AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AKIŞ MODELLEMELERİ VE MÜHENDİSLİK UYGULAMALARI

T480/1-1

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mak. Müh. Arif KOYUN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 24 Ocak 1991
Tezin Savunulduğu Tarih : 25 Ocak 1991

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hüseyin ŞALVARLI
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Z. Kâzım TELLİ
Yrd. Doç. Dr. A. Kemal YAKUT

480

Ocak-1991

ÖNSÖZ

Günümüzde artık akışkanlar mekaniği disiplini içerisinde yapılan çalışmalar, sınır tabaka akışlarına yönelmiş bulunmaktadır. 1904 yılında Prandtl ile başlayan bu çalışmalar gittikçe önemli ve ilginç hale gelmiştir. Bu konulardaki çözüm yöntemleri analitik ve sayısal olmaktadır. Ancak analitik yöntemlerin verdiği bazı zorluklar, yaklaşık çözüm metodlarının bulunmasını zorunlu kılmıştır. Ayrıca, sınır tabaka denklemlerinin tam çözümlerini veren benzeşim ve modelleme yöntemleri de bir çok araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Son yıllarda ise genellikle sayısal çözüm yöntemleri üzerinde durulmaktadır. Özellikle sonlu elemanlar ve sonlu farklar yöntemleri en fazla kullanılan çözüm yöntemleridir.

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında değerli yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Doç.Dr.Hüseyin ŞALVARLI'ya teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Bu çalışmada, daimi olmayan bir laminer sınır tabaka için, bir dairesel silindir etrafındaki iki boyutlu sıkıştırılamaz akış incelenmiş ve problemin çözümü sonlu farklar yöntemine göre elde edilmiştir. Matematiksel problemi formüle etmek için düşünülen Navier-Stokes denklemleri kutupsal koordinatlara dönüştürülmüştür

Akışın laminer karakterini korumak için Reynolds sayısı Re = 40000 olarak alınmış ve farklı parametrelere göre hesaplanan değerlerin dağılımı çizilmiştir.

Bu çalışmada ve literatürde bulunan önceki bazı sayısal hesaplamalar arasında yapılan karşılaştırmanın iyi bir uyum içinde olduğu görülmüştür.

SUMMARY

In this study, the two-dimensional incompressible flow past a circular cylinder for a non-steady laminar boundary layer has been investigated and a solution of problem has been obtained by a finite difference method. In order to formulate the mathematical problem the Navier-Stokes equations under discussion have been transformed to cylindirical coordinates.

To protect the laminar character of the flow, the Reynolds number is taken as Re = 40000 and the distribution of the calculated values for different parameters are plotted.

It is seen that a comparison between the present calculations and some recent numerical results found in the literature is in good agreement.

SEMBOLLER

F	Dış kuvvetler
L	Cismin boyu
P	Basınç
R	Yarıçap
Re	Reynolds sayısı
t	Zaman
u	x yönündeki hız bileşeni
u_τ	Kayma gerilmesi hızı
U_∞	Potansiyel hız
v	y yönündeki hız bileşeni
x	Cismin yüzeyinin yatay koordinatı
y	Cismin yüzeyinin dikey koordinatı
δ	Sınır tabaka kalınlığı
ρ	Yoğunluk
ν	Kinematik viskozite
ν_t	Çalkantı viskozitesi
μ	Dinamik viskozite
Cf	Yüzey sürtünme katsayısı
V_r	Radyal hız
V_θ	Teğetsel hız
τ	Kayma gerilmesi
τ_w	Çeper kayma gerilmesi

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Sınır tabaka teorisi Prandtl'ın 1904 yılında yayınladığı "Çok Küçük Viskoziteli Bir Akışkanın Hareketi" makalesi ile başlamıştır. Bu konu, günümüzde de birçok araştırmacının ilgi odağı olmuştur. Konu incelendiğinde ortaya çıkan matematiksel güçlükler, konuyu araştırmacılar için daha ilginç hale getirmiştir. Yüzyılımıza girerken bir akışkan hareketindeki viskozite etkileri biliniyordu. Viskoz akışkanın hareket denklemleri, Navier-Stokes denklemleri olarak ifade edilmiştir.

Gerçek akışkan yerine potansiyel teori ile ideal akışkanların incelenmesinde birçok çelişki ortaya çıkmıştır. Bu çelişkilerin en kuvvetlisi D'alambert Paradoksu adıyla bilinen ve potansiyel akıma konan herhangi bir şekildeki cismin hiçbir direnç göstermediği, çelişkisidir. İşte bundan dolayı gerçek akışkan için problem çözüm tekniklerinin geliştirilmesi zorunlu olmuştur. İdeal ve viskoz akım problemlerinin çözümü için ayrı ayrı ilerleyen çalışmalar, son yıllarda birlikte ele alınarak incelenmeye başlamış ve böylece sınır tabaka teorisi yavaş yavaş ortaya çıkmıştır./1/

İkinci dünya savaşı ile birlikte gelişen havacılık ve uzay endüstrisinin getirdiği dizayn problemleri sınır tabaka teorisini uygulamalı mühendislik alanına sokmuştur. Eliptik karekterde olan Navier-Stokes denklemleri sınır değer problemi iken yapılan bazı basitleştirmeler ile elde edilen sınır tabaka denklemleri, parabolik karakterde ve başlangıç değer problemi olarak karşımıza çıkmaktadır.

Sınır tabaka denklemleri parabolik karakterde olmasına karşın yine de analitik çözümü güç olan denklemlerdir. Bu güçlükler, denklemin sol tarafında bulunan konvektif hız teriminden kaynaklanmaktadır. Bu terimler, denklemi lineer olmayan duruma getirirler. Bu yüzden sınır tabaka denklemleri için yaklaşık çözümleri verecek yöntemler üzerinde durulmuştur. Yaklaşık yöntemlerin yanısıra, sınır tabaka problemlerinin tam çözümünü veren benzeşim ve modelleme yöntemleri vardır. Benzeşim yöntemlerinde yeni bir parametre tanımlanır ve bu benzeşim parametreleri ile dönüşümler yapıldıktan sonra, kısmi diferansiyel denklem derecesi bir azaltılarak adi diferansiyel duruma getirilir. Bu yöntem ilk defa Blasius tarafından düz akıma konan, sıfır hücum açılı düz levha üzerindeki sınır tabaka problemlerine uygulanmıştır. Buna müteakip, Falkner-Skan denklemi olarak bilinen adi diferansiyel denklemi ile β açılı bir kama çevresindeki sınır tabaka problemi çözülmüştür. Ancak görülmüştür ki, benzeşim yöntemi karışık geometriler için uygulanamamaktadır. Sadece belirli şekiller için geçerli olan benzeşim yöntemi, bu yüzden geniş bir uygulama alanı bulamamıştır./2/

BÖLÜM 2. TEORİK FORMÜLASYON

2.1. Sıkıştırılamayan Viskoz Akış Problemi

Akışkanlar mekaniğini ilgilendiren akış problemleri iki ayrı teori ile incelenebilir. Bunlardan ilki, akışkanın moleküller arası sürtünmelerden doğan iç gerilmelerini gözönüne almayan ve akışkanın davranışını sadece basınca bağlayan potansiyel teori, diğeri ise bu sözkonusu gerilmeleri ve akışkanın iç sürtünmesini gözönüne alan viskoz teoridir. Akışkan içindeki basit kayma hareketi yapan iki yüzey arasındaki bir yüzey elemanına etkiyen gerilmelerin teğetsel bileşeni, karşılıklı etkilerden ve hızın düzgünsüzlüğünden dolayı sıfırdan farklıdır.

Hareket miktarının moleküler iletimi, yüzey elemanından birim zaman ve elemanın birim alan başına yatay bileşeninin net iletimi olarak düşünülürse, bunun da, teğetsel gerilmeden başka bir şey olmadığı anlaşılır.

Bu teğetsel gerilme bileşeni yerel hız gradyanına bağlıdır ve bu bağıntı, ($\partial u/\partial y$) ile lineer olarak değişir.

τ kayma gerilmesi olmak üzere,

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

şeklindeki bağıntıda, μ katsayısı viskozite sabitidir. Bu bağıntıya uyan akışkanlar, "Newtonien Akışkan" dır.

Bu arada, $\nu = \mu/\rho$ şeklinde başka bir bağıntıdan da sözedebiliriz. Bu bağıntı bize kinematik viskozite katsayısını, μ viskozite katsayısının, ρ akışkanın yoğunluğuna oranı olarak verir.

Akışkan içinde, molekülsel momentum iletimi, yüksek hız bölgesi yakınındaki akışkan taneciklerini yavaşlatıp, alçak hız bölgesindeki taneciklere ivme kazandıracağından, kayma tabakası akım yönünde kalınlaşır. Tabakanın potensiyel akım tarafındaki kenarına doğru gidildikçe, katı cisim üzerinde sıfır olan hızı, asimptotik olarak potansiyel hıza erişir. Bu bölgede bir karışım tabakasından sözedilebilir. /3/

Viskozite, bir akışkan içinde genel olarak değişmeyen olarak düşünülmesine karşın, ısıl etkilerle (yani sıcaklık etkisiyle) değişebilir.

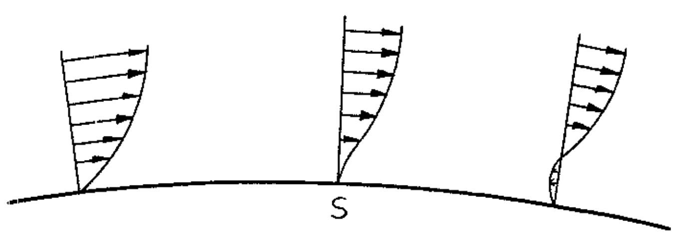
Viskoziteden doğan kayma gerilmesinin dağılımının akışkan hareketine olan etkileri viskoz teorinin inceleme alanına girer.

Akış içine konan katı bir cismin oluşturduğu sürükleme kuvvetini potansiyel teori açıklayamaz. Potansiyel teoriye göre sıfır hücum açılı düz levha akışı bozmaz iken, viskoz teori katı cisim üzerinde bir kaymazlık şartı öngördüğünden , cisim üzerindeki akışkan taneciklerinin hızını, katı cismin hızına eşit kabul eder. Ancak deney ve hesaplarla bulunmuştur ki, akışkanın serbest hareketindeki iç sürtünmeleri ihmal edilebilecek düzeydedir. Akım içine katı bir cisim konduğunda, bu sürtünme etkileri gözönüne alınır ve viskoz teori uygulanır.

Yüksek Reynolds sayılarında, potansiyel teoriyi viskoz teoriye bağlayan sınır tabaka teorisidir.

Akışkana etki eden teğetsel gerilme kuvvetleri ile eylemsizlik kuvvetleri birbirini dengeledikleri sürece akım, dinamik dengesini korur. Ancak akımın yavaşlaması durumunda eylemsizlik kuvvetleri, gerilme kuvvetlerine üstün gelecek ve akımın dinamik dengesi bozulacaktır.

Aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere, akışın yavaşlaması, matematiksel olarak ayrılma olayını gerektirir. Ayrılma noktası ise, yine matematiksel olarak teğetsel gerilmenin sıfır olduğu yer olarak kabul edilir.



S: Ayrılma noktası

Fiziksel ve matematiksel ayrılma noktaları, iki boyutlu daimi akım durumu için çakışırlar. Ancak üç boyutlu ve zamana bağlı iki boyutlu akımda ise fiziksel ayrılma beklendiği gibi teğetsel gerilmenin sıfır olduğu yerde gerçekleşmeyebilir.

Akışkanın sıkıştırılamayan olarak düşünülmesi durumunda, akışkan yoğunluğu sabit olarak düşünülür. Akışkanın sıkıştırılabilme özelliği, akımın Mach sayısına bağlıdır. Mach sayısı yaklaşık olarak 0.3 'ten küçük iken, sıkıştırılamayan akışkan yaklaşımı hemen hemen doğrudur. Mach sayısı sıfır iken yani akımın durması halinde, akışkan kesinlikle sıkıştırılamazdır.

Viskoz akım problemlerinin niceliksel incelenmesi, Navier-Stokes denklemleri ile yapılır. Bu denklemler, viskoz akışkanın hareketini yönetirler.

2.2.Navier-Stokes Denklemleri

Viskoz akışkanların hareketi incelenirken, sürtünmesiz akışkanlar için kullanılan hareket denklemleri, viskozite etkisinden doğan sürtünme kuvvetlerini ve akışkanın iç gerilmelerini içermediğinden, bunlarında eklenmesi gerekecektir.

Bu şekilde ortaya çıkan hareket denklemleri, viskoz bir akışkanın hareketini yöneten ve nitelendiren Navier-Stokes denklemleridir.

x yönündeki Navier-Stokes denklemleri vektörel olarak aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho\vec{F} - \nabla P + \mu\nabla^2\vec{U}$$

$$= \rho\vec{F} - \text{grad } P + \mu\nabla^2\vec{U}$$

Burada;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

olmaktadır.

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

Vektörel olarak yazılmış olan Navier-Stokes denklemi açılırsa;

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}) = F - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$$

şeklini alır.

Yukarıda yazılmış olan Navier-Stokes denklemi üç boyutludur. Biz bunu iki boyutlu yazmak istersek ve dış kuvvetleri içeren terimi ihmal edersek, denklem aşağıdaki duruma gelir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

x yönünde yazılan bu denklemi boyutsuzlaştırmak için;

L —> karakteristik boy,

U_∞ —> karakteristik hız olmak üzere,

$x = Lx'$ $\quad u = U_\infty u'$

$y = Ly'$ $\quad v = U_\infty v'$ ve

$P = \rho U^2_\infty p'$ $\quad t = (L/U_\infty)t'$

yazılarak denkleme yerleştirilirse;

$$\frac{(U_\infty u')}{(\frac{L}{U_\infty}t')} + U_\infty u'\frac{(U_\infty u')}{(Lx')} + U_\infty v'\frac{(U_\infty u')}{(Ly')} = -\frac{1}{\rho}\frac{(U^2_\infty P')}{(Lx')}$$

$$+\nu\frac{U_\infty}{U_\infty}\left[\frac{(U_\infty u')}{(L^2 x'^2)} + \frac{(U_\infty u')}{(L^2 y'^2)}\right]$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler ile bu denklem;

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\nu}{LU_\infty}\left[\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right]$$

$$= -\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right]$$

şeklini alır.

2.3. Süreklilik Denklemi

Akışkanların hareketinde belirli bir kontrol hacminde, hareketin sürekli olduğunu, yani bu kontrol hacmine giren akışkan kütlesinin, çıkan akışkan kütlesine eşit olduğunu veren denklem;

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \nabla \vec{U} = 0 \quad \text{dır.}$$

Sıkıştırılamayan akışkan için, $D\rho\ /Dt = 0$ olduğundan kütlenin korunumu için akışkanın vektörel hızının diverjansının sıfır olması gerekir.

$$\nabla . \vec{U} = 0$$

İki boyutlu ya da eksenel simetri durumu için bu denklemi,

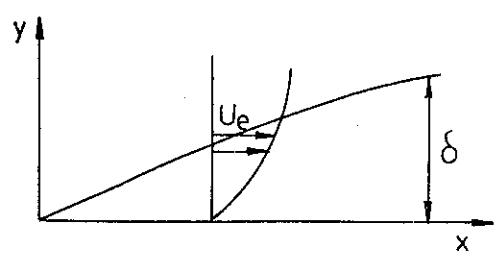
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

şeklinde yazabiliriz.

2.4. Sınır Tabaka Denklemleri

Sınır tabaka denklemleri, Navier-Stokes denklemlerinden boyut analizi yardımı ile basitleştirilerek türetilirler.

Düz levha üzerindeki daimi sınır tabakayı düşünerek;



şekli yardımıyla;

$$u \approx 1$$
$$x \approx 1$$
$$y \approx \delta$$
$$v \approx \delta$$

ve $\quad \delta << 1$

olarak belirlenir. Bu, x yönündeki boyutsuz Navier-Stokes denklemine uygulanırsa;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

elde edilir.

Boyutlar ise;

$$1 \quad 1\,1 \quad \delta\frac{1}{\delta} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{1}{Re}\left[1 \quad \frac{1}{\delta^2}\right]$$

şeklinde olur.

Yukarıdaki denklemde $\delta << 1$ olduğu için $1/\delta^2$ terimi bir'den çok büyük olacaktır. 1 boyutlu terim, $1/\delta^2$ boyutlu terim yanında ihmal edilebilir. Bu ihmal edilen terim, asıl denklemde $\partial^2 u/\partial x^2$ terimine karşılık gelir. Böylece, sınır tabaka denklemi boyutsuz olarak;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

şeklinde yazılabilir.

Sınır tabaka denklemleri, görüldüğü gibi $\partial^2 u/\partial x^2$ terimini kapsamadığından Navier-Stokes denkleminden farklıdır. Bundan dolayı çözümü daha kolaydır. Bu fark nedeniyle denklem karakter değiştirir. Eliptik karakterde olan Navier-Stokes denklemlerinin çözülebilmesi için tüm sınırlarda sınır şartı tanımlanmalıdır. Sınır tabaka denklemleri ise parabolik tiptedir ve problem, x yönünde başlangıç değer problemi şeklini alır.

Sınır tabaka denklemleri, verilen bir geometri için yeni bir koordinat dönüşümü ile Reynolds sayısından tamamıyla bağımsız duruma getirilebilir.

x yönündeki basınç gradyanı $\partial P/\partial x$ ise, potansiyel teoriden bulunur.

Bernouilli denkleminden,

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + P = \text{sabit}$$

olduğu bilinmektedir.

Bu bağıntı x'e göre türetilir,

$$\rho u \frac{du}{dx} + \frac{dP}{dx} = 0$$

ve buradan,

$$\frac{dP}{dx} = -\rho u_e \frac{du_e}{dx}$$

yazılırsa boyutsuz olarak da;

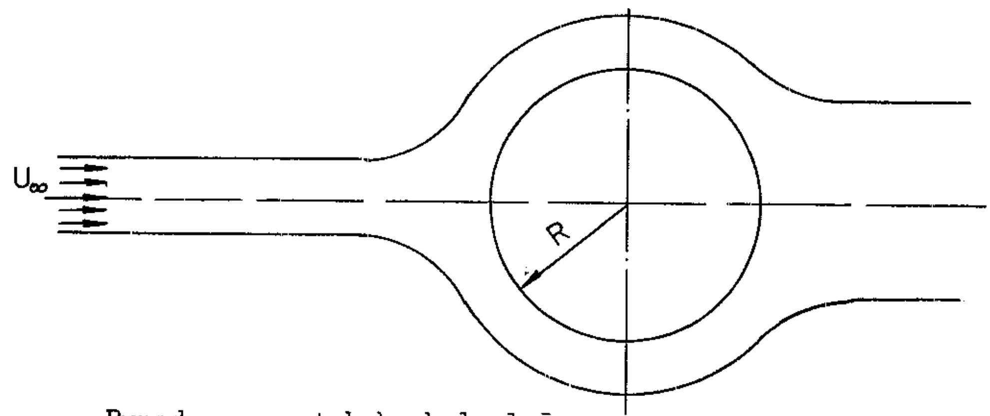
$$\frac{dP'}{dx'} = - \quad u_e' \frac{du_e'}{dx'}$$

bağıntısı elde edilir.

BÖLÜM 3. DAİRESEL SİLİNDİR ÇEVRESİNDEKİ SINIR TABAKA İNCELEMESİ

3.1. Problemin Tanıtımı

Bu çalışmada, dairesel silindir çevresindeki sınır tabaka inceleneceğinden, momentum ve süreklilik denklemleri problemin fiziğine uygun olarak kutupsal koordinatlarda yazmak gerekecektir. Problem, bu aşamada iki boyutlu olduğundan sadece θ yönündeki momentum denklemi ve süreklilik denklemi kullanılacaktır. İncelenecek akışın dairesel silindirin çapına göre belirlenmiş Reynolds sayısı, Re = 40000 olarak alınacaktır. Bu Reynolds sayısında akış, ayrılma olana kadar laminer karekterini koruyacaktır. Daha sonra denklemler, yarıçap ve sonsuzdaki hıza göre boyutsuzlaştırılmış olduğundan, hesaplamalar yapılırken yarıçapa göre Reynolds sayısı Re = 20000 alınacaktır.



Burada sınır tabaka kalınlığı

$$\delta = \frac{5.x}{\sqrt{Re}}$$

olarak alınmıştır.

Problemde $\delta = \frac{5.1}{\sqrt{40000}} = 0.025$ m = 25 mm bulunmuştur.

Sürekli ortam için yazılmış denklemleri ayrık ortama uygularken $\Delta\theta=\pi/40$, $\Delta r=0.001$ ve $\Delta t=0.01$ alınacaktır.

Dairesel silindir çevresindeki akıştaki sınır tabakanın zamanla kalınlaştığı kabul edilecektir.

Kutupsal koordinatlar (r,θ) kullanıldığından, yüzeye dik ekseni radyal doğrultu r, akış yönünü ise θ açısı gösterecektir Buna göre problemin sınır şartları olarak cismin yüzeyinde, $r=1$ iken $V_r=V_\theta=0$

sınır tabaka yüzeyinde $r=N$ iken $V_\theta=V_{\theta_e}$ (sınır tabaka kenar hızı)

bağıntıları kullanılacaktır. Ayrıca,

$\theta=0$ için $V_\theta=V_r=0$ ve $t=0$ için $V_r=0$ ve $V_\theta=V_{\theta_e}$ geçerlidir.

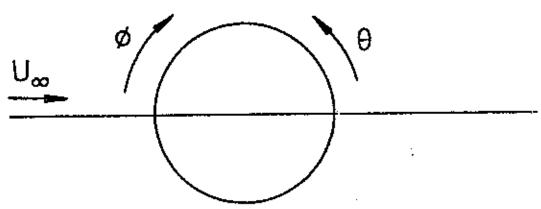
Ancak ilk şart olarak iki boyutlu durma noktası akımı verilerinden yola çıkılacaktır.

V_{θ_e} kenar hızının ise potansiyel teoriden, dairesel silindir için,

$$V_{\theta_e} = 2\, U_\infty \sin \phi$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. /4/

Gerekirse bir işaret düzeltmesi şöyle yapılabilir:
Eğer θ açısı arka durma noktasından itibaren alınırsa (aşağıdaki şekildeki gibi) kenar hızı ifadesindeki ϕ açısı ile aralarında $(180-\phi)$ lik bir fark olacaktır.



Yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi iki ayrı açı tanımlanmıştır. Hesaplamalar θ açısına göre yazılırsa kenar hızı ifadesinde ϕ açısını θ açısı cinsinden yazılmasıyla, $\phi = \pi - \theta$ olur ve bunun neticesinde $d\theta = -d\phi$ elde edilir. Böylece kenar hızı bağıntısı,

$$V_{\theta_e} = -2U_\infty \sin \theta$$

şeklini alır.

3.2. Kutupsal Koordinatlarda Süreklilik Denklemi

Kartezyen koordinatlarda

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

şeklinde yazılan süreklilik denklemini kutupsal koordinatlarda yazmak için dönüşüm formülleri kullanılır. Bunlar;

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta \quad \text{şeklindedir.}$$

Kutupsal koordinatlarda,

$$\nabla V = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rV_r)}{\partial r}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

olarak yazılır. Öte yandan sıkıştırılamıyan akışkan için $\nabla V = 0$ olduğundan süreklilik denklemi

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rV_r)}{\partial r}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0$$

şeklini alır.

3.3.Kutupsal Koordinatlarda Momentum Denklemi

Kartezyen koordinatlarda

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

şeklinde ifade edilen sınır tabaka momentum denklemi, kutupsal koordinatlarda, V_θ teğetsel hız, V_r radyal hız olmak üzere, θ yönünde;

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \frac{V_r}{r}\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{Re}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right) - \frac{V_\theta}{r^2}\right]$$

şekline dönüşür.

BÖLÜM 4.SAYISAL FORMÜLASYON

4.1.Sonlu Farklar Yöntemi

Mühendislik matematiğinde karsılaşılan problemlerin çoğu, analitik çözümü bilinmeyen yada pratik olmayan yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemleri içerir. Sonuçta, bu denklemlerin çözümü için yaklaşık yöntemler tercih edilir. Bu tip yöntemlerin en yaygın kullanılanlarından biri ise, sonlu farklar yöntemidir. /5/

Bu yöntemin dayandığı düşünce, sürekli bir ortam için bilinen bir diferansiyel denklemi, bu ortamı belirli noktalardan oluşan ağlara bölerek (ayrıklaştırarak) fark denklemi cinsinden ifade etmektir. Sürekli ortam, ağlara dönüştürülüp, bu ağların köşe noktaları ayrıklaştırmada kullanılır. Yani diferansiyel denklem, sürekli bir ortam için geçerli iken, sonlu farklar yöntemi uygulandıktan sonra ortaya çıkan fark denklemi, ağların köşe noktaları için geçerlidir. Ancak ortamın içerdiği nokta sayısı ağ boyutları ile değişeceğinden, çözümün yaklaşıklığı üzerinde dolaylı bir rol oynar.

Sonlu farklar yöntemi uygulanırken türevler, fark oranları cinsinden yazılır. Burada alabileceğimiz üç tür fark vardır:

1- İleri Farklar:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{\Delta x}$$

2- Geri Farklar:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{F_{i,j} - F_{i,j-1}}{\Delta x}$$

3- Merkezi Farklar:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{F_{i,j+1/2} - F_{i,j-1/2}}{\Delta x} = \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j-1}}{2\Delta x}$$

Burada F herhangi bir fonksiyon, x ise bu fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlerden biridir. j,x yönünde ayrıklaştırmada kullanılan indis, i ise diğer herhangi bir değişken yönündeki ayrıklaştırmada kullanılan indistir.

Δx ise, j noktaları arasındaki uzaklıktır. Δx büyük seçilirse, ağ boyutları büyür, böylece köşe noktalarının sayısı x yönünde azalmış olur. Bu şekilde seçilen Δx ile yapılan hesaplar alınan nokta sayısı az olduğu için daha az zaman alır, ancak sonuca yaklaşıklık azalır. Bunun tersine Δx küçük seçilirse, ağ boyutları küçülür. Böylece x yönünde daha çok nokta ile hesap yapılacağından yaklaşıklık değeri artar. Ancak bu durumda da işlem sayısı artacağından, yuvarlatma hataları da artar ve sonuca etki eder.

Sonlu farklar yöntemi, yüksek mertebeden, lineer olmayan, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmaya en elverişli ve kolay yöntemlerden birisidir.

Bu şekilde, problem akım yönünde 40 nokta, yüzeye dik yönde sınır tabaka kalınlığına bağlı olmak üzere önce az sayıda, daha sonra ise sınır tabaka kalınlığının artması ile daha çok sayıda nokta içerir. Ayrılma oluncaya dek zaman adımı artırılacaktır.

4.2. Momentum Denkleminin Sayısal Formülasyonu

Kutupsal koordinatlarda,

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \frac{V_r}{r}\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{Re}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right) - \frac{V_\theta}{r^2}\right]$$

şeklinde, boyutsuz olarak yazılan momentum denkleminde, basınç gradyanı $\partial P/\partial \theta$'yı açık olarak yazmak istersek Bölüm 2.4. de yazıldığı şekilde,

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = -u_e\frac{\partial u_e}{\partial \theta} \Longrightarrow u_e\frac{\partial u_e}{\partial \phi} = -\frac{\partial P}{\partial \phi}$$

ve Bölüm 3.1. ten $u_e(\phi) = 2U_\infty \sin\phi$

Buna göre, gerekli türev işlemleri yapıldıktan sonra,

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = -\,4\ \mathrm{Sin}\ \phi\ \mathrm{Cos}\ \phi \quad \text{şekline girer.}$$

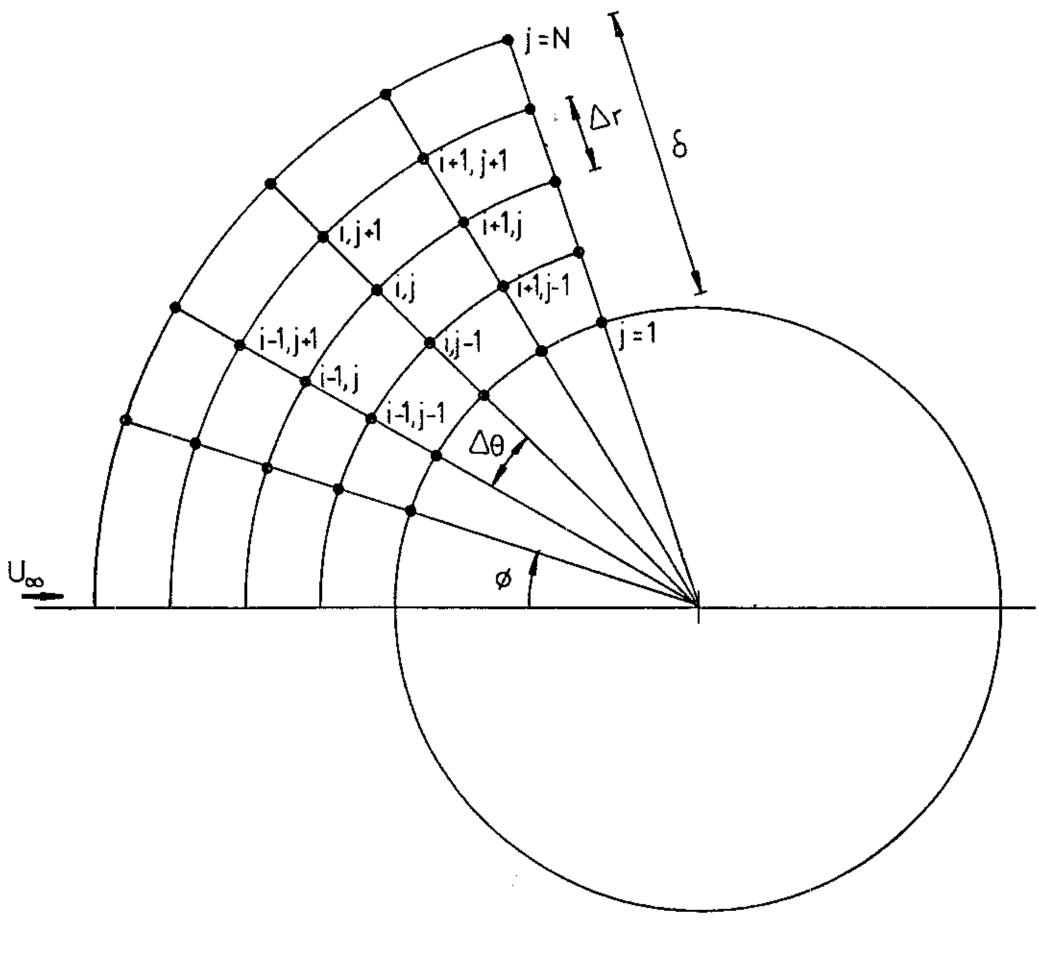
Böylece momentum denklemi

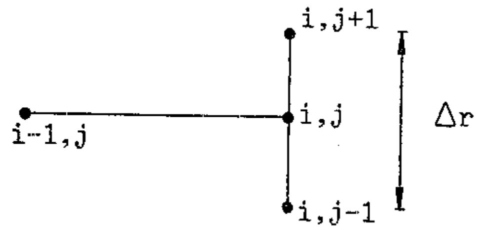
$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \frac{V_r}{r}\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\ 4\ \mathrm{Sin}\ \phi\ \mathrm{Cos}\ \phi\ +$$

$$+ \frac{1}{Re}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right) - \frac{V_\theta}{r^2}\right]$$

şeklinde yazılır.

Şimdi bu denklemi ayrık ortam için düşünelim: ϕ yönünde i noktalarını, r yönünde ise j noktalarını ve zaman için de n indisini kullanarak problemde yararlanacağımız ağ sistemini aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:





Momentum denklemi ayrık ortamda şekildeki i,j noktasında yeni zaman adımı için yani n+1 zamanı için yazılacaktır. n zamanı için diğer hızlar, eski zaman için belirlenmiş olacak ve biliniyor kabul edilecektir.

Fark denklemlerini yazmak için momentum denkleminde bulunan türev ifadeleri, önce fark oranları şeklinde yazılır.

$\partial V_\theta / \partial t$ türevi için i,j noktasında zaman için (n yönünde) ileri farkları uygulayarak

$$\left.\frac{\partial V_\theta}{\partial t}\right|_{i,j,n} = \frac{V_{\theta i,j}^{n+1} - V_{\theta i,j}^{n}}{\Delta t} \qquad ;$$

$\left(\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r}\right)$ türevi için $(i,j)^{n+1}$ noktasında, r yönünde merkezi farkları kullanarak

$$\left.\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r}\right|_{i,j,n+1} = \frac{r_{i,j+1} \cdot V_{\theta i,j+1}^{n+1} - r_{i,j-1} \cdot V_{\theta i,j-1}^{n+1}}{2\Delta r} \qquad ;$$

$\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)$ türevi için $(i,j)^{n+1}$ noktasında θ yönünde geri farkları kullanarak

$$\left.\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right|_{i,j,n+1} = \frac{V_{\theta i,j}^{n+1} - V_{\theta i-1,j}^{n+1}}{\Delta \theta} \qquad ;$$

$\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right)\right]$ ikinci mertebeden türevi için $(i,j)^{n+1}$ noktasında r yönünde önce geri, sonra da ileri farkları kullanarak,

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right)\right]\Bigg|_{i,j,n+1} = \left(\frac{r_{i,j+1}}{\Delta r^2}\right) V_{\theta i,j+1}^{n+1} - \left(\frac{r_{i,j+1}+r_{i,j}}{\Delta r^2}\right) V_{\theta i,j}^{n+1} + \left(\frac{r_{i,j}}{\Delta r^2}\right) V_{\theta i,j-1}^{n+1}$$

fark oranları bulunur.

Şimdi, bu tek tek bulunan fark oranlarını momentum denkleminde yerine koyup, denklemdeki diğer değişkenleride $(i,j)^n$ noktası için ayrık ortama uygun şekilde yazarsak, momentum denklemi;

$$\frac{V_{\theta i,j}^{n+1} - V_{\theta i,j}^{n}}{\Delta t} + \left(\frac{V_r}{r}\right)_{i,j}^{n} \cdot \frac{r_{i,j+1}\cdot V_{\theta i,j+1}^{n+1} - r_{i,j-1}\cdot V_{\theta i,j-1}^{n+1}}{2\,\Delta r} +$$

$$+\left(\frac{V_\theta}{r}\right)_{i,j}^{n} \frac{V_{\theta i,j}^{n+1} - V_{\theta i-1,j}^{n+1}}{\Delta \theta} = \frac{4}{r_{i,j}} \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\phi +$$

$$+ \frac{1}{Re}\,\frac{1}{r_{i,j}} \left[\left(\frac{r_{i,j+1}}{\Delta r^2}\right) V_{\theta i,j+1}^{n+1} - \left(\frac{r_{i,j+1}+r_{i,j}}{\Delta r^2}\right) V_{\theta i,j}^{n+1} + \right.$$

$$\left. +\left(\frac{r_{i,j}}{\Delta r^2}\right) V_{\theta i,j-1}^{n+1} \right] - \left[\frac{1}{Re} \left(\frac{V_\theta}{r^2}\right)_{i,j}^{n} \right]$$

şeklinde yazılır.

Bu denklem biraz daha açık şekilde formüle edilirse,

$$\left[\frac{V_{\theta i,j}^{n+1}}{\Delta t}\right] - \left[\frac{V_{\theta i,j}^{n}}{\Delta t}\right] + \left[\left(\frac{V_r}{r}\right)_{i,j}^{n} \frac{r_{i,j+1}\cdot V_{\theta i,j+1}^{n+1}}{2\,\Delta r}\right] -$$

$$\left[\left(\frac{V_r}{r}\right)_{i,j}^{n} \frac{r_{i,j-1}\cdot V_{\theta i,j-1}^{n+1}}{2\,\Delta r}\right] + \left[\left(\frac{V_\theta}{r}\right)_{i,j}^{n} \frac{V_{\theta i,j}^{n+1}}{\Delta \theta}\right] -$$

$$- \left[\left(\frac{V_\theta}{r}\right)_{i,j}^{n} \frac{V_{\theta i-1,j}^{n+1}}{\Delta \theta}\right] = \left[\frac{4}{r_{i,j}} \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\phi\right] +$$

$$+ \left[\frac{r_{i,j+1}}{Re\; r_{i,j}\,\Delta r^2} V_{\theta i,j+1}^{n+1}\right] + \left[\left(\frac{1}{Re\cdot\Delta r^2}\right) V_{\theta i,j-1}^{n+1}\right] -$$

$$- \left[\frac{r_{i,j+1}+r_{i,j}}{Re\; r_{i,j}\,\Delta r^2} V_{\theta i,j}^{n+1}\right] - \left[\frac{1}{Re}\left(\frac{V_\theta}{r^2}\right)_{i,j}^{n}\right]$$

haline dönüşür ki, burada (n+1) yeni zamanı, (n) ise eski zamanı belirttiğinden, (n) indisli hızlar, bir önceki zaman için bulunan hızlardır. Görüleceği gibi bu denklemde bilinmeyen hızlar, (n+1) indisli hızlardır.

Yukarıdaki ayrıklaştırılmış momentum denklemi,

$$A_j\, V_{\theta i,j-1}^{n+1} + B_j\, V_{\theta i,j}^{n+1} + C_j\, V_{\theta i,j+1}^{n+1} = D_j$$

şeklinde basit olarak ifade edilebilir. Neticede, j noktası kadar denklem içeren lineer bir denklem sistemi ortaya çıkar. Bu j sayısı sınır tabaka kalınlığı akım yönünde ilerledikçe ve zamanla artacağından, zaman adımı ve ϕ istasyonları arttıkça mevcut bulunan ve çözülmesi gereken sistemdeki denklem sayısı artacaktır./6/

Yukarıda kısaca yazılmış olan denklem sistemindeki A_j, B_j, C_j, D_j katsayıları ise şu şekildedir:

$$A_j = -\left[\left(\frac{V_r}{r}\right)_{i,j}^{n} \frac{r_{i,j-1}}{2.\Delta r}\right] - \left[\frac{1}{Re\ \Delta r^2}\right]$$

$$B_j = \left[\frac{1}{\Delta t}\right] + \left[\left(\frac{V_\theta}{r}\right)_{i,j}^{n} \frac{1}{\Delta\theta}\right] + \left[\frac{r_{i,j+1}+r_{i,j}}{Re\ r_{i,j}\cdot\Delta r^2}\right]$$

$$C_j = \left[\left(\frac{V_r}{r}\right)_{i,j}^{n} \frac{r_{i,j+1}}{2.\Delta r}\right] - \left[\frac{r_{i,j+1}}{Re\cdot r_{i,j}\,\Delta r^2}\right]$$

$$D_j = \left[\frac{V_{\theta i,j}^{n}}{\Delta t}\right] + \left[\left(\frac{V_\theta}{r}\right)_{i,j}^{n} \frac{V_{\theta i-1,j}^{n+1}}{\Delta\theta}\right] + \left[\frac{4}{r_{i,j}} \operatorname{Sin}\phi \operatorname{Cos}\phi\right] - \left[\frac{1}{Re}\left(\frac{V_\theta}{r^2}\right)_{i,j}^{n}\right]$$

Elimizdeki bu denklem sistemi, matris sistemi şeklinde yazılırsa, ortaya üç diagonalli bir katsayılar matrisi çıkar.

$$
\begin{bmatrix}
B_2 & C_2 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
A_3 & B_3 & C_3 & 0 & . & . & . & . \\
0 & A_4 & B_4 & C_4 & & & & . \\
. & . & & & & & & . \\
. & . & & & & & & . \\
. & . & & & & & & . \\
. & . & & & & & & . \\
. & . & & & & & & . \\
. & . & & & & A_{N-2} & B_{N-2} & C_{N-1} \\
0 & . & . & . & . & & A_{N-1} & B_{N-1}
\end{bmatrix}
*
\begin{bmatrix}
V_{\theta i,2}^{n+1} \\
V_{\theta i,3}^{n+1} \\
. \\
. \\
. \\
. \\
. \\
. \\
V_{\theta i,N-2}^{n+1} \\
V_{\theta i,N-1}^{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
D_2 \\
D_3 \\
. \\
. \\
. \\
. \\
. \\
. \\
D_{N-2} \\
D_{N-1}
\end{bmatrix}
$$

Burada, $D'_{N-1} = D_{N-1} - C_{N-1}$ olarak yazılmıştır. Görüleceği gibi, sınır tabaka içinde yüzeye dik doğrultuyu belirleyen r yönündeki j indisi, ilk satırda $j= 2$ dir. Bunun nedeni $j=1$ indisinin belirlediği r koordinatının cismin yüzeyine denk gelmesidir. Cismin üzerinde tüm hızların sıfır olduğu sınır şartı ile verilir ve $j=1$ indisli satır elemanlarının tamamı bu yüzden sıfır olduğu için bu satır sisteme sokulmaz.

Aynı şekilde $j=N$ indisi sınır tabakanın sınır yüzeyini belirlediğinden buradaki yani, sınır tabaka yüzeyi için yazılan denklem de sisteme sokulmaz. Sınır tabaka yüzeyindeki V_θ hızı potansiyel akım çözümünden bulunup, sınır tabaka kenar hızı şeklinde her ayrı i indisi için, yani her ϕ istasyonunda ayrı birer kez sınır şartı olarak verilir.

Bu matris sistemini çözmek için, A_j, B_j, C_j, D_j katsayılarını her ϕ adımında birer kez hesaplayıp, daha sonra, bir sonraki ϕ adımına geçmemiz gerekmektedir.

Buradan da görüleceği gibi A_j, B_j, C_j, D_j katsayıları, sadece belirli bir t anına ait fonksiyonlardır.

Bu matris sisteminin çözümü için kullanılabilecek çeşitli yöntemler vardır. Bunlardan biri bazı durumlarda pratik olarak kullanılabilen bağıntılardır. Diğerleri ise çeşitli sayısal analiz yöntemleri olup, bu çalışmada (formülasyon ve bilgisayar programlama açısından yararları olduğu ve kolaylık sağladığı için) seçeceğimiz yöntem, Gauss eliminasyon yöntemidir./7/

Elde edilen matris üç diagonalli olduğundan dolayı ve yöntemi hızlandırmak amacıyla, katsayılar matrisinde sadece bu üç diagonal gözönünde bulundurulacaktır.

Üç diagonalli

$$A_j\, V_{\theta i,j-1}^{n+1} + B_j\, V_{\theta i,j}^{n+1} + C_j\, V_{\theta i,j+1}^{n+1} = D_j$$

sisteminde düşünürsek, sistemin en üst ve en alt satırlarının j indisleri sırasıyla j=2 ve j=N-1 olduğu için, j=2 den başlayarak j=N-1 e kadar j'yi bir artırarak önce her j 'de B_{j-1} katsayısının sıfır olmaması şartı ile,

$$m = \frac{A_j}{B_{j-1}}$$

oranı hesaplanır ve

$$'B_j = B_j - mC_{j-1}$$

$$'D_j = D_j - mD_{j-1}$$

yeni katsayıları bulunur.

Daha sonra j=N-1 için yeni bulunan $'B_j$ $(='B_{N-1})$ katsayısının sıfırdan farklı olması şartı ile

$$V_{\theta N-1} = \frac{'D_{N-1}}{'B_{N-1}}$$

yazılır.

Bu adımdan sonra hemen geriye doğru gidilerek $V_{\theta i,j}$ hızları bulunur. Bunun için j=N-2 den j=2 ye kadar geriye doğru j yi bir eksilterek

$$V_{\theta i,j} = \frac{'D_j - (C_j \cdot V_{\theta j+1})}{'B_j}$$

bağıntısı ile, tüm j noktaları için belirli bir ø istasyonunda V_θ teğetsel hızları hesaplanmış olur.

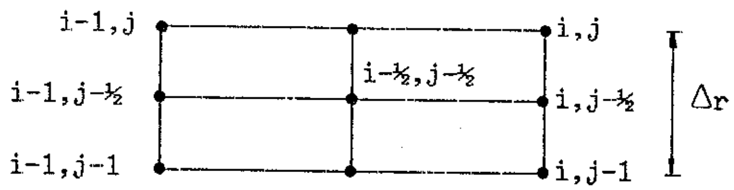
Bu yapıldıktan sonra, bir sonraki ø adımına geçilir, ancak bunun içinde en son hesapların yapıldığı ø istasyonundaki V_r radyal hızlarını da bulmak gerekir. Bu da momentum denklemine benzer bir şekilde dönüştürüp, fark denklemi haline getirilen süreklilik denkleminden bulunacaktır.

4.3. Süreklilik Denkleminin Sayısal Formülasyonu

Kutupsal koordinatlarda,

$$\frac{1}{r}.\frac{\partial(rV_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}.\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}=0$$

şeklinde yazılan süreklilik denklemini ayrıklaştırmak için önce seçilecek uygun bir ağ düşünülür:



Bu ağın $(i,j-\frac{1}{2})$ noktasındaki V_θ hızını $V_{\theta 2}$, $(i-1,j-\frac{1}{2})$ noktasındaki V_θ hızını da $V_{\theta 1}$ olarak gösterelim.

Süreklilik denkleminde bulunan türevler fark oranları olarak yazılırsa,

$[\frac{\partial(rV_r)}{\partial r}]$ türevi için, $(i,j-\frac{1}{2})$ noktasında, r doğrultusunda merkezi farkları kullanarak

$$\left[\frac{\partial(rV_r)}{\partial r}\right]\Bigg|_{i,j-\frac{1}{2}}=\frac{r_{i,j}.V_{r i,j}-r_{i,j-1}V_{r i,j-1}}{\Delta r}$$

olarak elde edilir.

$(\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta})$ türevi içinse, $(i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})$ noktasında θ doğrultusunda merkezi farkları kullanarak

$$\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\right)\Bigg|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}=\frac{V_{\theta i,j-\frac{1}{2}}-V_{\theta i-1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\theta}$$

şeklinde yazarız.

Yukarıda yapılan notasyon belirlemesi ile,

$$\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\right)\Bigg|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}=\frac{V_{\theta 2}-V_{\theta 1}}{\Delta\theta}$$

olur.

Bu ifadedeki $V_{\theta 1}$ ve $V_{\theta 2}$ hızlarını bulmak için de bir alt ve bir üst j noktalarındaki V_θ hızlarının aritmetik ortalaması kullanılır. Buna göre,

$$V_{\theta 2} = V_{\theta i,j-\frac{1}{2}} = \frac{V_{\theta i,j-1}+V_{\theta i,j}}{2}$$

$$V_{\theta 1} = V_{\theta i-1,j-\frac{1}{2}} = \frac{V_{\theta i-1,j-1}+V_{\theta i-1,j}}{2}$$

olur. Böylece $(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta})$ türevi,

$$\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\Bigg|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{V_{\theta i,j-1}+V_{\theta i,j}-V_{\theta i-1,j-1}-V_{\theta i-1,j}}{2\,\Delta\theta}$$

şeklinde yazılır.

Bulunan türev ifadeleri denklemde yerine konulursa, ayrıklaştırılmış süreklilik denklemi

$$\frac{r_{i,j}V_{ri,j}-r_{i,j-1}V_{ri,j-1}}{\Delta r} + \frac{V_{\theta i,j-1}+V_{\theta i,j}-V_{\theta i-1,j-1}-V_{\theta i-1,j}}{2\,\Delta\theta}=0$$

olur.

Bu denklemde görüldüğü gibi tek bilinmeyen $V_r(i,j)$ radyal hızlarıdır. Denklemdeki $V_\theta(i,j)$ hızları daha önce momentum denkleminden bulunmuştur. $V_r(i,j-1)$ radyal hızları ise bir alt j istasyonunun bilinen radyal hızıdır. Tüm bunlara göre, bu denklem ile $V_r(i,j)$ radyal hızları bulunur. Fark denklemi düzenlenirse

$$\left[\frac{r_{i,j}}{\Delta r}\right]V_{ri,j}-\left[\frac{r_{i,j-1}}{\Delta r}\right]V_{ri,j-1}+ + \frac{V_{\theta i,j-1}+V_{\theta i,j}-V_{\theta i-1,j-1}-V_{\theta i-1,j}}{2\,\Delta\theta}=0$$

olur. Buradan ;

$$V_{r\,i,j}=\left[\left[\frac{r_{i,j-1}}{\Delta r}\right]V_{r\,i,j-1}-\left[\frac{V_{\theta\,i,j-1}+V_{\theta\,i,j}-V_{\theta\,i-1,j-1}-V_{\theta\,i-1,j}}{2\,\Delta\theta}\right]\right]*\left[\frac{\Delta r}{r_{i,j}}\right]$$

elde edilir.

Bu $V_r(i,j)$ hızları, bir sonraki $\emptyset$ istasyonunda momentum denkleminde kullanılır. Bu işlem,böylece tüm $\emptyset$ istasyonları boyunca sürdürülerek her $\emptyset$ adımında $V_\theta(i,j)$ ve $V_r(i,j)$ hızları bulunmuş olur. Bu şekilde bütün $\emptyset$ istasyonları için radyal ve teğetsel hızlar bulunduktan sonra, zaman adımı bir artırılarak aynı hesaplama süreci bir sonraki zaman için sürdürülür. Bir önceki zaman için bulunan tüm hızlar, yeni zaman adımında denkleme n ile sokulur.

BÖLÜM 5: SONUÇLAR VE YORUM

Bu çalışmada, dairesel silindir çevresindeki zamana bağlı akım problemi incelenmiştir. Problemin incelenmesinde sayısal yöntem olarak sonlu farklar yöntemi direkt olarak uygulanmıştır.

Sınır tabaka problemlerinin sayısal çözümü klasik olarak bir benzeşim dönüşümü ile sınır tabaka denklemlerinin yarı benzer duruma getirildikten sonra, sonlu farklar yönteminin uygulanması ile yapılmakta idi. Klasik çözümlerde zamana bağlı akım durumu için $\eta = y/(2\sqrt{t})$ şeklinde bir benzeşim parametresi tanımlanarak, yarı benzer denklemler oluşturulmaktadır.

Ancak bu yöntem, gerek uzun türetme işlemlerinin zorluğundan gerekse bu çalışmada ulaşılan yaklaşıklık derecesine erişmek için gereken sayısal işlem ve iterasyonların çokluğundan dolayı, pratik uygulaması uzun ve zordur.

Dairesel silindir çevresindeki akımı daha önce Blasius ve Howarth, potansiyel fonksiyonunu seriye açarak yaklaşık olarak çözmüşlerdir.

Bu Çalışmada kenar hızı daggılımı $U_e = 2\, U_\infty \sin \phi$ şeklinde secilmiş ve θ yönünde 40 istasyon alınmıştır. Yani her $\Delta\theta$ adımı 4,5 dereceye tekabül etmektedir. Yüzeye dik olarak ise dairesel silindir çevresindeki 4 nokta ile başlanmıştır. Başlangıç anında t=0, sınır tabaka sonsuz incelikte ve akışkan sanki dairesel silindir yüzeyi boyunca akıyormuş gibidir. Zamanın artmasıyla birlikte sınır tabaka kalınlığı artmaktadır.

Bir zaman adımı için tüm θ (yani ϕ) istasyonlarında hesaplamalar bitince, bir sonraki zamana geçilip bu zamandaki hızları bulurken kullanılan eski hızlar olarak bir önceki zamanda bulunan hızlar kullanılmıştır.

Çözümler, ϕ=4,5° ; 45°; 90°; 135° ve 179.99° de her biri için t=0.01; 0.07; 0.17; 0.27 ve 0.35 boyutsuz zamanları için hız profilleri olarak Şekil 1-5 de gösterilmiştir. $\pi/40$ olan $\Delta\theta$ adımı, son ϕ istasyonunda pratik nedenlerden dolayı $\Delta\theta=\pi/40.1$ olarak alınmıştır.

Problemde Δt boyutsuz zaman aralığı, $\Delta t=0.01$ olarak seçilmiştir. Şekillerde görüleceği gibi değişik θ adımlarında hız profilleri zaman ilerledikçe genişlemekte ve sınır tabaka kalınlığı arttığından, kenar hızına erişmek için yüzeye dik yönde daha çok j noktası gerekmektedir.

$\phi=4,5°$ ve $\phi=45°$ de (Şekil 1 ve 2) hemen hemen tüm zamanlarda, uygun basınç gradyanından dolayı sınır tabaka kalınlığı çak fazla artmamakta ve hız profillerinde bir büküm noktası oluşmamaktadır.

$\phi=90°$ de (Şekil 3) hız profilleri t=0.01 ve t=0.07 zamanları için istenen bir karakterde görülmekte, ancak zaman arttıkça ve en son hesapların yapıldığı t=0.35 boyutsuz zamanında henüz bir büküm noktası oluşmamış olmakla birlikte artan sınır tabaka kalınlığından dolayı oldukça açılmıştır.

$\phi=135°$ de (Şekil 4) ve $\phi=179.99°$ de (Şekil 5) ise $\partial p/\partial\theta$ basınç gradyanı, bu θ istasyonlarında artan karakterde olmasına karşın t=0.01 ve t=0.07 zamanlarında, akımı pek etkilememiş görülmektedir. Bu adımlar için çizilen hız profillerinde ilk zamanlarda bir büküm noktası oluşmamakta, ancak zaman ilerledikçe artan karakterdeki basınç gradyanı akışkan taneciklerinin momentumunu azaltarak, akımı yavaşlatmakta ve sınır tabaka kalınlaşmaktadır. Böylece t=0.35 boyutsuz zamanında $\phi=135°$ için önce belirgin bir büküm noktası oluşmaktadır. Daha sonra $\phi=179.99°$ de ayrılma başlamaktadır.

t=0.35 ten sonraki ilk zaman adımında (t=0.36) $\phi=179.99°$de ters akım başlamış olarak karşımıza çıkmaktadır.

Hesaplar böylece t=0.35 boyutsuz zamanına dek yapılmış, bu zaman için $40*\theta$ adımında yani $\phi=179.99°$ de ayrılma görülmüştür. Bu zamandan sonra ters akım başlayacak ve akım yönüne ters yönde ilerlenecektir.

Bu safhada Cebeci/9/ da verilen sonuçları (Şekil 6 ve 7) gözden geçirmekte yarar olacaktır. Farklı t zamanları için Şekil 6'da değişik konumlar ile hız profilleri ve Şekil 7'de ise ϕ ile boyutsuz yer değiştirme kalınlıkları arasındaki ilişki belirtilmiştir.

$t = 0.35$ ten sonra akım yönüne ters olarak ilerleyen ayrılma noktası teorik olarak sonsuz zaman sonra, zamandan bağımsız ayrılma noktası değerine ulaşacaktır. Yani sonsuz zamanda $\phi = 105°$ de ayrılma olacaktır. Ancak bu sözü edilen yakınsama çok uzun zaman alacağı için sınır tabaka hesapları pratik değer taşımayacaktır. Özellikle Cebeci kendi yönteminde dairesel silindir için ayrılma noktasına $t = 1.4$ 'te ulaşacağını belirtmiştir. Gerçi Cebeci hız dağılımını $Ue=(1/\pi)\mathrm{Sin}\ \pi\phi$ şeklinde seçmiş fakat türettiği şekil ve tabloları bu çalışmada da belirtilen ölçeğe indirgeyerek karşılaştırmayı yapmıştır.

Bu çalışmada kullanılan yöntemin uygunluğunu ve yaklaşıklığını karşılaştırmak amacıyla, yüzey sürtünme katsayısı C_f nin dairesel silindir üzerindeki her ϕ değerine karşılık gelen değerleri bulunmuş ve Şekil 8'de gösterilmiştir. Burada, $\tau_w = \mu(\partial u/\partial y)_0$ olmak üzere $C_f = \tau_w/(\frac{1}{2}\rho U_\infty)$ şeklindedir./8/ Karşılaştırma için Cebeci'nin elde ettiği sonuçlar kullanılmıştır. Karşılaştırmalar, $t = 0.2$, $t = 0.5$, $t = 1.0$ $t = 1.25$ ve $t = 1.4$ zamanları için yapılmıştır.

İlk olarak $t = 0.2$ boyutsuz zamanında çizilen yüzey sürtünme katsayısı eğrisinde görüleceği üzere, basınç gradyanı artan karakterde olmayan bölgede iken, yaklaşık $\phi = 75°$ de yüzey sürtünmesi azalmaya başlamıştır. Zaman ilerledikçe de, yüzey sürtünmesinin azalmaya başladığı nokta silindirin önüne doğru kaymıştır.

Yukarıda yazılan C_f ifadesinde bulunan hız gradyanı $\partial u/\partial y$ hesaplanırken yüzeye dik yönde ilk iki noktanın teğetsel hız değerleri arasındaki farkın $\Delta r = 0.001$ değerine oranı olarak alınmıştır.

Sonuçta, $t = 1.4$ boyutsuz zamanına dek çizilen eğriler ile Cebeci' nin bulduğu eğriler arasında iyi bir uyum olduğu görülmüştür.

Diğer bir karşılaştırma Şekil 9'daki gibi t zamanı ile ϕ ayrılma n oktası arasında diyagram çizilerek yapılmıştır. Yine kullanılan yöntemin yüksek mertebede t zamanlarına doğru gidildikçe daha hassas olduğu kanaatine varılmıştır.

KAYNAKLAR

1- Tani, I., History of the Boundary Layer Theory,Ann.Rev. Fluid Mech., Vol.9,1977

2- Loitsianski,L.G., Laminare Grenzschichten, Akademie Verlag,1967

3- Cebeci,T.,Bradshaw, P.,Momentum Transfer in Boundary Layers Mc Graw Hill, 1977

4- Schlichting,H.,Grenzschicht-Theorie, Karslruhe,G.Braun, 1982

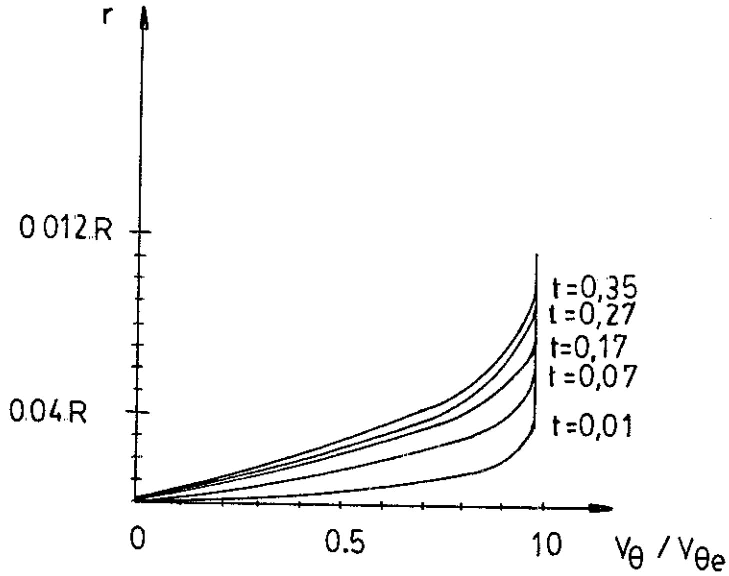
5- Hamming,R.W.,Numerical Methods for Scientists and Engineers, Mc Graw Hill, 1962

6- Kellner, H.B.,Numerical Methods in Boundary Layer Theory, Ann. Rev.Fluid Mech.,Vol.10,1978

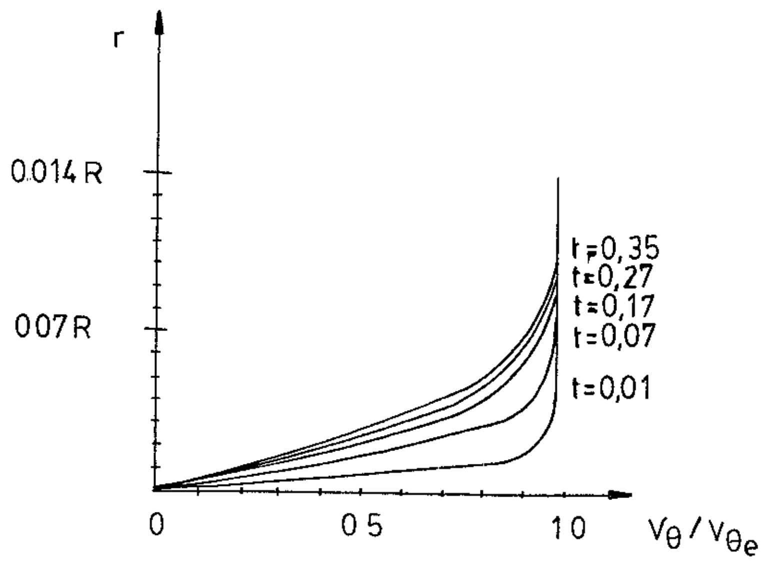
7- Conte,S.D., De Boor,C., Elementary Numerical Analysis in Algorithmic Approach, Mc Graw Hill, 1972

8- Bradshaw, P.,Cebeci,T.,Whitelaw,J.H., Engineering Calculation Methods for Turbulent Flows,Academic Press,1981

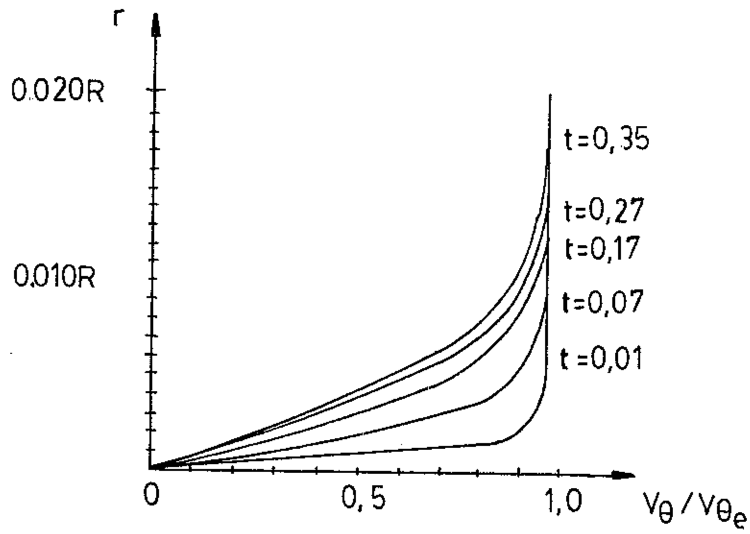
9- Cebeci,T.,The Laminar Boundary Layer on a Circular Cylinder started impulsively from Rest, Journal of Comp. Physic, Vol.31. 1979



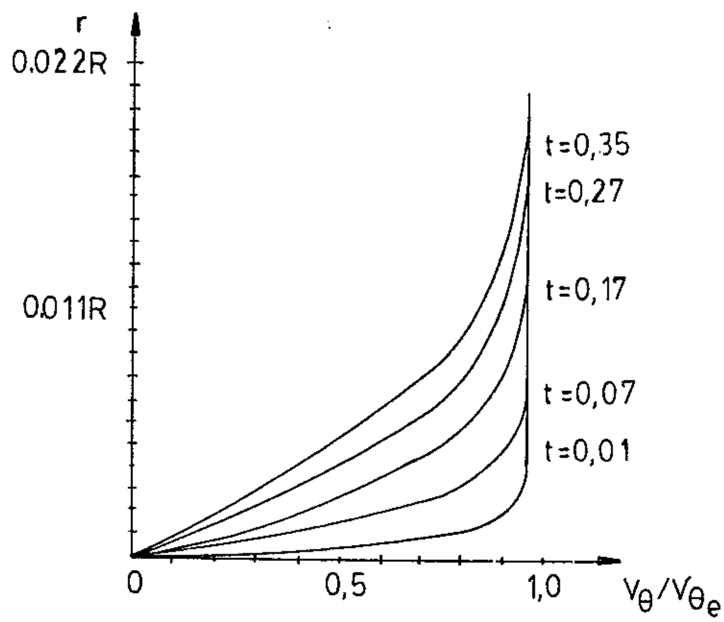
Şekil 1 : ϕ=4,5° de hız profilleri



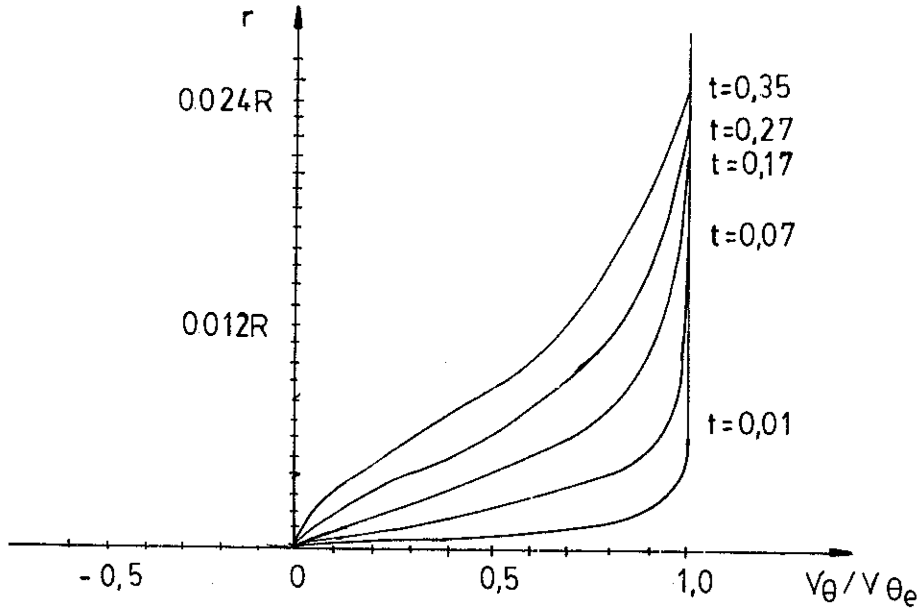
Şekil 2: ϕ=45° de hız profilleri



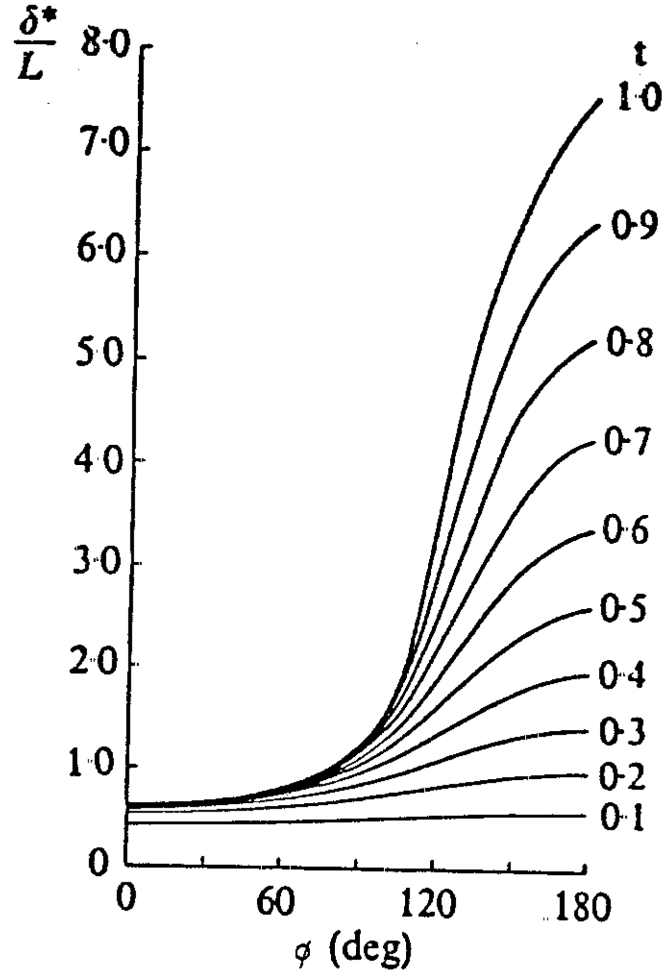
Şekil 3: $\varnothing = 90^o$ deki hız profilleri



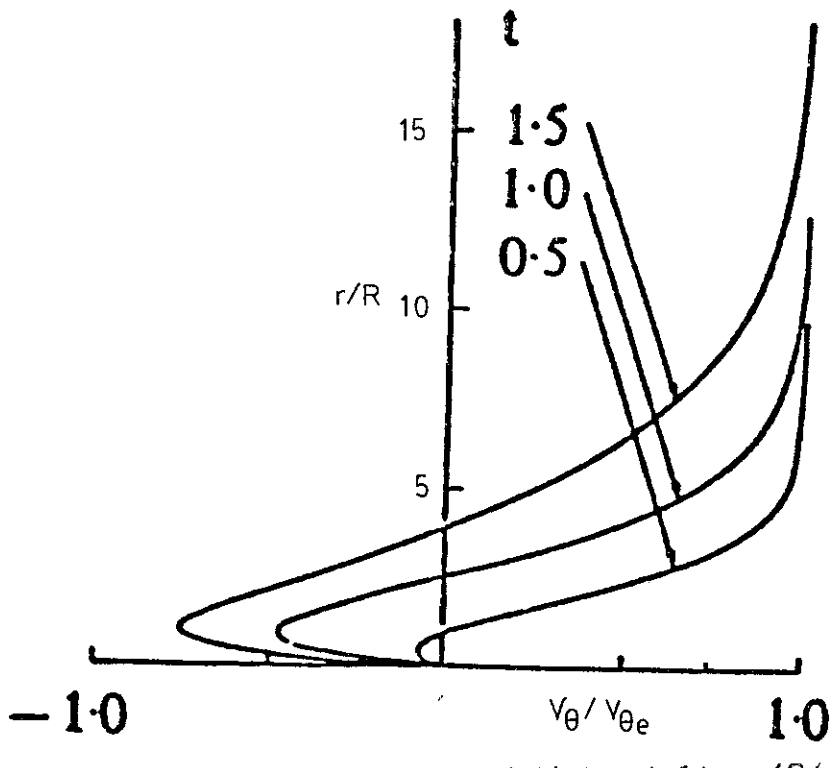
Şekil 4: $\varnothing = 135^o$ deki hız profilleri



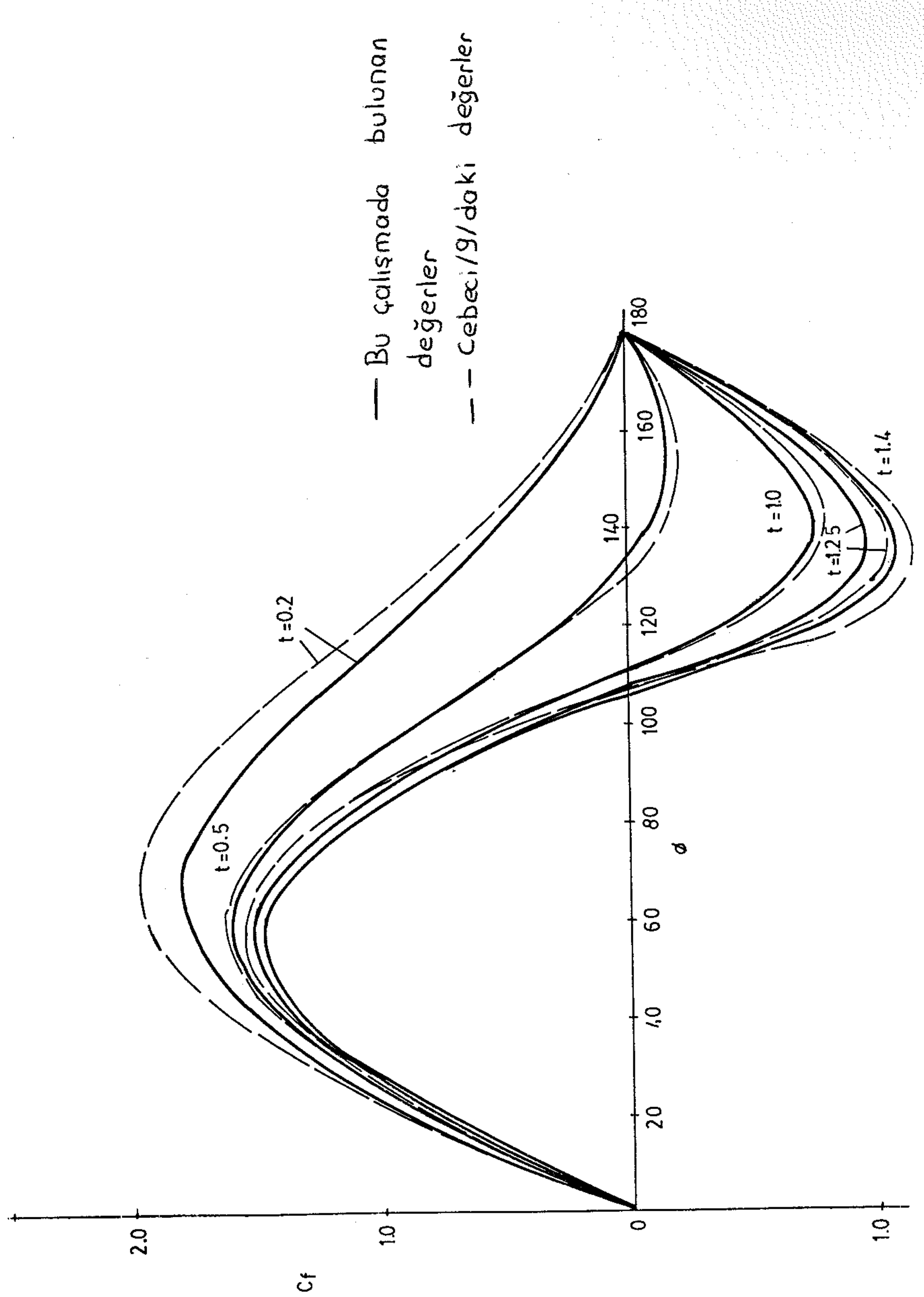
Şekil 5: σ=179,99° deki hız profilleri



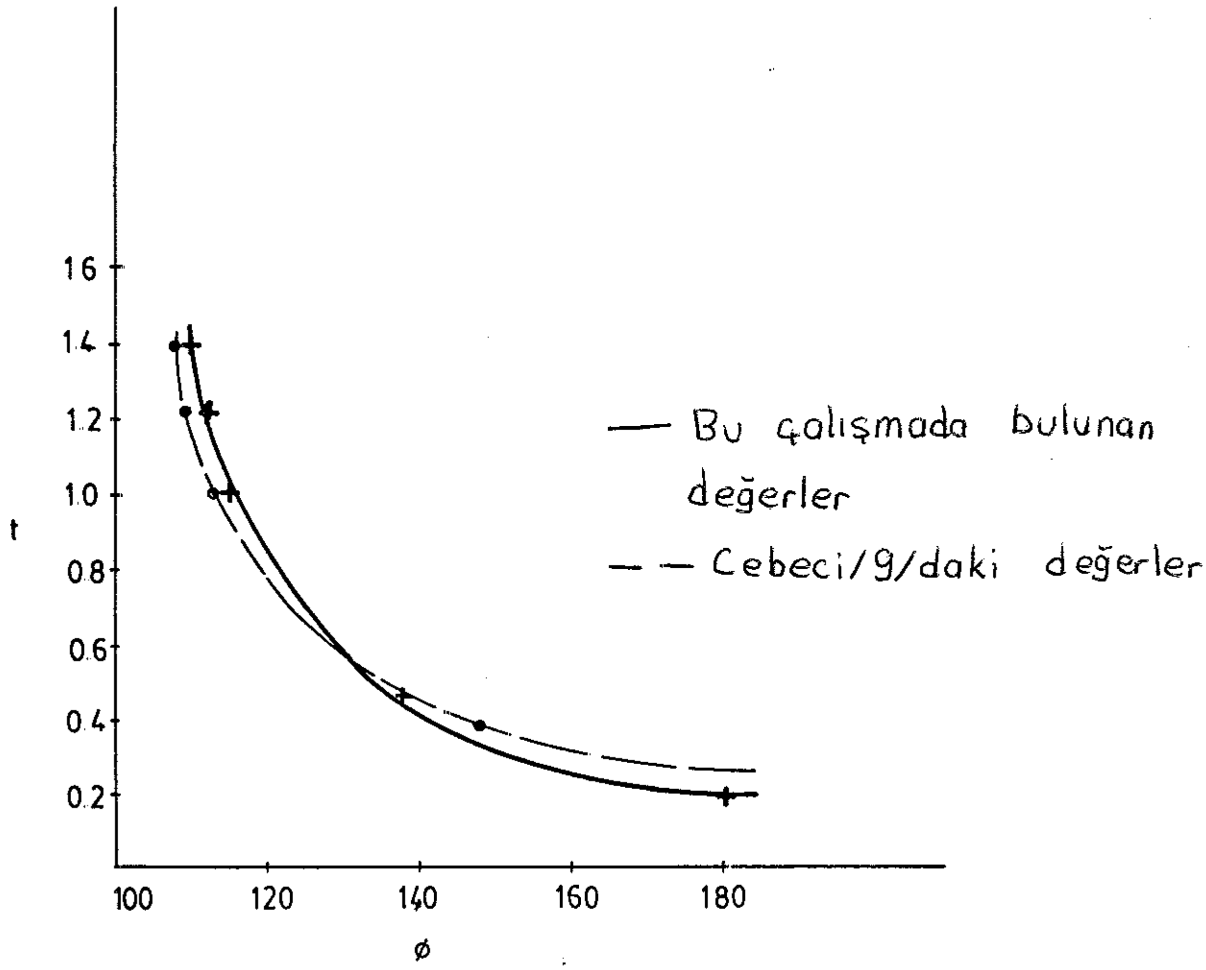
Şekil 7:Yerdeğistirme kalınlığı değisimi /8/



Şekil 6:Durma noktasındaki hız dağılımı /8/



Şekil 8: C_f ile ø arasındaki değisim



Şekil 9 : Ayrılma zamanının ø ile değişimi

```
CLS
CLEAR
OPEN "ARIF.DAT" FOR OUTPUT AS #2
CLOSE #2
OPEN "ARIF.DAT" FOR APPEND AS #2
PRINT #2, " ZAMANA BAGLI, DAIRESEL SILINDIR PROBLEMI ICIN  QBASIC PROGRAMI
PRINT #2, ""
DIM A(25), B(25), C(25), D(25), U(41, 25), V(75, 50)
DIM R(41, 25), Q(41, 25), K(41)
ART = 2
RE = 20000
PI = 180
DON:
DTA = PI / 40
DTR = .001
DTT = .01
N = 5
IF ART >= 5 THEN N = 6
IF ART >= 7 THEN N = 7
IF ART >= 10 THEN N = 8
IF ART >= 15 THEN N = 9
IF ART >= 20 THEN N = 10
IF ART >= 24 THEN N = 11
IF ART >= 28 THEN N = 12
IF ART >= 31 THEN N = 13
IF ART >= 34 THEN N = 14
PRINT ART
IF ART = 35 THEN GOTO BITIR
FOR I = 2 TO 41
IF I = 41 THEN DTA = PI / 40.1
PHI = (DTA * (I - 1))
K(I) = 2 * SIN(PHI * PI / 180)
FOR J = 2 TO 25
IF ART = 2 THEN U(I, J) = 2 * SIN(PHI * PI / 180)
R(I, 1) = 1
R(I, J) = R(I, J - 1) + DTR
Q(I, J) = RE * R(I, J) * DTR * DTR
NEXT J
IF I = 6 THEN N = N + 1
IF I = 10 THEN N = N + 1
IF I = 16 THEN N = N + 1
IF I = 18 THEN N = N + 1
IF I = 19 THEN N = N + 1
IF I = 20 THEN N = N + 1
IF I = 21 THEN N = N + 1
IF I = 22 THEN N = N + 1
IF I = 24 THEN N = N + 1
IF I = 28 THEN N = N + 1
REM MATRIS KATSAYILARININ HESAPLANMASI
FOR J = 2 TO N - 1
A(J) = -(V(I, J) * R(I, J - 1) / (R(I, J) * 2 * DTR)) - (R(I, J) / Q(I, J))
B(J) = 1 / DTT + (U(I, J) / (R(I, J) * DTA)) + ((R(I, J + 1) + R(I, J)) / Q(I, J))
C(J) = (V(I, J) * R(I, J + 1) / (R(I, J) * 2 * DTR)) - (R(I, J + 1) / Q(I, J))
D(J) = (U(I, J) / DTT) + (U(I, J) * U(I - 1, J) / (R(I, J) * DTA))
+ (4 * SIN(PHI * PI / 180) * COS(PHI * PI / 180) / R(I, J)) - (U(I, J) /
(RE * R(I, J) * R(I, J)))
```

```
D(N - 1) = D(N - 1) - (C(N - 1) * K(I))
D(N) = K(I)
NEXT J
GOSUB 500
PRINT #2, "┌──────────────────┬──────────────────────┐"
PRINT #2, USING "| I = ### IÇIN ÇOZUM | ZAMAN - ADIM  = ###  |"; I - 1; ART
PRINT #2, "└──────────────────┴──────────────────────┘"
PRINT #2, "┌────┬──────────────┐"
PRINT #2, "| J  |   V THETA    |"
PRINT #2, "├────┼──────────────┤"
FOR J = 2 TO N
PRINT #2, USING "| ### |  ###.#######     |"; J, D(J)
U(I, J) = D(J)
NEXT J
PRINT #2, "└────┴──────────────┘"
IF I >= 3 THEN GOSUB 700
NEXT I
ART = ART + 1
GOTO DON
BITIR:
CLOSE #2
END
500 REM MATRIS SISTEMININ ALT PROGRAMI
FOR J = 3 TO N - 1
RTO = -A(J) / B(J - 1)
B(J) = B(J) + RTO * C(J - 1)
D(J) = D(J) + RTO * D(J - 1)
NEXT J
D(N - 1) = D(N - 1) / B(N - 1)
J = N - 1
FOR P = 3 TO N - 1
J = J - 1
D(J) = (D(J) - C(J) * D(J + 1)) / B(J)
NEXT P
RETURN
700 REM RADYAL HIZ ALT PROGRAMI
PRINT #2, ""
PRINT #2, "┌────┬──────────────┐"
PRINT #2, "| J  |   V RADIAL   |"
PRINT #2, "├────┼──────────────┤"
FOR J = 2 TO N
V(I, J) = ((R(I, J - 1) * V(I, J - 1) / DTR) - ((U(I, J - 1) + U(I, J)
- U(I - 1, J - 1) - U(I - 1, J)) / (2 * DTA))) + (DTR / R(I, J))
PRINT #2, USING "| ### |  ###.#######     |"; J, V(I, J)
NEXT J
PRINT #2, "└────┴──────────────┘"
RETURN
```

ÖZGEÇMİŞ

18.07.1967 : Isparta'da doğum

1981 - 1984: Isparta Endüstri Meslek Lisesi'nde lise öğrenimi

1984 - 1988: Akdeniz Üniversitesi, Isparta Mühendislik Fakültesi Makina Bölümü'nde lisans öğrenimi

1989 - 1991: Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimi