T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ HERMITE TABANLI APPELL POLİNOMLARI ÜZERİNE

BURAK KURT

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ HERMITE TABANLI APPELL POLİNOMLARI ÜZERİNE

BURAK KURT

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ HERMITE TABANLI APPELL POLİNOMLARI ÜZERİNE

BURAK KURT

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez / / 2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)	....
Prof. Dr. Ahmet DERNEK	....
Prof. Dr. Nuri ÜNAL	....
Doç. Dr. Mehmet CENKCİ	....
Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN	....

ÖZET

ÇOK DEĞİŞKENLİ HERMITE TABANLI APPELL POLİNOMLARI ÜZERİNE

Burak KURT

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Ocak 2013, 61 sayfa

İlk bölümde Appell polinomlar ailesindeki bazı polinomlar ile Hermite polinomunun tanımlandığı diferensiyel denklem verilmiştir. Sonra ilk olarak klasik Bernoulli, Euler, Genocchi, Euler-Frobenius polinomları tanımlanmıştır. Bu polinomların sağladıkları özellikler ifade edilmiştir.

Bulgular bölümünde Dattoli ve arkadaşları tarafından tanımlanan $2D$-Bernoulli polinomların genelleştirilmesi verilmiştir. Genelleştirilmiş parametreli Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, Apostol-Genocchi polinomları için çeşitli yeni rekürans bağıntıları ispatlanmıştır. Hermite- tabanlı Apsotol-Bernoulli polinomu ile Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu ve genelleştirilmiş Frobenius-Euler polinomu ile Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu arasındaki lineer bağıntılar ispatlanmıştır. Bu polinomlar için bazı yeni genellemeler verilmiştir. Son olarak üstel fonksiyonların integral değeri iki değişkenli ve dört değişkenli Hermite polinomları cinsinden ifadeleri bulunmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Bernoulli polinomaları, Euler polinomları, Hermite polinomları, Appell polinomları, Appell dizileri.

JÜRİ: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)
Prof. Dr. Ahmet DERNEK
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Doç. Dr. Mehmet CENKCİ
Yrd. Doç. Dr. Mümün CAN

ABSTRACT

ON THE MULTI VARIABLE HERMITE-BASED APPELL POLYNOMIALS

Burak KURT

Ph. D. Thesis in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz SİMSEK

JANUARY 2013, 61 pages

The aim of this thesis is to investigate the Hermite-based Appell polynomials. In the first section, we define Appell polynomials and Hermite polynomials. In the second section, we introduce classical Bernoulli polynomials, classical Euler polynomials and Appell polynomials. After, some theorems which satisfy these polynomials are proven.

In the final section, $2D$-Bernoulli polynomials and Apostol-Bernoulli polynomials are given. Also some theorems are proved. Two relations are proved between Hermite-based Apostol-Bernoulli polynomials with Hurwitz-Lerch zeta function and between generalized Frobenius-Euler polynomaials with Hurwitz-Lerch zeta function.

KEY WORDS: Bernoulli polynomials, Euler polynomials, Hermite polynomials, Appell polynomials, Appell sequences.

COMMITTEE: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Supervisor)
Prof. Dr. Ahmet DERNEK
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Assoc. Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Asst. Prof. Dr. Mümün CAN

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, esas olarak önbilgiler ve bulgular olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. İlk olarak Appell polinom ailesinden olan polinomları, Hermite polinomları ve klasik Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları verilmiştir. Daha sonra Apostol-Bernoulli polinomları, Apostol-Euler polinomları ve Appell polinomları tanımlanmıştır. Bunların sağladığı bazı bağıntılar ispatlanmıştır.

Genelleştirilmiş parametreli Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, Apostol-Genocchi polinomlarında çeşitli yeni rekürans bağıntıları ispatlanmıştır. Hermite- tabanlı Apostol-Bernoulli polinomu ile Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu ve genelleştirilmiş Frobenius-Euler polinomu ile Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu arasında lineer bağıntı ispatlanmıştır. Son olarak üstel fonksiyonların integral değeri iki değişkenli ve dört değişkenli Hermite polinomları cinsinden ifadeleri verilmiştir. Bu tez çalışmasının, bu alandaki çalışmalara önemli katkılar sağlayacağı inancındayım.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK' e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

n. mertebeden verilen $\{A_n(x)\}$, $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$ polinomlar dizisi

$$\frac{d}{dx}A_n(x) = nA_{n-1}(x),\ n \in \mathbb{N}_0$$

ve $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

kuvvet serisi için

$$A(t)\exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

eşitliğini gerçeklerse $\{A_n(x)\}$ dizisine Appell polinomlar dizisi denir (Dattoli vd 2002, Lu Da.-Q. 2011, Trembly vd 2011). Buradaki $A(t)$ fonksiyonuna $\{A_n(x)\}$ dizisinin doğuray fonksiyonudur.

Fizikte ve matematikte çok uygulama alanları olan Appell polinomlarının bazılarını verelim (Dattoli vd 2002):

$$A(t) = \frac{t}{e^t - 1} \text{ alırsak, } A_n(x) = B_n(x)$$

klasik Bernoulli polinomu,

$$A(t) = \frac{2}{e^t + 1} \text{ alırsak, } A_n(x) = E_n(x),$$

klasik Euler polinomu,

$$A(t) = \frac{2t}{e^t + 1} \text{ alırsak, } A_n(x) = G_n(x),$$

klasik Genocchi polinomu,

$$A(t) = \left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^{\alpha} \text{ alırsak, } A_n(x) = B_n^{\alpha}(x),\ \alpha \in \mathbb{C},$$

genelleştirilmiş Bernoulli polinomu,

$$A(t) = \left(\frac{2}{e^t + 1}\right)^{\alpha} \text{ alırsak, } A_n(x) = E_n^{\alpha}(x),\ \alpha \in \mathbb{C},$$

genelleştirilmiş Euler polinomu,

$$A(t) = \left(\frac{2t}{e^t + 1}\right)^{\alpha} \text{ alırsak, } A_n(x) = G_n^{\alpha}(x),\ \alpha \in \mathbb{C},$$

genelleştirilmiş Genocchi polinomu,

$$A(t) = \alpha_1 \cdots \alpha_m t^m \left[\left(e^{\alpha_1 t} - 1\right) \cdots \left(e^{\alpha_m t} - 1\right)\right]^{(-1)} \text{ alırsak,}$$

m. mertebeden genelleştirilmiş Bernoulli polinomu,

$$A(t) = 2^m \left[\left(e^{\alpha_1 t} + 1\right) \cdots \left(e^{\alpha_m t} + 1\right)\right]^{(-1)} \text{ alırsak,}$$

m. mertebeden genelleştirilmiş Euler polinomu,

$$A(t) = \frac{t^m}{e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}} \text{ alırsak, } A_n(x) = B_n^{[m-1]}(x),\ m \geq 1,$$

Natalini anlamında genelleştirilmiş Bernoulli polinomu,

$$A(t) = \left(\frac{t}{\lambda e^t - 1}\right)^{\alpha} \text{ alırsak, } A_n(x) = B_n^{\alpha}(x, \lambda),\ \alpha \in \mathbb{C},$$

α. mertebeden Apostol-Bernoulli polinomudur.Son denklemde $\lambda = 1$ için genelleştirilmiş Bernoulli polinomu $B_n^{\alpha}(x)$ elde edilir.

$\lambda = \alpha = 1$ alındığında da $B_n(x)$ klasik Bernoulli polinomu elde edilir.

$$A(t) = \left(\frac{2}{\lambda e^t + 1}\right)^{\alpha} \text{ alırsak, } A_n(x) = E_n^{\alpha}(x, \lambda),\ \alpha \in \mathbb{C},$$

α. mertebeden Apostol-Euler polinomu elde edilir.

$\lambda = 1$ için genelleştirilmiş Euler polinomu $E_n^{\alpha}(x)$, $\lambda = \alpha = 1$ alındığında da $E_n(x)$ Euler polinomu elde edilir.

$$A(t) = \exp\left(\zeta_0 + \zeta_1 t + \cdots + \zeta_{r+1} t^{r+1}\right),\ \zeta_{r+1} \neq 0$$

olursa $A_n(x)$, $r = 1$ için Hermite polinomu, $r = 2$ için ortogonal polinomları kapsayan genelleştirilmiş Gould-Hopper polinomu,

$$A(t) = \frac{1}{(1-t)^{m+1}} \text{ alınırsa, } A_n(x) = n! G_n^m(x)$$

dir.

Bernoulli polinomlarını tanımlayan altı farklı yaklaşım vardır (Costabille vd 2006).

Bu tez çalışmasında, Appell polinomlar ailesinin üyeleri olan Hermite-tabanlı Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler ve Apostol-Genocchi polinomlarının gerçeklediği bağıntılar ve sağladıkları teoremler inceleneceği için ilk olarak Hermite polinomlarını tanımlayalım.

$$y^{''} - 2xy^{'} + 2\lambda y = 0$$

diferensiyel denklemini sağlayan polinoma Hermite polinomu denir. Burada λ sabittir. Hermite polinomunun doğuray fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{2xt-t^2}$$

ifadesiyle tanımlanır. İkinci ve üçüncü bölümde iki değişkenli ya da çok değişkenli Hermite polinomları tanımlanarak, bunlar ile Appell polinomları arasındaki teoremler, bağıntılar ifade edilecek ve ispatlanacaktır.

2. ÖN BİLGİLER, KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMA

2.1. Klasik Bernoulli, Euler ve Genocchi Polinomları ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.1 *$B_n(x)$ Bernoulli Polinomları, $E_n(x)$ Euler Polinomları ve $G_n(x)$ Genocchi Polinomları sırasıyla*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t-1}e^{xt}, \ |t| < 2\pi, \tag{2.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t+1}e^{xt}, \ |t| < \pi, \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t+1}e^{xt}, \ |t| < \pi \tag{2.3}$$

ifadeleriyle tanımlanır (Abramowitz ve Stegun 1964).

$x = 0$ alarak Bernoulli, Euler ve Genocchi sayıları elde edilir. Bu sayıların doğuray fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t-1}, \ |t| < 2\pi, \tag{2.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n\frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t+1}, \ |t| < \pi, \tag{2.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n\frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t+1}, \ |t| < \pi \tag{2.6}$$

ifadeleriyle tanımlanır (Abramowitz ve Stegun 1964).

Bernoulli polinomu

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)y^{n-k},$$

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}x^k, \end{aligned}$$

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x),$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k(x)=(n+1)\,x^n$$

bağıntılarını ve

$$B_k(mx)=m^{k-1}\sum_{l=0}^{m-1}B_k(x+lm^{-1}) \tag{2.7}$$

Raabe bağıntısını gerçekler (Abramowitz ve Stegun 1964).

Benzer olarak $E_n(x)$ Euler polinomu

$$E_n\,(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(x)y^{n-k},$$

$$\begin{aligned}E_n\,(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_kx^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}x^{k},\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(x)+E_n(x)=2x^n,$$

bağıntılarını ve

$$E_n(mx)=\begin{cases} m^n\sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k\,E_n(x+km^{-1}), & n\in\mathbb{N}_0,\ m=1,3,5,\cdots\\ -\frac{2}{n+1}m^n\sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k\,B_n(x+km^{-1}), & n\in\mathbb{N}_0,\ m=2,4,6,\cdots\end{cases} \tag{2.8}$$

Raabe bağıntısını sağlar (Abramowitz ve Stegun 1964, Srivastava ve Pinter 2004).

Genocchi polinomunun doğuray fonksiyonu Euler polinomuna benzer olduğu için yukarıdaki bilinen özellikler Genocchi polinomu için de yazılabilir. Bernoulli polinomları, Euler polinomları ve Genocchi polinomları arasında çok çeşitli bağıntılar vardır (Abramowitz ve Stegun 1964).

2.2. Tek Değişkenli Hermite Polinomları

Tanım 2.2 *(Rainville 1960)Tek değişkenli Hermite polinomu $H_n(x)$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}=\exp(2xt-t^2) \tag{2.9}$$

ifadesiyle ya da

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \tag{2.10}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada "[.]" işareti tam değer anlamındadır.

Bu tanımlara denk olan Rodrigues formülü

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \left\{\exp(-x^2)\right\} \tag{2.11}$$

eşitliği ile verilebilir. (2.10)'dan

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2,\ H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,\ H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x,$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120,\ H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$$

elde edilir. Hermite polinomu

$$2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x),$$

$$xH_n'(x) = nH_{n-1}'(x) + nH_n'(x),$$

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

rekürans bağıntılarını ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi},\ \delta_{m,n}$$

ortogonallik özelliğini gerçekler (Rainville 1960). Burada $\delta_{m,n}$ kroneker deltası ve e^{-x^2} fonksiyonuna $H_n(x)$ Hermite polinomunun ağırlık fonksiyonu denir.

Tanım 2.3 *(Dattoli vd 1998) İki indisli-tek değişkenli Hermite polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!} H_{m,n}(x) = e^{x(u+v)-uv} \tag{2.12}$$

ifadesiyle tanımlanır.

(2.12)'den

$$H_{m,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+m}(-v)^{n-k}$$

eşitliği yazılabilir. Tek değişkenli iki indisli Hermite polinomu tanımından

$$H_{m,n}(x)=\sum_{q=0}^{\min(m,n)}(-1)^q\,q!\binom{m}{q}\binom{n}{q}x^{m+n-2q} \tag{2.13}$$

bağıntısı elde edilir.

2.3. Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, Apostol-Genocchi Polinomları

α. mertebeden klasik Bernoulli, Euler, Genocchi polinomları sırasıyla

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!},\ \ |t|<2\pi,\ 1^{\alpha}=1, \tag{2.14}$$

$$\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!},\ \ |t|<\pi,\ 1^{\alpha}=1 \tag{2.15}$$

ve

$$\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{\alpha}e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!},\ \ |t|<\pi,\ 1^{\alpha}=1 \tag{2.16}$$

ifadeleri ile verilir (Luo ve Srivastava 2006, Luo vd 2003). Burada α gerçel ya da karmaşık sayıdır. $\alpha=1$ durumunda klasik Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları elde edilir.

Genelleştirilmiş Bernoulli ve Euler polinomları tanımlarından

$$\begin{aligned}B_n^{(\alpha+\beta)}(x+y)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}^{(\alpha)}(x)B_k^{(\beta)}(y)\\E_n^{(\alpha+\beta)}(x+y)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}^{(\alpha)}(x)E_k^{(\beta)}(y)\end{aligned} \tag{2.17}$$

eşitlikleri kolayca elde edilir. (2.17) de $\beta=0$ alırsak

$$\begin{aligned}B_n^{(\alpha)}(x+y)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}^{(\alpha)}(x)y^k\\E_n^{(\alpha)}(x+y)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}^{(\alpha)}(x)y^k\end{aligned}$$

bulunur.

(2.14) ve (2.15) den

$$B_n^{(\alpha)}(x+1) - B_n^{(\alpha)}(x) = nB_{n-1}^{(\alpha-1)}(x),\ n \in \mathbb{N} \tag{2.18}$$

$$E_n^{(\alpha)}(x+1) + E_n^{(\alpha)}(x) = 2E_n^{(\alpha-1)}(x),\ n \in \mathbb{N} \tag{2.19}$$

$$B_n^{(\alpha-1)}(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k^{(\alpha)}(x)$$

$$E_n^{(\alpha-1)}(x) = \frac{1}{2}\left(E_n^{(\alpha)}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k^{(\alpha)}(x)\right)$$

ifadeleri elde edilir (Luo ve Srivastava 2006).

Genelleştirilmiş Bernoulli polinomları ve Euler polinomları arasında aşağıdaki bağıntıları ifade edelim.

Teorem 2.4 *(Srivastava ve Pinter 2004) α. mertebeden Bernoulli polinomu ile α. mertebeden Euler polinomları arasında*

$$B_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(B_k^{(\alpha)}(y) + \frac{k}{2}B_{k-1}^{(\alpha-1)}(y)\right)E_{n-k}(x),\ \alpha \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

$$E_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(E_{k+1}^{(\alpha-1)}(y) - B_{k+1}^{(\alpha)}(y)\right)B_{n-k}(x),\ \alpha \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0$$

bağıntılar vardır.

Tanım 2.5 *α. mertebeden Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler ve Apostol-Genocchi polinomları sırasıyla*

$$\left(\frac{t}{\lambda e^t - 1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!}, \tag{2.20}$$

$\lambda = 1$ *ise* $|t| < 2\pi$, $\lambda \neq 1$ *ise* $|t| < |\ln \lambda|$,

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t + 1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!},\quad |t| < |\ln(-\lambda)|, \tag{2.21}$$

$$\left(\frac{2t}{\lambda e^t + 1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!},\quad |t| < |\ln(-\lambda)| \tag{2.22}$$

eşitlikleriyle tanımlanır (Luo 2009, Trembly vd 2012, Kurt ve Şimşek 2012).

Apostol-Bernoulli ve Apostol-Euler polinomlarının doğuray fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned}
B_n^{(\alpha+\beta)}(x+y;\lambda) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}^{(\alpha)}(x;\lambda)B_k^{(\beta)}(y;\lambda) \\
E_n^{(\alpha+\beta)}(x+y;\lambda) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}^{(\alpha)}(x;\lambda)E_k^{(\beta)}(y;\lambda) \qquad (2.23) \\
\lambda B_{n-1}^{(\alpha-1)}(x;\lambda) &= \lambda B_n^{(\alpha)}(x+1;\lambda) - B_n^{(\alpha)}(x;\lambda) \\
2E_n^{(\alpha-1)}(x;\lambda) &= \lambda E_n^{(\alpha)}(x+1;\lambda) + E_n^{(\alpha)}(x;\lambda) \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

bağıntıları kolayca elde edilir (Luo 2009).

(2.23) de $\beta = 0$ alarak

$$\begin{aligned}
B_n^{(\alpha)}(x+y;\lambda) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}^{(\alpha)}(x;\lambda)y^k \\
E_n^{(\alpha)}(x+y;\lambda) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}^{(\alpha)}(x;\lambda)y^k
\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan (2.20) ve (2.21) den

$$E_n^{(\alpha-1)}(x;\lambda) = \frac{1}{2}\left(\lambda\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k^{(\alpha)}(x;\lambda) + E_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\right),\ n \in \mathbb{N}_0$$

$$B_n^{(\alpha)}(x;\lambda^2) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}^{(\alpha)}(\lambda)E_k^{(\alpha)}(2x;\lambda)$$

ve

$$B_n(x;-\lambda) = 2^{n-1}\left(\lambda B_n(\frac{x+1}{2};\lambda^2) - B_n(\frac{x}{2};\lambda^2)\right)$$

ifadeleri elde edilir (Luo 2009).

Teorem 2.6 *(Luo ve Srivastava 2006) Pinter-Srivastava toplama teoremi olarak ifade edilen aşağıdaki bağıntılar vardır:*

$$B_n^{(\alpha)}(x+y;\lambda)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{(\alpha)}(y;\lambda)\left(E_{n-k}(x;\lambda) + \lambda\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}E_j(x;\lambda)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{(\alpha)}(y;\lambda)E_{n-k}(x;\lambda)$$
$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{(\alpha)}(y;\lambda)\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}E_j(x;\lambda),$$

$$E_n^{(\alpha)}(x+y;\lambda)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{k+1}\binom{n}{k}\left(E_{k+1}^{(\alpha-1)}(y;\lambda)-E_{k+1}^{(\alpha)}(y;\lambda)\right)B_{n-k}(x;\lambda).$$

Teorem 2.7 *(Wang 2008) α, β, $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. α. mertebeli Apostol-Bernoulli polinomu ve α. mertebeli Apostol-Euler polinomu arasında*

$$B_n^{(\alpha)}(x+y;\lambda) = \frac{1}{2^\beta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\beta}{m}\lambda^m B_{n-k}^{(\alpha)}(m+y;\lambda)\right)E_k^{(\beta)}(x;\lambda)$$

eşitliği vardır.

(2.7) ve (2.8)'de klasik Bernoulli polinomları ve klasik Euler polinomları için Raabe bağıntılarını vermiştik. Şimdi yüksek mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları ve yüksek mertebeden Apostol-Euler polinomları için Raabe bağıntısının genelleştirmesini verelim.

Teorem 2.8 *(Luo 2009) $m \in \mathbb{N}_0$, α, $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Yüksek mertebeden Apostol-Bernoulli polinomu için*

$$B_n^{(\alpha)}(mx;\lambda) = m^{n-\alpha}\sum_{v_1,\cdots,v_{m-1}\geq 0}\binom{\alpha}{v_1,\cdots,v_{m-1}}\lambda^r B_n^{(\alpha)}(x+\frac{r}{m};\lambda^m). \tag{2.25}$$

çarpım eşitliği vardır. Burada

$$r = v_1 + 2v_2 + \cdots + (m-1)\,v_{m-1},$$
$$\binom{\alpha}{v_1,\cdots,v_{m-1}} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-v_1-v_2-\cdots v_m+1)}{v_1!v_2!\cdots v_m!}$$

dır.

Teorem 2.9 *(Luo 2009) $m \in \mathbb{N}_0$, n, $l \in \mathbb{N}$, α, $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda yüksek mertebeden Apostol-Euler polinomları için Raabe bağıntısı aşağıdaki eşitlikler verilir:*

m tek ise,

$$\begin{aligned} & E_n^{(\alpha)}(mx;\lambda) \\ = \; & m^n \sum_{v_1,\cdots,v_{m-1}\geq 0} \binom{\alpha}{v_1,\cdots,v_{m-1}} (-\lambda)^r \, E_n^{(\alpha)}(x+\frac{r}{m};\lambda^m), \end{aligned} \tag{2.26}$$

m çift ise

$$\begin{aligned} & E_n^{(\alpha)}(mx;\lambda) \\ = \; & \frac{(-2)^l \, m^l}{(n+1)_l} \sum_{\substack{0\leq v_1,v_2,\cdots,v_{m-1}\leq l \\ v_1+v_2+\cdots+v_{m-1}=l}} \binom{\alpha}{v_1,v_2,\cdots,v_{m-1}} (-\lambda)^r \, B_{n+l}^{(l)}(x+\frac{r}{m};\lambda^m). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Burada

$$(n)_0 = 0, (n)_k = n\,(n+1)\cdots(n+k-1)$$

dir.

(2.22) bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned} G_n^{(\alpha)}(x) &= G_n^{(\alpha)}(x;1), \\ G_n^{(\alpha)}(\lambda) &= G_n^{(\alpha)}(0;\lambda), \\ G_n(x;\lambda) &= G_n^{(1)}(x;\lambda), \\ G_n(\lambda) &= G_n^{(1)}(\lambda),\, G_n^{(0)}(0;\lambda) = x^n \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir (Luo 2009).

Ayrıca (2.22) bağıntısından

$$G_n^{(\alpha)}(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_{n-k}^{(\alpha)}(\lambda)x^k,$$

$$G_n^{(\alpha)}(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_{n-k}^{(\alpha-1)}(\lambda)G_k(x;\lambda),$$

$$\lambda G_n^{(\alpha)}(x+1;\lambda) + G_n^{(\alpha)}(x;\lambda) = 2nG_{n-1}^{(\alpha-1)}(x;\lambda),$$

$$\frac{d}{dx}\left(G_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\right) = nG_{n-1}^{(\alpha)}(x;\lambda),$$

$$\frac{d^p}{dx^p}\left(G_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\right)=\frac{n!}{(n-p)!}G_{n-p}^{(\alpha)}(x;\lambda),\ n,\ p\in\mathbb{N}_o$$

ve

$$G_n^{(\alpha+\beta)}(x+y;\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}G_k^{(\alpha)}(x;\lambda)G_{n-k}^{(\beta)}(y;\lambda)$$

eşitlikleri elde edilebilir (Luo 2009).

Teorem 2.10 *(Luo ve Srivastava 2011) Genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomu*

$$\begin{aligned}&G_n^{(l)}(x;\lambda)\\=\ &e^{-x\ln\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-l}{k}\binom{n+k}{k}^{-1}G_{n+k}^{(l)}(x)\frac{(\ln\lambda)^k}{k!},\ n,\ l\in\mathbb{N}_0,\ \lambda\in\mathbb{C}\end{aligned}\tag{2.28}$$

bağıntısını sağlar.

Teorem 2.11 *(Luo ve Srivastava 2011) Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli, genelleştirilmiş Apostol-Euler ve genelleştirilmiş Apostol-Geocchi polinomları arasında aşağıdaki eşitlikler vardır:*

$$G_n^{(l)}(x;\lambda)=\frac{n!}{(n-l)!}E_{n-l}^{(l)}(x;\lambda),\ n,\ l\in\mathbb{N}_o,\ \lambda\in\mathbb{C},$$

$$E_n^{(l)}(x;\lambda)=\frac{n!}{(n+l)!}G_{n+l}^{(l)}(x;\lambda),\ n,\ l\in\mathbb{N}_o,\ \lambda\in\mathbb{C},$$

$$G_n^{(\alpha)}(x;\lambda)=(-2)^{\alpha}B_n^{(l)}(x;-\lambda),\ \alpha,\ \lambda\in\mathbb{C},\ 1^{\alpha}:=1$$

ve

$$B_n^{(\alpha)}(x;\lambda)=\frac{1}{(-2)^{\alpha}}G_n^{(\alpha)}(x;-\lambda),\ \alpha\in\mathbb{C},\ 1^{\alpha}:=1.$$

Teorem 2.8 ve Teorem 2.9'a benzer olarak genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomları için katlı çarpma teoremini verelim.

Teorem 2.12 *(Jolany vd 2013)* $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_o$, λ, $\alpha\in\mathbb{C}$ *için yüksek mertebeden Apostol-Genocchi polinomu için*

$$\begin{aligned}&G_n^{(\alpha)}(mx;\lambda)\\=\ &m^{n-\alpha}\sum_{v_1,\cdots,v_{m-1}\geq 0}\binom{\alpha}{v_1,\cdots,v_{m-1}}(-\lambda)^r G_n^{(\alpha)}(x+\frac{r}{m};\lambda^m).\end{aligned}$$

çarpma formülü vardır. Burada

$$r = v_1 + 2v_2 + \cdots + (m-1)\, v_{m-1},$$
$$\binom{\alpha}{v_1, \cdots, v_{m-1}} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha - v_1 - v_2 - \cdots v_m + 1)}{v_1! v_2! \cdots v_m!}$$

ve m tek tamsayıdır.

2.4. Natalini Anlamında Bernoulli Polinomu

Tanım 2.13 *(Natalini ve Berdani 2003) Yeni genelleştirilmiş Bernoulli polinomu*

$$G^{[m-1]}(x,t) = \frac{t^m e^{xt}}{e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x) \frac{t^n}{n!} \tag{2.29}$$

ifadesiyle tanımlanır. Burada $m \geq 1$ dir.

"[.]" notasyonu tam değer fonksiyonu değildir. Bu tezde bir gösterim olarak kullanılmıştır.

$m = 1$ için $G^{[0]}(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n^{[0]}(x) \frac{t^n}{n!}$ klasik Bernoulli polinomu elde edilir. (2.29) bağıntısıdan genelleştirilmiş Bernoulli sayılarının bir kaç tanesi

$$B_0^{[m-1]} = m!,$$
$$B_1^{[m-1]} = -\frac{m!}{m+1},$$
$$B_2^{[m-1]} = \frac{2m!}{(m+1)^2(m+2)}, \cdots$$

elde edilir.

(2.29)'dan

$$B_n^{[m-1]}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]} x^{n-k}$$

ve

$$\begin{aligned} B_n^{[m-1]}(x+y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]}(x) y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]}(y) x^{n-k} \end{aligned}$$

bulunur (Natalini ve Berdani 2003).

Tanım 2.14 *(Kurt 2010) Katlı yeni genelleştirilmiş Bernoulli polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1,\alpha]}(x)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t^m}{e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1}\frac{t^h}{h!}}\right)^{\alpha} e^{xt}, \ (\alpha \in \mathbb{C}) \tag{2.30}$$

ifadesiyle tanımlanır. $m = 1$, $\alpha = 1$ *için klasik Bernoulli polinomu elde edilir.*

(2.30)'dan

$$B_n^{[m-1,\alpha]}(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k^{[m-1,\alpha]}(x) y^{n-k},$$

$$B_n^{[m-1,\alpha+\beta]}(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k^{[m-1,\alpha]}(x) B_{n-k}^{[m-1,\beta]}(y),$$

$$B_n^{[m-1,\alpha]} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k^{[m-1,l]} B_{n-k}^{[m-1,\alpha-l]}$$

eşitlikleri elde edilmiştir (Kurt 2010).

Tanım 2.15 *(Trembly vd 2011)* α*. mertebeden yeni genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomunu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1,\alpha]}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t^m}{\lambda e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1}\frac{t^h}{h!}}\right)^{\alpha} e^{xt}, \ (\alpha \in \mathbb{C}) \tag{2.31}$$

ifadesiyle tanımlanır.

Trembly vd 2011, Srivastava-Pinter toplama teoremine benzer aşağıdaki teoremleri isptlamışlardır.

Teorem 2.16 *(Trembly vd 2011) Apostol-Euler polinomu ile yeni genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomu arasında*

$$\begin{aligned} & B_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;\lambda) \\ = & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(B_k^{[m-1,\alpha]}(y;\lambda) + \frac{k}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j} B_j^{[m-1,\alpha]}(y;\lambda) B_{k-1-j}^{[-1]}(0;\lambda)\right) E_{n-k}(x;\lambda) \end{aligned}$$

bağıntısı vardır.

Teorem 2.17 *(Trembly vd 2011) Yeni genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomu için*

$$\begin{aligned} &\lambda B_n^{[m-1,\alpha]}(x+1;\lambda) - B_n^{[m-1,\alpha]}(x;\lambda) \\ = \;& n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} B_k^{[m-1,\alpha]}(x;\lambda) B_{n-1-k}^{[-1]}(0;\lambda) \end{aligned}$$

bağıntısı vardır.

2.5. Parametreli Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler ve Apostol-Genocchi Polinomları

Bu bölümde Bernoulli polinomlarının, Euler polinomlarının ve Genocchi polinomlarının farklı bir genelleştirmesi ele alınacaktır.

Tanım 2.18 *(Luo vd 2003) a, b ve c pozitif parametreli genelleştirilmiş Bernoulli polinomu $B_n(x;a,b,c)$ ile gösterilerek*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(x;a,b,c\right)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{b^t-a^t}c^{xt}, \quad |t| < \frac{2\pi}{|\ln b - \ln a|},\ x \in \mathbb{R} \tag{2.32}$$

ifadesiyle tanımlanır. Burada a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$ dir.

Teorem 2.19 *(Luo vd 2003) a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$, $x \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 0$ için*

$$B_n\left(x;1,e,e\right) = B_n(x),\ B_n\left(0;a,b,c\right) = B_n(a,b),$$

$$B_n\left(x;a,b,c\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\ln c\right)^{n-k} B_k(a,b)x^{n-k},$$

$$\begin{aligned} &B_n\left(x;a,b,c\right) \\ = \;& \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\ln c\right)^{n-k}\left(\ln b - \ln a\right)^{k-1} B_k\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right)x^{n-k} \end{aligned}$$

ve

$$B_n\left(x+1;a,b,c\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\ln c\right)^{n-k} B_k(x;a,b,c)$$

eşitlikleri vardır.

Tanım 2.20 *(Luo vd 2003) $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ olsun. Genelleştirilmiş Euler polinomu $E_n(x; a, b, c)$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n\left(x; a, b, c\right) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{b^t + a^t} c^{xt} \tag{2.33}$$

ifadesiyle tanımlanır.

Teorem 2.21 *(Luo vd 2003) $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 0$ olsun.*

$$E_0\left(a, b, c\right) = 1,\ E_k\left(1, e, e\right) = E_k,\ E_k\left(a, b, c\right) = E_k\left(b, a, c\right),$$

$$E_k\left(a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha\right) = \alpha^k E_k\left(a, b, c\right),$$

$$\begin{aligned} & E_n\left(x; a, b, c\right) \\ = & \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\ln c\right)^{k-j} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^j \left(x - \frac{1}{2}\right)^{k-j} E_j\left(\frac{\ln c - 2\ln a}{2\left(\ln b - \ln a\right)}\right), \end{aligned}$$

$$2^n E_n\left(x; a, b, c\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\ln c\right)^{k-j} \left(2x - 1\right)^{k-j} E_j(a, b, c)$$

eşitlikleri vardır.

Tanım 2.22 *(Srivastava vd 2010) Parametreli α. mertebeden Apostol-Bernoulli polinomu*

$$\left(\frac{t}{\lambda b^t - a^t}\right)^\alpha c^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x; \lambda; a, b, c)\frac{t^n}{n!}, \quad \left|t \ln \frac{b}{a} + \ln \lambda\right| < 2\pi, 1^\alpha = 1 \tag{2.34}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$, $\alpha \in \mathbb{C}$ dir.

$\lambda = a = \alpha = 1$, $b = c = e$ alırsak klasik Bernoulli polinomu elde edilir.

Teorem 2.23 *(Srivastava vd 2010) $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$, $x \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda*

$$B_n^{(\alpha)}(x + 1; \lambda; a, b, c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\ln c\right)^{n-k} B_k^{(\alpha)}(x; \lambda; a, b, c),$$

$$B_n^{(\alpha)}(x + \alpha; \lambda; a, b, c) = B_n^{(\alpha)}(x; \lambda; \frac{a}{c}, \frac{b}{c}, c),$$

$$B_n^{(\alpha+\beta)}(x + y; \lambda; a, b, c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}^{(\alpha)}(x; \lambda; a, b, c) B_k^{(\beta)}(y; \lambda; a, b, c),$$

$$B_n^{(\alpha)}(x + y; \lambda; a, b, c) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \left(y \ln c\right)^r B_{k-r}^{(\alpha)}(x; \lambda; a, b, c)$$

bağıntıları gerçeklenir.

Tanım 2.24 *(Srivastava vd 2011) Parametreli* α*. mertebeden Apostol-Euler polinomu*

$$\left(\frac{2}{\lambda b^t + a^t}\right)^{\alpha} c^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)\frac{t^n}{n!}, \quad \left|t\ln\frac{b}{a} + \ln\lambda\right| < \pi, 1^{\alpha} = 1 \tag{2.35}$$

ifadesiyle tanımlanır. Burada $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+,\ a \neq b,\ \alpha \in \mathbb{C}$ *dir.*

$\lambda = a = \alpha = 1,\ b = c = e$ alırsak klasik Euler polinomu elde edilir.

Teorem 2.25 *(Srivastava vd 2011) Parametreli* α*. mertebeden Apostol-Euler polinomu* $E_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)$ *için*

$$E_n^{(\alpha)}(x+1;\lambda;a,b,c) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\ln c)^{n-k} E_k^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c),$$

$$E_n^{(\alpha)}(x+\alpha;\lambda;a,b,c) = E_n^{(\alpha)}(x;\lambda;\frac{a}{c},\frac{b}{c},c),$$

$$E_n^{(\alpha+\beta)}(x+y;\lambda;a,b,c) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)E_k^{(\beta)}(y;\lambda;a,b,c)$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 2.26 *(Srivastava vd 2011) Parametreli* α*. mertebeden Apostol-Genocchi polinomu*

$$\left(\frac{2t}{\lambda b^t + a^t}\right)^{\alpha} c^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)\frac{t^n}{n!}, \quad \left|t\ln\frac{b}{a} + \ln\lambda\right| < \pi, 1^{\alpha} = 1 \tag{2.36}$$

ifadesiyle tanımlanır. Burada $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+,\ a \neq b,\ \alpha \in \mathbb{C}$ *dir.*

$\lambda = a = \alpha = 1,\ b = c = e$ alırsak klasik Genocchi polinomu elde edilir.

2.6. Çok Değişkenli Hermite Polinomları

Tek değişkenli klasik Hermite polinomunun tanımı Tanım 2.2'de verilmişti.

Tanım 2.27 *(Rainville 1960) İki değişkenli klasik Hermite polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,y)\frac{t^n}{n!} = \exp(2xt - yt^2) \tag{2.37}$$

ifadesiyle ya da denk olan

$$H_n(x,y) = n! \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-y)^m (2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!} \tag{2.38}$$

eşitliği ile tanımlanır (Dattoli vd 1997).

(2.37)'den iki değişkenli Hermite polinomu ile tek değişkenli $H_n(x)$ polinomu arasında

$$H_n(x,y) = n! \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} H_{n-2m}(x) \frac{(1-y)^m}{m!(n-2m)!} \tag{2.39}$$

bağıntısı vardır. (2.37)'den

$$\frac{\partial}{\partial x} H_n(x,y) = 2nH_{n-1}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H_n(x,y) = -n\,(n-1)\,H_{n-2}(x,y),$$

$$H_n(x,y) = 2xH_{n-1}(x,y) - 2\,(n-1)\,yH_{n-2}(x,y)$$

eşitlikleri yazılabilir (Dattoli vd 1997).

$$\exp\left(2\,(x+y)\,t - 2t^2\right) = G(x,y;t) \tag{2.40}$$

olarak alalım.

(2.37) ve (2.40) bağıntılarından

$$H_n(x+y,2) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_{n-r}(x) H_r(y) \tag{2.41}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$H_n(x+y+z,3) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_{n-r}(x+y) H_r(z) \tag{2.42}$$

daha da genel olarak

$$H_n\left(\sum_{s=1}^{M} x_s, M\right) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_{n-r}\left(\sum_{s=1}^{M-1} x_s, M-1\right) H_r(x_M) \tag{2.43}$$

elde edilir (Dattoli vd 1994).

Tanım 2.28 *(Dattoli vd 1994) İki değişkenli genelleştirilmiş Hermite polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left({}^{(2)}H_n(x,y)\right) \frac{t^n}{n!} = \exp(2xt - t^2 + 2yt^2 - t^4) \tag{2.44}$$

ifadesiyle tanımlanır.

Bu polinomlar

$${}^{(2)}H_n(x,y) = n! \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{H_{n-2r}(x)H_r(y)}{r!(n-2r)!}$$

seri ifadesiyle verilir (Dattoli vd 1994). Benzer olarak üç değişkenli genelleştirilmiş Hermite polinomu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left({}^{(3,2)}H_n(x,y,z)\right) \frac{t^n}{n!} = \exp(2xt - t^2 + 2yt^2 - t^4 + 2zt^3 - t^6)$$

$${}^{(3,2)}H_n(x,y,z) = n! \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \frac{{}^{(2)}H_{n-3r}(x,y)H_r(z)}{r!(n-3r)!}$$

eşitlikleriyle ifade edilir (Dattoli vd 1994). Bu şekilde tanımlanan çok değişkenli Hermite polinomlarına literatürde Bell tipli Hermite polinomu denmektedir. (2.44) denklemindeki değişken sayısı sayılabilir sayıya genişletilebilir. Hermite polinomlarının çeşitli tanımları kaynaklarda görülmektedir. Aynı araştırmacılar farklı yayınlarında farklı tanımlar kullanmışlardır. Bu tanımlar benzer tiptedir.

Tanım 2.29 *(Dattoli vd 1997) İki değişkenli genelleştirilmiş Hermite polinomu*

$$e^{t(ax+by)+h(bx+cy)-\frac{1}{2}\left(at^2+2bth+ch^2\right)} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}\frac{h^n}{n!} H_{m,n}(x,y)$$

$$a, c \in \mathbb{R}^+,\ ac - b^2 > 0 \tag{2.45}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu tip polinomlara Appell-Kampé de Fériet tipi polinomlar denir.

(2.45) bağıntısından

$$H_{m,n}(x,y) = \sum_{q=0}^{\min(m,n)} (-1)^q q! \binom{m}{q}\binom{n}{q} b^q H_{m-q}(ax+by, -\frac{a}{2}) H_{n-q}(bx+cy, -\frac{c}{2})$$

eşitliği yazılabilir.

(2.45) eşitliği ile tanımlanan genelleştirilmiş Hermite polinomunun gerçeklediği ve toplama formulü olarak isimlendirilen

$$\begin{aligned} & H_{m,n}(x+x_1, y+y_1) \\ = \; & \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}} \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{n} \binom{m}{q} \binom{n}{q} H_{m-p,n-q}(\sqrt{2}x, \sqrt{2}y) H_{p,q}(\sqrt{2}x_1, \sqrt{2}y_1) \end{aligned}$$

eşitliği (2.45)'den kolayca elde edilir.

(Dattoli vd 2008) aşağıdaki dört değişkenli tek parametreli Hermite polinomunun üreteç fonksiyonunu tanımlamışlardır:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!} H_{m,n}(x, \alpha; y, \delta|\beta) = e^{xu+\alpha u^2+yv+\delta v^2+\beta uv}. \tag{2.46}$$

(2.46) bağıntısı diferansiyel denklem çözümlemelerinde, diğer matematik ve fizikte bir çok uygulaması vardır. (2.46) bağıntısı bu tezin bulgular kısmında tekrar ele alınacaktır. Bu bağıntı yardımıyla üstel fonksiyonların integralini hesaplamada kullanılacaktır.

(2.46)'dan

$$H_{m,n}(x, \alpha; y, \delta|\beta) = m!n! \sum_{s=0}^{\min(m,n)} \frac{\beta^s}{s!\,(m-s)!\,(n-s)!} H_{m-s}(x, \alpha) H_{n-s}(y, \delta)$$

eşitliği elde edilir (Dattoli vd 2008).

2.7. Hermite Tabanlı Bernoulli, Euler Polinomları ve Hermite Tabanlı Apostol-Bernoulli Polinomları

Klasik Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarını (2.1)-(2.3) bağıntılarında tanımlamıştık. Diğer taraftan Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler ve Apostol-Genocchi polinomları da (2.19)-(2.21) eşitliklerinde ifade edilmiştir. Burada Hermite-tabanlı polinomlar verilecektir. Bu polinomların temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.30 *(Dattoli vd 1999) Hermite tabanlı Bernoulli polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left({}_H B_n(x,y)\right) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1} e^{xt+yt^2} \tag{2.47}$$

ifadesiyle tanımlanır.

(2.47)'den

$$ {}_H B_n(x,y) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} B_{n-s} H_s(x,y)$$

eşitliği kolayca elde edilir (Dattoli vd 1999). Burada $H_s(x,y)$ iki değişkenli Hermite polinomudur.

Ayrıca

$$\begin{aligned} {}_H B_n(x,0) &= B_n(x), \\ \frac{\partial}{\partial x}\left({}_H B_n(x,y)\right) &= n\left({}_H B_{n-1}(x,y)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left({}_H B_n(x,y)\right) &= n(n-1)\left({}_H B_{n-2}(x,y)\right), \\ \frac{\partial}{\partial y}\left({}_H B_n(x,y)\right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left({}_H B_n(x,y)\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir (Dattoli vd 1999).

Tanım 2.31 *(Khan vd 2009) Hermite tabanlı Euler polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left({}_H E_n(x,y)\right) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + 1} e^{xt+yt^2} \tag{2.48}$$

ifadesiyle tanımlanır.

(2.48) den

$$\begin{gathered} {}_H E_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \binom{n}{k} E_{n-k} H_k(x,y), \\ {}_H E_n(x+1,y) +_H E_n(x,y) = 2H_n(x,y) \end{gathered}$$

ve

$$ {}_H B_n(x,y) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{n} \left({}_H E_m(2x,4y)\right) B_{n-m}$$

eşitlikleri yazılabilir (Khan vd 2009).

Tanım 2.32 *(Lu 2011) Hermite tabanlı α. mertebeden Apostol-Bernoulli polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left({}_{H}B_{n}^{(\alpha)}(x,y;\lambda)\right)\frac{t^{n}}{n!}=\left(\frac{t}{\lambda e^{t}-1}\right)^{\alpha}e^{xt+yt^{2}},\ \alpha\in\mathbb{C} \tag{2.49}$$

eşitliği tanımlanır.

(2.49)'dan

$$\begin{aligned}{}_{H}B_{n}(x,y;\lambda) &= {}_{H}B_{n}^{(1)}(x,y;\lambda),\\ {}_{H}B_{n}(x,y) &= {}_{H}B_{n}^{(1)}(x,y;1)\end{aligned}$$

yazılabilir (Lu 2011). (2.49) doğuray fonksiyonu tanımından

$$\frac{\partial}{\partial x}\left({}_{H}B_{n}^{(\alpha)}(x,y;\lambda)\right)=n\left({}_{H}B_{n-1}^{(\alpha)}(x,y;\lambda)\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left({}_{H}B_{n}^{(\alpha)}(x,y;\lambda)\right) &= n\,(n-1)\left({}_{H}B_{n-2}^{(\alpha)}(x,y;\lambda)\right),\\ \frac{\partial}{\partial y}\left({}_{H}B_{n}^{(\alpha)}(x,y;\lambda)\right) &= \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\left({}_{H}B_{n}^{(\alpha)}(x,y;\lambda)\right)\end{aligned}$$

elde edilir (Lu 2011).

Hermite tabanlı α. mertebeden Apostol-Bernoulli polinomlarının gerçeklediği rekürans bağıntılarından bazıları

$${}_{H}B_{n}^{(\alpha)}(x,y;\lambda)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}B_{n-m}^{(\alpha)}(\lambda)H_{m}(x,y),$$

$${}_{H}B_{n}^{(\alpha)}(x,y;\lambda)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}B_{n-m}^{(\alpha-1)}(\lambda)\left({}_{H}B_{m}(x,y;\lambda)\right),$$

$$H_{n}(x,y)=\frac{1}{m+1}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+1}{m}\left({}_{H}B_{n}(x,y)\right)$$

şeklindedir (Lu 2011).

2.8. Genelleştirilmiş Frobenius-Euler Polinomları

Tanım 2.33 *(Carlitz 1959) Eulerian polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x|u)\frac{t^n}{n!} = \frac{1-u}{e^t-u}e^{xt}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ *dır.* $x=0$ *için* $H_n^{(\alpha)}(0,u)$ *Frobenius-Euler sayısı elde edilir. Klasik Frobenius-Euler polinomu*

$$m^n \sum_{n=0}^{m-1} u^{m-1-r} H_n\left(x+\frac{r}{m}|u^m\right) = \frac{1-u^m}{1-u}H_n(mu|u)$$

çarpma bağıntısını ve

$$(2u-1)\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}H_{n-r}(u|1-u) = uH_n(u+v|u) - (1-u)\,H_n(u+v|1-u)$$

rekürsiyon bağıntısını sağlar (Carlitz 1959).

Tanım 2.34 *(Kurt ve Şimşek 2011)* $H_n(x|u;b,c)$ *genelleştirilmiş Frobenius-Euler polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x|u;b,c)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{1-u}{b^t-u}\right)c^{xt} \tag{2.50}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. Burada $b,\ c \in \mathbb{R}^+$, $u \in \mathbb{C}$ *ve* $|u|>1$ *dir.*

$b=c=e$ alırsak klasik Frobenius-Euler polinomu elde edilir.

$x=0$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(u;b)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{1-u}{b^t-u}\right)$$

Frobenius-Euler sayısı elde edilir (Kurt ve Şimşek 2011).

(2.50) den

$$H_n(x;u;b,c) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x\ln c)^{n-k}H_k(u;b,c)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial x}H_n(x;u;b,c) = (\ln c)^n H_{n-1}(x;u;b,c)$$

elde edilir (Kurt ve Şimşek 2011).

Son yıllarda üzerinde çok çalışma yapılan genelleştirilmiş Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu $\Phi_{(\mu,\nu)}^{(\rho,\sigma)}(z,s,a)$

$$\Phi_{(\mu,\nu)}^{(\rho,\sigma)}(z,s,a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu)_{\rho n}}{(\nu)_{\sigma n}} \frac{z^n}{(n+a)^s} \tag{2.51}$$

ifadesiyle tanımlanır (Srivastava vd 2010). Burada

$$s,\ z \in \mathbb{C}\ (\,|z|<1) \text{ için } \mu \in \mathbb{C},\ a,\ \upsilon \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-,\ \rho\ ,\ \sigma \in \mathbb{R}^+,\ \ \rho < \sigma\ ;$$

$$|z| = 1 \text{ için } \rho = \sigma \text{ ve } \operatorname{Re}(s-\mu+\nu) > 0$$

dır.

(2.51) denkleminden

$$\Phi_{(\mu,1)}^{(1,1)}(z,s,a) = \Phi_{(\mu)}^{*}(z,s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu)_n}{n!} \frac{z^n}{(n+a)^s}$$

yazılabilir (Srivastava vd 2010).

$$\Phi_{(1,1)}^{(1,1)}(z,s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s}$$

$$|z| < 1 \text{ iken } a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-,\ s \in \mathbb{C};\ |z| = 1 \text{ iken } \operatorname{Re} s > 1$$

olduğunda Lerch-zeta fonksiyonu,

$$\Phi_{(1,1)}^{(1,1)}(1,s,a) = \zeta(s,a),\ \operatorname{Re} s > 1,\ a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$$

olduğunda Hurwitz zeta fonksiyonu,

$$\Phi_{(1,1)}^{(1,1)}(1,s,1) = \zeta(s),\ \operatorname{Re} s > 1,$$

Riemann zeta fonksiyonu elde edilir.

3. BULGULAR

3.1. 2D-Hermite Bernoulli Polinomu İçin Bazı Genelleştirmeler

Bu bölümde (2.29) bağıntısı yardımıyla Natalini anlamında $2D$-Hermite Bernoulli polinomları tanımlanmıştı. Bu polinomların bazı temel özellikleri verilecektir.

(2.29) bağıntısı yardımıyla aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.1 *$a \in \mathbb{R}^+$ olsun. Genelleştirilmiş Bernoulli polinomu $B_n^{[m-1]}(x)$, aşağıdaki bağıntıları sağlar:*

$$B_n^{[m-1]}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]} x^{n-k},$$

$$\begin{aligned} B_n^{[m-1]}(x+y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]}(x) y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]}(y) x^{n-k} \end{aligned}$$

ve

$$B_n^{[m-1]}(ax) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]}(x)(a-1)^{n-k} x^{n-k}.$$

Şimdi Tanım 2.14'ü kullanarak aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 3.2 *α mertebeli genelleştirilmiş Bernoulli polinomu $B_n^{[m-1,\alpha]}(x)$*

$$B_n^{[m-1,\alpha+\beta]}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1,\alpha]}(x) B_{n-k}^{[m-1,\beta]}(y) \tag{3.1}$$

toplamın dağılma bağıntısını sağlar.

İspat. (2.30) bağıntısından

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1,\alpha+\beta]}(x+y)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t^m}{e^t - \sum\limits_{h=0}^{m-1} \frac{t^h}{h!}} \right)^{(\alpha+\beta)} e^{(x+y)t} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1,\alpha]}(x)\frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1,\beta]}(y)\frac{t^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1,\alpha]}(x) B_{n-k}^{[m-1,\beta]}(y) \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları karşılaştırılırsa istenilen sonuç bulunur. ■

Bir önceki bölümde Hermite polinomlarının bazı genelleştirilmeleri verilmiştir. Bunlardan 2001 yıllında Bretti vd tarafından

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(x,y)\frac{t^n}{n!} = e^{xt+yt^2} \tag{3.2}$$

baz iki değişkenli Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu polinomlar için sağladığı bazı özellikler verilmiştir.

Bu bölümde bu polinomlar ile ilgili bazı özdeşlikler ve bağıntılar verilecektir.

Tanım 3.3 *(Bretti vd 2004) 2D Bernoulli polinomu* $B_n^{(2)}(x,y)$

$$\frac{t}{e^t-1}e^{xt+yt^2} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)}(x,y)\frac{t^n}{n!} \tag{3.3}$$

ifadesiyle tanımlanır.

(2.47)'de verilen tanımdaki Hermite-tabanlı Bernoulli polinomu ${}_HB_n(x,y)$ ile (3.3) de verilen $2D$-Bernoulli polinomu $B_n^{(2)}(x,y)$ aynı anlamdadır. Aynı yazarlar farklı yayınlarında her iki tanımı da kullanmışlardır.

Tanımdan $B_n^{(2)}(x,y)$, $2D$ Bernoulli polinomu ile $H_n^{(2)}(x,y)$, iki değişkenli Hermite polinomu arasında

$$\begin{aligned} B_n^{(2)}(x,y) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}H_k^{(2)}(x,y) \\ &= n!\sum_{k=0}^{n}\frac{B_{n-k}}{(n-k)!}\sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{x^{k-2s}y^s}{s!(k-2s)!}, \\ H_n^{(2)}(x,y) &= \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}\frac{1}{n-h+1}B_h^{(2)}(x,y) \end{aligned}$$

bağıntılar vardır.

Teorem 3.4 *$2D$ Bernoulli polinomu*

$$B_n^{(2)}(x+1,y) - B_n^{(2)}(x,y) = nH_{n-1}^{(2)}(x,y) \tag{3.4}$$

bağıntısını sağlar.

İspat. (3.3) denkleminden

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)}(x+1,y)\frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)}(x,y)\frac{t^n}{n!} \\
&= te^{xt+yt^2} \\
&= t\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(x,y)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(B_n^{(2)}(x+1,y) - B_n^{(2)}(x,y)\right)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} nH_{n-1}^{(2)}(x,y)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ nin katsayıları karşılaştırılarak istenen bulunur. ■

3.2. Genelleştirilmiş Parametreli Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler ve Apostol-Genocchi Polinomları İçin Bazı Genelleştirmeler

Bu kesimde ilk olarak Genocchi tipli sayılar ve Genocchi tipli polinomlar ele alınarak, sağladıkları rekürans bağıntıları ispatlanacaktır.

Genelleştirilmiş parametreli Apostol-Genocchi polinomlarını (2.36) da

$$\left(\frac{2t}{\lambda b^t + a^t}\right)^{\alpha} c^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)\frac{t^n}{n!}, \quad \left|t\ln\frac{b}{a} + \ln\lambda\right| < \pi, 1^{\alpha} = 1$$

bağıntısıyla verilmişti. Burada a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$, $\alpha \in \mathbb{C}$ dir.

(2.36) denkleminde $\lambda = \alpha = 1$ ve $x = 0$ alındığında Genocchi tipli $\mathcal{G}_n(a,b)$ sayısı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n(a,b)\frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{b^t + a^t}, \quad |t| < \frac{\pi}{|\ln b - \ln a|} \tag{3.5}$$

eşitliği ile tanımlanır (Luo ve Srivastava 2011).

Bu bölüm boyunca $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ olarak alınmıştır.

$\mathcal{G}_n(1,e) = G_n$, klasik Genocchi sayısıdır. (3.5) den

$$e^{\mathcal{G}(a,b)t} = \frac{2t}{e^{t(\ln b - \ln a)} + 1} e^{-t\ln a}$$

yazılabilir. Bazı hesaplamalardan sonra

$$\mathcal{G}_0(a,b)=0,\ \mathcal{G}_1(a,b)=1$$

$$\mathcal{G}_n(a,b)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\ln b-\ln a)^{k-n}\,\mathcal{G}_k(a,b)=2n\left(\ln\frac{1}{a}\right)^{n-1}$$

rekürans bağıntıları elde edilir. Buradan bir kaç Genocchi sayısı

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_2(a,b) &= -\ln a-\ln b,\\ \mathcal{G}_3(a,b) &= -6(\ln a)^3+3\ln a\ln b\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3.5 *$a,\ b\in\mathbb{R}^+$ olsun. Aşağıdaki bağıntıların herbiri doğrudur:*

$$\mathcal{G}_n(a,b)=(\ln b-\ln a)^{n-1}\,G_n\left(\frac{\ln a}{\ln a-\ln b}\right),$$

$$\mathcal{G}_n(a,b)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\ln a)^{n-k}(\ln b-\ln a)^{k-1}\,\mathcal{G}_k.$$

İspat. (3.5)'den

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_n(a,b)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(\ln b-\ln a)^{n-1}G_n\left(\frac{\ln a}{\ln a-\ln b}\right)\frac{t^n}{n!}$$

yazılır. $\frac{t^n}{n!}$ nin katsayıları eşitlenerek Önerme 3.7 nin ilk kısmı ispatlanmış olur.

İkinci eşitlik için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_n(a,b)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{\ln b-\ln a}\sum_{n=0}^{\infty}(\ln b-\ln a)^n\mathcal{G}_n\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}(-\ln a)^n\frac{t^n}{n!}$$

yazılır. Sağ taraf da Cauchy çarpımı uygulanarak ve $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenerek istenen sonuç elde edilir. ■

(2.36) denkleminde $\lambda=1$ alarak Genocchi tipli $\mathcal{G}_n(x;a,b,c)$ polinomu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_n(x;a,b,c)\frac{t^n}{n!}=\frac{2t}{b^t+a^t}c^{xt},\quad |t|<\frac{\pi}{|\ln b-\ln a|}\tag{3.6}$$

ifadesiyle tanımlanır. Burada $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}^+$, $a\neq b$ dir.

(2.36) ve (3.6)'dan

$$\mathcal{G}_n(0; a, b, c) = \mathcal{G}_n(1; a, b, c)$$

ve

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathcal{G}_n(x; 1, e, e), \\ G_n &= G_n(0) = \mathcal{G}_n(0; 1, e, e) = \mathcal{G}_n(x; 1, e, 1) \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca (2.34) ile verilen $\mathcal{B}_n^{(l)}(x; \lambda; a, b, c)$ genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomlarda, (2.35) $\mathcal{E}_n^{(l)}(x; \lambda; a, b, c)$ genelleştirilmiş Apostol-Euler polinomu ve (2.36) $\mathcal{G}_n^{(l)}(x; \lambda; a, b, c)$ genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomu

$$\mathcal{G}_n(x; a, b, c) = -2\mathcal{B}_n^{(1)}(x; -1; a, b, c) = n\mathcal{E}_{n-1}^{(1)}(x; 1; a, b, c)$$

yazılır.

Önerme 3.6 *a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler vardır:*

$$\mathcal{G}_n(x; a, b, c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x \ln c)^{n-k} \mathfrak{G}_k(a, b)$$

ve

$$\mathcal{G}_n(x; a, b, c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x \ln c)^{n-k} (\ln b - \ln a)^{n-1} G_k \left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b} \right).$$

Bu önermenin ispatı Tanım 3.8 kullanarak hemen elde edilir.

Diğer taraftan Tanım 3.8 den

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n(x + y; a, b, c) \frac{t^n}{n!} \\ &= 2tc^{xt} + 2tc^{xt} \left(\frac{c^{yt} - a^t - b^t}{b^t + a^t} \right) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (x \ln c)^n \frac{t^{n+1}}{n!} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n(x; a, b, c) \frac{t^n}{n!} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} ((y \ln c)^n - (\ln a)^n - (\ln b)^n) \frac{t^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

yazılır. Bu seri özdeşliğinden

$$\mathcal{G}_n(x+y;a,b,c) = 2n\,(x\ln c)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((y\ln c)^{n-k} - (\ln a)^{n-k} - (\ln b)^{n-k}\right)\mathcal{G}_k(x;a,b,c)$$

elde edilir.

Genelleştirilmiş parametreli Apostol-Bernoulli ve Apostol-Euler polinomu (2.34) ve (2.35)'de sırasıyla aşağıdaki ifadeler ile tanımlanır:

$$\left(\frac{t}{\lambda b^t - a^t}\right)^{\alpha} c^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)\frac{t^n}{n!},$$

$$\text{burada } \left|t\ln\frac{b}{a} + \ln\lambda\right| < 2\pi, 1^{\alpha} = 1$$

ve

$$\left(\frac{2}{\lambda b^t + a^t}\right)^{\alpha} c^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)\frac{t^n}{n!},$$

$$\text{burada } \left|t\ln\frac{b}{a} + \ln\lambda\right| < \pi, 1^{\alpha} = 1$$

dır.

Teorem 3.7 *a, $b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$, x, $y \in \mathbb{R}$ ise*

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_m^{(\alpha)}\left(\frac{x+y}{2};\lambda^2;a,b,c\right) \\ = \;& 2^{-m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(y;\lambda;a,b,c)\mathcal{B}_{m-k}^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c) \end{aligned}$$

bağıntısı vardır.

İspat. (2.34) ve (2.35) den

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{B}_m^{(\alpha)}\left(\frac{x+y}{2};\lambda^2;a,b,c\right)\frac{(2t)^m}{m!} \\ &= \left(\frac{2}{\lambda b^t + a^t}\right)^{\alpha}\left(\frac{t}{\lambda b^t - a^t}\right)^{\alpha} c^{\left(\frac{x+y}{2}\right)2t} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(y;\lambda;a,b,c)\mathcal{B}_{m-k}^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)\right)\frac{t^m}{m!} \end{aligned}$$

yazılır. $\frac{t^m}{m!}$ in katsayılarını karşılaştırarak istenen bulunur. ∎

Önteorem 3.8 *x_1, x_2,$\cdots$,x_n bir halkanın değişmeli elemanları ise her $\alpha \in \mathbb{C}$ için*

$$(1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^\alpha = \sum_{v_1, v_2, \cdots, v_m \geq 0} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \cdots, v_m} x_1^{v_1} \cdots x_m^{v_m} \tag{3.7}$$

dir. Burada toplam $v_i \geq 0$ bütün tanımsayılar üzerinde alınıp

$$\binom{\alpha}{v_1, v_2, \cdots, v_m} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - v_1 - v_2 - \cdots v_m + 1)}{v_1! v_2! \cdots v_m!} \tag{3.8}$$

dir (Luo 2009).

Bu önerme daha sonra ki bölümler de kullanılacaktır.

Teorem 3.9 *$m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} & \frac{B_n^{(\alpha)}(mx; \lambda; a, b, c)}{m^{n-\alpha}} \\ = & \sum_{v_1, v_2, \cdots, v_{m-1} \geq 0} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}} \lambda^r \\ & \times \mathcal{B}_n^\alpha \left(x + \frac{r(\ln b - \ln a) + \alpha \ln a(m-1)}{m \ln c}; \lambda^m; a, b, c \right) \end{aligned}$$

dir. Burada

$$r = v_1 + 2v_2 + \cdots + (m-1) v_{m-1},$$

$$\binom{\alpha}{v_1, \cdots, v_{m-1}} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - v_1 - v_2 - \cdots v_m + 1)}{v_1! v_2! \cdots v_m!}$$

dir.

İspat.

$$\frac{t}{\lambda b^t - a^t} = -te^{-t \ln a} \left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{m-1} \lambda^k e^{kt(\ln b - \ln a)}}{1 - \lambda^m e^{mt(\ln b - \ln a)}} \right)$$

alarak ve (2.34) kullanarak

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(mx; \lambda; a, b, c) \frac{t^n}{n!} \\ = & \left(\frac{-te^{-t \ln a}}{1 - \lambda^m e^{mt(\ln b - \ln a)}} \right)^\alpha \left(\sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k e^{kt(\ln b - \ln a)} \right)^\alpha e^{mxt(\ln c)} \\ = & \sum_{v_1, v_2, \cdots, v_{m-1} \geq 0} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}} \lambda^r \\ & \times \left(\frac{-te^{t \ln a}}{1 - \lambda^m e^{mt(\ln b - \ln a)}} \right)^\alpha e^{mt \ln c \left(x + \frac{r(\ln b - \ln a)}{m \ln c} \right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$r = v_1 + 2v_2 + \cdots + (m-1)\, v_{m-1},$$

$$\binom{\alpha}{v_1, \cdots, v_{m-1}} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha - v_1 - v_2 - \cdots v_m + 1)}{v_1! v_2! \cdots v_m!}$$

dir. Gerekli işlemlerden sonra $\frac{t^n}{n!}$ in katsayılarını karşılaştırarak istenen sonuç bulunur. ■

Burada $a = 1$, $b = c = e$ alınırsa Luo 2009 daki yaptığı sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} & S_k^l(m; a, b) \\ = & \sum_{\substack{0 \le v_1, v_2, \cdots, v_m \le l \\ v_1 + v_2 + \cdots + v_m = l}} \binom{l}{v_1, v_2, \cdots, v_m} (\ln b - \ln a)^k (v_1 + 2v_2 + \cdots + m v_m)^k \end{aligned}$$

olsun.

Bu toplam $a = 1$, $b = e$ alırsak Luo (2009) tarafından verilen toplam elde edilir. $S_k^l(m; a, b)$ ile $B_n^{(\alpha)}(x; 1; a, b, a)$ polinomu arasında aşağıdaki ilişki vardır.

Teorem 3.10

$$\begin{aligned} & S_n^l(m, a, b) \\ = & \sum_{k=0}^{l} \sum_{p=0}^{n+k} \binom{l}{k} \binom{n+l}{p} \frac{B_p^{(l-k)}(mk + l; a, b, b) \mathcal{B}_{n+l-p}^{(k)}(-mk; a, b, a)}{(n+1)_l} \end{aligned} \tag{3.9}$$

dir. Burada m, $l \in \mathbb{N}_0$ *ve*

$$(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} S_n^l(m; a, b) \frac{t^n}{n!} \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{0 \le v_1, v_2, \cdots, v_m \le l \\ v_1 + v_2 + \cdots + v_m = l}} \binom{l}{v_1, v_2, \cdots, v_m} (\ln b - \ln a)^n \right. \\ & \left. \times (v_1 + 2v_2 + \cdots + m v_m)^n \right\} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

yukarıda ki denklemden

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^l(m;a,b)\frac{t^n}{n!} = \sum_{\substack{0\leq v_1,v_2,\cdots,v_m\leq l \\ v_1+v_2+\cdots+v_m=l}} \binom{l}{v_1,v_2,\cdots,v_m} e^{t(\ln b-\ln a)(v_1+2v_2+\cdots+mv_m)}$$
$$= \left(\frac{e^{t(\ln b-\ln a)}}{1-e^{t(\ln b-\ln a)}} - \frac{e^{(m+1)t(\ln b-\ln a)}}{1-e^{t(\ln b-\ln a)}}\right)^l$$

yazılır. (2.34)'de $\lambda = 1$ alarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^l(m;a,b)\frac{t^n}{n!}$$
$$= \sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\mathcal{B}_p^{(l-k)}(mk+l;a,b,b)\frac{t^p}{p!}\right)$$
$$\times\left(\sum_{q=0}^{\infty}\mathcal{B}_q^{k}(-mk;1;a,b,a)\frac{t^q}{q!}\right)t^{-l}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\sum_{p=0}^{n+k}\binom{l}{k}\binom{n+l}{p}$$
$$\times\frac{\mathcal{B}_p^{l-k}(mk+l;a,b,b)\mathcal{B}_{n+l-p}^{k}(-mk;a,b,a)}{(n+1)_l}\frac{t^n}{n!}$$

$\frac{t^n}{n!}$ in katsayılarını eşitleyerek istenen bulunmuş olur. ■

(3.9)'da $a = 1$ ve $b = e$ alırsak (Luo 2009, s. 382, (27) denklem) elde edilir.

Parametreli α mertebeli genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomu (2.36) da

$$\left(\frac{2t}{\lambda b^t + a^t}\right)^{\alpha} c^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)\frac{t^n}{n!},$$

$$\text{burada } \left|t\ln\frac{b}{a}+\ln\lambda\right| < \pi,\, 1^{\alpha}=1,\ \alpha,\lambda\in\mathbb{C}$$

eşitliği ile tanımlanmıştır.

Teorem 3.11 *$a,\ b \in \mathbb{R}^+$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ olsun. Bu durumda α mertebeden genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomu $G_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)$*

$$G_n^{(\alpha+\beta)}(x+y;\lambda;a,b,c) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}G_k^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)G_{n-k}^{(\beta)}(y;\lambda;a,b,c) \tag{3.10}$$

eşitliğini gerçekler.

İspat. (2.36) denklemini kullanılarak kolayca görülür. ∎

Teorem 3.12 *a, $b \in \mathbb{R}^+$, n, $r \in \mathbb{N}_0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomu $G_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)$, $n \geq r$ için;*

$$\begin{aligned} & G_n^{(r)}(x;\lambda;a,b,c) \\ = \ & 2^r \binom{n}{r} r! \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r-1}{m} \left(m \ln \frac{b}{a} + x \ln c - r \ln a \right)^{n-r} (-\lambda)^m \end{aligned} \quad (3.11)$$

bağıntısını sağlar.

İspat. (2.36) denkleminden

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(r)}(x;\lambda;a,b,c) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2t}{\lambda b^t + a^t} \right)^r c^{xt}$$

$$\begin{aligned} &= (2t)^r e^{-tr \ln a} \left(1 + \lambda e^{t \ln \frac{b}{a}} \right)^{-r} e^{xt \ln c} \\ &= 2^r t^r \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r-1}{m} (-\lambda)^m \right. \\ & \quad \times \left. \left(m \ln \frac{b}{a} + x \ln c - r \ln a \right)^n \right\} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2^r \binom{n+r}{r} r! \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r-1}{m} (-\lambda)^m \right. \\ & \times \left. \left(m \ln \frac{b}{a} + x \ln c - r \ln a \right)^n \right\} \frac{t^{n+r}}{(n+r)!} \end{aligned}$$

n yerine $n-r$ $(n \geq r)$ alarak ve t^n nin katsayılarını karşılaştırarak (3.11) elde edilir.

∎

Teorem 3.13 *a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$, n, $\alpha \in \mathbb{N}_0$ olsun. Genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomu ile Apostol-Euler ve Apostol-Bernoulli sayısı arasında*

$$\mathcal{G}_n^{(\alpha)}(x;-\lambda^2;a,b,c) = (-1)^\alpha \, 2^{\alpha-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{E}_k^{(\alpha)}(2x;\lambda;a,b,c) \mathcal{B}_{n-k}^{(\alpha)}(0;\lambda;a,b,c) \quad (3.12)$$

denklemi sağlanır.

İspat. (2.34), (2.35) ve (2.36) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_n^{(\alpha)}(x;-\lambda^2;a,b,c)\frac{t^n}{n!}\\
=&\left(\frac{2t}{-\lambda^2 b^t+a^t}\right)^{\alpha}c^{xt}=(-1)^{\alpha}\left(\frac{2}{\lambda b^{\frac{t}{2}}+a^{\frac{t}{2}}}\right)^{\alpha}c^{xt}2^{\alpha}\left(\frac{\frac{t}{2}}{\lambda b^{\frac{t}{2}}-a^{\frac{t}{2}}}\right)^{\alpha}\\
=&(-1)^{\alpha}2^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(2x;\lambda;a,b,c)\frac{t^n}{2^n n!}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{B}_k^{(\alpha)}(0;\lambda;a,b,c)\frac{t^k}{2^k k!}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^{\alpha}2^{\alpha-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{E}_k^{(\alpha)}(2x;\lambda;a,b,c)\right.\\
&\left.\times\,\mathcal{B}_{n-k}^{(\alpha)}(0;\lambda;a,b,c)\right\}\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

dir. $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları karşılaştırarak (3.12) eşitliği bulunur. ■

Şimdiye kadar genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomlarını ele alıp gerçekledikleri bağıntıları verdik ve teoremleri ifade ederek ispatladık.

Şimdi de ${}_HG_n^{(\alpha)}(x,y;\lambda;a,b,c)$ nın Hermite-tabanlı Apostol-Genocchi polinomları gerçeklediği bazı bağıntılar verilerek ispatlanacaktır. Ayrıca Hermite-tabanlı Apostol-Genocchi polinomu ile Hurwitz-Lerch zeta fonksi–yonu arasındaki bir doğrusal ifade gösterilecektir.

Genelleştirilmiş Hermite-tabanlı Apostol-Genocchi polinomunun doğuray fonksiyonu yardımıyla da tanımlanabilir.

Tanım 3.14 *α. mertebeli genelleştirilmiş Hermite-tabanlı Apostol-Genocchi polinomu ${}_HG_n^{(\alpha)}(x,y;\lambda;a,b,c)$*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left({}_H\mathrm{G}_n^{(\alpha)}(x,y;\lambda;a,b,c)\right)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{2t}{\lambda b^t+a^t}\right)^{\alpha}c^{xt+yt^2},\ \left|t\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\ln\lambda\right|<\pi, 1^{\alpha}=1 \tag{3.13}$$

ifadesiyle tanımlanır. Burada a, b, $c\in\mathbb{R}^+$, $a\neq b$, $\alpha\in\mathbb{C}$ dır.

(3.13) den

$${}_HG_n^{(\alpha)}(x,y;\lambda;a,b,c)=\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\mathcal{G}_{n-l}^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)\,(y\ln c)^l}{l!\,(n-2l)!}$$

elde edilir.

Teorem 3.15 ${}_{H}\mathrm{G}_{n}^{(\alpha)}(x,y;\lambda;a,b,c)$ *genelleştirilmiş Hermite-tabanlı Apostol-Genocchi polinomu*

$$\begin{aligned}&{}_{H}\mathrm{G}_{n}^{(\alpha+\beta)}(x_1+x_2,y_1+y_2;\lambda;a,b,c)\\ =\ &\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left({}_{H}\mathrm{G}_{n-k}^{(\alpha)}(x_1,y_1;\lambda;a,b,c)\right)\left({}_{H}\mathrm{G}_{k}^{(\beta)}(x_2,y_2;\lambda;a,b,c)\right)\end{aligned}$$

bağıntısını gerçekler. Burada a, b, $c\in\mathbb{R}^{+}$, α, β *keyfi karmaşık sayı,* $n\in\mathbb{N}_0$ *dır.*

İspat. (3.13) denkleminden kolayca elde edilir. ■

Teorem 3.16 a, b, $c\in\mathbb{R}^{+}$, $a\neq b$, $l\in\mathbb{N}_0$ *olsun. Genelleştirilmiş Hermite-tabanlı Apostol-Genocchi polinomu* ${}_{H}\mathrm{G}_{n}^{(l)}(x,y;\lambda;a,b,c)$ *ile genelleştirilmiş Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu* $\Phi_{\mu}^{*}(z,s,a)$ *arasında*

$$\begin{aligned}&{}_{H}\mathrm{G}_{n}^{(l)}(x,y;\lambda;a,b,c)\\ =\ &2^{l}n!\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\Phi_{l}^{*}\left(-\lambda,l-n+2j,\frac{x\ln c-l\ln a}{\ln b-\ln a}\right)}{j!\,(n-l-2j)!}\ln\left(\frac{b}{a}\right)^{n-l-2j}(y\ln c)^{j}\end{aligned}$$

eşitliği vardır. Burada a, b, $c\in\mathbb{R}^{+}$, $(a\neq b)$, $l\in\mathbb{N}_0$ *dır ve* $|\lambda|<1$, $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_0$.

İspat. (3.13) denkleminden

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\left({}_{H}G_{n}^{(l)}(x,y;\lambda;a,b,c)\right)\frac{t^{n}}{n!}\\ =\ &\left(\frac{2t}{\lambda b^{t}+a^{t}}\right)^{l}c^{xt+yt^{2}}\\ =\ &(2t)^{l}e^{-tl\ln a}\left(1+\lambda e^{t\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)^{-l}e^{xt\ln c}e^{yt^{2}\ln c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\ &2^{l}t^{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(l)_k\,(-\lambda)^{k}}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}(y\ln c)^{j}\frac{t^{2j}}{j!}\\ &\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(x\ln c-l\ln a+k\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^{n}\frac{t^{n}}{n!}\end{aligned}$$

burada $|\lambda|<1$ dır.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left({}_{H}G_{n}^{(l)}(x,y;\lambda;a,b,c)\right)\frac{t^{n}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^l \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(l)_k (-\lambda)^k}{k!}$$
$$\times \left(x \ln c - l \ln a + k \ln \left(\frac{b}{a}\right)\right)^n (y \ln c)^j \frac{t^{2j+n+l}}{j!n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2^l \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\Phi_l^* \left(-\lambda, -n, \frac{x \ln c - l \ln a}{\ln b - \ln a}\right)}{j!n!} \right.$$
$$\left. \times \ln \left(\frac{b}{a}\right)^n (y \ln c)^j \right\} t^{n+l+2j}$$

elde edilir. Şimdi n yerine $n-l$ alırsak $(n > l)$, t^n nin katsayılarını karşılaştırırsak teoremin ifadesi elde edilir. ■

Not 3.17 *Teorem 3.17* $y = 0$ *alınırsa, Srivastava vd 2010 tarafından bulunan Teorem 5'e indirgenir.*

Teorem 3.18 m *tek,* $n \in \mathbb{N}_0$*,* a*,* b*,* $c \in \mathbb{R}^+$ *olsun. Yüksek mertebeden Hermite-tabanlı Apostol-Genocchi polinomu*

$$_H\mathrm{G}_n^{(\alpha)}(mx, y; \lambda; a, b, c)$$
$$= m^{n-\alpha} \sum_{v_1, v_2, \cdots, v_m \geq 0} \binom{\alpha}{v_1, v_2, \cdots, v_m} (-\lambda)^r$$
$$\times {}_H\mathrm{G}_n^{(\alpha)} \left(x + \frac{r(\ln \frac{b}{a}) + \alpha (m-1) \ln a}{m \ln c}, \frac{y}{m^2}; \lambda^m, a, b, c\right)$$

çarpma formülünü gerçekler. Burada $r = v_1 + 2v_2 + \cdots + (m-1) v_{m-1}$ *dir.*

İspat.

$$\frac{2t}{\lambda b^t + a^t} = 2te^{-\ln a} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \left(-\lambda e^{mt(\ln b - \ln a)}\right)^k}{1 + \left(\lambda e^{t(\ln b - \ln a)}\right)^m} \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.7) özdeşliği ile son (3.14) denklemi ve (3.13) Hermite-tabanlı Apostol-

Genocchi polinomu tanımından

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left({}_{H}G_n^{(\alpha)}(mx,y;\lambda;a,b,c)\right)\frac{t^n}{n!} \\
=\;& \left(\frac{2t}{\lambda b^t+a^t}\right)^{\alpha} c^{mxt+yt^2} \\
=\;& \left(\frac{2te^{-\ln a}}{1+\lambda^m e^{mt(\ln b-\ln a)}}\right)^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{m-1}(-\lambda)^k e^{kt(\ln b-\ln a)}\right)^{\alpha} \\
& \times e^{(mxt+yt^2)\ln c} \\
=\;& \sum_{v_1,v_2,\cdots,v_m\geq 0} m^{-\alpha}\binom{\alpha}{v_1,v_2,\cdots,v_m}(-\lambda)^r \\
& \times\left(\frac{2tm}{\lambda^m b^{mt}+a^{mt}}\right)^{\alpha} c^{(mxt+yt^2)\ln c} \\
=\;& \sum_{n=0}^{\infty}\left\{m^{n-\alpha}\sum_{v_1,v_2,\cdots,v_m\geq 0}\binom{\alpha}{v_1,v_2,\cdots,v_m}(-\lambda)^r\right. \\
& \left.\times{}_{H}G_n^{(\alpha)}\left(x+\frac{r(\ln b-\ln a)+\alpha(m-1)\ln a}{m\ln c},\frac{y}{m^2};\lambda^m,a,b,c\right)\right\}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları karşılaştırarak istenen sonuç elde edilir. ■

Eğer Teorem 3.20 de $\lambda=1$, $y=0$ alırsak Jolony-Sharifi-Alskelaye 2013 bulduğu

$$\begin{aligned}
&{}_{H}\mathcal{G}_n^{(\alpha)}(mx;a,b,c) \\
=\;& m^{n-\alpha}\sum_{v_1,v_2,\cdots,v_m\geq 0}\binom{\alpha}{v_1,v_2,\cdots,v_m}(-1)^r \\
& \times\left({}_{H}\mathcal{G}_n^{(\alpha)}\left(x+\frac{r(\ln b-\ln a)+\alpha(m-1)\ln a}{m\ln c};a,b,c\right)\right)
\end{aligned}$$

formülü elde edilir.

Teorem 3.19 *a, b, p, $q\in\mathbb{R}^+$, $m\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{C}$ olsun.*

$$\begin{aligned}
&{}_{H}\mathrm{G}_n^{(\alpha)}(px,qy;\lambda;a,b,c) \\
=\;& \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left({}_{H}\mathrm{G}_{n-k}^{(\alpha)}(x,y;\lambda;a,b,c)\right)((p-1)\,x\ln c)^{k-2j} \\
& \times((q-1)\,y\ln c)^{j}\frac{n!}{j!\,(n-k)!\,(k-2j)!} \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

olur.

İspat. (3.13) denkleminden

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left({}_{H}G_n^{(\alpha)}(px,qy;\lambda;a,b,c)\right)\frac{t^n}{n!}$$
$$=\left(\frac{2t}{\lambda b^t+a^t}\right)^{\alpha}c^{xt+yt^2}c^{(p-1)xt}c^{(q-1)yt^2}$$

yazılır. Bu ifadenin sağ tarafı

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left({}_{H}G_n^{(\alpha)}(x,y;\lambda;a,b,c)\right)\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}((p-1)x\ln c)^k\frac{t^k}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}((q-1)y\ln c)^j\frac{t^{2j}}{j!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}((p-1)x\ln c)^k\left({}_{H}G_n^{(\alpha)}(x,y;\lambda;a,b,c)\right)((q-1)y\ln c)^j\frac{t^{2j+n+k}}{k!n!j!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left({}_{H}G_{n-k}^{(\alpha)}(x,y;\lambda;a,b,c)\right)((p-1)\,x\ln c)^{k-2j}((q-1)\,y\ln c)^j\\
&\quad\times\frac{t^n}{j!\,(n-k)!\,(k-2j)!}
\end{aligned}$$

elde edilir. t^n katsayıları karşılaştırarak (3.15) elde edilir. ∎

3.3. Apostol Tipli Frobenius-Euler Polinomları İçin Bazı Genelleştirmeleri

Tanım 3.20 *(Şimşek 2011, Kurt ve Şimşek 2013) a, b, $c\in\mathbb{R}^+$, $a\neq b$, $x\in\mathbb{R}$ ve $\alpha\in\mathbb{C}$ olsun. Genelleştirilmiş Apostol-tipli Frobenius-Euler polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n^{(\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{a^t-u}{\lambda b^t-u}\right)^{\alpha}c^{xt} \tag{3.16}$$

ifadesiyle tanımlanır.

Eğer (3.16)'da $x=0$ ve $\alpha=1$ alırsak genelleştirilmiş Apostol-tipli Frobenius-Euler sayılarını

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n(u;a,b;\lambda)\frac{t^n}{n!}=\frac{a^t-u}{\lambda b^t-u}$$

elde ederiz (Şimşek 2011).

Yukarıdaki bağıntı da $a=1$ alırsak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n(u;1,b;\lambda)\frac{t^n}{n!}=\frac{1-u}{\lambda b^t-u}$$

elde edilir (Kurt ve Şimşek 2013).

$b = e$ ve $\lambda = 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n(u) \frac{t^n}{n!} = \frac{1-u}{e^t - u}$$

$\mathcal{H}_n(u)$ Frobenius-Euler sayısı elde edilir.

Özel olarak $u = -1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + 1}$$

elde edilir. Burada E_n Euler sayısıdır.

Teorem 3.21 *Aşağıdaki eşitliklerin herbiri doğrudur:*

$$\mathcal{H}_n^{(\alpha)}(x; u; a, b, c; \lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{H}_k^{(\alpha)}(u; a, b, c; \lambda) \left(x \ln c\right)^{n-k}, \tag{3.17}$$

$$\mathcal{H}_n^{(\alpha+\beta)}(x+y; u; a, b, c; \lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{H}_k^{(\alpha)}(x; u; a, b, c; \lambda) \mathcal{H}_{n-k}^{(\beta)}(y; u; a, b, c; \lambda), \tag{3.18}$$

$$\left((x+y)\ln c\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{H}_k^{(-\alpha)}(x; u; a, b, c; \lambda) \mathcal{H}_{n-k}^{(\alpha)}(y; u; a, b, c; \lambda) \tag{3.19}$$

ve

$$\mathcal{H}_n^{(-\alpha)}(x; u^2; a^2, b^2, c^2; \lambda^2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{H}_k^{(-\alpha)}(x; u; a, b, c; \lambda) \mathcal{H}_{n-k}^{(-\alpha)}(x; -u; a, b, c; \lambda). \tag{3.20}$$

İspat. İlk olarak (3.19) denklemini ispatlıyalım.

(3.16) denkleminden

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{(-\alpha)}(x; u; a, b, c; \lambda) \frac{t^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{(\alpha)}(y; u; a, b, c; \lambda) \frac{t^n}{n!}\right) \\ = \;& c^{(x+y)t} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{H}_{n-k}^{(\alpha)}(y; u; a, b, c; \lambda) \mathcal{H}_k^{(-\alpha)}(x; u; a, b, c; \lambda)\right) \frac{t^n}{n!} \\ = \;& \sum_{n=0}^{\infty} \left((x+y)\ln c\right)^n \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları karşılaştırılarak istenen sonuç elde edilir.

Benzer olarak (3.17), (3.18) ve (3.20) eşitliklerin ispatları yapılabilir. ■

(3.19) denkleminden

$$((x+y)\ln c)^n = \left(\mathcal{H}^{(-\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda) + \mathcal{H}^{(\alpha)}(y;u;a,b,c;\lambda)\right)^n$$

ifadesi de yazılabilir. Burada $\left(H^{(\alpha)}(y;u;a,b,c;\lambda)\right)^n = H_n^{(\alpha)}(y;u;a,b,c;\lambda)$ anlamında dır.

Teorem 3.22 $\alpha \in \mathbb{N}$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} (-u)^{\alpha-k} \lambda^k (x\ln c + k\ln a)^n \\
=\ & \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n}{p}\binom{\alpha}{k} (-u)^{\alpha-k} (k\ln b)^p \times \mathcal{H}_{n-p}^{(\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda).
\end{aligned}$$

İspat. (3.16) denkleminden

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} (-u)^{\alpha-k} \lambda^k (x\ln c + k\ln a)^n\right)\frac{t^n}{n!} \\
=\ & \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{n}{p}\binom{\alpha}{k} (-u)^{\alpha-k} (k\ln b)^p\, \mathcal{H}_{n-p}^{(\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda)\right)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında $\frac{t^n}{n!}$ in katsayılarını eşitlersek istenen sonuç elde edilir. ■

Teorem 3.23 *Genelleştirilmiş Apostol-tipli Frobenius-Euler polinomu*

$$\begin{aligned}
&(2u-1)\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathcal{H}_r(x;u;a,b,c;\lambda)\mathcal{H}_{n-r}(y;1-u;a,b,c;\lambda) \\
=\ & (u-1)\,\mathcal{H}_n(x+y;u;a,b,c;\lambda) + u\mathcal{H}_n(x+y;1-u;a,b,c;\lambda) \\
& + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_k(x+y;u;a,b,c;\lambda) - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\ln a)^{n-k}\,\mathcal{H}_k(x+y;1-u;a,b,c;\lambda)
\end{aligned}$$

rekürans bağıntısını sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned}
&(2u-1)\,\frac{a^t-u}{\lambda b^t-u}c^{xt}\,\frac{a^t-(1-u)}{\lambda b^t-(1-u)}c^{yt} \\
=\ & \left(a^t-u\right)\left(a^t-(1-u)\right)c^{(x+y)t}\left(\frac{1}{\lambda b^t-u}-\frac{1}{\lambda b^t-(1-u)}\right)
\end{aligned}$$

özdeşliğinden

$$
\begin{aligned}
&(2u-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n(x;u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n(y;1-u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}\right)\\
= &\left(a^t-1+u\right)\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n(x+y;u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}\\
&-\left(a^t-u\right)\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n(x+y;1-u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitlikte bazı işlemler yaparak

$$
\begin{aligned}
&(2u-1)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathcal{H}_r(x;u;a,b,c;\lambda)\mathcal{H}_{n-r}(y;1-u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}\\
= &(u-1)\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n(x+y;u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}\\
&+u\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n(x+y;1-u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}\\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(\ln a)^{n-r}\mathcal{H}_r(x+y;u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}\\
&-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(\ln a)^{n-r}\mathcal{H}_r(x+y;1-u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

bulunur. İki tarafta $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları karşılaştırarak istenen sonuç edilmiş olur. ■

Eğer önceki teoremde $a=1$, $b=c=e$, $\lambda=1$ alırsak Carlitz' in

$$
\begin{aligned}
&(2u-1)\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}H_r(x;u)H_{n-r}(y;1-u)\\
= &(u-1)\,H_n(x+y;u)+uH_n(x+y;1-u)\\
&+H_n(x+y;u)-H_n(x+y;1-u)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

Şimşek (2011) de $Y_n(x;\lambda;a)$ fonksiyonunun doğuray fonksiyonu

$$
\frac{t}{\lambda a^t-1}a^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(x;\lambda;a)\frac{t^n}{n!},\ (a\geq 1) \tag{3.21}
$$

ifadesi ile tanımlamıştır.

Teorem 3.24 *Genelleştirilmiş Apostol tipli Frobenius-Euler polinomu, $n \geq 1$ için,*

$$\begin{aligned}
& n\left(\mathcal{H}_n(x;u;a,b,b;\lambda) - x\ln c\mathcal{H}_{n-1}(x;u;a,b,c;\lambda)\right) \\
= & \frac{1}{u}\ln a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y_{n-k}(1;\frac{1}{u};a)\mathcal{H}_k(x;u;a,b,b;\lambda) \\
& -\frac{\lambda}{u}\ln b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y_{n-k}(\frac{1}{u};a)\mathcal{H}_k^{(2)}(x+1;u;a,b,b;\lambda)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

bağıntısını sağlar.

İspat. (3.16) denkleminde $c = b$ ve $\alpha = 1$ alıp, t ye göre türev alalım.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_{n+1}(x;u;a,b,b;\lambda)\frac{t^n}{n!} \\
= & \frac{a^t\ln a}{a^t-u}\frac{a^t-u}{\lambda b^t-u}b^{xt} - \frac{b^t\lambda\ln b}{a^t-u}\left(\frac{a^t-u}{\lambda b^t-u}\right)^2 b^{xt} + x\ln b\frac{a^t-u}{\lambda b^t-u}b^{xt}.
\end{aligned}$$

(3.21) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_{n+1}(x;u;a,b,b;\lambda)\frac{t^n}{n!} \\
= & \frac{\frac{1}{u}\ln a}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y_{n-k}(1;\frac{1}{u};a)\mathcal{H}_k(x;u;a,b,b;\lambda)\frac{t^n}{n!} \\
& -\frac{\frac{\lambda}{u}\ln b}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y_{n-k}(\frac{1}{u};a)\mathcal{H}_k^{(2)}(x+1;u;a,b,b;\lambda)\frac{t^n}{n!} \\
& +x\ln b\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n(x;u;a,b,b;\lambda)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

bulunur. Bazı işlemlerden sonra (3.22) elde edilir. ■

Teorem 3.25 *$m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}
& \mathcal{H}_n^{(-m)}(u;a,b,c;\lambda) \\
= & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_k^{(-\alpha)}(-x;u;a,b,c;\lambda)\mathcal{H}_{n-k}^{(\alpha-m)}(x;u;a,b,c;\lambda).
\end{aligned}$$

İspat. (3.16) denkleminde α yerine $\alpha - m$ alalım.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a^t-u}{\lambda b^t-u}\right)^{-\alpha} c^{(-x)t}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n^{(\alpha-m)}(x;u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!} \\
= & \left(\frac{a^t-u}{\lambda b^t-u}\right)^{-m}
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n^{(-\alpha)}(-x;u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n^{(\alpha-m)}(x;u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n^{(-m)}(u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_k^{(-\alpha)}(-x;u;a,b,c;\lambda)\mathcal{H}_{n-k}^{(\alpha-m)}(x;u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n^{(-m)}(u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Her iki tarafta $\frac{t^n}{n!}$ in katsayılarını karşılaştırılırsa Teorem 3.27 ifadesi elde edilir. ■

Teorem 3.26 *$\alpha\in\mathbb{N}$ olsun. Genelleştirilmiş Apostol tipli Frobenius-Euler polinomları ile Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu arasında*

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_n^{(\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda)\\
=&\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}(-u)^{-k}\,\mathfrak{G}\left(-n;x,\frac{\lambda}{u};a,b,c;\alpha,k\right),
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

eşitliği vardır. Burada $\left|\frac{\lambda}{u}\right|<1$ ve $x\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$ dır.

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{G}(s;x,\beta;a,b,c;\alpha,j)\\
=&\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+\alpha-1}{m}\frac{\beta^m}{(x\ln c+j\ln a+m\ln b)^s}
\end{aligned}
$$

dir. Burada

$$\beta\in\mathbb{C},\ |\beta|<1,\ x\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-,\ a\neq b \text{ ve } a,\ b,\ c\in\mathbb{R}^+$$

dır.

İspat. (3.16) denkleminden

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n^{(\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!}\\
=&\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}(-u)^{-k}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+\alpha-1}{m}\left(\frac{\lambda}{u}\right)^m e^{t(x\ln c+k\ln a+m\ln b)}
\end{aligned}
$$

Burada $\left|\frac{\lambda}{u}e^t\right| < 1$ dir. Bu koşul altında

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{(\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}(-u)^{-k}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+\alpha-1}{m}\left(\frac{\lambda}{u}\right)^m (x\ln c + k\ln a + m\ln b)^n \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\left|\frac{\lambda}{u}\right| < 1$ dür. Her iki tarafta $\frac{t^n}{n!}$ in katsayılarını eşitleyerek istenen sonuç elde edilir. ■

Not 3.27 *(3.23) denkleminde $a = 1$, $b = c = e$ alırsak*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_n^{(\alpha)}(x;u;\lambda) &= -\frac{(1-u)^{\alpha}}{u}\mathfrak{G}(-n;x,\frac{\lambda}{u};1,e,e;\alpha,1) \\
&= -\frac{(1-u)^{\alpha}}{u}\Phi(\frac{\lambda}{u},-n,x),
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\alpha \in \mathbb{C}$, $\left|\frac{\lambda}{u}\right| < 1$ ve $x \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$ dır.

Buradan

$$\mathfrak{G}(-n;x,\frac{\lambda}{u};1,e,e;\alpha,1) = \Phi(\frac{\lambda}{u},-n,x)$$

bulunur.

3.4. Hermite Polinomları Yardımıyla Üstel Fonksiyonların İntegrali

Bu kesimde üstel bazı fonksiyonların integrali Hermite polinomları yardımıyla bulunacaktır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

olduğu analizden bilinmektedir. Benzer olarak yukarıdaki integralden faydalanarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ax^2+bx+c\right)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \tag{3.24}$$

olduğu hemen görülür (Dattoli vd 1998, Babusci vd 2012).

i. $\int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)^n e^{-cx^2+\alpha x}dx$ **tipi integrallerin değeri**

$I_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (ax+b)^n \, e^{-cx^2+\alpha x} dx$ olsun. Her iki tarafı $\frac{t^n}{n!}$ çarpıp toplam alalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} I_n \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (ax+b)^n \, \frac{t^n}{n!} e^{-cx^2+\alpha x} dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (ax+b)^n \, \frac{t^n}{n!} e^{-cx^2+\alpha x} dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(ax+b)t} e^{-cx^2+\alpha x} dx \\
&= e^{bt+c\left(\frac{at+\alpha}{2c}\right)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-c\left(x+\frac{at+\alpha}{2c}\right)^2} dx.
\end{aligned}$$

(3.24) kullanarak

$$= \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{bt+\frac{a^2t^2+2at\alpha+\alpha^2}{4c}} \tag{3.25}$$

elde edilir.

(3.25) ve (3.2) denklemlerinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n \frac{t^n}{n!} = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{\frac{\alpha^2}{4c}} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(b+\frac{a\alpha}{2c}, \frac{a^2}{4c}) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. $\frac{t^n}{n!}$ nin katsayılarını karşılaştırarak

$$I_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (ax+b)^n \, e^{-cx^2+\alpha x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{\frac{a^2}{4c}} H_n(b+\frac{a\alpha}{2c}, \frac{a^2}{4c})$$

elde edilir.

ii. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (ax+b)^m \, (cx+d)^n \, e^{-fx^2+\alpha x} dx$ **tipli integraller**

Çift değişkenli ya da çok değişkenli ve parametreli Hermite polinomlarının benzer tipte farklı tanımları vardır.

Örneğin, dört değişkenli bir parametreli Hermite polinomu (3.2) eşitliğine benzer olarak

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!} H_{n,m}(x,y;w,z|\tau) = e^{xu+yu^2+vw+zv^2+\tau uv} \tag{3.26}$$

ifadesiyle tanımlanır (Dattoli vd 1998, Babusci vd 2012).

$$I_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)^m (cx+d)^n e^{-fx^2+\alpha x} dx$$

olsun. İki tarafı $\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}$ çarpıp toplamı alalım.

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} I_{n,m}\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!} \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (ax+b)^m \frac{u^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (cx+d)^n \frac{v^n}{n!} e^{-fx^2+\alpha x} dx \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} e^{(ax+b)u} e^{(cx+d)v-fx^2+\alpha x} dx \\
= & \; e^{bu+dv} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-fx^2+x(\alpha+au+cv)} dx \\
= & \; e^{bu+dv} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f\left(x^2-\frac{au+cv+\alpha}{f}x+\left(\frac{au+cv+\alpha}{2f}\right)^2\right)} e^{\frac{(au+cv+\alpha)^2}{4f}} dx \\
= & \sqrt{\frac{\pi}{f}} e^{bu+dv+\frac{1}{4f}(au+cv+\alpha)^2} \\
= & \sqrt{\frac{\pi}{f}} e^{\frac{\alpha^2}{4f}} e^{u\left(b+\frac{a\alpha}{2f}\right)+u^2\frac{a^2}{4f}+v\left(d+\frac{c\alpha}{2f}\right)+v^2\frac{c^2}{4f}+\frac{ac}{4f}uv}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

bulunur. Bu son eşitlikte $\bar{x} = b + \frac{a\alpha}{2f}$, $\bar{y} = \frac{a^2}{4f}$, $\bar{w} = d + \frac{cf}{2f}$, $\bar{z} = \frac{c^2}{4f}$, $\bar{\tau} = \frac{ac}{2f}$ alınıp (3.26) eşitliği de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} I_{m,n}\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!} \\
= & \sqrt{\frac{\pi}{f}} e^{\frac{\alpha^2}{4f}} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} H_{m,n}(\bar{x},\bar{y};\bar{w},\bar{z}|\bar{\tau})\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilir. İki tarafta $\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}$ in katsayıları eşitlenirse

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)^m (cx+d)^n e^{-fx^2+\alpha x} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{f}} e^{\frac{\alpha^2}{4f}} H_{m,n}(b+\frac{a\alpha}{2f},\frac{a^2}{4f};d+\frac{c\alpha}{2f},\frac{c^2}{4f}|\frac{ac}{2f})
\end{aligned}$$

bulunur.

iii. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n(ax+b,y)\,e^{-cx^2+\alpha x}dx$ **tipli integraller**

Aynı yöntem ile

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} I_n \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n(ax+b,y)\,e^{-cx^2+\alpha x}dx\frac{t^n}{n!}\\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(ax+b)t+yt^2-cx^2+\alpha x}dx\\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2+x(\alpha+at)+bt+yt^2}dx\\ &= e^{bt+yt^2+\frac{(\alpha+at)^2}{4c}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-c\left(x-\frac{\alpha+at}{2c}\right)^2}dx\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{c}}e^{\frac{\alpha^2}{4c}}\,e^{t\left(b+\frac{a\alpha}{2c}\right)+t^2\left(y+\frac{a^2}{4c}\right)}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{c}}e^{\frac{\alpha^2}{4c}}\sum_{n=0}^{\infty} H_n\left(b+\frac{a\alpha}{2c},y+\frac{a^2}{4c}\right)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n(ax+b,y)\,e^{-cx^2+\alpha x}dx\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{c}}e^{\frac{\alpha^2}{4c}}H_n\left(b+\frac{a\alpha}{2c},y+\frac{a^2}{4c}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

iv. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(ax+b,y)\,H_n(ax+b,y)\,e^{-cx^2+\alpha x}dx$ **tipli integraller**

Önceki integrallerde yapılan benzer yöntem kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} I_{m,n}\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{f}}e^{\frac{\alpha^2}{4f}}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} H_{m,n}(\bar{x},\bar{y};\bar{w},\bar{z}|\bar{\tau})\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}I_{m,n} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(ax+b,y)\,H_n(cx+d,y)\,e^{-fx^2+\alpha x}dx\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{f}}e^{\frac{\alpha^2}{4f}}H_{m,n}\left(b+\frac{a\alpha}{2f},y+\frac{a^2}{4f};d+\frac{c\alpha}{2f},z+\frac{c^2}{4f}|\frac{ac}{2f}\right)\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak Dattoli-Natalini tarafından tanımlanan yeni tip Bernoulli polinomları $2D$-Bernoulli polinomlarında toplama ve fark bağıntıları ispatlandı. Parametreli Apostol-Bernoulli polinomlarında genelleştirmeler yapılarak, Raabe bağıntısının genelleştirilmesi ispatlandı. Parametreli Apostol-Genocchi polinomu ile Hurwitz-Lerch zeta fonksiyonu arasında doğrusal bağıntı verildi. Apostol-tipli parametreli Frebenius-Euler polinomlarında negatif üstlü Frobenius-Euler polinomları arasında bazı rekürans bağıntıları elde edildi. Carlitz tarafından Frobenius-Euler polinomunda bulunan bir sonucun genelleştirilmesi yapılmıştır.

Son olarakta klasik analizde hesaplanamayan bazı belirli integralleri de Hermite polinomları yardımıyla hesaplanabilirliği gösterildi.

5. KAYNAKLAR

ABRAMOWITZ M. and STEGUN I. A. 1964. Handbook of Mathematical function with formulas, graphs and mathematical tables. National bureau of standards. App. Math. Series 55.

ARICI S., SEO J. J. and ACIKGOZ M. 2012. Hermite polynomials related to Genocchi, Euler and Bernstein polynomials. *arxiv.* 1205.6547vI.

AZAR R., GILLS J. and VICTOR J. D. 1982. Combinatorial application of Hermite polynomials. *Siam J. Math. Analysis.* 13 (5): 879-890.

BRETTI G., NATALINI P. and RICCI P. E. 2004. Generalizations of the Bernoulli polynomials and Appell polynomials. *Abstract and Appl. Analysis.* 613-623.

BRETTI G. and RICCI P. E. 2004. Multidimensional extension of the Bernoulli and Appell polynomials. *Taiwanese J. of Math.* 48 (3): 415-418.

BABUSCI D., DATTOLI G. and FRANCO M. DEL 2011. Lectures on mathematical methods for physics. Agenzia Nazionale Per Le Nuouve Tecnologie, Italy.

BABUSCI D., DATTOLI G. and QUATTROMINI 2012. On integrals involving Hermite polynomials. *Appl. Math. Lett.* 25 (8): 1157-1160.

CARLITZ C. 1959. Eulerian numbers and polynomials. *Math. Mag.* 32: 247-260.

CHEON G.-S. 2003. A note on the Bernoulli and Euler polynomials. *Appl. Math. Lett.* 16 (3): 365-368.

DATTOLI G., CHICCALI C., LORENZUTTA S., MAINO G. and TORRE A. 1994. Theory of generalized Hermite polynomials. *Comput. Math. Appl.* 28 (4): 71-83.

DATTOLI G., LORENZUTTA S., MAINO G. and TORRE A. 1997. Theory of multiindex multivariable Bessel functions and Hermite polynomials. *Le Matematiche. vol LII.* 177-195.

DATTOLI G., TORRE A. and CARPANESE M. 1998. The Hermite-Bessel functions: A new point of view on the Theory of the generalized Bessel functions. *Rad. Phys. and Chem.,* 51(3): 221-228.

DATTOLI G., RENIERI A. and TORRE A. 1998. Generalized polynomials and derivation of integral involving products of Hermite polynomials. *Rad. Phys. and Chem.,* 53 (4): 391-395.

DATTOLI G., LORENZUTTA S. and CESSARANO C. 1999. Finite sums and generalized forms of Bernoulli polynomials. *Rendiconti di Math. series VII.* 19: 385-391.

DATTOLI G. 2002. Bilateral generating functions and operational methods. *J. of Math. Anal. and Appl.* 269 (2): 716-725.

DATTOLI G., RICCI P. E. and CESSARANO C. 2002. Differential equations for Appell type polynomials. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 5 (1): 69-75.

DATTOLI G., CESAROS C. and LORENZUTTA S. 2002. Bernoulli numbers and polynomials from a more general point of view. *Rendconti di Math. Series VII.* (22): 193-202.

DATTOLI G. 2003. Incomplete $2D$-Hermite polynomials, properties and application. *J. of Math. Anal. and Appl.* 284 (2): 447-454.

DATTOLI G. and KHAN S. 2007. Operational methods: An extension from ordinary monomials to multi-dimensional Hermite polynomials. *J. of Difference Equation and Appl.* 13 (7): 671-677.

FISK S. 2000. Hermite polynomials. *J. of Combinatorial Theory Series A.* 91: 334-336.

GABOUTY S. and KURT B. 2012. Some relations involving Hermite-based Apostol-Genocchi polynomials. *Appl. Math. Sci.* 6 (82): 4091-412.

JOLANY H., SHARIFI H. and ALSKELAYE R. E. 2013. Some results for the Apostol-Genocchi polynomials of higher order. *Bull. of Malaysian Math. Sci. Soc.* 36(2).

KHAN S., YASMIN G., KHAN R. and HASSAN N. A. M. 2009. Hermite-based Appell polynomials: properties and Applications. *J. of Math. Anal. and Appl.* 351: 756-761.

KHAN S., AL-SAAD M. W. and YASMIN G. 2010. Some properties of Hermite-based Sheffer polynomials. *Appl. Math. and Comp.* 217 (6): 2169-2183.

KHAN M. A., KHAN A. H. and AHMAD N. 2011. A note on a new three variable analogue of Hermite polynomials of I kind. *Thai. J. of Math.* 9 (2): 391-404.

KIM D. S., KIM T., RM S.-H. and LEE S. H. 2012. Hermite polynomials and their applications associated with Bernoulli and Euler numbers. *Discrete Dynamics in Nature and Society.* doi:10.1155/2012/974632.

KURT B. 2010. A further generalization of the Bernoulli polynomials and on the $2D$-Bernoulli polynomials $B_n^2(x, y)$. *Appl. Math. Sci.* (4): 2315-2322.

KURT B. and SIMSEK Y. 2011-a. Frobenius-Euler type polynomials related to Hermite-Bernoulli polynomials. *AIP Conf. Proc.* 1389: 385-388.

KURT B. and SIMSEK Y. 2011-b. Notes on generalization of the Bernoulli type polynomials. *Appl. Math. and Comp.* 218 (3): 906-911.

KURT B. and SIMSEK Y. 2013. On the generalized Apostol-type Frobenius-Euler polynomials. *Advances in Difference Equations.* doi:10.1186/1687-1847-2013-1.

LUO Q.-M., GUO B.-N., QI F. and DEBNATH L. 2003. Generalzations of Bernoulli numbers and polynomials. *IJMMS.* 59: 3769-3776.

LUO Q.-M., QI F. and DEBNATH L. 2003. Generalizations of Euler numbers and polynomials. *IJMMS.* 59: 3893-3901.

LUO Q.-M. and SRIVASTAVA H. M. 2006. Some relationships between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Comp. and Math. with Appl.* 41: 631-642.

LUO Q.-M. 2009. The multiplication formulas for the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials of higher order. Integ. *Trans. and Special Func.* 20 (5): 377-391.

LUO Q.-M. and SRIVASTAVA H. M. 2011. Some generalizations of the Apostol-Genocchi polynomials and the Stirling numbers of the second kind. *Appl. Math. and Comp.* 217 (8): 5707-5728.

LU Da.-Q. 2011. Some properties of Bernoulli polynomials and their generalizations. *Appl. Math. Lett.* 24 (3): 746-751.

NATALINI P. and BERNARDINI A. 2003. A generalization of the Bernoulli polynomials. *J. of Appl. Math. (3):* 153-163.

RAINVILLE E. D. 1960. Special functions. The Macmillan Company.

SRIVASTAVA H. M. and CHOI J. 2001. Series Associted with the Zeta and Related Functions. Kluwer Academic Press.

SRIVASTAVA H. M. and PINTER A. 2004. Remarks on some relationships between the Bernoull and Euler polynomials. *Appl. Math. Lett.* 17 (4): 375-380.

SRIVASTAVA H. M., GARG M. and CHOUDHARY S. 2010. A new generalization of the Bernoulli and related polynomials. *Russion J. Math. Phys.* 17: 251-261.

SRIVASTAVA H. M., GARG M. and CHOUDHARY S. 2011. Some new families of the generalized Euler and Genocchi polynomials. *Taiwanese J. Math.* 15: 283-305.

SRIVASTAVA H. M., KURT B. and SIMSEK Y. 2012. Some families of Genocchi type polynomials and their interpolation functions. I*nteg. Trans. and Special Function.* 23 (12): 919-938.

SIMSEK Y. 2011. Generating functions for generalized Stirling type numbers, Array type polynomials, Eulerian type polynomials and their applications. arxiv:1111.3848vII.2011.

TREMBLY R., GABOURY S. and FUGERE B.-J. 2011. A new class of generalized Apostol-Bernoulli polynomials and some analogues of the Srivastava-Pinter addition theorem. *Appl. Math. Lett.* 24: 1888-1893.

TREMBLY R., GABOURY S. and FUGERE B.-J. 2012. Some new classes of generalized Apostol-Euler and Apostol-Genocchi polyomials. *IJMMS*. doi:10.1155/-2012/182785.

WANG W.-P., JIA C.-Z. and WANG T.-M. 2008. Some results on the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Comp. Math. Appl.* 55 (7): 1322-1332.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Antalya' da doğdu. İlk-orta ve lise öğrenimimi Antalya' da tamamladı. 2003 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında matematikçi olarak mezun oldu. Lisans üstü eğitime Ocak 2008 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalına başladı. 2013 Ocak ayında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora öğrenimini tamamladı.