T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASAL ALT MODÜLLER VE DEDEKİND HALKALARI

Ortaç ÖNEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2012

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASAL ALT MODÜLLER VE DEDEKİND HALKALARI

Ortaç ÖNEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2012

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASAL ALT MODÜLLER VE DEDEKİND HALKALARI

Ortaç ÖNEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 31/12/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (90) not takdir edilerek Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mustafa ALKAN (Danışman)...................

Yrd. Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ...

Yrd. Dr. Sevda BARUT (SEZER).................................

ÖZET

ASAL ALT MODÜLLER VE DEDEKİND HALKALARI

Ortaç ÖNEŞ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa ALKAN

Aralık 2012, 73 sayfa

Asal ideal kavramının modül versiyonu olan asal alt modül kavramı, değişmeli halkalar üzerinde tanımlanan modüller kuramı için önemli bir kavramdır. Tezimizde bu kavram için Çallıalp ve Tekir (2009), Dummit ve Foote (1999) ve Kaplansky (1952) kitaplarından; Jenkins ve Smith (1992) makalesinden geniş ölçüde yararlanılanarak, asal alt modüllerin zincir uzunluğunu ve bunları kullanarak halkayı belirleyeceğiz.

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tez boyunca kullanılacak olan temel kavramlar ve gösterimlerin tanımları verilmiştir. İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve sonuçlar ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde, bu tezin hedef aldığı konunun gelişimi için gerekli olan modül teorisi ile ilgili bazı tanım, teorem ve sonuçlar verilmiştir. Bu bölümde verilen Asal alt modül kavramı, dördüncü bölüm için çok önemlidir.

Dördüncü bölüme, en küçük asal alt modül kavramı ile başlanmıştır. Onu takiben, halka ve modülün boyutu kavramı tanıtılarak, temel özellikleri verilmiştir. Bu bölümün geri kalan kısmında, modülün boyutunun bağlı bulunduğu halka ile nasıl bir ilişki içinde olduğu incelenmiştir. Bunlar kullanılarak Dedekind halka için bir karakterizasyon verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Asal Alt Modül, Radikal formülü
Dedekind Halkası, Modülün Boyutu

JÜRİ: Doç. Dr. Mustafa ALKAN (Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ

Yrd. Dr. Sevda BARUT (SEZER)

ABSTRACT

PRIME SUBMODULES AND DEDEKIND RINGS

Ortaç ÖNEŞ

M.Sc. Thesis in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa ALKAN

December 2012, 73 pages

Prime submodule which is a version of prime ideal is an important concept for modules defined on commutative rings. By making use of Çallıalp and Tekir's (2009) book, Dummit and Foote's (1999) book, Kaplansky's (1952) book and Jenkins and Smith's (1992) article for this concept in this thesis, we determine height of prime submodule chain and determine rings by using it.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, we give some basic definitons and notation used throughout thesis. In the second chapter, we give some basic definitons and results which will be used in the later chapters. In the third chapter, we give some definitions, theorems and results related with the module theory, which are essential for developing the aim of this thesis.

Fourth chapter is started by minimum prime submodules. Subsequent to it, concept of a module dimension and ring are introduced and their basic characteristics are given. In the remainder of this chapter, how dimension of module ties in ring on which module depends is examined. By using these, a characterizatin is given for Dedekind ring.

KEYWORDS: Prime Submodule, Radical formula
Dedekind Ring, Dimension of a Module

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Mustafa ALKAN (Supervisor)
Asst. Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ
Asst. Prof. Dr. Sevda SEZER (BARUT)

ÖNSÖZ

Bu tezde Asal Alt Modüller ve Dedekind Halkası çalışılmıştır. Ayrıca, Asal alt modüller yardımıyla bir modülün boyutu incelenmiştir.

Bu tez çalışması boyunca bilgisini ve desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Mustafa ALKAN'a ve her zaman yanımda olan, bu tezin gerçek yaratıcısı olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$N \subseteq M$	N, M'nin alt modülü
$Spec(R)$	R'nin asal ideallerinin kümesi
$\oplus$	Dik toplam
htP	P'nin uzunluğu (boyutu)
Çekf	f homomorfizmasının çekirdeği
$\operatorname{Im} f$	f homomorfizmasının görüntüsü
$T(M)$	M modülünün torsion alt modülü
$\sqrt{I}$	I idealinin radikali
$\Lambda(R)$	R'nin ideallerinin kümesi
$(\mathfrak{M}, R)$	$\mathfrak{M}$, R'nin maksimal ideali

1. GİRİŞ

Bu tez çalışması dört ana bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerin içeriklerini şu şekilde özetleyebiliriz.

Birinci bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel kavramlar ve gösterimlerin tanımları verilmiştir.

İkinci bölümde halka ve modülün, Dedekind halkasının ve Ayrık Değer halkası tanıtılmış ve bunların temel özellikleri Çallıalp ve Tekir (2009), Dummit ve Foote (1999) ve Kaplansky (1952) kaynakları temel alınarak çalışılmıştır.

Üçüncü bölümde çarpımsal modül, daha sonraki bölüm için önemli olan asal alt modül kavramı incelenmiş ve bunun temel özelliklerine çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde bu çalışmanın önemli sonuçları olan modülün boyutu kavramı tanıtılmış ve modülün boyutunun bağlı bulunduğu halka ile nasıl bir ilişki içinde olduğu incelenmiştir. Bunlar kullanılarak Dedekind halka için bir karakterizasyon verilmiştir

1.1. Çalışmanın kapsamı

Bu çalışmada, Jenkins-Smith (1992) ve Man-Smith (2002) makaleleri temel alınarak, bir modülün boyutu incelenmiş ve halkanın Krull boyutu ile olan ilişkisi araştırılmıştır. Ayrıca modülün boyut kavramı kullanılarak, bazı halka sınıfları için karakterizasyonlar verilmiştir. Modülün boyut kavramı ve halkaların karakterizasyonu için gerekli olan temel bilgiler de , Çallıalp ve Tekir (2009), Dummit ve Foote (1999) ve Kaplansky (1952) kaynaklarından derlenmiş ve çalışılmıştır.

1.2. Temel Kavramlar ve Gösterimler

2. bölümde tez boyunca sıkça kullanılan bazı kavramların tanımı ve gösterimleri verilecektir. Diğer özel kavramların tanımı ve gösterimleri, tez boyunca konu içerisinde uygun yerlerde açıklanacaktır.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

Bu tezin giriş bölümde daha sonra kullanılacak olan halka ve modül teorideki temel bilgiler (Dummit ve Foote 1999),(Tekir ve Çallıalp 2009) temel kaynak alınarak hazırlanmıştır. Aksi belirtilmediği sürece de R ile birleşmeli, birimli ve değişmeli herhangi bir halka gösterilecek, modüller de R üzerindeki modül olarak çalışılacaktır.

2.1. Halka ve Modüller

Tanım 2.1 *A, R halkasının alt kümesi olsun. R'nin A'yı kapsayan en küçük idealine A'nın ürettiği ideal denir ve (A) ile gösterilir. Özel olarak, $A = \varnothing$ ise $(A) = 0$ olur. $A = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise $(A) = (a)$ ya a'nın ürettiği temel ideal denir. $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ sonlu bir küme ise (A) ya sonlu üretilmiş ideal ve A'ya da üreteç kümesi denir.*

$A \subseteq R$ alt kümesi için;

$$(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} r_i a_i : r_i \in R \text{ ve } a_i \in A,\ i = 1,2,...,k,\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

$A = \{a_1,a_2,...,a_n\}$ sonlu kümesi için;

$$(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i a_i : r_i \in R \text{ ve } a_i \in A \right\}$$

ve tek elemanlı $A = \{a\}$ kümesi için;

$$(A) = (a) = Ra = \{ra : \ r \in R\}$$

dir.

Tanım 2.2 *i) Q, R halkasının ideali ve $Q \subset R$ olsun. Her $a,b \in R$ için $ab \in Q$ iken $a \in Q$ veya bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $b^n \in Q$ ise Q'ya R'nin asalımsı ideali denir.*

ii) P, R halkasının ideali ve $P \subset R$ olsun. Her $a,b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ ise P'ye R'nin asal ideali denir.

iii) M, R halkasının ideali ve $M \subset R$ olsun. $M \subseteq L \subseteq R$ olan R'nin her L ideali için $M = L$ veya $L = R$ ise M'ye R'nin maksimal ideali denir.

iv) R halka ve I, R halkasının ideali olsun. I idealinin radikali, I'yı kapsayan tüm asal ideallerin kesişimi olarak tanımlanır ve $\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P} P$ ile gösterilir.

Örnek 2.3 *i)* $\mathbb{Z}$ *halkasında* $25\mathbb{Z}$ *ideali asalımsı idealdir.*

ii) $\{0\} \cup \{p\mathbb{Z} : p$ *asal sayı*$\}$, $\mathbb{Z}$*'nin asal idealleridir.*

iii) $\{p\mathbb{Z} : p$ *asal sayı*$\}$, $\mathbb{Z}$*'nin maksimal idealleridir.*

iv) $\sqrt{12\mathbb{Z}} = 6\mathbb{Z}$*'dir.*

Tanım 2.4 *Her ideali temel ideal olan tamlık bölgesine temel ideal bölgesi (TİB) denir.*

Tanım 2.5 *R halka ve $0 \neq p \in R$, tersinir olmayan bir eleman olsun.*

i) a, $b \in R$ için, $p = ab$ olması, a veya b'nin R'de tersinir olmasını gerektirirse p'ye R'nin indirgenemez elemanı denir.

ii) a, $b \in R$ için, $p|ab$ olması, $p|a$ veya $p|b$ olmasını gerektirirse p'ye R'nin asal elemanı denir.

iii) a, $b \in R$ için, $b = au$ olacak şekilde bir $u \in R$ tersinir elemanı varsa, a ile b elemanlarına ilgili elemanlar denir ve $a \approx b$ ile gösterilir.

Tamlık bölgesinde her asal eleman indirgenemez elemandır. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin, $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ de

$$9 = 3^2 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$$

dir. 3, $2 + \sqrt{-5}$, $2 - \sqrt{-5}$ indirgenemez elemanlardır, fakat asal değillerdir.

Tanım 2.6 *R tamlık bölgesi olsun. R'de sıfırdan ve tersinir elemanlardan farklı, her eleman sonlu tane indirgenemez elemanın çarpımı olarak yazılabiliyor ve bu yazılış sıra ve ilgililik düşünülmeden tek türlü ise R'ye tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen bölge (TAÇ) denir.*

Her TİB, TAÇ'dır. Ancak $\mathbb{Z}[x]$ TAÇ'dır fakat TİB değildir.

Tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen bölgede indirgenemez elemanlar asal da olacağından, indirgenemezlik ve asallık denktir.

Şimdi de vektör uzayların genellemesini hatırlayalım.

Tanım 2.7 $(M,+)$ *değişmeli grup ve R halka olsun.*

$(r,m) \to rm$ gösterimi ile $R \times M \to M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, M'ye R üzerinde modül veya kısaca R-modül denir.

i) Her $r \in R$, her m,$m' \in M$ için, $r(m+m') = rm + rm'$,

ii) Her $r, r' \in R$, her $m \in M$ için, $(r + r')m = rm + r'm$,

iii) Her $r, r' \in R$, her $m \in M$ için, $(rr')m = r(r'm)$,

iv) Her $m \in M$ için, $1_R.m = m$.

Tanım 2.8 *R halka, M R-modül ve $N \subseteq M$ boş olmayan bir alt küme olsun. N de M'deki işlem ile bir R-modül ise N'ye, M'nin bir alt modülü veya R-alt modülü denir.*

Eğer N, M'nin alt kümesi ise N, M'nin alt modül olması ile her a,$b \in N$, $r \in R$ için $a - b \in N$ ve $rb \in N$ olmasının denk olduğunu biliyoruz. Ayrıca K, L ve N, M'nin alt modülleri ve $K \subseteq N$ ise $K + (L \cap N) = (K + L) \cap N$ olduğu kolayca görülebilir. Bir modülün, alt modülü kullanılarak, R'nin bir ideali $(N : M) = Ann(M/N) = \{r \in R : rM \subseteq N\}$ şeklinde tanımlanabilir. Bu ideal tez boyunca sık sık kullanılacaktır.

Tanım 2.9 *R halka, M R-modül ve N, M'nin has alt modülü olsun. M'nin, N'yi kapsayan N'den başka hiçbir has alt modülü yoksa N'ye maksimal alt modül denir.*

Önerme 2.10 *M sonlu üretilmiş R-modül ise M'nin, her has alt modülünü kapsayan bir maksimal alt modülü vardır.*

Kanıt N, M'nin bir has alt modülü ve

$$\Omega = \{K \subset M : N \subseteq K \subset M\}$$

olsun. $N \in \Omega$ olduğundan, $\Omega \neq \varnothing$'dır. Ω'da herhangi bir zincir, $\{K_i\}$ alalım. $\cup K_i$ de M'nin N'yi kapsayan has bir alt modülüdür. Gerçekten, $\cup K_i$ has alt modül olmasaydı, M'nin sonlu sayıdaki tüm üreteçlerini bulundurur ve tüm üreteçler zincirdeki bir K_i alt modülünde olurdu. Bu ise K_i'lerin has alt modül olması ile çelişir. Şu halde $\cup K_i \in \Omega$ ve alınan zincirin bir üst sınırıdır. Zorn lemmadan Ω'nin bir maksimal elemanı vardır. Bu maksimal eleman da N'yi kapsayan bir maksimal alt modüldür.

Tanım 2.11 *R tamlık bölgesi ve M R-modül olsun. $m \in M$ elemanı için $rm = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R$ varsa, m'ye M'nin torsion(burulmalı) elemanı denir.*

$$T(M) = \{m \in M : rm = 0 \text{ olacak şekilde bir } 0 \neq r \in R \text{ var.}\}$$

alt modülüne de M'nin torsion(burulmalı) alt modülü denir.

$T(M) = M$ ise M'ye torsion(burulmalı) modül, $T(M) = 0$ ise M'ye torsion-free (serbest burulmalı) modül denir.

Tanım 2.12 *R halka ve M R-modül olsun.*

$$(0 : M) = \{r \in R : rM = 0\}$$

idealine M modülünün sıfırlayıcısı denir ve $Ann(M)$ ile gösterilir.

Eğer $Ann(M) = 0$ ise M modülüne sadık modül denir.

Tanım 2.13 *R halka ve M R-modül olsun. M'nin alt modüllerinin her artan*

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq ...$$

zincirinde, her $i \in \mathbb{Z}^+$ için $M_n = M_{n+i}$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa M'ye Noetherian modül denir.

Teorem 2.14 *R halka ve M R-modül olsun. M Noetherian modüldür ancak ve ancak M'nin her alt modülü sonlu üretilmiştir.*

Örnek 2.15 *i) $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modül Noetherian modüldür.*

ii) $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$-modül Noetherian modül değildir.

Tanım 2.16 *R halka ve P_0,P_1,...,P_n asal idealler olsun. $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_n$ zincirine, n-uzunluğunda bir asal ideal zinciri denir. R halkasının tüm asal ideal zincirlerinin uzunluklarının en büyük üst sınırına R'nin Krull boyutu denir ve $D(R)$ ile gösterilir..*

Örnek 2.17 *$R = \mathbb{Z}$ ise $D(R) = 1$'dir.*

Önerme 2.18 *R tek boyutlu bir Noetherian bölge ve $r \in R$ olsun. O halde r'yi içeren R'nin sonlu sayıda maksimal ideali vardır.*

Kanıt

$$\phi = \left\{ I \in \Lambda(R)\colon\ I = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \ (n \in \mathbb{N} \text{ ve } \mu_i,\ r\text{'yi içeren } R\text{'nin maksimal ideal}), \right\}$$

olsun. R Noetherian olduğundan, ϕ'nin maksimal elemanı vardır. Buna $J = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n$ diyelim. Varsayalım ki μ, R'nin r'yi içeren maksimal ideali ve $\mu \neq \mu_i$ $(i = 1, ..., n)$ olsun. J maksimal olduğundan, $\mu + \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n$ olur. Bu varsayım ile çelişir. Böylece $\mu_i = \mu$ $(i = 1, ..., n)$'dir. Sonuç olarak r'yi içeren R'nin sonlu sayıda maksimal ideali vardır.

Tanım 2.19 *R halka ve S, çarpımsal alt kümesi olsun. $S^{-1}R$'de aşağıdaki toplama ve çarpma işlemleri*

$$\begin{aligned} \frac{a}{s} + \frac{b}{t} &= \frac{at + bs}{st} \\ \frac{a}{s}\frac{b}{t} &= \frac{ab}{st} \end{aligned}$$

ile $(S^{-1}R, +, .)$ bir halkadır. Bu halkaya R'nin S'ye göre yerelleştirmesi denir. Halkanın sıfırı, $0_{S^{-1}R} = \frac{0_R}{1}$ ve birimi, $1_{S^{-1}R} = \frac{1_R}{1}$ dir. Ayrıca, $\pi : R \to S^{-1}R$, $\pi(r) = \frac{r}{1}$ ile tanımlı π fonksiyonu bir halka homomorfizmasıdır. π'ye doğal homomorfizma denir.

Önerme 2.20 *R bir halka ve S, çarpımsal alt kümesi olsun.*

i) $S^{-1}R$'nin ideallerinin yapısı, I, R'nin bir ideali olmak üzere

$$S^{-1}I = \left\{ \lambda \in S^{-1}R :\ \lambda = \frac{a}{s} \text{ olacak şekilde } a \in I \text{ ve } s \in S \text{ var} \right\}$$

şeklindedir.

ii) $S^{-1}R$'nin asal ideallerinin yapısı, P, R'nin bir asal ideali ve $S \cap P = \varnothing$ olmak üzere

$$S^{-1}P = \left\{ \gamma \in S^{-1}R :\ \gamma = \frac{p}{s} \text{ olacak şekilde } p \in P \text{ ve } s \in S \text{ var} \right\}$$

şeklindedir.

2.2. Dedekind Halkaları

Dedekind halkaları cebirsel geometride ve cebirsel sayılar teorisinde önemli bir tutar. Ayrıca, bir halka üzerindeki herhangi bir modülün yapısının belirlenmesi zor bir problem olmasına rağmen Dedekind halka üzerindeki modül yapıları kısmi olarak belirlenebilir. R TİB iken sonlu üretilmiş modülün yapısını (Dummit ve Foote 1999)'dan hatırlayarak başlayalım.

Teorem 2.21 *R temel ideal bölgesi ve M sonlu üretilmiş R-modül olsun. $P_1^{\alpha_1}$, $P_2^{\alpha_2}$,...,$P_t^{\alpha_t}$ R'nin asal ideallerinin kuvvetleri ve $r \geq 0$ olmak üzere*

$$M \cong R^r \oplus (R/P_1^{\alpha_1}) \oplus (R/P_2^{\alpha_2}) \oplus ... \oplus (R/P_t^{\alpha_t})$$

şeklindedir.

R temel ideal bölgesi olsun. R'nin sıfırdan farklı her I ideali, $0 \neq a \in R$ olmak üzere, $I = Ra$ şeklindedir. R bir TAÇ olduğundan, $p_1, p_2, ..., p_n$'ler R'nin indirgenemez elemanları olmak üzere, $a = p_1^{t_1} p_2^{t_2} ... p_n^{t_n}$ şeklindedir. Şu halde

$I = Ra = Rp_1^{t_1} p_2^{t_2} ... p_n^{t_n} = \prod_{i=1}^{n} Rp_i^{t_i} = \prod_{i=1}^{n} (Rp_i)^{t_i}$ olmak üzere asal ideallerin bir çarpımı şeklinde yazılabilir. Bu gözlem ile aşağıdaki tanım anlamlı olacaktır.

Tanım 2.22 *R tamlık bölgesi olsun. R'nin her has ideali, sonlu sayıda asal idealin çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa R'ye Dedekind bölgesi denir.*

Temel ideal bölgesinde sonlu üretilmiş modülleri belirleyebildiğimiz gibi Dedekind bölgelerindeki benzer yapıyı (Dummit ve Foote 1999)'dan hatılayalım. Bu nedenden dolayı da, Dedekind bölgeleri halka teoride önemli bir yer tutmaktadır.

Teorem 2.23 *R Dedekind bölgesi, M sonlu üretilmiş R-modül; n, M'nin rankı, $T(M)$ M'nin torsion alt modülü, $P_1^{\alpha_1}$, $P_2^{\alpha_2}$,...,$P_t^{\alpha_t}$ R'nin asal ideallerinin kuvvetleri, $\alpha_1 \geq 1$, $t \geq 0$ ve I, R'nin bir ideali olmak üzere*

$$M \cong R^{n-1} \oplus I \oplus T(M)$$

dir ve $T(M) \cong R/P_1^{\alpha_1} \oplus R/P_2^{\alpha_2} \oplus ... \oplus R/P_t^{\alpha_t}$ 'dir.

Tanım 2.24 *R tamlık bölgesi ve F, R'nin kesir cismi olsun. I, F'nin sıfırdan farklı R-alt modülü ve bir $0 \neq d \in R$ için, $dI \subseteq R$ ise I'ya R'nin kesirsel ideali denir.*

R tamlık bölgesi ve F, R'nin kesir cismi olsun. R'nin sıfırdan farklı her ideali bir kesirsel idealdir. Tersine R'de kapsanan her kesirsel ideal de R'nin bir idealidir. R'de kapsanan kesirsel ideallere tam idealler de denir. Ayrıca, I bir kesrisel ideal ise bir $0 \neq d \in R$ için, $dI \subseteq R$ olduğundan, dI da R'nin (tam) idealidir. Şu halde I kesirsel ideal ise bir $0 \neq d \in R$ ve bir J (tam) ideali için, $I = (\frac{1}{d})J$'dir.

Örnek 2.25 *R tamlık bölgesi ve F, R'nin kesir cismi olsun.*

i) F'nin sıfırdan farklı sonlu üretilmiş her R-alt modülü kesirsel idealdir.

ii) I ve J kesirsel ideallerinin çarpımı, ideallerin çarpımı gibi,

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : \ a_i \in I, \ b_i \in J \ \text{ve } n \in \mathbb{N} \right\}$$

ile tanımlanır. R'nin tüm kesirsel idealleri, bu çarpım işlemi altında birimi R ideali olmak üzere, birimli ve değişmeli bir yarı gruptur.

Tanım 2.26 *R tamlık bölgesi ve kesir cismi F olsun. I, R tamlık bölgesinin kesirsel ideali olmak üzere, $II' = R$ olacak şekilde bir I' kesirsel ideali varsa, I'ya terslenebilir kesirsel ideal ve I' kesirsel idealine de I'nın tersi denir.*

I, R tamlık bölgesinin terslenebilir kesirsel ideali ise $II' = R$ olacak şekilde I' vardır ve buradan $I' \subseteq (R : I)$ elde edilir. Diğer taraftan, $I\,(R : I) \subseteq R$ olduğunu biliyoruz. O halde $(R : I) = I'I\,(R : I) \subseteq I'R = I'$ bulunur. Böylece $I' = (R : I)$ elde edilir. O zaman I'nın tersi tek türlü olarak belirlidir ve tersi $(R : I)$'dır. Şu halde I'nın terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $I\,(R : I) = R$ olmasıdır.

Bundan sonra I, R tamlık bölgesinin terslenebilir kesirsel ideali ise tek türlü olarak belirli olan tersini I^{-1} ile göstereceğiz. Ayrıca I, R tamlık bölgesinin terslenebilir bir has ideali ise $R \subset I^{-1}$ dir. Gerçekten, $I \subseteq R$'den $II^{-1} = R \subseteq I^{-1} = I^{-1}R$ bulunur ve I has ideal olduğundan, $R \neq I^{-1}$dir.

Tanım 2.27 *R tamlık bölgesi ve kesir cismi F olsun. $x \in F$ olmak üzere, Rx şeklindeki kesirsel ideale kesirsel temel ideal denir. Her $0 \neq x \in F$ için, Rx kesirsel temel ideali terslenebilirdir ve tersi de Rx^{-1} kesirsel temel idealdir.*

R tamlık bölgesi ve $I_1, ..., I_n$ kesirsel idealler olsun. $I_1 I_2 ... I_n$'nin terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul her I_i kesirsel idealinin terslenebilir olduğunu hemen görebiliriz.

Örnek 2.28 *$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminde, $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$'nin bir kesirsel idealidir. Ayrıca, $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ terslenebilir kesirsel idealdir ve tersi $2\mathbb{Z}$'dir.*

Teorem 2.29 *R tamlık bölgesi, kesir cismi F ve I da R'nin ideali olsun. I kesirsel ideal terslenebilir ise*

i) I ideali sonlu üretilmiştir.

ii) I asal ideallerin bir çarpımı ise, bu çarpım sıra gözetilmeden tek türlü yazılabilir.

Kanıt (i) I herhangi bir terslenebilir kesirsel ideal olsun. $I^{-1}I = R$ olduğundan, $\sum_{i=1}^{n} u_i v_i = 1$ olacak şekilde, $u_i \in I^{-1}$ ve $v_i \in I$ elemanları $(1 \leq i \leq n)$ vardır. Herhangi bir $x \in I$ için, $x = \sum_{i=1}^{n} (u_i x) v_i$ ve $u_i x \in R$'dir. Şu halde I, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ lerle üretilmiş bir idealdir.

(ii) $P_1, P_2, ..., P_n$ ve $Q_1, Q_2, ..., Q_m$ asal idealler olmak üzere,

$$I = P_1 P_2 ... P_n = Q_1 Q_2 ... Q_m$$

olsun. $I^{-1}I = R$ olduğundan,

$$(I^{-1} P_2 ... P_n) P_1 = R$$

dir. Böylece P_1 terslenebilirdir. Benzer şekilde, P_i ve Q_j asal ideallerinin de terslenebilir olduğu gösterilebilir. P_1 asal ve $Q_1 Q_2 ... Q_m \subseteq P_1$ olduğundan, bir $j \in \{1, 2, ..., m\}$ için $Q_j \subseteq P_1$'dir. Gerekirse yeniden sıralayarak, $Q_1 \subseteq P_1$ olduğunu kabul edebiliriz.

$$P_1^{-1} Q_1 \subseteq P_1^{-1} P_1 = R$$

olduğundan $P_1^{-1} Q_1$, R'nin bir idealidir. Şu halde

$$P_1 (P_1^{-1} Q_1) = Q_1$$

olması $P_1 \subseteq Q_1$ veya $P_1^{-1} Q_1 \subseteq Q_1$ olmasını gerektirir. $P_1^{-1} Q_1 \subseteq Q_1$ olması $P_1^{-1} \subseteq R$ olmasını gerektirdiğinden, bu bir çelişkidir. Çünkü, P_1 (tam) ideal olduğundan,

$R \subset P_1^{-1}$'dir. Şu halde $P_1^{-1}Q_1 \subseteq Q_1$ durumu da olamaz. Buradan $P_1 \subseteq Q_1$ ve böylece $P_1 = Q_1$ bulunur. I'yı P_1^{-1} ile çarparsak $P_2...P_n = Q_2...Q_m$ elde ederiz. Benzer şekilde devam edilerek, istenilen sonuç elde edilir.

Aşağıdaki teorem Dedekind bölgesinin önemli özelliklerini sıralamaktadır.

Teorem 2.30 *R Dedekind bölgesi olsun. Şu halde ;*

i) R'nin sıfırdan farklı her ideali terslenebilirdir.

ii) R'nin sıfırdan farklı her has ideali, asal ideallerin bir sonlu çarpımı olarak,(sıra gözetilmeden) tek türlü olarak yazılabilir.

iii) R Noetherian tamlık bölgesidir.

iv) R'nin sıfırdan farklı her asal ideali maksimaldir.

Kanıt *i)* R'nin sıfırdan farklı her ideali, sonlu sayıda asal idealin çarpımı olarak yazılabileceğinden, ispatı tamamlamak için, sıfırdan farklı her asal idealin

terslenebilir olduğunu göstermek yeterlidir.

P, R'nin sıfırdan farklı bir asal ideali ve $0 \neq p \in P$ olsun. Şu halde $P_1, P_2, ..., P_n$ R'nin asal idealleri olmak üzere $Rp = P_1P_2...P_n$'dir. P asal ideal olduğundan ve

$$Rp = P_1P_2...P_n \subseteq P$$

olduğundan, bir i için $P_i \subseteq P$'dir. P_i'nin maksimal olduğunu gösterirsek $P_i = P$ ve P terslenebilirdir.

Şimdi R'nin her terslenebilir asal idealinin maksimal olduğunu gösterelim. Q, R'nin terslenebilir asal ideali ve $a \in R \backslash Q$ olsun. Eğer

$$aQ + Q^2 = Q$$

olduğunu gösterirsek, Q terslenebilir olduğundan, $aR + Q = R$ bulunur. Böylece, Q maksimal ideal olur.

Şimdi $aQ+Q^2 = Q$ olduğunu ispatlayalım. İlk olarak R/Q'nun Dedekind bölgesi olduğunu gösterelim. R/Q'nun sıfırdan farklı her ideali $\mathcal{I}$;

I, R'nin bir ideali ve $Q \subset I$ olmak üzere, $\mathcal{I} = I/Q$ şeklindedir. $P_1, P_2, ..., P_n$ R'nin asal idealleri olmak üzere $I = P_1P_2...P_n$ ise $P_1/Q, P_2/Q, ..., P_n/Q$ ler de

R/Q'nun asal idealleridir ve

$$\mathcal{I} = I/Q = (P_1/Q)(P_2/Q)\ ...(P_n/Q)$$

asal ideallerin çarpımı olur. O halde R/Q Dedekind bölgesidir.

$P_1, P_2, ..., P_n$ ve $Q_1, Q_2, ..., Q_m$'ler asal idealler olmak üzere,

$$I = aR + Q = P_1.P_2...P_n$$

$$J = a^2R + Q = Q_1.Q_2...Q_m$$

olsun. R/Q'da $I^2/Q = J/Q$'dur. J/Q, R/Q'nun temel ideali olduğundan terslenebilirdir. R/Q Dedekind bölgesi olduğundan, Teorem 2.29'e göre, I^2/Q ve J/Q'nun asal çarpanları sıra gözetilmeden aynıdır.

$$P_1^2P_2^2...P_n^2 = Q_1Q_2...Q_m$$

ve $I^2 = J$ dir. Böylece

$$Q \subseteq I^2 = J = a^2R + aQ + Q^2 \subseteq aR + Q^2$$

ve her $x \in Q$ elemanını $a, d \in R$ ve $y \in Q^2$ olmak üzere, $x = ad + y$ olarak yazabiliriz. Şu halde

$$ad = x - y \in Q$$

ve böylece $a \notin Q$ olduğundan, $d \in Q$'dur. Bundan dolayı

$$Q \subseteq aQ + Q^2 \subseteq Q$$

ve $aQ + Q^2 = Q$ elde edilir. Q terslenebilir olduğundan $aR + Q = R$ olup Q maksimal olur.

(ii) ve (iii)'ün ispatı, Teorem 2.29'den açıktır.

(iv)'ün ispatı, (i)'nin ispatı içinde yapılmıştır.

Örnek 2.31 *F bir cisim olmak üzere, $F[X_1, X_2]$ polinomlar halkası Noetheriandır, fakat Dedekind bölgesi değildir. Çünkü, (X_1) asal ideali $(X_1) \subset (X_1, X_2)$ olduğundan maksimal değildir.*

Önerme 2.32 *R Dedekind bölgesi olsun. R'nin TİB olması için gerek ve yeter koşul TAÇ olmasıdır.*

Kanıt R TİB ise TAÇ bölge olduğunu biliyoruz. Şimdi bir Dedekind bölgesinin TAÇ bölgesi olması durumda, her idealinin temel ideal olacağını gösterelim. Bunun için de, sıfırdan farklı her P asal idealinin temel ideal olduğunu göstermek yeterlidir. $0 \neq a \in P$ alalım. R TAÇ bölge aldığımızdan, birim olmayan a elemanını, $i = 1, 2, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$, $e_i \geqslant 1$ ve p_i ler asal elemanlar olmak üzere, $a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}$ şeklinde tek türlü yazabiliriz.

$a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i} \in P$ olduğundan, P asal ideali bir $i = 1, 2, ..., n$ için, $p_i \in P$ asal elamanını kapsar. Şu halde $Rp_i \subseteq P$ ve p_i asal eleman olduğundan, Rp_i bir asal ideal ve Teorem 2.30 (iv)'den maksimaldir. Böylece, $P = Rp_i$ temel ideal bulunur.

Tanım 2.33 *R tamlık bölgesi ve I ile J de iki ideali olsun. Eğer $I = JK$ olacak şekilde bir K ideali varsa J ideali I idealini böler veya I ideali J ideali ile bölünür denir.*

Eğer J ideali I idealini bölerse, $I \subseteq J$ olduğu açıktır. R Dedekind bölgesi ise tersi de doğrudur. Gerçekten, $I \subseteq J$ ise

$$K = IJ^{-1} \subseteq JJ^{-1} = R$$

dir. Böylece $JK = I$ olacak şekilde, R halkasının bir K ideali bulunabildiğinden, J ideali I idealini böler. Şu halde Dedekind bölgesinde, idealler arasında bölünebilme ters kapsanma ile denktir.

Önerme 2.34 *R Dedekind bölgesi ve $P_1, P_2, ..., P_n$'ler birbirinden ve sıfırdan farklı asal idealler olsun. Her $i = 1, 2, ..., n$ için, $x_i \in R$ elemanları ve $e_i \geqslant 0$ tam sayıları verildiğinde,*

$$x - x_i \in P_i^{e_i} \text{ ve } x - x_i \notin P_i^{e_i+1}$$

olacak şekilde bir $x \in R$ vardır.

Kanıt Her $i = 1, 2, ..., n$ için, $P_i^{e_i+1} \subset P_i^{e_i}$ olduğundan, $a_i \in P_i^{e_i}$ fakat, $a_i \notin P_i^{e_i+1}$ olacak şekilde $a_i \in R$ elemanları bulabiliriz. Şu halde Çin Kalan Teoremine göre,

$$x \equiv x_i + a_i \mod (P_i^{e_i+1})$$

olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. Ayrıca,

$$x - x_i = [x - (x_i + a_i)] + a_i \in P_i^{e_i} \text{ ve } x - x_i \notin P_i^{e_i+1}$$

de sağlanır.

Önerme 2.35 *R Dedekind bölgesi ve sonlu sayıda asal ideali varsa, R temel ideal bölgesidir.*

Kanıt R Dedekind bölgesi olduğundan, sıfırdan farklı her has ideali, sıfırdan farklı asal ideallerin bir çarpımıdır. Şu halde ispatı tamamlamak için, sıfırdan farklı her asal idealin bir temel ideal olduğunu göstermek yeterlidir.

R Dedekind bölgesinin asal idealleri, $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ olsun. Herhangi bir sabit $1 \leq h \leq n$ alalım. Önerme 2.34'den, her $i = 1, 2, ..., n$ için, $x_i = 0$ ve her $i \neq h$ için, $e_i = 0$, $e_h = 1$ alınırsa,

$$x_h \in P_h,\ x_h \notin P_h^2 \text{ ve } her\ i \neq h\ için,\ x_h \notin P_i$$

olacak şekilde bir $x_h \in R$ bulunabilir. Böylece, $P_h | Rx_h$, $P_h^2 \nmid Rx_h$ ve her $i \neq h$ için, $P_i \nmid Rx_h$ olduğundan, $P_h = Rx_h$ temel ideal bulunur. Bu işlem her $1 \leq h \leq n$ için yapılabileceğinden, R'nin her asal idealinin bir temel ideal olduğu gösterilmiş olur.

Önerme 2.36 *R Dedekind bölgesi ve I sıfırdan farklı bir has ideali ise R/I temel ideal halkasıdır.*

Kanıt $n_i \geqslant 1$, P_i'ler asal ideal olmak üzere, $I = \prod_{i=1}^{n} P_i^{n_i}$ olsun.

$$R/I \cong \prod_{i=1}^{n} R/P^{n_i}$$

olur. Böylece bir P asal ideali için, R/P^n nin temel ideal halkası olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

R Dedekind bölgesi olduğundan, $P^n \subseteq J$ ise $J = P^m$, $m \leq n$ şeklindedir.

$$J/P^n = P^m/P^n = (P/P^n)^m$$

dir. Bir $p \in P \backslash P^2$ elemanı için, Rp idealinin asal ideallerin çarpımı olarak yazılışı, $P \neq P_i'$ olmak üzere,

$$Rp = PP_1'P_2'...P_t'$$

olsun. $Rp + P^n = P$ olduğundan, P/P^n nin bir temel ideal böylece, R/P^n nin her J/P^n idealinin de bir temel ideal olduğu anlaşılır.

Dedekind bölgesinin bir Noetherian bölge olduğunu biliyoruz. Şu halde her ideali sonlu üretilmiştir. Şimdi özel olarak her idealinin en fazla iki elemanla üretildiğini ispatlayalım.

Sonuç 2.37 *R Dedekind bölgesi ve I sıfırdan farklı bir ideali ise elemanlardan biri keyfi olarak seçilmek üzere iki elemanla üretilmiştir.*

Kanıt $0 \neq a \in I$ herhangi bir eleman olmak üzere, Önerme 2.36'a göre R/Ra temel ideal halkası ve I/Ra temel idealdir. Şu halde bir $b \in I$ için, $I = Ra + Rb$ bulunur.

Önerme 2.38 *R Dedekind bölgesi ve S, R'nin çarpımsal alt kümesi ise $S^{-1}R$ de Dedekind bölgesidir. Ayrıca, R'nin her P asal ideali için, R_p yerelleşmesi de temel ideal bölgesidir.*

Kanıt (Çallıalp ve Tekir 2009, Önerme 4.2.2)'ye göre $S^{-1}R$'nin her J ideali, R Dedekind bölgesindeki bir I idealinin genişlemesi ve I ideali asal ideallerin sonlu bir çarpımı olarak yazılabildiğinden,

(Çallıalp ve Tekir 2009, Önerme 4.2.9 (2))'den,

$$I = \prod_{i=1}^{s} P_i^{n_i} \Rightarrow J = I^e = \prod_{i=1}^{s} (P_i^e)^{n_i}$$

ve P_i^e ler $S^{-1}R$ ya da $S^{-1}R$'nin asal idealleri olduğundan, ilk iddia gösterilmiş olur.

İlk iddiadan, her P asal ideali için R_P yerelleşmesi de sıfırdan farklı tek asal ideali PR_P olan bir Dedekind bölgesidir. R_P'nin sıfırdan farklı her ideali de $(PR_P)^n$

şeklindedir. Böylece, $p \in P \backslash P^2$ ise $pR_P = PR_P$ temel ideal ve R_P'nin her ideali de temel ideal olur.

Şimdi modül teoride önemli bir sınıf olan ve vektör uzaylarıyla benzer özellikler taşıyan bir modül sınıfı tanımlayalım.

Tanım 2.39 *R halka, M R-modül ve $S = \{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M'nin bir üreteç sistemi olsun.*

i) Her $m \in M$ elemanı, $r_\alpha \in R$, $y_\alpha \in S$ olmak üzere , $m = \sum\limits_{\alpha \in I} r_\alpha y_\alpha$ şeklinde sonlu bir toplam olarak yazılabiliyor ve bu yazılış tek türlü oluyorsa, $S = \{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ye M'nin bir tabanı denir.

ii) M modülüne de S üzerinde serbest modül denir.

iii) Eğer M modülü bir serbest modülün dik toplananı ise M'ye projektif modül denir.

Önerme 2.40 *R tamlık bölgesi ve I sıfırdan farklı kesirsel ideal olsun. I'nın terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul I'nın projektif R-modül olmasıdır.*

Kanıt I, R'nin terslenebilir bir kesirsel ideali olsun. Böylece $a_i \in I$ ve $a_i^* \in I^{-1}$ olmak üzere, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i a_i^* = 1$'dir. $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ üzerinde F serbest R-modülünü alalım. $f : F \to I$ fonksiyonunu,

$$f(\sum_{i=1}^{n} r_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$$

ile $g : I \to F$ fonksiyonunu da,

$$g(c) = \sum_{i=1}^{n} (c a_i^*) y_i$$

ile tanımlayalım. f ve g'nin R-modül homomorfizması olduğu açıktır.

$$(fg)(c) = f(\sum_{i=1}^{n} (c a_i^*) y_i) = \sum_{i=1}^{n} (c a_i^*) a_i = c(\sum_{i=1}^{n} a_i a_i^*) = c$$

ve böylece $fg = 1$'dir. I, F'nin dik toplamında bir terimdir. Bundan dolayı I projektiftir.

I sıfırdan farklı ve projektif bir R-modül olsun. $f : F \to I$ ve $g : I \to F$ ler $fg = 1$ olacak şekilde R-modül homomorfizmaları ve F serbest R-modülü vardır.

$0 \neq a \in I$ olsun. $a'_i \in R$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$, F'nin üreteç sisteminin bir alt kümesi olmak üzere,

$$g(a) = \sum_{i=1}^{n} a'_i y_i$$

olsun. $i = 1, 2, ..., n$ için $a_i = f(y_i)$ ve $a^*_i = \frac{a'_i}{a}$ diyelim. g bir R-modül homomorfizması olduğu için, herhangi bir $b \in I$ için

$$bg(a) = ag(b) = g(ab)$$

dir. F'nin serbest üreteç sisteminde kalan diğer elemanlar $j \in J$ için, $\{y_j\}$ olmak üzere

$$g(b) = \sum_{i=1}^{n} b'_i y_i + \sum_{j \in J} b'_j y_j$$

olsun. Şu halde $g(ba) = ag(b)$ eşitliğinden yararlanarak

$$\sum_{i=1}^{n} (ba'_i) y_i = \sum_{i=1}^{n} (ab'_i) y_i + \sum_{j \in J} (ab'_j) y_j$$

olur. Buradan, $b'_i \in R$ ve $i = 1, 2, ..., n$ için $ba'_i = ab'_i$ ve $b'_i \in R$ olmak üzere

$$g(b) = \sum_{i=1}^{n} b'_i y_i$$

dir. Ayrıca a^*_i ın tanımından her $b \in I$ için

$$ba^*_i = b(\frac{a'_i}{a}) = b'_i \in R$$

dir. Böylece $i = 1, 2, ..., n$ için $a^*_i \in I^{-1}$ dir. $fg = 1$ olduğundan

$$a = fg(a) = f(\sum_{i=1}^{n} a'_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} a'_i a_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (aa^*_i) a_i = a(\sum_{i=1}^{n} a_i a^*_i)$$

ve böylece $\sum_{i=1}^{n} a_i a^*_i = 1$'dir. $II^{-1} = R$ ve I terslenebilirdir.

Teorem 2.41 *R tamlık bölgesinde aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) R Dedekind bölgesidir;

ii) R'nin sıfırdan farklı her ideali terslenebilirdir;

iii) R'nin her kesirsel ideali terslenebilirdir;

iv) R'nin sıfırdan farklı her ideali R-modül olarak projektiftir.

Kanıt $(i) \Rightarrow (ii)$ Teorem 2.30'den elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Önerme 2.40'den elde edilir.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ I, R'nin kesirsel ideali ve $0 \neq d \in R$ için, $dI \subseteq R$ olsun. Her $q \in I$ için, $f(q) = dq$ ile tanımlı R-modül homomorfizmasıyla I, dI'ya izomorftur. dI projektif olduğundan, I da projektiftir.

Önerme 2.40'den, I terslenebilirdir.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Açıktır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ R'nin sıfırdan farklı her ideali terslenebilir olduğundan, Teorem 2.29'den sıfırdan farklı her ideali sonlu üretilmiştir. Bundan dolayı R Noetheriandır.

$$\Psi = \{I \subseteq R : \ I \text{ sonlu sayıda asal idealin çarpımı olarak yazılamasın.}\}$$

$\Psi \neq \varnothing$ ise R Noetherian olduğundan Ψ'nin I gibi bir maksimal elemanı vardır. I asal olamayacağı için maksimal de olamaz. Şu halde $I \subset P \subset R$ olacak şekilde bir P maksimal ideali vardır. Sıfırdan farklı her ideal terslenebilir olduğu için $IP^{-1} \subset R$'dir. Şu halde $I \subseteq IP^{-1}$ dir. $I = IP^{-1}$ ise $P^{-1} = R$'dir. Bu ise, P'nin has ideal olması ile çelişkidir. Bundan dolayı, IP^{-1} sonlu sayıda asal idealin bir çarpımıdır. Şu halde $I = (IP^{-1})P$ sonlu sayıda asal idealin çarpımı olur. Bu ise I'nın seçimi ile çelişir. O halde $\Psi = \varnothing$ olur. Dolayısıyla R Dedekind bölgesidir.

Önerme 2.42 *R tamlık bölgesi ve kesir cismi F olsun. R Noetherian ve sıfırdan farklı her asal ideali maksimal olsun. R'nin sıfırdan farklı her has I ideali için, $qI \subseteq R$ olacak şekilde bir $q \in F \backslash R$ vardır.*

Kanıt I, R'nin sıfırdan farklı bir has ideali olsun. $I = Ra$ temel ideal ise
$a^{-1} \in F \backslash R$ ve $a^{-1}I \subseteq R$'dir.

I temel ideal olmasın ve $0 \neq a \in I$ olsun. $I \subseteq P$ olacak şekilde bir P maksimal ideali alalım. R Noetherian olduğundan, (Çallıalp ve Tekir 2009, Önerme 5.1.14)'den,

$$P_1 P_2 ... P_n \subseteq Ra$$

olacak şekilde sıfırdan farklı $P_1, P_2, ..., P_n$ asal idealleri vardır. P asal ideal olduğu için $P_1, P_2, ..., P_n$ asal ideallerinden biri P'de içerilir. Bu asal ideal P_1 olsun. Varsayımımızdan sıfırdan farklı her asal ideal maksimal olduğundan, $P_1 = P$ dir. Şu halde

$$PP_2...P_n \subseteq aR \subset I \subseteq P \subset R$$

dir. Gereksiz asal idealleri çıkararak $P_2...P_n \nsubseteq aR$ olduğunu kabul edebiliriz.

$b \in P_2...P_n \backslash aR$ seçersek, $a^{-1}b \notin R$ elde edilir. Şu halde

$$a^{-1}bI \subseteq a^{-1}bP \subseteq a^{-1}PP_2...P_n \subseteq a^{-1}aR = R$$

dir.

Dedekind halkalarının önemli bir denkliğini elde etmek için tam genişleme tanımını hatırlayalım.

Tanım 2.43 *R, S halkasının bir alt halkası ve $u \in S$ olsun. $f(u) = 0$ olacak şekilde bir $f(x) \in R[X]$ monik polinomu varsa, u'ya R üzerinde tamdır denir. Eğer S'nin her elemanı, R üzerinde tam ise S, R üzerinde tam veya, S'ye R'nin tam genişlemesi denir.*

Teorem 2.44 *R tamlık bölgesi olmak üzere, aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) R Dedekind bölgesidir;

ii) R Noetherian halka, tam kapalı ve sıfırdan farklı her asal ideali maksimaldir.

Kanıt $(i) \Rightarrow (ii)$ R Dedekind bölgesi ve kesir cismi F olsun. Teorem 2.30'den, R Noetherian halka ve sıfırdan farklı her asal ideali maksimaldir.

Şimdi R'nin tam kapalı olduğunu gösterelim. $u \in F$, R üzerinde tam olsun. $f(u) = 0$ olacak şekilde bir monik $f(x) \in R[X]$ polinomu vardır. $f(x)$'in derecesi n olsun. I, F'nin $\{1, u, ..., u^{n-1}\}$ ile üretilmiş alt R-modülü olsun. Şu halde I, u'nun bütün kuvvetlerini içerir ve böylece $I^2 \subseteq I$'dır. I, F'nin sonlu üretilmiş bir R-alt modülü olduğu için bir kesirsel idealdir ve böylece terslenebilirdir. $I^2 \subseteq I$ olduğundan, $I \subseteq R$ ve $u \in R$ bulunur.

$(ii) \Rightarrow (i)$ I, R'nin herhangi bir sıfırdan farklı ideali ise terslenebilir, yani $I^{-1}I = R$ olduğunu görelim. $I^{-1}I \subset R$ olduğunu kabul edelim. Şu halde $I^{-1}I$, R'nin bir idealidir ve böylece Önerme 2.42'den, $u(I^{-1}I) \subseteq R$ olacak şekilde bir $u \in F \backslash R$ vardır. Her $q \in I^{-1}$, $a \in I$ için

$$(uq)a = u(qa) \in u(I^{-1}I) \subseteq R$$

ve böylece $uq \in I^{-1}$ yani, $uI^{-1} \subseteq I^{-1}$ dir. R Noetherian olduğu için I sonlu üretilmiştir. d, bu üreteçlerin çarpımı ise $dI^{-1} \subset R$ ve böylece I^{-1} bir kesirsel ideal olur. Ayrıca dI^{-1}, R'nin bir idealidir ve sonlu üretilmiştir. $dI^{-1} = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ olsun. Böylece $I^{-1} = \sum_{i=1}^{n} Ra_i d^{-1}$ dir. Bundan dolayı I^{-1}, F'nin bir sadık $R[u]$-alt modülüdür. I^{-1}, R-modül olarak sonlu üretilmiştir ve böylece (Çallıalp ve Tekir 2009, Önerme 14.1.11)'e göre u, R üzerinde tamdır. R tam kapalı olduğu için $u \in R$ bulunur. Bu ise u'nun seçimiyle çelişki oluşturur. Şu halde $I^{-1}I = R$ ve I terslenebilirdir.

2.3. Ayrık Değer Halkası

Dedekind halkası için diğer bir karakterizasyon da ayrık değer halkaları ile verilmektedir. Şimdi bu halka sınıfını hatırlayalım.

Tanım 2.45 *K bir cisim olsun. $K^* = K \setminus \{0\}$ üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan $v : K^* \to \mathbb{Z}$ fonksiyonuna bir ayrık değerlendirme denir.*

i) v örtendir.

ii) Her x, $y \in K^*$ için $v(xy) = v(x) + v(y)$'dir.

iii) Her x, $y \in K^*$, $x + y \neq 0$ için, $v(x+y) \geqslant \min\{v(x), v(y)\}$ dir..

Tanım 2.46 *i) v, K cismi üzerinde ayrık değerlendirme ise K'nın,*

$$\{x \in K : v(x) \geqslant 0\} \cup \{0\}$$

alt halkasına v'nin değer halkası denir.

ii) R tamlık bölgesi ve K kesir cismi olsun. K üzerindeki v ayrık değerlendirmesinin değer halkası R ise R'ye ayrık değer halkası denir.

Önerme 2.47 *R, v ayrık değerlendirmesine göre ayrık değer halkası, kesir cismi K ve $0 \neq t \in R$ yerel parametre, yani $v(t) = 1$ olsun. Şu halde*

i) $0 \neq u \in R$'nin tersinir olması için gerek ve yeter koşul $v(u) = 0$ olmasıdır.

ii) Her $0 \neq r \in R$'yi $n \geqslant 0$ ve $u \in R$ tersinir olmak üzere $r = ut^n$ şeklinde yazabiliriz.

iii) R ayrık değer halkası, sıfırdan farklı tek asal ideali $P = (t)$ ve sıfırdan farklı her ideali $P^n (n \geqslant 0)$ olan bir yerel Noetherian bölgedir.

Teorem 2.48 *Aşağıdaki ifadeler R halkası için birbirine denktir:*

i) R, ayrık değer halkasıdır;

ii) R, tek maksimal ideali $0 \neq P$ olan yerel, temel ideal bölgesidir;

iii) R, tek (ilgililik farkıyla) indirgenemez elemanı t olan TAÇ bölgedir;

iv) R, tek maksimal ideali sıfırdan farklı, temel ideal olan yerel, Noetherian bölgedir;

v) R tam kapalı, Krull boyutu 1 olan yerel, Noetherian bölgedir. Yani, M sıfırdan farklı tek asal ideal olmak üzere, $Spec(R) = \{0, M\}$'dir.

Teorem 2.49 *R bir tamlık bölgesi olsun. R'nin Dedekind bölgesi olması için gerek ve yeter koşul R'nin Noetherian bölge ve sıfırdan farklı her P asal ideali için, R_p'nin ayrık değer halkası olmasıdır.*

3. MATERYAL VE METOT

Halka ile benzer özellikler sağladığından çarpımsal modül kümesi önemli bir sınıftır. Bu sebepden dolayı da, çarpımsal modüllerin karakterizasyonu ve bunun üzerinde işlem yapmak hem daha kolay hem de önemlidir. Ayırca çarpımsal modüller karakterize edilerek halka hakkında daha çok bilgiye sahip olabiliriz. Şimdi bunun ile ilgili temel kavramları (Çallıalp ve Tekir 2009) temel kaynak alarak hatırlayalım.

3.1. Çarpımsal Modül

Tanım 3.1 *R halka, M R-modül olsun. M'nin her N altmodülü için $N = IM$ olacak şekilde, R halkasının bir I ideali varsa, M'ye çarpımsal modül denir.*

R halka, M R-modül olsun. M'nin çarpımsal R-modül olması için gerek ve yeter koşul M'nin her N alt modülü için, $N = (N : M)M$ olduğu kolayca ispatlanabilir. Bir çarpımsal modülün homomorf görüntüsü de çarpımsal modül olduğuda görülebilir. Ayırca çarpımsal modüllerin yerellemesi de yine bir çarpımsal modüldür.

Önerme 3.2 *Her devirli modül çarpımsal modüldür.*

Kanıt $M = Rm$ devirli R-modül ve N , M'nin herhangi bir alt modülü ise $(N : M)M \subseteq N$ olduğu açıktır.

$n \in N$ olsun. $M = Rm$ olduğundan, $n = sm$ olacak şekilde bir $s \in R$ vardır. Böylece $Rn = sRm = sM \subseteq N$ olur. Şu halde $s \in (N : M)$ ve $n = sm \in (N : M)M$ bulunur. Böylece $N \subseteq (N : M)M$ olur. Sonuç olarak, $N = (N : M)M$'dir.

Tanım 3.3 *R halka, M R-modül ve Q, R'nin bir maksimal ideali olsun.*

$$T_Q(M) = \{m \in M : \text{ bir } q \in Q \text{ için } (1 - q)m = 0\}$$

kümesini tanımlayalım. $T_Q(M)$, M'nin alt modülüdür.

1) Eğer, $T_Q(M) = M$ ise, M'ye Q-burulmalı modül denir.

2) Eğer, $(1 - q)M \subseteq Rm$ olacak şekilde, bir $q \in Q$ ve bir $m \in M$ varsa, M'ye Q-devirli modül denir.

Teorem 3.4 *M R-modül olsun. M'nin çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul R halkasının, her Q maksimal ideali için M'nin ya Q-burulmalı ya da Q-devirli olmasıdır.*

Çarpımsal modül sınıfında önemli olan bir teoremi daha ispatsız olarak hatırlayalım.

Teorem 3.5 *R bir halka, M sadık R-modül olsun. Şu halde M'nin, çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıdır.*

i) R halkasının boş olmayan herhangi $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ idealler ailesi için,

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M) = (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)M$$

eşitliği vardır.

ii) M'nin herhangi N alt modülü ve R halkasının $N \subset IM$ olacak şekildeki her I ideali için, $J \subset I$ ve $N \subseteq JM$ olacak şekilde, R halkasının bir J ideali vardır.

3.2. Asal Alt Modüller ve Radikal Modül

Asal ideallerin genellemesi olan asal alt modül kavramı da modül teoride önemli bir yer tutar. Bu alt sınıf kullanılarak, modüllerin karakterizasyonu ile ilgili önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu bölümde bu sınıfı inceleyeceğiz.

Tanım 3.6 *R halka, M R-modül ve N, M'nin has alt modülü olsun.*

i) Her $r \in R$ ve $m \in M$ için, $rm \in N$ olması $m \in N$ veya $r \in (N : M)$ olmasını gerektiriyorsa N'ye M'nin bir asal alt modülü denir. N, M'nin bir asal alt modülü ve $P = (N : M)$ ise N'ye M'nin P-asal alt modülü denir.

ii) Her $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in N$ iken $m \in N$ veya $r \in \sqrt{(N : M)}$ ise N'ye M'nin bir asalımsı alt modülü denir.

Örnek 3.7 *i) R halkasının her asal ideali R-modül R'nin asal alt modülüdür.*

ii) $2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modülün asal alt modülü fakat $2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modülün asal alt modül değildir.

iii) p sabit bir asal sayı olsun.
$E(p) = \left\{ \frac{r}{p^n} + \mathbb{Z} : r \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$, *$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$'nin sıfırdan farklı $\mathbb{Z}$-alt modüldür.*
$E(p)$'nin asal alt modülü yoktur.

(i) ve (ii) tanımdan açıktır.

(iii) $E(p)$'nin alt modüllerinin her biri $t \in \mathbb{N}_0$ için,

$$G_t = \left\{ \frac{r}{p^t} + \mathbb{Z} : r \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklindedir. Her $t \in \mathbb{N}_0$ için,

$$(G_t : E(p)) = 0$$

olduğunu gösterelim. Bir $t \in \mathbb{N}_0$ için,

$$(G_t : E(p)) \neq 0$$

olduğunu varsayalım. O halde bir $0 \neq r \in (G_t : E(p))$ vardır.

$$r = p^k a \in (G_t : E(p)) \qquad (a \in \mathbb{Z},\, p\ a\text{'yı bölmez } ve\ k \in \mathbb{N}_0)$$

olsun.

$$\alpha^* = \frac{1}{p^{k+t+1}} + \mathbb{Z}$$

diyelim. Şu halde

$$ra^* = \frac{p^k a}{p^{k+t+1}} + \mathbb{Z} = \frac{a}{p^{t+1}} + \mathbb{Z} \in G_t$$

olur. Bu sonuç varsayımla çelişir. Şu halde her $t \in \mathbb{N}_0$ için,

$$(G_t : E(p)) = (0)$$

olur. Hiçbir G_t, $E(p)$'nin bir asal alt modülü değildir. Gerçekten i herhangi bir pozitif sayı olmak üzere,

$$p^i \notin (G_t : E(p)) = (0)$$

ve $\beta = \frac{1}{p^{i+t}} + \mathbb{Z} \notin G_t$ fakat $p^i\beta = \frac{1}{p^t} + \mathbb{Z} \in G_t$ olur. $E(p)$'nin tüm alt modülleri G_t'ler olduğundan, $Spec(M) = \oslash$ olduğu görülür.

Önteorem 3.8 *R halka, M R-modül ve N, M'nin has alt modülü olsun. N alt modülünün asal olması için gerek ve yeter koşul $(N : M)$'nin, R halkasının asal ideal olması ve M/N'nin bir torsion-free $R/(N : M)$-modül olmasıdır.*

Kanıt N asal alt modül olsun.

a,$b \in R$ olmak üzere, $ab \in (N : M)$ ve $b \notin (N : M)$ olsun. Şu halde $abM \subseteq N$ ve $bM \nsubseteq N$ olur. Böylece $abt \in N$ ve $bt \notin N$ olacak şekilde bir $t \in M$ vardır. N, M'nin asal alt modülü olduğu için, $a \in (N : M)$ olur. Böylece $(N : M) \in Spec(R)$ dir.

M/N'nin torsion-free $R/(N : M)$-modül olduğunu gösterelim.
$\bar{0} \neq \bar{r} \in R/(N : M)$ ve $\bar{m} \in M/N$ olmak üzere $\bar{r}\bar{m} = \bar{0}$ olsun. Şu halde $rm \in N$ ve $r \notin (N : M)$ olur. N asal alt modül olduğundan, $m \in N$ ve böylece $\bar{m} = \bar{0}$ olur. O halde M/N torsion-free'dir.

M/N torsion-free $R/(N : M)$-modül olsun. N'nin asal alt modül olduğunu gösterelim. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ ve $r \notin (N : M)$ olsun. Şu halde $\bar{r}\bar{m} = \bar{0}$ ve $\bar{0} \neq \bar{r}$ olur. M/N'nin torsion-free $R/(N : M)$-modül olduğundan $\bar{m} = \bar{0}$ ve böylece $m \in N$ olur. N, M'nin asal alt modülüdür.

N, M'nin asal alt modülü iken $(N : M) \in Spec(R)$ olduğunu Önteorem 3.8'de gördük. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 3.9 *$N = 2\mathbb{Z} \oplus 0$, $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modül olsun. Burada $(N : M) = 0 \in Spec(\mathbb{Z})$ fakat N asal alt modül değildir. Çünkü $(1, 0) \in M$ ve $2 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2(1, 0) = (2, 0) \in N$ fakat $(1, 0) \notin N$ ve $2 \notin (N : M)$'dir.*

Önerme 3.10 *M R-modül ve N, M'nin asalımsı alt modülü olsun. Şu halde N'nin asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $(N : M)$'nin R halkasının asal ideali olmasıdır.*

Kanıt N asal alt modül ise $(N : M) \in Spec(R)$ olduğu Teorem 3.8'den açıktır.

$(N : M) \in Spec(R)$ olsun. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ ve $m \notin N$ kabul edelim. N asalımsı alt modül olduğu için, bir n tamsayısı için $r^n \in (N : M)$ olur. $(N : M) \in Spec(R)$ olduğu için, $r \in (N : M)$ olur. Sonuç olarak N, M'nin asal alt modülüdür.

Önteorem 3.11 *$(N : M)$, R halkasının maksimal ideali iken N, M R-modülün asal alt modülüdür.*

Kanıt $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ fakat $r \notin (N : M)$ olsun. O halde $(N : M)$ maksimal olduğundan $(N : M) + Rr = R$'dir. R birimli halka olduğundan $1 = x + yr$ olacak şekilde $y \in R$ ve $x \in (N : M)$ vardır. Eşitliği sağdan $m \in M$ ile çarparsak, $xm + yrm = m \in N$ olur. Dolayısıyla N asal alt modüldür.

Önteorem 3.12 *R halka, M R-modül ve N, M'nin maksimal alt modülü ise N asal alt modüldür.*

Kanıt N, M'nin maksimal alt modülü olsun. $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere, $rm \in N$ fakat $m \notin N$ olsun. Şu halde $N + Rm = M$'dir. Böylece

$$rM = rN + Rrm \subseteq N,$$

yani $r \in (N : M)$ olur. Böylece N, M'nin asal alt modüldür.

Önteorem 3.13 *M sadık çarpımsal R-modül ve P, R halkasının asal ideali olsun. $a \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere, $ax \in PM$ ise $a \in P$ veya $x \in PM$'dir.*

Kanıt $a \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere $ax \in PM$, $a \notin P$, $K = \{r \in R \ : \ rx \in PM\}$ ve $K \neq R$ olsun. Şu halde $K \subseteq Q$ olacak şekilde R halkasının maksimal Q ideali vardır. $x \notin T_Q(M)$ olur. Gerçekten, $x \in T_Q(M)$ olsaydı bir $q \in Q$ için $(1-q)x = 0$ ve böylece $1 - q \in K \subseteq Q$ olurdu. Bu ise çelişki. O halde Teorem 3.4'den M bir Q-devirli modüldür. Böylece $(1-q)M \subseteq Rm$ olacak şekilde $m \in M$ ve $q \in Q$ vardır. Özel olarak bir $s \in R$ ve $p \in P$ için

$$(1-q)x = sm \ ve \ (1-q)ax = pm$$

olur. Böylece $(as - p)m = 0$ olur. $(1-q)M \subseteq Rm$ olduğundan

$$((1-q)Ann(m))M \subseteq R.Ann(m)m = 0$$

olur. M sadık modül olduğundan, $(1-q)Ann(m) = 0$ olur. Böylece

$$(as - p) \in Ann(m)$$

olduğundan,

$$(1-q)as = (1-q)p \in P$$

olur. $P \subseteq K \subseteq Q$ olduğundan $s \in P$ ve böylece $(1-q)x = sm \in PM$ olur. Böylece $1-q \in K \subseteq Q$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $K = R$ ve böylece $x \in PM$ olur.

Sonuç 3.14 *R halka, M sadık, çarpımsal R-modül ve P, R halkasının $PM \neq M$ olacak şekilde bir asal ideali ise PM, M'nin asal alt modülüdür.*

Kanıt $a \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere, $ax \in PM$ ve $a \notin (PM : M)$ olsun. $P \subseteq (PM : M)$ olduğundan, $a \notin P$ olur ve Önteorem 3.13'ten $x \in PM$ olur. Böylece PM, M'nin bir asal alt modülüdür.

3.3. Alt Modülün Radikali

Bir idealin radikali cebirsel geometride çok önemli bir yer teşkil etmektedir. Bu açıdan, bir idealin radikali kavramının bir genellemesi olarak, bir alt modülün radikal kavramı da modül teoride önemli bir kavramdır. Ayrıca bu kavram kullanılarak halka ve modül karakterize edilmektedir.

Tanım 3.15 *R halka, M R-modül ve N, M'nin has alt modülü olsun.*

N'yi kapsayan asal alt modül varsa, N'yi kapsayan tüm asal alt modüllerin kesişimine, N alt modülünün M-radikali denir. Bu radikal $rad_M(N)$ veya kısaca $radN$ ile gösterilir.

Eğer N'yi kapsayan asal alt modül yoksa, $rad_M(N) = M$ olarak tanımlanır.

Özel olarak, $rad_M(M) = M$ olur. $rad_M(0)$ radikaline M'nin radikali denir. $rad_M(N) = N$ ise N'ye radikal alt modül denir.

Örnek 3.16 *$M = R = \mathbb{Z}$ olsun. $24\mathbb{Z}$'yi kapsayan asal alt modüller $2\mathbb{Z}$ ve $3\mathbb{Z}$'dir. O halde $rad_{\mathbb{Z}}(24\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$'dir.*

Teorem 3.17 *M R-modül ve N ile L alt modülleri olsun. Şu halde aşağıdakiler sağlanır.*

i) $N \subseteq rad_M(N)$,

ii) $rad_M(rad_M(N)) = rad_M(N)$,

iii) $rad_M(N \cap L) \subseteq rad_M(N) \cap rad_M(L)$,

iv) R'nin her I *ideali için,* $rad_M(IM) = rad_M(\sqrt{I}M)$,

v) $\sqrt{(N : M)} \subseteq (rad_M(N) : M)$,

vi) M *sonlu üretilmiş R-modül ise* $rad_M(N) = M$ *olması için gerek ve yeter şart* $N = M$ *olmasıdır.*

vii) $(rad_M(N) : rad_M(L)) = (rad_M(N) : L)$,

viii) $rad_{M/N}(0) = (rad_M(N))/N$.

Kanıt $i)$ Açıktır.

$ii)$ (i) ile $rad_M(N) \subseteq rad_M(rad_M(N))$'dir.

$rad_M(N)$'yi içeren tüm Q_i asal alt modülleri için $N \subseteq rad_M(N) \subseteq Q_i$ olduğundan, N'yi içeren tüm P_j asal alt modülleri için $\bigcap\limits_{i \in I} Q_i \subseteq P_j$'dir. Böylece $rad_M(rad_M(N)) = \bigcap\limits_{i \in I} Q_i \subseteq rad_M(N)$'dir.

$iii)$ $rad_M(N \cap L) = \bigcap\limits_{N \cap L \subseteq P_i} P_i$ (P_i asal alt modül) ve Q, N ve L'yi içeren tüm asal alt modüllerin kümesi olsun.

$$N \cap L \subseteq N \subseteq Q \textit{ ve } N \cap L \subseteq L \subseteq Q$$

ile

$$rad_M(N \cap L) \subseteq rad_M(N) \text{ ve } rad_M(N \cap L) \subseteq rad_M(L)$$

dir. Böylece

$$rad_M(N \cap L) \subseteq rad_M(N) \cap rad_M(L)$$

olur.

$iv)$ $rad_M(IM) = M$ ise ispat açık.

Eğer $IM \subseteq P$ olacak şekilde bir P p-asal alt modülü varsa, $I \subseteq (IM : M) \subseteq (P : M) = p$'dir. O halde $\sqrt{I} \subseteq p$'dir. Eğer $x \in \sqrt{I}$ ise, $x^n \in I \subseteq p$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Dolayısıyla $x \in p$'dir. Böylece $\sqrt{I}M \subseteq pM \subseteq P$ olur. Buradan IM'yi içeren her P asal alt modülü için $rad_M(\sqrt{I}M) \subseteq P$'dir. Böylece $rad_M(\sqrt{I}M) \subseteq rad_M(IM)$ olur. $I \subseteq \sqrt{I}$ olduğundan, $IM \subseteq \sqrt{I}M$ ve $rad_M(IM) \subseteq rad_M(\sqrt{I}M)$'dir.

$v)$ $x \in \sqrt{(N:M)}$ olsun. O halde $x^n \in (N:M)$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece N'yi içeren tüm P asal alt modülleri için $x^nM \subseteq N \subseteq P$'dir. P asal alt modül olduğundan, $x \in (rad_M(N):M)$'dir.

$vi)$ $N = M$ olsun. O halde $rad_M(N) = rad_M(M) = M$'dir.

Tersine, $rad_M(N) = M$ ve $N \neq M$ olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan, (Kılıçarslan 2004, Önerme 2.8) ile N'nin, $N \subseteq P_i$ olacak şekilde en az bir minimal P_i asal alt modülü vardır. Böylece (Kılıçarslan 2004, Teorem 2.10) ile $M = rad_M(N) = \bigcap_{i\in I} P_i$ ve $M \subseteq P_i$'dir. Bu P_i'nin asal alt modül olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $N = M$'dir.

$vii)$ $x \in (rad_M(N):rad_M(L))$ olsun. O halde $xrad_M(L) \subseteq rad_M(N)$ ve $xL \subseteq rad_M(N)$'dir. Böylece $x \in (rad_M(N):L)$'dir.

$r \in (rad_M(N):L)$ olsun. O halde $rL \subseteq rad_M(N) = \bigcap_{N\subseteq P_i} P_i$ (P_i asal alt modül) ve N'yi içeren M'nin tüm asal alt modülleri için $rM \subseteq P_i$ veya $L \subseteq P_i$'dir. Eğer $rM \subseteq P_i$ ise, o halde $r.rad_M(L) \subseteq rad_M(N)$ ve $r \in (rad_M(N):rad_M(L))$'dir. Böylece $(rad_M(N):L) \subseteq (rad_M(N):rad_M(L))$'dir.

$viii)$ $rad_{M/N}(0) = \bigcap_{N/N\subseteq P_i/N} P_i/N$ (P_i asal alt modül) olmak üzere $\bar{x} = x+N \in P_i/N$ olsun. O halde $x \in P_i$'dir. $N \subseteq P_i$ olduğundan $x \in rad_M(N)$'dir. O halde $\bar{x} = x+N \in (rad_M(N))/N$ olur. Buradan $rad_{M/N}(0) \subseteq (rad_M(N))/N$'dir.

$rad_M(N) = \bigcap_{N\subseteq P_i} P_i$ (P_i asal alt modül) olmak üzere $\bar{x} = x+N \in (rad_M(N))/N$ olsun. O halde $x \in rad_M(N)$'dir. Buradan $x \in P_i$'dir. O halde $\bar{x} = x+N \in P_i/N$ olur. Dolayısıyla $\bar{x} \in rad_{M/N}(0)$'dır. Buradan $(rad_M(N))/N \subseteq rad_{M/N}(0)$'dır. Sonuç olarak $rad_{M/N}(0) = (rad_M(N))/N$'dir.

Teorem 3.18 *R bir halka, M sonlu üretilmiş R-modül, N ve L, M'nin alt modülleri olsun. Şu halde $rad_M(N)+rad_M(L) = M$ olması için gerek ve yeter koşul $N+L = M$ olmasıdır.*

Kanıt $rad_M(N)+rad_M(L) = M$ ve $N+L \neq M$ kabul edelim. M sonlu üretilmiş olduğundan $N+L \subseteq T$ olacak şekilde bir maksimal T alt modülü vardır. T asal alt modül olacağından, $N \subseteq T$ olması $rad_M(N) \subseteq T$ ve $L \subseteq T$ olması $rad_M(L) \subseteq T$

olmasını gerektirir. Şu halde

$$rad_M(N) + rad_M(L) \subseteq T$$

olur. Bu ise varsıyımımızla çelişir. O halde $N + L = M$'dir.

$N \subseteq rad_M(N)$ ve $L \subseteq rad_M(L)$ olduğundan, $N + L = M$ olması

$$rad_M(N) + rad_M(L) = M$$

olmasını gerektirir.

Önerme 3.19 *R tamlık bölgesi, M R-modül ve $T(M) \neq M$ olsun.*

i) M'nin torsion alt modülü asaldır.

ii) R'nin her P maksimal ideali için $PM = M$ veya PM, M'nin asal alt modülüdür.

Kanıt *i)* $P = (T(M) : M)$, R'nin asal ideali ve $M/T(M)$'nin torsion-free R/P-modül olduğunu gösterelim.

$T(M) \neq M$ olduğundan, $Ann(m_1) = 0$ olacak şekilde $m_1 \in M \backslash T(M)$ elemanı vardır. $p \in P$ olsun. $pm_1 \in T(M)$ ve $Ann(pm_1) \neq 0$'dır. Böylece $r(pm_1) = 0$ olacak şekilde $0 \neq r \in R$ vardır. R tamlık bölgesi ve $T(M) \neq M$ olduğundan $p = 0$'dır. Böylece $P = (T(M) : M) = 0$. R bir tamlık bölgesi olduğundan, P asal ideal olur.

$\bar{0} \neq r + P \in R/P$ ve $m + T(M) \in M/T(M)$ olmak üzere $(r + P)(m + T(M)) = 0$ olsun. O halde $rm \in T(M)$, böylece $(sr)m = 0$ olacak şekilde $0 \neq s \in R$ vardır. R bir tamlık bölgesi olduğundan, $m \in T(M)$'dir. Sonuç olarak $M/T(M)$ torsion-free.

ii) Varsayalım ki $PM \neq M$ olsun. Açıkça $P \subseteq (PM : M)$'dir. P maksimal ideal olduğundan, $P = (PM : M)$'dir. Böylece $(PM : M)$ asal ideal. $P(M/PM) = 0$ olduğundan M/PM R/P-modüldür. Şimdi $T(M/PM) = 0$ olduğunu gösterelim.

$m + PM \in T(M/PM)$ olsun. O halde $\bar{0} \neq r + P \in R/P$ olmak üzere $(r + P)(m + PM) = 0$'dır. R/P cisim olduğundan, $(r + P)^{-1}$ vardır. Böylece $m \in PM$'dir. Buradan $T(M/PM) = 0$'dır. Sonuç olarak PM, M'nin asal alt modülüdür.

Önteorem 3.20 *R tek boyutlu tamlık bölgesi ve M R-modül olsun. $T(M)$, M'nin torsion alt modülü olmak üzere*

$$rad_M(0) = T(M) \cap \{\cap \{PM : \ P, \ R\text{'nin maksimal ideali}\}\}$$

dir.

Kanıt Önerme 3.19 ile

$$rad_M(0) \subseteq T(M) \cap \{\cap \{PM : \ P, \ R\text{'nin maksimal ideali}\}\}$$

dir.

N, M'nin asal alt modülü ve $P = (N : M)$ olsun. Önteorem 3.8 ile $P \in Spec(R)$ olur. R tek boyutlu tamlık bölgesi olduğundan, $P = 0$ veya P maksimal idealdir.

Eğer $P = 0$ ise, M/N torsion-free R-modül olur ve böylece $T(M) \subseteq N$'dir. Bunu görecek olursak;

$m \in T(M)$ olsun. $0 \neq r \in R$ olmak üzere $rm = 0 \in N$'dir. N asal alt modül olduğundan, $m \in N$'dir.

Böylece

$$T(M) \cap \{\cap \{PM\}\} \subseteq T(M) \subseteq N$$

dir.

Eğer $P \neq 0$ ise, P maksimal ideal ve $PM \subseteq N$'dir. Böylece $T(M) \cap \{\cap \{PM\}\} \subseteq PM \subseteq N$'dir. Her iki durumda da, $T(M) \cap \{\cap \{PM\}\} \subseteq N$'dir. Sonuç olarak $T(M) \cap \{\cap \{PM\}\} \subseteq rad_M(0)$'dır.

Önteorem 3.21 *R halka ve M R-modül olsun. N, M'nin alt modülü ise $rad_N(0) \subseteq rad_M(0)$'dır.*

Kanıt K, M'nin herhangi bir asal alt modülü olsun.

Eğer $N \subseteq K$ ise $rad_N(0) \subseteq K$'dır.

Eğer $N \nsubseteq K$ ise $N \cap K$, N'nin asal alt modülüdür. Bunu görelim.

$r \in R$, $m \in N$ ve $rm \in N \cap K \subseteq K$ olsun. K asal alt modül olduğundan, $m \in K$ veya $rM \subseteq K$'dır.

Eğer $m \in K$ ise, o halde $m \in N \cap K$'dır.

Eğer $rM \subseteq K$ ise, $rN \subseteq K$'dır. Böylece $rN \subseteq N \cap K$ ve $rad_N(0) \subseteq N \cap K \subseteq K$'dır.

Her iki durumda da $rad_N(0) \subseteq K$'dır. Dolayısıyla $rad_N(0) \subseteq rad_M(0)$'dır.

Önteorem 3.22 *R tek boyutlu Noetherian bölge ve M R-modül olsun. L, M'nin tüm sonlu üretilmiş alt modüllerinin birleşimi olmak üzere*

$$rad_M(0) = \cup rad_L(0)$$

dir.

Kanıt Önteorem 3.21 ile, M'nin herhangi bir sonlu üretilmiş L alt modülü için $rad_L(0) \subseteq rad_M(0)$ ve buradan

$$\cup rad_L(0) \subseteq rad_M(0)$$

dır.

$m \in rad_M(0)$ olsun. Önteorem 3.20 ile, $m \in T(M) \cap \{\cap \{PM\}\}$'dir. Böylece $rm = 0$ olacak şekilde $0 \neq r \in R$ vardır.Önerme 2.18 ile $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, r'yi içeren R'nin P_1,P_2,...,P_n maksimal idealleri vardır. Önteorem 3.20 ile her $1 \leq i \leq n$ için $m \in P_iM$'dir. L_i, M'nin sonlu üretilmiş bir altmodülü, yani $L_i = Rm_i$ olsun. O halde $P_iL_i = P_iRm_i$ olur. $m \in P_iM$ olduğundan, $x_i \in P_i$ ve $m_i \in M$ olmak üzere $m = x_1m_1 + x_2m_2 + ... + x_nm_n$'dir. Böylece $m \in P_iL_i$'dir. $L = L_1 + L_2 + ... + L_n$ olsun. O halde L, M'nin sonlu üretilmiş alt modülüdür ve $P_iL_i \subseteq P_iL$ olduğundan $m \in P_iL$ $(1 \leq i \leq n)$'dir.

P, R'nin herhangi bir maksimal ideali olsun. Varsayalım ki $P \neq P_i$ $(1 \leq i \leq n)$ olsun. P maksimal ideal olduğundan $Rr + P = R$'dir. Her tarafı $m \in M$ ile çarpalım. O halde $Rm = Rrm + Pm = Pm$ olur. Böylece $Rm = Pm$ ve $m \in Rm = Pm \subseteq PP_iL \subseteq PL$ olur. Önteorem 3.20 ile $m \in rad_L(0)$ olur. Dolayısıyla $rad_M(0) \subseteq rad_L(0)$ ve

$$rad_M(0) \subseteq \cup rad_L(0)$$

dır.

Önteorem 3.23 *R halka ve M_λ, M'nin alt modülü olmak üzere $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ R-modül olsun. O halde*

$$rad_M(0) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} rad_{M_\lambda}(0)$$

dir.

Kanıt Önteorem 3.21 ile, her $\lambda \in \Lambda$ için $rad_{M_\lambda}(0) \subseteq rad_M(0)$'dır. Buradan

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} rad_{M_\lambda}(0) \subseteq rad_M(0)$$

dir.

$m \in M$ ve $m \notin \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} rad_{M_\lambda}(0)$ olsun. $\Pi_\mu : M \to M_\mu$ doğal homomorfizma olmak üzere, $\Pi_\mu(m) \notin rad_{M_\lambda}(0)$ olacak şekilde $\mu \in \Lambda$ vardır. $\Pi_\mu(m) \notin rad_{M_\lambda}(0)$ olduğundan, M_μ'nin $\Pi_\mu(m) \notin N_\mu$ olacak şekilde N_μ asal alt modülü vardır. $K = N_\mu \bigoplus (\bigoplus_{\lambda \neq \mu} M_\mu)$ olsun. (Kılıçarslan 2004, Önteorem 1.11) ile K, M'nin asal alt modülüdür ve $\Pi_\mu(m) \notin N_\mu$ olduğundan $m \notin K$'dır. Böylece $m \notin rad_M(0)$'dır. Sonuç olarak

$$rad_M(0) \subseteq \bigoplus_{\Lambda} rad_{M_\lambda}(0)$$

dır.

Bir idealin radikalinin modül teorideki değer bir genellemesini de şimdi verelim. Daha önceki genelleme ile eşitliği kullanılarak, halka ve modüller hakkında bilgi sahibi olabiliyoruz.

Tanım 3.24 *R halka, M R-modül olsun. N alt modüle olmak üzere*

$$E_M(N) = \left\{ m \in M : r_i \in R,\ m_i \in M,\ k_i \in \mathbb{Z}^+ \text{ olmak üzere } m = r_i m_i,\ r_i^{k_i} m_i \in N \right\}$$

üretmiş olduğu

$$\left\{ m \in M : r_i \in R,\ m_i \in M,\ n, k_i \in \mathbb{Z}^+ \text{ olmak üzere } m = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i,\ r_i^{k_i} m_i \in N \right\}$$

alt modülüne N'nin zarfı denir ve $W_M(N)$ ile gösterilir.

Gerçekten, $E_M(N)$, M'nin her zaman alt modülü olmak zorunda değildir.

Örnek 3.25 *$M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modül ve $N = (9,9)\mathbb{Z} + (4,8)\mathbb{Z}$ olsun. $E_{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}((9,9)\mathbb{Z} + (4,8)\mathbb{Z})$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$'nin alt modülü değildir. Gerçekten,*

$(3,3) \in E_M(N)$'dir. Çünkü $3(1,1) = (3,3)$ ve $3^2(1,1) \in N$'dir.

$(2,4) \in E_M(N)$'dir. Çünkü $2(1,2) = (2,4)$ ve $2^2(1,2) \in N$'dir.

Fakat $(3,3) + (2,4) = (5,7) \notin E_M(N)$'dir. Varsayalım ki $(5,7) \in E_M(N)$ olsun. O halde $(5,7) = r(a,b)$ ve $r^k(a,b) \in N$ olur. Buradan $ra = 5$, $rb = 7$ olduğundan $r|5$ ve $r|7$'dir. Böylece $r = \pm 1$'dir. O halde $r = 1$ olmak üzere $(5,7) = (a,b) \in N$'dir.

$(5,7) \in N$ ise x,$y \in \mathbb{Z}$ vardır öyleki $(5,7) = x(9,9) + y(4,8)$'dir.

$5 = 9x + 4y$ ve $7 = 8y + 9x$ denklemlerinden $y = \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ olur. Bu ise çelişki.

Önteorem 3.26 *Eğer N, M'nin herhangi bir alt modülü ise*

i) $W_M(0) \subseteq rad_M(0)$

ii) $W_M(0) \subseteq W_M(N) \subseteq rad_M(N)$

iii) $W_{M/N}(0) = W_M(N)/N$

Kanıt *i)* $rad_M(0) = \bigcap\limits_{0\subseteq N} N_i$ (N_i asal alt modül) olmak üzere $m \in W_M(0)$ olsun. O halde $m = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i m_i$, $r_i^{k_i} m_i = 0$'dır. Buradan $r_i^{k_i} m_i = 0 \subseteq N$ ve $r_i^{k_i} m_i \in N_i$'dir. N_i asal alt modül olduğundan $r_i m_i \in N_i$ olur. Dolayısıyla $m = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i m_i \in N_i$'dir. Böylece $m \in \bigcap N_i = rad_M(0)$'dır.

ii) $W_M(0) \subseteq W_M(N)$ olduğu tanımdan açıktır.

$m \in W_M(N)$ olsun. O halde $r_i \in R$, $m_i \in M$, $k_i \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $m = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i m_i$ $r_i^{k_i} m_i \in N$'dir. $rad_M(N) = \bigcap\limits_{N\subseteq P_i} P_i$ (P_i asal alt modül) olmak üzere $r_i^{k_i} m_i \in N \subseteq P_i$'dir. Buradan $r_i^{k_i} m_i \in P_i$'dir. P_i asal alt modül olduğundan $r_i m_i \in P_i$'dir. Dolayısıyla $m = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i m_i \in P_i$ olur. Sonuç olarak $m \in P_i$ ve $W_M(N) \subseteq rad_M(N)$'dir.

iii) $\bar{m} = m + N \in W_{M/N}(0)$ olsun. Dolayısıyla $r_i \in R$ ve $k_i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\bar{m} = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \bar{m}_i$, $r_i^{k_i} \bar{m}_i = \bar{0}$ şeklindedir. Buradan $m = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i m_i$, $r_i^{k_i} m_i \in N$'dir. O halde $m \in W_M(N)$'dir. Böylece $\bar{m} = m + N \in (W_M(N))/N$ ve $W_{M/N}(0) \subseteq (W_M(N))/N$'dir.

$\bar{m} = m + N \in (W_M(N))/N$ olsun. O halde $m \in W_M(N)$ ve $m = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i m_i$,

$r_i^{k_i} m_i \in N$'dir. Buradan $\bar{m} = m + N = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i m_i + N = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \bar{m}_i$ ve $r_i^{k_i} \bar{m}_i = \bar{0}$'dir. Böylece $\bar{m} \in W_{M/N}(0)$'dır.

Tanım 3.27 *i) R–modül M'nin her N alt modülü için $rad_M(N) = W_M(N)$ ise, M modülüne radikal formülünü sağlar denir.*

ii) Her R-modül radikal formülünü sağlarsa, R halkasına radikal formülünü sağlar denir.

Radikal formül her zaman sağlanmaz. Buna ileride bir örnek vereceğiz. Bazı modül sınıflarında da sağlandığını ileride göstereceğiz.

Önteorem 3.28 *R halka ve M, $rad_M(0) = W_M(0)$ olacak şekilde R-modül olsun. O halde M'nin herhangi bir N dik toplananı için*

$$rad_N(0) = W_N(0)$$

dir.

Kanıt Varsayalım ki N', M'nin alt modülü olmak üzere $M = N \oplus N'$ olsun. $W_N(0) \subseteq rad_N(0)$ olduğunu ispatladık.

$m \in rad_N(0)$ olsun. Önteorem 3.21 ile $rad_N(0) \subseteq rad_M(0)$ olduğundan $m \in rad_M(0)$'dır. Hipotezden $m \in rad_M(0) = W_M(0)$ olup, $m \in W_M(0)$'dır. O halde $n,\ k \in \mathbb{Z}^+$ ve $r_i \in R$, $m_i \in M$ olmak üzere $r_i^k m_i = 0$ ve

$$m = r_1 m_1 + r_2 m_2 + ... + r_n m_n \quad (1 \leq i \leq n)$$

dir. $m_i \in M$ ve $M = N \oplus N'$ olduğundan $m_i = x_i + y_i$ olacak şekilde $x_i \in N$ ve $y_i \in N'$ elemanları vardır. O halde $m = r_1(x_1 + y_1) + r_2(x_2 + y_2) + ... + r_n(x_n + y_n)$ ve $m - (r_1 x_1 + ... + r_n x_n) = r_1 y_1 + ... + r_n y_n \in N \cap N' = 0$'dır. Böylece $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$m = r_1 x_1 + r_2 x_2 + ... + r_n x_n$ elde edilir. Ayrıca $r_i y_i \in N \cap N' = 0$ olduğundan $r_i^k x_i = 0$

dır. Dolayısıyla $m \in W_N(0)$'dır. O halde

$$rad_N(0) \subseteq W_N(0)$$

dır.

Teorem 3.29 *M çarpımsal R-modül ve N, M'nin has alt modülü olsun.*
$I = (N : M)$ ise

$$rad_M(N) = (\sqrt{I})M$$

olur. O halde, çarpımsal modüller radikal formülü sağlar.

Kanıt Genelliği bozmadan M'yi sadık R-modül kabul edebiliriz.
$V(I) = \{P, R\text{'nin asal ideali} : I \subseteq P\}$ olmak üzere
$J = \sqrt{I}$ ise $J = \bigcap_{P \in V(I)} P$ olduğunu biliyoruz. Teorem 3.5'dan

$$JM = \bigcap_{P \in V(I)} (PM)$$

olur. $P \in V(I)$ olsun.

$M = PM$ ise $rad_M(N) \subseteq PM$ olur.

$M \neq PM$ ise sonuç 3.14'den,

$$N = IM \subseteq PM$$

olması

$$rad_M(N) \subseteq PM$$

olduğunu belirtir.

Tersine K, M'nin N alt modülünü içeren bir asal alt modülü olsun.
(Çallıalp ve Tekir 2009, Sonuç 12.1.16)'dan $K = QM$ olacak şekilde R halkasının bir Q asal ideali vardır.

$$IM = N \subseteq K = QM \neq M$$

olduğundan (Çallıalp ve Tekir 2009, Sonuç 12.1.17)'den $I \subseteq Q$ olur. Böylece $J = \sqrt{I} \subseteq Q$ olur. Şu halde $JM \subseteq K$ olur. Bundan dolayı $JM \subseteq rad_M(N)$'dir. Sonuç olarak

$$rad_M(N) = (\sqrt{I})M$$

dir.

Sonuç 3.30 *Her devirli modül radikal formülünü sağlar.*

Önteorem 3.31 *R halka ve M projektif R-modül olsun. O halde*

$$rad_M(0) = W_M(0)$$

dir.

Kanıt M, F'nin dik toplananı olacak şekilde bir tane serbest R-modül F vardır. Dolayısıyla F_λ, F'nin devirli alt modülü olmak üzere $F = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ şeklindedir. Önteorem 3.23 ile $rad_F(0) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} rad_{F_\lambda}(0)$'dır. Her devirli modül radikal formülü sağladığından her $\lambda \in \Lambda$ için $rad_{F_\lambda}(0) = W_{F_\lambda}(0) \subseteq W_F(0)$'dır. $W_F(0) \subseteq rad_F(0)$ her zaman sağlandığından, $rad_F(0) = W_F(0)$'dır. Önteorem 3.28 ile $rad_M(0) = W_M(0)$ olur.

Teorem 3.32 *R Dedekind bölgesi ve M R-modül olsun. O halde*

$$rad_M(0) = W_M(0)$$

dır.

Kanıt $W_M(0) \subseteq rad_M(0)$ olduğunu daha önce gösterdik.

$m \in rad_M(0)$ olsun. Önteorem 3.22 ile M'nin bazı sonlu üretilmiş L alt modülleri için $m \in rad_L(0)$'dır. (Kaplansky 1952)'den L_i $(1 \leq i \leq k)$ ya projektif ya da devirli modül ve $k \in \mathbb{Z}^+$ $(1 \leq i \leq k)$ olmak üzere

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus ... \oplus L_k$$

dir.

Önteorem 3.23**,** Örnek 3.2 ve Önteorem 3.31 ile

$$m \in rad_{L_1}(0) \oplus rad_{L_2}(0) \oplus ... \oplus rad_{L_k}(0) = W_{L_1}(0) \oplus ... \oplus W_{L_k}(0) \subseteq W_L(0) \subseteq W_M(0)$$

dir. Böylece

$$rad_M(0) \subseteq W_M(0)$$

dir. Buradan $rad_M(0) = W_M(0)$ olur.

Tanım 3.33 *M R-modül ve $N \subseteq M$ olsun. $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere her $r \in R$ ve $m \in M$ için $r^k m \in N$ iken $rm \in N$ ise M modülün has N alt modülüne yarı asal denir.*

Eğer N, M'nin asal alt modüllerinin bir kesişimi olacak şekilde alt modülü ise N yarı asal'dır. Genel olarak bu durumun tersi doğru değildir. Aşağıdaki Teorem, eğer R halkası radikal formülünü sağlarsa, bu özelliğin, M'nin herhangi bir yarı asal alt modülü için de sağlanacağını gösterir.

Önteorem 3.34 *R halka ve M R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

i) M radikal formülünü sağlar;

ii) M'nin her yarı asal alt modülü, M'nin asal alt modüllerinin bir kesişimidir ve $W_M(W_M(0)) = W_M(0)$'dır.

Kanıt $(i) \Rightarrow (ii)$ N, M'nin yarı asal alt modülü olsun. O halde $W_M(N) = N$'dır. (i) ile $rad_M(N) = N$'dir. Böylece N, M'nin asal alt modüllerinin bir kesişimidir. Diğer yandan, $W_M(0) = rad_M(0)$ olduğundan, $W_M(0)$ yarı asal ve böylece $W_M(W_M(0)) = W_M(0)$'dır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $W_M(W_M(0)) = W_M(0)$ olduğundan $W_M(0)$ yarı asaldır. Böylece $rad_M(0) \subseteq W_M(0)$'dır. Dolayısıyla M radikal formülünü sağlar.

Temel ideal bölgesinin bir diğer genellemesi de Bezout bölgesidir.

Tanım 3.35 *R tamlık bölgesi ve her sonlu üretilmiş ideali temel ideal ise, R'ye Bezout bölgesi denir.*

Teorem 3.36 *R tek çarpanlama bölgesi ve R-modül $R \oplus R$'nin her yarı asal alt modülü, asal alt modüllerin bir kesişimi olsun. O halde R Bezout bölgedir.*

Kanıt Varsayalım ki R Bezout bölge olmasın. O halde $Ra + Rb$ ideali temel ideal olmayacak şekilde $0 \neq a,b \in R$ elemanları vardır. c, a ve b'nin en büyük böleni olsun. O halde $a = ca_1$, $b = cb_1$ ve $I = Ra_1 + Rb_1 \neq R$ olacak şekilde aralarında asal olan a_1, $b_1 \in \mathbb{R}$ elemanları vardır. Eğer $Ra_1 + Rb_1 = R$ olsaydı $Ra + Rb$ temel ideal olurdu.

$J = \sqrt{I}$ olsun.

$$J = \left\{ r \in R : \text{bazı } n \in \mathbb{Z}^{+} \text{ için } r^{n} \in I \ \right\}$$

dır. $J \neq R$'dir. Çünkü $I \neq R$'dir.

$f = (a_1, b_1) \in F = R \oplus R$ ve $N = Jf = J(a_1,b_1)$ olsun. Amacımız N'yi, F'nin asal alt modüllerinin kesişimi olmayan, F'nin bir yarı asal alt modülü olduğunu göstermek.

$K = Rf = R(a_1,b_1)$ olsun. O zaman K, F'nin asal alt modülü ve $N \subseteq K$'dır. K'nın asal alt modül olduğunu görelim.

İlk başta $K \neq F$'dir. Eğer $K = F$ olsaydı, $1_F = (1,1) \in K$ ve böylece $r \in R$ olmak üzere $(1,1) = r(a_1,b_1)$ olacaktı. O halde $ra_1 = 1 = rb_1$ ve $a_1 = b_1$ olur ki, bu ise çelişki. Böylece $K \neq R \oplus R$'dir.

Farz edelim ki $rm \in K$ olacak şekilde $r \in R$ ve $m \in F$ elemanları var olsun. O halde bazı $x,y \in R$ için $m = (x,y)$'dir. $rx = za_1$ ve $ry = zb_1$ olacak şekilde $z \in R$ vardır. $r \neq 0$ olduğunu farzedelim. O halde, a_1 ve b_1 aralarında asal olduğundan, r'yi bölen bir p asal elemanı z'yi de bölmek zorunda. Dolayısıyla r, z'yi böler.

Çünkü, R tek çarpanlama bölgesi olduğundan, $p_1,...,p_n$'ler indirgenemez elemanlar olmak üzere $r = p_1^{k_1}...p_n^{k_n}$ dir. r'yi bölen her asal z'yi de bölmek zorunda olduğundan, $p_1^{k_1}...p_n^{k_n}$ z'yi böler. Böylece r, z'yi böler. O halde $x = (z/r)a_1$ ve $y = (z/r)b_1$'dir. $(x,y) = ((z/r)a_1, (z/r)b_1) = (z/r)(a_1, b_1) = (z/r)f$'dir. Buradan $(x,y) = Rf = K$'dır. Böylece K, F'nin asal alt modülüdür. $N = Jf$ ve $K = Rf$ olduğundan, $N \subseteq K$'dır.

L, $R \oplus R$'nin $N = Jf \subseteq L$ olacak şekilde asal alt modülü olsun. L asal olduğundan, $f \in L$ veya $JF \subseteq L$'dir. Eğer $J(R \oplus R) \subseteq L$ ise, o zaman $f = (a_1,b_1) = a_1(1,0) + b_1(0,1) \in J(R \oplus R) \subseteq L$ olur. O halde her iki durumda da $f \in L$'dir. Böylece K, N'yi içeren $(R \oplus R)$'nin tüm asal alt modüllerinin kesişimidir.

Şimdi N'nin yarı asal olduğunu gösterelim.

$k \in \mathbb{Z}^{+}$, $r \in R$ ve $g \in F$ olmak üzere $r^k g \in N$ olsun. O halde $r^k g \in N \subseteq K$ ve böylece $g \in K$ veya $r^k(R \oplus R) \subseteq K = Rf$'dir. a_1 ve b_1 sıfırdan farklı olduğundan, $r^k(R \oplus R) \subseteq K$ için $r = 0$ olduğu açıktır.

Varsayılım ki $r \neq 0$ olsun. O halde $g \in K$'dır. $K = Rf$ olduğundan R'nin bazı s elemanları için $g = sf$'dir. O zaman $r^k g \in N$'den $r^k sf \in Jf$ olur ve böylece $r^k s \in J$'dir. $(rs)^k \in J$ ve sonuç olarak $rs \in J$'dir. Buradan $rg = rsf \in N$ olur. O halde N yarı asal'dır. Açıkça $J \neq R$ olduğundan $N \neq K$ ve böylece N, asal alt modüllerin bir kesişimi değildir. O halde R bir Bezout bölgesidir.

Önerme 3.37 *R Noetherian, tek türlü çarpanlama bölgesi olsun. O halde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

i) R temel ideal bölgesidir;

ii) R radikal formülünü sağlar;

iii) Her sonlu üretilmiş R-modül radikal formülünü sağlar;

iv) $R \oplus R$ serbest R-modülü radikal formülünü sağlar;

v) Her M R-modül için, her yarı asal alt modül, M'nin asal alt modüllerinin bir kesişimidir;

vi) Her sonlu üretilmiş M R-modül için, her yarı asal alt modül, M'nin asal alt modüllerinin bir kesişimidir;

vii) $F = R \oplus R$ serbest R-modülün her yarı asal alt modülü, F'nin asal alt modüllerinin bir kesişimidir.

Kanıt $(i) \Rightarrow (ii)$ Her TİB, Dedekind bölgesi olduğundan, Teorem 3.32 ile görülür.

$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$, $(v) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (vii)$ Açıktır.

$(ii) \Rightarrow (v)$,$(iii) \Rightarrow (vi)$,$(iv) \Rightarrow (vii)$ Önteorem 3.34.

$(vii) \Rightarrow (i)$ R Noetherian olduğundan, R'nin her ideali sonlu üretilmiştir. Teorem 3.36 ile R bir Bezout bölgedir. Böylece R, TİB'dir.

Şimdi daha önce bahsettiğimiz radikal formülünün her zaman sağlanmayacağına dair örneği verelim.

Örnek 3.38 *$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve $R = \mathbb{Z}[X]$ olsun. $F = R \oplus R$ serbest R-modül olsun. $f = (2,X) \in F$ ve $P = R2 + RX$, R'nin maksimal ideali olsun. $N = Pf$ olsun. O halde N, F'nin asal alt modüllerinin kesişimi olmayan F'nin bir yarı asal alt modülüdür. Bu F modülü, radikal formülünü sağlamaz.*

Çünkü;

$f = (2, X) \in F$, $P = R2 + RX \in \Lambda(R)$ *maksimal ideal ve* $N = Pf$ *olsun.* N*'nin yarı asal alt modül olduğunu görelim.*

$r \in R$ *ve* $f \in F$ *için* $r^k f \in Pf = N$ *olsun. O halde* $r^k \in P$*'dir.* P *maksimal ideal ve her maksimal ideal asal ideal olduğundan,* P *asal idealdir. Dolayısıyla* $r \in P$*'dir. Böylece* $rf \in Pf = N$ *olup* N *yarı asaldır.*

Bu F *modülü, radikal formülünü sağlamaz. Çünkü* $M = F/N$ *alalım.* N *yarı asal olduğundan* $W_{F/N}(0) = W_M(0) = 0$*'dır. O halde*

$Rf/N = rad_M(0) \neq W_M(0) = 0$*'dır.*

Önerme 3.39 R *sonlu boyutlu Noetherian bölge olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) R *Dedekind bölgesidir;*

ii) R *radikal formülünü sağlar;*

iii) Her M R*-modülü için, her yarı asal alt modül,* M*'nin asal alt modüllerinin bir kesişimidir;*

iv) Serbest R*-modülün her yarı asal alt modülü, asal alt modüllerin bir kesişimidir.*

Kanıt $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ Teorem 3.32 ve Önteorem 3.34 ile açık.

$(iv) \Rightarrow (i)$

F'nin her yarı asal alt modülü, F'nin asal alt modüllerinin bir kesişimi olsun. P, R'nin herhangi bir maksimal ideali olsun. O halde R_P lokal halkası, (Matsumura 1980, Teorem 45 ve Teorem 48) ile Tek çarpanlama bölgesidir.

Şimdi $F_P = R_P \oplus R_P$'nin her yarı asal alt modülü, F_P'nin asal alt modüllerinin bir kesişimi olup olmadığını kontrol edelim.

N, F_P'nin yarı asal alt modülü olsun. O halde $N \cap F$, F'nin yarı asal alt modülüdür. (McCasland ve Smith 1993, Teorem 4.2) ile $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$N \cap F = K_1 \cap K_2 \cap ... \cap K_n$ olacak şekilde F'nin asal K_i alt modülleri vardır. Varsayalım ki $(K_1 : F) \nsubseteq P$ olsun. O halde

$$(K_1 : F)(K_2 \cap ... \cap K_n) \subseteq N \cap F\text{'den } N \cap F = K_2 \cap ... \cap K_n$$

olur. Böylece genelliği bozmadan $(K_i : F) \subseteq P \ \ (1 \leq i \leq n)$ olduğunu varsayabiliriz. $R_P K_i$, F_P'nin asal alt modülü ve $N = R_P K_1 \cap ... \cap R_P K_n$'dir.

Teorem 3.36 ile, R_P temel ideal bölgesidir. Dolayısıyla R Dedekind bölgesidir. (Lu 1995, Tanım 140)

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bir halkanın Krull boyutu halka teoride önemli bir kavramdır ve bu kullanılarak halka için önemli karakterizsayonlar verilmektedir. Bu bölümde halka için tanımlanan Krull boyut kavramının, modül versiyonunu vereceğiz ve bu yeni kavram kullanılarak, bir halkanın Dedekind olması için gerekli ve yeterli koşullar incelenecektir. Şimdi Krull boyutun modül versiyonu ile başlayalım.

Tanım 4.1 *M R–modül ve P, M'nin asal alt modül olsun.*

Her $i \geq 1$ için P_i asal alt modüller olmak üzere $0 = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq ... \subsetneq P_n = P$ olacak şekildeki en büyük n pozitif tamsayısına P'nin yüksekliği denir ve htP ile gösterilir.

Eğer böyle bir n pozitif tamsayısı yoksa $htP = \infty$ olarak kabul edilir.

$\{htP : P \subseteq M$ asal alt modül$\}$ kümesinin en büyük alt sınırına da (sup) M'nin boyutu denir ve $D(M)$ ile gösterilir.

Tanım 4.2 *Tek maksimal ideali olan değişmeli Noetherian halkaya lokal halka denir.*

R halka, M R-modül olsun. O halde

$$D(M) = \sup \{D(M/\beta M) : \beta \in Spec(R)\}$$

dir. Bu yüzden, biz çoğunlukla tamlık bölgeleriyle çalışmalıyız.

R tamlık bölgesi olsun. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $R^{(n)}$ serbest modülün rankını n olarak tanımlayalım. Eğer M bir torsion-free modül ise, M'nin rankı, F, R'nin kesir cismi olmak üzere F üzerinde $FM = F \otimes_R M$ vektör uzayının boyutudur. M'nin rankı rkM ile gösterilir.

Tamlık bölgesi belli değilse, R üzerinde M'nin rankını $rk_R M$ ile göstereceğiz.

Şimdi en küçük asal alt modül kavramını tanımlamak için hazırlık yapalım.

R tamlık bölgesi olmak zorunda olmayan halka, $\beta \in Spec(R)$ ve M R-modül olsun.

$$K_\beta(M) = \{m \in M : \text{bazı } c \in R \backslash \beta \text{ için } cm \in \beta M\}$$

ile tanımlayalım.

$M = K_\beta(M)$ veya $K_\beta(M)$, M'nin bir β-asal alt modülüdür.

$M \neq K_\beta(M)$ olsun.

İlk başta $(K_\beta(M) : M)$'nın β'ya eşit olup olmadığını kontrol edelim.

$x \in \beta$ olsun. $1 \in R\backslash\beta$ ve $xM \subseteq \beta M$ olmak üzere $1.xM \subseteq \beta M$ olduğundan $xM \subseteq K_\beta(M)$' dir. Dolayısıyla $x \in (K_\beta(M) : M)$'dir. Böylece $\beta \subseteq (K_\beta(M) : M)$ olur.

$x \in (K_\beta(M) : M)$ olsun. $xM \subseteq K_\beta(M)$'dir. O halde $cxM \subseteq \beta M$ olacak şekilde $c \in R\backslash\beta$ vardır. Eğer $x \notin \beta$ ise $cx \notin \beta$ olur, buradan $M \subseteq K_\beta(M)$ olur ki bu ise $M \neq K_\beta(M)$ olması ile çelişir. O halde $x \in \beta$ dır. Buradan $(K_\beta(M) : M) \subseteq \beta$ olur. Dolayısıyla $(K_\beta(M) : M) = \beta$'dır.

Şimdi $K_\beta(M)$'nin, M'nin bir asal alt modülü olduğunu gösterelim.

$r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in K_\beta(M)$ ve $r \notin \beta$ olsun. O halde $crm \in \beta M$ olacak şekilde $c \in R\backslash\beta$ vardır.Buradan $cr \notin \beta$ olup, $m \in K_\beta(M)$'dir.

Şimdi de $K_\beta(M)$'nin, M'nin en küçük β-asal alt modülü olduğunu görelim.

N, M'nin herhangi bir β-asal alt modülü ve $m \in K_\beta(M)$ olsun. O halde $cm \in \beta M$ olacak şekilde $c \in R\backslash\beta$ vardır. O halde N β-asal alt modül olduğundan $cm \in \beta M \subseteq N$ ve buradan $m \in N$ olur. O halde $K_\beta(M) \subseteq N$'dir.

Böylece $M = K_\beta(M)$ veya $M/K_\beta(M)$ sıfırdan farklı torsion-free bir R/β-modülüdür.

$rk_\beta M$ ile M'nin β-rankını gösterecek olursak, $rk_\beta M = rk_{R/\beta}(M/K_\beta(M))$'dir. R tamlık bölgesi ve M'nin bir R-modül olması durumda, $K_0(M)$, M'nin torsion alt modülü ve $rk_0 M = rk_R(M/K_0(M))$'dir.

$\mu(M)$, M'yi üretmek için gerekli olan üreteç sayısının en küçüğü olarak tanımlayalım.

Tanım 4.3 *R tamlık bölgesin olsun.*

i)Her a,b $\in R$ için ya $a|b$ ya da $b|a$ ise R'ye Değerlendirme bölgesi denir.

ii) R'nin her sonlu üretilmiş ideali tersinir ise R'ye Prüfer bölgesi denir.

Son olarak aşağıdaki Önteorem ve Teoremi ispatsız hatırlayalım.

Önteorem 4.4 *(Kemper 2011) M R-modül olsun. O halde,* *i) M_0, M_1,...,M_n, M'nin asal alt modülleri olmak üzere $M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_n$ zinciri maksimal ise $M_0 = 0$, $M_n = M$ ve M_i/M_{i-1} basit modüldür. Bu durumda $D(M) = \sum_{i=1}^{k} D(M_i/M_{i-1})$'dir.*

ii) N, M'nin alt modülü olmak üzere $D(M) = D(N) + D(M/N)$'dir.

iii) R, tek maksimal ideali $\mathfrak{M}$ olan bir halka olsun. Eğer M sonlu üretilmiş ise, $M/\mathfrak{M}M$, $R/\mathfrak{M}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu vektör uzayıdır. Böylece $(R/\mathfrak{M})^n \cong M/\mathfrak{M}M$'dir.

Teorem 4.5 *(Kemper 2011) R tek maksimal ideali $\mathfrak{M}$ olan Noetherian lokal,*

$K = R/\mathfrak{M}$ bölüm cismi, M sonlu üretilmiş R-modül ve m_1,m_2,...,$m_n \in M$ olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktir.

i) M, R-modül olarak m_1,m_2,...,m_n elemanları tarafından üretilmiştir.

ii) $M/\mathfrak{M}M$, K-vektör uzayı olarak $m_1 + \mathfrak{M}M$, $m_2 + \mathfrak{M}M$,..., $m_n + \mathfrak{M}M$ elemanları tarafından üretilmiştir.

4.1. Boyut Üzerindeki Sınırlar

Bu kısımda asal ideal zinciri ile asal alt modül zinciri arasındaki bağıntıyı araştıralım.

Teorem 4.6 *R d boyutlu bir tamlık bölgesi ve N sonlu üretilmiş torsion-free R-modül olsun. Eğer $p_0 \subset p_1 \subset ... \subset p_s$ R'nin asal ideallerinin bir zinciri ise, o halde aynı uzunlukta N'nin $M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_s$ asal alt modüllerinin zinciri vardır.*

Kanıt Biz $s = 2$ için yapalım. Benzer şekilde sonuç elde edilir.
$M_0 = K_{p_0}(N) = \{x \in N : \text{bazı } p \in R \backslash p_0 \text{ için } xp \in p_0 N\}$, $R_1 = R/p_0$, $q_1 = p_1/p_0$ ve $N_1 = N/M_0$ olsun. O halde $N_1 = N/M_0$ torsion-free $R/p_0 = R_1$-modüldür ve $q_1 \neq 0$'dır. $q_1 N_1 \subseteq K_{q_1}(N)$ olduğundan $K_{q_1}(N_1) \neq 0$'dır.

Şimdi $T_1 = K_{q_1}(N_1) \subset N/M_0$ olsun. O halde $T_1 = M_1/M_0$'dır. Böylece $M_0 \subset M_1$'dir.
Benzer şekilde $N_2 = N/M_1$ torsion-free R/p_1-modüldür. $q_2 = p_2/p_1 \subset R/p_1 = R_2$ ve $T_2 = K_{q_2}(N_2) \subset N/M_0$ olsun. O halde $T_2 = M_2/M_1$'dir. Böylece $M_1 \subset M_2$'dir. Dolayısıyla $M_0 \subset M_1 \subset M_2$ zinciri elde edilir.

Önerme 4.7 *R, d boyutlu tamlık bölgesi, M sıfırdan farklı sonlu üretilmiş torsion-free R-modül olsun. O halde $D(M) \geq D(R) + rkM - 1$'dir.*

Kanıt $rkM = r$ olsun. $r = 1$ için Teorem 4.6 ile açıktır.

$r > 1$ olduğunu varsayalım. $0 \neq n_0$, M'nin keyfi bir elemanı ve

$I = \{n \in M : an = bn_0$ olacak şeklilde bazı $a, b \in R,\ a \neq 0$ vardır.$\}$ olsun. $I \subset M$'nin *rankı* 1 olan 0-asal alt modülüdür.

İlk önce $(I : M) = 0$ olduğunu görelim.

Varsayalım ki $(I : M) = \{r \in R : rM \subseteq I\} \neq 0$ ve $M = Rx$ olsun.

O halde $r \in (I : M)$ olmak üzere $rRx \subseteq I$, buradan $rx \in I$'dır. $arx = bn_0$ ve $ar \neq 0$ olduğundan $x \in I$'dır. Dolayısıyla $Rx = I$ olur, bu ise çelişki.

Varsayalım ki $(I : M) = \{r \in R : rM \subseteq I\} \neq 0$ ve $M = Rx + Ry$ olsun.

O halde $r(Rx + Ry) \subseteq I$'dır. $rx \in I$ ise $x \in I$ ve $ry \in I$ ise $y \in I$ olup, $Rx + Ry \subseteq I$'dan $I = M$ olur, bu ise çelişki. O halde $(I : M) = 0$'dır.

Şimdi I, M'nin asal alt modülü olduğunu görelim.

$r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $rn \in I$ ve $r \neq 0$ olsun. Buradan $arn = bn_0$'dır. $ar \neq 0$ olduğundan $n \in I$'dır.

Son olarak I'nın rankının 1 olduğunu görelim.

$0 \subseteq T_1 \subseteq I$ olacak şekilde $0 \neq T_1$ asal alt modül olsun. $x \in T_1$

ise $ax = bn_0 \in T_1$'dir ve buradan $n_0 \in T_1$ olur.

$y \in I$ ise $ay = bn_0 \in T_1$'dir ve buradan $y \in T_1$ olur. O halde $T_1 = I$'dır.

S, *rankı* $r - 1$ olan torsion-free R-modül olmak üzere $0 \to I \to M \to S = M/I \to 0$ tam dizisi vardır ve hipotezden $D(S) \geq d + r - 2$'dir.

Böylece $0 = S_0 = M_0/I \subseteq S_1 = M_1/I \subseteq ... \subseteq S_{d+r-2} = M_{d+r-2}/I$ asal alt modül zinciri vardır. Buradan $0 \subsetneqq I = M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_{d+r-2}$ zinciri elde edilir. O halde $D(M) \geq d + r - 1$'dir.

Önerme 4.8 *R halka, M sıfırdan farklı sonlu üretilmiş R-modül olsun. O halde $D(M) \geq \sup\{D(R/\beta) + rk_\beta M - 1 : \beta \in Spec(R)$ ve $Ann(M) \subseteq \beta\}$'dır.*

Kanıt $Ann(M) \subseteq \beta$ olmak üzere $\beta \in Spec(R)$ olsun. $M/K_\beta(M)$ torsion-free R/β-modüldür.

$M = K_\beta(M)$ olduğunu varsayalım. M sonlu üretilmiş olduğundan, (Man 1996, Önerme 1.2) ile bazı $d \in R\backslash\beta$ için $dM = 0$'dır.
Böylece $d \in Ann(M) \subseteq \beta$'dir. Bu ise bir çelişki.
O halde $M \neq K_\beta(M)$'dır.
Açıkça

$$\begin{aligned} D(M) &\geq D(M/K_\beta(M)) \\ &\geq D(R/\beta) + rk_{R/\beta}(M/K_\beta(M)) - 1 \\ &\geq D(R/\beta) + rk_\beta M - 1 \end{aligned}$$

dır.

Önerme 4.9 $\mathfrak{M}$, *R'nin maksimal ideali ve M sıfırdan farklı sonlu üretilmiş R-modül olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.*

i) $K_\mathfrak{M}(M) = \mathfrak{M}M$.

ii) $Ann(M) \subseteq \mathfrak{M}$ *ancak ve ancak* $\mathfrak{M}M \neq M$*'dir.*

iii) $rk_\mathfrak{M} M = \mu(M/\mathfrak{M}M)$*'dir.*

Kanıt *i)* $K_\mathfrak{M}(M) = \{m \in M : \text{bazı } c \in R\backslash\mathfrak{M} \text{ için } cm \in \mathfrak{M}M\}$ olmak üzere $\mathfrak{M} \subseteq (\mathfrak{M}M : M) \subseteq R$ ve $\mathfrak{M}$ maksimal ideal olduğundan $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}M : M)$'dir.
O halde $\mathfrak{M}M$ asal alt modül olur. Ayrıca $K_\mathfrak{M}(M)$ en küçük asal alt modül ve $\mathfrak{M}M \subseteq K_\mathfrak{M}(M)$ olduğundan $K_\mathfrak{M}(M) = \mathfrak{M}M$ olur.

ii) $Ann(M) \subseteq \mathfrak{M}$ ve varsayalım ki $\mathfrak{M}M = M$ olsun.

İlk önce $Ra = M = \mathfrak{M}M$ olduğunu kabul edelim. Buradan $a \in \mathfrak{M}Ra = \mathfrak{M}a$'dır. O halde $a = ta$ olacak şekilde $t \in \mathfrak{M}$ vardır. O zaman $(1-t)a = 0$ ve $(1-t) \in Ann(M) \subseteq \mathfrak{M}$ olup, $1 \in \mathfrak{M}$ çelişkisi oluşur.

Şimdi de M'nin iki eleman ile üretildiğini kabul edelim, $M = Ra + Rb$ olsun.
$t_i, k_i \in \mathfrak{M}$ olmak üzere $a = t_1a + t_2b$ ve $b = k_1a + k_2b$ şeklinde yazalım. Buradan

$$(t_1 - 1)a + t_2b = 0, (k_1 - 1)a + k_2b = 0$$

dır. Matris formuna geçelim.

$\begin{bmatrix} t_1 - 1 & t_2 \\ k_1 & k_1 - 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$'dır. $A = \begin{bmatrix} t_1 - 1 & t_2 \\ k_1 & k_1 - 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere her tarafı

$Adj A$ ile çarpalım. O halde $\begin{bmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$ elde edilir.

O zaman $\det A = (t_1 - 1)(k_1 - 1) - t_2 k_1 \in Ann(M)$ olur.
O halde $1 + (t_1 k_1 - t_1 - k_1 - t_2 k_1) \in Ann(M) \subseteq \mathfrak{M}$ olur ve $1 \in \mathfrak{M}$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\mathfrak{M}M \neq M$'dir.

Şimdi diğer tarafı gösterelim.
$\mathfrak{M}M \neq M$ olsun ve $r \in Ann(M)$ alalım.
Varsayalım ki $r \notin \mathfrak{M}$ olsun. O halde $\mathfrak{M} + Rr = R$'dir. Her tarafı M ile çarparsak, $\mathfrak{M}M + RrM = RM = M$ olur ve buradan $\mathfrak{M}M = M$ olur ki, bu varsayım ile çelişir. O halde $r \in \mathfrak{M}$'dür.

iii) $rk_{\mathfrak{M}} M = rk_{R/\mathfrak{M}} M/\mathfrak{M}M = \mu(M/\mathfrak{M}M)$'dir.

Önerme 4.10 *$\mathfrak{M}$, R'nin maksimal ideali ve M sıfırdan farklı sonlu üretilmiş R-modül olsun. O halde*

$$D(M) \geq \sup\{\mu(M/\mathfrak{M}M) - 1 : \mathfrak{M},\ R\text{'nin maksimal idealidir.}\}$$

dir.

Kanıt $\mathfrak{M}$, R'nin maksimal ideali olsun.

Eğer $M = \mathfrak{M}M$ ise, $\mu(M/\mathfrak{M}M) = \mu(0) = 0$'dır.
Böylece $D(M) \geq \mu(M/\mathfrak{M}M) - 1$.

Şimdi $M \neq \mathfrak{M}M$ olduğunu varsayalım. Önerme 4.9 (ii) ile $Ann(M) \subseteq \mathfrak{M}$'dir. Önerme 4.8 ile $D(M) \geq D(R/\mathfrak{M}) + rk_{\mathfrak{M}} M - 1$'dir. $\mathfrak{M}$ maksimal ideal olduğundan, $D(R/\mathfrak{M}) = 0$'dır. Önerme 4.9 (iii) ile $rk_{\mathfrak{M}} M = \mu(M/\mathfrak{M}M)$'dir.
Sonuç olarak $D(M) \geq \mu(M/\mathfrak{M}M) - 1$'dir.

Tanım 4.11 *β, R halkasının asal ideali ve M R-modül olsun. Eğer her bir P_0,P_1,...,P_k M'nin bir β-asal alt modülü ise M'nin asal alt modüllerinin $P_0 \subseteq P_1 \subseteq ... \subseteq P_k$ bir zincirine homogeneous denir.*

$P \subseteq Q$ olmak üzere P ve Q sırasıyla M'nin β ve $\mathfrak{Q}$-asal alt modülleri olsun. Bu taktirde $\beta \subseteq \mathfrak{Q}$'dır. Bundan yararlanarak, M'nin asal alt modüllerinin bir zincirinin, asal alt modüllerin homogeneous zincirlerinden oluştuğunu göreceğiz.

Önteorem 4.12 *M sonlu üretilmiş torsion-free R-modül olsun. M'nin asal alt modüllerinin herhangi bir homogeneous zincirinin uzunluğu en fazla $\mu(M)-1$'dir.*

Kanıt $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq ... \subsetneq P_k$ M'nin β-asal alt modüllerinin bir homogeneous zinciri olsun. M/P_0, $P_1/P_0, ..., P_k/P_0$ R/β üzerinde torsion-free modüldür. M sonlu üretilmiş olduğundan, M/P_0 da sonlu üretilmiştir. Böylece $P_1/P_0, P_2/P_0 ..., P_k/P_0$ R/β üzerinde sonlu ranka sahiptir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} rk_{R/\beta}M/P_0 &= rk_{R/\beta}M/P_k + \sum_{i=1}^{k} rk_{R/\beta}P_i/P_{i-1} \\ &\geq k+1 \end{aligned}$$

dir. Burada $rk_{R/\beta}M/P_k = 1$ ve $\sum\limits_{i=1}^{k} rk_{R/\beta}P_i/P_{i-1} \geq k$'dır.
Açıkça $rk_{R/\beta}M/P_0 \leq \mu(M/P_0) \leq \mu(M)$ dır. Sonuç olarak $k \leq \mu(M)-1$'dir.

Teorem 4.13 *M sonlu üretilmiş torsion-free R-modül olsun. O halde $D(M) \leq \mu(M)D(R)+\mu(M)-1$'dir. Ek olarak $D(R^{(n)}) \leq nD(R)+n-1$'dir.*

Kanıt $D(R)$ sonsuz ise ispat edilecek birşey yok. $D(R)$'nin sonlu olduğunu varsayalım. Tanım 4.11 ile, M'nin herhangi bir asal alt modüllerinin zinciri, her bir homogeneous zincir farklı bir asal ideale karşılık gelmek üzere en fazla $D(R)+1$ tane farklı asal alt modüllerin homogeneous zincirinden oluşur. Önteorem 4.12 ile, her bir homogeneous zincir en fazla $\mu(M)$ terime sahiptir. O halde M'nin asal alt modüllerinin bir zincirinde terimlerin sayısı en fazla $(D(R)+1)\mu(M)$'dir. Sonuç olarak, asal alt modüllerin bir zincirinin uzunluğu en fazla $(D(R)+1)\mu(M)-1$'dir.

Önerme 4.14 *M sonlu üretilmiş R-modül olsun. O halde $D(M) \leq \mu(M)D(R) + \mu(M) - 1$'dir.*

Kanıt $\mu(M) = k$ olsun. O halde M, serbest $R^{(k)}$ modülün bir bölüm modülüdür. Böylece $D(M) \leq D(R^{(k)})$'dır. Buradan Teorem 4.13 ile
$D(M) \leq D(R^{(k)}) \leq kD(R) + k - 1$ ve böylece $D(M) \leq \mu(M)D(R) + \mu(M) - 1$ elde edilir.

Bu bölümün geri kalan kısmında, $R^{(n)}$ in asal alt modüllerinin yapısını inceleyeceğiz.

Önteorem 4.15 *$n, k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere M, $R^{(n)}$ serbest R-modül ve N, M'nin rankı $n - k$ olan alt modülü olsun. O halde N, M'nin 0-asal alt modülüdür ancak ve ancak*

$$N = \left\{ r_1u_1 + r_2u_2 + ... + r_nu_n \in M : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}r_j = 0 \quad i = 1, 2, ..., k \right\}$$

olacak şekilde M'nin $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ tabanı ve R üzerinde sıfırdan farklı $k \times n$'lik eşolan (a_{ij}) matrisi vardır.
Bu durumda $htN = n - k$'dır.

Kanıt Varsayalım ki N, M'nin 0-asal alt modülü olsun. M/N torsion-free'dir. Dolayısıyla, α ve π sırasıyla doğal bire-bir ve örten dönüşüm olmak üzere $0 \to N \to^{\alpha} M \to^{\pi} M/N \to 0$ kısa tam dizisi vardır. O halde $rkM/N = n - rkN = k$'dır.

Eğer $x \in M$ ise, M/N de x'in görüntüsünü $\bar{x}$ ile tanımlayalım. $\{e_1, ..., e_n\}$, M'nin standart tabanı olsun. O halde $\{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n\}$ M/N'nin üreteç kümesidir. Bu $\bar{e}_i$ leri yeniden numaralandırdıktan sonra, şunları varsayabiliriz:

(a) $\{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_k\}$ R üzerinde lineer bağımsızdır.

(b) Her $j = k + 1, k + 2, ..., n$ için $\{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_k, \bar{e}_j\}$ R üzerinde lineer bağımlıdır.

(b)'den her bir $j = k + 1, k + 2, ..., n$ için $d_j\bar{e}_j \in \bigoplus_{i=1}^{k} R\bar{e}_i$ olacak şekilde sıfırdan farklı $d_j \in R$ vardır. $d = d_{k+1}d_{k+2}...d_n$ alalım. $d \neq 0$ ve $d(M/N) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{k} R\bar{e}_i$ dir.
$\bar{x} \longrightarrow d\bar{x}$ ile tanımlı $\beta : M/N \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} R\bar{e}_i$ bir dönüşüm tanımlayalım. β'nın iyi

tanımlı R-modül homomorfizması olduğu açıktır. M/N torsion-free olduğundan β injektiftir. O halde $0 \to N \to^{\alpha} M \to^{\beta\pi} \bigoplus_{i=1}^{k} R\bar{e}_i$ kısa tam dizisi vardır.

A, $\{e_1, ..., e_n\}$ ve $\{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_k\}$ tabanlarına göre $\beta\pi$'yi temsil eden $k \times n$ tipinde bir matris olsun. $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$ için $a_{ij} \in R$ ve $1 \leq i \leq k$, $k+1 \leq j \leq n$ için $b_{ij} \in R$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\beta\pi(e_1) &= a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + ... + a_{1k}\bar{e}_k = d\bar{e}_1 \\
\beta\pi(e_2) &= a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + ... + a_{2k}\bar{e}_k = d\bar{e}_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
\beta\pi(e_n) &= a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + ... + a_{nk}\bar{e}_k = d\bar{e}_n
\end{aligned}$$

ve buradan

$$A = \begin{pmatrix}
d & 0 & . & . & . & 0 & b_{1k+1} & . & . & . & . & b_{1n} \\
0 & d & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & . & . & . & d & b_{kk+1} & . & . & . & . & b_{kn}
\end{pmatrix}$$

şeklindedir. A'nın eşolan formda olduğu açıktır.

I_k, $k \times k$'lık birim matris olmak üzere $A = [dI_k|B]$ ve B, R üzerinde $k \times (n-k)$ tipinde bir matristir. $N =$Çek$\beta\pi$ olduğundan, N istenilen formdadır.

Şimdi ek kısmı ispat edelim.

$rkN = n - k$'dır. Diğer bir değişle, FN'nin, R'nin kesir cismi olan F üzerindeki boyutunun $n - k$ olması demektir.

Bu halde FM'nin $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq ... \subsetneq V_{n-k} = FN$ alt uzaylarının bir zinciri vardır.

Zincirdeki elemanları M ile kesiştirelim.

$$0 = V_0 \cap M \subseteq V_1 \cap M \subseteq ... \subseteq V_{n-k} \cap M = FN \cap M = N$$

M'nin 0-asal alt modülünün bir zinciri elde edilir. Böylece $htN \geq n - k$'dır.

Diğer yandan, eğer $0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq ... \subsetneq N_t = N$, M'nin asal alt modüllerinin bir zinciri ise, her $0 \leq i \leq t$ için M/N_i torsion-free olmak üzere $(N_i : M) \subseteq (N : M) = 0$'dır. Böylece $0 = FN_0 \subsetneq FN_1 \subsetneq ... \subsetneq FN_t = FN$, FN alt uzayının bir zinciridir ve buradan $t \leq rkN = n - k$ olur. Sonuç olarak $htN = n - k$'dır.

Önerme 4.16 *$a_i \in R$ $(1 \leq i \leq n)$, $I_i = \sum_{j=1\ (i \neq j)}^{n} Ra_j$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} (I_i : Ra_i) \subseteq \beta$ olacak şekilde $\beta \in Spec(R)$ olsun. O halde $D(R^{(n)}) \geq n + D((R/\beta)^{(n)}) \geq 2n + D((R/\beta)) - 1$'dir.*

Kanıt $M = R^{(n)}$ olsun.
$P = \{(r_1, r_2, ..., r_n) \in M : a_1 r_1 + a_2 r_2 + ... + a_n r_n = 0\}$ olsun. $(a_i \neq 0\ 1 \leq i \leq n)$
Önteorem 4.15 ile, $htP = n - 1$ ve P, M'nin 0-asal alt modülüdür. Ayrıca $P \subsetneq \beta M$'dir. Böylece

$$\begin{aligned} D(M) &\geq ht\beta M + D((R/\beta)^{(n)}) \geq \\ &\geq n + D((R/\beta)^{(n)}) \end{aligned}$$

Önerme 4.7 ile $D((R/\beta)^{(n)}) \geq D((R/\beta)) + n - 1$ olduğunu biliyoruz. Yerine yazarsak $n + D((R/\beta)^{(n)}) \geq 2n + D((R/\beta)) - 1$ elde edilir.

Önteorem 4.17 *$\mathfrak{M}$, R'nin maksimal ideali ve M, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $R^{(n)}$ serbest R-modül olsun. O halde K, M'nin $\mathfrak{M}$-asal alt modülüdür ancak ve ancak $K = \mathfrak{M}m_1 + \mathfrak{M}m_2 + ... + \mathfrak{M}m_k + Rm_{k+1} + Rm_{k+2} + ... + Rm_n$ olacak şekilde M'nin $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ tabanı ve $1 \leq k \leq n$ vardır.*

Kanıt $K = \mathfrak{M}m_1 + \mathfrak{M}m_2 + ... + \mathfrak{M}m_k + Rm_{k+1} + Rm_{k+2} + ... + Rm_n$ ise K'nın $\mathfrak{M}$-asal alt modül olduğu açıktır.

Varsayalım ki K, M'nin $\mathfrak{M}$-asal alt modülü olsun. Eğer $n = 1$ ise $m \in M$ olmak üzere $M = Rm$ ve $K = \mathfrak{M}m$'dir.

$n > 1$ olduğunu varsayalım. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ M'nin standart tabanı olsun. Her bir $1 \leq i \leq n$ için, $(r_1, r_2, ..., r_n) \in M$ olmak üzere $(r_1, r_2, ..., r_n) \longrightarrow r_i$ ile tanımlı $\pi_i : M \to R$'ye bir homomorfizm tanımlayalım. İspatı iki kısımda inceleyelim.

i) Her $1 \leq i \leq n$ için $\pi_i(K) \subseteq \mathfrak{M}$ ise

$\mathfrak{M}M \subseteq K \subseteq \pi_1(K)e_1 + \pi_2(K)e_2 + ... + \pi_n(K)e_n \subseteq \mathfrak{M}M$ ve böylece

$K = \mathfrak{M}M = \mathfrak{M}e_1 + \mathfrak{M}e_2 + ... + \mathfrak{M}e_n$'dir.

ii) Şimdi bazı $1 \leq j \leq n$ için $\pi_j(K) \nsubseteq \mathfrak{M}$ olduğunu varsayalım.

$\mathfrak{M}M \subseteq K$ olduğundan, $\mathfrak{M} \subseteq \pi_j(K)$ olur ve böylece $\pi_j(K) = R$'dir. $\pi_j(m_1) = 1$ olacak şekilde K'nın bir m_1 elemanı vardır ve böylece $\{m_{1,} e_2, ..., e_{j-1}, e_{j+1}, ..., e_n\}$ M'nin bir tabanıdır. Ek olarak, $L = \sum\limits_{i=1\ (i \neq j)}^{n} Re_i$ ise, L rankı $n-1$ olan bir serbest R-modül ve $K = M \cap K = (Rm_1 \oplus L) \cap K = Rm_1 \oplus (L \cap K)$'dir. $K \cap L$, L'nin bir $\mathfrak{M}$-asal alt modülüdür.

n üzerindeki tümevarımla, $K \cap L = \mathfrak{M}m_2 + ... + \mathfrak{M}m_k + Rm_{k+1} + ... + Rm_n$ olacak şekilde L'nin bir $\{m_2, ..., m_n\}$ tabanı ve $2 \leq k \leq n$ değişkeni vardır. Buradan $\{m_2, ..., m_k, m_1, m_{k+1}, ..., m_n\}$, M'nin bir tabanı olmak üzere

$K = Rm_1 + \mathfrak{M}m_2 + ... + \mathfrak{M}m_k + Rm_{k+1} + Rm_{k+2} + ... + Rm_n$ olur.

4.2. Prüfer Bölgeleri Üzerindeki Boyut

Tanım 4.18 *R halka, M R-modül olsun. R'nin x_1, x_2 elemanına M modülü üzerinde R-dizi denir eğer,*

i) $x_1 \neq 0$ ve $x_1M \neq M$,

ii) $x_2M \nsubseteq x_1M$.

Önerme 4.19 *β, R tamlık bölgesinin asal ideali ve M R-modül olsun. $Q \longrightarrow Q_\beta$,*

$$\{Q : \mathfrak{Q} \subseteq \beta \text{ olmak üzere } Q, M\text{'nin } \mathfrak{Q}\text{-asal alt modülüdür}\}$$

dan

$$\{Q_\beta : Q_\beta,\ M_\beta\ R_\beta\text{-modülün asal } R_\beta\text{-alt modülü}\}$$

e bire bir ve örten fonksiyondur.

Kanıt (Man ve Smith 2002, Önerme 1) ve (Matsumura 1980, Bölüm 2).

Önerme 4.20 *R tamlık bölgesi üzerinde herhangi bir M R-modülü için*

$$D(M) = \sup \{D(M_{\mathfrak{M}}) : \mathfrak{M}, \textit{ R'nin maksimal ideali}\}$$

dir.

Kanıt Önerme 4.19 ile açıktır**.**

Önteorem 4.21 *R değerlendirme bölgesi, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve M, $R^{(n)}$ serbest R-modül olsun. O halde $D(M) = D(R) + n - 1$'dir.*

Kanıt Önerme 4.7 ile $D(M) \geq D(R) + n - 1$'dir. Şimdi $D(M) \leq D(R) + n - 1$ olduğunu gösterelim.

Eğer $D(R) = \infty$ ise, ispat açık. İspatın geri kalan kısmında $D(R) < \infty$ olduğunu varsayacağız.

$D(R) = 0$ ise, R bir cisim ve $D(M) = \dim_R M - 1 = n - 1$. Çünkü bu durumda M'nin her has alt modülü asaldır.

$D(R) = d > 0$ olduğunu varsayalım ve sonuç, daha küçük boyutlardaki tüm değerlendirme bölgeleri için sağlansın. Eğer $n = 1$ ise, $M \cong R$ ve böylece $D(M) = D(R) \leq D(R) + n - 1$'dir.

$n > 1$ olduğunu varsayalım ve sonuç, daha küçük ranklardaki tüm serbest R-modüller için korunsun.

$0 = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq ... \subsetneq P_t$, M'nin asal alt modüllerinin bir zincirini alalım. $P = P_1$ ve $\beta = (P : M)$ olsun. $\beta \neq 0$ olduğunu varsayalım. O halde $D(R/\beta) \leq d - 1$ ve $M/\beta M \cong (R/\beta)^{(n)}$ dir. Ayrıca $\beta M \subseteq P_1$ ve $P_1/\beta M \subsetneq P_2/\beta M \subsetneq ... \subsetneq P_t/\beta M$, $M/\beta M$ serbest R/β-modülün asal alt modüllerinin bir zinciridir. d üzerindeki tümevarımla, $t - 1 \leq d - 1 + n - 1$ ve böylece $t \leq d + n - 1$'dir. O halde $D(M) \leq D(R) + n - 1$'dir.

$\beta = 0$ olduğunu varsayalım. M/P, bir değerlendirme bölgesi üzerinde sonlu üretilmiş torsion-free modüldür. (McCasland ve Smith 1993, Teorem 4.32) ile, M/P

projektiftir. O halde bazı $P' \subseteq M$ alt modülü için $M = P \oplus P'$ dür. P', quasi-lokal R halkası üzerinde sonlu üretilmiş projektif modüldür ve (McCasland ve Smith 1993, Teorem 4.44) ile P' serbest modüldür.
$P \neq 0$ olduğundan, bazı $n' < n$ doğal sayıları için $P' \cong R^{(n')}$ dür. Her bir $1 \leq i \leq t$ için $P_i = M \cap P_i = (P \oplus P') \cap P_i = P \oplus (P_i \cap P')$ ve $P_1 \cap P' \subsetneq P_2 \cap P' \subsetneq ... \subsetneq P_t \cap P'$, P' nün asal alt modüllerinin bir zinciridir. n üzerindeki tümevarım ile
$t - 1 \leq D(P') \leq D(R) + n' - 1 < D(R) + n - 1$ ve böylece $t \leq D(R) + n - 1$'dir. Herhangi durumda $t \leq D(R) + n - 1$'dir. Dolayısıyla $D(M) \leq D(R) + n - 1$'dir.

Teorem 4.22 *R Prüfer bölge ve M sonlu üretilmiş torsion-free R-modül olsun. O halde $D(M) = D(R) + rkM - 1$'dir. Ek olarak, $D(R^{(n)}) = D(R) + n - 1$'dir.*

Kanıt R Tamlık bölgesi olduğundan, R'nin herhangi bir $\mathfrak{M}$ maksimal ideali için $rk_R M = rk_{R_\mathfrak{M}} M_\mathfrak{M}$'dir. Önerme 4.20'e göre, herhangi $\mathfrak{M}$ maksimal ideali için R ile $R_\mathfrak{M}$'yı yer değiştirdiğimizde aynı koşulları göstermek yeterlidir.

Bir maksimal idealde herhangi bir Prüfer bölgenin lokalizasyonu, bir değerlendirme bölgesidir (Rotman 1979, Teorem 4.2). Önteorem 4.21 ile
$D(M_\mathfrak{M}) = D(R_\mathfrak{M}) + rkM_\mathfrak{M} - 1$'dir. Buradan $D(M) = D(R) + rkM - 1$ olur.

Önerme 4.23 *R Prüfer bölge ve M, herhangi bir sonlu üretilmiş R-modül olsun. O halde $D(M) \leq D(R) + \mu(M) - 1$'dir.*

Kanıt Teorem 4.22 ve Önerme 4.14'in ispatında kullanılan argümandan gelir.

$\mu(M) = n$ olsun. O halde M, $R^{(n)}$ in bölüm modülüdür. O halde $D(M) \leq D(R^{(n)})$'dir. Teorem 4.22 ile $D(R^{(n)}) = D(R) + n - 1$'dir. Buradan
$D(M) \leq D(R) + \mu(M) - 1$'dir.

Önteorem 4.24 *$\beta \in Spec(R)$ olmak üzere*

$$ht\beta + D(R/\beta \oplus R/\beta) \leq D(R \oplus R)$$

dir.

Kanıt $\mathfrak{Q} \in Spec(R)$ ise $\mathfrak{Q} \oplus \mathfrak{Q}$, $R \oplus R$'nin $\mathfrak{Q}$-asal alt modüldür. Aynı zamanda, $R/\beta \oplus R/\beta$ nin herhangi bir asal alt modülü, $\beta \subseteq \mathfrak{Q}$ ve Q, $R \oplus R$'nin $\mathfrak{Q}$-asal alt modülü olmak üzere $Q/(\beta \oplus \beta)$ şeklindedir. İstenilen sonuç gelir.

Önteorem 4.25 *Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

i) R tek boyutlu Prüfer bölgedir.

ii) $D(R \oplus R) \leq 2$'dir.

Kanıt $i) \Rightarrow ii)$ Teorem 4.22'den elde edilir.

$ii) \Rightarrow i)$ R bir Prüfer bölge olmasın. O halde $(Ra : Rb) + (Rb : Ra) \neq R$ olacak şekilde $a, b \in R$ elemanları vardır. $(Ra : Rb) + (Rb : Ra) \subseteq \mathfrak{M}$ olacak şekilde $\mathfrak{M}$, R'nin maksimal ideali olsun. Önerme 4.16 ile, $D(R \oplus R) \geqslant 3$ olur ki, bu ise çelişki.

Önteorem 4.26 $(R, \mathfrak{M})$ *Krull boyutu 2 olan regular lokal halka olsun. O halde* $D(R \oplus R) \geqslant 4$*'tür.*

Kanıt R boyutu 2 regular lokal halka olduğundan, $\mathfrak{M} = Ra + Rb$ olacak şekilde $a, b \in R$-dizi vardır ve R/Ra, R/Rb bölüm halkaları tek boyutlu regular lokal halkalardır (Rotman 1979, Teorem 161). Böylece bunlar, (Çallıalp ve Tekir 2009)'dan ayrık değer halkasıdır.

Bir regular lokal halkanın tek çarpanlama bölgesi olduğunu biliyoruz (Rotman 2008, Teorem 8.65).

Şimdi $\mathfrak{M}^2$ nin bir asal eleman içerdiğini görelim.

Açıkça $a^3 + b^2$, $\mathfrak{M}$'dedir. Şimdi $a^3 + b^2$ nin asal olduğunu görelim.

Varsayalım ki $a^3 + b^2$ asal olmasın.

O halde $a^3 + b^2 = xy$ olacak şekilde $x,y \in \mathfrak{M}$ kabul edelim. $r,s \in R$ için $x = a^2 + rb$ ve $y = a + sb$ alırsak, buradan

$$a^3 + b^2 = (a^2 + rb)(a + sb) = a^3 + rab + sa^2b + rsb^2$$

dir ve $xy - a^3 \in Rb$ olur.Burada $b = ra + sa^2 + rsb$'dir. a,b R-dizi olduğundan $1 - rs \in Ra$ ve $r + sa \in Rb$'dir. O halde $1 \in Ra + Rb = \mathfrak{M}$ olur ki bu çelişki. Böylece $a^3 + b^2$ asaldır.

Şimdi $R \oplus R$ de uzunluğu 4 olan asal alt modüllerinin bir zincirini inşa edelim. $\mathfrak{M}^2$ nin bir p asal elemanı içerdiğini gördük. a ve b, R-dizi olduğundan, $R \oplus R$'nin (a,b) ile üretilmiş devirli alt modülü $R(a,b)$, $R \oplus R$'nin 0-asal alt modülüdür.
$\Lambda_{pR}(a,b) = \{(x,y) \in R \oplus R : xb - ya \in pR\}$ ile tanımlayalım. $\Lambda_{pR}(a,b)$,
$R \oplus R$'nin pR-asal alt modülüdür. $(p,0) \in \Lambda_{pR}(a,b)$, $R(a,b)$'nin elemanı değil, olduğundan $R(a,b) \subseteq \Lambda_{pR}(a,b)$'dir.

Şimdi $\Lambda_{pR}(a,b)$'nin $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}$'de olduğunu görelim.
Varsayalım ki $(x,y) \in \Lambda_{pR}(a,b) \backslash (\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M})$ olsun. Genelliği bozmadan x'in birim olduğunu varsayabiliriz. O zaman $b \in Rp + Ra$'dir. Buradan da $\mathfrak{M} = Ra + Rb = Ra + Rp$ olur. p, $\mathfrak{M}^2$ de olduğundan, $\mathfrak{M} = Ra + \mathfrak{M}^2$ dir.
Nakayama Lemma ile $\mathfrak{M} = Ra$ olur ki, bu R'nin boyutunun 2 olmasıyla çelişir.
Sonuç olarak $\Lambda_{pR}(a,b) \subseteq \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}$ ve $(a,0) \in \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}$ olduğundan, $\Lambda_{pR}(a,b)$ de değil, $0 \subsetneq R(a,b) \subsetneq \Lambda_{pR}(a,b) \subsetneq \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M} \subsetneq R \oplus \mathfrak{M}$ olur. $R \oplus R$'de uzunluğu 4 olan asal alt modüllerinin bir zinciridir.

Teorem 4.27 *R, $D(R \oplus R) \leq D(R) + 1$ olan Noetherian bölge olsun. O halde R Dedekind bölgesidir.*

Kanıt Önerme 4.20 ile $\mathfrak{M}$, R'nin maksimal ideali olmak üzere R'nin en azından bir boyutlu lokal noetherian bölge olduğunu varsayabiliriz. Eğer $D(R) = 1$ ise, Önteorem 4.25 ile ispatladık. İspatı tamamlamak için $D(R) = 2$ olmasının mümkün olmadığını göstermeliyiz ve bunu kullanarak $D(R)$'nin 2'den daha büyük olamayacağının sonucuna ulaşırız.

$D(R) = 2$ olduğunu varsayalım. Varsayım ile $D(R \oplus R) \leq 3$'tür. R'nin regular olmadığı Önteorem 4.26 ile açıktır. Böylece R'nin, R_β bir ayrık değer halkası olmayacak şekilde tek bir uzunlukta β asal ideali vardır. Böylece $a \in (\beta R_\beta) \backslash (bR_\beta)$ ve $b \in (\beta R_\beta) \backslash (aR_\beta)$ olacak şekilde a,$b \in \beta$ vardır. Böylece $(Ra : Rb) + (Rb : Ra) \subseteq \beta$'dir. Önerme 4.16 ile, $D(R \oplus R) \geq 4 + D(R/\beta) - 1 \geq 4$'tür. Bu $D(R \oplus R) \leq 3$ ile çelişir. Sonuç olarak $D(R) = 2$ olamaz.

$D(R) \geq 3$ olduğunu varsayalım. $D(R) = n$ olsun.
$0 \subsetneq \beta_1 \subsetneq \beta_2 \subsetneq ... \subsetneq \beta_{n-2} \subsetneq \beta_{n-1} \subsetneq \beta_n = \mathfrak{M}$, R de asal ideallerin n uzunluğundaki

zinciri olsun. $\bar{R} = R/\beta_{n-2}$ olsun. $ht\beta_{n-2} + D(\bar{R}) = n$, $ht\beta_{n-2} = n-2$ ve $D(\bar{R}) = 2$'dir. Önteorem 4.24 ve varsayım ile

$$ht\beta_{n-2} + D(\bar{R} \oplus \bar{R}) \leq D(R \oplus R) \leq D(R) + 1$$

dir. Böylece $ht\beta_{n-2} + D(\bar{R} \oplus \bar{R}) \leq (ht\beta_{n-2} + D(\bar{R})) + 1$ ve $D(\bar{R}) = 2$ olmak üzere $D(\bar{R} \oplus \bar{R}) \leq D(\bar{R}) + 1$ olur. Bu da $D(R) \geq 3$ olmasıyla çelişir.

Teorem 4.28 *Aşağıdaki ifadeler R Noetherian bölgesi için birbirine denktir.*

i) R Dedekind bölgesidir.

ii) $D(R^{(n)}) = D(R) + n - 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$

iii) Herhangi bir sonlu üretilmiş M R-modülü için $D(M) \leq D(R) + \mu(M) - 1$'dir.

iv) $D(R \oplus R) \leq D(R) + 1$'dir.

Kanıt $i) \Rightarrow ii)$ Teorem 4.22

$ii) \Rightarrow iii)$ Önerme 4.14

$iii) \Rightarrow iv)$ $M = R \oplus R$, $\mu(M) = \{(1,0),(0,1)\} = 2$ olmak üzere $D(R \oplus R) \leq D(R) + \mu(R \oplus R) - 1 = D(R) + 2 - 1$ olup $D(R \oplus R) \leq D(R) + 1$'dir.

$iv) \Rightarrow i)$ Teorem 4.27 ile açıktır.

4.3. Dedekind Bölgeleri Üzerinde Sonlu Üretilmiş Modüllerin Boyutu

Bu kısımda, M'nin Dedekind bölgesi üzerinde sonlu üretilmiş modül olması durumunda $D(M)$'yi hesaplayacağız. Önerme 4.20'e göre, $D(M)$'yi hesaplamada, R'nin quasi-lokal olması durumuna indirgeyebiliriz. R'nin quasi-lokal olması, R'nin tek maksimal ideali olması demektir. Eğer I, R'nin keyfi bir ideali ise, her $x \in X$ için $I^n x = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa X R-modüle I-torsion denir.

Önteorem 4.29 *R tek maksimal ideali $\mathfrak{M}$ olan quasi-lokal halka ve M_2 $\mathfrak{M}$-torsion olmak üzere M'nin M_1, M_2 alt modülleri için $M = M_1 \oplus M_2$ R-modül olsun. β, R'nin maksimal olmayan asal ideali olsun. O halde L, M'nin β-asal alt modülüdür ancak ve ancak M_1'in bazı K β-asal alt modülleri için $L = K \oplus M_2$'dir.*

Kanıt $\beta \neq \mathfrak{M}$ olan bazı β asal idealler için L, M'nin β-asal alt modülü olsun. Her bir $x \in M_2$ için, $\mathfrak{M}^n x = 0 \subseteq L$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır ve dolayısıyla $x \in L$'dir. Böylece $K = L \cap M_1 \subseteq M_1$ olmak üzere $L = L \cap M = (L \cap M_1) \oplus M_2$ ve $M_2 \subseteq L$'dir. $M_1/K \cong M/L$ olduğundan, K M_1'in β-asal alt modülüdür.

Tersine, eğer M_1'in bazı K β-asal alt modülü için $L = K \oplus M_2$ ise, o zaman $M/L \cong M_1/K$'dan L, M'nin bir β-asal alt modülü olur.

Önteorem 4.30 *R tek maksimal ideali $\mathfrak{M}$ olan quasi-lokal halka ve M_2 $\mathfrak{M}$-torsion olmak üzere M'nin M_1, M_2 alt modülleri için $M = M_1 \oplus M_2$ R-modül olsun. O halde $D(M) = \max\{D(M_1), \mu(M) - 1\}$'dir.*

Kanıt M_1, M'nin homomorf görüntüsü olduğundan $D(M_1) \leq D(M)$'dir. Ek olarak $D(M) \geq D(M/\mathfrak{M}M) = \mu(M/\mathfrak{M}M) - 1$'dir. Fakat Nakayama Lemma ile $\mu(M/\mathfrak{M}M) = \mu(M)$'dir. Böylece $D(M) \geq \mu(M) - 1$'dir.

$t \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq ... \subsetneq L_t$, M'nin asal alt modüllerinin bir zinciri olsun.

Eğer $(L_0 : M) = \mathfrak{M}$ ise, buradan bölüm zincirine geçersek
$L_0/\mathfrak{M}M \subsetneq L_1/\mathfrak{M}M \subsetneq ... \subsetneq L_t/\mathfrak{M}M$, $M/\mathfrak{M}M$'nin asal alt modüllerinin bir zinciri olur. O halde $D(M/\mathfrak{M}M) \geq t$'dir. Buradan $D(R/\mathfrak{M}) + \mu(M/\mathfrak{M}M) - 1 \geq t$ olup, böylece $t \leq \mu(M) - 1$'dir.

$\beta \neq \mathfrak{M}$ olan bazı β asal idealleri için $(L_0 : M) = \beta$ olsun. Önteorem 4.29 ile, M_1in bazı K_0 β-asal alt modülleri için $L_0 = K_0 \oplus M_2$'dir. Böylece her $1 \leq i \leq t$ için M_1'in bazı K_i asal alt modülleri için $L_i = K_i \oplus M_2$'dir. Açıkça
$K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq ... \subsetneq K_t$, M_1'in asal alt modüllerinin bir zinciridir. Böylece $t \leq D(M_1)$'dir. Buradan $D(M) \leq \max\{D(M_1), \mu(M) - 1\}$ olur.

Teorem 4.31 *R bir tamlık bölgesi, $n \in \mathbb{Z}^+$, β_i R'nin farklı maksimal idealleri $(1 \leq i \leq n)$ ve M' sonlu üretilmiş torsion-free alt modülü ile M_i sonlu üretilmiş β_i-torsion alt modüllerin direk toplamı $M = M' \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ R-modül olsun. O halde $D(M) = \max\{D(M'), \mu(M/\beta_1 M) - 1, \mu(M/\beta_2 M) - 1, ..., \mu(M/\beta_n M) - 1\}$'dir.*

Kanıt β, R'nin herhangi bir maksimal ideali olsun. $\beta \neq \beta_i$ $(1 \leq i \leq n)$ olduğunu varsayalım. O halde $M_\beta = M'_\beta$'dır.

İlk başta bunu görelim.

M_1 sonlu üretilmiş β_1-torsion, M' sonlu üretilmiş torsion-free alt modül, $S = R \backslash \beta$, $\beta \neq \beta_1$ ve $x \in (R \backslash \beta) \cap \beta_1$ olsun. $M = M' \oplus M_1$ olmak üzere M_1 β-torsion olsun. O halde $S^{-1}M_1$, $S^{-1}\beta$-torsion'dur. Burada göstermemiz gereken $S^{-1}M_1 = 0$ mı?

$\frac{m_1}{s} \in S^{-1}M_1$ olsun. O halde $\frac{m_1}{s} = \frac{m_1}{xs}.\frac{x}{1} = \frac{m_1}{x^n s}.\frac{x^n}{1} = 0$'dır. Burada $m_1 x^n = 0$'dır. Çünkü M_1 sonlu üretilmiş β_1-torsion'dur.

Böylece Önerme 4.20 ile $D(M_\beta) = D(M'_\beta) \leq D(M')$'dür.

Şimdi bazı $1 \leq i \leq n$ için $\beta = \beta_i$ olsun. O halde $M_\beta \cong M'_\beta \oplus M_{i_\beta}$'dır ve böylece Önteorem 4.30 ile $D(M_\beta) = \max\left\{D(M'_\beta), \mu(M_\beta/\beta M_\beta) - 1\right\}$'dir. Önerme 4.20 kullanılarak $D(M'_\beta) \leq D(M')$ elde edilir ve $M_\beta/(\beta M_\beta) \cong M/\beta M$'dir. O halde $D(M) \leq \max\{D(M'), \mu(M/\beta_1 M) - 1, \mu(M/\beta_2 M) - 1, ..., \mu(M/\beta_n M) - 1\}$ dir.

Tersine, $D(M') \leq D(M)$'dir. Çünkü M', M'nin homomorf görüntüsüdür. Ek olarak, her bir $1 \leq i \leq n$ için, $\mu(M/\beta_i M) - 1 = D(M/\beta_i M) \leq D(M)$'dir. O halde $D(M) \geq \max\{D(M'), \mu(M/\beta_1 M) - 1, \mu(M/\beta_2 M) - 1, ..., \mu(M/\beta_n M) - 1\}$ den sonuç gelir.

Önerme 4.32 *R tamlık bölgesi, $n \in \mathbb{Z}^+$, β_i R'nin farklı maksimal idealleri $(1 \leq i \leq n)$ ve rankı k olan serbest M' alt modülü ile M_i'nin sonlu üretilmiş β_i-torsion alt modüllerin direk toplamı, $M = M' \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ R-modül olsun. O halde*

$$D(M) = \max\{D(M'), \mu(M_1) + k - 1, \mu(M_2) + k - 1, ..., \mu(M_n) + k - 1\}$$

dir.

Kanıt İlk önce $i \neq j$ için $M_i/\beta_j M_i = 0$ olduğunu görelim.

$m/\beta_1 M_2 \in M_2/\beta_1 M_2$ alalım. M_2 β_2-torsion olduğundan $\beta_2^n.m = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Ayrıca β_1 maksimal ideal olduğundan $\beta_2^n + \beta_1 = R$'dir. O halde $1 = x + y$ olacak şekilde $x \in \beta_2^n$, $y \in \beta_1$ elemanları vardır. Buradan

$m+\beta_1 M_2 = 1.m+\beta_1 M_2 = (x+y)m+\beta_1 M_2 = mx+my+\beta_1 M_2 = \beta_1 M_2$ olur. O halde $M_2/\beta_1 M_2 = 0$'dır. Her bir $1 \leq i \leq n$ için

$$M/\beta_i M \cong (R/\beta_i)^{(k)} \oplus (M_i/\beta_i M_i)$$

ve böylece

$$\mu(M/\beta_i M) = k + \mu(M_i/\beta_i M_i)$$

dır. M_i β_i-torsion olduğundan $\mu(M_i/\beta_i M_i) = \mu(M_i)$'dir. Teorem 4.31 ile,

$$D(M) = \max\{D(M'), \mu(M_1)+k-1, \mu(M_2)+k-1, ..., \mu(M_n)+k-1\}$$

olur.

Teorem 4.33 *R Dedekind bölgesi ve M sonlu üretilmiş R-modül olsun. O halde* $M = M' \oplus M_1 \oplus ... \oplus M_n$ *, M' torsion-free modül ile β_i R'nin farklı maksimal idealleri* $(1 \leq i \leq n)$ *olmak üzere M_i β_i-torsion alt modüllerin direk toplamıdır. Ek olarak,* $D(M) = \max\{rkM' + \mu(M_i) - 1 : 1 \leq i \leq n\}$ *dir.*

Kanıt Teorem 2.23'den $M = M' \oplus M_1 \oplus ... \oplus M_n$ ayrışımı açıktır. Yalnızca $D(M)$'yi belirleyeceğiz.

1) $M' = 0$ ise, $rkM' = 0$ olur ve sonuç Önerme 4.32'den gelir.

2) $M' \neq 0$ olsun. (Cohen 1989, Teorem 6.11) ile, $M' \cong R^{(k-1)} \oplus I$ olacak şekilde R'nin bir I ideali ve $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. R'nin herhangi bir β maksimal ideali için, $I/\beta I \cong R/\beta$ dır (Cohen 1989, Önerme 6.5) ve $M'/\beta M' \cong (R/\beta)^k$ dır. Önerme 4.32'nin ispatı ile, $\mu(M/\beta_i M) = k + \mu(M_i) = rkM' + \mu(M_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ dir. Aynı zamanda, Teorem 4.22 ile, $D(M') = rkM'$ dür. Teorem 4.31 ile

$D(M) = \max\{rkM' + \mu(M_i) - 1 : 1 \leq i \leq n\}$ dir.

Önerme 4.34 *R Dedekind bölgesi ve M sonlu üretilmiş R-modül olsun. O halde* $D(M) = \sup\{D(R/\beta) + rk_\beta M - 1 : \beta \in Spec(R) \text{ ve } Ann(M) \subseteq \beta\}$ *dir.*

Kanıt M' torsion-free modül ile β_i, R'nin farklı maksimal idealleri $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere M_i β_i-torsion alt modüllerin direk toplamı, $M = M' \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ olsun.

$M' = 0$ olduğunu varsayalım. $Ann(M) \subseteq \beta$ olacak şekilde $\beta \in Spec(R)$ olsun. Bazı $1 \leq i \leq n$ için $\beta = \beta_i$'dir.

İlk önce bunu görelim.

$M = M_1 \oplus M_2$ olsun. $\beta_1^n M_1 = 0$, $\beta_2^k M_2 = 0$ olacak şekilde $n, k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $I = \beta_1^n \beta_2^k$ olsun.O halde $m \in M$ olmak üzere $I.m = 0$'dır. Böylece $I \subseteq Ann(M) \subseteq \beta$'dır. Böylece $\beta_1 \subseteq \beta$ veya $\beta_2 \subseteq \beta$ olur. Çünkü β asal ideal. Bu durumda Teorem 4.22'den $D(R/\beta) + rk_\beta M - 1 = 0 + \mu(M/\beta M) - 1$'dir. Teorem 4.31 ile

$$D(M) = \sup \{D(R/\beta) + rk_\beta M - 1 : \beta \in Spec(R) \text{ ve } Ann(M) \subseteq \beta\}$$

dir.

Şimdi $M' \neq 0$ olsun. Bu durumda, $Ann(M) = 0$'dır.

$\beta \in Spec(R)$ olsun. Eğer $\beta = 0$ ise, $D(R/\beta) + rk_\beta M - 1 = rkM'$, çünkü $D(R) = 1$ dir.

Bazı $1 \leq i \leq n$ için $\beta = \beta_i$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $D(R/\beta) = 0$ ve $rk_\beta M = \mu(M/\beta M)$.

Son olarak, $\beta \neq \beta_i$ olacak şekilde R'nin β maksimal ideali olsun. O halde $D(R/\beta) = 0$ ve Teorem 4.31'de yapıldığı gibi $M/\beta M \cong M'/\beta M'$ ve $rk_\beta M = rkM'$ dir. Böylece, herhangi bir $\beta \in Spec(R)$ için

$$D(R/\beta) + rk_\beta M - 1 = \left\{ \begin{array}{cc} rkM' \ , & eğer\ \beta = 0 \\ \mu(M/\beta M) - 1 \ , & eğer\ \beta = \beta_i\ 1 \leq i \leq n\ ise \\ rkM' - 1 \ , & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}$$

dir. Fakat Teorem 4.22 ile, $rkM' = D(M')$ dür. Teorem 4.31 ile, $D(M) = \sup \{D(R/\beta) + rk_\beta M - 1 : \beta \in Spec(R) \text{ ve } Ann(M) \subseteq \beta\}$ dir.

Teorem 4.35 *R Noetherian bölge olsun. R Dedekind bölgesidir ancak ve ancak herhangi bir sonlu üretilmiş M R-modülü için*

$$D(M) = \sup \{D(R/\beta) + rk_\beta M - 1 : \beta \in Spec(R) \ ve \ Ann(M) \subseteq \beta\}$$

dir.

Kanıt Gereklilik kısmı Önerme 4.34'dır.

Tersi için $M = R^{(2)}$ alalım. O halde $D(M) = D(R) + 1$'dir. Teorem 4.28 ile R Dedekind bölgesidir.

4.4. Serbest Modüllerin Boyutları

Bu bölümde serbest modüllerin boyutunu hesaplayacağız.

R tek boyutlu Noetherian bölge ve β, R'nin maksimal ideali olsun. R_β lokal tamlık bölgesi tek boyutludur ve Noetherian'dır. (Cohen 1950)

β, R'nin maksimal ideali olsun. R_β'nın her ideali en az k tane eleman ile üretilebiliyor ise k tamsayısı $\mathrm{v}(R_\beta)$ ile gösterilecektir.
Böyle bir k yoksa $\mathrm{v}(R_\beta) = \infty$ kabul edilecektir. Aynı zamanda,

$$\mathrm{v}(R) = \sup \{\mathrm{v}(R_\beta) : \beta,\ R\text{'nin maksimal ideali}\}$$

ile de tanımlanır. $\mathrm{v}(R)$ ya pozitif tamsayı ya da $\mathrm{v}(R) = \infty$'dur. (Cohen 1950, sayfa 39-40)'da, $\mathrm{v}(R) = \infty$ olan tek boyutlu R Noetherian bölgesinin örneği verilmiştir.

R Noetherian bölgesi Dedekindtir ancak ve ancak R tek boyutlu ve $\mathrm{v}(R) = 1$'dir.(Teorem 2.48)

Herhangi bir $r \in \mathbb{R}$ için, $[r]$ yi $s \leq r$ olacak şekilde en büyük s tamsayısı ile tanımlayalım. $t \in \mathbb{Z}$ olsun. $\mathrm{v}(R)$ bir pozitif tamsayı olmak üzere $\mathrm{v}(R)|t$ yazarız ve $\mathrm{v}(R)$, t'yi böler aksi takdirde $\mathrm{v}(R) \nmid t$'dir.

Eğer $\mathrm{v}(R) = \infty$ ise $[n/\mathrm{v}(R)] = 0$ ile tanımlanır.

Önteorem 4.36 *R tek boyutlu Noetherian bölge olsun.*

$\mathrm{v}(R) \geq n$ *ancak ve ancak* $D(R^{(n)}) = 2n - 1$*'dir.*

Kanıt $M = R^{(n)}$ olsun. Teorem 4.13 ile, $D(M) \leq 2n - 1$'dir.

$\mathrm{v}(R) \geq n$ olsun. O halde $\mathrm{v}(R_\beta) = k \geq n$ olacak şekilde R'nin bir β maksimal ideali vardır. I, R_β'nın k tane elemanla üretilebilen bir ideali olsun. O halde $a_i \in R$ için $I = R_\beta a_1 + R_\beta a_2 + ... + R_\beta a_k$'dır.
$K = \{(r_1, r_2, ...r_n) \in M : a_1r_1 + a_2r_2 + ...a_nr_n = 0\}$ olsun. Önteorem 4.15 ile K, M'nin 0-asal alt modülüdür ve $htK = n - 1$'dir.

Ek olarak, eğer $r_i \in R$ ve $a_1r_1 + a_2r_2 + ...a_nr_n = 0$ ise r_i, R_β'da bir birim değildir ve böylece $1 \leq i \leq n$ için $r_i \in \beta$'dır. Buradan $K \subseteq \beta M$ olur. O halde

$$\begin{aligned} D(M) &\geq D(M/\beta M) + ht(\beta M) \\ &\geq D(M/\beta M) + 1 + ht(K) \\ &\geq (n-1) + 1 + (n-1) = 2n - 1 \end{aligned}$$

dir. Böylece $D(M) = 2n - 1$'dir.

Tersine $D(M) = 2n - 1$ olsun.

$0 = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq ... \subsetneq P_{2n-1}$, M nin asal alt modüllerinin bir zinciri olsun. Önteorem 4.12 ve $D(M) = 2n - 1$'den $0 = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq ... \subsetneq P_{n-1}$, M'nin 0-asal alt modüllerinin bir homogenous zinciridir ve $\mathfrak{M}$, R'nin maksimal ideali olmak üzere $P_n \subsetneq P_{n+1} \subsetneq P_{n+2} \subsetneq ... \subsetneq P_{2n-1}$, M'nin $\mathfrak{M}$-asal alt modüllerinin bir homogeneous zinciri olur.

M'nin $\mathfrak{M}$-asal alt modüllerinin herhangi bir homogeneous zincirinin uzunluğu en fazla $n-1$ olduğunda, $P_n = \mathfrak{M}M$'dir.

Önteorem 4.15 ile, $P_{n-1} = \{(r_1, r_2, ...r_n) \in M : a_1r_1 + a_2r_2 + ...a_nr_n = 0\}$ olacak şekilde $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ tabanı ve $a_i \in R$ elemanları vardır.

1 ile n arasında i'yi sabitleyelim.

$I_i = Ra_1 + ... + Ra_{i-1} + Ra_{i+1} + ... + Ra_n$ ve $r \in (I_i : Ra_i)$ olsun. O zaman bazı $s_j \in R$ için $ra_i = s_1a_1 + ... + s_{i-1}a_{i-1} + s_{i+1}a_{i+1} + ... + s_na_n$'dir. Buradan $(s_1, ..., s_{i-1}, -r, s_{i+1}, ...s_n) \in P_{n-1} \subseteq \mathfrak{M}M$, $r \in \mathfrak{M}$ dir.

Böylece $\sum_{i=1}^{n}(I_i : Ra_i) \subseteq \mathfrak{M}$ dir. $I = Ra_1 + Ra_2 + ... + Ra_n$ olsun. $I_\mathfrak{M}$, $R_\mathfrak{M}$ üzerinde en az n tane eleman ile üretilir. Buradan $\mathrm{v}(R) \geq \mathrm{v}(R_\mathfrak{M}) \geq n$ olur.

Eğer R,

$$D(R^{(n)}) = \left\{ \begin{array}{cc} 2n - n/\mathrm{v}(R)\ , & \mathrm{v}(R)|n \\ 2n - [n/\mathrm{v}(R)] - 1, & \mathrm{v}(R) \nmid n \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlarsa, R tek boyutlu Noetherian bölgesine geçici olarak G-bölge diyeceğiz.

Önteorem 4.37 *R, $\mathrm{v}(R) < \infty$ olacak şekilde tek boyutlu Noetherian bölge ve R'nin her β maksimal ideali için R_β lokal tamlık bölgesi G-bölge olsun. O halde R G-bölge'dir.*

Kanıt $\mathrm{v}(R) = k$ olsun. O halde $\mathrm{v}(R_\beta) = k$ ve her $\mathfrak{Q}$ maksimal ideali için $\mathrm{v}(R_\mathfrak{Q}) \leq k$ olacak şekilde R'nin bir β maksimal ideali vardır. $k|n$ olduğunu varsayalım. $M = R^{(n)}$ olsun. Hipotez ile $D(M_\beta) = 2n - n/k$'dır.

$\mathrm{v}(R_\mathfrak{Q}) < k$ olacak şekilde R'nin bir $\mathfrak{Q}$ maksimal ideali olduğunu varsayalım. O halde $n/k < n/\mathrm{v}(R_\mathfrak{Q})$ ve böylece $n/k \leq [n/\mathrm{v}(R_\mathfrak{Q})]$ dır. Hipotez ile

$$D(M_\mathfrak{Q}) = \left\{ \begin{array}{cc} 2n - n/\mathrm{v}(R_\mathfrak{Q}) \ , & \mathrm{v}(R_\mathfrak{Q})|n \\ 2n - [n/\mathrm{v}(R_\mathfrak{Q})] - 1 \ , & \mathrm{v}(R_\mathfrak{Q}) \nmid n \end{array} \right\}$$

dir. Böylece $D(M_\mathfrak{Q}) \leq 2n - n/k$. Önerme 4.20 ile, $D(M) = 2n - n/k$'dir.

Şimdi $k \nmid n$ olsun. Hipotez ile $D(M_\beta) = 2n - [n/k] - 1$'dir.
$\mathrm{v}(R_\mathfrak{Q}) < k$ olacak şekilde R'nin bir $\mathfrak{Q}$ maksimal ideali olsun. Bu durumda $[n/k] < n/k < n/\mathrm{v}(R_\mathfrak{Q})$'dır. Fakat hipotez ile

$$D(M_\mathfrak{Q}) = \left\{ \begin{array}{cc} 2n - n/\mathrm{v}(R_\mathfrak{Q}) \ , & \mathrm{v}(R_\mathfrak{Q})|n \\ 2n - [n/\mathrm{v}(R_\mathfrak{Q})] - 1 \ , & \mathrm{v}(R_\mathfrak{Q}) \nmid n \end{array} \right\}$$

dir. Böylece $D(M_\mathfrak{Q}) \leq 2n - [n/k] - 1$'dir. Önerme 4.20 ile $D(M) = 2n - [n/k] - 1$'dir.

Önteorem 4.38 *R, tek maksimal ideali $\mathfrak{M}$ ve $\mathrm{v}(R) = k < \infty$ olan tek boyutlu Noetherian lokal bölge olsun. $q, r \in \mathbb{Z}^+$ ve $0 \leq r < k$ için $n = kq + r$ olsun. K, $K \subseteq \mathfrak{M}R^{(n)}$ olacak şekilde $R^{(n)}$ in 0-asal alt modülü olsun. Bu takdirde*

$$htK \leq \left\{ \begin{array}{cc} n - q \ , & k|n \\ n - q - 1 \ , & \textit{diğer durumda} \end{array} \right\}$$

dur.

Kanıt $M = R^{(n)}$ olsun. Varsayalım ki $k = 1$ olsun. O halde R bir ayrık değer halkası ve $n = q$'dur. $htK + 1 + D(M/\mathfrak{M}M) \leq D(M)$ olduğunu biliyoruz. $M/\mathfrak{M}M$, $R/\mathfrak{M}$ üzerinde n boyutlu vektör uzayı olduğundan, $D(M/\mathfrak{M}M) = n - 1$'dir. R

ayrık değer halkası olduğundan, Teorem 4.22 ile, $D(M) = n$'dir. Buradan $K = 0$ olur. $k = 1$ olduğunda $htK \leq n - q$ olduğunu gördük.

Varsayalım ki $k \geq 2$ ve $n \geq k$ olsun. Önteorem 4.15 ile, genelliği bozmadan $htK = n - m$ ve

$$K = \left\{ (r_1, r_2, ..., r_n) \in R^{(n)} : A \begin{pmatrix} r_1 \\ . \\ . \\ . \\ r_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

olacak şekilde R üzerinde $m \times n$'lik $(1 \leq m \leq n)$ A matrisinin varolabileceğini kabul edebiliriz. Şimdi $k|n$ durumunda $htK \leq n - q$ olacağını gösterelim. $k \nmid n$ durumu da benzer şekilde yapılır.

Varsayalım ki $k|n$ ve $htK > n - q$ olsun. O halde $m < q$ dur. I ideali, A'nın birinci sıradaki tüm elemanlarıyla üretilsin. $\mathrm{v}(R) = k$ olduğundan I, A'nın birinci sıradaki k tane eleman ile üretilir. Böylece, R üzerinde AE_1'in birinci sıradaki son $n-k$ terimin hepsi sıfır olacak şekilde $n \times n$ tipinde tersinir E_1 matrisi vardır. Yani, eğer $AE_1 = (b_{ij})$ ise $k+1 \leq j < n$ için $b_{1j} = 0$'dır. Benzer şekilde R üzerinde $n \times n$ tipinde tersinir E_2 matrisi vardır:

$i)$ AE_1E_2'nin birinci sıradaki son $n - k$ terimin hepsi sıfırdır.

$ii)$ AE_1E_2'nin ikinci sıradaki son $n - 2k$ terimin hepsi sıfırdır.

Bu yöntemle, AE'nin d. sıradaki son $n - dk$ terimin hepsi sıfır olacak şekilde R üzerinde $n \times n$ tipinde tersinir E matrisi vardır.

B, $m \times (mk)$ tipinde bir matris ve C, $m \times (n - mk)$ tipinde sıfır matrisi olmak üzere $AE = [B|C]$ ve AE'nin son n. sütunundaki tüm terimler sıfırdır.

$$E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

E nin n. sütunudur. O halde $(c_1, c_2, ..., c_n)$, K'dadır. $K \subseteq \mathfrak{M}R^{(n)}$ olduğundan, her $1 \leq i \leq n$ için $c_i \in \mathfrak{M}$'dir. Buradan $\det E \in \mathfrak{M}$ olur. Bu ise E'nin tersinir olması ile çelişir. Sonuç olarak $htK \leq n - q$'dur.

Şimdi, $R^{(n)}$ nin, $\mathfrak{M}R^{(n)}$ de içerilen, uzunluğu $k|n$ olduğunda $n-q$, diğer durumda $n - q - 1$ olan 0-asal alt modülünü inşa ederek son kısmı ispatlayacağız.

$\mathrm{v}(R) = k$ olduğundan, $J = Ra_1 + Ra_2 + ... + Ra_k$ en az k tane elemanla üretilecek şekilde a_1,a_2,...,$a_k \in R$ vardır. O halde $J_i = \sum\limits_{j=1}^{k} Ra_j$ $(i \neq j$ ve $1 \leq i \leq k)$ olmak üzere $\sum\limits_{i=1}^{k}(J_i : Ra_i) \subseteq \mathfrak{M}$'dir.

$$K = \left\{ \begin{array}{ll} (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^{(n)} : & a_1 x_{ik+1} + ... + a_k x_{(i+1)k} = 0 \ (0 \leq i \leq q-1) \text{ ve} \\ & \qquad a_1 x_{qk+1} + ... + a_r x_r = 0,\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

olsun. O halde $K \subseteq \mathfrak{M}R^{(n)}$ dir. Önteorem 4.15 ile, K $R^{(n)}$ nin 0-asal alt modülüdür ve

$$htK = \left\{ \begin{array}{cc} n-q\ , & k|n \\ n-q-1\ , & \text{diğer durumda} \end{array} \right\}$$

dir.

Önteorem 4.39 *Önteorem 4.38 ile*

$$D(R^{(n)}) = \left\{ \begin{array}{cc} 2n - n/\mathrm{v}(R)\ , & \mathrm{v}(R)|n \\ 2n - [n/\mathrm{v}(R)] - 1, & \mathrm{v}(R) \nmid n \end{array} \right\}$$

dir.

Kanıt $M = R^{(n)}$ ve $\mathrm{v}(R) = k < \infty$ olsun. Teorem 4.13 ile $D(M) \leq 2n-1 < \infty$'dur. $D(M) = t$ ve $K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq ... \subsetneq K_n$, M'nin K_i asal alt modüllerinin bir zinciri olsun. R, tek maksimal ideali $\mathfrak{M}$ olan tek boyutlu lokal bölge olduğundan, K_i, $\mathfrak{M}$-asal veya 0-asaldır. K_t, $\mathfrak{M}$-asal, $K_0 = 0$ ve K_0, 0-asaldır. O halde

$$K_i = \left\{ \begin{array}{cc} \text{0-asal}, & 0 \leq i \leq s \\ \mathfrak{M}\text{-asal}, & s+1 \leq i \leq t \end{array} \right\}$$

olacak şekilde $0 < s < t$ vardır. K_{s+1}, $\mathfrak{M}$-asal alt modül olsun. Önteorem 4.17 ile $K_{s+1} = \mathfrak{M}_{u_1} + ... + \mathfrak{M}_{u_h} + R_{u_{h+1}} + ... + R_{u_n}$ olacak şekilde $1 \leq h \leq n$ ve $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ tabanı vardır. $M/K_{s+1} \cong (R/\mathfrak{M})^{(h)}$ ve $D(M/K_{s+1}) = h-1$'dir.

Şimdi K_s, 0-asal alt modül olsun. Önteorem 4.15 ile $1 \leq m \leq n$ olmak üzere R üzerinde $m \times n$'lik bir A matrisi vardır öyleki

$$K_s = \left\{ r_1u_1 + r_2u_2 + ... + r_nu_n \in M : A. \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ . \\ r_n \end{pmatrix} = 0 \right\} \text{ ve } htK_s = n - m$$

dir. $i = 1, 2, ..., n-h$ için $Q_i = \mathfrak{M}u_1 + ... + \mathfrak{M}u_{h+i} + Ru_{h+i+1} + ... + Ru_n$ olsun. Açıkça herbir Q_i, $Q_i \subseteq K_{s+1}$ olmak üzere M'nin $\mathfrak{M}$-asal alt modülüdür. $Q_{n-h} = \mathfrak{M}M$ ve $Q_{n-h} \subsetneq Q_{n-(h+1)} \subsetneq ... \subsetneq Q_1 \subsetneq K_{s+1}$'dir. Böylece $htK_{s+1} \geq (n-h) + htQ_{n-h}$'dir. $n = kq' + r'$ $(0 \leq r' < k)$ olsun. Önteorem 4.38 ile

$$htQ_{n-h} = \left\{ \begin{array}{cc} n - q' + 1 \ , & k|n \\ n - q' \ , & k \nmid n \end{array} \right\}$$

olur. $s = htK_s = n - m$ ve $htK_s = s + 1$ olduğunda

$$m \leqslant \left\{ \begin{array}{cc} h + (q' - n) \ , & k|n \\ h + (q' + 1 - n) \ , & k \nmid n \end{array} \right\}$$

dir. Herhangi durumda $m \leq h$'dir.

B, $m \times h$'lik matris ve C, $m \times (n-h)$'lik matris olmak üzere $A = [B|C]$ olsun.

$$K = \left\{ r_1u_1 + r_2u_2 + ... + r_nu_n \in M : B. \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ . \\ r_h \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

dır. Önteorem 4.15 ile K, $Ru_1 + ... + Ru_h$'de uzunluğu $h - m$ olan 0-asal alt modüldür

ve K, $\mathfrak{M}u_1 + ... + \mathfrak{M}u_h$'dedir. $h = kq + r$ $(0 \leq r < k)$ olsun. Önteorem 4.38 ile

$$\left\{ \begin{array}{ll} m \geq q, & k|h \\ m \geq q+1, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}$$

dir. Böylece

$$\left\{ \begin{array}{ll} htK_s \leq n - q, & k|h \\ htK \leq n - q - 1, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}$$

dir. Önteorem 4.38'in ispatının son kısmındaki gibi, M'nin

i) P, $\mathfrak{M}u_1 + ... + \mathfrak{M}u_h + Ru_{h+1} + ... + Ru_n$'dedir.

ii)

$$\left\{ \begin{array}{ll} htP = n - q, & k|h \\ htP = n - q - 1, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}$$

olacak şekilde bir P, 0-asal alt modülünü inşa edebiliriz. Sonuç olarak

$$htK_s = \left\{ \begin{array}{ll} n - q, & k|h \\ n - q - 1, & k \nmid h \end{array} \right\}$$

dir. Buradan

$$t = (h-1) + 1 + htK_s = \left\{ \begin{array}{ll} h + n - h/k, & k|h \\ h + n - [h/k] - 1, & k \nmid h \end{array} \right\}$$

olur.

$$f(h) = \left\{ \begin{array}{cc} h+n-h/k, & k|h \\ h+n-[h/k]-1, & k \nmid h \end{array} \right\}$$

ile tanımlı $f : \{1, 2, ..., n\} \to \mathbb{N}$ dönüşümünü alalım. f artan fonksiyondur ve böylece

$$t = f(n) = \left\{ \begin{array}{cc} 2n-n/k, & k|h \\ 2n-[n/k]-1, & k \nmid h \end{array} \right\}$$

dır.

Teorem 4.40 *R tek boyutlu Noetherian bölge ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. O halde*

$$D(R^{(n)}) = \left\{ \begin{array}{cc} 2n-n/\mathrm{v}(R)\ , & \mathrm{v}(R)|n \\ 2n-[n/\mathrm{v}(R)]-1, & \mathrm{v}(R) \nmid n \end{array} \right\}$$

dir.

Kanıt Önteorem 4.36, Önteorem 4.37 ve Önteorem 4.39'dir.

Teorem 4.41 *R tek boyutlu Noetherian bölge ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktir:*

i) $\mathrm{v}(R) = n$*'dir.*

ii) $D(R^{(k)}) = 2k-1$, $k = 1, 2, ..., n$ *ve* $D(R^{(k)}) < 2k-1$, *her* $k > n$ *için.*

Kanıt $\mathrm{v}(R) = n$ olsun. Teorem 4.40 ile $k = 1, 2, ..., n$ için $D(R^{(k)}) = 2k-1$ ve her $k > n$ için $D(R^{(k)}) < 2k-1$'dir.

$k = 1, 2, ..., n$ için $D(R^{(k)}) = 2k-1$ ve her $k > n$ için $D(R^{(k)}) < 2k-1$ olsun.

$m = \mathrm{v}(R)$ olsun.

$m > n$ olduğunu varsayalım. (ii) ile $D(R^{(m)}) < 2m-1$ olur ve bu Teorem 4.40 ile çelişir. Böylece $m \leq n$'dir.

$m < n$ olduğunu varsayalım. Teorem 4.40 ile $D(R^{(n)}) < 2n-1$ olur ki bu (ii) ile çelişir. Dolayısıyla $m = n$'dir.

Önerme 4.42 *Aşağıdaki ifadeler tek boyutlu R noetherian bölgesi için denktir.*

i) $\mathrm{v}(R) = \infty$

ii) Her $k \in \mathbb{Z}^+$ *için* $D(R^{(k)}) = 2k-1$*'dir.*

Kanıt $(i) \Rightarrow (ii)$ Önteorem 4.36 ile açıktır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Teorem 4.41 (ii) ile açıktır.

5. SONUÇ

Asal ideal kavramı halka teorisinin en önemli konularından biri ve birçok alanda uygulamasının olduğunu biliyoruz. Ayrıca asal ideal kavramı kullanılarak halka için karakterizasyonlar da verilebiliyordu. Bu tezde bu karakterizasyonların bazılarını Önerme 2.32 veTeorem 2.44 ile hatırladık.

Asal ideal kavramının modül versiyonu olan asal alt modül kavramı üçüncü bölümde tanımlandı ve özellikleri araştırıldı. Bu kavramın da asal ideal kavramı kadar önemli olduğu görüldü. Asal alt modül kavramı kullanılarak modüller için de bazı karakterizasyonlar Önteorem 3.8, Önerme 3.19, Önerme 4.14 ve Önteorem 4.21 da verildi.

Bir idealin radikalinin, modül teroride iki farklı genellemesi vardır. Bu iki genellemenin eşit olduğu zaman modül ve halka hakkında daha çok bilgiye sahip olabiliyoruz. Bundan dolayı, radikal alt modül ve bir alt modülün zarfı kavramları üzerinde çalışılmış ve bu kavramlar kullanılarak modüller için de karakterizasyon verilmiştir.

Üstelik, asal alt modül ve radikal alt modül kavramları kullanılarak halkanın Dedekind, Prüfer, Değerlendirme, Temel ideal bölgesi ve Tek türlü çarpanlama bölgesi olabilmesi için denk koşullar verilmiştir. Bunun ile ilgili önemli sonuçlardan bazıları Önerme 3.37, Önerme 3.39, Önteorem 4.25, ve Önteorem 4.37'da verilmiştir. Ayrıca Krull boyutun modül versiyonu çalışılmış ve halkadaki asal zincir ler ile modüllerin asal alt modül zincirleri arasındaki bağlantı araştırılmıştır (ör. Önteorem 4.21). Daha sonra da halkanın boyutu kullanılarak, modülün boyutu belirlenmiştir (ör. Teorem 4.13). Modülün boyutu kavramı kullanılarak halkanın Dedekind olması için bazı denklikler verilmiştir (ör. Teorem 4.27–4.28).

6. KAYNAKLAR

ABU-SAYMEH, S. 1995. One dimensions of finitely generated modules, *Communications in Algebra*, 23: 1131-1144.

COHEN, I.S. 1950. Commutative Rings with restricted minimum condition, *Duke Mathematical Journal*, 17: 27-42.

ÇALLIALP, F. ve TEKİR, Ü. 2009. Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen yayınevi, İstanbul.

DUMMIT, D. S. and FOOTE, R. M.1999. Abstract Algebra. Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J.

JENKINS, J. and SMITH, P.F. 1992. On the Prime Radical of a Module Over a Commutative Ring, *Communications in Algebra*, 3593-3602.

KAPLANSKY, I. 1952. Modules over Dedekind Rings and Valuation Rings, Trans. Amer. Soc., 72: 327-340.

KAPLANSKY, I. 1974. Commutative Rings, revised edition, Allyn and Bacon, London.

KEMPER, G. 2011. A Course in Commutative Algebra.Springer, Germany.

KILIÇARSLAN, S. 2004. On modules which satisfy the radical formula, Master of Science, Abant İzzet Baysal Üniversitesi.

LAM, T. Y.1999. Lectures On Modules and Rings.Springer-Verlag, New York.

LU, C.P. 1995. Spectra of modules, *Communications in Algebra*, 23: 3741-3752.

LUTHAR, I. S and PASSI, I. B. S. 2002. Algebra: Modules, Alpha Science, Pangbourne.

MAN, S.H. 1996. One dimensions domains which satisfy the radical formula are Dedekind domains, Archiv der Mathematik, 66: 276-279.

MAN, S.H. and SMITH, P. F. 2002. On Chains of Prime Submodules, *Israil Journal of Mathematics* 127: 131-155.

MATSUMURA, H. 1980. Commutative Algebra, Benjamin/Cummings, Reading, Second Edition.

McCASLAND, R.L. and SMITH, P.F. 1993. Prime Submodules of Noetherian Modules, *Rocky Mountain Journal of Math.*, 23: 1041-1062.

ROTMAN, J.J. 1979. An Introduction to Homological Algebra, Academic Press., New York.

ROTMAN, J.J. 2008. An Introduction to Homological Algebra Second Edition, Springer., New York.

STENSTROM, B. 1975. Rings of Quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory, Springer-Verlag, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Ortaç Öneş, 1987 yılında Tarsus'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Tarsus'da tamamladı. 2005 yılında girdiği Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2009 yılında mezun oldu. 2010 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.