T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE LUCAS DİZİLERİ

Abdurrahman ÜNAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE LUCAS DİZİLERİ

Abdurrahman ÜNAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 19 / 06 / 2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mehmet CENKCİ .... Mehmet Ali

Prof. Dr. İlham ALİYEV ....

Doç. Dr. Sinem SEZER .... Sezer

ÖZET

HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE LUCAS DİZİLERİ

Abdurrahman ÜNAL

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet CENKCİ

Haziran 2013, 28 sayfa

Bu çalışmada Fibonacci ve benzer sayı dizilerinin genel hali olan Lucas dizileri Gauss hipergeometrik fonksiyonu cinsinden ifade edilmiştir. Lucas dizileri için verilen bu bağıntı ile Gauss hipergeometrik fonksiyonunun sağladığı bazı doğrusal ve karesel dönüşümler kullanılarak Lucas dizileri için sonlu toplam ve sonsuz seri gösterimleri verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Hipergeometrik fonksiyonlar, Lucas dizileri.

JÜRİ: Doç. Dr. Mehmet CENKCİ (Danışman)

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Doç. Dr. Sinem SEZER

ABSTRACT

HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS AND LUCAS SEQUENCES

Abdurrahman ÜNAL

M.S. Thesis in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

June 2013, 28 pages

A direct connection between Lucas sequences and Gauss hypergeometric function is exploited. Using several linear and quadratic transformations of Gauss hypergeometric function this connection leads plenty of finite sums and infinite series representations for Lucas sequences.

KEYWORDS: Hypergeometric functions, Lucas sequences.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Mehmet CENKCİ (Supervisor)
Prof. Dr. İlham ALİYEV
Assoc. Prof. Dr. Sinem SEZER

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taramaları ve Bulgular olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Bu çalışmanın temel kavramları olan Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile Lucas dizileri Kuramsal Bilgiler ve Kaynak Taramaları bölümünde tanıtılmış ve bunların genel özellikleri ile özel durumları verilmiştir.

Bulgular bölümü üç ana başlık altında toplanmıştır. İlk olarak Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile Lucas dizileri arasında doğrudan bir bağıntı verilmiştir. İkinci olarak Gauss hipergemetrik fonksiyonunun sağladığı doğrusal ve karesel dönüşümler ile Lucas dizilerinin Gauss hipergeometrik fonksiyonu cinsinden ifadeleri ele alınmıştır. Son olarak Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile Lucas dizileri arasındaki bağıntılar kombinatorik toplamlar ve sonsuz seriler şeklinde ifade edilmiştir.

Bu tez çalışmasının sayılar teorisi ile özel fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi veren güzel bir örnek olacağı, verilen sonuçların farklı sayı dizilerine uygulanabileceği inancındayız.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Doç. Dr. Mehmet CENKCİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Teorik ve uygulamalı matematiğin hemen her dalında önemli bir araç olarak kullanılan hipergeometrik fonksiyonlar Chebyshev polinomları gibi birçok özel fonksiyonu kapsamaktadır. Chebyshev polinomları ve Fibonacci sayıları ile ilgili olan polinom ve sayı dizileri arasında iyi bilinen bağıntılar vardır. Fibonacci sayıları ile hipergeometrik fonksiyonlar arasında doğrudan ortaya çıkan ilişkiler 2000 yılında Dilcher (Dilcher 2000) tarafından verilmiştir.

Fibonacci sayıları dizisi gibi ikinci mertebeden doğrusal indirgeme formülüne sahip olan dizilerin bir çoğu Eduoard Lucas tarafından tanımlanan Lucas dizilerinin özel halidir. Bu tez çalışmasında Gauss hipergeometrik fonksiyonu ve Gauss hipergeometrik fonksiyonunun Lucas dizileri ile bağlantılı olan özellikleri verilmiştir. Bu özellikler ile Lucas dizileri için binom katsayılarını içeren çok miktarda sonlu toplam ve sonsuz seri gösterimleri elde edilmiştir. Elde edilen bağıntılar Fibonacci ve ilgili sayılar ile hipergeometrik fonksiyonlar arasındaki ilişkilerin genel halidir. Kısalık ve sadelik açısından elde edilen sonuçların Fibonacci ve Lucas sayıları gibi özel sayı dizilerindeki karşılıkları verilmemiştir. Ayrıca, Gauss hipergeometrik fonksiyonunun sağladığı ve diğer sonuçlarla kıyaslamaya olanak veren dönüşümleri kullanılmış, dönüşüm ile elde edilen formüllerin dönüşümleri ele alınmamıştır.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Gamma ve Faktöriyel Fonksiyonları

Matematikte elementer olmayan fonksiyonların en önemlilerinden biri gamma fonksiyonudur. Γ ile gösterilen gamma fonksiyonu hesaplamalarda ve analizde yer alan bir çok bağıntıda sıkça ortaya çıkmaktadır. Analiz, karmaşık analiz, olasılık teorisi, diferansiyel denklemler, analitik sayılar teorisi, istatistik, sayısal analiz gibi matematiğin farklı alanlarında ortaya çıkan gamma fonksiyonunun bu kadar yaygın olmasının nedenlerinden birisi basit yapısal özelliğidir. Çünkü, $\frac{1}{\Gamma(z)}$ fonksiyonu sıfırları $z = 0, -1, -2, \ldots$ olan en basit tam fonksiyondur.

Gamma fonksiyonunun birbirlerine denk olan farklı tanımları vardır. Bunlardan biri Weierstrass tarafından sonsuz çarpım ile verilen

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}\right] \tag{2.1}$$

eşitliğidir. Burada γ,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) \tag{2.2}$$

olarak tanımlanan Euler-Mascheroni sabitidir. (2.1) ile verilen sonsuz çarpım her sonlu z değeri için mutlak yakınsaktır. Ayrıca, karşılık gelen logaritma serisi kullanılarak kolaylıkla gösterilebileceği gibi bu çarpım z-düzlemindeki herhangi bir kapalı bölgede düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla, (2.1) eşitliğinin sağ tarafındaki sonsuz çarpım her sonlu z için bir analitik fonksiyon belirler. Bu çarpımın sıfırları basit sıfırlardır ve $z = 0$ ile her negatif tam sayıda ortaya çıkar. Bu gözlemler ile aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

(i) $\Gamma(z)$ fonksiyonu z değişkeninin pozitif olmayan tam sayı ve sonsuz değerleri hariç analitiktir.

(ii) $\Gamma(z)$ fonksiyonunun $z = 0, -1, -2, \ldots$ olan her pozitif olmayan tam sayı değerlerinde basit kutbu vardır.

(iii) $\Gamma(z)$ fonksiyonunun $z = \infty$ noktasında esas tekil noktası vardır.

(iv) $\frac{1}{\Gamma(z)}$ fonksiyonunun kutupları olmadığından $\Gamma(z)$ fonksiyonu hiçbir zaman sıfır değildir.

Gamma fonksiyonunun diğer bir tanımı Euler tarafından verilen $\mathrm{Re}(z) > 0$ için tanımlı

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

integral formülüdür. $t = 0$ noktasının komşuluğunda $t^{\mathrm{Re}(z)-1}$ fonksiyonu integrallenebilir olduğundan ve integrantın üstel azalan terimi büyük t değerleri için yakınsamayı garanti ettiğinden (2.3) ile verilen integral $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ özelliğinde olan her z için yakınsaktır. Bu integral, $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ olmayan z değerleri için mutlak yakınsak olmadığından tüm karmaşık düzlemde tanımlı ve $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ yarı-düzleminde $\Gamma\,(z)$ fonksiyonuna eşit olan bir meramorfik fonksiyonun var olduğu gösterilebilir (Stein ve Shakarchi 2003, 6. Bölüm, Teorem 1.3). Bu fonksiyon $\Gamma\,(z)$ fonksiyonunun analitik devamıdır ve yine Γ ile gösterilir.

Gamma fonksiyonun temel özelliklerinden biri sağladığı fonksiyonel eşitliktir.

Teorem 2.1 $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ *ise*

$$\Gamma\,(z+1) = z\Gamma\,(z) \tag{2.4}$$

dir. Dolayısıyla, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *için*

$$\Gamma\,(n+1) = n! \tag{2.5}$$

dir.

Kanıt. Kısmi integrasyon ile

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^z \mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = -\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} t^z \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + z\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

bulunur. $\varepsilon \to 0$ için (2.4) eşitliği elde edilir. Çünkü, sol tarafta $t \to 0$ veya $t \to \infty$ için $t^z \mathrm{e}^{-t} \to 0$ dır. (2.5) eşitliğini bulmak için $\Gamma\,(1)$ değerini hesaplamak yeterlidir.

$$\Gamma\,(1) = \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1$$

olduğundan (2.5) bağıntısı (2.4) eşitliğinin ardışık uygulanması sonucu elde edilir. ■

Gamma fonksiyonunun üçüncü bir tanımı Weierstrass tanımından elde edilen Euler çarpımıdır. (2.1) eşitliğinden

$$z\Gamma\,(z) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma z}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}\right]} = \mathrm{e}^{-\gamma z}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\mathrm{e}^{\frac{z}{k}}\right]$$

elde edilir. (2.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log\,(n+1)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\mathrm{e}^{-\gamma z}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{k+1}{k}\right)^{z}\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}\right]$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$z\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\mathrm{e}^{\frac{z}{k}}\right]$$

veya denk olarak

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right] \tag{2.6}$$

Euler çarpım formülü elde edilir.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\right] &= \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{z+k}\frac{(k+1)^{z}}{k^{z}}\right]\\ &= \frac{n!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\frac{2^{z}}{1^{z}}\frac{3^{z}}{2^{z}}\frac{4^{z}}{3^{z}}\cdots\frac{(n+1)^{z}}{n^{z}}\\ &= \frac{n^{z}(n-1)!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\end{aligned}$$

olduğundan (2.6) gereği

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{z}(n-1)!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} \tag{2.7}$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{z}}{n^{z}}=1$$

olduğundan (2.7) bağıntısı denk olarak

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{z}n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \tag{2.8}$$

şeklinde yazılabilir.

Kanıtı birçok standart kaynakta (bakınız Rainville 1960, Bölüm 2.17, Stein ve Shakarchi 2003, 6. Bölüm, Teorem 1.4) yer alan aşağıdaki bağıntı $\Gamma(z)$ fonksiyonunun $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}$ doğrusuna göre simetrik olduğunu ifade eder:

Teorem 2.2 *Her $z\in\mathbb{C}$ için*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z} \tag{2.9}$$

dir.

(2.9) eşitliğinde özel olarak $z=\frac{1}{2}$ yazılırsa

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{2.10}$$

ve $z=\frac{3}{2}$ yazılırsa (2.5) gereği

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

olduğundan

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$$

elde edilir.

Bu tez çalışması boyunca herhangi bir $a\neq 0$ karmaşık sayısı için $(a)_k$ ile gösterilen, $(a)_0=1$ ve $k\geqslant 1$ olmak üzere

$$(a)_k=a\,(a+1)\cdots(a+k-1) \tag{2.11}$$

olarak tanımlanan faktöriyel fonksiyonu kullanılacaktır. $k!=(1)_k$ olduğundan faktöriyel fonksiyonu bilinen faktöriyel tanımının herhangi bir karmaşık sayıya genişlemesidir.

Faktöriyel fonksiyonunun özellikleri tanımı kullanılarak kolaylıkla gösterilebilir.

Önteorem 2.3 $(a)_{2k}=2^{2k}\left(\frac{a}{2}\right)_k\left(\frac{a+1}{2}\right)_k$ *dır.*

Kanıt. $(a)_{2k}$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}
(a)_{2k} &= a\,(a+1)\,(a+2)\,(a+3)\cdots(a+2k-1)\\
&= 2^{2k}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{a+2}{2}\right)\left(\frac{a+3}{2}\right)\cdots\left(\frac{a+2k-1}{2}\right)\\
&= 2^{2k}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{a}{2}+k-1\right)\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{a+3}{2}\right)\cdots\left(\frac{a+2k-1}{2}\right)\\
&= 2^{2k}\left(\frac{a}{2}\right)\cdots\left(\frac{a}{2}+k-1\right)\left(\frac{a+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{a+1}{2}+k-1\right)\\
&= 2^{2k}\left(\frac{a}{2}\right)_k\left(\frac{a+1}{2}\right)_k
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Faktöriyel fonksiyonunun bu tez çalışması boyunca sıklıkla kullanılan

$$\left(\frac{1}{2}\right)_k=\frac{(2k)!}{4^k k!},\ \left(\frac{3}{2}\right)_k=\frac{(2k+1)!}{4^k k!}$$

özel değerleri tanımından kolaylıkla elde edilebilir.

Önteorem 2.4 *n negatif olmayan bir tam sayı ve $0 \leqslant k \leqslant n$ olsun.*

(1) $(a)_{n-k} = \dfrac{(-1)^k (a)_n}{(1-a-n)_k}$ *dır.*

(2) $(-n)_k = \dfrac{(-1)^k n!}{(n-k)!}$ *dir.*

(3) $(1-n)_k = \dfrac{(-1)^k (n-1)!}{(n-1-k)!}$ *dir.*

(4) $(1+n)_k = \dfrac{(n+k)!}{k!}$ *dir.*

(5) $\left(\dfrac{1-n}{2}\right)_k \left(\dfrac{2-n}{2}\right)_k = \dfrac{(n-1)!}{4^k (n-1-2k)!}$ *dir.*

Kanıt. (1) Tanımdan

$$\begin{aligned}
(a)_{n-k} &= a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-k-1) \\
&= \frac{a(a+1)\cdots(a+n-k-1)(a+n-k)(a+n-k+1)\cdots(a+n-1)}{(a+n-k)(a+n-k+1)\cdots(a+n-2)(a+n-1)} \\
&= \frac{(a)_n}{(-1)^k(1-a-n)(2-a-n)\cdots(1-a-n+k-1)} = \frac{(-1)^k (a)_n}{(1-a-n)_k}
\end{aligned}$$

dir.

(2) (1) ifadesinde $a = 1$ alınırsa

$$(1)_{n-k} = \frac{(-1)^k (1)_n}{(-n)_k}$$

bulunur. $(1)_n = n!$ olduğundan

$$(-n)_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}$$

elde edilir.

(3) (2) ifadesinde n yerine $n-1$ yazılırsa istenilen elde edilir.

(4) Tanımdan

$$\begin{aligned}
(1+n)_k &= (1+n)(1+n+1)\cdots(1+n+k-1) \\
&= (n+k)(n+k-1)\cdots(n+2)(n+1) = \frac{(n+k)!}{k!}
\end{aligned}$$

dir.

(5) Önteorem 2.3'de $a = 1-n$ alınırsa

$$(1-n)_{2k} = 2^{2k}\left(\frac{1-n}{2}\right)_k \left(\frac{2-n}{2}\right)_k$$

bulunur. (3) gereği

$$(1-n)_{2k} = \frac{(-1)^{2k}(n-1)!}{(n-1-2k)!}$$

olduğundan

$$\left(\frac{1-n}{2}\right)_k \left(\frac{2-n}{2}\right)_k = \frac{(n-1)!}{4^k(n-1-2k)!}$$

elde edilir. ■

Gamma fonksiyonu ile faktöriyel fonksiyonu arasında yakın bir ilişki vardır.

Teorem 2.5 *a sıfır veya negatif tam sayı değilse n bir pozitif tam sayı olmak üzere*

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n)} \tag{2.12}$$

dir.

Kanıt. Teorem 2.1 gereği $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ olduğundan n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} \Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1) \\ &= (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2) \\ &= \cdots \\ &= (a+n-1)(a+n-2)\cdots a\Gamma(a) \end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 2.5'in bir uygulaması olarak ileride kullanılacak olan $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)$ ile $\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)$ değerleri bulunabilir. Gerçekten, Teorem 2.5'de $a = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n)!}{4^n n!}$$

olduğundan

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)_n \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi} \tag{2.13}$$

bulunur. Diğer taraftan Teorem 2.2 ve (2.13) eşitliğinden

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \Gamma\left(1-\left(\frac{1}{2}-n\right)\right) = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\sin\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)} = \frac{\pi}{\frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}\sin\frac{2n+1}{2}\pi}$$

olduğundan

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi} \tag{2.14}$$

elde edilir.

Faktöriyel fonksiyonu kullanılarak (2.7) eşitliği olan

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z (n-1)!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}$$

bağıntısı

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z (n-1)!}{(z)_n} \tag{2.15}$$

olarak yazılabilir. Son eşitlik Teorem 2.5 ile aşağıdaki sonucu verir:

Önteorem 2.6 *n bir pozitif tam sayı ise negatif tam sayı olmayan z için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^z (n-1)!}{\Gamma(z+n)} = 1$$

dir.

Bu bölümde son olarak ilerideki işlemlerde kullanılacak olan gamma fonksiyonu için Legendre Çarpım Formülü verilecektir.

Teorem 2.7 *Gamma fonksiyonu*

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \tag{2.16}$$

Legendre Çarpım Formülünü sağlar.

Kanıt. Önteorem 2.3'de $a = 2z$ alınırsa

$$(2z)_{2k} = 2^{2k}(z)_k\left(z+\frac{1}{2}\right)_k$$

elde edilir. Teorem 2.5 ile bu eşitlik

$$\frac{\Gamma(2z+2k)}{\Gamma(2z)} = \frac{2^{2k}\Gamma(z+k)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

veya denk olarak

$$\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(2z+2k)}{2^{2k}\Gamma(z+k)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}+k\right)}$$

haline gelir. Son eşitliğin sol tarafı k değişkeninden bağımsız olduğundan

$$\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma(2z+2k)}{2^{2k}\Gamma(z+k)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}+k\right)}$$

yazılabilir. Son bağıntı

$$\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma(2z+2k)}{(2k)^{2z}(2k-1)!} \frac{k^z(k-1)!}{\Gamma(z+k)} \frac{k^{z+\frac{1}{2}}(k-1)!}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}+k\right)} \frac{2^{2z}(2k-1)!}{2^{2k}k^{\frac{1}{2}}\left[(k-1)!\right]^2}$$

olacak şekilde düzenlenirse Önteorem 2.6'dan

$$\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{2z}(2k-1)!}{2^{2k}k^{\frac{1}{2}}\left[(k-1)!\right]^2}$$

bulunur. Dolayısıyla, C bir sabit olmak üzere

$$\frac{\Gamma(2z)}{2^{2z}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} = C$$

dir. C sabitini belirlemek için $z = \frac{1}{2}$ yazılırsa

$$C = \frac{\Gamma(1)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

elde edilir. Bu ise kanıtı tamamlar. ■

2.2. Hipergeometrik Fonksiyonlar

Matematikte ve matematiksel fizikte en yaygın olan özel fonksiyonların hemen hepsi

$$_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} \tag{2.17}$$

ile tanımlanan Gauss hipergeometrik serisinin özel halleridir. Burada $(a)_k$, Bölüm 2.1'de tanımlanan faktöriyel fonksiyonudur. (2.17) ile verilen seri a veya b sayısı $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $-n$ sayısına eşit ve $n < m$ olmadıkça $m = 0, 1, 2, \ldots$ için $c = -m$ olduğunda tanımlı değildir. Ayrıca bu seri a veya b sayısı $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $-n$ sayısına eşit olduğunda z değişkeninin derecesi n olan bir polinomu haline gelir. a, b, c sayılarının diğer tüm değerleri için (2.17) serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 dir. Gerçekten, Oran Testi ve (2.11) bağıntısından

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(a)_{k+1}(b)_{k+1} z^{k+1}}{(c)_{k+1}(k+1)!} \frac{(c)_k k!}{(a)_k (b)_k z^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(a+k)(b+k)z}{(c+k)(k+1)} \right| = |z| < 1$$

elde edilir. Yakınsaklık bölgesinin $|z| = 1$ sınırında (2.17) serisinin mutlak yakınsaklığı için yeterli bir koşul $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$ olmasıdır. Gerçekten,

$$\delta = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$$

ve $|z| = 1$ olsun.Yakınsak olduğu bilinen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta}}$$

serisi ile

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}\right|$$

serisi için Limit Karşılaştırma Testi ve (2.15) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^{1+\delta}\,(a)_k\,(b)_k}{(c)_k\,k!}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(a)_k}{k^a\,(k-1)!}\frac{(b)_k}{k^b\,(k-1)!}\frac{k^c\,(k-1)!}{(c)_k}\frac{k^{1+\delta}\,(k-1)!}{k^{c-a-b}k!}\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Gamma(a)}\frac{1}{\Gamma(b)}\frac{\Gamma(c)}{1}\right|\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k^{c-a-b-\delta}}\right|\end{aligned}$$

bulunur. $\operatorname{Re}(c-a-b-\delta)=2\delta-\delta>0$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k^{c-a-b-\delta}}\right|=0$$

olur. Dolayısıyla, (2.17) serisi $|z|=1$ olduğunda $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$ için mutlak yakınsaktır.

Bir karmaşık kuvvet serisi yakınsaklık bölgesinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğundan yakınsaklık bölgesinde bir analitik fonksiyon tanımlar. Bu yüzden, (2.17) serisi $|z|<1$ olduğunda (serinin tanımlı olduğu) her a,b,c karmaşık sayıları ve $|z|=1$ olduğunda $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$ için analitik bir

$${}_2F_1\,(a,b;c;z)$$

fonksiyonu temsil eder. Bu fonksiyona Gauss hipergeometrik fonksiyon denir ve basitçe

$$F\,(a,b;c;z)$$

ile gösterilir.

Hipergeometrik fonksiyonların birçok özelliği iyi bilinen Abramowitz ve Stegun 1964, Magnus ve diğerleri 1966, Erdélyi ve diğerleri 1953 kaynaklarında bulunabilir. Önemli özelliklerin birçoğunun kanıtları Rainville 1960 kaynağında yer almaktadır.

2.3. Fibonacci ve İlgili Sayılar

Orta çağ Avrupasının belki de en önemli matematikçisi Fibonacci ismiyle çalışmalar yapan Pisa'lı Leonardo'dur (1180-1250). Babasının mesleği nedeniyle Akdeniz Bölgesinde İspanya, Mısır, Suriye ve Yunanistan'a seyahat eden Fibonacci İtalya'ya dönüşte Latin Batı'ya İslam aritmetiğini ve cebirsel matematiksel uygulamalarını tanıtan meşhur "Liber Abaci" (Sayma Üzerine) başlıklı kitabını yayınlamıştır. Birçok başarısına rağmen Fibonacci, bu kitabında yer alan pozitif tam sayıların özel bir dizisini adıyla eşleştiren 19. yüzyıl matematikçilerinden Eduoard Lucas sayesinde tanınmıştır. Kitabındaki meşhur tavşan problemi ile bağlantılı olan tam sayıların

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ldots$$

dizisinin terimlerine Fibonacci sayıları ve bu diziye Fibonacci sayıları dizisi denir. Fibonacci sayıları doğada beklenmedik bir şekilde ortaya çıkar. Örneğin, zambak çiçeğinin 3, düğün çiçeğinin 5, kadife çiçeğinin 13, yıldız çiçeğinin 21 ve papatyanın 34, 55 veya 89 tane taç yaprağı vardır. Merkezden saat yönü ve saat yönünün aksi doğrultularda yayılan iki sarmaldan oluşan ayçiçeği tohumları saat yönünde olan sarmalda 34 ve saat yönünün aksi yönde olan sarmalda 55 tanedir. Büyük başlı ayçiçeklerde bu sayılar sırasıyla 55 ve 89 olmaktadır. Ayrıca, ananas meyvesinin ve köknar palamutunun kesitlerinde Fibonacci sayılarına rastlanmaktadır (Burton 2007).

F_n ile gösterilen Fibonacci sayıları dizisinin terimleri

$$\begin{aligned} 2 &= 1+1 \text{ veya } F_3 = F_2 + F_1 \\ 3 &= 2+1 \text{ veya } F_4 = F_3 + F_2 \\ 5 &= 3+2 \text{ veya } F_5 = F_4 + F_3 \\ 8 &= 5+3 \text{ veya } F_6 = F_5 + F_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

özelliğini sağlar. Dolayısıyla, Fibonacci sayıları dizisinin genel formülü

$$F_1 = F_2 = 1$$

ve $n \geqslant 3$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.18}$$

dir. Yani, Fibonacci sayıları dizisinin ikinci teriminden sonraki her terimi kendisinden hemen önceki iki terimin toplamıdır. Bu türde olan dizilere, yani her terimi önceki terimlerin doğrusal kombinasyonu şeklinde olan dizilere indirgemeli diziler denir. Fibonacci sayıları dizisi matematik tarihinde karşılaşılan ilk indirgemeli dizidir.

1843 yılında Fransız matematikçi Jacques-Philippe-Marie Binet, F_n Fibonacci sayısını indisi olan n tam sayısı cinsinden belirleyen

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{2.19}$$

bağıtısını vermiştir. Bu formüle Binet formülü denir. Binet formülü, $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olan

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

sayılarının kullanılması ile elde edilir. Gerçekten, α ile β sayıları $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olduğundan

$$\alpha^2 = \alpha + 1,\ \beta^2 = \beta + 1$$

dir. İlk eşitlik α^n ile ikinci eşitlik β^n ile çarpılırsa

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n,\ \beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$$

elde edilir. Buradan,

$$\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n - \beta^{n+1} - \beta^n$$

ve

$$\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

bulunur.

$$H_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

yazılırsa son bağıntı $n \geqslant 1$ için

$$H_{n+2} = H_{n+1} + H_n$$

haline gelir. Ayrıca,

$$\alpha + \beta = 1,\ \alpha - \beta = \sqrt{5},\ \alpha\beta = -1$$

olduğundan

$$H_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1,\ H_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1$$

bulunur. Dolayısıyla, $H_1, H_2, H_3, \ldots$ dizisi tam olarak Fibonacci sayıları dizisidir. Buradan, $n \geqslant 1$ için

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

elde edilir.

Fibonacci sayıları dizisinin sağladığı indirgeme bağıntısı ile farklı başlangıç değerler kullanılarak yeni sayı dizileri elde edilebilir. Bunlardan en meşhuru L_n ile gösterilen ve

$$L_1 = 1,\ L_2 = 3$$

ve $n \geqslant 3$ için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{2.20}$$

ile tanımlanan Lucas sayı dizileridir. Bu dizinin terimlerine Lucas sayıları denir. İlk birkaç Lucas sayısı

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \ldots$$

dir. Tümevarımla gösterilebileceği gibi Lucas sayıları dizisi ile Fibonacci sayıları dizisi arasında $n \geqslant 2$ için

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} \tag{2.21}$$

bağıntısı vardır. Gerçekten, $n = 2$ için

$$L_2 = 3 = F_3 + F_1 = 2 + 1$$

olduğundan ifade doğrudur. İfade n için doğru yani

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

olsun. $n + 1$ için (2.18) ve (2.19) bağıntılarından

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_n + L_{n-1} = F_{n+1} + F_{n-1} + F_n + F_{n-2} \\ &= F_{n+1} + F_n - F_{n-2} + F_n + F_{n+2} \\ &= F_{n+1} + F_n + F_n = F_{n+2} + F_n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise tümevarımı tamamlar.

(2.21) eşitliği ile Lucas sayıları dizisine karşılık gelen Binet formülü bulunabilir.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olmak üzere (2.21) ve (2.19) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n+1} + F_{n-1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^n \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right) - \beta^n \left(\frac{1}{\beta} + \beta\right)\right] \end{aligned}$$

dır.

$$\frac{1}{\alpha} + \alpha = \sqrt{5} = \alpha - \beta,\ \frac{1}{\beta} + \beta = -\alpha + \beta$$

olduğundan

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir.

2.4. Lucas Dizileri

Bölüm 2.3'de ele alınan Fibonacci sayıları dizisi ve Lucas sayıları dizisi bu bölümde ele alınacak olan Lucas dizilerinin özel halleridir.

P ile Q sıfırdan farklı tam sayılar olsun.

$$x^2 - Px + Q = 0 \qquad (2.22)$$

denkleminin diskriminantı

$$D = P^2 - 4Q$$

ve kökleri

$$\alpha, \beta = \frac{P \mp \sqrt{D}}{2} \tag{2.23}$$

dir. Buradan,

$$\alpha + \beta = P,\ \alpha\beta = Q,\ \alpha - \beta = \sqrt{D} \tag{2.24}$$

dir. D diskriminantının sıfırdan farklı olduğu varsayılacaktır.

n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere

$$U_n(P,Q) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},\ V_n(P,Q) = \alpha^n + \beta^n \tag{2.25}$$

sayı dizileri tanımlansın. Bu dizilere (P,Q) ikilisine bağlı Lucas dizileri denir (Ribenboim 2004). Bu dizilerin birçok özelliği dizilere ismini veren Eduoard Lucas zamanından önce bilinmesine rağmen bu dizilerin temel teorisi 1878 yılında Lucas tarafından verilmiştir. Bu çalışmasında Lucas bu dizilerin trigonometrik fonksiyonlar, sürekli kesirler, Euclid Algoritmasındaki bölme işlemi sayısı ve asallık testleri gibi birçok ilginç konu ile bağlantılarını ifade etmiştir.

(2.24) ve (2.25) bağıntılarından

$$U_0(P,Q) = 0,\ U_1(P,Q) = 1 \tag{2.26}$$

$$V_0(P,Q) = 2,\ V_1(P,Q) = P \tag{2.27}$$

ve her $n \geqslant 2$ için

$$U_n(P,Q) = PU_{n-1}(P,Q) - QU_{n-2}(P,Q) \tag{2.28}$$

$$V_n(P,Q) = PV_{n-1}(P,Q) - QV_{n-2}(P,Q) \tag{2.29}$$

elde edilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} U_n(P,Q) &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})(\alpha + \beta) - \beta\alpha^{n-1} + \alpha\beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\ &= (\alpha + \beta)\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} - \alpha\beta\frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\alpha - \beta} \\ &= PU_{n-1}(P,Q) - QU_{n-2}(P,Q) \end{aligned}$$

ile (2.28) ve

$$\begin{aligned} V_n(P,Q) &= \alpha^n + \beta^n = \left(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}\right)(\alpha + \beta) - \beta\alpha^{n-1} - \alpha\beta^{n-1} \\ &= (\alpha + \beta)\left(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}\right) - \alpha\beta\left(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}\right) \\ &= PV_{n-1}(P,Q) - QV_{n-2}(P,Q) \end{aligned}$$

ile (2.29) elde edilir. Dolayısıyla, $U_n(P,Q)$ ile $V_n(P,Q)$ dizileri indirgemeli dizilerdir. (2.22), (2.23) ve (2.25) bağıntılarından kolaylıkla görülebileceği gibi

$$U_n(1,-1) = F_n,\ V_n(1,-1) = L_n$$

dir. Ayrıca, $P = 3$, $Q = 2$ için karşılık gelen

$$U_n(3,2) = 2^n - 1,\ V_n(3,2) = 2^n + 1$$

sayı dizileri Fermat, $P = 2$, $Q = -1$ için karşılık gelen sayı dizileri de Pell tarafından incelenmiştir.

a ile b verilmiş tam sayılar, $a > b \geqslant 1$, $(a, b) = 1$ ve $n \geqslant 0$ olmak üzere $U_n(P, Q)$ (veya $V_n(P, Q)$) dizisi ile $\dfrac{a^n - b^n}{a - b}$ (veya $a^n + b^n$) dizisi arasında büyük bir benzerlik vardır. Bu dizilerden biri diğerinin özel halidir. Gerçekten, $(a + b, ab)$ çifti için $\alpha = a$, $\beta = b$ ve $D = (a - b)^2 \neq 0$ olduğundan

$$U_n(a + b, ab) = \frac{a^n - b^n}{a - b},\ V_n(a + b, ab) = a^n + b^n$$

dir. Bu ilişki $\dfrac{a^n - b^n}{a - b}$ ve $a^n + b^n$ şeklinde olan sayı dizilerinin sağladığı özelliklerin Lucas dizilerine genişletilme imkanını verir.

3. BULGULAR

3.1. Hipergeometrik Fonksiyonlar ve Lucas Dizileri

Fibonacci sayılarının Binet formülünden

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{3.1}$$

dir. Bu eşitlik $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olan

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

sayılarından elde edilir. Hipergeometrik fonksiyonların sağladığı

$$F\left(a, \frac{1}{2}+a; \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{1}{2z(1-2a)}\left[(1+z)^n - (1-z)^n\right] \tag{3.2}$$

eşitliğinde (Abramowitz ve Stegun 1964, (15.1.10)) $a = \dfrac{1-n}{2}$ ve $z = \sqrt{5}$ alarak Dilcher (Dilcher 2000)

$$F_n = \frac{n}{2^{n-1}}F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{2-n}{2}; \frac{3}{2}; 5\right) \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilmiştir. Bu bölümde (3.3) eşitliğinin benzeri $U_n(P,Q)$ Lucas dizileri için ifade edilecektir.

P ile Q sıfırdan farklı tam sayılar olmak üzere $x^2 - Px + Q = 0$ denklemi ele alınsın. Bu denklemin diskriminantı $D = P^2 - 4Q$ ve denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{P+\sqrt{D}}{2}, \beta = \frac{P-\sqrt{D}}{2}$$

dir. Bu kökler ile $D \neq 0$ olmak üzere $n \geqslant 0$ için

$$U_n(P,Q) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olarak tanımlanan diziye Lucas dizisi denir. Dolayısıyla,

$$U_n(P,Q) = \frac{1}{\sqrt{D}}\left[\left(\frac{P+\sqrt{D}}{2}\right)^n - \left(\frac{P-\sqrt{D}}{2}\right)^n\right] \tag{3.4}$$

dir. (3.4) bağıntısında $P = 1$, $Q = -1$ alınırsa (3.1) elde edilir. Hipergeometrik fonksiyonların sağladığı (3.2) bağıntısında

$$a = \frac{1-n}{2} \text{ ve } z = \frac{\sqrt{D}}{P}$$

alınırsa

$$U_n(P,Q) = \frac{nP^{n-1}}{2^{n-1}} F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{2-n}{2}; \frac{3}{2}; \frac{D}{P^2}\right) \tag{3.5}$$

elde edilir. $\dfrac{1-n}{2}$ ile $\dfrac{2-n}{2}$ sayılarından biri $n \geqslant 1$ için her zaman bir negatif tam sayı (veya sıfır) olduğundan (3.5) eşitliği aslında bir sonlu toplamdır ve yakınsaklık incelemelerinin yapılmasına gerek yoktur.

(3.5) eşitliği bir kombinatorik toplam olarak yazılabilir. Bunun için artan faktöriyellerin

$$\left(\frac{3}{2}\right)_k = \frac{(2k-1)!}{4^k k!} \tag{3.6}$$

$$\left(\frac{1-n}{2}\right)_k \left(\frac{2-n}{2}\right)_k = \frac{(n-1)!}{4^k (n-1-2k)!} \tag{3.7}$$

$$(1-n)_k = (-1)^k \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \tag{3.8}$$

$$(1+n)_k = \frac{(n+k)!}{n!} \tag{3.9}$$

eşitlikleri kullanılır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{2-n}{2}; \frac{3}{2}; \frac{D}{P^2}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1-n}{2}\right)_k \left(\frac{2-n}{2}\right)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k k!} \frac{D^k}{P^{2k}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k+1} \frac{D^k}{P^{2k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{[|\frac{n-1}{2}|]} \binom{n}{2k+1} \frac{D^k}{P^{2k}} \end{aligned}$$

olduğundan

$$U_n(P,Q) = \frac{P^{n-1}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{[|\frac{n-1}{2}|]} \binom{n}{2k+1} \frac{D^k}{P^{2k}} \tag{3.10}$$

elde edilir. Diğer kombinatorik toplamlar Bölüm 3.3'de ele alınacaktır.

(3.10) bağıntısı (3.4) eşitliğinin sağ tarafında Binom Formülü kullanılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak daha kolay (hipergeometrik fonksiyon kavramı kullanmadan) bir şekilde elde edilebilir. Bu tez çalışmasında verilen sonuçlardan bazıları (örneğin, (3.23) ve (3.24) bağıntıları) Binom Formülü ve indis değiştirme gibi basit tekniklerle elde edilebilmesine rağmen tez içerinin bütünlüğü bakımından verilen sonuçlar Gauss hipergeometrik fonksiyonu kullanılarak ifade edilmiştir.

3.2. Doğrusal ve Karesel Dönüşümler

Bu bölümde hipergeometrik fonksiyonlar için iyi bilinen doğrusal ve karesel dönüşümler kullanılarak (3.5) eşitliğinden çok sayıda gösterim elde edilecektir. Her bir durum için (3.10) şeklinde olan kombinatorik bağıntılar elde edilebilir. Bunlardan bazıları bir sonraki bölümde listelenecektir.

İlk olarak,

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) \tag{3.11}$$

ile

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{-b} F\left(b, c-a; c; \frac{z}{z-1}\right) \tag{3.12}$$

doğrusal dönüşüm formülleri ele alınacaktır (Abramowitz ve Stegun 1964, syf. 559). $|z| < 1$ ve $\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1$ için geçerli olan bu formüller $|z| < 1$ için

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z) \tag{3.13}$$

Euler formülünü verir (Rainville 1971, Teorem 21). Bu formüllerin kullanıldığı bazı durumlarda yakınsaklık ve formüllerin geçerlilik bölgeleri incelenmelidir. Bu inceleme özellikle (3.5) eşitliğinde yer alan $\frac{D}{P^2}$ değişkeninin 1 sayısından büyük olduğunda yapılmalıdır.

(3.11) bağıntısı (3.5) eşitliğine uygulanırsa

$$U_n(P,Q) = nQ^{\frac{n-1}{2}} F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{2-n}{2}; \frac{3}{2}; \frac{-D}{4Q}\right) \tag{3.14}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.12) bağıntısı (3.5) eşitliğine uygulanırsa

$$U_n(P,Q) = \frac{nP}{2} Q^{\frac{n-2}{2}} F\left(\frac{2-n}{2}, \frac{2+n}{2}; \frac{3}{2}; \frac{-D}{4Q}\right) \tag{3.15}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.13) bağıntısında $a = \frac{2-n}{2}, b = \frac{2+n}{2}, c = \frac{3}{2}$ ve $z = \frac{D}{P^2}$ alınırsa

$$F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{2-n}{2}; \frac{3}{2}; \frac{D}{P^2}\right) = \frac{2^{2n} Q^n}{P^{n+1}} F\left(\frac{2+n}{2}, \frac{1+n}{2}; \frac{3}{2}; \frac{D}{P^2}\right)$$

olduğundan

$$U_n(P,Q) = \frac{n 2^{2n+1} Q^n}{P^{n+1}} F\left(\frac{2+n}{2}, \frac{1+n}{2}; \frac{3}{2}; \frac{D}{P^2}\right) \tag{3.16}$$

bulunur.

Hipergeometrik fonksiyonlarla ilgili olan diğer bir doğrusal dönüşüm

$$\begin{aligned} F(a,b;c;z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a,b;a+b-c+1;1-z) \\ &\quad + (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ &\quad \times F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) \end{aligned} \tag{3.17}$$

dir (Erdélyi v.d. 1953, Bölüm 2.9, (1), (5), (21) ve (33)). Ancak, (3.5) bağıntısında $a+b-c=n$ olduğundan paydaki gamma terimlerinden biri tanımlı değildir. Bu yüzden bu bağıntı yerine a veya b sayılarından birinin bir negatif tam sayı ve m sayısının bir negatif olmayan tam sayı olduğu

$$F(a,b;a+b+m;z)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(a+b+m)}{\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)}F(a,b;1-m;1-z) \tag{3.18}$$

eşitliği kullanılabilir (Abramowitz ve Stegun 1964, (15.3.11)). Bu bağıntı (3.5) eşitliğine uygulanırsa $a=\dfrac{1-n}{2}$, $b=\dfrac{2-n}{2}$, $m=n$ ve $z=\dfrac{D}{P^2}$ için

$$U_n(P,Q)=P^{n-1}F\left(\frac{1-n}{2},\frac{2-n}{2};1-n;\frac{4Q}{P^2}\right) \tag{3.19}$$

elde edilir. Burada, gamma terimleri $\Gamma(z)$ için Legendre Çarpım Formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(m)\Gamma(a+b+m)}{\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)} &= \frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\\ &= \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}2^{n-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\\ &= \frac{2^{n-1}}{n}\end{aligned}$$

olarak hesaplanmıştır.

(3.17) bağıntısına benzeyen dönüşümlerden bir diğeri

$$\begin{aligned}F(a,b;c;z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F\left(a,1-c+a;1-b+a;\frac{1}{z}\right)\\ &\quad+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}F\left(b,1-c+b;1-a+b;\frac{1}{z}\right)\end{aligned} \tag{3.20}$$

dir (Wang ve Guo 1989, syf. 161, (8)). Bu ifade (3.5) bağıntısına uygulandığında (3.5) bağıntısında $c=\dfrac{3}{2}$ ve $b-a=\dfrac{1}{2}$ tam sayı olmadığından $n\geqslant 2$ bir çift sayı ise b bir negatif tam sayı veya sıfır ve n bir tek tam sayı ise a bir negatif tam sayı veya sıfırdır. $\Gamma(z)$ gamma fonksiyonunun pozitif olmayan tam sayılarda kutupları var olduğundan (3.20) eşitliğinin sağ tarafında toplanan iki terimden biri daima kaybolur. Bu yüzden $U_{2n+1}(P,Q)$ ile $U_{2n}(P,Q)$ terimleri incelenecektir. (3.5) bağıntısından

$$U_{2n+1}(P,Q)=\frac{(2n+1)P^{2n}}{2^{2n}}F\left(-n,\frac{1}{2}-n;\frac{3}{2};\frac{D}{P^2}\right)$$

olduğundan (3.20) eşitliğinden

$$U_{2n+1}(P,Q)=\frac{(2n+1)P^{2n}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2n}\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}\left(\frac{-D}{P^2}\right)^n F\left(-n,-\frac{1}{2}-n;\frac{1}{2};\frac{P^2}{D}\right) \tag{3.21}$$

bulunur. Gamma terimleri yukarıdaki gibi hesaplandığında

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}=\frac{(-1)^n}{2n+1} \tag{3.22}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$U_{2n+1}(P,Q)=\left(\frac{D}{4}\right)^n F\left(-n,-\frac{1}{2}-n;\frac{1}{2};\frac{P^2}{D}\right) \tag{3.23}$$

bulunur. Benzer şekilde, (3.5) bağıntısından

$$U_{2n}(P,Q)=\frac{2nP^{2n-1}}{2^{2n-1}}F\left(\frac{1}{2}-n,1-n;\frac{3}{2};\frac{D}{P^2}\right)$$

olduğundan (3.20) eşitliğinden

$$U_{2n}(P,Q)=nP\left(\frac{D}{4}\right)^{n-1} F\left(1-n,\frac{1}{2}-n;\frac{3}{2};\frac{P^2}{D}\right) \tag{3.24}$$

elde edilir. Euler formülü olan (3.13) bağıntısı (3.23) ve (3.24) eşitliklerine uygulanırsa

$$U_{2n+1}(P,Q)=\left(\frac{4}{D}\right)^{n+1} Q^{2n+1}F\left(\frac{1}{2}+n,1+n;\frac{1}{2};\frac{P^2}{D}\right) \tag{3.25}$$

ve

$$U_{2n}(P,Q)=nP\left(\frac{4}{D}\right)^{n+1} Q^{2n}F\left(\frac{1}{2}+n,1+n;\frac{3}{2};\frac{P^2}{D}\right) \tag{3.26}$$

elde edilir.

(3.23) ile (3.24) eşitlikleri ile (3.18) bağıntısını sağladığından (3.23) için (3.18) ifadesinde $a=-n$, $b=-\frac{1}{2}-n$, $m=2n+1$ ve $z=\frac{P^2}{D}$ yazılırsa

$$U_{2n+1}(P,Q)=D^nF\left(-n,-\frac{1}{2}-2n;\frac{1}{2};\frac{4Q}{D}\right) \tag{3.27}$$

ve (3.24) için (3.18) ifadesinde $a=1-n, b=\frac{1}{2}-n, m=2n$ ve $z=\frac{P^2}{D}$ yazılırsa

$$U_{2n}(P,Q)=D^{n-1}F\left(1-n,\frac{1}{2}-n;1-2n;\frac{4Q}{D}\right) \tag{3.28}$$

bulunur.

Diğer bir dönüşüm formülü olan

$$\begin{aligned}F(a,b;c;z) &= (1-z)^{-a}\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}F\left(a,c-b;a-b+1;\frac{1}{1-z}\right)\\ &\quad+(1-z)^{-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}F\left(b,c-a;b-a+1;\frac{1}{1-z}\right)\end{aligned} \tag{3.29}$$

(Erdélyi v.d. 1953, Bölüm 2.9, (1), (11), (15) ve (34)) (3.5) eşitliğine uygulandığında (3.22) kullanılarak

$$U_{2n+1}(P,Q) = (-1)^n Q^n F\left(-n, 1+n; \frac{1}{2}; \frac{P^2}{4Q}\right) \tag{3.30}$$

ve

$$U_{2n}(P,Q) = n(-1)^{n-1} Q^{n-1} F\left(1-n, 1+n; \frac{3}{2}; \frac{P^2}{4Q}\right) \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.13) bağıntısı elde edilen (3.30) ve (3.31) eşitliklerine uygulanırsa, sırasıyla

$$U_{2n+1}(P,Q) = 2(-1)^n Q^n \left(-\frac{Q}{D}\right)^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}+n, -\frac{1}{2}-n; \frac{1}{2}; \frac{P^2}{4Q}\right) \tag{3.32}$$

ve

$$U_{2n+1}(P,Q) = 2n(-1)^{n-1} Q^{n-1} \left(-\frac{Q}{D}\right)^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}+n, \frac{1}{2}-n; \frac{3}{2}; \frac{P^2}{4Q}\right) \tag{3.33}$$

bulunur.

Hipergeometrik fonksiyonların rasyonel değişkenler içeren daha fazla gösterimlerini elde etmek için karesel dönüşümler kullanmak uygundur. Bu türde olan dönüşümlerden biri

$$F(a,b;a-b+1;z) = (1+z)^{-a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{1}{2}; a-b+1; \frac{4z}{(1+z)^2}\right) \tag{3.34}$$

dir. Bu bağıntı (3.23) ve (3.24) eşitliklerine uygulandığında

$$U_{2n+1}(P,Q) = \left(\frac{P^2}{2}-Q\right)^n \sqrt{1+\frac{P^2}{D}} F\left(\frac{-1-2n}{4}, \frac{1-2n}{4}; \frac{1}{2}; \frac{4DP^2}{(D+P^2)^2}\right) \tag{3.35}$$

ve

$$U_{2n}(P,Q) = nP\left(\frac{P^2}{2}-Q\right)^{n-1} F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{2-n}{2}; \frac{3}{2}; \frac{4DP^2}{(D+P^2)^2}\right) \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.13) bağıntısı elde edilen (3.35) ile (3.36) eşitliklerine uygulanırsa

$$\begin{aligned} U_{2n+1}(P,Q) &= \left(\frac{4}{2D+P^2}\right)^{n+1} (-Q)^{2n+1} \sqrt{1+\frac{P^2}{D}} \\ &\quad \times F\left(\frac{3+2n}{4}, \frac{1+2n}{4}; \frac{1}{2}; \frac{4DP^2}{(D+P^2)^2}\right) \end{aligned} \tag{3.37}$$

ve

$$U_{2n}(P,Q) = n\left(\frac{4}{D+P^2}\right)^{n+1} F\left(\frac{2+n}{2}, \frac{1+n}{2}; \frac{3}{2}; \frac{4DP^2}{(D+P^2)^2}\right) \tag{3.38}$$

bulunur.

Bu aşamada yeni gösterimler elde etmek için doğrusal dönüşüm formülleri tekrar kullanılabilir. (3.17) bağıntısı (3.37) eşitliğine uygulanır ve gamma terimleri önceden olduğu gibi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} U_{2n+1}(P,Q) &= \frac{2^{n+\frac{1}{2}}(-Q)^{2n+1}}{(D+P^2)^{n+1}}\sqrt{1+\frac{P^2}{D}}F\left(\frac{3+2n}{4},\frac{1+2n}{4};\frac{3}{2}+n;\left(\frac{-4Q}{D+P^2}\right)^2\right) \\ &\quad +2^{-n-\frac{1}{2}}(D+P^2)^n\sqrt{1+\frac{P^2}{D}} \\ &\quad \times F\left(\frac{-1-2n}{4},\frac{1-2n}{4};\frac{1}{2}-n;\left(\frac{-4Q}{D+P^2}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{3.39}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.18) bağıntısı (3.36) eşitliğine uygulanırsa

$$U_{2n}(P,Q) = P(P^2-2Q)^{n-1}F\left(\frac{1-n}{2},\frac{2-n}{2};1-n;\left(\frac{-4Q}{D+P^2}\right)^2\right) \tag{3.40}$$

bulunur. Euler formülü olan (3.13) eşitliği (3.39) bağıntısına uygulanırsa

$$\begin{aligned} U_{2n+1}(P,Q) &= \frac{2^{n+\frac{3}{2}}P(-Q)^{2n+1}}{(D+P^2)^{n+\frac{3}{2}}}F\left(\frac{3+2n}{4},\frac{5+2n}{4};\frac{3}{2}+n;\left(\frac{-4Q}{D+P^2}\right)^2\right) \\ &\quad +2^{-n+\frac{1}{2}}P(D+P^2)^{n-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times F\left(\frac{3-2n}{4},\frac{1-2n}{4};\frac{1}{2}-n;\left(\frac{-4Q}{D+P^2}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir.

Daha fazla hipergeometrik seri gösterimi elde etmek için (3.11) dönüşümü (3.39) bağıntısına uygulanırsa

$$\begin{aligned} U_{2n+1}(P,Q) &= \frac{(D+P^2)(-Q)^{2n+1}}{2D^{\frac{n}{2}+\frac{5}{4}}P^{n+\frac{3}{2}}}F\left(\frac{3+2n}{4},\frac{5+2n}{4};\frac{3}{2}+n;-\frac{4Q^2}{DP^2}\right) \\ &\quad +D^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}P^{n+\frac{1}{2}}F\left(\frac{-1-2n}{4},\frac{1-2n}{4};\frac{1}{2}-n;-\frac{4Q^2}{DP^2}\right) \end{aligned} \tag{3.42}$$

elde edilir. (3.40) bağıntısını dönüştürmek için n sayısının tek ve çift olması durumları ayrı olarak incelenmelidir. Tek n için (3.11) ve çift n için (3.12) uygulanırsa

$$U_{4n+2}(P,Q) = P^{2n+1}D^nF\left(-n,-\frac{1}{2}-n;-2n;-\frac{4Q^2}{DP^2}\right) \tag{3.43}$$

$$U_{4n}(P,Q) = P^{n-1}D^{n-1}(P^2-2Q)F\left(1-n,\frac{1}{2}-n;1-2n;-\frac{4Q^2}{DP^2}\right) \tag{3.44}$$

elde edilir.

Son olarak (3.29) dönüşümü (3.36) bağıntısına n sayısının tek ve çift olmasına göre uygulanırsa

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}$$

eşitliklerinden

$$U_{4n+2}(P,Q)=(-1)^n Q^{2n} F\left(-n,1+n;\frac{1}{2};\left(\frac{D+P^2}{-4Q}\right)^2\right) \tag{3.45}$$

$$U_{4n}(P,Q)=(-1)^{n+1} nP(P^2-2Q) F\left(1-n,1+n;\frac{3}{2};\left(\frac{D+P^2}{-4Q}\right)^2\right) \tag{3.46}$$

elde edilir.

3.3. Kesin Formüller

Bu bölümde bir önceki bölümde elde edilen hipergeometrik fonksiyon gösterimleri kombinatorik toplamlar şeklinde ifade edilecektir. Bunun için artan faktöriyellerin sağladığı önceden verilen

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{2}\right)_k &= \frac{(2k+1)!}{4^k k!}, \left(\frac{1-n}{2}\right)_k \left(\frac{2-n}{2}\right)_k = \frac{(n-1)!}{4^k(n-1-2k)},\\
(1-n)_k &= \frac{(-1)^k (n-1)!}{(n-1-k)!}, (1+n)_k = \frac{(n+k)!}{n!}
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile

$$\left(\frac{1}{2}\right)_k = \frac{(2k)!}{4^k k!} \tag{3.47}$$

$$(-n)_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} \tag{3.48}$$

bağıntıları kullanılır.

(3.19), (3.30) ve (3.31) eşitliklerinden sırasıyla

$$U_n(P,Q)=\sum_{k=0}^{[|\frac{n-1}{2}|]} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} \frac{Q^k}{P^{2k}} \tag{3.49}$$

$$U_{2n+1}(P,Q)=(-1)^n Q^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+k}{2k} \frac{P^{2k}}{Q^k} \tag{3.50}$$

$$U_{2n}(P,Q)=(-1)^{n-1} Q^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n+k}{2k+1} \frac{P^{2k}}{Q^k} \tag{3.51}$$

elde edilir. (3.14) eşitliğinde n yerine $2n+1$ yazılırsa

$$U_{2n+1}(P,Q)=(2n+1)Q^n F\left(-n,1+n;\frac{3}{2};-\frac{D}{4Q}\right)$$

ve (3.15) eşitliğinde n yerine $2n$ yazılırsa

$$U_{2n}(P,Q) = nPQ^{n-1}F\left(1-n, 1+n; \frac{3}{2}; -\frac{D}{4Q}\right)$$

bulunur. Son iki eşitlik sırasıyla

$$U_{2n+1}(P,Q) = (2n+1)Q^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{2k} \frac{1}{2k+1} \frac{D^k}{Q^k} \tag{3.52}$$

ve

$$U_{2n}(P,Q) = PQ^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{2k+1} \frac{D^k}{Q^k} \tag{3.53}$$

toplamlarını verir. (3.36) eşitliğinden

$$U_{2n}(P,Q) = P2^{1-n}(P^2-2Q)^{n-1} \sum_{k=0}^{[|\frac{n-1}{2}|]} \binom{n}{2k+1} \frac{D^k P^{2k}}{(P^2-2Q)^{2k}} \tag{3.54}$$

ve (3.40) eşitliğinden

$$U_{2n}(P,Q) = P(P^2-2Q)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} \frac{Q^{2k}}{(P^2-2Q)^{2k}} \tag{3.55}$$

elde edilir. Son olarak,(3.45) ve (3.46) bağıntılarından sırasıyla,

$$U_{4n+2}(P,Q) = (-1)^n Q^{2n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+k}{2k} \frac{(P^2-2Q)^{2k}}{Q^{2k}} \tag{3.56}$$

ve

$$U_{4n}(P,Q) = (-1)^{n+1} P(P^2-2Q) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n+k}{2k+1} \frac{(P^2-2Q)^{2k}}{Q^{2k}} \tag{3.57}$$

bulunur.

Bu bölümün ikinci kısmında, Bölüm 3.2'de geriye kalan hipergeometrik bağıntıların bazılarının doğrudan sonucu olarak Lucas dizileri için sonsuz seri gösterimleri listelenecektir. Burada genelleştirilmiş binom katsayısı gösterimi kullanılacaktır. Herhangi bir reel veya karmaşık a sayısı ve bir pozitif k tam sayısı için genelleştirilmiş binom katsayısı

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)...(a-k+1)}{k!} = \frac{(a-k+1)_k}{k!} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-k+1)\Gamma(k+1)} \tag{3.58}$$

olarak tanımlanır.

(3.6)-(3.9), (3.47), (3.48) bağıntıları kullanılarak (3.23), (3.24), (3.25) ve (3.26) eşitliklerinden sırasıyla

$$U_{2n+1}(P,Q) = \left(\frac{D}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 4^k \frac{\binom{-\frac{3}{2}-n+k}{k}\binom{n}{k}}{\binom{2k}{k}} \frac{P^{2k}}{D^k} \tag{3.59}$$

$$U_{2n}(P,Q) = nP \left(\frac{D}{4}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{2k+1} \frac{\binom{-\frac{1}{2}-n+k}{k}\binom{n-1}{k}}{\binom{2k}{k}} \frac{P^{2k}}{D^k} \tag{3.60}$$

$$U_{2n+1}(P,Q) = \left(\frac{4}{D}\right)^{n+1} Q^{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} 4^k \frac{\binom{-\frac{3}{2}+n+k}{k}\binom{n+k}{k}}{\binom{2k}{k}} \frac{P^{2k}}{D^k} \tag{3.61}$$

$$U_{2n}(P,Q) = nP \left(\frac{4}{D}\right) Q^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k+1} \frac{\binom{-\frac{1}{2}+n+k}{k}\binom{n+k}{k}}{\binom{2k}{k}} \frac{P^{2k}}{D^k} \tag{3.62}$$

gösterimleri bulunur. Diğer iki seri gösterimi (3.27) ile (3.28) eşitliklerinden sırasıyla elde edilen

$$U_{2n+1}(P,Q) = \frac{D^n}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} 4^k \binom{-\frac{3}{2}-n+k}{k}\binom{2n-k}{n} \frac{Q^k}{D^k} \tag{3.63}$$

$$U_{2n}(P,Q) = \frac{D^{n-1}}{\binom{2n-1}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} 4^k \binom{-\frac{1}{2}-n+k}{k}\binom{2n-1-k}{n} \frac{Q^k}{D^k} \tag{3.64}$$

bağıntılarıdır. Farklı bir grup (3.32) ve (3.33) eşitliklerinden sırasıyla bulunan

$$U_{2n+1}(P,Q) = 2\,(-1)^n\, Q^n \left(-\frac{Q}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} 4^k \frac{\binom{\frac{-1}{2}+n+k}{k}\binom{-\frac{3}{2}-n+k}{k}}{\binom{2k}{k}} \frac{P^{2k}}{Q^k} \tag{3.65}$$

$$U_{2n}(P,Q) = 2n\,(-1)^{n-1}\, Q^{n-1} \left(-\frac{Q}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k \binom{\frac{-1}{2}+n+k}{k}\binom{-\frac{1}{2}-n+k}{k}}{(k+1)\binom{2k+1}{k}} \frac{P^{2k}}{Q^k} \tag{3.66}$$

serileridir. Çiftler olarak benzer olan seri gösterimleri için son olarak (3.37) ve (3.38) eşitliklerinden sırasıyla elde edilen

$$U_{2n+1}(P,Q)=\frac{2^{n+\frac{3}{2}}(-Q)^{2n+1}}{(P^2-2Q)^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{D}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k\binom{\frac{-1}{4}+\frac{n}{2}+k}{k}\binom{-\frac{3}{4}+\frac{n}{2}+k}{k}}{\binom{2k}{k}}\frac{D^kP^{2k}}{(P^2-2Q)^{2k}} \tag{3.67}$$

$$U_{2n}(P,Q)=n\left(\frac{2}{P^2-2Q}\right)^{n+1}Q^{2n}P\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k\binom{\frac{n}{2}+k}{k}\binom{-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+k}{k}}{(k+1)\binom{2k+1}{k}}\frac{D^kP^{2k}}{(P^2-2Q)^{2k}} \tag{3.68}$$

toplamları ile (3.43) ve (3.44) bağıntılarından bulunan

$$U_{4n+2}(P,Q)=\frac{P^{2n+1}D^n}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=0}^{\infty}4^k\binom{-\frac{3}{2}-n+k}{k}\binom{2n-k}{n}\frac{Q^{2k}}{D^kP^{2k}} \tag{3.69}$$

$$U_{4n}(P,Q)=\frac{(PD)^{n-1}(P^2-2Q)}{\binom{2n-1}{n}}\sum_{k=0}^{\infty}4^k\binom{-\frac{1}{2}-n+k}{k}\binom{2n-1-k}{n}\frac{Q2^k}{D^kP^{2k}} \tag{3.70}$$

verilebilir.

Bu bölüm için son olarak verilen bağıntılar (3.16) eşitliğinde n yerine $2n$ yazıldığında elde edilen

$$U_{2n}(P,Q)=\frac{n2^{2n+2}Q^{2n}}{P^{2n+1}}F\left(1+n,\frac{1}{2}+n;\frac{3}{2};\frac{D}{P^2}\right)$$

ifadesinden bulunan

$$U_{2n}(P,Q)=\frac{n2^{2n+2}Q^{2n}}{P^{2n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}+n-k}{k}\binom{n+k}{k}\frac{(2k+1)!}{4^k}\frac{D^k}{P^{2k}} \tag{3.71}$$

ile (3.35) eşitliğinden elde edilen

$$U_{2n+1}(P,Q)=\frac{(P^2-2Q)^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{D}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k\binom{\frac{-5}{4}-\frac{n}{2}+k}{k}\binom{-\frac{3}{4}-\frac{n}{2}+k}{k}}{\binom{2k}{k}}\frac{D^kP^{2k}}{(P^2-2Q)^{2k}} \tag{3.72}$$

serileridir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada Lucas dizileri Gauss hipergeometrik fonksiyonu cinsinden ifade edilmiştir. Hipergeometrik fonksiyonların sağladığı bazı dönüşümler kullanılarak Lucas dizilerinin sonlu toplam ve sonsuz seri gösterimleri elde edilmiştir.

5. KAYNAKLAR

Abramowitz, M., Stegun, I. A. 1964. Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Washington D. C., 1046 p.

Burton, D. M. 2007. Elementary Number Theory, Sixth Edition, McGraw-Hill, New York, 434 p.

Dilcher, K. 2000. Hypergeometric functions and Fibonacci numbers, Fibonacci Quart., 38 (4), 342–363.

Erdélyi A. et. al. 1953. Higher Transcendental Functions, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 326 p.

Rainville, E. D. 1971. Special Functions, New York, Chelsea, Bronx, 365 p.

Ribenboim, P. 2004. The Little Book of Bigger Primes, Second edition, Springer-Verlag, New York, 356 p.

Stein, E. M., Shakarchi, R. 2003. Complex Analysis, Princeton University Press, New Jersey, 379 p.

Wang, Z. X., Guo, D. R. 1989. Special Functions, World Scientific Publishing, Singapore, 695 p.

ÖZGEÇMİŞ

Abdurrahman ÜNAL, 1987 yılında Antalya'da doğdu. Liseyi Antalya Aksu Lisesi'nde tamamladı. 2006 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2010 yılında Matematikçi olarak derece ile mezun oldu. Eylül 2011'de Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.