\in g_tH} m_g g_t\widehat{H} = (\sum_{g\in g_tH} m_g)g_t\widehat{H} = 0$$

ve $\sum_{g\in g_tH} m_g = 0$'dir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G} m_g g &= \sum_t \sum_{g\in g_tH} m_g g \\
&= \sum_t \left[\sum_{g\in g_tH} m_g g - (\sum_{g\in g_tH} m_g)g_t\right] \\
&= \sum_t (\sum_{g\in g_tH} m_g(g - g_t)) \\
&= \sum_t (\sum_{h\in H} m_{g_th} g_t(g_th - g_t)) \\
&= \sum_t (\sum_{h\in H} m_{g_th} g_t(h - 1)) \in \triangle_M(G,H)
\end{aligned}$$

elde edilir ve $l_{MG}(e_H) \subseteq \triangle_M(G,H)$'dir. ∎

Teorem 3.3.12 *H, G'nin bir sonlu normal altgrubu ve $|H|$, R'de terslenebilir olmak üzere $MG \simeq MGe_H \oplus MG(1-e_H)$'dir. Ayrıca,*

$$MGe_H \simeq M(G/H) \text{ ve } MG(1-e_H) = \triangle_M(G,H)\text{'dir.}$$

İspat. Lemma 3.3.7'den $e_H = \frac{\hat{H}}{|H|}$ bir merkezi eşkare olduğu için $MG \simeq MGe_H \oplus MG(1-e_H)$'dir.

$$\theta : G \longrightarrow Ge_H, \;\; g \mapsto \theta(g) = ge_H$$

olarak tanımlı bir fonksiyon olsun. θ bir grup homomorfizmasıdır; çünkü g, $h \in G$ olmak üzere H, G'nin normal altgrubu olduğu için

$$\theta(gh) = ghe_H = ghe_H^2 = ge_Hhe_H = \theta(g)\theta(h)$$

eşitliği sağlanır. θ'nın bir grup epimorfizması olduğu açıktır. Ayrıca $g \in H$ için

$g\widehat{H} = \widehat{H}$ ve $(g-1)\frac{\widehat{H}}{|H|} = 0$ olduğu için

$$\begin{aligned} Çek\theta &= \{g \in G \mid ge_H = e_H\} \\ &= \{g \in G \mid (g-1)e_H = 0\} \\ &= \{g \in G \mid \frac{1}{|H|}(g-1)(h_1 + h_2 + ... + h_n) = 0\} \\ &= \{g \in G \mid \frac{1}{|H|}((gh_1 + gh_2 + ... + gh_n) - (h_1 + h_2 + ... + h_n)) = 0\} \\ &= \{g \in G \mid gh_1 + gh_2 + ... + gh_n = h_1 + h_2 + ... + h_n\} \\ &= H \end{aligned}$$

dir. Gruplar için Birinci İzomorfizma Teoremi'nden $G/Çek\theta = G/H \simeq Gör\theta = Ge_H$'dir. Bu nedenle, her $\sum_{g\in G} m_g g \in MG$ için

$$(\sum_{g\in G} m_g g)e_H = \sum_{g\in G} m_g\,(ge_H) = \sum_{g\in G} m_g\theta(g) = \sum_{g\in G} m_g(gH)$$

eşitliği elde edilir. Böylece, $MGe_H \simeq M(G/H)$'dir.

$\mu = (\sum_{g\in G} m_g g)(1 - e_H) \in MG(1 - e_H)$ için

$$\begin{aligned} ((\sum_{g\in G} m_g g)(1 - e_H))e_H &= \sum_{g\in G} m_g g e_H - \sum_{g\in G} m_g g e_H e_H \\ &= \sum_{g\in G} m_g g e_H - \sum_{g\in G} m_g g e_H \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $MG(1 - e_H) \subseteq l_{MG}(e_H) = \triangle_M(G, H)$'dir.

$l_{MGe_H}(e_H)$ için $(\sum_{g\in G} m_g g)e_H \in MGe_H$ olmak üzere

$$\begin{aligned} ((\sum_{g\in G} m_g g)e_H)e_H &= (\sum_{g\in G} m_g g)e_H e_H \\ &= (\sum_{g\in G} m_g g)e_H \\ &= \sum_{h\in H} \mu_h(h-1),\ \mu_h \in MG \end{aligned}$$

dir. Buradan, $\sum_{h\in H} \mu_h(h-1) \in l_{MG}(e_H)$ ve $\sum_{h\in H} \mu_h(h-1) \in MGe_H$ olmalıdır.

$(\sum_{g\in G} n_g g)e_H \in MGe_H$ için $\sum_{h\in H}\mu_h(h-1) = (\sum_{g\in G} n_g g)e_H$'dir. Böylece,

$$0 = (\sum_{h\in H}\mu_h(h-1))e_H = ((\sum_{g\in G} n_g g)e_H)e_H$$

olduğu için $\sum_{g\in G} n_g g = 0$'dır. Bu nedenle, $l_{MG}(e_H) \subseteq MG(1-e_H)$ elde edilir. Lemma 3.3.11'den, $\triangle_M(G,H) = l_{MG}(e_H) = MG(1-e_H)$'dir ∎

Sonuç 3.3.13 *M bir R–modül, G bir sonlu grup ve $|G|$, R'de terslenebilir olsun. Bu durumda $MG \simeq M \oplus \triangle(MG)$'dir.*

İspat. Teorem 3.3.12'den, $MG \simeq MGe_G \oplus MG(1-e_G)$'dir. Ayrıca, $MGe_G \simeq M(G/G) \simeq M$ ve $MG(1-e_G) = \triangle_M(G,G) = \triangle(MG)$'dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} MG &\simeq MGe_G \oplus MG(1-e_G) \\ &\simeq M(G/G) \oplus \triangle_M(G,G) \\ &\simeq M \oplus \triangle(MG) \end{aligned}$$

elde edilir. ∎

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasının kapsamında G sonlu bir grup, M bir R–modül ve τ, G'den $End_R(M)$'e bir grup homomorfizması olmak üzere M, her $g \in G$, $m \in M$ için $mg = \tau(g)(m)$ ile tanımlanan çarpımla bir RG–modüldür ve çarpımdaki grup homomorfizması τ, R üzerinde M için G'nin bir temsili olarak adlandırılır. Böylece, bir R–modül M'yi RG–modül yapmak için, M'nin endomorfizma halkası $End_R(M)$'nin yardımıyla, R–modül M üzerinde bir yapı geliştirilmiştir. Tez çalışmasının ilk amacı olan bu yapı üzerinden, M'nin R–modül yapısı ile RG–modül yapısının bir çok farklı özelliklere sahip olduğu görülmüştür. Örneğin, bir RG–modül M'nin altmodülü N, RG–altmodül olarak ayrışamaz modülken R–altmodül olarak ayrışabilir modüldür ve bu ifade bir örnekle gösterilmiştir. Bu bakış açısıyla M'nin R–modül yapısı ile RG–modül yapısı arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Özellikle, elde edilen aşağıdaki sonuçlar $Rad_R M$ ile $Rad_{RG} M$ ve $Soc_R M$ ile $Soc_{RG} M$ arasındaki ilişkileri incelerken yararlı olmuştur.

"N bir RG–modül M'nin R–altmodülü olmak üzere $G(N) = \sum_{g \in G} Ng$, N'yi içeren minimal RG–altmodüldür."

"M bir RG–modül olsun. N, M'nin esas R–altmodülü ise $G(N)$, M'nin esas RG–altmodülüdür."

"M sonlu üretilmiş RG–modül olsun. N, M'nin atık R–altmodülü ise $G(N)$, M'nin atık RG–altmodülüdür."

M bir RG–modül ve N, M'nin R–altmodülü olmak üzere her $f \in \tau(G)$ için $f(N) \subseteq N$ ise N'ye τ–tam değişmez altmodül denir. Bu tanım geliştirilen yapıyı tamamlamak ve R–modül yapısı ile RG–modül yapısı arasındaki farklı ilişkileri, özellikle $Soc_R M$ ile $Soc_{RG} M$ arasındaki, incelemek için önemlidir. İlk adım olarak, τ–tam değişmez altmodül tanımı ile elde ettiğimiz önemli bazı sonuçlar şunlardır:

"M sonlu üretilmiş RG–modül ve N, M'nin tek maksimal R–modülü olsun. N, τ–tam değişmez altmodül değilse M devirli RG–modüldür."

"τ, G'den $End(M)$'e bir grup homomorfizası olsun. N, M'nin atık R–altmodülü ise $Ng = \tau(g)(N)$, M'nin atık R–altmodülüdür."

$Rad_R M$ ile $Rad_{RG} M$ arasındaki ilişki, tez çalışmasının ilk önemli sonucu olan şu teoremle ifade edilmiş ve ispatlanmıştır:

"M bir RG–modül olmak üzere $Rad_R M$, M'nin bir RG–altmodülüdür ve $Rad_R M \subseteq Rad_{RG} M$'dir."

Bundan başka, M'nin R–modül yapısı ile RG–modül yapısı arasındaki ilişkiler injektif ve projektif modüller üzerinden incelenmiştir. Bu çerçevede, aşağıda ifade edilen iki önemli teorem ispatlanmıştır.

"M bir RG–modül, G sonlu bir grup ve $|G|$, R'de terslenebilir olsun. M bir projektif R–modüldür ancak ve ancak M bir projektif RG–modüldür."

"M bir RG–modül, G bir sonlu grup ve $|G|$, R'de terslenebilir olsun. M bir injektif R–modüldür ancak ve ancak M bir injektif RG–modüldür."

Özellikle, bu yapı üzerinden, injektif modüllerle ilgili verilen ikinci sonuç tez çalışmasındaki en önemli teoremlerden biri olan ve aşağıda ifade edilen genelleştirilmiş Maschke Teoremi için kısa bir ispat elde edilmesini sağlamıştır.

(Genelleştirilmiş Maschke Teoremi) R bir değişmeli halka, G bir sonlu grup ve $|G|$, R'de terslenebilir olmak üzere RG yarı-basittir ancak ve ancak R yarı-basittir.

Genelleştirilmiş Mashke Teoremi'nin bir sonucu olarak, yarı-basit grup halkalarında, her RG–modül hem R–modül hem RG–modül olarak yarı-basittir ve $M = Soc_R M = Soc_{RG} M$'dir. Genel olarak ise $Soc_R M$ ile $Soc_{RG} M$ arasındaki ilişkileri bulmak için M'nin basit R–altmodülleri ile basit RG–altmodülleri arasındaki ilişkileri de incelemek gerekmiştir. Örneğin, RG–modül M'nin basit RG–altmodülü basit R–altmodül olmak zorunda değildir ve bu bir örnekle gösterilmiştir. Bu kapsamda, bir RG–modül M'nin basit R–altmodülleri ile basit RG–altmodülleri arasındaki ilişkileri incelerken elde edilen önemli bazı sonuçlar şunlardır:

"M bir RG–modül ve S, M'nin bir basit R–altmodülü olsun. Eğer S, SG'nin bir esas basit R–altmodülü ise SG, M'nin bir basit RG–altmodülüdür."

"M bir RG–modül ve S, M'nin bir τ–tam değişmez basit R–altmodülü olsun. Bu durumda S, M'nin basit RG–altmodülüdür."

Basit altmodüller ile ilgili elde edilen bu sonuçlar ışığında, $Soc_R M$ ile $Soc_{RG} M$ arasındaki ilişki ile ilgili aşağıda ifade edilen iki önemli teorem ispatlanmıştır.

"M bir RG–modül olmak üzere M'nin her basit R–altmodülü τ–tam değişmez ise $Soc_R M \subseteq Soc_{RG} M$'dir."

"M bir RG–modül olmak üzere M'nin hiçbir basit R–altmodülü birbirine izomorf değil ise $Soc_R M \subseteq Soc_{RG} M$'dir."

Ayrıca, Kosan, Lee ve Zhou (2014) tarafından tanımlanan grup modüller üzerinde çalışılmış ve bu konuda yeni sonuçlar elde edilmiştir. İlk etapta, grup modülün bölüm modülü ve alakalı modülün bölüm modülü arasındaki ilişkiyi açıkla- yan aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

"G bir sonlu grup, M, R halkası üzerinde tanımlı bir modül ve N, M'nin bir R–altmodülü olsun. NG, MG'nin bir RG–altmodülüdür. Ayrıca, RG–modüller olarak $MG/NG \simeq (M/N)G$'dir."

Buna ek olarak, grup modül MG'nin özel bir altmodülü olan $\triangle_M(G,H)$ tanımlanmıştır. $\triangle_M(G,H)$'ın MG'nin bir RG–altmodülü olduğu ispatlanmıştır. G bir grup, $H = \{h_1, h_2, ..., h_n\}$, G'nin bir sonlu altgrubu olmak üzere $\hat{H} = h_1 + h_2 + ... + h_n$ ve $e_H = \frac{\hat{H}}{|H|} \in End_{RG}(MG)$ olarak tanımlı eşkare yardımı ile MG'nin RG–altmodüllerine bir ayrışımı elde edilmiştir. Bu ayrışım, tez çalışmasının kapsamındaki en önemli sonuçlardan biri olan aşağıdaki teorem ile ifade edilmiş ve ispatlanmıştır.

"H, G'nin bir sonlu normal altgrubu ve $|H|$, R'de terslenebilir olmak üzere $MG \simeq MGe_H \oplus MG(1 - e_H)$'dir.

Ayrıca, $MGe_H \simeq M(G/H)$ ve $MG(1 - e_H) = \triangle_M(G,H)$'dir."

Sonuç olarak, bu tez çalışmasında grup halkaları üzerinde tanımlı modüller iki farklı yapı üzerinden incelenmiştir. Birincisi, tez çalışmasının ilk amacı da olan, birimli değişmeli halka üzerinde tanımlı bir modülü, genişletmeden, modülün endomorfizma halkası yardımıyla bu halkanın sonlu bir grup üzerindeki grup halkası üzerinde tanımlı modül yapmamızı sağlayan bir yapıdır. İkincisi, birimli bir halka üzerinde tanımlı bir modülü, bir grup üzerinde bir "grup modül"e genişleten ve böylece grup halkası üzerinde tanımlı bir modül elde edilmesini sağlayan yapıdır. Birinci yapı, halka teorisi ve grup halkaları üzerinde tanımlı modüllerle ilgili kavram ve teorilere farklı bir açıdan bakılarak; ikinci yapı ise grup halkaları ile ilgili bazı temel kavramlar grup modüllere genellenerek yeni sonuçlar elde edilmesine olanak sağlamıştır.

5. KAYNAKLAR

ALKAN, M. and ÇEKEN, S. 2012. Uc modules with respect to a torsion theory. *Turkish Journal Of Mathematics*, 36: 376-385.

ALKAN, M. and ÖZCAN, A.Ç. 2004. Semiregular modules with respect to a fully invariant submodule. *Communications in Algebra*, 32 (11): 4285–4301.

ALKAN, M. and TIRAŞ, Y. 2007. On prime submodules. *Rocky. Mt. J.*, 37: 709-722.

ALPERİN, J.L. and BELL, R.B. 1995. Groups and Representations. Springer-Verlag, New York.

ANDERSON, F.W. and FULLER, K.R. 1992. Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag, New York.

AUSLENDAR, M. 1957. On regular group rings. *Proc. Am. Math. Soc.*, 8: 658–664.

BRAUER, R. 1929. Über systeme hypercomplexer zahlen. *Math. Z.*, 30 : 79 - 107.

BRAUER, R. and NOETHER, E. 1927. Über minimale zerfällungskörper irreduzibler darstellungen. *Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 221–228.

CAYLEY, A. 1854. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$. *Philosophical Magazine*, 7: 40-47.

COLEMAN, D.B. 1966. Idempotents in group rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17: 962.

CONNELL, I.G. 1963. On the group ring. *Canadian J. Math.*, 15: 650–685.

CURTIS, C.W. 1992. Representation theory of finite groups: from Frobenius to Brauer. *Math. Intelligencer*, 14: 48-57.

CURTIS, C.W. and REINER, I. 1987. Methods of Representation Theory, Vol. 2 Wiley-Interscience, New York.

CURTIS, C.W. and REINER, I. 1990. Methods of Representation Theory: With Applications to Finite Groups and Orders, Vol. 1 Wiley-Interscience, New York.

CURTIS, C.W. and REINER, I. 2006. Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras. AMS Chelsea Publishing. Rhode Island.

ÇALLIALP, F. 2009. Değişmeli Halkalar ve Modüller. Birsen Yayınevi. İstanbul.

FARKAS, D. 1973. Self-injective group algebras. *J. Algebra*, 25: 313–315.

FARKAS, D. and PASSMAN, D.S. 1983. Idempotents in group rings: a surprise. *J. Algebra*, 81: 266-267.

FROBENIUS, F. G. 1896a. Über vertauschbare matrizen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademieder Wissenschaften zu Berlin*, 601-614.

FROBENIUS, F. G. 1896b. Über gruppencharaktere. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 985-1021.

FROBENIUS, F. G. 1896c. Über die primfactoren der gruppendeterminante. *Sitzungsberichte der KöniglichPreussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1343-1382.

FROBENIUS, F. G. 1897. Über die darstellung der endlichen gruppen durch lineare substitutionen. *Sitzungsberichteder Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 944-1015.

HAWKINS, T. 1971. The origins of the theory of group characters. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 7: 142-170.

HAWKINS, T. 1974. New light on Frobenius' creation of the theory of group characters. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 12: 217-243.

HAWKINS, T. 1978. The creation of the theory of group characters. *Rice University Studies*, 64: 57-71.

HIGMAN, G. 1940. The units of group rings. Proc. London Math. Soc., 46: 231-248.

ISAACS, M. 2006. Character Theory of Finite Groups. AMS Chelsea Publishing. Rhode Island.

ISAACS, M. 2009. Algebra A Graduate Course. Pacific Grove. California.

JAMES, G. ve LIEBECK, M. 2001. Representations and Characters of Groups. Cambridge University Press.

KAPLANSKY, I. 1957. Problems in the theory of rings. *Nas–NRC Publ.*, 502: 1–3.

KAPLANSKY, I. 1970. "Problems in the theory of rings" revisited. *Amer. Math. Monthly*, 77: 445–454.

KARPILOVSKY, G. 1983. Commutative Group Algebras. Marcel Decker. New York.

KARPILOVSKY, G. 1986. Group and Semigroup Rings, North-Holland, Amsterdam.

KARPILOVSKY, G. 1987. The Jacobson Radical of Group Algebras, North-Holland, Amsterdam.

KARPILOVSKY, G. 1990. Induced Modules over Group Algebras, North-Holland, Amsterdam.

KOSAN, M.T. , LEE, T.K. and ZHOU, Y. 2014. On modules over group ring. *Algebras and Representation Theory*, 17: 87-102.

LAM, T.Y. 2001. A First Course in Noncommutative Rings, 2nd edn. Grad. Texts Math. 131. Springer, New York.

LAMBEK, J. 1966. Lectures on Rings and Modules, Blaisdell, Toronto.

MASCHKE, H. 1898. Ueber den arithmetischen Charakter der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen. *Math. Ann.,* 50 (4): 492–498.

MIKHAILOVA, R. and PASSI, I.B.S. 1979. The subgroup determined by a certain ideal in a free group ring. *Journal of Algebra*, 449: 400-407

MILIES, C. P. and SEHGAL, S. K. 2002. An Introduction to Group Rings. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Nedherlands.

MOLIEN, T. 1893. Über systeme hoherer complexer zahlen. *Math. Ann. Bd.*, 41: 83-156.

MCLAUGHLIN, J.E. 1958. A note on regular group rings. *Mich. Math. J.,* 5: 127–128.

NICHOLSON, W.K. and YOUSIF, M.F. 2003. Quasi-Frobenius rings. Camb. Tracts Math. 158. Cambridge University Press.

NOETHER, E. 1929. Hypercomplexe grossen und darstellungtheorie. *Math. Z.,* 30: 641-692.

OSOFSKY, B. 1966. A generalization of quasi-Frobenius rings. *J. Algebra*, 4: 373–387.

PASSMANN, D.S. 1977. Observations on group rings, *Comm. Algebra*, 5: 1119-1162.

PASSMANN, D.S. 1979. The Jacobson radical of a group ring of a locally solvable group. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 38: 169-192 (ibid 1979. 39: 208-210).

PASSMANN, D.S. 1983. It's essentially Maschke's theorem. *Rocky. Mt. J.*, 13: 37-54.

PASSMANN, D.S. 1984. Infinite crossed products and group-graded rings. *Trans. AMS*, 284: 707-727.

PASSMANN, D.S. 2011. The Algebraic Structure of Group Rings. Dover Publications Inc., New York.

PASSI, I.B.S. 1979. Group Rings and their Augmentation Ideals, Lecture Notes in Math. 715, Springer-Verlag, Berlin.

RENAULT, G. 1971. Sur les anneaux de groupes. (French) C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 273, A84–A87(1971)

RITTER, J. and SEHGAL, S.K. 1990. Integral group rings with trivial central units. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 108: 327–329.

SEHGAL, S.K. 1978. Topics in Group Rings, Marcel Dekker, New York.

SERRE, J-P. 1971. Lineer Representations of Finite Groups. Springer-Verlag, New York.

SMITH, P.F. 1971a. Localization in group rings. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 22: 69-90.

SMITH, P.F. 1971b. Quotient rings of group rings. *J. Lond. Math Soc. (2)*, 3: 645-660.

SMITH, P.F. 1972. On the dimension of group rings. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 25: 288-302.

SMITH, P.F. 2015. Fully invariant multiplication modules. *Palestine Journal of Mathematics Vol. 4 (Spec. 1)*, 462–470.

UC, M. , ONES, O. and ALKAN, M. 2016. On modules over groups. *Filomat,* 30, 4: 1021–1027.

UC, M. and ALKAN, M. 2017. On submodule characterization and decomposition of modules over group rings. *Book Series: AIP Conference Proceedings*, baskıda.

UC, M. and ALKAN, M. 2017. On the socle of modules over a group. *Book Series: AIP Conference Proceedings*, baskıda.

WALLACE, D.A.R. 1962. Group algebras with radicals of square zero, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 5: 158-159.

WALLACE, D.A.R. 1967. The Jacobson radicals of the group algebras of a group and of certain normal subgroups. *Math. Z.*, 100: 283-294.

WALLACE, D.A.R. 1968. Some applications of subnormality in groups in the study of group algebras. *Math. Z.*, 108: 53-62.

WALLACE, D.A.R. 1969. On commutative and cenral conditions on the Jacobson radical of the group algebra of a group. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 19: 385-402.

WALLACE, D.A.R. 1970. The radical of the group algebra of a subgroup, of a polycyclic group and of a restricted SN-group. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 17(II): 165-171.

WISBAUER, R. 1991. Foundations of Module and Ring Theory. Gordon and Breach, Philadelphia.

ZELMANOWITZ, J. 1972. Regular modules. *Trans. Am. Math. Soc.,* 163: 341-355.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Uc, 1982 yılında İstanbul'da doğdu. İlk öğrenimini Antalya'da, orta ve lise öğrenimini Isparta'da tamamladı. 2000 yılında girdiği İhsan Doğramacı Bilkent Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2005 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 2005'te İhsan Doğramacı Bilkent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve ve Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Ocak 2008'de İhsan Doğramacı Bilkent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansını tamamladı. Nisan 2010'da Şırnak, Silopi'de Asteğmen olarak başladığı askerlik görevini Nisan 2011'de Teğmen olarak tamamladı. Eylül 2012'de Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Şubat 2013'te Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı. Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görevine devam etmektedir.