T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

p-ADİK HURWITZ-LERCH L-FONKSİYONU

Selin Selen ÖZBEK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

p-ADİK HURWITZ-LERCH L-FONKSİYONU

Selin Selen ÖZBEK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

p-ADİK HURWITZ-LERCH L-FONKSİYONU

Selin Selen ÖZBEK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile kabul/red edilmiştir.

Doç. Dr. Mehmet CENKCİ

Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Yrd. Doç. Dr. Kürşat AKER

ÖZET

p-ADİK HURWITZ-LERCH L-FONKSİYONU

Selin Selen ÖZBEK

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Doç. Dr. Mehmet CENKCİ
Şubat 2015, 61 sayfa

Bu tez iki temel kısımdan oluşmaktadır. İlk bölüm, Morita tarafından kurulan p-adik Hurwitz-Lerch L-fonksiyonunun Washington'un yöntemiyle kurulmasını ve bu sırada tanımlanan genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomlarının bölünebilme özelliklerini ve bu polinomların sağladığı Kummer tipli kongrüansları içerir.

İkinci bölümde ise katlı Barnes Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu tanımlanmış ve Rezidü Teoremi ve kontur integral teknikleri yardımıyla bu fonksiyonun negatif tam sayılardaki değerleri ile ilişkili olan N. mertebeden Apostol-Bernoulli polinomlarının tanımı ve özellikleri verilmiştir. Daha sonra bu polinomlar yardımıyla katlı Barnes-Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonunun p-adik benzeri oluşturulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: p-adik L-Fonksiyonu, p-adik Hurwitz-Lerch L-Fonksiyonu, Apostol-Bernoulli Sayıları, Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli Sayıları, Kummer Kongrüansları

JÜRİ: Doç. Dr. Mehmet CENKCİ

Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Yrd. Doç. Dr. Kürşat AKER

ABSTRACT

p-ADIC HURWITZ-LERCH L-FUNCTION

Selin Selen ÖZBEK

PhD Thesis, in Mathematics
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
February 2015, 61 pages

This work consists of two parts. We first, reconstruct the p-adic Hurwitz-Lerch L-function by employing partial zeta functions. This construction is different from that of Morita's. Using this function, we investigate divisibility properties and Kummer type congruences for generalized Apostol-Bernoulli polynomials, which occur as the values of Hurwitz-Lerch L-function at negative integers.

In the second part we define Barnes' type Hurwitz-Lerch zeta function by employing the residue theorem and complex integration. We consider the values of this function at negative integers, which are called multiple Apostol-Bernoulli polynomials of order N, and discuss some of their properties. Using these polynomials we construct a p-adic analogue of Barnes' type Hurwitz-Lerch zeta function.

KEYWORDS: p-adic L-Function, p-adic Hurwitz-Lerch L-Function, Apostol-Bernoulli Numbers, Generalized Apostol-Bernoulli Numbers, Kummer Congruences

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Asst. Prof. Dr. Kürşat AKER

ÖNSÖZ

Riemann zeta fonksiyonu ve bu fonksiyonun negatif tam sayılarda aldığı değerlerle ilişkili olan Bernoulli sayıları analitik sayılar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bernoulli sayıları ilk olarak Jacob Bernoulli'nin 1700'lü yıllarda yayınlanan Ars Conjectandi isimli çalışmasında, ardışık tam sayıların kuvvetlerinin sonlu toplamları için tanımladığı özel bir rasyonel sayı dizisidir. Bu sayılar, Riemann zeta fonksiyonunun negatif tam sayılarda aldığı değerlerle yakından ilişkilidir. Bugün Riemann zeta fonksiyonu olarak bilinen bu fonksiyon, ilk kez onsekizinci yüzyılın ilk yarısında karmaşık analiz kullanmadan Euler tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra 1859 yılında Riemann tarafından karmaşık değişkene genişletilmiştir.

Çağdaş matematiğin en meşhur teoremlerinden biri olan Fermat'nın Son Teoremine ilk ciddi yaklaşım 1847 yılında Kummer tarafından yapılmıştır. Bu çalışma sırasında Kummer, Bernoulli sayıları için Kummer Kongrüansları olarak ifade edilen kongrüanslar elde etmiştir. Kummer'in çalışmalarından esinlenerek Hensel, 1900'lü yılların başlarında p-adik sayılar cismini sistematik olarak oluşturmuştur. Bu cisimler üzerindeki analiz ile ortaya çıkan ve p-adik analiz olarak adlandırılan çalışma alanında Kummer Kongrüanslarının yorumu 1964 yılında Kubota ve Leopoldt tarafından yapılmıştır. Kubota ve Leopoldt, Riemann zeta fonksiyonunun pozitif olmayan tam sayılarda aldığı değerler ile Kummer Kongrüanslarını gözlemleyerek tek türlü belirli bir p-adik analitik $\zeta_p(s)$ fonksiyonunun varlığını göstermişlerdir.

Günümüzde Dirichlet serileri yardımıyla tanımlanan zeta fonksiyonlarının p-adik benzerini oluşturmak için Kubota ve Leopoldt'un kullandığı yöntem dışında birçok yöntem vardır. Bu çalışmada bu yöntemlerden iki tanesi kullanılarak Hurwitz-Lerch L-fonksiyonunun ve katlı Barnes-Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonunun p-adik benzerleri oluşturulmuş ve bu sırada Apostol-Bernoulli sayıları ile ilgili Kummer tipli kongrüanslar elde edilmiştir.

Akademik hayatımın ilk basamaklarında sağlam bir altyapı oluşturmamı sağlayan, bu çalışmanın ortaya çıkmasında ve sonrasında yardımlarını esirgemeyen, öğrencisi olmaktan büyük onur duyduğum değerli danışmanım Doç. Dr. Mehmet CENKCİ'ye her zaman beni aydınlattığı ve ufkumu genişlettiği için en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere ulaşmamda büyük emeği olan, her kararımı destekleyen, maddi manevi yanımda duran, büyük bir anlayış ve sabırla beni dinleyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ vi
1. GİRİŞ 1
2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI 9
2.1. p-adik Sayılar Cismi ve Bazı Elementer Fonksiyonlar 9
2.2. Dirichlet Karakteri 14
2.3. Teichmüller Karakteri ve Bazı Genişlemeleri 15
2.4. p-adik L-Fonksiyonu 17
2.5. Kummer Tipli Kongrüanslar 19
2.6. Volkenborn İntegrali ve Barnes Katlı Zeta Fonksiyonunun p-adik Benzeri 23
3. BULGULAR 27
3.1. $L_p(s, q\tau, \alpha, \chi)$ Fonksiyonunun Kurulumu 27
3.2. Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli Polinomları İçin Kummer Tipli Kongrüanslar 33
3.3. Katlı Barnes-Hurwitz-Lerch Zeta Fonksiyonu 38
3.4. Katlı Barnes-Hurwitz-Lerch Zeta Fonksiyonunun p-adik Benzeri . . . 46
4. SONUÇ 50
5. KAYNAKLAR 51
ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Halkası
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar cismi
$\overline{\mathbb{Q}}$	Rasyonel sayılar cisminin cebirsel kapanışı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar cismi
χ	Dirichlet karakteri
f_χ	Dirichlet karakterinin kondüktörü
ν_p	p-adik değerleme
$\lvert . \rvert_p$	p-adik mutlak değer
$\mathbb{Z}_p$	p-adik tam sayılar halkası
$\mathbb{Q}_p$	p-adik sayılar cismi
$\overline{\mathbb{Q}}_p$	p-adik sayılar cisminin cebirsel kapanışı
$\mathbb{K}$	p-adik sayılar cisminin bir genişlemesi
$\mathbb{C}_p$	p-adik sayılar cisminin cebirsel kapanışının tamlanışı
ωx	Teicmüller karakteri
$\hat{x}$	Teichmüller Karakterinin Bir Genişlemesi
B_n	n. Bernoulli sayısı
$B_n(x)$	n. Bernoulli polinomu
$B_{n,\chi}$	n. genelleştirilmiş Bernoulli sayısı
$B_{n,\chi}(x)$	n. genelleştirilmiş Bernoulli polinomu
$\beta_n(\alpha)$	n. Apostol-Bernoulli sayısı
$\beta_n(x,\alpha)$	n. Apostol-Bernoulli polinomu
$\beta_{n,\chi}(\tau,\alpha)$	Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli Polinomu
$\beta_{n,\chi}(\alpha)$	Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli Sayısı
$s(n,m)$	Birinci Tip Stirling Sayısı
$S(n,m)$	İkinci Tip Stirling Sayısı
Δ_c	Doğrusal Fark Operatörü
$\Gamma(s)$	Euler Gamma Fonksiyonu
$\zeta(s)$	Riemann zeta fonksiyonu
$\zeta(s,\tau)$	Hurwitz zeta fonksiyonu
$L(s,\chi)$	Dirichlet L-fonksiyon
$\Phi(s,a,\lambda)$	Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu
$L(s;\tau,\alpha,\chi)$	Hurwitz-Lerch L-fonksiyonunu
$\phi(s,a,x)$	Lipschitz-Lerch Zeta Fonksiyonu

$\zeta_p(s)$	p-adik Riemann zeta fonksiyonu
$L_p(s,\chi)$	p-adik L-fonksiyonu
$L_p(s;\tau,\alpha,\chi)$	p-adik Hurwitz-Lerch L-fonksiyonu
$\zeta_N(s,x;\omega_1,\omega_2,...,\omega_N)$	Katlı Barnes-Hurwitz zeta fonksiyonu
$\zeta_{p,N}(s,x;\omega_1,\omega_2,...,\omega_N)$	Katlı Barnes-Hurwitz zeta fonksiyonunun p-adik benzeri
$\phi_N(s,x,\alpha;\omega_1,\omega_2,...,\omega_N)$	Katlı Barnes-Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu
$\phi_{p,N}(s,x,\alpha;\omega_1,\omega_2,...,\omega_N)$	Katlı Barnes-Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonunun p-adik benzeri

1. GİRİŞ

Kondüktörü f_χ olan bir ilkel χ Dirichlet karakteri için Dirichlet L-fonksiyonu, $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ olmak üzere

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

ile tanımlanır. $\chi = 1$ temel karakter için $L(s,1)$, $\zeta(s)$ ile gösterilen Riemann zeta fonksiyonudur. Dirichlet L-fonksiyonu, Dirichlet tarafından kanıtlanan ve günümüzde Dirichlet Teoremi olarak bilinen $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $kn + h$ şeklindeki bir aritmetik dizide sonsuz çoklukta asal sayının olması için gerekli ve yeterli koşulun $(h,k) = 1$ olması ifadesinde kullanılmıştır. Dirichlet L-fonksiyonu ayrıca Asal Sayı Teoreminin analitik olarak adlandırılan kanıt yönteminde önemli rol oynar.

Meşhur "Ars Conjectandi" isimli çalışması ile Jacob Bernoulli verilen ardışık tam sayıların kuvvetlerinin sonlu toplamları çalışmalarında rasyonel sayıların özel bir dizisi ile ilgilenen ilk kişidir. Bu çalışmada bu rasyonel sayı dizilerinin üretecini veren bir tanımlayıcı bağıntı bulunmuştur. O zamandan beri söz konusu sayı dizisi Bernoulli sayıları olarak adlandırılır ve $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$ olmak üzere B_n ile gösterilir. B_n Bernoulli sayıları

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}, \ \ (|t| < 2\pi)$$

üreteç fonksiyonu ile verilir. $n \geqslant 0$ için Bernoulli polinomları

$$B_n(\tau) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} B_{n-m} \tau^m$$

ile tanımlanır. Kondüktörü f_χ olan ilkel χ Dirichlet karakteri ile genelleştirilmiş Bernoulli sayıları $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$ için $B_{n,\chi}$ ile gösterilir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{t^n}{n!} = \sum_{a=1}^{f_x} \frac{\chi(a)\, t\mathrm{e}^{at}}{\mathrm{e}^{f_\chi t} - 1}$$

ile tanımlanır. $\chi = 1$ temel karakter için $B_{n,1} = B_n$ ve $B_{1,1} = -B_1$ dir. B_n Bernoulli sayıları ile $\zeta(s)$ Riemann zeta fonksiyonu arasındaki $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$ için

$$\zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n}$$

bağıntısına benzer olarak $B_{n,\chi}$ ile $L(s,\chi)$ arasında $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$ için

$$L(1-n,\chi) = -\frac{B_{n,\chi}}{n}$$

bağıntısı vardır. χ karakteri ile genelleştirilmiş Bernoulli polinomları

$$B_{n,\chi}(\tau)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}B_{n-m,\chi}\tau^{m}$$

ile tanımlanır.

Çağdaş matematiğin en meşhur teoremlerinden biri olan Fermat'nın Son Teoremi tek p asal sayıları için $x^p+y^p=z^p$ denkleminin aşikâr olmayan tam sayı çözümlerinin olmadığını ifade eder. 1994 yılında Wiles tarafından kanıtlanan bu teorem için ilk ciddi yaklaşım 1847 yılında Kummer tarafından yapılan ve devirli cisimlerle ilgili olan çalışmalarda ele alınmıştır. Kummer, Fermat'nın Son Teoreminin $\mathbb{Q}\left(\zeta_p\right)$ devirli cismin sınıf sayısı ile aralarında asal olan tüm sayılar için doğru olduğunu göstermiştir. Bir asal sayının söz konusu sınıf sayısını bölüp bölmediğini belirlemek için oldukça kullanışlı bir kriter elde etmiştir. Bir p asalının söz konusu sınıf sayısını bölmesi için gerekli ve yeterli koşul p asalının $k=2,4,6,\ldots,p-3$ için B_k Bernoulli sayılarının paydasını bölmesidir. Sınıf sayıları ile aralarında asal olan asal sayılara düzgün (regüler) asal sayılar denir. Kummer, bir asal sayının düzgünlüğü için yukarıdaki kriteri günümüzde Bernoulli sayıları için Kummer Kongrüansları olarak adlandırılan aşağıdaki ifadeyi kanıtlayarak elde etmiştir:

p bir tek asal sayı, m ile n çift tam sayılar, $n\equiv 0 \pmod{p-1}$ ve $m\equiv n \pmod{p-1}$ ise

$$\left(1-p^{m-1}\right)\frac{B_m}{m}\equiv\left(1-p^{n-1}\right)\frac{B_n}{n}\pmod{p}$$

dir.

Kummer'in çalışmalarından esinlenerek Hensel, 1900'lü yılların başlarında p-adik sayılar cismini sistematik olarak oluşturmuştur. Rasyonel sayılar cismi üzerinde p-adik norm tanımlamış ve bu norma göre bu cismin tamlanışını oluşturmuştur. Rasyonel sayılardan reel ve karmaşık sayıların oluşturulması yöntemine benzer olarak $\mathbb{Q}_p$ p-adik rasyonel sayılar cismi ve $\mathbb{Q}_p$ cisminin cebirsel kapanışının tamlanışı olan $\mathbb{C}_p$ cismini tanımlamıştır.

Bu cisimler üzerindeki analiz ile ortaya çıkan ve p-adik analiz olarak adlandırılan çalışma alanında Kummer Kongrüanslarının yorumu 1964 yılında Kubota ve Leopoldt tarafından yapılmıştır. Kubota ve Leopoldt, Riemann zeta fonksiyonunun pozitif olmayan tam sayılarda aldığı değerler ile Kummer Kongrüanslarını gözlemleyerek $k\geqslant 1$ tam sayıları için

$$\zeta_p(1-k)=\left(1-p^{k-1}\right)\zeta(1-k)$$

eşitliğini sağlayan tek türlü belirli bir p-adik analitik $\zeta_p(s)$ fonksiyonunun varlığını göstermişlerdir. Bu çalışmayı ayrıca klasik Dirichlet L-fonksiyonunun

p-adik benzerlerinin oluşturulmasına genişletmişlerdir. 1960'larda Iwasawa, p-adik L-fonksiyonları kullanılarak devirli cisimlerin etkili bir şekilde çalışılabileceğini göstermiştir. Aynı yıllarda Leopoldt $L_p(1,\chi)$ için sınıf sayısı formülünü elde ederek eliptik eğriler ve modüler formlara eklenmiş L-fonksiyonlarının özel değerleri gibi diğer genelleştirmelere olanak sağlamıştır. Bu genelleştirmeler Fermat'nın Son Teoreminin kanıtında Wiles tarafından kullanılmıştır.

Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu $\Phi(s,a,\lambda)$ ile gösterilir ve $|\lambda|<1$ olduğunda $s\in\mathbb{C}$ için, $|\lambda|=1$ olduğunda $\operatorname{Re}(s)>1$ için

$$\Phi(s,a,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+a)^s}$$

ile tanımlanır. Burada, $a\in\mathbb{Z}$ ve $a>0$'dır. Bu fonksiyonun özel durumları birçok fonksiyon vermektedir:

Lipschitz-Lerch zeta fonksiyonu ($x\in\mathbb{R}$) (Srivastava ve Choi 2001)

$$\phi(s,a,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kx}}{(k+a)^s}=\Phi\left(s,a,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}\right),$$

periyodik zeta fonksiyonu (Lerch zeta fonksiyonu) (Apostol 1951)

$$F(x,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kx}}{k^s}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}\Phi\left(s,1,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}\right),$$

Hurwitz zeta fonksiyonu

$$\zeta(s,a)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+a)^s}=\Phi(s,a,1),$$

Riemann zeta fonksiyonu

$$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}=\Phi(s,1,1).$$

Karmaşık kontur integral tekniği ve Rezidü Teoremi kullanarak Lipschitz-Lerch zeta fonksiyonunun pozitif olmayan tam sayı değerleri için

$$\phi(-n,a,x)=-\frac{\beta_{n+1}\left(a,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}\right)}{n+1}$$

eşitliğini göstermek mümkündür. Burada $n\in\mathbb{Z}$, $n\geqslant 0$ için $\beta_n(a,\alpha)$

$$\frac{t\mathrm{e}^{at}}{\alpha\mathrm{e}^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(a,\alpha)\frac{t^n}{n!}\tag{1.1}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. $\beta_n(0,\alpha)$ yerine $\beta_n(\alpha)$ yazılırsa üreteç fonksiyonu tanımından

$$\beta_n(a,\alpha) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \beta_m(\alpha)\, a^{n-m} \tag{1.2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\beta_n(a,\alpha)$, a değişkenine göre derecesi n olan bir polinomdur. Yine üreteç fonksiyonu tanımından $\beta_n(\alpha)$ fonksiyonlarının α değişkenine göre bir rasyonel fonksiyon olduğu görülür. Özel olarak, Apostol (1951)

$$\beta_n(\alpha) = n \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m\, m! \frac{\alpha^m}{(\alpha-1)^{m+1}} S(n-1,m)$$

olduğunu göstermiştir. Burada $S(n,m)$ ikinci tip Stirling sayısıdır. Günümüzde $\beta_n(\alpha)$ ile $\beta_n(a,\alpha)$, sırasıyla Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomları olarak adlandırılır.

1976 yılında Morita bir ilkel χ Dirichlet karakteri ile genelleştirilmiş Hurwitz-Lerch L-fonksiyonunu

$$L(s;a,\lambda,\chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(n)\,\lambda^n}{(n+a)^s}$$

ile tanımlanmıştır. Karmaşık kontur integrali ve Rezidü Teoremi ile negatif olmayan her n tam sayısı için

$$L(-n;a,\lambda,\chi) = \psi_{n,\chi}(a,\lambda)$$

olduğunu göstermiştir. Burada $\psi_{n,\chi}(a,\lambda)$, $\lambda^f \neq 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_{n,\chi}(a,\lambda) \frac{t^n}{n!} = \sum_{b=1}^{f} \frac{\chi(b)\,\lambda^b \mathrm{e}^{(a+b)t}}{\lambda^b \mathrm{e}^{ft} - 1}$$

ile tanımlanır. Morita, $\psi_{n,\chi}(a,\lambda)$ fonksiyonunu p-adik olarak ifade ederek p-adik sayı cisminde tanımlı fonksiyoneller ile p-adik Hurwitz-Lerch L-fonksiyonunu oluşturmuştur.

Dirichlet L-fonksiyonunun p-adik benzerinin tanımlanma yöntemleri genel olarak üç grupta toplanabilir. Bunlar, kuvvet serisi yöntemi (Iwasawa 1972, Washington 1997), fonksiyoneller (Kubota ve Leopoldt 1964, Morita 1976) ve p-adik integrasyondur (Koblitz 1979, Young 2003). Bu tez çalışmasında p-adik Hurwitz-Lerch L-fonksiyonu Washington tarafından ele alınan kuvvet serisi yöntemi ile oluşturulmuştur. Bunun için ilk olarak genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomları ve sayıları tanımlanmıştır:

Tanım 1.1 *Kondüktörü f olan bir ilkel χ Dirichlet karakteri ve $\alpha^f \neq 1$ için*

$$\sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)\alpha^a t e^{(\tau+a)t}}{\alpha^f e^{ft} - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{m,\chi}(\tau,\alpha) \frac{t^m}{m!}$$

ile tanımlanan $\beta_{m,x}(\tau,\alpha)$ fonksiyonlarına (χ karakteri ile) genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomları denir.

q sayısı, $p=2$ için 4, $p>2$ asal sayısı için p olarak tanımlansın. p-adik Hurwitz-Lerch L-fonksiyonu Apostol-Bernoulli polinomları yardımıyla aşağıdaki teorem ile oluşturulmuştur:

Teorem 1.2 *χ, kondüktörü f olan bir ilkel Dirichlet karakteri, F sayısı q ile f sayılarının bir katı ve $\left|\alpha^F-1\right|_p \geqslant 1$ olsun. Bu durumda*

$$\left\{s\in\mathbb{C}_p : |s|_p < qp^{-\frac{1}{p-1}}\right\}$$

kümesinde p-adik analitik olup aşağıdaki özelliklere sahip bir $L_p(s;q\tau,\alpha;\chi)$ fonksiyonu vardır:

Her $n\geqslant 1$ tam sayısı için

$$L_p\left(1-n;q\tau,\alpha,\chi\right)=-\frac{1}{n}\beta_{n,\chi_n}\left(q\tau,\alpha\right)+\frac{1}{n}\chi_n(p)p^{n-1}\beta_{n,\chi_n}\left(\frac{q\tau}{p},\alpha^p\right)$$

dir. $L_p(s;q\tau,\alpha,\chi)$ fonksiyonu

$$L_p\left(s;q\tau,\alpha,\chi\right)=\frac{1}{s-1}\frac{1}{f}\sum_{\substack{a=1\\ p\nmid a}}^{f}\chi\left(a\right)\alpha^a\left\langle a+q\tau\right\rangle^{1-s}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1-s}{n}\beta_n\left(\alpha^f\right)\left(\frac{f}{a+q\tau}\right)^n$$

şeklinde ifade edilir.

p bir asal sayı $c\equiv 0 \pmod{p-1}$ olacak şekildeki pozitif c tam sayısı ve $n\not\equiv 0 \pmod{p-1}$ olan pozitif çift n tam sayısı için Kummer Kongrüansları

$$p^{-k}\Delta_c^k\frac{1}{n}B_n\in\mathbb{Z}_p$$

şeklinde de ifade edilebilir (Washington 1997). Burada $\Delta_c x_n = x_{n+c}-x_n$ ile tanımlanan Δ_c doğrusal fark operatörü süreklidir. Bu operatörün k defa uygulanması sonucu

$$\Delta_c^k x_n=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}\left(-1\right)^{k-m}x_{n+mc}$$

bağıntısı elde edilir.

Kummer Kongrüanslarının genelleştirilmiş Bernoulli sayılarına uygulanması ilk kez Carlitz (1959) tarafından incelenmiştir. $c\equiv 0 \pmod{p-1}$ özelliğinde olan pozitif c tam sayısı, $n > k \geqslant 1$ olacak şekilde n ile k pozitif tam sayıları ve $\mu \geqslant 0$ tam sayısı için $f_\chi \neq p^\mu$ olan bir χ Dirichlet karakteri

$$p^{-k}\Delta_c^k \frac{1}{n} B_{n,\chi} \in \mathbb{Z}_p[\chi]$$

ifadesini sağlar. $n > k$ kısıtlaması kaldırılırsa Δ_c^k operatörü

$$\widetilde{B}_{n,\chi} = -\frac{1}{n}\left(1 - \chi_n(p) p^{n-1}\right) B_{n,\chi_n}$$

sayısına uygulandığında kongrüansın gerçekleştiği görülür (Shiratani 1985). Burada, kondüktörü f_χ olan bir ilkel χ Dirichlet karakteri için $\chi_n = \chi\omega^{-n}$ dir. Ayrıca $\mu \geqslant 0$ tam sayı olmak üzere $f_\chi \neq p^\mu$ olacak şekilde bir χ Dirichlet karakteri ve n, k, c pozitif tam sayıları için

$$q^{-k}\Delta_c^k \widetilde{B}_{n,\chi} \in \mathbb{Z}_p[\chi]$$

dir. Kummer Kongrüanslarının bir genişlemesi olarak Gunaratne (1995), $p \geqslant 5$ asal sayısı, n, k, c pozitif tam sayıları, $\chi = \omega^h$ olacak şekilde $h \in \mathbb{Z}$ ve $h \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ için $p^{-k}\Delta_c^k \widetilde{B}_{n,\chi} \in \mathbb{Z}_p$ olduğunu ve ifadenin n sayısından bağımsız modülo $p\mathbb{Z}_p$ bir değer olduğunu göstermiştir.

Fox (2000), iki değişkenli p-adik L-fonksiyonunu kurmuş ve bu fonksiyon yardımıyla genelleştirilmiş Bernoulli polinomları için Kummer Kongrüanslarını elde etmiştir. Bu tezde Fox tarafından elde edilen kongrüansların benzerleri, p-adik Hurwitz-Lerch L-fonksiyonu yardımıyla genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomları için elde edilmiştir:

Teorem 1.3 *n, c, k, k' pozitif tam sayılar, $k \equiv k' \pmod{p-1}$ ve $\tau \in \mathbb{Z}_p$, $|\tau|_p \leqslant \left|pq^{-1}f_{\chi_n}\right|_p$ olsun. $\left|\alpha^F - 1\right|_p \geqslant 1$ ise*

$$\begin{aligned}&\alpha^{qF} q^{-k}\Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau) - q^{-k}\Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(0) \\ &\quad \equiv \alpha^{qF} q^{-k'}\Delta_c^{k'} \widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau) - q^{-k'}\Delta_c^{k'} \widetilde{\beta}_{n,\chi}(0) \pmod{p\mathbb{Z}_p[\chi,\alpha]}\end{aligned}$$

dir.

Barnes (1904), 20. yüzyılın başlarında $\zeta(s,x)$ Hurwitz zeta fonksiyonunu doğal bir yolla genelleştirerek zeta fonksiyonlarının yeni bir sınıfını oluşturmuştur. $\zeta_N(s,x;\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N)$ ile gösterilen Barnes'ın katlı zeta fonksiyonu bir N doğal sayısı, pozitif reel $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N$ sayıları, reel kısmı pozitif olan bir x karmaşık sayısı ve $\operatorname{Re}(s) > N$ olan s karmaşık sayısı için

$$\zeta_N(s,x;\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N) = \sum_{t_1,t_2,\ldots,t_N=0}^{\infty} (x + \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_N t_N)^{-s}$$

ile tanımlanır. Bu fonksiyonlar s değişkenine göre tüm karmaşık düzleme meromorfik devam ettirilebilirler ve $s=1$ noktasında analitiktirler. $N=1$ ve $\omega_1=1$ için $\zeta(s,x)$ Hurwitz zeta fonksiyonu elde edilir. Hurwitz zeta fonksiyonu ile klasik gamma fonksiyonu arasında

$$\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\mid_{s=0}=\log\left(\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntıdan esinlenerek Barnes, katlı gamma fonksiyonunu tanımlamıştır (Tangedal ve Young 2011).

Yetmiş yıl boyunca bu konu pek ilgi görmemiş, ancak 1970'lerin ortalarında Shintani (1977), reel kuadratik sayı cisimleriyle ilişkili zeta fonksiyonlarının özel değerleri için katlı-boyutlu $\zeta_N(s,A,x)$ zeta fonksiyonunu tanımlamıştır. $A=\{a_{ij}\}_{N\times n}$, girdileri pozitif olan $N\times n$ tipinde bir matris, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_N)\in\mathbb{R}^N$ ve $\operatorname{Re}(s)>\frac{N}{n}$ olmak üzere $\zeta_N(s,A,x)$ fonksiyonu

$$\zeta_N(s,A,x)=\sum_{m_1,m_2,\ldots,m_N=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{N}\left[(x_i+m_i)\,a_{ij}\right]^{-s}$$

şeklinde tanımlanır. $n=1$ durumunda Barnes'ın katlı zeta fonksiyonu elde edilir. Aynı dönemde Cassou-Nogues (1975), Shintani'nin çalışmalarından bağımsız ve Barnes'dan habersiz olarak katlı zeta fonksiyonlarını oluşturmuş ve bu fonksiyonların daha sonra Volkenborn integrali yardımıyla tanımlanacak olan p-adik benzerlerini geliştirmiştir. Bu tez çalışmasında ilk olarak katlı Barnes-Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu $\phi_N(s,x,\alpha;\overline{\omega})$ tanımlanmış ve Rezidü Teoremi ile karmaşık kontur integral teknikleri kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir:

Teorem 1.4 *$\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N$ pozitif reel sayılar, $x\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(x)>0$ ve*

$$\alpha\in\{r\exp(i\theta):0<r<1,-\pi<\theta<\pi\}$$

olsun. Bu durumda,

$$I_N(s,x,\alpha;\overline{\omega})=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^{s-1}\alpha^x\exp(xz)}{(1-\alpha^{\omega_1}\exp(\omega_1 z))\cdots(1-\alpha^{\omega_N}\exp(\omega_N z))}dz$$

fonksiyonu s değişkenine göre bir tam fonksiyondur. Ayrıca $\operatorname{Re}(s)>1$ için

$$\phi_N(s,x,\alpha;\overline{\omega})=\Gamma(1-s)\,I_N(s,x,\alpha;\overline{\omega}) \tag{1.3}$$

dir.

Burada $\Gamma(s)$, Euler gamma fonksiyonunun analitik devamıdır. Dolayısıyla (1.3) eşitliğinin her iki tarafı da $s\in\mathbb{C}$ için analitik olduğundan bu eşitlik her s

karmaşık sayısı için geçerlidir. Barnes tarafından tanımlanan $\zeta_N(s,x;\omega_1,\omega_2,...,\omega_N)$ fonksiyonunun negatif tamsayılarda aldığı değerlerle yakından ilişkili olan ve

$$\frac{t^N \exp(xt)}{(\exp(\omega_1 t)-1)\ldots(\alpha^{\omega_N}\exp(\omega_N t)-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{N,n}(x,\omega_1,\omega_2,...,\omega_N)\frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanan Bernoulli-Barnes polinomları Bayad ve Beck (2013) tarafından da çalışılmıştır. Bu tez çalışmasında mertebesi N olan $n-$inci dereceden Apostol-Bernoulli polinomları $\beta_{N,n}(x,\alpha;\omega_1,\omega_2,...,\omega_N)$ tanımlanmıştır ve $\phi_N(s,x,\alpha;\overline{\omega})$ fonksiyonunun negatif tam sayılardaki değerleri ile bu polinomlar arasındaki ilişki verilmiştir.

Teorem 1.5 *$\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N$ pozitif reel sayılar, $x\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(x)>0$ ve*

$$\alpha \in \{r\exp(i\theta): 0<r<1, -\pi<\theta<\pi\}$$

olmak üzere $k \geqslant 0$ tam sayısı için

$$\phi_N(-k,x,\alpha;\overline{\omega}) = \frac{k!\,(-1)^N}{(N+k)!}\beta_{N,N+K}(x,\alpha;\overline{\omega})$$

dir.

Kubota ve Leopoldt'un (1964) Riemann zeta ve L-fonksiyonlarının p-adik benzerlerini inşa etmesinden sonra Morita (1975), Diamond (1977) ve Washington (1997) sırasıyla klasik gamma, log gamma ve Hurwitz zeta fonksiyonlarının p-adik benzerlerini oluşturmuşlardır. Diamond, log gamma fonksiyonunun p-adik benzeri olan G_p fonksiyonunu Volkenborn integrali yardımıyla tanımlamıştır. Kashio (2005), Shintani ve Cassou-Nogues'in bazı çalışmalarını yeniden düzenlemiş ve Shintani'nin önemli bir formülüne oldukça yakın bir p-adik sonuç elde etmiştir. Tangedal ve Young (2011), p-adik katlı zeta ve log gamma fonksiyonlarını tanımlarken Kashio'nun tekniğindeki gibi Volkenborn integralini farklı bir integrand ile kullanmışlardır. Bu tezde Tangedal ve Young'ın (2011) kullandığı teknik yardımıyla katlı Barnes-Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu olan $\phi_N(s,x,\alpha;\overline{\omega})$ fonksiyonunun p-adik benzeri

$$\phi_{p,N}(s,x,\alpha;\overline{\omega}) = \frac{1}{\omega_1\omega_2\cdots\omega_N(s-1)\cdots(s-N)}\int_{\mathbb{Z}_p^N}\frac{\alpha^{x+\overline{\omega}\overline{t}}\left(x+\overline{\omega}\overline{t}\right)^N}{<x+\overline{\omega}\overline{t}>^s}d\overline{t}$$

eşitliği ile tanımlanmış ve

$$\phi_{p,N}(-k,x,\alpha;\overline{\omega}) = \left(\frac{<x>}{x}\right)^k \sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\frac{(\ln\alpha)^m}{(k+1)_m}\phi_N(-k-m,x,\alpha;\overline{\omega})$$

ifadesi elde edilmiştir. Burada $(\alpha)_k$ ile gösterilen Pochhammer sembolü $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ ve $(\alpha)_0=1$ şeklinde tanımlanır.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. p-adik Sayılar Cismi ve Bazı Elementer Fonksiyonlar

Bu bölüm; Katok (2007), Gouvea (1997), Schikhof (1984), Cohen (2007) ve Washington (1997) tarafından yazılan kitaplarından derlenerek hazırlanmıştır. Bu bölümde verilen teoremlerin kanıtları ve konuyla ilgili daha detaylı bilgiler için bu kaynaklar incelenebilir.

Tanım 2.1 *F bir cisim olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\|.\| : F \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ dönüşümüne F cismi üzerinde bir norm denir:*

$$\begin{array}{rc} i) & \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ ii) & \text{Her } x, y \in F \text{ için } \|xy\| = \|x\| \, \|y\| \\ iii) & \text{Her } x, y \in F \text{ için } \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{array}$$

F cismi bu normla indirgenen metrik ile bir metrik uzay olur.

Tanım 2.2 *Bir norm*

$$\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

özelliğini sağlıyorsa bu norma non-Archimedean norm denir.

Bu normla birlikte F cismine non-Archimedean cisim denir. Non-Archimedean norm ile indirgenen d metriğine ultrametrik denir. Bu metrik, üçgen eşitsizliği yerine "güçlü üçgen eşitsizliği" adı verilen aşağıdaki özelliği sağlar:

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}$$

p bir asal sayı olsun. $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde bir $|.|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ dönüşümü

$$|x|_p = \left\{ \begin{array}{c} p^{-\nu_p(x)}, x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlansın, burada $\nu_p(x)$ ile verilen p-adik değerleme aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$x \in \mathbb{Z}$ için $y \in \mathbb{Z}$, $p \nmid y$ olmak üzere $x = p^k y$ ise $\nu_p(x) = k$' dır. $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ve $b \neq 0$ ise $\nu_p(x) = \nu_p(b) - \nu_p(a)$' dir.

$$x \equiv y \pmod{m\mathbb{Z}_p}$$

kongrüansı

$$\nu_p(x-y) \geqslant \nu_p(m)$$

anlamındadır.

Önerme 2.3 $|.|_p$ *dönüşümü* $\mathbb{Q}$ *cismi üzerinde bir non-Archimedean normdur.*

Teorem 2.4 *(Ostrowski Teoremi)* $\mathbb{Q}$ *cismi üzerinde aşikar olmayan her norm, p asal sayı veya* $p = \infty$ *olmak üzere* $|.|_p$ *normuna denktir.*

Önerme 2.5 $\mathbb{Q}$ *cismi* $|.|_p$ *normu tarafından indirgenen metrik ile tam uzay değildir.*

Tanım 2.6 $|.|_p$ *normuna göre* $\mathbb{Q}$ *cisminin tamlanışına p-adik sayılar cismi denir ve* $\mathbb{Q}_p$ *ile gösterilir.*

Bu durumda $\mathbb{Q}_p$ cisminin elemanları; $\mathbb{Q}$ cismindeki $|.|_p$ normuna göre Cauchy dizilerinin denklik sınıflarıdır.

m sayısı pozitif bir tam sayı olsun. $0 < d_{-m} < p$ ve her $i > -m$ tamsayısı için $0 \leq d_i < p$ olmak üzere

$$\frac{d_{-m}}{p^m} + \frac{d_{-m+1}}{p^{m-1}} + \cdots + d_0 + d_1 p + d_2 p^2 + \cdots \tag{2.1}$$

serisi ele alınsın. Her $\epsilon > 0$ için $p^{-N} <\in$ olacak şekilde bir N tam sayısı seçilebilir öyle ki $k > n > N$ için

$$\left| \sum_{i=-m}^{k} d_i p^i - \sum_{i=-m}^{n} d_i p^i \right|_p \leq \max_{n<i\leq k} \left\{ \left| d_i p^i \right|_p \right\} < p^{-N} < \epsilon$$

olduğu için (2.1) ifadesi ile verilen serinin kısmi toplamlar dizisi $|.|_p$ normuna göre bir Cauchy dizisidir. Bundan dolayı (2.1) formundaki her seri $\mathbb{Q}_p$ cisminin bir elemanıdır. Tersine $\mathbb{Q}_p$ cisminin her elemanı da (2.1)'de verilen bir seri ile ifade edilebilir. Ancak bu kısmın gösterilebilmesi için önce aşağıdaki teorem verilmelidir.

Teorem 2.7 $\mathbb{Q}_p$ *cismindeki,* $|a|_p \leq 1$ *özelliğini sağlayan her a denklik sınıfı tam bir tane* $\{a_i\}$ *Cauchy dizisi gösterimine sahiptir öyle ki*

i) *Her* $i \in \mathbb{N}$ *için* $a_i \in \mathbb{Z}$*' dir ve* $0 \leq a_i < p^i$

ii) *Her* $i \in \mathbb{N}$ *için* $a_i \equiv a_{i+1} \pmod{p^i}$ *' dir.*

Bu durumda bu teorem yardımıyla $|a|_p \leq 1$ özelliğini sağlayan her a elemanının gösterim dizisinin her a_i terimini aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür:

$$a_i = d_0 + d_1 p + d_2 p^2 + \cdots + d_{i-1} p^{i-1} \tag{2.2}$$

Burada $d_i \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ dir. Ayrıca Teoremin (ii) maddesinden

$$a_{i+1} = d_0 + d_1 p + d_2 p^2 + \cdots + d_{i-1} p^{i-1} + d_i p^i$$

yazılabilir. Buradaki d_0'dan d_{i-1}'e kadar olan sayılar (2.2) eşitliğindeki sayılarla aynıdır. Böylece a sayısı $|.|_p$ normuna göre yakınsak olan aşağıdaki seri ile ifade edilir:

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} d_n p^n$$

Bu durumda $a = \cdots d_n \cdots d_2 d_1 d_0$ yazılır ve bu yazılıma a'nın kanonik p-adik açılımı denir.

$\mathbb{Q}_p$ cisminin, $|a|_p > 1$ özelliğini sağlayan her a elemanı p sayısının bir kuvveti ile ($p^m = |a|_p$ ile) çarpılsın. $|a'|_p = 1$ özelliğini sağlayan $a' = ap^m$ sayısı elde edilir. Buradan a sayısı

$$a = \sum_{n=-m}^{\infty} d_n p^n \tag{2.3}$$

ile yazılabilir. Burada $d_{-m} \neq 0$ ve $d_i \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$' dir. O halde a elemanı da kanonik p-adik açılıma sahiptir ve bu açılım $a = \cdots d_n \cdots d_2 d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \cdots d_{-m}$ ile gösterilir.

Aşağıdaki önerme; bir p-adik sayının normunun, o sayının sahip olduğu kanonik açılımın sıfırdan farklı ilk katsayısının indisi ile belirli olduğunu söyler:

Önerme 2.8 *$0 \leq n < k$ için $d_n = 0$ ve $d_k \neq 0$ olacak şekilde $a = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n p^n$ ise $|a|_p = p^{-k}$' dır. $d_{-m} \neq 0$ olmak üzere $a = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} d_n p^n$ ise $|a|_p = p^m$' dir.*

p-adik açılım yardımıyla $\mathbb{Q}_p$ cisminde aritmetik işlemler aşağıdaki şekilde verilir:

$$a = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n p^n \text{ ve } b = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n p^n$$

olsun. Burada a_n, $b_n \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ve $a_{-m} \neq 0$'dır, fakat b_{-m}, $b_{-m+1}, \ldots$ şeklinde ilk birkaç terim sıfır olabilir. Bu durumda

$$a + b = \sum_{n=-m}^{\infty} (a_n + b_n) \, p^n$$

serisi yakınsaktır, ancak (2.3) eşitliği ile verilen formda değildir. Teorem2.7 ile verilen kanonik forma dönüştürme yöntemi, p-adik sayıların kanonik formdaki yazılımlarında sağdan sola standart toplama işlemine karşılık gelir. Bu yöntem yardımıyla elde edilen seri,(2.3) eşitliği ile verilen formda yazılabilir. Böylece $a + b$ sayısı da kanonik p-adik açılıma sahiptir. Benzer şekilde çarpma işlemi de aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$a = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n p^n \text{ ve } b = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n p^n$$

kanonik formda verilen iki sayı olsun. Verilen iki seri terim terim çarpılıp yeniden düzenlenirse

$$ab = \sum_{n=-m-k}^{\infty} u_n p^n$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} u_{-m-k} &= a_{-m} b_{-k} \\ u_{-m-k+1} &= a_{-m+1} b_{-k} + a_{-m} b_{-k+1} \\ &\cdots \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.9 *Bir $a \in \mathbb{Q}_p$ p-adik sayısının kanonik açılımı sadece p'nin negatif olmayan kuvvetlerinden oluşuyorsa a sayısına p-adik tam sayı denir.*

p-adik tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}_p$ ile gösterilir, dolayısıyla

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \right\}$$

dir. $\mathbb{Z}_p = \left\{ a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p \leq 1 \right\}$ olduğu kolayca görülebilir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{Z}_p$ kümesi yukarıda verilen işlemler ile bir değişmeli halkadır.

Önerme 2.10 *Bir*

$$a = \cdots a_1 a_0$$

p-adik tam sayısının $\mathbb{Z}_p$ halkasında bir çarpımsal tersinin var olması için gerek ve yeter şart $a_0 \neq 0$ olmasıdır.

$\mathbb{Z}_p$ halkasındaki tersinir elemanların kümesi $\mathbb{Z}_p^*$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\mathbb{Z}_p^* = \left\{ a \in \mathbb{Z}_p : |a|_p = 1 \right\}$$

dir.

Teorem 2.11 *$\mathbb{Q}_p$ cisminde bir $\{a_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi ve dolayısıyla yakınsak olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki özelliği sağlamasıdır:*

$$\lim_{n \to \infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Önerme 2.12 *$a_n \in \mathbb{Q}_p$ olmak üzere bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin $\mathbb{Q}_p$ cisminde yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = 0$ olmasıdır.*

Formal bir kuvvet serisi, $a_n \in \mathbb{Q}_p$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ile verilsin. Bu serinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşulun $\lim_{n\to\infty} |a_n x^n|_p = 0$ olduğu biliniyor. Böylece bir $r \geq 0$ reel sayısı için $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p r^n = 0$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi en azından $|x|_p \leq r$ bölgesinde yakınsaktır.

Tanım 2.13 *Katsayıları $\mathbb{Q}_p$ cisminde olan bir $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $0 \leq r_f \leq \infty$ genişletilmiş reel sayısı*

$$r_f = \sup \left\{ r \geq 0 : |a_n|_p r^n \to 0 \right\}$$

ile tanımlanır.

Önerme 2.14 *$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı*

$$r_f = \frac{1}{\limsup |a_n|_p^{1/n}}$$

dir.

$\mathbb{Q}_p$ cisminde bazı temel fonksiyonlar aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.15 *$|x-1|_p < 1$ olan $x \in \mathbb{Z}_p$ değerleri için p-adik logaritma fonksiyonu*

$$\log_p(x) = \log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$$

serisi ile tanımlanır.

Tanım 2.16 *$|x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$ olan $x \in \mathbb{Z}_p$ değerleri için p-adik üstel fonksiyon;*

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

serisi ile tanımlanır.

$\mathbb{Q}_p$ cismi cebirsel kapalı değildir. $\mathbb{Q}_p$ cisminin cebirsel kapanışı $\bar{\mathbb{Q}}_p$ ile gösterilsin. $\bar{\mathbb{Q}}_p$ cismi $|.|_p$ normunun genişlemesiyle elde edilen norm ile tam uzay değildir. $\mathbb{C}_p$ ile, $\bar{\mathbb{Q}}_p$ cisminin tamlanışı gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki önerme verilebili:

Önerme 2.17 $\mathbb{C}_p$ *cismi cebirsel kapalıdır.*

$\mathbb{C}_p^+ := \left\{x \in \mathbb{C}_p : |x|_p \leqslant 1\right\}$ kümesi tanımlansın. p-adik logaritma fonksiyonunun ve p-adik üstel fonksiyonun tanımları, sırasıyla aşağıdaki şekilde genişletilebilir:

Tanım 2.18 *Tanım 2.15'de verilen seri ile logaritma fonksiyonu* $\log : V \to \mathbb{C}_p$ *olarak tanımlanabilir. Burada* V *kümesi*

$$V = \left\{x \in \mathbb{C}_p^+ : |x-1|_p < 1\right\}$$

ile verilir.

Tanım 2.19 *Tanım 2.16'da verilen seri ile üstel fonksiyon* $\exp : W \to \mathbb{C}_p$ *olarak tanımlanabilir. Burada* W *kümesi*

$$W = \left\{x \in \mathbb{C}_p^+ : |x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}\right\}$$

ile verilir.

Bu fonksiyonlar dışında, tezin Bulgular bölümünde kullanılacak olan ve p-adik binom serisi olarak da bilinen önemli bir fonksiyonun tanımı burada verilebilir:

Tanım 2.20 $x, a \in \mathbb{C}_p$ *için* x^a *fonksiyonu, aşağıda verilen toplam yakınsak olduğunda*

$$x^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} (x-1)^n$$

ifadesi ile tanımlanır.

2.2. Dirichlet Karakteri

G bir sonlu çarpımsal Abel grubu olsun. G grubundan karmaşık sayıların $\mathbb{C}^*$ çarpımsal grubuna tanımlanan bir homomorfizme G grubunun bir karakteri denir. Dolayısıyla, G grubunun bir karakteri, $f : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$, her $x, y \in G$ için $f(xy) = f(x) f(y)$ özelliğinde olan bir dönüşümdür. G grubunun karakterlerinin kümesi $Hom\,(G, \mathbb{C}^*)$ ile gösterilen ve G grubunun duali olarak adlandırılan bir grup oluşturur.

$n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$ olmak üzere $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasındaki tersinir elemanların $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ grubu, mertebesi $\phi\,(n)$ olan bir Abel grubudur (burada ϕ, Euler ϕ-fonksiyonudur). Bu grubun dualindeki bir χ elemanına bir Dirichlet karakteri denir. Bu karakter, tanım kümesi n sayısı ile aralarında asal olan tam sayılar, görüntü kümesi $\mathbb{C}^*$ ve $\chi\,(ab) = \chi\,(a)\,\chi\,(b)$ özelliğini sağlayan bir fonksiyon olarak ele alınabilir. Bu fonksiyon tüm tam sayılar kümesine $(a, n) \neq 1$ ise $\chi\,(a) = 0$ olacak şekilde genişletilebilir.

$n \mid m$ olmak üzere $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ grubunun her karakteri n modülüne göre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ grubunun bir karakteridir. Bu yüzden bir χ Dirichlet karakterinin modülü olan n sayısını en küçük olacak şekilde seçmek uygundur. Bu türde olan sayıya χ Dirichlet karakterinin kondüktörü denir ve f_χ (veya kısaca f) ile gösterilir. Bu çalışma boyunca her karakterin kondüktörü modülünde tanımlandığı varsayılacaktır. Bu türde olan karakterlere ilkel karakter denir.

χ ve ψ, sırasıyla kondüktörleri f_χ ve f_ψ olan Dirichlet karakterleri olsun. $\chi\psi$ çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\gamma : (\mathbb{Z}/\,(f_\chi, f_\psi)\,\mathbb{Z})^* \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

$\gamma\,(a) = \chi\,(a)\,\psi\,(a)$ homomorfizması ele alınsın. Bu durumda $\chi\psi$, γ ile ilişkili bir ilkel karakterdir ve $\chi\psi$ karakterinin kondüktörü olan $f_{\chi\psi}$ sayısı (f_χ, f_ψ) sayısını böler. Bu çalışma boyunca χ karakterinin kondüktörü f ile gösterilecektir.

2.3. Teichmüller Karakteri ve Bazı Genişlemeleri

p bir asal sayı olmak üzere

$$q = \begin{cases} p, & p \neq 2 \text{ ise;} \\ 4, & p = 2 \text{ ise.} \end{cases}$$

olsun. $a \in \mathbb{Z}$ ve $(a, p) = 1$ ise $\omega\,(a)^{\phi(q)} = 1$ olacak şekilde tek türlü belirli bir $\omega\,(a) \in \mathbb{Z}_p$ vardır. Bu sayı

$$\omega\,(a) \equiv a \pmod{q\mathbb{Z}_p}$$

özelliğindedir. Bu şekilde tanımlanan $\omega\,(a)$ sayısı tüm tam sayılara $(a, p) \neq 1$ için $\omega\,(a) = 0$ olacak şekilde genişletildiğinde bir karakter olarak düşünülebilir. Bu durumda ω, kondüktörü q olan bir Dirichlet karakteridir. Bu karaktere Teichmüller karakteri denir. Bu karakter yardımıyla

$$\langle a \rangle = \omega^{-1}(a)a$$

fonksiyonu tanımlansın. $\langle a\rangle \equiv 1 \pmod{q\mathbb{Z}_p}$ dir. $\tau \in \mathbb{C}_p$, $|\tau|_p \leqslant 1$ için $\omega(a+q\tau) = \omega(a)$ olduğundan $\langle a\rangle = \omega^{-1}(a)a$ fonksiyonu

$$\langle a+q\tau\rangle = \omega^{-1}(a)\,(a+q\tau)$$

şeklinde genişletilebilir.

$\overline{\mathbb{Q}}$ genişlemesinden $\mathbb{C}_p$ cismine bir gömme seçilsin ve bu seçim sabitlensin. Kondüktörü f olan bir ilkel χ Dirichlet karakteri için bu gömme yardımıyla χ değerlerinin $\mathbb{C}_p$ cisminde olduğu düşünülebilir. Bu karakter yardımıyla $\chi_n = \chi\omega^{-n}$ tanımlansın. Buradaki çarpım, bir önceki bölümde tanımlanan karakterlerin çarpımı anlamındadır ve χ_n karakterinin kondüktörü olan f_{χ_n}, ekok(f,q) sayısının bir katıdır.

Teichmüller karakterinin bir diğer genişlemesi ise aşağıdaki şekilde verilebilir (Cohen 2007, Tangedal ve Young 2011):

$\mathbb{C}_p^*$ kümesi, $\mathbb{C}_p$ cismindeki tersinir elemanların kümesi ve $P^{\mathbb{Q}}$, p asal sayısının rasyonel kuvvetlerinin kümesinin $\overline{\mathbb{Q}}$ kümesinden $\mathbb{C}_p$ cismine yapılan gömme altında $\mathbb{C}_p^*$ cismindeki görüntüsü olsun. U kümesi $\mathbb{C}_p^*$ cisminde mertebesi p ile bölünmeyen birimin köklerinin grubu olsun. Bu durumda $x \in \mathbb{C}_p$ ve $|x|_p = 1$ ise $\left|x - \hat{x}\right|_p < 1$ olacak şekilde tek türlü belirli bir $\hat{x} \in U$ elemanı vardır (buna Teichmüller gösterimi denir). Bu gösterim $\hat{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x^{p^{n!}}$ şeklinde de yazılabilir. Bu tanım $x \in \mathbb{C}_p^*$ için

$$\hat{x} = \widehat{\left(\frac{x}{p^{\nu_p(x)}}\right)}$$

ile genişletilebilir. Yani, $x = p^r u$, $p^r \in P^{\mathbb{Q}}$ ve $|u|_p = 1$ için $\hat{x} = \hat{u}$ tanımlanabilir. Buradan $< . >$ fonksiyonu $\mathbb{C}_p^*$ üzerinde

$$< x >= p^{-\nu_p(x)}\frac{x}{\hat{x}}$$

ile tanımlanabilir (bu tanım $p = 2$ için Washinton'un tanımından farklıdır). Bu tanım, çarpımsal grupların bir direkt çarpımına olanak sağlar.

$$D = \left\{x \in \mathbb{C}_p : |x-1|_p < 1\right\}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}_p^* \simeq P^{\mathbb{Q}} \times U \times D \\ &x = p^{\nu_p(x)}\hat{x} < x > \mapsto \left(p^{\nu_p(x)}, \hat{x}, < x >\right) \end{aligned}$$

dir. $\mathbb{C}_p^*$ cisminin $\overline{\mathbb{Q}}$ kümesinden $\mathbb{C}_p$ cismine yapılan gömmenin seçimine bağlıdır; $p^{\nu_p(x)}$, $\hat{x}$ ve $< x >$ izdüşümleri sadece birimin kökleri ile belirlenir. Ancak $\mathbb{Q}_p^*$,

$\mathbb{Q}_p$ cismindeki tersinir elemanların kümesi olmak üzere $x \in \mathbb{Q}_p^*$ için bu izdüşümler tek türlü belirlidir ve gömmenin seçiminden bağımsızdır. $x \mapsto p^{v_p(x)}$ ve $x \mapsto \hat{x}$ izdüşüm dönüşümleri $\left\{x \in \mathbb{C}_p : |x-y|_p < |y|_p\right\}$ şeklindeki yuvarlar üzerinde sabittir ve böylece türevleri sıfırdır.

2.4. p-adik L-Fonksiyonu

Kubota ve Leopoldt (1964) Dirichlet L-fonksiyonunun p-adik benzerlerinin varlığını kanıtlamış ve negatif tam sayılardaki değerlerini elde etmişlerdir. Daha sonra birçok farklı yöntemle oluşturulan bu fonksiyonun tanımlanmasında kullanılan yöntemler kuvvet serileri, fonksiyoneller ve p-adik integrasyon olmak üzere üç grupta incelenebilir. Iwasawa (1972) ve Washington (1997) kuvvet serileri yardımıyla p-adik L-fonksiyonunu kurmuştur. Washington'un kullandığı yöntem Iwasawa'nın yönteminden biraz daha farklıdır. Washington'un yönteminde p-adik L-fonksiyonunun kesin ifadesi elde edilmektedir. Bu bölümde Washington'un yöntemi ele alınacaktır, Iwasawa'nın yönteminden ileride söz edilecektir.

a ve F sayıları $0 < a < F$ özelliğinde olan tam sayılar olmak üzere

$$H(s,a,F) = \sum_{\substack{m \equiv a \pmod{F} \\ m \geqslant 0}} \frac{1}{m^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+nF)^s}$$

tanımlansın, bu durumda $n \geqslant 1$ için

$$H(1-n,a,F) = -\frac{F^{n-1}}{n} B_n\left(\frac{a}{F}\right)$$

olur. Serilerin yakınsaklık bölgesini belirlemekle ilgili olan aşağıdaki ön teorem verilebilir:

Ön Teorem 2.21 (Washington 1997) *r sayısı $0 < r < p^{-\frac{1}{p-1}} < 1$ özelliğini sağlayan bir reel sayı ve bir M sabiti için $|a_n|_p \leqslant Mr^n$ olmak üzere*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

olsun. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonu yakınsaklık yarıçapı en az $R = \left(rp^{\frac{1}{p-1}}\right)^{-1} > 1$ olan bir kuvvet serisi şeklinde yazılabilir.

Bu ön teoremin kullanılabilmesi için birer rasyonel sayı olan Bernoulli sayılarının paydasının, bir p asalının hangi kuvvetini içerdiğinin bilinmesine ihtiyaç vardır. Bu amaç doğrultusunda von Staudt-Clausen Teoremi olarak bilinen aşağıdaki teorem burada hatırlatılabilir:

Teorem 2.22 (von Staudt-Clausen) *n bir doğal sayı, p bir asal sayı ve A_{2n} bir tam sayı olmak üzere*

$$B_{2n} = A_{2n} - \sum_{\substack{p \text{ asal} \\ (p-1)|2n}} \frac{1}{p}$$

dir.

1840 yılında Thomas Clausen tarafından kanıtsız olarak verilen ve aynı yıl Christian von Staudt tarafından kanıtlanan bu teoremin farklı yöntemlerle yapılan birçok kanıtı Cayley'in (2007) yüksek lisans tezinde bulunabilir.

$H_p(s, a, F)$ fonksiyonunun analitiklik özellikleri aşağıdaki teorem ile verilebilir:

Teorem 2.23 (Washington 1997) *F ve a sayıları $q \mid F$, $p \nmid a$, $0 < a < F$ özelliğinde olan tam sayılar olsun.Bu durumda*

$$B = \left\{ s \in \mathbb{C}_p : |s|_p < qp^{-\frac{1}{p-1}} > 1 \right\}$$

kümesinde p-adik meromorfik bir $H_p(s, a, F)$ fonksiyonu vardır. Her $n \geqslant 1$ tam sayısı için

$$H_p(1-n, a, F) = \omega^{-n}(a) H(1-n, a, F) = -\frac{\omega^{-n}(a) F^{n-1}}{n} B_n\left(\frac{a}{F}\right)$$

dir. Özel olarak, $p > 2$ için $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ ve $p = 2$ için $n \equiv 0 \pmod{2}$ ise

$$H_p(1-n, a, F) = H(1-n, a, F)$$

dir. H_p fonksiyonu $s = 1$ noktasındaki basit kutbu hariç analitiktir ve fonksiyonun bu kutuptaki rezidüsü $\frac{1}{F}$ dir.

Bu teoremin kanıtı Teorem 2.22 ve Ön Teorem 2.21 yardımıyla yapılır. Bu teoremden yararlanılarak p-adik L-fonksiyonu oluşturulabilir. Bunun için önce genelleştirilmiş Bernoulli sayıları ve klasik Bernoulli sayıları arasındaki bağıntı ifade edilmelidir.

Ön Teorem 2.24 *F sayısı q ve f sayılarının bir katı olmak üzere*

$$B_{n,\chi} = F^{n-1} \sum_{a=1}^{F} \chi(a) B_n\left(\frac{a}{F}\right)$$

dir.

$L_p(s;\chi)$ p-adik L-fonksiyonu Washington (1997) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Teorem 2.25 (Washington 1997) *χ, kondüktörü f olan bir ilkel Dirichlet karakteri ve F sayısı q ile f sayılarının bir katı olsun. Bu durumda,*

$$B = \left\{ s \in \mathbb{C}_p : |s|_p < qp^{-\frac{1}{p-1}} \right\}$$

kümesinde p-adik meromorfik ($\chi \neq 1$ için analitik) bir $L_p(s;\chi)$ fonksiyonu vardır. Her $n \geqslant 1$ tam sayısı için

$$L_p(1-n;\chi) = -\frac{\left(1-\chi_n(p)\, p^{n-1}\right)}{n} B_{n,\chi\omega^{-n}} \tag{2.4}$$

dir. $\chi = 1$ ise $L_p(s;1)$ fonksiyonu $s = 1$ noktasındaki basit kutbu hariç analitiktir. Fonksiyonun $s = 1$ noktasındaki rezidüsü $\left(1-\frac{1}{p}\right)$ dir. $L_p(s;\chi)$ fonksiyonu

$$L_p(s;\chi) = \frac{1}{F}\frac{1}{s-1}\sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{F} \chi(a) \langle a \rangle^{1-s} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1-s}{j} B_j \left(\frac{F}{a}\right)^j$$

şeklinde ifade edilir.

2.5. Kummer Tipli Kongrüanslar

Iwasawa (1972), Dirichlet L-fonksiyonunun bir p-adik benzerinin varlığını ve kuvvet serileriyle ifade edilebileceğini kanıtlamıştır. Bu yöntemden yararlanarak Fox (2000), iki değişkenli p-adik L-fonksiyonunu oluşturmuş ve bu fonksiyon yardımıyla genelleştirilmiş Bernoulli polinomları için Kummer tipli kongrüanslar elde etmiştir. Bu bölümde ilk olarak Iwasawa'nın p-adik L-fonksiyonunu oluştururken kullandığı yöntemden bahsedilecektir.

$\overline{\mathbb{Q}}_p$, $\mathbb{Q}_p$ cisminin cebirsel kapanışı, $\mathbb{K}$, $\mathbb{Q}_p$ cisminin bir sonlu genişlemesi ve $\{b_n\}$, $\mathbb{K}$ cisminde bir dizi olsun. Bu durumda

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$$

eşitliği ile $\mathbb{K}$ cisminde bir $\{c_n\}$ dizisi tanımlanabilir. $\{a_n\}$, $\mathbb{K}$ cisminde bir dizi olmak üzere

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

serilerinin oluşturduğu $\mathbb{K}[[x]]$ kümesi üzerinde

$$\|A\|_p = \sup_n |a_n|_p$$

normu tanımlansın. $\|A\|_p < \infty$ özelliğindeki A kuvvet serilerinin kümesi P_K ile gösterilsin.

Teorem 2.26 (Iwasawa 1972) *r sayısı $0 < r < |p|_p^{\frac{1}{p-1}}$ özelliğini sağlayan bir reel sayı ve her $n \geqslant 0$ tam sayısı için c bir reel sayı olmak üzere $|c_n|_p \leqslant cr^n$ olsun. Bu durumda P_K kümesinde aşağıdaki özellikleri sağlayan tek türlü belirli bir $A(x)$ kuvvet serisi vardır:*

(i) *$A(x)$ kuvvet serisi $|\xi|_p < |p|_p^{\frac{1}{p-1}} r^{-1}$ koşulunu sağlayan her $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ için yakınsaktır.*

(ii) *Her $n \geqslant 0$ için $A(n) = b_n$ dir.*

Sonuç 2.27 (Iwasawa 1972) *$A(x)$ Teorem 2.26'deki kuvvet serisi olsun. Bu durumda, $|\xi|_p < |p|_p^{\frac{1}{p-1}} r^{-1}$ özelliğindeki her $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ için*

$$A(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{\xi}{n}$$

dir.

$\mathbb{Q}_p(\chi)$, her $a \in \mathbb{Z}_p$ için $\mathbb{Q}_p$ cisminin $\chi(a)$ tarafından üretilen bir genişlemesi olmak üzere $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p(\chi)$ olsun. $\mathbb{K}$ cisminde

$$b_{n,\chi} = \left(1 - \chi_n(p)\, p^{n-1}\right) B_{n,\chi_n}$$

$$c_{n,\chi} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_{k,\chi}$$

eşitlikleri ile tanımlanan $\{b_{n,\chi}\}$ ve $\{c_{n,\chi}\}$ dizileri için aşağıdaki ön teorem ifade edilebilir:

Ön Teorem 2.28 (Iwasawa 1972) *Her $n \geqslant 0$ tam sayısı için*

$$|c_{n,\chi}|_p \leqslant \left|q^{-2} f^{-1}\right|_p |q|_p^n$$

dir.

Bu ön teorem

$$B_{n,\chi_n} = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{p^h f_{\chi_n}} \sum_{a=1}^{p^h f_{\chi_n}} \chi_n(a)\, a^n$$

ifadesi yardımıyla kanıtlanır. Ön Teorem 2.28 kullanılarak $r = |q|_p$ için Teorem 2.26, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p(\chi)$ cismindeki $\{b_{n,\chi}\}$ ve $\{c_{n,\chi}\}$ dizilerine uygulanabilir.

Teorem 2.29 (Iwasawa 1972) *Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir p-adik meromorfik $L_p(s;\chi)$ fonksiyonu vardır:*

(i) *$L_p(s;\chi)$ fonksiyonu $B' = \left\{ s \in \overline{\mathbb{Q}}_p : |s-1|_p < |p|_p^{\frac{1}{p-1}} r^{-1} \right\}$ bölgesinde yakınsak olan*

$$L_p(s;\chi) = \frac{a_{-1,\chi}}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,\chi}(s-1)^n$$

kuvvet serisidir. Burada $a_{n,\chi} \in \mathbb{K}$ ve $a_{-1,\chi} = \begin{cases} 1-\frac{1}{p}, & \chi = 1 \text{ ise;} \\ 0, & \chi \neq 1 \text{ ise.} \end{cases}$ dir.

(ii) *Her $n \geqslant 0$ tam sayısı için*

$$L_p(1-n;\chi) = -\frac{1}{n} b_{n,\chi} = -\frac{\left(1-\chi_n(p)\, p^{n-1}\right)}{n} B_{n,\chi_n} \tag{2.5}$$

dir.

Bu teorem,

$$L_p(s;\chi) = \frac{1}{s-1} A_\chi(1-s)$$

eşitliği yardımıyla kanıtlanabilir. (2.5) eşitliği

$$L_p(1-n;\chi) = \left(1-\chi_n(p)\, p^{n-1}\right) L(1-n;\chi_n)$$

şeklinde de yazılabilir.

Iwasawa tarafından yukarıdaki şekilde tanımlanan $L_p(s;\chi)$ fonksiyonu, Fox (2000) tarafından iki değişkenli $L_p(s,\tau;\chi)$ fonksiyonu tanımlanarak genişletilmiştir.

$\tau \in \overline{\mathbb{Q}}_p$, $|\tau|_p \leqslant 1$ ve $\mathbb{K}_\tau = \mathbb{Q}_p(\chi,\tau)$ olarak alınsın. Bu durumda,

$$b_n(\tau,\alpha) = B_{n,\chi_n}(q\tau,\alpha) - \chi_n(p)p^{n-1} B_{n,\chi_n}\left(\frac{q\tau}{p}, \alpha^p\right)$$

ile tanımlanan $b_n(\tau,\alpha)$ ve

$$c_n(\tau,\alpha) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^{n-k} b_m(\tau,\alpha)$$

ile tanımlanan $c_n(\tau,\alpha)$, $\mathbb{K}_\tau = \mathbb{Q}_p(\chi,\tau)$ cisminde birer dizidir.

Teorem 2.30 (Fox 2000) *Her* $\tau \in \mathbb{C}_p$, $|\tau|_p \leqslant 1$ *için tek türlü belirli bir p-adik meromorfik* $L_p(s,\tau;\chi)$ *fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon* $B' = \left\{ s \in \overline{\mathbb{Q}}_p \colon |s-1|_p < |p|_p^{\frac{1}{p-1}} |q|_p^{-1} \right\}$ *bölgesinde yakınsak olan*

$$L_p(s,\tau;\chi) = \frac{a_{-1,\chi}(\tau)}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,\chi}(\tau)(s-1)^n$$

serisi ile gösterilir. Burada, $a_{n,\chi}(\tau) \in \mathbb{K}_\tau$ *ve* $a_{-1,\chi}(\tau) = \begin{cases} 1-\frac{1}{p}, & \chi = 1 \text{ ise;} \\ 0, & \chi \neq 1 \text{ ise.} \end{cases}$ *dir. Ayrıca her* $n \geqslant 1$ *tam sayısı için*

$$L_p(1-n,\tau;\chi) = -\frac{1}{n}\left(B_{n,\chi_n}(q\tau) - \chi_n(p)p^{n-1}B_{n,\chi_n}\left(\frac{q\tau}{p}\right)\right)$$

dir .

F sayısı $pq^{-1}f_{\chi_n}$ sayısının bir pozitif katı olsun. Teichmüller karakterinin genişlemesi yardımıyla kongrüanslar için önemli rol oynayan aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.31 (Fox 2000) $\tau \in \mathbb{C}_p$, $|\tau|_p \leqslant 1$, *ve* $\chi = 1$ *için* $s \neq 1$ *olmak üzere* $s \in B'$ *olsun. Bu durumda*

$$L_p(s,\tau+F;\chi) - L_p(s,\tau;\chi) = -\sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{qF} \chi_1(a)\langle a+q\tau\rangle^{-s} \tag{2.6}$$

dir.

Bu teoremin kanıtı önce $s = 1-n$ için yapılır. $s \in B'$ için kanıt aşağıdaki sonuca dayanır:

Ön Teorem 2.32 (Iwasawa 1972) $A_1(x)$ *ile* $A_2(x)$, $K[[x]]$ *kuvvet serileri halkasının sıfırın bir komşuluğunda* $\mathbb{C}_p$ *cisminde yakınsak olan iki elemanı olsun. Sıfırdan farklı ve* $\mathbb{C}_p$ *cisminde sıfıra yakınsayan bir* $\{\xi_n\}$ *dizisi için* $A_1(\xi_n) = A_2(\xi_n)$ *ise* $A_1(x) = A_2(x)$ *dir.*

(2.6) eşitliğinin sol tarafı $A_1(s)$ ve sağ tarafı $A_2(s)$ kuvvet serisi olarak düşünülebilir. Sıfır, negatif tam sayıların bir limit noktası olduğundan Ön Teorem 2.32'deki $\{\xi_n\}$ dizisi için negatif tam sayılar alınabilir. Bu durumda, $A_1(s)$ ve $A_2(s)$ kuvvet serilerinin $s \in B'$ için yakınsak oldukları gösterildiğinde Ön Teorem 2.32'den yararlanılarak Teorem 2.31'ün kanıtı tamamlanır.

Sonuç 2.33 (Fox 2000) *$\chi = 1$ için $s \neq 1$ olmak üzere $s \in B'$ olsun. Bu durumda,*

$$L_p(s, F; \chi) - L_p(s, 0; \chi) = -\sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{qF} \chi_1(a) \langle a \rangle^{-s}$$

dir.

Gösterimde sadelik açısından n pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$\widetilde{B}_{n,\chi}(\tau) = -\frac{1}{n}\left(B_{n,\chi_n}(q\tau) - \chi_n(p)p^{n-1}B_{n,\chi_n}\left(\frac{q\tau}{p}\right)\right)$$

olsun. Bu durumda, yukarıdaki sonuçlar yardımıyla Fox (2000) tarafından kanıtlanan Kummer tipli kongrüanslar verilebilir.

Teorem 2.34 (Fox 2000) *n, c, k pozitif tam sayılar ve $\tau \in \mathbb{Z}_p$, $|\tau|_p \leqslant \left|pq^{-1}f_{\chi_n}\right|_p$ olsun. Bu durumda,*

$$q^{-k}\Delta_c^k \widetilde{B}_{n,\chi}(\tau) - q^{-k}\Delta_c^k \widetilde{B}_{n,\chi}(0)$$

ifadesi $\mathbb{Z}_p[\chi]$ halkasının bir elemanıdır ve modülo $q\mathbb{Z}_p[\chi]$ n sayısından bağımsızdır.

Bu teorem öncelikle F sayısı $pq^{-1}f_{\chi_n}$ sayısının bir pozitif katı olmak üzere $\tau = F$ için kanıtlanır. $pq^{-1}f_{\chi_n}\mathbb{Z}$ kümesindeki pozitif tam sayılar $pq^{-1}f_{\chi_n}\mathbb{Z}_p$ kümesinde yoğun olduğundan bu teoremin bir $\tau \in pq^{-1}f_{\chi_n}\mathbb{Z}_p$ elemanı için kanıtı $pq^{-1}f_{\chi_n}\mathbb{Z}_p$ kümesinde τ elemanına yakınsayan pozitif bir $\{\tau_i\}$ dizisinin varlığı ile elde edilir. Bu teorem yardımıyla, benzer şekilde kanıtlanan aşağıdaki sonuç da verilebilir:

Teorem 2.35 (Fox 2000) *n, c, k, k' pozitif tam sayılar, $k \equiv k' \pmod{p-1}$ ve $\tau \in \mathbb{Z}_p$, $|\tau|_p \leqslant \left|pq^{-1}f_{\chi_n}\right|_p$ olsun. Bu durumda*

$$q^{-k}\Delta_c^k \widetilde{B}_{n,\chi}(\tau) - q^{-k}\Delta_c^k \widetilde{B}_{n,\chi}(0) \equiv q^{-k'}\Delta_c^{k'} \widetilde{B}_{n,\chi}(\tau) - q^{-k'}\Delta_c^{k'} \widetilde{B}_{n,\chi}(0) \pmod{p\mathbb{Z}_p[\chi]}$$

dir.

2.6. Volkenborn İntegrali ve Barnes Katlı Zeta Fonksiyonunun p-adik Benzeri

İyi özelliklere sahip (en azından sürekli, ancak genel olarak analitik) p-adik fonksiyonları tanımlamanın birçok yolu vardır. Bu yöntemler birbirleriyle ilişkilidir ve bunlar yardımıyla gamma, zeta ve L-fonksiyonlarının p-adik benzerleri tanımlanabilir. Bu yöntemlerden bazıları p-adik interpolasyon yöntemi, Mahler açılımı, kuvvet serileri ve p-adik ölçüm kullanılarak uygulanan yöntemlerdir. p-adik ölçüm içeren yöntemlerden biri de Volkenborn integralinin kullanılmasıdır.

Tanım 2.36 (Cohen 2007) *Verilen bir g fonksiyonu için iki değişkenli*

$$\Phi g(x,y)=\frac{g(x)-g(y)}{x-y}$$

fonksiyonu bir $a\in\mathbb{Z}_p$ ve $x\neq y$ için $(x,y)\to(a,a)$ iken $l=g'(a)$ limitine sahip ise g fonksiyonuna $a\in\mathbb{Z}_p$ noktasında kesin diferansiyellenebilirdir denir. Bir $X\subseteq\mathbb{Z}_p$ için g fonksiyonu her $a\in X$ noktasında kesin diferansiyellenebilir ise g fonksiyonuna X kümesinde kesin diferansiyellenebilirdir denir ve $g\in S^1(\mathbb{Z}_p)$ ile gösterilir.

Tanım 2.37 (Cohen 2007) *$g:\mathbb{Z}_p\longrightarrow\mathbb{C}_p$ fonksiyonu verilsin. g fonksiyonunun $\mathbb{Z}_p$ üzerindeki Volkenborn integrali, eğer limit varsa*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} g(t)\,dt=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{p^r}\sum_{0\leqslant n<p^r} g(n)$$

formülü ile tanımlanır.

$g\in S^1(\mathbb{Z}_p)$ ise $\int_{\mathbb{Z}_p} g(t)\,dt$ vardır (Cohen 2007). $g\in S^1(\mathbb{Z}_p)$ olan fonksiyonlar için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} g(t+1)\,dt=\int_{\mathbb{Z}_p} g(t)\,dt+g'(0),$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} g(t+1)\,dt=\int_{\mathbb{Z}_p} g(-t)\,dt,$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} g(t)\,dt=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\mathbb{Z}_p} g(j+mt)\,dt,\quad m\in\mathbb{Z},m\geqslant 0.$$

Tangedal ve Young (2011) katlı Volkenborn integralinin tanımını iterasyon yardımıyla verip bu tanımdan faydalanarak Barnes katlı zeta fonksiyonunun p-adik benzerini elde etmişlerdir. Buna göre $1\leqslant k\leqslant N$ olmak üzere her sabit $(t_{k+1},t_{k+2},\ldots,t_N)\in\mathbb{Z}_p^{N-k}$ vektörü için $F_k(t_k,t_{k+1},\ldots,t_N)\in S^1(\mathbb{Z}_p)$ fonksiyonu verilsin. k. iterasyonda

$$\int_{\mathbb{Z}_p} F_k(t_k,t_{k+1},\ldots,t_N)\,dt$$

integrali hesaplanacaktır. Bu koşullar altında

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\int_{\mathbb{Z}_p}\cdots\int_{\mathbb{Z}_p} f(t_1,t_2,\ldots,t_N)\,dt_1dt_2\cdots dt_N$$

ile verilen N katlı tekrarlı Volkenborn integrali kısaca aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p^N} f\left(\bar{t}\right) d\bar{t}, \quad \bar{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_N).$$

Bu tanımı kullanarak Tangedal ve Young (2011) aşağıdaki ön teoremi kanıtlamışlardır:

Ön Teorem 2.38 *$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N \in \mathbb{C}_p^*$ ve $x \in \mathbb{C}_p$ olsun. $1 \leqslant k \leqslant N$ özelliğindeki her k tam sayısı için*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} B_{k-1,n}\left(x + \omega_k t_k + \cdots + \omega_N t_N; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k-1}\right) dt_k$$
$$= \omega_k B_{k,n}\left(x + \omega_{k+1} t_{k+1} + \cdots + \omega_N t_N; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\right)$$

dir.

Burada $B_{N,n}\left(x; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\right)$,

$$\frac{t^N \exp\left(xt\right)}{\left(\exp(\omega_1 t) - 1\right) \cdots \left(\exp(\omega_N t) - 1\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{N,n}\left(x, \overline{\omega}\right) \frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanan, mertebesi N olan $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$ vektörü ile n. dereceden Bernoulli polinomudur.

Ayrıca $x \in \mathbb{C}_p^*$ ve $s \in \mathbb{C}_p$ için $< x >^s$, seri yakınsak olduğunda

$$< x >^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} \left(< x > -1\right)^n$$

olarak tanımlanabilir. Bu tanım x ve s değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak Tangedal ve Young (2011) tarafından kanıtlanan aşağıdaki önerme ile verilmiştir:

Önerme 2.39 *$x \in \mathbb{C}_p^*$ için $s \mapsto < x >^s$ fonksiyonu $\mathbb{Z}_p$ üzerinde s değişkeninin bir C^∞ fonksiyondur ve $s = 0$ civarında pozitif yarıçaplı bir yuvar üzerinde analitiktir; bu yuvar üzerinde x değişkeninin bir fonksiyonu olarak yerel analitiktir ve $< . >$ fonksiyonu için yapılan seçimden bağımsızdır. K, $\mathbb{Q}_p$ cisminin dallanma indeksi $p-1$ sayısından küçük olan sonlu bir genişlemesi ve (π), K genişlemesinin tam sayılar halkasının maksimal ideali olmak üzere $x \in K$ için $s \mapsto < x >^s$ fonksiyonu $|s|_p < |\pi|_p^{-1} p^{-\frac{1}{p-1}}$ için analitiktir. $s \in \mathbb{Z}_p$ ise $x \mapsto < x >^s$ fonksiyonu $\left\{x \in \mathbb{C}_p : |x-y|_p < |y|_p\right\}$ şeklindeki bir yuvar üzerinde x değişkeninin bir fonksiyonu olarak analitiktir.*

Tangedal ve Young (2011), Barnes'ın (1904) $\zeta(s,x)$ Hurwitz zeta fonksiyonunu genelleştirerek elde ettiği katlı zeta fonksiyonu olan $\zeta_N(s,x;\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N)$ fonksiyonunun p-adik benzerini, $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N \in \mathbb{C}_p^*$ ve Λ, $\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N\}$ kümesinin $\mathbb{Z}_p$-doğrusal gerdiği küme olmak üzere $x \in \mathbb{C}_p \backslash \Lambda$ için

$$\zeta_{p,N}(s,x;\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N) = \frac{1}{\omega_1\omega_2\cdots\omega_N(s-1)\cdots(s-N)} \int_{\mathbb{Z}_p}\int_{\mathbb{Z}_p}\cdots\int_{\mathbb{Z}_p} \frac{(x+\omega_1t_1+\omega_2t_2+\cdots+\omega_Nt_N)^N}{< x+\omega_1t_1+\omega_2t_2+\cdots+\omega_Nt_N >^s} dt_1dt_2\cdots dt_N$$

ile tanımlamışlardır. Bu fonksiyonun analitiklik özellikleri Önerme 2.39 kullanılarak kanıtlanan aşağıdaki teoremde incelenmiştir:

Teorem 2.40 *$x \notin \Lambda$ olacak şekilde $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N, x \in \mathbb{C}_p^*$ seçimi için $\zeta_{p,N}(s,x;\overline{\omega})$ fonksiyonu $\mathbb{Z}_p \backslash \{1,2,\ldots,N\}$ üzerinde s değişkeninin C^∞ sınıfından bir fonksiyondur ve $s=0$ civarında pozitif yarıçaplı bir yuvar üzerinde s değişkeninin bir analitik fonksiyonudur; bu yuvar üzerinde x değişkeninin bir fonksiyonu olarak yerel analitiktir ve $< . >$ için yapılan seçimden bağımsızdır. K, $\mathbb{Q}_p$ cisminin dallanma indeksi $p-1$ sayısından küçük olan sonlu bir genişlemesi ve (π), K genişlemesinin tam sayılar halkasının maksimal ideali olmak üzere $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N, x \in K$ ise $\zeta_{p,N}(s,x;\overline{\omega})$ fonksiyonu $s=1,2,\ldots,N$ noktaları hariç $|s|_p < |\pi|_p^{-1} p^{-\frac{1}{p-1}}$ özelliğinde olan $s \in \mathbb{C}_p$ için analitiktir. $s \in \mathbb{Z}_p \backslash \{1,2,\ldots,N\}$ ise $\zeta_{p,N}(s,x;\overline{\omega})$ fonksiyonu $\mathbb{C}_p \backslash \Lambda$ üzerinde x değişkeninin bir fonksiyonu olarak yerel analitiktir.*

3. BULGULAR

3.1. $L_p(s, q\tau, \alpha, \chi)$ Fonksiyonunun Kurulumu

Morita (1977) bir ilkel Dirichlet karakteri ile genelleştirilmiş Hurwitz-Lerch L-fonksiyonunu

$$L(s; \tau, \alpha, \chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(n)\alpha^n}{(n+\tau)^s} \tag{3.1}$$

ile tanımlamıştır. Karmaşık kontur integrali ve Rezidü Teoremi ile negatif olmayan her n tam sayısı için

$$L(-n; \tau, \alpha, \chi) = \psi_{n,\chi}(\tau, \alpha) \tag{3.2}$$

olduğunu göstermiştir. Burada $\psi_{n,\chi}(a, \alpha)$, $\alpha^f \neq 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_{n,\chi}(\tau, \alpha)\frac{t^n}{n!} = \sum_{b=1}^{f} \frac{\chi(b)\alpha^b \mathrm{e}^{(\tau+b)t}}{1-\alpha^f \mathrm{e}^{ft}}$$

ile tanımlanır. Morita, $\psi_{n,\chi}(\tau, \alpha)$ fonksiyonunu p-adik olarak ifade ederek p-adik sayı cisminde tanımlı fonksiyoneller ile p-adik Hurwitz-Lerch L-fonksiyonunu oluşturmuştur.

Burada bu fonksiyon Washington (1997) tarafından verilen yöntem ile kurulacaktır. Bunun için önce genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomları tanımlanmış ve bu polinomların $\psi_{n,\chi}(\tau, \alpha)$ fonksiyonu ile olan ilişkisi verilmiştir.

Tanım 3.1 *Kondüktörü f olan bir ilkel χ Dirichlet karakteri ve $\alpha^f \neq 1$ için*

$$\sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)\alpha^a t e^{(\tau+a)t}}{\alpha^f e^{ft}-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{m,x}(\tau, \alpha)\frac{t^m}{m!} \tag{3.3}$$

ile tanımlanan $\beta_{m,x}(\tau, \alpha)$ fonksiyonlarına genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomları denir.

Ön Teorem 3.2 *$\alpha^f \neq 1$ ise $\beta_{0,x}(\tau, \alpha) = 0$ ve $m \geqslant 1$ için*

$$\beta_{m,x}(\tau, \alpha) = -m\psi_{m-1,\chi}(\tau, \alpha)$$

dır.

Kanıt. (3.3) bağıntısından

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} \beta_{m,x}(\tau, \alpha)\frac{t^m}{m!} &= \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)\alpha^a t e^{(\tau+a)t}}{\alpha^f e^{ft}-1} = -t\sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)\alpha^a e^{-(\tau+a)(-t)}}{1-\alpha^f e^{(-f)(-t)}} \\
&= -\sum_{m=1}^{\infty} \psi_{m-1,\chi}(\tau, \alpha)\frac{t^m}{(m-1)!}
\end{aligned}$$

elde edilir. ∎

Dolayısyla (3.2) eşitliğinden $m \geqslant 1$ tam sayısı için

$$L(1-m;\tau,\alpha,\chi) = -\frac{1}{m}\beta_{m,x}(\tau,\alpha) \tag{3.4}$$

olur.

a ve f pozitif tam sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} H(s,a+\tau,\alpha,f) &= \sum_{\substack{m\equiv a \pmod f \\ m\geqslant 0}} \frac{\alpha^m}{(m+\tau)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{a+nf}}{(a+nf+\tau)^s} \\ &= \alpha^a f^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha^f\right)^n}{\left(\frac{a+\tau}{f}+n\right)^s} \end{aligned}$$

tanımlansın. O halde (3.1) gereği

$$L(s;\tau,\alpha,\chi) = \sum_{a=1}^{f} \chi(a) H(s;a+\tau,\alpha,f)$$

olur.

Teorem 3.3 *χ, kondüktörü f olan bir ilkel Dirichlet karakteri ve F sayısı f sayısının herhangi bir katı olmak üzere $m \geqslant 0$ tam sayısı için*

$$\beta_{m,x}(\tau,\alpha) = F^{m-1} \sum_{a=1}^{F} \chi(a)\,\alpha^a \beta_m\left(\frac{a+\tau}{F},\alpha^F\right)$$

dir.

Kanıt.

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} F^{m-1} \sum_{a=1}^{F} \chi(a)\,\alpha^a \beta_m\left(\frac{a+\tau}{F},\alpha^F\right)\frac{t^m}{m!} \\ &\quad= \frac{1}{F}\sum_{a=1}^{F}\chi(a)\alpha^a \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m\left(\frac{a+\tau}{F},\alpha^F\right)\frac{(Ft)^m}{m!} \\ &\quad= \frac{1}{F}\sum_{a=1}^{F} \frac{\chi(a)\alpha^a Fte^{\left(\frac{\tau+a}{F}\right)Ft}}{\alpha^F e^{Ft}-1} = \sum_{a=1}^{F}\frac{\chi(a)\alpha^a te^{(\tau+a)t}}{\alpha^F e^{Ft}-1} \end{aligned}$$

bulunur. $F = fg$ ve $a = b + cf$ alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{F} \frac{\chi(a)\alpha^a te^{(\tau+a)t}}{\alpha^F e^{Ft} - 1} &= \sum_{b=1}^{f} \frac{\chi(b)\alpha^b te^{(\tau+b)t}}{\alpha^{gf} e^{gft} - 1} \sum_{c=0}^{g-1} \left(\alpha^f e^{ft}\right)^c \\ &= \sum_{b=1}^{f} \frac{\chi(b)\alpha^b te^{(\tau+b)t}}{\alpha^f e^{ft} - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{m,x}(\tau,\alpha) \frac{t^m}{m!}\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{t^m}{m!}$ terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa kanıt tamamlanır. ∎

Teorem 3.3'den

$$\beta_{m,x}(\tau,\alpha) = f^{m-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, \alpha^a \beta_m \left(\frac{a+\tau}{f}, \alpha^f\right)$$

olur. Bu durumda (3.4) eşitliğinden

$$L(1-m;\tau,\alpha,\chi) = -\frac{f^{m-1}}{m} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, \alpha^a \beta_m \left(\frac{a+\tau}{f}, \alpha^f\right)$$

bulunur. Burada (1.2) bağıntısı kullanılarak

$$L(1-m;\tau,\alpha,\chi) = -\frac{f^{m-1}}{m} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, \alpha^a \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \beta_n\left(\alpha^f\right) \left(\frac{f}{a+\tau}\right)^{n-m}$$

elde edilir. Buradan

$$L(1-m;\tau,\alpha,\chi) = -\frac{1}{mf} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, \alpha^a (a+\tau)^m \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \beta_n\left(\alpha^f\right) \left(\frac{f}{a+\tau}\right)^{n}$$

bulunur.

Bu gözlemler ile p-adik Hurwitz-Lerch L-fonksiyonu

$$L_p(s;q\tau,\alpha,\chi) = \frac{1}{s-1} \frac{1}{f} \sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{f} \chi(a)\, \alpha^a \langle a+q\tau\rangle^{1-s} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1-s}{n} \beta_n\left(\alpha^f\right) \left(\frac{f}{a+q\tau}\right)^{n}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu fonksiyonun analitiklik özellikleri aşağıda ele alınacaktır.

F sayısı q ve f sayılarının bir katı olsun ve

$$L_p(s;q\tau,\alpha,\chi) = \sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{F} \chi(a)\, H_p(s;a+q\tau,\alpha,F)$$

yazılsın. Burada, $a \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant a \leqslant q$ için

$$H_p\left(s; a+q\tau, \alpha, F\right) = \frac{1}{s-1}\frac{1}{F}\alpha^a \left\langle a+q\tau\right\rangle^{1-s} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1-s}{n} \beta_n\left(\alpha^F\right)\left(\frac{F}{a+q\tau}\right)^n$$

dir. Aşağıdaki ön teorem $H_p\left(s; a+q\tau, \alpha, F\right)$ fonksiyonunun analitiklik özelliklerinin incelenmesinde önemlidir:

Ön Teorem 3.4 $\left|\alpha^F - 1\right|_p \geqslant 1$ *ise* $\left|\beta_n\left(\alpha^F\right)\right|_p \leqslant 1$ *dir.*

Kanıt. Apostol (1951) aşağıdaki bağıntıyı vermiştir:

$$\beta_n\left(\alpha^F\right) = \frac{n}{\alpha^F - 1}\sum_{k=0}^{n-1} S\left(n-1, k\right) k! \left(\frac{\alpha^F}{1-\alpha^F}\right)^k.$$

Burada $S\left(n,k\right)$ ikinci tip Stirling sayısıdır. $S\left(n-1,k\right)$, $k!$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olduğundan $\left|S\left(n-1,k\right)\right|_p \leqslant 1$, $\left|k!\right|_p \leqslant 1$ ve $\left|n\right|_p \leqslant 1$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}\left|\beta_n\left(\alpha^F\right)\right|_p &= \left|\frac{n}{\alpha^F - 1}\sum_{k=0}^{n-1} S\left(n-1, k\right) k! \left(\frac{\alpha^F}{1-\alpha^F}\right)^k\right|_p \\ &\leqslant \underset{0\leqslant k\leqslant n-1}{maks}\left|\frac{1}{\left(1-\alpha^F\right)^k}\right|_p \leqslant 1\end{aligned}$$

dir. ■

Teorem 3.5 *F ve a sayıları $q \mid F$, $p \nmid a$, $0 < a < F$ özelliğindeki tam sayılar ve $\left|\alpha^F - 1\right|_p \geqslant 1$ olsun. Bu durumda*

$$B = \left\{s \in \mathbb{C}_p : \left|s\right|_p < qp^{-\frac{1}{p-1}} > 1\right\}$$

kümesinde p-adik analitik bir $H_p\left(s; a+q\tau, \alpha, F\right)$ fonksiyonu vardır. Her $n \geqslant 1$ tam sayısı için

$$H_p(1-n; a+q\tau, \alpha, F) = -\frac{F^{n-1}\omega^{-n}(a)}{n}\alpha^a \beta_n\left(\frac{a+q\tau}{F}, \alpha^F\right)$$

dir.

Kanıt. İlk olarak

$$H_p\left(s; a+q\tau, \alpha, F\right) = \frac{1}{s-1}\frac{1}{F}\alpha^a \left\langle a+q\tau\right\rangle^{1-s} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1-s}{n} \beta_n\left(\alpha^F\right)\left(\frac{F}{a+q\tau}\right)^n$$

eşitliğinin sağ tarafındaki serinin yakınsak olduğu varsayılsın. O halde,

$$\begin{aligned}H_p(1-n;a+q\tau,\alpha,F) &= -\frac{1}{nF}\alpha^a\langle a+q\tau\rangle^n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\beta_j\left(\alpha^F\right)\left(\frac{F}{a+q\tau}\right)^j \\ &= -\frac{1}{nF}\omega^{-n}(a)\left(a+q\tau\right)^n\alpha^a\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\beta_j\left(\alpha^F\right)\left(\frac{F}{a+q\tau}\right)^j \\ &= -\frac{F^{n-1}\omega^{-n}(a)}{n}\alpha^a\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\beta_j\left(\alpha^F\right)\left(\frac{a+q\tau}{F}\right)^{n-j} \\ &= -\frac{F^{n-1}\omega^{-n}(a)}{n}\alpha^a\beta_n\left(\frac{a+q\tau}{F},\alpha^F\right)\end{aligned}$$

dir. Ayrıca $\beta_0\left(\alpha\right)=0$ olduğundan

$$\lim_{s\to1}\left(s-1\right)H_p\left(s;a+q\tau,\alpha,F\right)=\frac{1}{F}\alpha^a\beta_0\left(\alpha^F\right)=0$$

dır. O halde fonksiyon $s=1$ noktasında kaldırılabilir tekil noktaya sahiptir.

Şimdi $H_p\left(s;a+q\tau,\alpha,F\right)$ fonksiyonunun yakınsaklık bölgesi elde edilecektir. Ön Teorem 3.4'den $\left|\beta_n\left(\alpha^F\right)\right|_p\leqslant 1$ ve $q\mid F$, $p\nmid a$ olduğundan

$$\left|\left(\frac{F}{a+q\tau}\right)^n\right|_p\leqslant |q|_p^n$$

dır. Ön Teorem 2.21'de r sayısı $|q|_p$ ve M sayısı 1 seçilirse

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}\beta_n\left(\alpha^F\right)\left(\frac{F}{a+q\tau}\right)^n$$

toplamı $B=\left\{s\in\mathbb{C}_p:|s|_p<qp^{-\frac{1}{p-1}}\right\}$ kümesinde analitik olur. $qp^{-\frac{1}{p-1}}>1$ olduğundan $B'=\left\{s\in\mathbb{C}_p:|1-s|_p<qp^{-\frac{1}{p-1}}\right\}$ kümesi B kümesiyle aynıdır. Bu yüzden,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1-s}{n}\beta_n\left(\alpha^F\right)\left(\frac{F}{a+q\tau}\right)^n$$

serisi B kümesinde analitik bir fonksiyon temsil eder. Benzer şekilde $\langle a+q\tau\rangle^s$ ve dolayısıyla $\langle a+q\tau\rangle^{1-s}$ fonksiyonları da B kümesinde analitiktir. Buradan $\left(s-1\right)H_p\left(s;a+q\tau,\alpha,F\right)$ fonksiyonu bu bölgede analitiktir. ∎

Teorem 3.6 *χ, kondüktörü f olan bir ilkel Dirichlet karakteri, F sayısı q ve f sayılarının bir katı ve $\left|\alpha^F-1\right|_p\geqslant 1$ olsun. Bu durumda*

$$B=\left\{s\in\mathbb{C}_p:|s|_p<qp^{-\frac{1}{p-1}}\right\}$$

kümesinde p-adik analitik bir $L_p(s; q\tau, \alpha; \chi)$ fonksiyonu vardır. Her $n \geqslant 1$ tam sayısı için

$$L_p(1-n; q\tau, \alpha, \chi) = -\frac{1}{n}\beta_{n,\chi_n}(q\tau, \alpha) + \frac{1}{n}\chi_n(p)p^{n-1}\beta_{n,\chi_n}\left(\frac{q\tau}{p}, \alpha^p\right) \tag{3.5}$$

dir. $L_p(s; q\tau, \alpha, \chi)$ fonksiyonu

$$L_p(s; q\tau, \alpha, \chi) = \frac{1}{s-1}\frac{1}{f}\sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{f} \chi(a)\,\alpha^a \langle a+q\tau\rangle^{1-s} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1-s}{n} \beta_n\left(\alpha^f\right)\left(\frac{f}{a+q\tau}\right)^n$$

şeklinde ifade edilebilir.

Kanıt. Tanım gereği

$$L_p(s; q\tau, \alpha, \chi) = \sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{F} \chi(a)\, H_p(s; a+q\tau, \alpha, F)$$

olduğundan $L_p(s; q\tau, \alpha, \chi)$ fonksiyonunun analitiklik özellikleri $H_p(s; a+q\tau, \alpha, F)$ fonksiyonunun özellikleri ile aynıdır. $n \geqslant 1$ ise

$$\begin{aligned}
L_p(1-n; q\tau, \alpha, \chi) &= \sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{F} \chi(a)\, H_p(1-n; a+q\tau, \alpha, F) \\
&= -\frac{F^{n-1}}{n}\sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{F} \chi(a)\,\omega^{-n}(a)\alpha^a\beta_n\left(\frac{a+q\tau}{F}, \alpha^F\right) \\
&= -\frac{F^{n-1}}{n}\sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{F} \chi_n(a)\alpha^a\beta_n\left(\frac{a+q\tau}{F}, \alpha^F\right) \\
&= -\frac{F^{n-1}}{n}\sum_{a=1}^{F} \chi_n(a)\alpha^a\beta_n\left(\frac{a+q\tau}{F}, \alpha^F\right) \\
&\quad + \frac{1}{n}p^{n-1}\left(\frac{F}{p}\right)^{n-1}\sum_{b=1}^{F/p} \chi_n(pb)\left(\alpha^p\right)^b\beta_n\left(\frac{b+q\frac{\tau}{p}}{F/p}, \left(\alpha^p\right)^{F/p}\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $p \mid f_{\chi_n}$ ise her b için $\chi_n(pb) = 0$ dır. $p \nmid f_{\chi_n}$ ise $f_{\chi_n} \mid \frac{F}{p}$ olur. Bu durumda Teorem 3.3'den

$$L_p(1-n; q\tau, \alpha, \chi) = -\frac{1}{n}\beta_{n,\chi_n}(q\tau, \alpha) + \frac{1}{n}\chi_n(p)p^{n-1}\beta_{n,\chi_n}\left(\frac{q\tau}{p}, \alpha^p\right)$$

elde edilir. Bu ise kanıtı tamamlar. ∎

3.2. Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli Polinomları İçin Kummer Tipli Kongrüanslar

Bu bölümde $L_p(s; q\tau, \alpha, \chi)$ fonksiyonu kullanılarak genelleştirilmiş $\beta_{n,x}(\tau, \alpha)$ Apostol-Bernoulli polinomları için Kummer tipli kongrüanslar elde edilmiştir.

Ön Teorem 3.7 *$k \geqslant 1$ tam sayısı için*

$$\alpha^{kf}\beta_{n,\chi}(kf+\tau, \alpha) - \beta_{n,\chi}(\tau, \alpha) = n\sum_{a=1}^{kf}\chi(a)\alpha^a(a+\tau)^{n-1}$$

dir.

Kanıt. Her $n \geqslant 1$ tam sayısı için $\beta_{n,\chi}(\tau, \alpha)$ polinomlarının tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\alpha^f\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,\chi}(\tau+f, \alpha)\frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,\chi}(\tau, \alpha)\frac{t^n}{n!}
&= \sum_{a=1}^{f}\frac{\chi(a)\alpha^a t\, e^{(a+\tau)t}}{\alpha^f e^{ft}-1}(\alpha^f e^{ft}-1) = \sum_{a=1}^{f}\chi(a)\alpha^a t e^{(a+\tau)t} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n\sum_{a=1}^{f}\chi(a)\alpha^a(a+\tau)^{n-1}\right)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha^f\beta_{n,\chi}(f+\tau, \alpha) - \beta_{n,\chi}(\tau, \alpha) = n\sum_{a=1}^{f}\chi(a)\alpha^a(a+\tau)^{n-1}$$

yazılabilir. Benzer şekilde $m \geqslant 1$ tam sayısı için

$$\alpha^f\beta_{n,\chi}(mf+\tau, \alpha) - \beta_{n,\chi}((m-1)f+\tau, \alpha) = n\sum_{a=1}^{f}\chi(a)\alpha^a(a+(m-1)f+\tau)^{n-1}$$

eşitliği gösterilebilir. Bu durumda, $m = 2$ için eşitliğin her iki tarafı α^f ile, $m = 3$ için eşitliğin her iki tarafı α^{2f} ile ve bu şekilde devam edilerek $m = k$ için son eşitlik $\alpha^{(k-1)f}$ ile çarpılıp elde edilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa bulunan ifadenin sol tarafı

$$\alpha^{kf}\beta_{n,\chi}(kf+\tau, \alpha) - \beta_{n,\chi}(\tau, \alpha)$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafı ise gerekli işlemlerden sonra

$$n\sum_{a=1}^{kf}\chi(a)\alpha^a(a+\tau)^{n-1}$$

olarak bulunur. ■

F sayısı $pq^{-1}f_{\chi_n}$ sayısının bir pozitif katı olsun.

Teorem 3.8 *$\tau \in \mathbb{C}_p$, $|\tau|_p \leqslant 1$, $s \in B = \left\{ s \in \mathbb{C}_p : |s|_p < qp^{-\frac{1}{p-1}} \right\}$ ve $\left|\alpha^F - 1\right|_p \geqslant 1$ olsun. Bu durumda*

$$\alpha^{qF} L_p(s, q(\tau + F), \alpha; \chi) - L_p(s, q\tau, \alpha; \chi) = -\sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{qF} \chi_1(a)\alpha^a \langle a + q\tau \rangle^{-s} \tag{3.6}$$

dir.

Kanıt. $\tau \in \mathbb{C}_p$, $|\tau|_p \leqslant 1$ olsun. $n \geqslant 1$ için (3.5) gereği

$$\begin{aligned}
&\alpha^{qF} L_p(1-n, q(\tau + F), \alpha; \chi) - L_p(1-n, q\tau, \alpha; \chi) \\
&= -\frac{1}{n}\alpha^{qF}\left[\beta_{n,\chi_n}(q\tau + qF, \alpha) - \chi_n(p)p^{n-1}\beta_{n,\chi_n}\left(\frac{q\tau + qF}{p}, \alpha^p\right)\right] \\
&- \left(-\frac{1}{n}\right)\left[\beta_{n,\chi_n}(q\tau, \alpha) - \chi_n(p)p^{n-1}\beta_{n,\chi_n}\left(\frac{q\tau}{p}, \alpha^p\right)\right] \\
&= -\frac{1}{n}\left(\alpha^{qF}\beta_{n,\chi_n}(q\tau + qF, \alpha) - \beta_{n,\chi_n}(q\tau, \alpha)\right) \\
&+ \frac{1}{n}\chi_n(p)p^{n-1}\left(\alpha^{qF}\beta_{n,\chi_n}\left(\frac{q\tau + qF}{p}, \alpha^p\right) - \beta_{n,\chi_n}\left(\frac{q\tau}{p}, \alpha^p\right)\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada Ön Teorem 3.7'deki eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\alpha^{qF} L_p(1-n, q(\tau + F), \alpha; \chi) - L_p(1-n, q\tau, \alpha; \chi) \\
&= -\sum_{a=1}^{qF}\chi_n(a)\alpha^a(a + q\tau)^{n-1} + \chi_n(p)p^{n-1}\sum_{a=1}^{p^{-1}qF}\chi_n(a)\alpha^{ap}(a + p^{-1}q\tau)^{n-1} \\
&= -\left(\sum_{a=1}^{qF}\chi_n(a)\alpha^a(a + q\tau)^{n-1} - \sum_{\substack{a=1 \\ p|a}}^{qF}\chi_n(a)\alpha^a(a + q\tau)^{n-1}\right) \\
&= -\sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{qF}\chi_n(a)\alpha^a(a + q\tau)^{n-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\chi_n(a)(a + q\tau)^{n-1} &= \chi(a)\omega^{-n}(a)(a + q\tau)^{n-1} \\
&= \chi(a)\omega^{-1}(a)\,\omega^{-(n-1)}(a + q\tau)(a + q\tau)^{n-1} \\
&= \chi_1(a)\langle a + q\tau \rangle^{n-1}
\end{aligned}$$

olduğundan teorem, $s = 1 - n$ için kanıtlanmış olur.

Sıfır, negatif tam sayıların bir limit noktası olğuğundan Ön Teorem 2.32 gereği (3.6) eşitliğinin her iki tarafındaki fonksiyonların ortak bölgelerindeki sıfırın herhangi bir komşuluğunda bu teorem doğru olur. (3.6) eşitliğinin sol tarafındaki fonksiyonların tanım kümesi B kümesini içerir. Eşitliğin sağ tarafı $\langle a+q\tau\rangle^{-s}$ şeklindeki fonksiyonların sonlu toplamlarından oluştuğu için $\langle a+q\tau\rangle^{-s}$ fonksiyonunun analitik olduğu bölgenin belirlenmesi yeterli olur.

$$\langle a+q\tau\rangle^{-s} = \exp\left(-s\log\langle a+q\tau\rangle\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-s\right)^m\left(\log\langle a+q\tau\rangle\right)^m \tag{3.7}$$

ile üstel fonksiyonun Taylor açılımı yazılsın. $a\in\mathbb{Z}_p$ ve $(a,p)=1$ olmak üzere $\tau\in\mathbb{C}_p$ ve $|\tau|_p\leqslant 1$ için $\langle a+q\tau\rangle\equiv 1 \pmod{q\mathbb{Z}_p}$ olduğundan $\log\langle a+q\tau\rangle\equiv 0 \pmod{q\mathbb{Z}_p}$ olur. Böylece

$$\left|\frac{1}{m!}\left(-s\right)^m\left(\log\langle a+q\tau\rangle\right)^m\right|_p \leqslant \left|\frac{1}{m!}\left(-s\right)^m q^m\right|_p \leqslant \left|p^{-\frac{m}{p-1}}\left(-s\right)^m q^m\right|_p = \left|p^{-\frac{1}{p-1}}sq\right|_p^m$$

olur. Burada $\left|p^{-\frac{1}{p-1}}sq\right|_p<1$ için (3.7) ifadesindeki seri yakınsak olur. Bu durumda bu koşulu sağlayan s değerleri B kümesinin elemanıdır. ■

Sonuç 3.9 *$s\in B$ ve $\left|\alpha^F-1\right|_p\geqslant 1$ olsun. Bu durumda*

$$\alpha^{qF}L_p(s,qF,\alpha;\chi)-L_p(s,0,\alpha;\chi) = -\sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{qF}\chi_1(a)\alpha^a\langle a\rangle^{-s}$$

dir.

n pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$\widetilde{\beta}_{n,\chi}\left(\tau\right) = -\frac{1}{n}\beta_{n,\chi_n}\left(q\tau,\alpha\right)+\frac{1}{n}\chi_n(p)p^{n-1}\beta_{n,\chi_n}\left(\frac{q\tau}{p},\alpha^p\right) \tag{3.8}$$

olsun. O halde (3.5) ifadesinden

$$L_p\left(1-n;q\tau,\alpha,\chi\right) = \widetilde{\beta}_{n,\chi}\left(\tau\right) \tag{3.9}$$

elde edilir.

Teorem 3.10 *n,c,k pozitif tam sayılar, $\left|\alpha^F-1\right|_p\geqslant 1$ ve $\tau\in\mathbb{Z}_p$, $|\tau|_p\leqslant\left|pq^{-1}f_{\chi_n}\right|_p$ olsun. Bu durumda*

$$\alpha^{qF}q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}\left(\tau\right)-q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}\left(0\right)$$

ifadesi $\mathbb{Z}_p\left[\chi,\alpha\right]$ halkasının bir elemanıdır ve modülo $q\mathbb{Z}_p\left[\chi,\alpha\right]$ n sayısından bağımsızdır.

Kanıt. Sonuç 3.9'da $s = 1 - n$ alınırsa

$$\alpha^{qF} L_p(1-n, qF, \alpha; \chi) - L_p(1-n, 0, \alpha; \chi) = -\sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{qF} \chi_1(a)\alpha^a \langle a \rangle^{n-1}$$

elde edilir. Burada F sayısı $pq^{-1}f_{\chi_n}$ sayısının bir pozitif katıdır. Δ_c^k operatörü uygulanırsa (3.9) gereği

$$\alpha^{qF}\Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(F) - \Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(0) = -\sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{qF} \chi_1(a)\alpha^a \langle a \rangle^{-1} \Delta_c^k \langle a \rangle^n$$

olur.

$$\begin{aligned}\Delta_c^k \langle a \rangle^n &= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (-1)^{k-m} \langle a \rangle^{n+mc} = \langle a \rangle^n \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (-1)^{k-m} \langle a \rangle^{mc} \\ &= \langle a \rangle^n \left(\langle a \rangle^c - 1\right)^k\end{aligned}$$

dır. Burada $\langle a \rangle \equiv 1 \pmod{q\mathbb{Z}_p}$ olduğundan $\langle a \rangle^c \equiv 1 \pmod{q\mathbb{Z}_p}$ olur. O halde

$$\Delta_c^k \langle a \rangle^n \equiv 0 \pmod{q^k\mathbb{Z}_p}$$

dir. Böylece

$$\alpha^{qF}\Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(F) - \Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(0) \equiv 0 \pmod{q^k\mathbb{Z}_p[\chi,\alpha]}$$

olur. Dolayısıyla $q^{-k}\alpha^{qF}\Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(F) - q^{-k}\Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(0) \in \mathbb{Z}_p[\chi,\alpha]$ olur. Ayrıca

$$q^{-k}\alpha^{qF}\Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(F) - q^{-k}\Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(0) = -\sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{qF} \chi_1(a)\alpha^a \langle a \rangle^{n-1} \left(\frac{\langle a \rangle^c - 1}{q}\right)^k \tag{3.10}$$

ve $\langle a \rangle^n \equiv 1 \pmod{q\mathbb{Z}_p}$ olduğundan $q^{-k}\alpha^{qF}\Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(F) - q^{-k}\Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)$ değeri modülo $q\mathbb{Z}_p[\chi,\alpha]$ n sayısından bağımsızdır.

$\tau \in pq^{-1}f_{\chi_n}\mathbb{Z}_p$ olsun. $pq^{-1}f_{\chi_n}\mathbb{Z}$ kümesindeki pozitif tam sayılar $pq^{-1}f_{\chi_n}\mathbb{Z}_p$ kümesinde yoğun olduğu için $pq^{-1}f_{\chi_n}\mathbb{Z}$ kümesindeki her i için $\tau_i > 0$ ve $\tau_i \to \tau$ olacak şekilde bir $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi vardır. $\widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau)$, $\widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau_i) \to \widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau)$ özelliğinde olan bir polinom olduğundan

$$\lim_{i\to\infty}\left(\alpha^{qF}\Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau_i) - \Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\right) = \alpha^{qF}\Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau) - \Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)$$

olur. Eşitliğin sol tarafı modülo $q^k\mathbb{Z}_p[\chi,\alpha]$ 0 sayısına denk olduğundan

$$\alpha^{qF}\Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau) - \Delta_c^k \widetilde{\beta}_{n,\chi}(0) \equiv 0 \pmod{q^k\mathbb{Z}_p[\chi,\alpha]}$$

olur ve dolayısıyla $q^{-k}\alpha^{qF}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau)-q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\in\mathbb{Z}_p[\chi,\alpha]$ elde edilir. Ayrıca bir n' pozitif tam sayısı için

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty}&\left(\left(q^{-k}\alpha^{qF}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau_i)-q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\right)-\left(q^{-k}\alpha^{qF}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n',\chi}(\tau_i)-q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n',\chi}(0)\right)\right)\\ &=\left(q^{-k}\alpha^{qF}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau)-q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\right)-\left(q^{-k}\alpha^{qF}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n',\chi}(\tau)-q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n',\chi}(0)\right)\end{aligned}$$

dır. $\tau_i\in pq^{-1}f_{\chi_n}\mathbb{Z}$ olduğu için eşitliğin sol tarafı modülo $q\mathbb{Z}_p[\chi,\alpha]$ 0 sayısına denktir. Böylece $q^{-k}\alpha^{qF}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau)-q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)$ değeri modülo $q\mathbb{Z}_p[\chi,\alpha]$ n sayısından bağımsızdır. ■

Teorem 3.11 *n,c,k,k' pozitif tam sayılar, $k\equiv k'\pmod{p-1}$ ve $\tau\in\mathbb{Z}_p$, $|\tau|_p\leqslant\left|pq^{-1}f_{\chi_n}\right|_p$ olsun. $\left|\alpha^F-1\right|_p\geqslant 1$ ise*

$$\begin{aligned}&\alpha^{qF}q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau)-q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\\ &\qquad\equiv\alpha^{qF}q^{-k'}\Delta_c^{k'}\widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau)-q^{-k'}\Delta_c^{k'}\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\pmod{p\mathbb{Z}_p[\chi,\alpha]}\end{aligned}$$

dir.

Kanıt. k ve k' pozitif tam sayılar, $k\equiv k'\pmod{p-1}$ olsun. Genelliği bozmadan $k\geqslant k'$ varsayılabilir. O halde, (3.10) gereği F sayısı $pq^{-1}f_\chi$ sayısının bir pozitif katı olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left(q^{-k}\alpha^{qF}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(F)-q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\right)-\left(q^{-k'}\alpha^{qF}\Delta_c^{k'}\widetilde{\beta}_{n,\chi}(F)-q^{-k'}\Delta_c^{k'}\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\right)\\ &\quad=-\sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{qF}\chi_1(a)\alpha^a\langle a\rangle^{n-1}\left(\frac{\langle a\rangle^c-1}{q}\right)^k+\sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{qF}\chi_1(a)\alpha^a\langle a\rangle^{n-1}\left(\frac{\langle a\rangle^c-1}{q}\right)^{k'}\\ &\quad=-\sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{qF}\chi_1(a)\alpha^a\langle a\rangle^{n-1}\left(\frac{\langle a\rangle^c-1}{q}\right)^{k'}\left(\left(\frac{\langle a\rangle^c-1}{q}\right)^{k-k'}-1\right)\end{aligned}$$

olur. Burada F sayısı $pq^{-1}f_{\chi_n}$ sayısının pozitif bir katıdır. $\langle a\rangle^c-1\equiv 0\pmod{pq\mathbb{Z}_p}$ ise sol taraf modülo $pq\mathbb{Z}_p$ sıfırdır. Aksi halde, $k\equiv k'\pmod{p-1}$ olduğundan $\left(\frac{\langle a\rangle^c-1}{q}\right)^{k-k'}\equiv 1\pmod{p\mathbb{Z}_p}$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}&\alpha^{qF}q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(F)-q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\\ &\qquad\equiv\alpha^{qF}q^{-k'}\Delta_c^{k'}\widetilde{\beta}_{n,\chi}(F)-q^{-k'}\Delta_c^{k'}\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\pmod{p\mathbb{Z}_p[\chi,\alpha]}\end{aligned}$$

olur. Şimdi, $\tau\in pq^{-1}f_{\chi_n}\mathbb{Z}_p$ olsun. O halde, $pq^{-1}f_{\chi_n}\mathbb{Z}$ kümesinde her i için $\tau_i\to\tau$ olacak şekilde bir $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\tau_i>0$ dizisi vardır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty}&\left(\left(\alpha^{qF}q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau_i)-q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\right)-\left(\alpha^{qF}q^{-k'}\Delta_c^{k'}\widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau_i)-q^{-k'}\Delta_c^{k'}\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\right)\right)\\ &=\left(\alpha^{qF}q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau)-q^{-k}\Delta_c^k\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\right)-\left(\alpha^{qF}q^{-k'}\Delta_c^{k'}\widetilde{\beta}_{n,\chi}(\tau)-q^{-k'}\Delta_c^{k'}\widetilde{\beta}_{n,\chi}(0)\right)\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin sol tarafı modülo $p\mathbb{Z}_p[\chi, \alpha]$ sıfıra denk olduğundan istenen elde edilir. ■

3.3. Katlı Barnes-Hurwitz-Lerch Zeta Fonksiyonu

Bu bölümde ilk olarak Apostol-Bernoulli polinomunun bir genellemesi tanımlanacak ve bu polinomların bazı özellikleri kanıtlanacaktır. Daha sonra negatif tam sayılardaki değerleri bu polinomlar olan $\phi_N(s, x, \alpha; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$ katlı Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu tanımlanacak ve bununla ilgili bazı özellikler kanıtlanacaktır. Bu bölüm boyunca $\mathbb{Z}_0$ ve $\mathbb{R}^+$ ile sırasıyla negatif olmayan tam sayılar kümesi ve pozitif reel sayılar kümesi gösterilecektir, N bir pozitif tam sayı olarak alınacaktır.

$\omega_j \in \mathbb{R}^+$, $\alpha = r\exp(i\theta)$; $r > 1$ ve $-\pi < \theta < \pi$ olsun. Bu durumda $\alpha^{\omega_j}\exp(\omega_j t) - 1$ ifadesi hangi $t \in \mathbb{C}$ değerleri için sıfır olur?

$$1 = \exp\left[\omega_i(\ln r + i\theta) + \omega_i(\operatorname{Re} t + i\operatorname{Im} t)\right]$$

$$\begin{aligned}1 &= \exp(\omega_i(\ln r + \operatorname{Re} t))\cos(\omega_i(\theta + i\operatorname{Im} t)) \\ &\quad + i\exp(\omega_i(\ln r + \operatorname{Re} t))\sin(\omega_i(\theta + i\operatorname{Im} t))\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\exp(\omega_i(\ln r + \operatorname{Re} t))\cos(\omega_i(\theta + i\operatorname{Im} t)) = 1$$

ve

$$\exp(\omega_i(\ln r + \operatorname{Re} t))\sin(\omega_i(\theta + i\operatorname{Im} t)) = 0$$

dır. Burada $\omega_j \in \mathbb{R}^+$ olduğu için $\omega_j \neq 0$ olur ve dolayısıyla $\operatorname{Re} t = -\ln r$'dir. Ayrıca

$$\cos(\omega_i(\theta + i\operatorname{Im} t)) = 1 \text{ ve } \sin(\omega_i(\theta + i\operatorname{Im} t)) = 0$$

dir. Buradan $k \in \mathbb{Z}$ için $\operatorname{Im} t = \frac{2k\pi}{\omega_i} - \theta$'dır. O halde $\alpha^{\omega_j}\exp(\omega_j t) - 1$ ifadesi $\operatorname{Re} t = -\ln r$ ve $\operatorname{Im} t = \frac{2k\pi}{\omega_i} - \theta$ olan $t \in \mathbb{C}$ değerleri için sıfır olur. Bu durumda mertebesi N olan Apostol-Bernoulli polinomları, $|t| < -\ln|\alpha|$ bölgesinde yakınsak olan aşağıdaki Taylor serisi yardımıyla tanımlanabilir:

Tanım 3.12 *$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{C}$ ve*

$$\alpha \in \{r\exp(i\theta) : 0 < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$$

olsun. Bu durumda $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$ ile mertebesi N olan n. dereceden Apostol-Bernoulli polinomu $\beta_{N,n}(x, \alpha; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$

$$\frac{t^N\alpha^x\exp(xt)}{(\alpha^{\omega_1}\exp(\omega_1 t) - 1)\cdots(\alpha^{\omega_N}\exp(\omega_N t) - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_{N,n}(x, \alpha; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)\frac{t^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır.

Bu polinomlar kısaca $\beta_{N,n}(x,\alpha;\overline{\omega})$ ile gösterilsin. Bunların ileride kullanılacak olan bazı özellikleri aşağıdaki önerme yardımıyla verilebilir.

Önerme 3.13 $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \{r\exp(i\theta) : 0<r<1, -\pi<\theta<\pi\}$ *ve* N *pozitif tam sayısı için aşağıdaki özellikler vardır:*

(i) *Her* $n \geqslant 0$ *tam sayısı için*

$$\beta_{N,n}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_N-x,\alpha;\overline{\omega}) = (-1)^n \beta_{N,n}\left(x,\alpha^{-1};\overline{\omega}\right)$$

dir.

(ii) *Her* $n \geqslant 0$ *tam sayısı için*

$$\beta_{N,n}(x,\alpha;\overline{\omega}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_{N,k}(0,\alpha;\overline{\omega})\,\alpha^k x^{n-k}$$

dır.

(iii) *Her* $n \geqslant 0$ *tam sayısı için*

$$\frac{d}{dx}\beta_{N,n+1}(x,\alpha;\overline{\omega}) = (n+1)\,\beta_{N,n}(x,\alpha;\overline{\omega}) + \beta_{N,n}(x,\alpha;\overline{\omega})\ln\alpha$$

dır.

(iv) $M,K \geqslant 1$ *tam sayılar olmak üzere her* $n>0$ *tam sayısı için*

$$\sum_{j=0}^{M-1}\beta_{K,n}(x+j\omega_{K+1},\alpha;\omega_1,\omega_2,...,\omega_K)$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\beta_{K+1,n+1}(x+M\omega_{K+1},\alpha;\omega_1,\omega_2,...,\omega_{K+1}) - \beta_{K+1,n+1}(x,\alpha;\omega_1,\omega_2,...,\omega_{K+1})\right\}$$

dir.

Kanıt. Bu özellikler üreteç fonksiyonu yardımıyla kolayca gösterilebilir. ■

$\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N$ pozitif reel sayılar, x reel kısmı pozitif olan bir karmaşık sayı ve $\alpha \in \{r\exp(i\theta) : r\in\mathbb{R}^+, -\pi<\theta<\pi\}$ olsun. Katlı Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu, $\mathrm{Re}(s) > N$ için

$$\phi_N(s,x,\alpha;\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N) = \sum_{t_1,t_2,\ldots,t_N=0}^{\infty}\frac{\alpha^{x+\omega_1 t_1+\omega_2 t_2+\cdots+\omega_N t_N}}{(x+\omega_1 t_1+\omega_2 t_2+\cdots+\omega_N t_N)^s} \qquad (3.11)$$

ile tanımlansın. Bu fonksiyon kısaca şu şekilde ifade edilebilir:

$$\phi_N(s,x,\alpha;\overline{\omega}) = \sum_{\overline{t}=0}^{\infty}\frac{\alpha^{x+\overline{\omega}\overline{t}}}{\left(x+\overline{\omega}\overline{t}\right)^s}.$$

Aşağıdaki teorem ile bu fonksiyonun analitik olduğu bölge genişletilebilir.

Teorem 3.14 *$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(x) > 0$ ve*

$$\alpha \in \{r \exp(i\theta) : 0 < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$$

olsun. Bu durumda (3.11) eşitliği ile verilen seriler her $c \in \mathbb{R}^+$ sayısı için $D_c = \{s \in \mathbb{C} : |s| \leqslant c\}$ kompakt yuvarı üzerinde düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla $\phi_N(s, x, \alpha; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$ fonksiyonu s değişkeninin bir tam fonksiyonudur.

Kanıt. Kanıtı $\omega \in \mathbb{R}^+$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{x+\omega k}}{(x+\omega k)^s}$$

toplamı üzerinden yapmak yeterlidir. $\alpha \in \{r \exp(i\theta) : 0 < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$ için bu toplam

$$\frac{\alpha^x}{\omega^s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\omega k}}{\left(\frac{x}{\omega} + k\right)^s}$$

şeklinde yazılabilir. $\frac{x}{\omega} + k \in \{r_k \exp(i\theta_k) : r_k \in \mathbb{R}^+, -\pi < \theta_k < \pi\}$ olsun. $\operatorname{Re}(x) > 0$ olduğundan $r_k > 1$ dir. Ayrıca $\sigma + it = s \in D_c = \{s \in \mathbb{C} : |s| \leqslant c\}$ için

$$\left| \frac{\alpha^{\omega k}}{\left(\frac{x}{\omega} + k\right)^s} \right| = \frac{|\alpha|^{\omega k}}{(r_k)^{\sigma} \exp(-t\theta_k)} < \frac{|\alpha|^{\omega k}}{(r_k)^{-c} \exp(-t\theta_k)}$$

bulunur. Burada $0 < \theta_k < \pi$ için $\exp(-t\theta_k) > \exp(-c\theta_k)$ ve $-\pi < \theta_k < 0$ için $\exp(-t\theta_k) > \exp(c\theta_k)$ dır. Sonuç olarak

$$\left| \frac{\alpha^{\omega k}}{\left(\frac{x}{\omega} + k\right)^s} \right| < \frac{|\alpha|^{\omega k}}{(r_k)^{-c} \exp(-c|\theta_k|)}$$

yazılabilir. Buradan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{\omega k}}{(r_k)^{-c} \exp(-c|\theta_k|)}$$

serisinin yakınsaklığı için oran testi kullanılabilir. Buna göre

$$\lim_{k \to \infty} |\alpha|^{\omega} \left(\frac{r_k}{r_{k+1}} \right)^c \exp(-c(|\theta_k| - |\theta_{k+1}|))$$

limiti 1 sayısından küçük olmalıdır. $\lim\limits_{k \to \infty} \left(\frac{r_k}{r_{k+1}} \right)^c = 1$ ve $|\alpha|^{\omega} < 1$ olduğundan $\lim\limits_{k \to \infty} \exp(-c(|\theta_k| - |\theta_{k+1}|)) \leqslant 1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
\tan(|\theta_k| - |\theta_{k+1}|) &= \frac{\tan|\theta_k| - \tan|\theta_{k+1}|}{1 + \tan|\theta_k| \tan|\theta_{k+1}|} \\
&= \frac{\omega \operatorname{Im}(x)}{(\operatorname{Re}(x) + \omega k)(\operatorname{Re}(x) + \omega(k+1)) + (\operatorname{Im}(x))^2}
\end{aligned}$$

dir. $\mathrm{Re}(x) > 0$ olduğu için $|\theta_k| - |\theta_{k+1}| \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olur. Buradan

$$\lim_{k\to\infty} |\theta_k|-|\theta_{k+1}| = \lim_{k\to\infty} \arctan\left(\frac{\omega \operatorname{Im}(x)}{(\operatorname{Re}(x)+\omega k)(\operatorname{Re}(x)+\omega(k+1)) + (\operatorname{Im}(x))^2}\right) = 0$$

bulunur ve istenen elde edilmiş olur. ■

Teorem 3.15 *$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(x) > 0$ ve*

$$\alpha \in \{r \exp(i\theta) : 0 < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$$

olsun. Bu durumda $\operatorname{Re}(s) > 1$ için

$$\phi_N(s, x, \alpha; \overline{\omega})\,\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{z^{s-1}\alpha^x \exp(-xz)}{(1-\alpha^{\omega_1}\exp(-\omega_1 z))\cdots(1-\alpha^{\omega_N}\exp(-\omega_N z))} dz$$

dir.

Kanıt. İlk olarak $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$ ve $x = x_1 + ix_2$ olsun.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\exp(-t)\,dt$$

integralinde $t = (x + \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_N t_N) z$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty (x + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_N t_N)^s z^{s-1} \exp(-z(x + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_N t_N))\,dz$$

olur. Burada $(x + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_N t_N)^s$ terimi eşitliğin diğer tarafına alınır ve eşitliğin her iki tarafı $\alpha^{x+\omega_1 t_1+\cdots+\omega_N t_N}$ ile çarpılıp $t_1, \ldots, t_N$ üzerinden toplam alınırsa

$$\Gamma(s) \sum_{t_1,\ldots,t_N=0}^{\infty} \frac{\alpha^{x+\omega_1 t_1+\cdots+\omega_N t_N}}{(x + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_N t_N)^s}$$
$$= \sum_{t_1,\ldots,t_N=0}^{\infty} \int_0^\infty z^{s-1}\exp(-z(x + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_N t_N))\,\alpha^{x+\omega_1 t_1+\cdots+\omega_N t_N} dz$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında toplamların ve integralin yer değiştirmesi için Baskın Yakınsaklık Teoremi kullanılabilir. Her $j = 1, \ldots, N$ değeri için t_j üzerinden olan toplamın kısmi toplamlar dizisi için

$$\sum_{t_j=0}^{M_j} \left|\exp(-z\omega_j t_j)\,\alpha^{\omega_j t_j}\right| < \frac{1}{(1-|\alpha|^{\omega_j}\exp(-\omega_j z))}$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{z^{s-1}\exp\left(\omega_1 t_1+\cdots+\omega_N t_N - zx_1\right)}{\left(\exp\left(\omega_1 z\right)-|\alpha|^{\omega 1}\right)\cdots\left(\exp\left(\omega_N z\right)-|\alpha|^{\omega_N}\right)} < \frac{z^{s-1}\exp\left(z\left(\omega_1 t_1+\cdots+\omega_N t_N - x_1\right)\right)}{\left(1-|\alpha|^{\omega 1}\right)\cdots\left(1-|\alpha|^{\omega_N}\right)}$$

olduğundan

$$\int_0^\infty \frac{z^{s-1}\exp\left(z\left(\omega_1 t_1+\cdots+\omega_N t_N - x_1\right)\right)}{\left(1-|\alpha|^{\omega 1}\right)\cdots\left(1-|\alpha|^{\omega_N}\right)}dz$$

integrali vardır. Dolayısıyla, Baskın Yakınsaklık Teoremi gereği

$$\Gamma\left(s\right)\phi_N\left(s,x,\alpha;\overline{\omega}\right)=\int_0^\infty \frac{z^{s-1}\alpha^x\exp\left(-xz\right)}{\left(1-\alpha^{\omega_1}\exp\left(-\omega_1 z\right)\right)\cdots\left(1-\alpha^{\omega_N}\exp\left(-\omega_N z\right)\right)}dz$$

bulunur. Şimdi, $s\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\left(s\right)>1$ olsun. Verilen eşitliğin her iki tarafının $\operatorname{Re}\left(s\right)>1$ için analitik olduğu gösterilecektir. Sol taraf $\operatorname{Re}\left(s\right)>1$ için analitik olduğundan sağ taraf ele alınsın. $s\in\mathbb{C}$, $s=\sigma+it$, $c>1$, $\delta>0$ ve $\delta+1\leqslant\sigma<c$ olsun. Ayrıca $x\in\mathbb{C}$, $x=x_1+ix_2$, $x_1>0$ ve $\alpha=r\exp\left(i\theta\right)$, $0<r<1$, $-\pi<\theta<\pi$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left|\frac{z^{s-1}\alpha^x\exp\left(-xz\right)}{\left(1-\alpha^{\omega_1}\exp\left(-\omega_1 z\right)\right)\cdots\left(1-\alpha^{\omega_N}\exp\left(-\omega_N z\right)\right)}\right|dz\\
&=\int_0^\infty \frac{z^{\sigma-1}|\alpha|^{x_1}\exp\left(-x_1 z\right)}{\left|1-\alpha^{\omega_1}\exp\left(-\omega_1 z\right)\right|\cdots\left|1-\alpha^{\omega_N}\exp\left(-\omega_N z\right)\right|}dz\\
&<\left(\int_0^1+\int_1^\infty\right)\frac{z^{\sigma-1}|\alpha|^{x_1}\exp\left(-x_1 z\right)}{\left(1-|\alpha|^{\omega_1}\exp\left(-\omega_1 z\right)\right)\cdots\left(1-|\alpha|^{\omega_N}\exp\left(-\omega_N z\right)\right)}dz
\end{aligned}$$

dir. Burada $0<z<1$ için $z^{\sigma-1}\leqslant z^\delta$ ve $\exp\left(\omega_i z\right)-|\alpha|^{\omega_i}>1-|\alpha|^{\omega_i}$ dir.

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{z^{\sigma-1}|\alpha|^{x_1}\exp\left(-x_1 z\right)}{\left(1-|\alpha|^{\omega_1}\exp\left(-\omega_1 z\right)\right)\cdots\left(1-|\alpha|^{\omega_N}\exp\left(-\omega_N z\right)\right)}dz\\
&\qquad<\int_0^1 \frac{z^{\delta}\exp\left(z\left(\omega_1 t_1+\cdots+\omega_N t_N - x_1\right)\right)|\alpha|^{x_1}}{\left(1-|\alpha|^{\omega 1}\right)\cdots\left(1-|\alpha|^{\omega_N}\right)}dz
\end{aligned}$$

dir. Son ifade $0<x_1<\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_N$ için

$$\frac{\exp\left(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2+\cdots+\omega_N t_N - x_1\right)|\alpha|^{x_1}}{\left(1-|\alpha|^{\omega_1}\right)\cdots\left(1-|\alpha|^{\omega_N}\right)\left(\delta+1\right)}$$

ve $x_1 \geqslant \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_N$ için

$$\frac{|\alpha|^{x_1}}{(1-|\alpha|^{\omega_1})\cdots(1-|\alpha|^{\omega_N})(\delta+1)}$$

ifadesine eşittir. Ayrıca $z \geqslant 1$ için $z^{\sigma-1} \leqslant z^{c-1}$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty \frac{z^{\sigma-1}|\alpha|^{x_1}\exp(-x_1 z)}{(1-|\alpha|^{\omega_1}\exp(-\omega_1 z))\cdots(1-|\alpha|^{\omega_N}\exp(-\omega_N z))}dz \\
&\qquad \leqslant \int_0^\infty \frac{z^{\sigma-1}|\alpha|^{x_1}\exp(-x_1 z)}{(1-|\alpha|^{\omega_1}\exp(-\omega_1 z))\cdots(1-|\alpha|^{\omega_N}\exp(-\omega_N z))}dz \\
&\qquad \leqslant \int_0^\infty \frac{z^{c-1}|\alpha|^{x_1}\exp(-x_1 z)}{(1-|\alpha|^{\omega_1}\exp(-\omega_1 z))\cdots(1-|\alpha|^{\omega_N}\exp(-\omega_N z))}dz \\
&\qquad = \Gamma(c)\,\phi_N(c, x_1, |\alpha|;\overline{\omega})
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 3.16 *$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(x) > 0$ ve*

$$\alpha \in \{r\exp(i\theta) : 0 < r < 1, -\pi < \theta < \pi\}$$

olsun. Bu durumda

$$I_N(s, x, \alpha; \overline{\omega}) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1}\alpha^x \exp(xz)}{(1-\alpha^{\omega_1}\exp(\omega_1 z))\cdots(1-\alpha^{\omega_N}\exp(\omega_N z))}dz$$

ifadesi s değişkeninin bir tam fonksiyonudur. Ayrıca $\mathrm{Re}(s) > 1$ *için*

$$\phi_N(s, x, \alpha; \overline{\omega}) = \Gamma(1-s)\, I_N(s, x, \alpha; \overline{\omega}) \tag{3.12}$$

dir.

Kanıt. $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ olsun. Burada C_2 eğrisi, pozitif reel $c < -\ln|\alpha|$ sayısı için $|z| = c$ çemberidir. C_1 yolu $(\infty, c]$ ve C_3 yolu $[c, \infty)$ aralıklarıdır. C_1 üzerinde $r > c$ olmak üzere $z^{s-1} = r^{s-1}\exp(-i\pi s)$ ve C_3 üzerinde $z^{s-1} = r^{s-1}\exp(i\pi s)$ dir. Bir $|s| \leqslant M$ kompakt yuvarı ele alınsın. C_1 ve C_3 üzerinden olan integrallerin her $|s| \leqslant M$ kompakt yuvarı üzerinde düzgün yakınsak olduğu gösterilirse Weierstrass M-testi gereği integrant s değişkeninin bir tam fonksiyonu olduğundan $I_N(s, x, \alpha; \overline{\omega})$ ifadesinin bir tam fonksiyon olduğu kanıtlanmış olur. $s = \sigma + it$, $x = x_1 + ix_2$, $x_1 > 0$, $\alpha = |\alpha|\exp(i\theta)$, $|\alpha| < 1$, $-\pi < \theta < \pi$ olsun.

C_1 yolu üzerinde $z = r\exp(-i\pi)$, $c < r < \infty$ olduğundan

$$\left|z^{s-1}\right| = r^{\sigma-1}\exp(\pi t) \leqslant r^{M-1}\exp(\pi M),$$
$$|\alpha^x| = |\alpha|^{x_1}\exp(-\theta x_2),$$
$$|\exp(xz)| = \exp(-rx_1)$$

ve

$$|1-\alpha^{\omega_i}\exp(\omega_i z)| > 1-|\alpha|^{\omega_j}\exp(-\omega_j c)$$

dir. C_3 yolu üzerinde $z = r\exp(i\pi)$, $c < r < \infty$ olduğundan

$$\left|z^{s-1}\right| = r^{\sigma-1}\exp(-\pi t) \leqslant r^{M-1}\exp(\pi M),$$
$$|\alpha^x| = |\alpha|^{x_1}\exp(-\theta x_2),$$
$$|\exp(xz)| = \exp(-rx_1)$$

ve

$$|1-\alpha^{\omega_i}\exp(\omega_i z)| > 1-|\alpha|^{\omega_j}\exp(-\omega_j c)$$

dir. Dolayısıyla,

$$\left|\frac{z^{s-1}\alpha^x\exp(xz)}{(1-\alpha^{\omega_1}\exp(\omega_1 z))\cdots(1-\alpha^{\omega_N}\exp(\omega_N z))}\right|$$
$$< \frac{r^{M-1}|\alpha|^{x_1}\exp(-rx_1)\exp(\pi M)\exp(-\theta x_2)}{(1-|\alpha|^{\omega_1}\exp(-\omega_1 c))\cdots(1-|\alpha|^{\omega_N}\exp(-\omega_N c))}$$

olur ve $\int\limits_c^\infty r^{M-1}\exp(-rx_1)\,dr$ integrali yakınsaktır. Bu yüzden, her $|s| \leqslant M$ kompakt yuvarı üzerinde C_1 ve C_3 yolları boyunca alınan integraller düzgün yakınsaktır. Böylece $I_N(s,x,\alpha;\overline{\omega})$ ifadesi s değişkeninin bir tam fonksiyonudur. Şimdi (3.12) eşitliğini gösterilecektir.

$$2\pi i I_N(s,x,\alpha;\overline{\omega}) = \left(\int\limits_{C_1} + \int\limits_{C_2} + \int\limits_{C_3}\right)\frac{z^{s-1}\alpha^x\exp(xz)}{(1-\alpha^{\omega_1}\exp(\omega_1 z))\cdots(1-\alpha^{\omega_N}\exp(\omega_N z))}dz$$

dir. İntegrant C_2 içinde ve üzerinde analitik olduğundan C_2 üzerinden alınan integral sıfırdır. O halde

$$\begin{aligned}
2\pi i I_N(s,x,\alpha;\overline{\omega}) &= \left(\int\limits_{C_1} + \int\limits_{C_3}\right)\frac{z^{s-1}\alpha^x\exp(xz)}{(1-\alpha^{\omega_1}\exp(\omega_1 z))\cdots(1-\alpha^{\omega_N}\exp(\omega_N z))}dz \\
&= \int\limits_\infty^c \frac{r^{s-1}\exp(-i\pi s)\,\alpha^x\exp(-xr)}{(1-\alpha^{\omega_1}\exp(\omega_1 z))\cdots(1-\alpha^{\omega_N}\exp(\omega_N z))}dr \\
&+ \int\limits_c^\infty \frac{r^{s-1}\exp(i\pi s)\,\alpha^x\exp(-xr)}{(1-\alpha^{\omega_1}\exp(-\omega_1 r))\cdots(1-\alpha^{\omega_N}\exp(-\omega_N r))}dr
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$I_N(s,x,\alpha;\varpi)=\frac{\exp(i\pi s)-\exp(-i\pi s)}{2i}\frac{1}{\pi}$$
$$\int_c^{\infty}\frac{r^{s-1}\alpha^x\exp(-xr)}{(1-\alpha^{\omega_1}\exp(-\omega_1 r))\cdots(1-\alpha^{\omega_N}\exp(-\omega_N r))}dr$$

dir. $c\to 0$ olduğunda Teorem 3.15'den eşitliğin sağ tarafındaki integral $\phi_N(s,x,\alpha;\varpi)\Gamma(s)$ ifadesine eşittir. Buradan istenilen elde edilir. ■

Burada (3.12) eşitliğinde kullanılan Γ fonksiyonu analitik devam anlamındadır. Dolayısıyla (3.12) eşitliğinin her iki tarafı da $s\in\mathbb{C}$ için analitik olduğundan bu eşitlik her s karmaşık sayısı için vardır.

Teorem 3.17 *$\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N\in\mathbb{R}^+$, $x\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(x)>0$ ve*

$$\alpha\in\{r\exp(i\theta):0<r<1,-\pi<\theta<\pi\}$$

olmak üzere $k\geqslant 0$ tam sayısı için

$$\phi_N(-k,x,\alpha;\varpi)=\frac{k!\,(-1)^N}{(N+k)!}\beta_{N,N+K}(x,\alpha;\varpi)$$

dir.

Kanıt. Teorem 3.16'daki (3.12) ifadesinde s yerine $-k$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\phi_N(-k,x,\alpha;\varpi)&=\Gamma(k+1)\,I_N(-k,x,\alpha;\varpi)\\
&=k!\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{z^{-k-1}\alpha^x\exp(xz)}{(1-\alpha^{\omega_1}\exp(\omega_1 z))\cdots(1-\alpha^{\omega_N}\exp(\omega_N z))}dz\right)\\
&=k!\underset{z=0}{Res}\left(\frac{z^{-k-1}\alpha^x\exp(xz)}{(1-\alpha^{\omega_1}\exp(\omega_1 z))\cdots(1-\alpha^{\omega_N}\exp(\omega_N z))}\right)\\
&=k!\,(-1)^N\underset{z=0}{Res}\left(\frac{z^{-N-k-1}z^N\alpha^x\exp(xz)}{(1-\alpha^{\omega_1}\exp(\omega_1 z))\cdots(1-\alpha^{\omega_N}\exp(\omega_N z))}\right)\\
&=k!\,(-1)^N\underset{z=0}{Res}\left(z^{-N-k-1}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{N,n}(x,\alpha;\varpi)\frac{z^n}{n!}\right)\\
&=\frac{k!\,(-1)^N}{(N+k)!}\beta_{N,N+k}(x,\alpha;\varpi)
\end{aligned}$$

bulunur. ■

3.4. Katlı Barnes-Hurwitz-Lerch Zeta Fonksiyonunun p-adik Benzeri

Çalışmanın bu kısmında $\phi_N(s,x,\alpha;\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N)$ fonksiyonu Volkenborn integralinin iterasyonu yardımıyla p-adik sayı cisminde tanımlanacaktır. Bu fonksiyonun bazı özellikleri verilerek negatif tam sayılardaki değerleri elde edilecektir.

Teorem 3.18 *$k \geqslant 1$ tam sayısı için*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Z}_p} \beta_{k-1,n}(x+\omega_k t_k+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})\,dt_k \\
&=\omega_k\beta_{k,n}(x+\omega_{k+1}t_{k+1}+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_k) \\
&+\frac{\omega_k \ln\alpha}{n+1}\beta_{k,n+1}(x+\omega_{k+1}t_{k+1}+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_k)
\end{aligned}$$

dir.

Kanıt. Tanım 2.37 yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Z}_p} \beta_{k-1,n}(x+\omega_k t_k+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})\,dt_k \\
&=\lim_{l\to\infty} p^{-l}\sum_{t_k=0}^{p^l-1}\beta_{k-1,n}(x+\omega_k t_k+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_{k-1}) \\
&=\lim_{l\to\infty}\frac{p^{-l}}{n+1}\left(\beta_{k,n+1}\left(x+\omega_k p^l+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_k\right)\right. \\
&-\left.\beta_{k,n+1}(x+\omega_{k+1}t_{k+1}+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_k)\right) \\
&=\frac{\omega_k}{n+1}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\omega_k p^l}\left(\beta_{k,n+1}\left(x+\omega_k p^l+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_k\right)\right. \\
&-\left.\beta_{k,n+1}(x+\omega_{k+1}t_{k+1}+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_k)\right) \\
&=\frac{\omega_k}{n+1}\frac{d}{dx}\beta_{k,n+1}(x+\omega_{k+1}t_{k+1}+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_k) \\
&=\frac{\omega_k}{n+1}\left((n+1)\beta_{k,n}(x+\omega_{k+1}t_{k+1}+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_k)\right. \\
&+\left.(\ln\alpha)\beta_{k,n+1}(x+\omega_{k+1}t_{k+1}+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_k)\right) \\
&=\omega_k\beta_{k,n}(x+\omega_{k+1}t_{k+1}+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_k) \\
&+\frac{\omega_k(\ln\alpha)}{n+1}\beta_{k,n+1}(x+\omega_{k+1}t_{k+1}+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\ldots,\omega_k)
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Burada $k=1$ için elde edilen eşitliğin her iki tarafındaki fonksiyonlardan t_2 değişkenine göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Z}_p}\int_{\mathbb{Z}_p} \beta_{0,n}\left(x+\omega_1 t_1+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;-\right)dt_1 dt_2\\
&=\omega_1\int_{\mathbb{Z}_p}\beta_{1,n}\left(x+\omega_2 t_2+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1\right)dt_2\\
&+\frac{\omega_1\ln\alpha}{n+1}\int_{\mathbb{Z}_p}\beta_{1,n+1}\left(x+\omega_2 t_2+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1\right)dt_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki her iki integral Teorem 3.18'de $k=2$ yazılarak elde edilen ifade yardımıyla hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Z}_p}\int_{\mathbb{Z}_p} \beta_{0,n}\left(x+\omega_1 t_1+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;-\right)dt_1 dt_2\\
&=\omega_1\omega_2\beta_{2,n}\left(x+\omega_3 t_3+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\omega_2\right)\\
&+\frac{2\omega_1\omega_2}{n+1}\left(\ln\alpha\right)\beta_{2,n+1}\left(x+\omega_3 t_3+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\omega_2\right)\\
&+\frac{\omega_1\omega_2}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}\left(\ln\alpha\right)^2\beta_{2,n+2}\left(x+\omega_3 t_3+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\omega_2\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafındaki fonksiyonlardan t_3 değişkenine göre integral alınıp elde edilen eşitliğin sol tarafındaki integraller, Teorem 3.18'de $k=3$ yazılarak elde edilen ifade yardımıyla hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Z}_p}\int_{\mathbb{Z}_p}\int_{\mathbb{Z}_p} \beta_{0,n}\left(x+\omega_1 t_1+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;-\right)dt_1 dt_2 dt_3\\
&=\omega_1\omega_2\omega_3\left[\begin{array}{r}
\beta_{3,n}\left(x+\omega_4 t_4+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)\\
+\frac{3(\ln\alpha)}{n+1}\beta_{3,n+1}\left(x+\omega_4 t_4+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)\\
+\frac{3(\ln\alpha)^2}{(n+1)(n+2)}\beta_{3,n+2}\left(x+\omega_4 t_4+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)\\
+\frac{(\ln\alpha)^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}\beta_{3,n+3}\left(x+\omega_4 t_4+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)
\end{array}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek sırasıyla $t_4,\ldots,t_N$ değişkenlerine göre integral alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.19

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Z}_p}\int_{\mathbb{Z}_p}\cdots\int_{\mathbb{Z}_p} \beta_{0,n}\left(x+\omega_1 t_1+\cdots+\omega_N t_N,\alpha;-\right)dt_1 dt_2\cdots dt_N\\
&=\omega_1\omega_2\cdots\omega_N\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\frac{\left(\ln\alpha\right)^k}{\left(n+1\right)_k}\beta_{N,n+k}\left(x,\alpha;\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_N\right)
\end{aligned}$$

dir. Burada $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ *ve* $(\alpha)_0 = 1$*'dir.*

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N \in \mathbb{C}_p^*$ ve Λ, $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ kümesinin $\mathbb{Z}_p$-doğrusal gerdiği küme olsun. $x \in \mathbb{C}_p \backslash \Lambda$ için

$$\phi_{p,N}(s, x, \alpha; \omega_1, \ldots, \omega_N) = \frac{1}{\omega_1 \cdots \omega_N (s-1)\cdots(s-N)} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \cdots \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \frac{\alpha^{x+\omega_1 t_1 \cdots \omega_N t_N} (x + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_N t_N)^N}{< x + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_N t_N >^s} dt_1 dt_2 \cdots dt_N$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyona p-adik katlı Barnes-Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu denir ve bu fonksiyon kısaca

$$\phi_{p,N}(s, x, \alpha; \overline{\omega}) = \frac{1}{\omega_1 \cdots \omega_N (s-1)\cdots(s-N)} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^N} \frac{\alpha^{x+\overline{\omega}\overline{t}} \left(x + \overline{\omega}\overline{t}\right)^N}{< x + \overline{\omega}\overline{t} >^s} d\overline{t}$$

şeklinde gösterilebilir.

Teorem 3.20 $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N \in \mathbb{C}_p^*$, $\alpha \in \mathbb{C}_p^+$ *ve* $|\alpha|_p < 1$ *olsun. Ayrıca* $x \in \mathbb{C}_p^* \backslash \Lambda$ *ve* $\left|x + \overline{\omega}\overline{t}\right|_p < p^{-\frac{1}{p-1}} |\log \alpha|_p^{-1}$ *olsun. Bu durumda* $\phi_{p,N}(s, x, \alpha; \overline{\omega})$ *fonksiyonu* $|s|_p < \left|\log < x + \overline{\omega}\overline{t} >\right|_p^{-1} p^{-\frac{1}{p-1}}$ *özelliğindeki* $s \in \mathbb{C}_p \backslash \{1, 2, \ldots, N\}$ *değerleri için analitiktir. Fonksiyonun* $s = 1, 2, \ldots, N$ *noktalarında basit kutupları vardır.*

Kanıt. p-adik üstel ve p-adik logaritma fonksiyonlarının tanımlarının genişlemeleri kullanılırsa $x \in \mathbb{C}_p^*$ için $< x + \overline{\omega}\overline{t} > \in D = \left\{z \in \mathbb{C}_p : |z-1|_p < 1\right\}$ olduğundan $|s|_p < \left|\log < x + \overline{\omega}\overline{t} >\right|_p^{-1} p^{-\frac{1}{p-1}}$ için

$$\begin{aligned}
\exp_p s \log_p < x + \overline{\omega}\overline{t} > &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k \left(\log_p < x + \overline{\omega}\overline{t} >\right)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=k}^{\infty} s(n,k) \frac{\left(< x + \overline{\omega}\overline{t} > -1\right)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{s(n,k) s^k}{n!} \left(< x + \overline{\omega}\overline{t} > -1\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} \left(< x + \overline{\omega}\overline{t} > -1\right)^n = < x + \overline{\omega}\overline{t} >^s
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $s(n,k)$ birinci tip Stirling sayısıdır. Birinci tip Stirling sayısı

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k = (x)_n$$

veya

$$\sum_{n\geq k} \frac{s(n,k)x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\log^k(1+x)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Comtet 1974). ■

Teorem 3.21 *$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N \in \overline{\mathbb{Q}}$ pozitif reel sayılar, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $|\alpha| < 1$ özelliğinde bir karmaşık sayı ve $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, reel kısmı pozitif olan bir karmaşık sayı olsun. $\overline{\mathbb{Q}}$ kümesinden $\mathbb{C}_p$ uzayına yapılan ve sabitlenen gömme altında $|x|_p >$ maks $\left\{|\omega_i|_p, i = 1, 2, \ldots, N\right\}$ olsun. Bu durumda negatif olmayan her k tam sayısı için*

$$\phi_{p,N}(-k, x, \alpha; \overline{\omega}) = \left(\frac{<x>}{x}\right)^k \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \frac{(\ln\alpha)^m}{(k+1)_m} \phi_N(-k-m, x, \alpha; \overline{\omega})$$

dir.

Kanıt. $\phi_{p,N}(s, x, \alpha; \overline{\omega})$ fonksiyonunun tanımında $s = -k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ alınırsa

$$\phi_{p,N}(-k, x, \alpha; \overline{\omega}) = \frac{(-1)^N}{\omega_1 \cdots \omega_N (k+1)\cdots(k+N)} \int_{\mathbb{Z}_p^N} \alpha^{x+\overline{\omega}\overline{t}} \left(x + \overline{\omega}\overline{t}\right)^N < x + \overline{\omega}\overline{t} >^k d\overline{t}$$

yazılabilir. $|x|_p > \max\left\{|\omega_i|_p, i = 1, 2, \ldots, N\right\}$ olduğundan her $\overline{t} \in \mathbb{Z}_p^N$ için $\left\langle x + \overline{\omega}\overline{t}\right\rangle = \frac{<x>}{x}\left(x + \overline{\omega}\overline{t}\right)$'dir. Buradan

$$\phi_{p,N}(-k, x, \alpha; \overline{\omega}) = \frac{(-1)^N k!}{(k+N)!\omega_1 \cdots \omega_N} \left(\frac{<x>}{x}\right)^k \int_{\mathbb{Z}_p^N} \alpha^{x+\overline{\omega}\overline{t}} \left(x + \overline{\omega}\overline{t}\right)^{N+k} d\overline{t}$$

bulunur. Burada integrant $\beta_{0,N+k}\left(x + \overline{\omega}\overline{t}, \alpha; -\right)$ dır. Bu durumda Sonuç 3.19 kullanılırsa

$$\phi_{p,N}(-k, x, \alpha; \overline{\omega}) = \frac{(-1)^N k!}{(k+N)!} \left(\frac{<x>}{x}\right)^k \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \beta_{N,N+k+m}(x, \alpha; \overline{\omega}) \frac{(\ln\alpha)^m}{(N+k+1)_m}$$

elde edilir. Bu ifadede Teorem 3.17'den faydalanılırsa istenilen elde edilir. ■

4. SONUÇ

İki temel hedeften oluşan bu tez çalışmasında, ilk hedef genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomlarının bölünebilme özelliklerini incelemektir. Diğer hedef ise katlı Barnes-Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonunun p-adik benzerini kurmaktır.

Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomlarının tanımları verildikten sonra bu polinomların bölünebilme özelliklerini inceleyebilmek için p-adik Hurwitz-Lerch L-fonksiyonundan faydalanılmıştır. Daha önce Morita tarafından fonksiyoneller yardımıyla kurulan bu fonksiyon bu tezde Washington'un kuvvet serileri yöntemi yardımıyla kurulmuştur. Elde edilen fonksiyon yardımıyla genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomları için Kummer tipli kongrüanslar elde edilmiştir.

Tezin diğer hedefi olan katlı Barnes-Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonunun p-adik benzerinin kurulması için önce Rezidü Teoremi ve kontur integral teknikleri yardımıyla bu fonksiyon klasik halde tanımlanmış ve analitik olduğu bölge belirlenmiştir. Daha sonra Tangedal ve Young'ın çalışmasında iterasyon yardımıyla tanımlanan katlı Volkenborn integralleri kullanılarak bu fonksiyonun p-adik benzeri elde edilmiştir.

5. KAYNAKLAR

APOSTOL, T.M. 1951. On the Lerch zeta function. *Pacific J. Math.*, 1: 161-167.

APOSTOL, T.M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, New York.

BARNES, E.W. 1904. On the theory of the multiple gamma function. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 19: 374-425.

BAYAD, A., BECK, M. 2013. Relation for Bernoulli-Barnes numbers and Barnes zeta functions. *arXiv:1301.7097v2.*

CARLITZ, L. 1959. Arithmetic properties of generalized Bernoulli numbers. *J. Reine Angew. Math.*, 202: 174-182.

CASSOU-NOGUES, P. 1975. Analogues p-adiques de quelques fonctions arithmétiques. *Publ. Math. Bordeaux*, 1-43.

CAYLEY, T.S. 2007. A Review of The von Staudt Clausen Theorem, M. Sc. Thesis, Dalhouise University, Halifax, Canada.

CENKCİ, M., CAN, M. 2006. Some results on q-analogue of the Lerch zeta function. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang)*, 12: 213-223.

CENKCİ, M., KURT, V. 2008. Congruences for generalized q-Bernoulli polynomials. *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 270713, 19 p.

COHEN, H. 2007. Number Theory-Volume I: Tools and Diophantine Equations. Springer, New York.

COHEN, H. 2007. Number Theory-Volume II: Analytic and Modern Tools. Springer, New York.

COMTET, L. 1974. Advanced Combinatorics. Riedel, Dordrech, Boston.

DIAMOND, J. 1977. The p-adic log gamma function and p-adic Euler constants. Trans. AMS, 233: 321-337.

DIAMOND, J. 1979. On the values of p-adic L-functions at positive integers. *Acta Arith.,* 35: 223–237.

FERRERO, B., GREENBERG, R. 1978. On the behaviour of p-adic L-functions at $s = 0$. *Invent Math.,* 50: 225-278.

FOX, G.J. 2000. A p-adic L-function of two variables. *L'Enseign. Math.,* 46: 225-278.

FOX, G.J. 2002. Kummer congruences for expressions involving generalized Bernoulli polynomials. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux.*, 14: 187-204.

GOUVEA, F.Q. 1997. p-adic Numbers: An Introduction. Springer-Verlag, New York.

GUNARATNE, H.S. 1995. A new generalization of Kummer congruence. *Computational algebra and number theory*, Kluwer Acad. Publ., 325: 255-265.

IWASAWA, K. 1972. Lectures on p-adic L-Functions. Princeton Universtiy Press, Princeton, N. J.

KASHIO, T. 2005. On a p-adic analogue of Shintani's formula. *J. Math. Kyoto Univ.,* 45: 99-128.

KATOK, S. 2007. p-adic Analysis Compared with Real. Vol. 37. American Mathematical Soc.

KOBLITZ, N. 1977. p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta Functions. Springer-Verlag, New York.

KOBLITZ, N. 1979. A new proof of certain formulas for p-adic L-functions. *Duke Math. J.*, 46(2): 455-468.

KUBOTA, T., LEOPOLDT, H.-W. 1964. Eine p-adische theorie der zetawerte I, einführung der p-adischen Dirichletschen L-functionen. *J. Reine Angew. Math.,* 214/215: 328-339.

MORITA, Y. 1975. A p-adic analog of the Γ-function. *J. Fac. Sci. Univ.* Tokyo, Sec. IA ,Math. 22(2): 255-266.

MORITA, Y. 1977. On the Hurwitz-Lerch L-functions. *J. Fac. Sci. Univ.* Tokyo, Sec. IA, 2: 29-43.

ROBERT, A.M. 2000. A Course in p-adic Analysis. Springer-Verlag, New York.

SCHIKHOF, W.H. 1984. Ultrametric Calculus: An Introduction to p-adic Analysis. Cambridge Univ. Press, London.

SHINTANI, T. 1977. On a Kronecker limit formula for real quadratic fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 24: 167-199.

SHIRATANI, K. 1972. Kummer's congruences for generalized Bernoulli numbers and its application. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser.* A, 26: 119-138.

SHIRATANI, K. 1985. On a p-adic interpolating function for the Euler numbers and its derivatives. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Math.,* 39: 113-125.

SRIVASTAVA, H.M., CHOI, J. 2001. Series Associated with the Zeta and Related Functions. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

SRIVASTAVA, H.M., CHOI, J. 2012. Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals. Elsevier, Amsterdam.

TANGEDAL, B.A., YOUNG, P.T. 2011. On p-adic multiple zeta function and log gamma functions. *J. Number Theory*, 131: 1240-1257.

WASHINGTON, L.C. 1997. Introdution to Cyclotomic Fields. Second edition, Springer-Verlag, New York.

YOUNG, P.T. 2003. On the behaviour of some two varible p-adic L-functions. *J. Number Theory,* 98: 67-88.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Fethiye'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 1999 yılında Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde başladığı lisans eğitimini 2003 yılı Ağustos ayında bıraktı ve aynı yıl Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kayıt yaptırdı. 2006 yılında bu bölümden mezun oldu. 2007 yılı Şubat ayında başladığı Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalındaki yülsek lisans öğrenimini Haziran 2009' da ve doktora eğitimini 2015 yılı Şubat ayı itibariyle tamamladı. 2010 yılı Haziran ayında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalına Araştırma Görevlisi olarak atandı.