T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI BIANCHI EVREN MODELLERİ İÇİN KOZMOLOJİK PARAMETRELERİN BELİRLENMESİ

Işıl BAŞARAN ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

2012

BAZI BIANCHI EVREN MODELLERİ İÇİN KOZMOLOJİK PARAMETRELERİN BELİRLENMESİ

Işıl BAŞARAN ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

2012

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI BIANCHI EVREN MODELLERİ İÇİN KOZMOLOJİK PARAMETRELERİN BELİRLENMESİ

Işıl Başaran ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

Bu tez 18/07/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (.95.) not takdir edilerek Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Uğur CAMCI (Danışman)
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Prof. Dr. Veli KURT

ÖZET

BAZI BIANCHI EVREN MODELLERİ İÇİN KOZMOLOJİK PARAMETRELERİN BELİRLENMESİ

Işıl Başaran ÖZ

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Uğur CAMCI
Haziran 2012, 60 sayfa

Bu çalışmada öncelikle kozmolojik model çalışmaları hakkında bilgi verilmiş, kozmolojik prensiplerden bahsedilmiş ve Genel Görelilik Teorisi (GRT), Brans-Dicke teorisi, Bianchi sınıflaması ve kinematik nicelikler açıklanarak ortaya konulmuştur. Daha sonra Friedmann-Robertson-Walker (FRW) uzay-zamanı için GRT çerçevesinde kozmolojik parametreler irdelenmiş ve Einstein alan denklemleri için genel çözüm elde edilme çalışmaları yapılmıştır. Ardından, öncelikle FRW uzay-zamanı için Brans-Dicke teorisi çerçevesinde kozmolojik parametreler tanımlanıp alan denklemlerine yeni çözümler elde edilmiştir. Son olarak lokal rotasyonel simetrik Bianchi tip I uzay-zamanı için GRT çerçevesinde kozmolojik parametreler belirlenmiş ve alan denklemlerinin bazı yeni çözümleri bulunmuştur.

ANAHTAR KELİMELER**:** Genel görelilik teorisi, Brans-Dicke teorisi, kozmolojik parametreler, FRW uzay-zamanı, Bianchi tip I uzay-zaman

JÜRİ: Prof. Dr. Uğur CAMCI
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Prof. Dr. Veli KURT

ABSTRACT

DETERMINE OF COSMOLOGICAL PARAMETERS FOR THE SOME BIANCHI TYPE MODELS OF THE UNIVERSE

Işıl Başaran ÖZ

M. Sc. Thesis in Physics
Adviser: Prof. Dr. Uğur CAMCI
June 2012, 60 pages

In this study it is provided information about the cosmological model studies, the cosmological principles are discussed and the General Relativity Theory (GRT), Brans-Dicke theory and Bianchi classification are explicitly explained. After that, cosmological parameters are inspected within the framework of General Relativity theory for Friedmann Robertson Walker (FRW) space-time and Einstein field equations studies are carried out for obtaining the general solution. Then, primarily, cosmological parameters are identified within the framework of Brans -Dicke theory for FRW space-time and obtained new solutions of the field equations. Finally, cosmological parameters are determined within the framework of GRT for locally rotationary symmetric Bianchi type I space-time and found some new solutions of field equations.

KEY WORDS: General theory of relativity, Brans-Dicke theory, cosmological parameters, FRW space-time, Bianchi type I space-time

COMMITTEE: Prof. Dr. Uğur CAMCI
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Prof. Dr. Veli KURT

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans öğrenimim ve tez çalışmam boyunca destek ve yardımlarından dolayı değerli danışman hocam Prof. Dr. Uğur CAMCI' ya teşekkürlerimi sunarım. Tüm öğrenim hayatımda maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim. Yüksek Lisans öğrenimim sırasında destek ve yardımı olan tüm arkadaşlarıma ve sevgili eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$(.)$	t değişkenine göre türev
$(')$	τ veya z değişkenine göre türev
$(,)$	Kısmi türev
$(;)$ ve ∇_μ	Kovaryant türev
$\Box = \nabla^\mu \nabla_\mu$	D’Alembert (Kutu) operatörü
$a(t)$	Ölçek çarpanı
$C^d{}_{ab}$	Lie cebrinin yapı sabitleri
$d_p(t)$	Öz uzaklık
$d_H(t_0)$	Hubble mesafesi
$d_{hor}(t_0)$	Ufuk mesafesi
ds	Yay uzunluğu
d_L	Işınım uzaklığı
f	Işınım akısı
g	Kütle çekim ivmesi
g_{ab}	Metrik tensör
G_{ab}	Einstein tensörü
G	Lie grubu boyutu
$H(t)$	Hubble parametresi
k	Eğrilik parametresi
L_M	Madde alanının Lagrange fonksiyoneli
L	Mutlak parlaklık
$£_{\bar{X}}$	Lie türev operatörü
m_g	Çekimsel kütle
m_i	Eylemsiz kütle
$p(t)$	Basınç

q	Yavaşlama (deceleration) parametresi
R_{ab}	Ricci tensörü
R	Ricci eğrilik skaleri
S^{di}	Simetrik tensör
T_{ab}	Enerji-momentum tensörü
u_a	Akışkanın 4-hızı
$V(\phi)$	Potansiyel
$W(\phi)$	Çiftlenim parametresi
w	Durum denklemi parametresi
z	Kırmızıya kayma
$\varepsilon(t)$	Enerji yoğunluğu
ε_{ief}	Tam antisimetrik tensör
Θ	Genişleme parametresi
Λ	Kozmolojik sabit
$\rho(t)$	Kütle yoğunluğu
σ_{ab}	Shear (bozulma) parametresi
$\phi(t)$	Skaler alan
ω_{ab}	Dönme (vorticity) parametresi
$\Omega(t)$	Boyutsuz yoğunluk parametresi

Kısaltmalar

BD	Brans-Dicke Teorisi
BI	Bianchi Tip I
CMB	Cosmic Microwave Background Radiation (Kozmik mikrodalga ardalan ışınımı)
COBE	Kozmik ardalan araştırma uydusu (Cosmic Background Explorer)
CKV	Proper konformal killing vektör alanı
EFE	Einstein Field Equations (Einstein alan denklemleri)
FRW	Friedmann-Robertson-Walker
GRT	Genel Relativite Teorisi
HV	Homotetik vektör alanı
KV	Killing vektör alanı
LRS	Locally Rotationally Symmetric
ODE	Adi diferansiyel denklem (Ordinary Differantial Equation)
PDE	Kısmi diferansiyel denklem (Partial Differantial Equation)
SCKV	Özel konformal killing vektör alanı
SNIa	Ia Tipi Süpernova

Signatüre ; +2 yani (-,+,+,+)

1. GİRİŞ

Kozmik mikrodalga ardalan ışınımındaki (CMB) küçük sıcaklık değişimleri COBE uydusu verileri ile keşfedilmiş ve bu önemli sonuç John C. Mather ve George F. Smoot'a 2006 yılı Nobel Fizik Ödülünü kazandırmıştır (Smoot vd 1992). Daha sonra Saul Perlmutter (Perlmutter vd 1998) ile Brian Schmidt ve Adam Riess (Riess vd 1998) öncülüğündeki iki bağımsız araştırma grubu tarafından Hubble uzay teleskopu ile yapılan yaklaşık 6 milyon ışık yılı uzaklıktaki tip Ia süpernova (SNIa) gözlemleri evrenin ivmelenerek genişlediği keşfini doğurmuştur. Söz konusu araştırma grupları bu keşif ile 2011 yılı Nobel Fizik ödülüne layık görülmüşlerdir.

Evrenin genişlemesi; Vesto Slipher, Carl Wirtz, Knut Lundmark, Georges Lemaitre ve Edwin Hubble tarafından 1920'lerde keşfedilmiştir. 20. yüzyılın sonlarında; evrenin ivmelenerek genişlediğinin keşfi, günümüz bilimi ve özellikle kozmoloji açısından çok önemli bir sonuçtur (Riess vd 1998, Perlmutter vd 1998). Eğer evren sadece madde içerse idi kütle çekim kuvvetinin etkisi ile eninde sonunda yavaşlaması gerekirdi. Fakat gözlenen evrenin ivmelenerek genişlemesinin, evrendeki enerji içeriği ile ilişkisi olduğu ve bu yüzden evrende maddenin enerji halinin de bulunmasının zorunluluğu kabul görmüştür.

Evren modeli olarak standart kozmolojik model dikkate alındığında; evrenin genişlerken ivmelenmesine, '*Karanlık Enerji*' adı verilen vakum enerjisinin neden olduğu sonucu çıkmaktadır. Bu sonucun dayanağı; SNIa verileri, CMB'de anizotropilerin gözlenmesi ve galaksi kümelerinin incelenmesi olmuştur. Yapılan hesaplara göre, evrendeki toplam enerji yoğunluğu yaklaşık %70 oranında karanlık enerjiden oluşmaktadır ve geriye kalan %26'lık kısım, '*Karanlık Madde*' adı verilen, bilinmeyen bir madde türü ile doludur. Evrenin kalan %4'lük kısmında bilinen türden atomlar (baryonik madde) vardır.

Vakum enerjisinin günlük hayatımızdaki etkileri çok küçük olmasına rağmen bu etkiler ölçülebilir seviyededir. Hidrojen atomunun enerji düzeylerinde kaymalar şeklinde gözlenen söz konusu etkilere '*Lamb Kayması'* adı verilmekte olup bu çalışmaya 1955 yılında Nobel Fizik ödülü verilmiştir (Lamb ve Kusch 1947).

Evrenin yapısı ve gelişimi, Einstein'ın genel görelilik (rölativite) teorisi ile ifade edilip incelenmektedir. Diğer göreli alan teorilerinde; vakum enerjisinin katkısı, matematiksel olarak Einstein teorisindeki ünlü kozmolojik sabite benzer bir ifade ile verilir. Vakum enerjisi teriminin kozmolojik sabit gibi zamandan bağımsız olup olmadığı veya zamanla değişip değişmediği sorusu günümüzde çok aktif bir araştırma konusudur.

Albert Einstein, özel görelilik teorisinin bir uzantısı olan ve Genel Görelilik Teorisi (GRT) adını verdiği çekim teorisini Kasım 1915 yılında yayınlamıştır. Bu teori, modern bilim tarihindeki büyük ilerlemelerden biridir ve bir cismin çekim (gravitasyonel) kütlesinin eylemsiz kütlesi ile aynı olduğunu ifade eden Eşdeğerlik Prensibine dayalıdır. Çekimi ivmeden ayırmak mümkün değildir. Einstein GRT kapsamında yaptığı hesaplar ile Newton mekaniğinde açıklanamayan Merkür'ün enberi (perihelion) noktasının kayması problemini çözmüştür.

Çekime bu açıdan bakmak; çekimin gerçekten de geometrik bir yapıya sahip olduğu, uzay ve zamanın (uzay-zaman) eğriliğinin bir kuvvet tarafından etkilenmiş gibi cisimleri hareket ettirdiği izlenimini doğurmuştur. Einstein çekim teorisinde, kritik fiziksel parametre uzay-zaman metriğidir. Metrik, sonsuz küçük (infinitesimal) uzunlukları (gerçekte infinitesimal çizgi elemanları veya özel görelilik dilinde öz-proper-zamanları) hesaplamaya imkân veren bir matristir. Böylece Einstein GRT' sinin kozmolojik ölçekte çekim teorisi olarak kullanılabileceği ortaya çıkmış ve çok kısa bir zaman sonra Karl Schwarzschild (1916) Güneş veya bir yıldız gibi kütleli bir cisim civarındaki metrik için bu teoriye ait denklemlerin genel çözümünü bulmuştur.

1917 yılında Einstein, evrenin homojenliği (yerel madde kümeleri eşit dağılacak şekilde yeterince büyük kozmolojik ölçekler dikkate alınması) kabulü altında GRT denklemlerini evren için uygulamıştır. Yapmış olduğu kabulün, teorisi ile uyum içinde olduğunu iddia etmiş ve zamanındaki gözlemlerin öngörüsünü gerçekten doğrulayıp doğrulamadığı gerçeği ile ilgilenmemiştir. Dikkat çekici bir şekilde, Einstein'ın evren ile ilgili denklemlerinin çözümleri evrenin durağan olmayabileceğini göstermiştir. Bu durum, o zamana kadar bilinenlere aykırı bir olgudur. Buna rağmen Einstein, evrenin durağan (statik) olmasını sağlayacak bir çözüm bulmuştur. Einstein'in 1915 yılında ortaya attığı genel çekim teorisi eşdeğerlik prensibi ile uyumlu en genel teori değildir. Bu yüzden Einstein, evrenin sabit enerji yoğunluğu bileşeni olarak adlandırdığı "*kozmolojik sabit*" kavramını önermiş ve bu sabiti kullanarak evreni durağan hale getirebilmiştir.

1920'lerin başlarında, Rus matematikçi ve fizikçi Alexander Friedmann, aslında Einstein ile aynı kabulleri kullanarak evrenin dinamiği problemi üzerine çalışmalar yapmış ve 1922 yılında, Einstein'ın durgun (steady) durum çözümünün aslında geçersiz olduğunu bulmuştur. Evrenin dinamik yapısındaki herhangi bir küçük tedirginlik evrenin durağanlığını bozmaktadır. Friedmann, yazmış olduğu denklemleri 1924 yılında yayınlar; ancak bir yıl sonra ölümü üzerine, bilinen bir dergide yayınlanmış olmasına rağmen, yapmış olduğu bu çalışmayla ilgilenilmemiş veya yeterince dikkat çekmemiştir. Belçikalı rahip ve fizikçi Georges Lemaitre, Friedmann'dan bağımsız olarak GRT temelinde benzer hesaplamalar yapmış ve 1927 yılında aynı sonuçlara ulaşmıştır. Ne yazık ki; Lemaitre'nin makalesi, yerel bir Belçika dergisinde yayınlanmıştır. Einstein'nın bu çalışmadan haberi olmasına ve Lemaitre ile tartışmalar yapmasına rağmen, bu sonuçlara bilim toplumu tarafından gereken ilgi yine gösterilmemiştir.

20. yüzyılın başlarında genel inanış olarak evrenimizin sadece galaksimiz Samanyolu'ndan ibaret olduğu düşünülmüş ve bulunan bulutsu'ların ise galaksimizin uzak bölgelerindeki gaz bulutları olduğu tahmin edilmiştir. 1912 de Vesto Slipher, Lowell gözlemevinde çalışırken, sarmal bulutsuların ışıklarının kırmızıya kayma ölçümlerini yapmıştır. Bu ölçümlere göre cisimlerin kırmızıya kayması bizden radyal uzaklaşma hızlarına bağlıdır. Ayrıca Slipher, bulutsuların hareketlerinin Samanyolu'nun kurtulma hızından daha hızlı olduğunu bulmuştur.

Daha sonraki yıllarda bulutsuların yapıları oldukça tartışılmış ve 'Acaba birden fazla galaksi olabilir mi?' sorusu 1920'lerde Edwin Hubble'ın çalışmalarında anahtar rol oynamıştır. Hubble, Mt Wilson daki 100 inch (2,5 m) lik yeni teleskopu kullanarak Andromeda gökadasındaki tek yıldızları ve bazı diğer sarmal gökadaları ayırt etmiş ve bu yıldızlardan bazılarının, sönme ve parlama periyotları düzenli olan, Cepheid türü yıldızlar olduklarını keşfetmiştir (Hubble 1926).

Cepheid'ler, ışınım güçleri ve periyotları arasında özel bir ilişki olan zonklayan devlerdir ve 1912 yılında Amerikalı astronom Henrietta Leavitt tarafından keşfedilmişlerdir. Bu ışınım-periyot ilişkisi, paralaks ölçümleri ile uzaklıkları bilinen yakın Cepheidler ile ayarlanır. Cepheid'lerin zaman değişiminden gerçek ışınım güçleri ve buradan da ters kare kanunundan uzaklıklarının belirlenmesine imkân vardır.

Hubble, sarmal bulutsuların uzaklık ölçümü için Leavitt'in ışınım-periyot ilişkisini kullanılmıştır. Gözlenen bu Cepheid türü yıldızların Samanyolu'nun bir parçası olmak için çok uzak oldukları sonucuna varılmış ve bundan dolayı kendi galaksileri içinde oldukları düşüncesine ulaşılmıştır. Hubble, diğer astronomların ölçümlerini de kullanarak 46 galaksinin uzaklıklarını belirleyebilmiş ve kabaca cisimlerin uzaklıkları ile kırmızıya kaymaları arasındaki ilişkiyi bulmuştur. Günümüzde '*Hubble Kanunu*' olarak da bilinen, galaksilerin uzaklıklarının radyal uzaklaşma hızları ile orantılı olduğu bulgusu Hubble tarafından 1929 yılında yayınlanmıştır.

Hubble'in verileri günümüzdekiler kadar iyi olmasa bile kanun genel olarak kabul görmüş ve Einstein, evrenin gerçekten de genişlediğini kabul etmek zorunda kalmıştır. Bunun üzerine, Einstein kozmolojik sabit için en büyük hatası olduğunu söylemiş ve kozmolojik sabite olan ilgi azalmıştır. İlginç bir şekilde zaman içinde kozmolojik sabit tekrar gündeme gelecektir.

1924 yılında Carl Wirtz ve 1925 yılında Knut Lundmark tarafından da belirtildiği gibi uzak bulutsuların uzaklaşma hızları yakındaki bulutsulardan çok daha fazladır. Hubble'dan iki yıl önce; 1927 yılında, Lemaitre'nin genişleyen evren için doğru bir şekilde türettiği denklemlerde, Hubble'nın elde ettikleri ile benzer bir ilişki ve tam olarak aynı orantı sabiti bulunmuştur. Hubble'in sonuçları yayıldıktan sonra, Arthur Eddington, Lemaitre'nin makalesini 1931 yılında İngilizceye çevrilmiştir. Buna ilave olarak Lemaitre, genişleyen evrenin mantıksal sonuçlarına dikkat çekilmiştir. Lemaître' ye göre, evren sonlu bir zaman süresinde var olmalı ve tek bir başlangıç noktasından yayılmalıdır (Lemaître 1931). Böylece Lemaître, Büyük Patlama-Big Bang (Bu isim çok sonra Fred Hoyle tarafından verilmiştir.) kavramının gelişmesini sağlamıştır.

Hubble teleskopu ve diğer teleskoplardan 1926 yılından 1934 yılına kadar gelen sonuçlar çok kusursuz olmasa da evrenin homojen olduğu bulgusunu desteklemiş ve çoğu bilim adamı da bu fikri çabucak benimsemiştir. Evrenin homojen ve izotropluğu '*kozmolojik prensip'* olarak adlandırılır. Bu durum bizi, dünyanın evrende özel bir konumu olmadığını söyleyen Copernicus'a geri götürür. Kozmolojik prensibe göre, gözlemcinin nerede olduğuna ve hangi yöne baktığına bağlı olmaksızın kozmolojik ölçekte evrenin aynı görüneceği varsayılır. Bu kozmolojik prensip varsayımı Friedmann ve Lemaitre'nin çalışmalarında dolaylı olarak vardır fakat bilim insanlarının büyük bir kısmı tarafından o zamanlar anlaşılmamıştır. Homojen ve izotrop evren modelleri konusunda 1935–1936 yıllarında Howard Robertson ve 1936 yılında Arthur Walker tarafından yayınlanan çalışmalar sonradan fark edilmiştir.

Robertson ve Walker, kozmolojik prensibe uygun olarak homojen ve izotrop uzay-zamanın genel metriğini oluşturmuşlardır. 1930 yıllarından bu zamana kozmolojik prensibin doğruluğuna dair kanıtlar güçlenmiştir. 1964 yılında CMB' nin Arno Penzias ve Robert Wilson tarafından keşfi (1978 Nobel fizik ödülü) ile de kozmolojik prensip kavramı iyice yerleşmiştir. Son yıllardaki CMB gözlemleri, Samanyolu'nun uzaydaki hareketinden kaynaklanan büyük sıcaklık anizotropileri olduğunu göstermiştir (Class for Physics of the Royal Swedish Academy of Sciences 2011).

1.1. Eşdeğerlik, Kovaryans ve Mach Prensipleri

1.1.1. Eşdeğerlik (Equivalance) prensibi

Galile, serbest düşen cismin hareketini deneysel olarak incelediğinde, cisimlerin kütlesine ve bileşimine bağlı olmadan aynı yol üzerinde hareket ettiğini görmüştür. Newton'un kütle çekim teorisine göre kütle iki farklı şekilde görülür.

1- Çekimsel kütle m_g

2- Eylemsiz *(inertial)* kütle m_i

Çekimsel kütlesi M olan (büyük kütle) çekim alanı içindeki serbest düşen küresel bir cismin (küçük kütle) hareket denklemi

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{m_g}{m_i}\frac{M}{r^3}\vec{r} \tag{1.1}$$

ile ifade edilir. Galile'nin gözlemleri ve ölçümlerinin sonucunda tüm cisimlerin çekimsel ve eylemsiz kütlelerinin aynı olduğu ortaya konulmuştur. $(m_g = m_i)$

Einstein bu sonucu kabul etmiş fakat ifade olarak '*eşdeğerlik prensibi*' diye adlandırmayı tercih etmiştir. Bu sonuç, serbest düşen bir cismin üzerine etkiyen çekimsel kuvveti ihmal etmeyi mümkün kılar. Einstein, kütle çekim ivmesi, *g*, konumdan bağımsız olduğu için kütle çekim alanının homojen olduğunu düşünür. Çekim alanı içerisinde hareketsiz referans sisteminde serbest parçacıkların hepsi

$$m_i\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = (m_g - m_i)g = 0 \tag{1.2}$$

ifadesine göre hareket eder. Hareketsiz referans sistemindeki bir gözlemciye göre etrafındaki serbest parçacıklar üzerine hiçbir kuvvet etki etmez, parçacıklar sabit hızla düz bir çizgi üzerinde hareket eder. Genel görelilik teorisine göre böyle sistemlere eylemsiz *(inertial)* referans sistemleri denir.

Einstein'a göre, kütle çekimin olmadığı bölgedeki parçacığın hareketi ile kütle çekimin olduğu bölgedeki eylemsiz sistemde serbest düşen parçacığın hareketi aynı olmalıdır. Bu eşitlik, serbest düşen bir cisim için, ölçümler ile tutarlı yerel bir bölge ile kısıtlıdır. Çünkü büyük ölçekte uzaysal genişlemeden kaynaklı gel-git etkisi ölçülemez.

Eşdeğerlik prensibi ters açıdan da yorumlanmaktadır. Homojen bir kütle çekim alanına uzaktan bakan bir gözlemci ve herhangi bir kütle dağılımından uzak ivmeli bir referans sistemindeki gözlemci, benzer deneyleri yaptıkları zaman aynı sonuçları elde edeceklerdir. *Kuvvetli eşdeğerlik prensibi*; yerel ölçekte ivmeli bir referans sistemindeki maddenin hareketinin, bir kütle çekim alanındaki maddenin hareketinden farklı olamayacağını belirtir. Homojen olmayan kütle çekim alanında da yerel bir bölge için bu eşitlik yine geçerlidir. Kütle çekim alanının homojen olup olmadığı belirlenemediği için, eşdeğerlik uzay-zamanın kısıtlı bir bölgesi için belirtilir. İvmeli veya dönen bir referans sisteminin neden olduğu eylemsiz bir alan, madde dağılımının sebep olduğu kütle çekim alanına eşdeğerdir (gel-git etkisi ihmal edildiği sürece). Her bir yerel bölgede yapılan gözlemlerin (kütle çekim olsun ya da olmasın) yer ve zamandan bağımsız olması nedeni ile tüm uzay üzerindeki noktaların tamamının eşdeğer olduğu genellemesi yapılır (Gron ve Hervik 2004).

1.1.2. Kovaryans prensibi

Görelilik prensibi fiziksel bir prensiptir ve fizik yasaları ile tutarlıdır. Bu prensip, kovaryans (covariance) prensibi denilen ve bir fizik teorisinin denklemlerinin her koordinat sisteminde aynı şekilde olması gerektiğini söyleyen prensibe ulaştırıcı bir düşünce olmuştur.

Kovaryans prensibi, denklemleri değişmez (invaryant) şekilde yazılan her teori tarafından sağlanır. Bu invaryant şekil, teorinin matematiksel formülasyonunda sadece uzay-zaman tensörleri kullanılarak elde edilir.

Çekimin yapısını açıklamak için kovaryans ve eşdeğerlik prensibi birlikte kullanılabilir. Fizik kanunlarının özel görelilik teorisindeki formülasyonundan başlayıp daha sonra bu kanunları tensör denklemleri olarak yazar ve kovaryant bir şekilde ifade edebiliriz. Böylece bu kanunlar keyfi ivmeli bir sistem için geçerli olur. Ancak; ivmeli sistemdeki bir eylemsiz alan, sıfır olmayan bir çekim ivmesine eşdeğerdir. Dolayısıyla kütle çekim alanının yapısı hakkında geçerli bir açıklama yapılmış olur.

Tensörel denklemler genel olarak koordinat sisteminden bağımsız yapıdadır. Kovaryant tensörel denklemlerin görelilik prensibini sağlama gerekliliği yoktur. Görelilik prensibinde olduğu gibi; fiziksel bir prensip, gözlemlenebilir durumlar ile ilişkilidir. Bir denklemin gözlenebilir sonuçlarını anlamak için, bu denklemin tensör bileşenleri ile gözlenebilir fiziksel nicelikler arasında ilişki kurulması zorunludur. Böylesi ilişkiler tanımlanmak zorundadır ve kovaryans prensibi ile belirlenemezler.

Kovaryant şekildeki tensörel denklemlerden ve tensör bileşenleri ile gözlenebilir fiziksel nicelikler arasında tanımlı bağlantılardan, fiziksel nicelikler arasında denklemler kurulabilir. Özel görelilik teorisi; bu denklemlerin, her Galile referans sisteminde aynı şekle sahip olması gerektiğini söyler.

Fiziksel nicelikler ve tensörler (vektörler) gibi matematiksel nesneler arasındaki bağıntılar kullanılan teoriye bağımlıdır. Örneğin, iki cisim arasındaki göreli hız Newton mekaniğine göre bir vektördür. Dört boyutlu uzay-zaman kullanılan Göreli mekanikte, sadece üç bileşene sahip herhangi bir hız, bir vektör değildir. Uzay-zamanda vektörler dört bileşenlidir ve dört-vektör olarak adlandırılırlar.

Fiziksel nicelikler arasındaki denklemler genellikle kovaryant formda değildir. Örneğin; üç-vektör formundaki Maxwell denklemleri, Lorentz dönüşümü altında değişmez değildir. Bu denklemler tensör formunda yazıldığı takdirde, Lorentz dönüşümü ve diğer tüm koordinat dönüşümleri altında değişmez olarak kalırlar.

Eğer bir teorideki bütün denklemler tensörel ise, bu teorinin kovaryant formda olduğu söylenir. Kovaryant şekilde yazılan bir teori, otomatik olarak kovaryans prensibini sağlar fakat görelilik prensibine uymak zorunda değildir (Gron ve Hervik 2004).

1.1.3. Mach prensibi

Einstein, Newton'un mutlak uzay fikrinden vazgeçmek istemiştir ve ona tüm hareketlerin göreli olduğu fikri daha cazip gelmiştir. Bütün hareketlerin göreliliği fikri basit görünmesine rağmen hiç de kolay olmayan bazı temel soruları yol açmıştır.

Evrenin, sadece birbirine bir yay ile bağlı iki parçacıktan oluştuğu farz edilir ve bu iki parçacık birbirleri etrafında dönecek olursa neler olur? Aradaki tel merkezkaç kuvveti nedeni ile gerilir mi? Newton olan şeyin gerçekten de bu olduğunu söylemişti. Hâlbuki parçacıkların birbirleri ile göreli olarak hareket ettiği bir mutlak uzaydan artık bahsedilmeyeceği için bu sorunun cevabı çok açık değildir. Durağan parçacıkların etrafında dönen gözlemciler için aradaki tel gerginmiş gibi görünmeyecektir. Bu durum kinematik olarak dönen parçacıklarla birlikte olan ve hareketsiz gözlemcilerin eşdeğer olmasını ifade eder ve bu tahmini olarak telin gerilmesine yol açar.

Bu tip sorunlar, Mach'ın tüm hareketlerin göreli olduğu fikrine varmasına neden olmuştur. Boş bir evrende parçacığın hareketi tanımlı değildir. Tüm hareketler, diğer kütlelere göreli harekettir. Mach'ın düşüncesine göre; bu durum eylemsiz kuvvetlerin evrenin büyük kütlesine göre parçacıkların ivmelenmesinden dolayı oluşmak zorunda olmasını gerektirir. Eğer böylesi kozmik kütleler yok ise eylemsiz kuvvetler oluşmayacaktır. Parçacıklar arasında bir telin olduğu örnek açısından bakılır ise, eğer parçacıkların göreli olarak döndüğü kozmik kütleler yok ise telde herhangi bir gerilme olmayacaktır.

Einstein, genel görelilik teorisini kurarken Mach'ın görüşlerinden etkilenmiştir. Genel görelilik teorisi, Mach prensiplerinin tüm gereklerini karşılamamaktadır. Örneğin; serbest parçacıkların, kozmolojik modeldeki kozmik kütleye göre dönme eğiliminde olduğu genel relativistik dönen kozmolojik modeller mevcuttur. Bazı Mach prensibi etkilerinin genel görelilik teorisinin denklemlerinden elde edildiği gösterilmiştir. Örneğin; kütleli dönen bir kabuk içerisinde, eylemsiz referans sistemleri (örneğin serbest parçacıklar) kabuk etrafında sürüklenirler ve kabuk ile aynı yönde dönme eğiliminde olurlar. Bu durum, Lense ve Thirring tarafından 1918 yılında keşfedilmiştir ve '*Lense-Thirring etkisi*' olarak adlandırılmaktadır.

Yarıçapı Schwarzschild yarıçapına eşit kütleli bir kabuk, evrenimizin ideal bir modeli olarak kullanılmıştır. Böyle modellerde, merkeze yakın yerel eylemsiz referans sistemlerin, evrenin kütlesine göre dönemeyeceği sonucuna varılmıştır. Bu yolla edinilen sonuçlar, Mach prensibi ile uyumlu olarak, sabit yıldızların aslında bir eylemsiz referans sisteminden gözlenmiş olduklarındaki gibi gökyüzünde hareketsiz kaldıklarının açıklamasını verir.

Yerel eylemsiz referans sistemleri, evrendeki kütle dağılımı ve kütlenin hareketi tarafından belirlenir. Oysa Einstein'ın genel görelilik teorisinde, maddenin tek başına yerel eylemsiz referans sistemini belirlemesi beklenemez. GRT' de kütle çekim alanının kendisi, örneğin gravitasyonel dalgaları şeklindeki çekim alanı, önemli bir rol oynayabilir (Gron ve Hervik 2004).

1.2. Genel Görelilik Teorisi

Uzay geometrik olarak üç türlü yapıda olabilir: eğriliği sıfır (düz), pozitif eğrilikli (küre gibi) ve negatif eğrilikli (semer gibi). Uzay zamanın geometrisi '*metrik*' ile tanımlanır. Metrik; herhangi iki nokta arasındaki uzaklığın hesaplanması ile ilgili olup yay uzunluğunun karesi ile ifade edilmektedir:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \tag{1.3}$$

Burada g_{ab} metrik tensördür. Metrik tensör, uzay ve zaman koordinatlarının fonksiyonu olup simetriktir: $g_{ab}(x^c) = g_{ba}(x^c)$, $x^c = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x^0 = ct$.

Genel relativite teorisi bir çekim teorisi olup gravitasyonel alan ile uzay-zamanın geometrisi arasındaki ilişkiyi vermektedir. Einstein alan denklemleri (veya gravitasyonel alanın hareket denklemleri),

$$\mathrm{I} = \int d^4x\sqrt{-\mathrm{g}}\left[\frac{R}{2\kappa} + L_M + \Lambda\right] \tag{1.4}$$

ile verilen eylem fonksiyonunun, g_{ab} dinamik değişkenine göre varyasyonu alınıp minimize edilmesi ile elde edilmektedir. Burada; R_{ab} $(= R_{ba})$ Ricci tensörü olmak üzere, $R = g^{ab}R_{ab} = R^a{}_a$ Ricci eğrilik skaleri, L_M fonksiyoneli ise madde alanının Lagrange fonksiyonelidir. Einstein alan denklemleri (EFE), uzay-zamanın geometrisinin enerji-momentum dağılımı ile ilişkisini veren lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir. (1.4) eylem fonksiyonunun g_{ab} metrik tensörüne göre varyasyonu alındığında

$$(ab): \qquad G_{ab} + \Lambda g_{ab} \equiv R_{ab} + (\Lambda - \frac{1}{2}R)g_{ab} = \kappa T_{ab} \tag{1.5}$$

tensörel Einstein alan denklemleri elde edilir. Burada G_{ab} Einstein tensörü, Λ kozmolojik sabit, $T_{ab}(= T_{ba})$ enerji-momentum tensörü ve $\kappa = \dfrac{8\pi G}{c^4}$ dür. (1.5) şeklindeki EFE'nin sağ tarafında dikkate alınacak olan enerji-momentum tensörleri çeşitlidir. Bunlardan, ideal bir akışkana ait enerji-momentum tensörü

$$T_{ab} = (\varepsilon + p)u_a u_b + p g_{ab} \tag{1.6}$$

şekline sahiptir. Burada ρ kütle yoğunluğu olmak üzere $\varepsilon = \rho c^2$ akışkanın enerji yoğunluğu ve p basıncını ifade eder. u_a ise akışkanın 4-hızıdır. Ayrıca, T_{ab} enerji-momentum tensörü

$$T^{ab}{}_{;b} = 0 \tag{1.7}$$

korunum yasasını sağlar.

1.3. Brans-Dicke Çekim Teorisi

Skaler alanın kütle çekim ile birlikte ele alındığı en iyi teorilerden birisi, Brans-Dicke (BD) teorisidir (Bazen Jordan-Brans-Dicke teorisi olarak bilinir). Bu teori geçtiğimiz 50 yılda geniş bir çalışma konusu olmuştur. Brans ve Dicke'nin başlangıç noktası; eylemsizlik olayının, evrenin genel kütle dağılımına göre ivmelenmesinden ortaya çıkabildiğini ifade eden Mach Prensibidir Brans ve Dicke, alternatif bir teori olarak, Einstein-Hilbert eylem integraline ϕ skaler alanını yerleştirerek, kütle çekimin skaler tensör teorisini önermiştir. Bu teoriye göre kütle çekim sabiti, skaler alan ile yer değiştirmekte ve evrendeki bütün maddeyi skaler alan oluşturmaktadır (Brans ve Dicke 1961).

Brans-Dicke çekim teorisi, indirgenmiş (induced) çekim teorisi ve minimal olmayan çiftlenmiş çekim teorileri, skaler tensör çekim teorisinin özel durumlarıdır. Genelleştirilmiş BD teorisinde, W çiftlenim parametresi skaler alanın bir fonksiyonu olarak alınabilir. Böylece W ye verilen her bir değer için ayrı bir model oluşturulabilir. Örneğin, $W(\phi)\to\infty$ limitinde ϕ skaler alanı sabit alındığında GRT elde edilir. W çiftlenim parametresinin zamanla değiştiği durumda ivmelenen evren elde edilebilir. Genelleştirilmiş BD çekim teorisi

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa}\left(\phi R-\frac{W(\phi)}{\phi}\phi_c\phi^c-V(\phi)\right)+L_m\right] \qquad (1.8)$$

eylem fonksiyonu ile ifade edilir. Burada L_m madde Lagrangianı, ϕ Newton sabitinin tersini gösteren BD skaler alanı olup en genel durumda uzay ve zamana bağlıdır. $V(\phi)$, BD skaler alanı için potansiyel fonksiyonu, $W(\phi)$ BD teorisinin boyutsuz parametresi olup genelleştirilmiş BD teorisinde ϕ ye bağlı bir fonksiyondur.

(1.8) eylem fonksiyonunun g_{ab} metriğine göre varyasyonu alındığında

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \kappa T_{ab}^{BD} + \frac{\kappa}{\phi} T_{ab}^{M} \equiv \kappa T_{ab}^{\ eff} \tag{1.9}$$

alan denklemleri elde edilir. Burada, $T_{ab}^{\ eff}$ etkin (effective) enerji-momentum tensörü olup BD ve madde enerji-momentum tensörleri sırasıyla

$$T_{ab}^{BD} = \frac{1}{\kappa}\left[\frac{W(\phi)}{\phi^2}\left(\phi_a \phi_b - \frac{1}{2} g_{ab} \phi_c \phi^c\right) + \frac{1}{\phi}\left(\phi_{;ab} - g_{ab} \phi_{;c}^{;c}\right) - \frac{V(\phi)}{2\phi} g_{ab}\right] \tag{1.10}$$

$$T_{ab}^{M} = p_M g_{ab} + \left(c^2 \rho_M + p_M\right) u_a u_b \tag{1.11}$$

ile verilmektedir. (1.8) eylem fonksiyonunun BD skaler alanı, ϕ ye göre varyasyonu alındığında ise

$$\frac{2W(\phi)}{\phi} \Box \phi + R + \left(\frac{W(\phi)}{\phi}\right)' \phi_a \phi^a - V'(\phi) = 0 \tag{1.12}$$

bulunur. Burada, $\Box\phi \equiv \phi_{;c}^{;c}$ dir. (1.9) alan denkleminin izi alındığında, $T^{M} \equiv T^{M}{}_{ab}\, g^{ab} = 3p_M - \rho_M c^2$ olmak üzere,

$$R = -\frac{\kappa}{\phi}\left(3p_M - \rho_M\right) + \frac{W(\phi)}{\phi^2}\phi_a\phi^a + \frac{2V'(\phi)}{\phi} + \frac{3}{\phi}\Box\phi \tag{1.13}$$

eğrilik skaleri elde edilir. Bu nicelik (1.12) denkleminde yerine yazıldığında

$$\Box\phi = \frac{1}{\left(2W(\phi)+3\right)}\left[\kappa T^{M} - 2V(\phi) + \phi V'(\phi) - W'(\phi)\phi_c\phi^c\right] \tag{1.14}$$

olur. $T_{ab}^{M} = \frac{2}{\sqrt{-\mathrm{g}}}\frac{\delta\left(\sqrt{-\mathrm{g}}L_M\right)}{\delta g^{ab}}$ tanımlanmakta olup, T_{ab}^{BD} BD enerji-momentum tensörü T_{ab}^{M} madde enerji-momentum tensörünün bu tanımına benzer şekilde ifade edilemez. (1.9) alan denklemleri yanında

$$T_{BD;b}^{ab} = -\frac{\phi_b T_M^{ab}}{\phi^2}, \tag{1.15}$$

$$T_{M\ ;b}^{ab} = 0, \tag{1.16}$$

enerji-momentum korunum denklemleri veya $T_{eff}^{ab} = T_{BD}^{ab} + \frac{1}{\phi} T_M^{ab}$ alındığında

$$T_{eff\ ;b}^{ab} = 0, \tag{1.17}$$

etkin (effective) korunum denklemi sağlanmalıdır. Alan perturbasyonlarından ortaya çıkan inhomojenlikler ihmal edildiğinde; dikkate alınan uzay-zaman için T_{ab}^{BD} BD enerji-momentum tensörü, ideal akışkan formunda yani

$$T_{ab}^{BD} = p_{BD} g_{ab} + \left(c^2 \rho_{BD} + p_{BD}\right) u_a u_b \tag{1.18}$$

şeklinde yazılabilir. Bu enerji-momentum tensörü ifadesi kullanılarak, BD teorisi için BD skaler alanı içeren enerji yoğunluğu ve basınç bağıntıları

$$c^2 \rho_{BD} = T_{00}^{BD}, \qquad p_{BD} = T^1{}_1{}^{BD} = T^2{}_2{}^{BD} = T^3{}_3{}^{BD} \tag{1.19}$$

eşitlikleri ile hesaplanır.

Brans-Dicke teorisi, çiftlenim parametresinin sabit alındığı durumdaki $W \to \infty$ limitinde ve skaler alan ϕ = sabit iken Einstein Genel Görelilik teorisine indirgenmektedir. Dolayısıyla; Genel Görelilik Teorisi, Brans-Dicke teorisinin özel halidir. Bu parametre, genel rölativitenin klasik testleri sonucu kısıtlamalara maruz kalmıştır. Işığın sapması ve zaman gecikmesi $W > 500$ olması gerektiğini, kozmik arka alan fon ışınımı anizotropisi üzerindeki sınırlamalar $W < 30$ olması gerektiğini söylemektedir. Son zamanlarda; W nın negatif değerinin Brans-Dicke kozmolojisinde evrenin geç-zamandaki ivmelenmesini doğurduğu gösterilmiştir (Sen ve Sen, 2001). Bundan dolayı, kütle çekimin skaler-tensör kütle çekim teorisinin tutarlı bir modelinde W zamanın fonksiyonu olabilir.

1.4. Bianchi Tip Uzay-Zamanlar

Üç-boyutlu Lie cebirleri dokuz Bianchi tipine sınıflanmıştır (Ellis ve MacCallum 1969). Bir Lie grubunun cebirsel yapısı, Lie cebrinin bazı $\{ X_a | a = 1,...,r \}$ alınıp X_a nın bütün komütatörleri oluşturularak bu Lie cebri ile açıklanabilir. a = 1,...r olup r, G ile gösterilen Lie grubunun boyutudur. Lie cebri kapalı (yani $[X_a, X_b]$ komütatörü Lie cebri içinde tanımlı) olduğundan

$$[X_a, X_b] \equiv X_a X_b - X_b X_a = C^d{}_{ab} X_d \tag{1.20}$$

elde edilmelidir. Burada $C^d{}_{ab}$ ifadelerine Lie cebrinin *yapı sabitleri* denir.

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

Jacobi özdeşliği yapı sabitleri cinsinden yazıldığında

$$C^e{}_{ab} C^d{}_{ec} + C^e{}_{bc} C^d{}_{ea} + C^e{}_{ca} C^d{}_{eb} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad C^e{}_{[ab} C^d{}_{c]e} = 0 \tag{1.21}$$

elde edilir. Yapı sabitleri kovaryant (a ve b) indislerine göre antisimetriktirler:

$$C^d{}_{ab} = -C^d{}_{ba} \tag{1.22}$$

Bir Lie cebri, $C^d{}_{ab}$ ile donatılmış bir reel vektör uzayı olarak düşünülebilir. Eğer Lie cebrinin boyutu üç (r =3) ise; $C^d{}_{ab}$ yapı sabitleri, özel olarak, uygun bir ayrıştırmaya (dekompozisyona) izin verir. Bu durumda; $C^d{}_{ab}$ nin antisimetri özelliği kullanılarak aşağıdaki ayrıştırma yapılabilir:

$$C^d{}_{ef} = S^{di}\varepsilon_{ief} + \delta^d_e a_f - \delta^d_f a_e \qquad (1.23)$$

Burada; S^{di} simetrik tensör, ε_{ief} tam antisimetrik tensör ve $2a_f = C^d{}_{df}$ dir. Bu yüzden; $C^d{}_{ab}$ nın dokuz bileşeninin içeriği, S^{di} nın altı bileşeni ve a_f nin üç bileşeni ile temsil edilmiştir. Son olarak; ancak ve ancak a_f, S^{di} 'ye dik yani

$$S^{df} a_f = 0 \qquad (1.24)$$

ise Jacobi özdeşliği sağlanır. Eğer a_f sıfırlanırsa, Lie cebri A sınıfıdır. Bu durumda (1.24) denklemi sağlanmaktadır ve Lie cebri, tam olarak, S^{di} tensörünün işareti ile karakterize edilir. Eğer a_f sıfır değilse, Lie cebri B sınıfıdır. Böylece; üç-boyutlu uzayda, dokuz tane eşdeğer olmayan farklı Bianchi tiplerini veren ve (1.24) dikkate alınarak yapılan cebirsel sınıflama aşağıdaki gibidir:

Bianchi I : $[X_i,X_j]= 0$, $i, j =1, 2 ,3$

Bianchi II : $[X_1,X_2] = 0$, $[X_2,X_3] = X_1$, $[X_3,X_1] = 0$,

Bianchi III : $[X_1,X_2] = 0$, $[X_2,X_3] = 0$, $[X_3,X_1] = -X_1$,

Bianchi IV : $[X_1,X_2] = 0$, $[X_2,X_3] = X_1+X_2$, $[X_3,X_1] = -X_1$,

Bianchi V : $[X_1,X_2] = 0$, $[X_2,X_3] = X_2$, $[X_3,X_1] = -X_1$, (1.25)

Bianchi VI : $[X_1,X_2] = 0$, $[X_2,X_3] = qX_2$, $[X_3,X_1] = -X_1$, $(q \neq 0,1)$

Bianchi VII : $[X_1,X_2] = 0$, $[X_2,X_3] = -X_1+qX_2$, $[X_3,X_1] = -X_1$, $q^2 < 0$

Bianchi VIII : $[X_1,X_2] = X_1$, $[X_2,X_3] = X_3$, $[X_3,X_1] = -2X_2$,

Bianchi IX : $[X_1,X_2] = X_3$, $[X_2,X_3] = X_1$, $[X_3,X_1] = X_2$.

Uzay-zaman koordinatlarında Einstein alan denklemleri, 10 tane ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemden oluştukları için onların kesin çözümlerini elde etmek oldukça zordur. Eğer metrik tensörün bazı geometrik simetri özelliklerine (örneğin Killing simetrisine) sahip olduğu kabul edilirse kesin çözüm bulma problemi bir dereceye kadar kolaylaştırılabilir.

$\vec{X} = \xi^a \dfrac{\partial}{\partial x^a}$ simetriyi doğuran vektör alanı ve $£_{\vec{X}}$, $\vec{X}$ vektör alanı yönünde Lie türev operatörü olmak üzere, *Konformal Hareketler* (Conf M), g_{ab} metrik tensör bileşenleri cinsinden

$$£_{\vec{X}} g_{ab} = 2\psi\, g_{ab} \qquad (1.26)$$

denklemiyle ifade edilir. En önemli ve yaygın simetriler, Riemann geometrisi ve Genel Görelilik Teorisinde ortaya çıkan temel tensör alanlarından birisi olduğu durumdaki simetrilerdir.

Eğer, $\psi_{;ab} \neq 0$ ise $\vec{X}$ vektör alanına, *proper konformal killing vektör* (CKV) *alanı*; $\psi_{;ab} = 0$ ve $\psi_{;a} \neq 0$ ise *özel konformal killing vektör* (SCKV) *alanı* denir. Proper CKV ve SCKV alanları, matematiksel fizik ve kozmolojide bir çok uygulamaya sahip oldukları için fiziksel açıdan önemlidirler. Eğer $\psi_{,a} = 0$ (yani $\psi =$sabit) ve $\psi = 0$ ise $\vec{X}$, sırasıyla, *homotetik vektör* (HV) *alanı* ve *Killing vektör* (KV) *alanı* adını almaktadır. Metrik tensörü invaryant bırakan simetrilere *hareketler* (motions) veya *izometriler* de denilmektedir. İzometri, bir vektörün uzunluğunu koruduğu için *katı* (rigid) *hareket* olarak da adlandırılabilir.

Eğer uzay-zaman metriği bazı simetrileri kabul ediyorsa yani Killing denklemlerinin bir çözümü varsa, uzay-zaman bir *hareket simetrisi*ne ya da *izometri*ye sahiptir denir. Einstein alan denklemlerinin, farklı simetri yapılarına sahip birçok çözümü mevcuttur. Ayrıca bu çözümler, özelliklerine ve onların izin verdiği hareket gruplarına göre sınıflandırılmışlardır.

Yukarıda cebirsel sınıflaması verilen dokuz Bianchi tipine ait metrik aşağıdaki gibidir:

Bianchi I: $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Bianchi II: $$ds^2 = dx^2 + (1+z^2)dy^2 + dz^2 - 2zdxdy$$

Bianchi III: $$ds^2 = e^{-2z}dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Bianchi IV: $$ds^2 = e^{-2z}(dx - zdy)^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2$$

Bianchi V: $$ds^2 = e^{-2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2$$

Bianchi VI: $$ds^2 = e^{-2z}dx^2 + e^{-2hz}dy^2 + dz^2$$

Bianchi VII: $$ds^2 = [(C-kD)dx - Ddy]^2 + [Ddx + (C+kD)dy]^2 + dz^2$$

$$C = e^{-kz}\cos(az), \qquad D = -e^{-kz}\frac{\sin(az)}{a}, \qquad k = 1/2h, \qquad a = (1-k^2)^{1/2}$$

Bianchi VIII:

$$ds^2 = \left[dz + \left(1+z^2\right)dx + \left(z - x - z^2 x\right)dy\right]^2 + \left[2zdx + \left(1-2xz\right)dy\right]^2$$

$$+\left[dz - \left(1-z^2\right)dx + \left(z + x - z^2 x\right)dy\right]^2$$

Bianchi IX:

$$ds^2 = \left(-\sin ydz + \sin z\cos ydx\right)^2 + \left(\cos ydz + \sin z\sin ydx\right)^2$$

$$+\left(\cos zdx + dy\right)^2$$

Yukarıda Bianchi tip metriklere ait KV alanlar,

Bianchi I : $\vec{X}_{(1)} = \partial_x,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_y,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_z$

Bianchi II : $\vec{X}_{(1)} = \partial_y,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_z,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_x + z\partial_y$

Bianchi III : $\vec{X}_{(1)} = \partial_z,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_x,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_y + (x - Az)\partial_z + (z - Ax)\partial_x$

Bianchi IV : $\vec{X}_{(1)} = \partial_z,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_x,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_y - z\partial_z - (z + x)\partial_x$

Bianchi V : $\vec{X}_{(1)} = \partial_z,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_x,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_y - z\partial_z - x\partial_x$

Bianchi VI : $\vec{X}_{(1)} = \partial_z,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_x,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_y + (x - Az)\partial_z + (z - Ax)\partial_x$

Bianchi VII : $\vec{X}_{(1)} = \partial_z,\ \vec{X}_{(2)} = \partial_x,\ \vec{X}_{(3)} = \partial_y + (x - Az)\partial_z - (z + Ax)\partial_x$

Bianchi VIII : $\vec{X}_{(1)} = \partial_x,\ \vec{X}_{(2)} = \sec hz\cosh x\partial_y + \sinh x\partial_z - \tanh z\cosh x\partial_x,$

$$\vec{X}_{(3)} = \sec hz\sinh x\partial_y + \cosh x\partial_z - \tanh z\sinh x\partial_x$$

Bianchi IX : $\vec{X}_{(1)} = \partial_x$, $\vec{X}_{(2)} = \sec z \cos x \partial_y + \sin x \partial_z - \tan z \cos x \partial_x$,

$$\vec{X}_{(3)} = -\sec z \sin x \partial_y + \cos x \partial_z + \tan z \sin x \partial_x$$

ile verilirler.

1.5. Kinematik Nicelikler:

Zamansal (timelike) birim 4-hız vektör alanı u_a nın kovaryant türevi alınırsa

$$u_{a;b} = -\dot{u}_a u_b + \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \Theta h_{ab}/3 \tag{1.27}$$

şeklinde bileşenlerine ayrılabilir. Fiziksel olarak u_a zamansal vektör alanı, akışkanın 4-hızı olarak ifade edilir ve karesi $u^c u_c = -1$ şeklindedir. (1.27) eşitliğindeki $\dot{u}_a$, ω_{ab}, σ_{ab}, Θ nicelikleri sırası ile ivme, dönme (vorticity), shear (bozulma) ve genişleme parametresi olarak adlandırılırlar. Bu nicelikler, aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\dot{u}_a := u_{a;b} u^b = \frac{Du^a}{d\tau}, \qquad \left(\dot{u}_a u^a = 0\right) \tag{1.28}$$

$$\omega_{ab} := u_{[a;b]} + \dot{u}_{[a} u_{b]}, \qquad \left(\omega_{ab} u^b = 0\right) \tag{1.29}$$

$$\sigma_{ab} := u_{(a;b)} + \dot{u}_{(a} u_{b)} - \theta h_{ab}/3, \qquad \left(\sigma_{ab} u^b = 0\right) \tag{1.30}$$

$$\Theta := u^a{}_{;a}, \tag{1.31}$$

$$h_{ab} := g_{ab} + u_a u_b \qquad \left(h_{ab} u^b = 0\right) \tag{1.32}$$

(Stephani vd 2003). Bu tanımlar ile birlikte, (3.1.5.a), (3.1.5.b), (3.1.5.c) Einstein alan denklemleri ve (1.27) ifadesi kullanılarak

$$\dot{\Theta}+\frac{1}{3}\Theta^2+\sigma_{ab}\sigma^{ab}-\omega_{ab}\omega^{ab}+\frac{\kappa}{2}(\rho+3p)-\Lambda=0 \tag{1.33}$$

elde edilir. Bu denklem *Raychaudhuri* denklemi olarak adlandırılır ve u^a 4-vektör alanı ile tanımlı geodezik boyunca skaler değişenlerin nasıl genişleyeceğini ifade eder (Gron ve Hervik 2004).

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Standart Kozmolojik Model

Einstein Görelilik (Rölativite) teorisi, üç-boyutlu uzayın zamanın ile birlikte ele alınması ve dört-boyutlu bir uzay-zaman oluşturması gerektiğini söylemektedir. 3-boyutlu uzay için uygun metriği kullanarak uzayda iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplamaya karşılık, uzay-zamanda iki olay arasındaki mesafe hesaplanır. Herhangi bir t zamanında evrenin uzaysal homojen ve izotrop olduğu kabulü yapıldığında uzay-zaman metriği

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2 / R_0^2} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \; d\phi^2 \right) \right] \qquad (2.1)$$

şeklindedir (Ryden, 2003). Burada $x^{\alpha} = (t, r, \theta, \phi)$; $\alpha = 0,1,2,3$ küresel koordinatları kullanılmıştır. Bu uzay-zaman, Friedmann-Robertson-Walker (FRW) metriği olarak bilinmektedir. (2.1) metriğinde; c ışık hızı, $a(t)$ ölçek çarpanı, R_0 eğrilik yarıçapını göstermektedir. Bu metrikte ortaya çıkan ve evrenin eğriliğini ifade eden k eğrilik parametresi 0, ± 1 değerlerini alabilir. Uzaysal olarak düz evren için k =0 dır. Evrenin uzaysal eğriliği pozitif iken k =+1 olup bu tür bir evren kapalıdır. Uzaysal eğriliği negatif olan evrende $k = -1$ dir ve bu tür bir evren açıktır.

(2.1) ile verilen FRW metriği için, Ricci eğrilik skaleri (R)

$$R = \frac{6}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k c^2}{R_0^{\,2} a^2} \right) \qquad (2.2)$$

ve G_{ab} Einstein tensörü bileşenleri

$$G_{00} = 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k c^2}{R_0^{\,2} a^2} \right) \qquad (2.3.a)$$

$$G_{11} = -\frac{a^2}{c^2\left(1-kr^2/R_0^{\,2}\right)}\left(\frac{2\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{k\,c^2}{R_0^{\,2}a^2}\right) \tag{2.3.b}$$

$$G_{22} = -r^2\left(\frac{2\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{k\,c^2}{R_0^{\,2}a^2}\right), \qquad G_{33} = \sin^2\theta\, G_{22} \tag{2.3.c}$$

şeklindedir.

Kozmoloji; bir bütün olarak evrenin yapısını, tarihini ve geleceğini inceler. Yakın zamanda, fiziksel kozmoloji olarak adlandırılan ve evrenin bilimsel gözlem ve deney yoluyla anlaşılmasını konu edinen bilim dalı merkezî bir konum kazanmaya başlamıştır. Fizik kanunları ve yeterli Matematik formalizm yardımıyla kozmolojik evren modelleri ortaya konulur ve astronomi gözlemleri ile bu modellerin doğru bir evren modeline karşılık gelip gelmediği desteklenmeye çalışılır.

Evrenin kozmolojik ölçekteki yapısını ifade etmek için, (2.1) metriği ile verilen homojen ve izotrop FRW evren modeli yaygın olarak kullanılmaktadır. FRW evren modelinin evrenin gözlemsel yapısına uygun olduğu düşünülmektedir.

Standart evren modelinde, (1.5) ile verilen Einstein alan denkleminin (EFE) sol tarafındaki geometri için FRW uzay-zamanı, sağ tarafındaki madde (enerji-momentum tensörü) kısmı için ise (1.6) bağıntısında tensörel ifade edilen ideal akışkan alınır. (1.5) eşitliği ile verilen EFE'nin (*00*) bileşeninden Friedmann denklemi

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa\, c^2}{3}\rho - \frac{k\,c^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{2.4}$$

ve ($\alpha\beta$) bileşenlerinden ($\alpha, \beta = 1,2,3$) ivmelenme denklemi

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}\left(\rho c^2 + 3p\right) + \frac{\Lambda}{3} \tag{2.5}$$

elde edilir. (1.7) bağıntısından, Friedmann modeli için korunum denklemi

$$c^2\dot{\rho}+3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho c^2+p\right)=0 \qquad (2.6)$$

bulunur. Burada (.) kozmik zamana göre türevi göstermektedir. Son denklem ilk iki denklemden türetilebildiği için; $a(t)$, *ρ(t)*, *p(t)* üç bilinmeyeni ve bu bilinmeyenlerin belirleneceği *iki bağımsız denklem vardır*. Bu denklemlerin tek bir analitik çözümü mümkün değildir. Bu yüzden basınç ile enerji yoğunluğu arasındaki ilişkiyi veren başka bir denkleme ihtiyaç duyulmaktadır. Bu denklem, w bir sabit parametre olmak üzere ideal akışkan için lineer durum denklemi

$$p=w\rho c^2 \qquad \leftrightarrow \quad \sum_w p_w = c^2\sum_w w\rho_w \qquad (2.7)$$

olarak alınır. Evrenin gelişim aşamalarında, farklı durum denklemli farklı evrenler bulunmaktadır. Evrende, rölativistik (göreli) olmayan madde ve ışınımın varlığı bilinmektedir. Bu yüzden evren, hem $w_m=0$ (toz madde) ve hem de $w_r=\frac{1}{3}$ (ışınım) olan durum denklemi bileşenlerini içerir. Evren kozmolojik parametre içeriyorsa, durum denklemi bileşeni $w_\Lambda=-1$ dir.

(2.6) korunum denkleminde, (2.7) ile verilen durum denklemi kullanılır ve çözüm yapılırsa

$$\rho_w(a)=\rho_{w,0}\,a^{-3(1+w)} \qquad (2.8)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\rho_{w,0}$ katsayısı, *t*=0 anındaki enerji yoğunluğudur. Bu sonuç dikkate alındığında; madde baskın evrende (w_m =0) $\rho_w(a)=\rho_{w,0}a^{-3}$, ışınım baskın evrende ($w_r = \frac{1}{3}$) $\rho_w(a) = \rho_{w,0} a^{-4}$ ve kozmolojik sabit baskın evrende ($w_\Lambda = -1$) $\rho_w(a) = \rho_{w,0}$ olur.

2.2. FRW Uzay-zamanı İçin Genel Görelilik Teorisi Çerçevesinde Kozmolojik Parametreler

Standart uygulama olarak, parametreler üzerinden kozmolojik modeller tanımlanmakta ve yapılan gözlemler ile de evrenimizin hangi modele uygun olduğu saptanmaya çalışılmaktadır. Başlıca kozmolojik parametreler; Hubble parametresi ($H(t)$), boyutsuz yoğunluk parametresi ($\Omega(t)$), yavaşlama parametresi (q), durum denklemi parametresi (w) ve yaş (t)'tır (Liddle 2003). Kozmolojik model parametrelerinden *Hubble parametresi*, evrenin genişleme oranını ifade eder ve

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} \tag{2.9}$$

olarak tanımlıdır. (2.9) tanımı (2.4) Friedmann denkleminde kullanıldığında

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} c^2 \rho - \frac{kc^2}{a^2 R_0^{\ 2}} + \frac{\Lambda}{3} \tag{2.10}$$

olur. Bu eşitlik; kozmolojik parametre dikkate alınmadığı (yani $\Lambda = 0$), uzaysal olarak düz evren ($k=0$) durumunda

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} c^2 \rho(t) \tag{2.11}$$

basit şekline sahiptir. Buradan

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3}{\kappa c^2} H^2 \tag{2.12}$$

“*kritik yoğunluk*” ifadesi tanımlanır. Eğer $\rho(t)$ yoğunluğu bu değerden büyük ($\rho(t) > \rho_c(t)$) ise, evren pozitif olarak eğrilmiştir (k = 1). Eğer $\rho(t)$ kritik değerden küçük ($\rho(t) < \rho_c(t)$) ise, evren negatif olarak eğrilmiştir ($k = -1$).

Evrenin eğriliği tartışıldığında; $\rho(t)$ madde yoğunluğunu yerine, madde yoğunluğunun kritik değerine oranı dikkate alınmaktadır. Bu yüzden, evrenin madde yoğunluğu söz konusu olduğunda,

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \tag{2.13}$$

ile tanımlı ‘‘*boyutsuz yoğunluk parametresi*” kullanılmaktadır. $\Omega(t)$ yoğunluk parametresinin limit değerleri açısından en dikkat çekici olanı, günümüzdeki değerinin $0.1 < \Omega_0 < 2$ aralığında olması beklentisidir (Ryden 2003).

Tanımlanan yoğunluk parametresi cinsinden, $k \neq 0$ iken kozmolojik parametresiz (2.4) Friedmann denkleminde (2.13) tanımı kullanıldığında

$$1 - \Omega(t) = -\frac{k\, c^2}{R_0^2 a(t)^2 H^2} \tag{2.14}$$

bulunur. Günümüzde (t_0 zamanında); $a(t_0) = a_0 = 1$, $R_0(\min) = \dfrac{c}{H_0}$ ve $\Omega(t_0) = \Omega_0$ olduğundan (2.14) denklemi

$$1 - \Omega_0 = -\frac{kc^2}{R_0^{\,2} H_0^{\,2}} \tag{2.15}$$

halini alır. Buradan düz evrende $(k=0)$ $\Omega_0 = 1$, pozitif eğrilikli evrende $(k=1)$ $\Omega_0 > 1$ ve negatif eğrilikli evren için $(k=-1)$ $\Omega_0 < 1$ bulunmaktadır. Böylece, (2.10) Friedmann denklemi tekrar düzenlendiğinde

$$1 = \frac{\kappa c^2}{3H^2}\rho - \frac{kc^2}{a^2 R_0^{\,2} H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2} \tag{2.16}$$

olur. Burada (2.12) ile verilen kritik yoğunluk tanımı dikkate alınırsa ilk terimin ρ / ρ_c olduğu görülür. Buna göre; (2.13) tanımı çerçevesinde

$$\Omega_m \equiv \frac{\kappa c^2 \rho}{3H^2} \qquad \Omega_k \equiv -\frac{kc^2}{a^2 R_0^{\,2} H^2} \qquad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2} \tag{2.17}$$

boyutsuz yoğunluk parametreleri tanımlandığında, (2.16) eşitliğini

$$1 = \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda \tag{2.18}$$

şeklinde yazabiliriz.

Hubble kanununa göre keşfedilen, sadece evrenin genişlemesi değil zamanla değişen Hubble parametresinin genişlemenin oranını verdiğidir. Gözlemsel olarak elde edilebilen yavaşlama parametresi (q) erken zamandaki evrenin ne kadar büyüklükte olabileceğini göstermesi bakımından önemlidir (Liddle 2003). İvmelenme denkleminden elde edilen q yavaşlama (deceleration) parametresi boyutsuz bir niceliktir ve

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \tag{2.19}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $q > 0$ için $\ddot{a} < 0$, evrenin genişlemesinin yavaşladığını ifade eder. $q < 0$ ve $\ddot{a} > 0$ için de genişleme hızının arttığını gösterir.

(2.5) ivmelenme denkleminde (2.7) durum denklemi ve (2.13) boyutsuz yoğunluk parametreleri kullanılıp (2.19) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılarak yavaşlama parametresi

$$q = \frac{1}{2}(1 + 3w)\Omega_m - \Omega_\Lambda \tag{2.20}$$

şeklinde elde edilir.

Galaksi gözlemleri ile, galaksilerden gelen ışığın elektromanyetik tayfının soğurma çizgilerine bakıldığında olması gereken bölgeden kırmızı bölgeye doğru kaydıkları görülmüştür (Slipher 1912). Edwin Hubble (1929) elektromanyetik tayftaki bu kırmızı kaymayı, galaksilerin uzaklaşmasının bir sonucu olarak bulmuştur. Buna göre, uzaklaşan cisimden gelen elektromanyetik dalganın dalga boyu uzaklaşma hızına bağlı olarak artar. Bir galaksinin kırmızıya kayması

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad \lambda_0 > \lambda_e \tag{2.21}$$

ile ifade edilebilir. Burada λ_0, galaksinin gözlenen ışığının dalga boyu ve λ_e ise galaksiden salınan ışığın dalga boyudur.

İki nokta arasındaki $d_p(t)$ *öz uzaklığı*, ölçek çarpanı $a(t)$ alındığı zaman bu noktalar arasındaki uzaysal geodeziğin uzunluğuna eşittir. FRW metriği kullanılarak, gözlemci ve galaksi arasındaki öz uzaklık bir t zamanında bulunabilir. Gözlemci ve galaksi arasındaki ışığın izlediği yol null geodezik olup (θ, ϕ) açısı sabit ve bu yüzden

$$ds = a(t)dr \tag{2.22}$$

dir. Böylece $d_p(t)$ *öz uzaklığı*

$$d_p(t) = a(t)\int_0^r dr = a(t)r \tag{2.23}$$

olur. Bu nedenle gözlemci ile uzak galaksi arasındaki öz uzaklığın değişim oranı

$$\dot{d}_p = \dot{a}r = \frac{\dot{a}}{a}ar = Hd_p \tag{2.24}$$

bulunur. Bu yüzden, günümüzde $(t = t_0)$, galaksiye olan öz uzaklık ile galaksinin o anki hızı arasında lineer bir bağıntı vardır:

$$v_p(t_0) = H_0 d_p(t_0) \tag{2.25}$$

Burada $v_p(t_0) \equiv \dot{d}_p(t_0)$ ve $H_0 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0}$ alınmıştır. (2.24) denkleminde verilen lineer hız-uzaklık bağıntısı, *Hubble mesafesi* denilen

$$d_H(t_0) \equiv \frac{c}{H_0} \tag{2.26}$$

kritik değerden daha büyük öz uzaklığı ile ayrılan noktalar için

$$v_p = \dot{d}_p > c \tag{2.27}$$

olacağını söyler. H_0 ın gözlemsel olarak belirlenen değeri $H_0 = 70 \pm 7 kms^{-1}Mpc^{-1}$ kullanıldığında, evrenimizdeki Hubble mesafesinin şimdiki değeri $d_H(t_0) = 4300 \pm 400\ Mpc$ bulunur. Bu yüzden; bizden 4300 Mpc den daha uzak galaksiler, ışıktan daha büyük hızlarda uzaklaşmaktadırlar.

Uzak bir galaksi gözlendiğinde, açısal konumu çok iyi bilinmesine rağmen uzaklığı çok sağlıklı olarak ölçülemez. Yani, galaksinin yönünü işaretleyebiliriz fakat

$d_p(t_0)$ şimdiki öz uzaklığını bilemeyiz. Bununla birlikte, galaksiden aldığımız ışığın z kırmızıya kaymasını ölçebiliriz. Kırmızıya kayma, galaksinin öz uzaklığı hakkında doğrudan bilgi vermekle birlikte, ışığın galaksiden salındığı zamanda $a(t)$ ölçek çarpanını belirlemek için kullanışlıdır. Gözlemci, t_e zamanında galaksinin salmış olduğu ışığı, t_0 zamanında gözlemektedir. Işık, uzak galaksiden bize seyahati sırasında $ds = 0$ olan null geodezik boyunca yolculuk yapar. Bu geodezik için θ ve ϕ sabittir. Bu yüzden, null geodezik boyunca

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2 \tag{2.28}$$

olur ve böylece

$$c\frac{dt}{a(t)} = dr \tag{2.29}$$

bulunur. t_e zamanında salınan ve t_0 zamanında gözlenen dalga için

$$c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r \tag{2.30}$$

dir. $t_e + \frac{\lambda_e}{c}$ zamanında salınan ve $t_0 + \frac{\lambda_0}{c}$ zamanında gözlenen sonraki ışık dalgası için

$$c\int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r \tag{2.31}$$

bulunur. (2.30) ve (2.31) eşitlikleri karşılaştırıldığında

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} \tag{2.32}$$

elde edilir. Bu integral düzenlendiğinde

$$\int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} \tag{2.33}$$

olur. Evrenin genişlemesine ait zaman ölçeği $t_0 = H_0^{-1} \approx 14\,Gyr$ Hubble zamanıdır. Görünen ışık için, dalga tepeleri arasında geçen zaman $\lambda / c \approx 2\times 10^{-15}\,s \approx 10^{-32}\,H_0^{-1}$ değerindedir. Bu yüzden, (2.32) integrallerindeki $a(t)$ ölçek çarpanı sabit alınabilir ve

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)} \tag{2.34}$$

bulunur. Burada, kırmızıya kaymanın (2.21) ile verilen tanımı kullanılarak, $a(t_0) = 1$ olmak üzere,

$$1+z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)} \tag{2.35}$$

elde edilir. (2.23) ve (2.35) den öz uzaklık ile kırmızıya kayma arasında

$$d_p(t) = a(t)r = r(1+z)^{-1} \tag{2.36}$$

ilişkisi olduğu görülür. Küçük kırmızıya kaymaya sahip cisimlerin için (1+*z*) radyal hızları olarak yorumlanabilir (Doppler etkisine benzeyebilir) fakat kozmolojik uzaklıklar için durum biraz daha zordur. Öncelikle, yeterince parlak ancak kırmızıya kayma ölçümleri göreli olarak basit bir standart mum bulmak gereklidir.

Kozmolojik mesafeleri ölçmek kolay değildir. Belli bir zamanda yayılan ve başka bir zamanda gözlenen ışık sinyali kullanılmalıdır. Bu belli zaman esnasında evren de genişlemektedir. Farklı uzaklık ölçümleri vardır fakat kullanılan, asıl (intrinsic) parlaklığı bilinen nesneler yani standart mumlar için

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi f}} \qquad (2.37)$$

ile tanımlı d_L *ışınım uzaklığı*dır. Burada, L mutlak parlaklık (cismin bizden 10 AB uzaklıktaki görünür parlaklığı) ve f ışınım akısı (görünür parlaklık) dır. Işınım uzaklığı olarak adlandırılmasının nedeni uzaklık boyutunda olmasındandır. Evren durağan olarak bile ele alınsa da standart mumdan gözlenen ışığın akısı, evrenin genişlemesinden dolayı, z, kırmızıya kayması olmak üzere $1/(1+z)^2$ oranında azalmaktadır. Buradan yola çıkarak kapalı ve düz evrende ışınım uzaklığı ile öz uzaklık arasındaki ilişki

$$d_L = d_p(t_0)(1+z) \qquad (2.38)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece eğer evren düz ise ters kare kanunundan ortalama uzaklığı hesaplanan standart mumun öz uzaklığı (1+z) faktörü hesaba katılarak bulunabilir.

2.2.1. Sadece eğrilik

Özellikle evrenin basit bir hali olarak ışınımın, maddenin ve kozmolojik sabitin olmadığı boş evren için (2.4) Friedmann denklemi

$$\dot{a}^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2} \qquad (2.39)$$

olur. Böyle bir evrende $k = 0$ için $\dot{a} = 0$ yani $a = sabit$ elde edilir. Bu nedenle, uzayın geometrisi *Minkowski* (düz) metriği ile tanımlıdır. Fakat (2.39) ile verilen eşitlik bize böyle boş bir evrenin negatif eğrilikli olabileceğini göstermektedir. Negatif eğrilikli boş bir evren genişlemek ya da daralmak durumundadır. $k = -1$ için $\dot{a}^2 = \frac{c^2}{R_0^2}$ ve $\dot{a} = \pm\frac{c}{R_0}$ dır. '+' işareti genişleyen , '-' ise daralan evreni gösterir. Böyle bir evrene "*Milne Evreni*" adı verilmektedir. Bu tür evrende, $t_0 = R_0 / c$ iken ölçek çarpanı $a(t) = t / t_0$ olur. Genişleyen boş evrende hiçbir şey genişlemeden hızlı ya da yavaş olamaz ve evrenin yaşı Hubble zamanına eşittir. Bu evrende, z kırmızıya kaymalı uzak galaksilerden gelen ışık gözlendiğinde $t = t_0$ ışığın gözlendiği zaman ve $t = t_e$ ışığın yayınlandığı zaman olmak üzere

$$1 + z = \frac{1}{a(t_e)} = \frac{t_0}{t_e} \tag{2.40}$$

olur. Buradan, ışığın yayınlanma zamanı

$$t_e = \frac{t_0}{1+z} = \frac{H_0^{-1}}{1+z} \tag{2.41}$$

olarak hesaplanır. (2.23) denklemi ile verilen '*öz uzaklık*' hesabı dikkate alındığında, ışığın gözlendiği zamandaki uzaklık

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0}\ln(1+z) \tag{2.42}$$

olur. Bu ışığın ne kadar uzaklıktan yayınlandığı,

$$d_p(t_e) = \frac{c}{H_0}\frac{\ln(1+z)}{1+z} \tag{2.43}$$

olarak bulunur. Burada genişlemeden dolayı öz uzaklık 1/(1+z) oranında küçülmüştür. Böylece, ışınım uzaklığı

$$d_L = \frac{c}{H_0}\ln(1+z) \tag{2.44}$$

olur. Sonuç olarak, ışığın yayınlandığı zamandaki ışınım uzaklığının gözlemlendiği zamandaki öz uzaklığına denk olduğu görünmektedir.

2.2.2. Uzaysal düz evren

Friedmann denklemini basitleştirmenin bir yolu da eğriliği sıfır (k = 0) almaktır. Kozmolojik sabitsiz düz evren için (2.4) Friedmann denklemi

$$\dot{a}^2 = \frac{\kappa c^2}{3}\rho_0 a^{-(1+3w)} \tag{2.45}$$

olur. Eğer $a(t)$ ölçek çarpanı $a(t) \approx t^{\alpha}$ (Power Law) üslü şekline sahip kabul edilirse, (2.45) denkleminden üstel sabit

$$\alpha = \frac{2}{3+3w} \qquad (w \neq -1) \tag{2.46}$$

bulunur ve böylece ölçek çarpanı,

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3+3w}} \tag{2.47}$$

şeklini alır. (2.45) Friedmann denkleminde ölçek çarpanının (2.47) ifadesi kullanılarak evrenin yaşı

$$t_0 = \frac{1}{1+w}\left(\frac{4}{3\kappa c^2 \rho_0}\right)^{1/2} \tag{2.48}$$

elde edilir. Böyle bir evrende Hubble sabiti

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0} = \frac{2}{3(1+w)} t_0^{-1} \tag{2.49}$$

bulunur. Buna göre Hubble zamanı

$$t_o = \frac{2}{3(1+w)} H_0^{-1} \tag{2.50}$$

olur. Eğer z kırmızıya kaymalı bir ışık kaynağı gözlenirse

$$1+z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \left(\frac{t_0}{t_e}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \tag{2.51}$$

bağıntısı kullanılarak ışığın yayınlanma zamanı t_e (2.49) ve (2.51) eşitliklerinden

$$t_e = \frac{2}{3(1+w)H_0}(1+z)^{-3(1+w)/2} \tag{2.52}$$

şeklinde hesaplanabilir. Galaksinin t_0 zamanındaki (şimdiki) öz uzaklığı, (2.23), (2.30) ve (2.51) bağıntıları dikkate alındığında, uzaysal düz evren için

$$d_p(t_0) = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c\,t_0 \frac{3(1+w)}{1+3w}\left[1-(t_e/t_0)^{(1+3w)/(3+3w)}\right] \tag{2.53}$$

olur. Gözlemlenebilecek en uzak cismin öz uzaklığına '*ufuk mesafesi*' denmektedir. FRW metriği ile tanımlı evrenin günümüzdeki ufuk mesafesi

$$d_{hor}(t_0) = c\int_{0}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{2.54}$$

ile tanımlanmaktadır. Düz evrende eğer w>-1/3 ise ufuk mesafesi sonlu bir değer almaktadır. (2.53) ile verilen $d_p(t_0)$ öz uzaklığı $t_e \to 0$ limitinde hesaplanır ise ufuk mesafesi

$$d_{hor}(t_0) = c\, t_0 \frac{3(1+w)}{1+3w} = \frac{c}{H_0}\frac{2}{1+3w} \tag{2.55}$$

olarak bulunur.

2.2.3. Sadece madde

Düz evrenin özel bir hali olan madde baskın evrene bakılacak olursa, böyle bir evrenin durum denklemi parametresi sıfır alınır ($w = 0$ -toz durum denklemi p = 0). Bu evrene '*Einstein-de Sitter Evreni*' de denmektedir. (2.50) eşitliğinden evrenin yaşı

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \tag{2.56}$$

olarak bulunur. (2.55) eşitliğinden ufuk mesafesi

$$d_{hor}(t_0) = 3ct_0 = \frac{2c}{H_0} \tag{2.57}$$

ve (2.46) bağıntısından α =2/3 olup, madde baskın evren için (2.47) ile verilen ölçek çarpanı

$$a_m(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \tag{2.58}$$

olur. Ölçek çarpanının bu değerine göre öz uzaklık hesabı yapılır ise

$$d_p(t_0) = 3ct_0\left[1-\left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/3}\right] = \frac{2c}{H_0}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right] \tag{2.59}$$

elde edilir. Buna göre ışığın yayınlanma zamanındaki öz uzaklık

$$d_p(t_e) = \frac{2c}{H_0(1+z)}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right] \tag{2.60}$$

olur. (2.20) eşitliğinden, sadece maddenin varlığı durumunda yavaşlama parametresi

$$q = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda \tag{2.61}$$

olarak elde edilir.

2.2.4. Sadece ışınım

Evrenin erken zamanlarında olduğu gibi, düz evrenin sadece ışınım içerdiği duruma bakılacak olursa durum denklemi parametresi $w = 1/3$ alınır. Böylece (2.50) eşitliğinden, genişleyen, düz, ışınım baskın evrenin yaşı

$$t_0 = \frac{1}{2H_o} \tag{2.62}$$

bulunur ve (2.55) eşitliğinden t_0 da ufuk mesafesi

$$d_{hor}(t_0) = 2ct_0 = \frac{c}{H_0} \tag{2.63}$$

olur. Düz evrenin özel bir durumu olan ışınım baskın evrende ufuk mesafesi tam olarak Hubble mesafesine eşittir. Bu evrende ölçek çarpanı (2.47) eşitliğinden

$$a(t)=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \tag{2.64}$$

şeklindedir. Buna göre, gözlem anındaki öz uzaklık

$$d_p(t_0)=\frac{c}{H_0}\frac{z}{1+z} \tag{2.65}$$

olur ve ışığın yayınlanma zamanındaki öz uzaklık

$$d_p(t_e)=\frac{c}{H_0}\frac{z}{(1+z)^2} \tag{2.66}$$

bulunur. (2.20) eşitliğinden, sadece ışınımın varlığı durumunda yavaşlama parametresi

$$q=\Omega_m-\Omega_\Lambda \tag{2.67}$$

şeklini alır.

2.2.5. Sadece kozmolojik sabit

Düz evrende ölçek çarpanının zamanın üslü ifadesi ile orantılı olması $w \neq -1$ durumu için geçerlidir. Kozmolojik sabitin baskın olduğu evrende durum denklemi parametresi $w=-1$ alınmaktadır. Bu evrende, enerji yoğunluğunun kozmolojik parametrenin enerji yoğunluğu olduğu düşüncesi ile ρ_Λ zamanla sabit kalır ise (2.4) Friedmann denklemi

$$\dot{a}^2=\frac{\kappa c^2}{3}\rho_\Lambda a^2 \tag{2.68}$$

şeklini alır. Bu denklem, $\dot{a}=H_0 a$ olmak üzere,

$$H_0 = \left(\frac{\kappa c^2}{3} \rho_\Lambda \right)^{1/2} \tag{2.69}$$

olarak yazılabilir. Böylece, genişleyen evrende ölçek çarpanı

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)} \tag{2.70}$$

olur. Bu durum kozmolojik parametrenin baskın olduğu düz evrende genişlemenin üstel olarak arttığını göstermektedir. Kozmolojik parametre baskın düz evrende kaynaktan gelen ışık z kırmızıya kaymalı ise, gözlem anında öz uzaklık

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} z \tag{2.71}$$

olur. Işığın yayınlanma zamanındaki öz uzaklık ise

$$d_p(t_e) = \frac{c}{H_0} \frac{z}{1+z} \tag{2.72}$$

dır. Sadece kozmolojik sabit var iken, yavaşlama parametresi (2.20) bağıntısı kullanılarak

$$q = -\Omega_m - \Omega_\Lambda \tag{2.73}$$

eşitliği ile verilir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. FRW Uzay-Zamanı İçin Brans-Dicke Teorisi Çerçevesinde Kozmolojik Parametreler

Öncelikle; (2.1) metriği ile verilen FRW uzay-zamanı için, BD teorisine ait denklemlerde kullanılacak olan $\phi_{;ab}$, $\Box\phi$ ve T_{ab}^{BD} ifadeleri,

$$\phi_{;00} = \ddot{\phi}\,,\quad \phi_{;11} = -\frac{a\dot{a}\dot{\phi}}{c^2\left(1-\dfrac{k\,r^2}{R_0^{\,2}}\right)}\,,\quad \phi_{;22} = -\frac{r^2}{c^2}a\dot{a}\dot{\phi}\,,\quad \phi_{;33} = \sin^2\theta\,\phi_{;22} \tag{3.1}$$

$$\Box\phi = -\frac{1}{c^2}\left(\ddot{\phi}+3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a}\right) \tag{3.2}$$

$$T_{00}^{BD} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{W}{2\phi^2}\dot{\phi}^2-3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi}+\frac{c^2V}{2\phi}\right) \tag{3.3}$$

$$T_{\alpha\beta}^{BD} = g_{\alpha\beta}\frac{1}{\kappa c^2}\left[\frac{W}{2\phi^2}\dot{\phi}^2+\frac{1}{\phi}\left(\ddot{\phi}+2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a}-\frac{c^2V}{2}\right)\right],\quad \alpha,\beta = 1,2,3 \tag{3.4}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu nicelikler; (1.12), (1.14) ifadeleri ve (1.9) alan denklemlerinde kullanıldığında,

$$H^2+\frac{kc^2}{R_0^{\,2}a^2} = \frac{\kappa\,c^2}{3}\rho_{eff} \tag{3.5}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{kc^2}{R_0^{\,2}a^2} = -\kappa\,p_{eff} \tag{3.6}$$

$$\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}=\frac{\kappa}{3+2W(\phi)}(\rho_M-3p_M)+\frac{1}{3+2W(\phi)}\left[2V(\phi)-\phi V'(\phi)-\omega'(\phi)\dot{\phi}^2\right] \qquad (3.7)$$

bulunur. Burada, ρ_{eff} etkin yoğunluğu ve p_{eff} etkin basıncı

$$\rho_{eff}\equiv\frac{\rho_M}{\phi}+\frac{3}{\kappa c^2}\frac{\dot{\phi}}{\phi}\left[\frac{W(\phi)}{6}\frac{\dot{\phi}}{\phi}-H\right]+\frac{1}{2\kappa\phi}V(\phi) \qquad (3.8)$$

$$p_{eff}\equiv\frac{c^2}{\phi}p_M+\frac{\ddot{\phi}}{\kappa\phi}+\frac{\dot{\phi}}{\kappa\phi}\left[\frac{W(\phi)}{2}\frac{\dot{\phi}}{\phi}+2H\right]-\frac{c^2}{2\kappa\phi}V(\phi) \qquad (3.9)$$

şeklinde tanımlıdır. (1.17) etkin korunum denklemi ifadesinden, BD teorisi için korunum denklemi

$$c^2\dot{\rho}_{eff}+3H\left(\rho_{eff}c^2+p_{eff}\right)=0 \qquad (3.10)$$

olur. FRW uzay-zaman için T_{ab}^{BD} BD enerji-momentum tensörü, (1.18) ile verilen ideal akışkan formunda yazılabilir. (1.19) bağıntıları gereği; $T_{00}{}^{BD}=c^2\rho_{BD}$ olduğundan

$$\rho_{BD}=\frac{1}{2\kappa c^2\phi}\left[W\frac{\dot{\phi}^2}{\phi}-6H\dot{\phi}+c^2V\right] \qquad (3.11)$$

ve $T^1{}_1{}^{BD}=T^2{}_2{}^{BD}=T^3{}_3{}^{BD}=P_{BD}$ eşitliklerinden

$$p_{BD}=\frac{1}{2\kappa c^2\phi}\left[W\frac{\dot{\phi}^2}{\phi}+4H\dot{\phi}+2\ddot{\phi}-c^2V\right] \qquad (3.12)$$

elde edilir. Böylece (3.5) , (3.8) ve (3.11) denklemlerinden

$$H^2 = \frac{\kappa c^2}{3}\left(\frac{\rho_M}{\phi} + \rho_{BD}\right) - \frac{k c^2}{R_0^{\ 2} a^2} \tag{3.13}$$

bulunur. *k=0* durumunda *Brans-Dicke kritik yoğunluk* parametresi

$$\rho_c = \frac{3\phi}{\kappa c^2} H^2 \tag{3.14}$$

şeklinde ortaya çıkmaktadır. Buna göre (3.13) denklemi tekrar düzenlenir ise

$$1 = \frac{\kappa c^2}{3H^2}\frac{\rho_m}{\phi} + \frac{\kappa c^2}{3H^2}\rho_{BD} - \frac{k c^2}{a^2 R_0^{\ 2} H^2} \tag{3.15}$$

olur. Bu durumda; (2.13) ifadesi ile verilen tanım kullanılarak boyutsuz madde yoğunluğu, boyutsuz BD yoğunluğu ve boyutsuz eğrilik yoğunluk parametresi sırası ile

$$\Omega_m \equiv \frac{\kappa c^2}{3H^2}\frac{\rho_m}{\phi}, \qquad \Omega_{BD} \equiv \frac{\kappa c^2}{3H^2}\rho_{BD}, \qquad \Omega_k \equiv -\frac{kc^2}{a^2 R_0^{\ 2} H^2} \tag{3.16}$$

şeklindedir. Böylece, (3.15) eşitliği

$$\Omega_m + \Omega_{BD} + \Omega_k = 1 \tag{3.17}$$

haline gelir.

3.1.1. Sadece eğrilik

Bu bölümde, (3.13) Friedmann denkleminde, sadece eğriliğin olduğu ($\rho_{w,0} = 0$) düz (*k*=0) evren modeli ele alınacaktır. (3.10) korunum denkleminde $p_{BD} = w_{BD}\rho_{BD}$ lineer durum denklemi kullanılarak, $\rho_{BD,0}$ katsayısı, *t*=0 anındaki Brans-Dicke enerji yoğunluğu sabiti olmak üzere Brans-Dicke yoğunluk parametresi

$$\rho_{BD} = \rho_{BD,0}\, a^{-3(1+w_{BD})} \tag{3.18}$$

bulunur. (3.13) denkleminde; k=0, $\rho_{w,0} = 0$ olduğundan $\rho_m = 0$ ve (3.18) ile verilen ρ_{BD} ifadesi kullanılırsa, $a(t)$ ölçek çarpanı için

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w_{BD})}} \tag{3.19}$$

sonucu çıkar. Burada a_0 katsayısı

$$a_0 = \left[\frac{1}{2}(1+w_{BD})\sqrt{3\kappa\, c^2 \rho_{BD,0}} \right]^{\frac{2}{3(1+w_{BD})}} \tag{3.20}$$

şeklindedir. (3.19) ölçek çarpanı için Hubble parametresi

$$H = \frac{2}{3(1+w_{BD})}\left(\frac{t_0}{t} \right) \quad , \qquad w_{BD} \neq -1 \tag{3.21}$$

olur. (3.11) ve (3.18) Brans-Dicke yoğunluk ifadeleri kullanılır ve potansiyel $V(\phi) = \lambda\phi^n$ olarak alınırsa

$$\dot{\phi}^2 - \frac{\alpha}{t}\phi\dot{\phi} + \beta\,\phi^{n+1} - \frac{\gamma}{t^2}\phi^2 = 0 \tag{3.22}$$

lineer olmayan diferansiyel denklemi elde edilir. Burada sabit katsayılar

$$\alpha = \frac{4t_0}{W(1+w_{BD})} \qquad \beta = \frac{c^2\lambda}{W} \qquad \gamma = \frac{8{t_0}^2}{3W(1+w_{BD})^2} \tag{3.23}$$

ile verilmektedir. (3.22) diferansiyel denkleminde $\phi(t) = U(t)t^{\alpha/2}$ dönüşümü yapılırsa

$$\dot{U}^2 - \left(\frac{\alpha^2}{4} + \gamma\right)\frac{U^2}{t^2} + \beta\, t^{(\alpha/2)(n-1)}\, U^{n+1} = 0 \tag{3.24}$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemi sadece bazı n değerleri için çözmek mümkün olmuştur.

3.1.1.1. *n=1 durumu*

(3.24) diferansiyel denkleminde n=1 alınırsa

$$\dot{U}^2 - \left[\left(\frac{\alpha^2}{4} + \gamma\right)\frac{1}{t^2} - \beta\right]U^2 = 0 \tag{3.25}$$

olur. Burada $K = \dfrac{\alpha^2}{4} + \gamma$ alınarak $U(t) = e^{z(t)}$ dönüşümü yapılırsa, (3.25) denklemi

$$\dot{z}(t)^2 = \frac{K}{t^2} - \beta \Leftrightarrow \dot{z}(t) = \mp\sqrt{\frac{K}{t^2} - \beta} \tag{3.26}$$

haline gelir. (3.26) diferansiyel denkleminden

$$z(t) = \mp\sqrt{K - \beta\, t^2} \pm \sqrt{K}\,\ln\left(\frac{2K - 2\sqrt{K}\sqrt{K - \beta\, t^2}}{t}\right) \tag{3.27}$$

bulunur. $K > 0$ *ve* $\dfrac{\alpha^2}{4} > \gamma$ dır. Buradan

$$U(t) = \left(\frac{2K - 2\sqrt{K}\sqrt{K - \beta\, t^2}}{t}\right)^{\mp\sqrt{K}} e^{\mp\left[\sqrt{K - \beta\, t^2}\right]} \tag{3.28}$$

ve dolayısıyla

$$\phi(t) = t^{\alpha/2}\left(\frac{2K - 2\sqrt{K}\sqrt{K-\beta\, t^2}}{t}\right)^{\mp\sqrt{K}} e^{\mp\left[\sqrt{K-\beta\, t^2}\right]} \tag{3.29}$$

elde edilir.

3.1.1.2. *n=-1 durumu*

(3.24) diferansiyel denkleminde *n*=-1 alınırsa

$$\dot{U}^2 - \frac{K}{t^2}U^2 + \beta\, t^{-\alpha} = 0 \tag{3.30}$$

olur. Bu denklemde, $z(t) = K\ln t$ olmak üzere $U(t) = V(z)$ değişken dönüşümü yapıldığında

$$V'^2 - V^2 + \frac{\beta}{K} e^{\frac{(2-\alpha)z}{\sqrt{K}}} = 0 \tag{3.31}$$

olur. Burada ‘ $'$ ’, z değişkenine göre türevi göstermekte olup $K = \dfrac{\alpha^2}{4} + \gamma$ dır. (3.31) denkleminde $\gamma \neq -\dfrac{\alpha^2}{4}$ olmak üzere

$$p^2 = -\frac{\beta}{K} e^{\frac{(2-\alpha)z}{\sqrt{K}}} \tag{3.32}$$

alınır ve $V(z) = p(z)\sin q(z)$ dönüşümü yapılırsa (3.31) bağıntısı

$$pq'(z) + p'(z)\tan q = \pm p \tag{3.33}$$

haline gelir. $r = \tan q(z)$ dönüşümü yapıldığında ise (3.33) diferansiyel denklemi

$$r' + \frac{p'}{p} r^3 \mp r^2 + \frac{p'}{p} r \mp 1 = 0 \tag{3.34}$$

Abel diferansiyel denklemini verir (Polyanin 2000). (3.32) eşitliğinden p'/p için

$$\frac{p'}{p} = \frac{2-\alpha}{2K} = \eta \tag{3.35}$$

şekilde sabit bir ifade elde edilir. Burada $\gamma \neq -\frac{\alpha^2}{4}$ dir. Böylece, (3.34) Abel diferansiyel denkleminin çözümü

$$z = \frac{\eta}{1+\eta^2} \ln[\eta \sin q + \cos q] \pm \frac{q}{\eta}, \qquad \eta \neq 0, \qquad \eta^2 \neq -1 \tag{3.36}$$

olarak bulunur. (3.36) denklemi

$$\eta \sin q + \cos q = e^{\frac{1}{\eta}\left[\pm q + \left(1+\eta^2\right) z\right]} \tag{3.37}$$

şeklinde yazılabilir. (3.32) bağıntısından *p(z)* bilinmektedir. (3.37) eşitliğinden, $\sin q(z)$ elde edilebilir ise $V(z) = U(t)$ ifadesini ve devamında $\phi(t) = V(t) t^{\alpha/2}$ skaler alanını belirlemek mümkün olur. Ayrıca (3.30) diferansiyel denklemindeki K katsayısını, (3.23) ifadelerini kullanarak incelersek

$$K = \frac{\alpha^2}{4} + \gamma = \frac{4 t_0^{\,2} (3 + 2W)}{3W(1 + w_{BD})^2} \tag{3.38}$$

olur. Buradan, $w_{BD} \neq -1$ ve $K \neq 0$ için $W \neq -3/2$ olması gerektiği görülmektedir.

3.2. LRS Bianchi Tip I Uzay-zamanı İçin Genel Görelilik Teorisi Çerçevesinde Kozmolojik Parametreler

Bianchi tip I evren modeli, düz (k=0) FRW modelinin genelleştirilmiş halidir. LRS (Locally Rotationally Symmetric) Bianchi tip I uzay-zaman metriği,

$$ds^2 = -c^2dt^2 + X^2(t)dx^2 + Y^2(t)(dy^2 + dz^2) \qquad (3.39)$$

şeklindedir. Burada, *X(t) ve Y(t),* fonksiyonları sadece t değişkenine bağlı ve belirlenecek olan ölçek çarpanlarıdır. Bu uzay-zamanda, FRW uzay-zamnından farklı olarak, ölçek çarpanları farklı yönlerde ve birbirinden bağımsız olarak değişmektedir. Ortalama ölçek çarpanı ise $a = \left(XY^2\right)^{1/3}$ olarak alınır. Bianchi tip I evren modelinde farklı yönlerdeki iki Hubble parametresi

$$H_1 = \frac{\dot{X}}{X}, \qquad H_2 = 2\frac{\dot{Y}}{Y}, \qquad (3.40)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece ortalama Hubble parametresi $H = \frac{1}{3}\left(H_1 + 2H_2\right)$, Bianchi tip I uzay-zamanı için

$$H = \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{X}}{X} + 2\frac{\dot{Y}}{Y}\right) \qquad (3.41)$$

olur. Bianchi tip I metriği için R Ricci eğrilik skaleri hesaplandığında

$$R = -\frac{2}{c^2}\left(2\frac{\dot{X}\,\dot{Y}}{X\,Y} + \frac{\dot{Y}^2}{Y^2} + \frac{\ddot{X}}{X} + 2\frac{\ddot{Y}}{Y}\right) \qquad (3.42)$$

bulunur. Einstein tensörü bileşenlerinden G_{00} ve ideal akışkan enerji-momentum tensörünün T_{00} bileşeni dikkate alındığında, (1.5) alan denklemi

$$2\frac{\dot{X}\,\dot{Y}}{X\,Y}+\frac{\dot{Y}^2}{Y^2}=-\kappa\,c^2\rho+\Lambda \tag{3.43a}$$

Friedmann denklemini verir. G_{11} bileşeni ile birlikte T_{11} enerji-momentum tensörü bileşeni (1.5) alan denkleminde kullanıldığında

$$2\frac{\ddot{Y}}{Y}+\frac{\dot{Y}^2}{Y^2}=\kappa\,p-\Lambda \tag{3.43b}$$

bulunur. (1.5) alan denklemlerinin $G_{22}\,,T_{22}$ veya $G_{33}\,,T_{33}$ bileşeninden ise

$$\frac{\ddot{Y}}{Y}+\frac{\dot{X}}{X}\frac{\dot{Y}}{Y}+\frac{\ddot{X}}{X}=\kappa\,p-\Lambda \tag{3.43c}$$

elde edilir. Bianchi tip I uzay-zamanı için (1.7) korunum denklemi

$$c^2\dot{\rho}+\left[\frac{\dot{X}}{X}+2\frac{\dot{Y}}{Y}\right]\left(\rho\,c^2+p\right)=0 \tag{3.44}$$

şeklini alır. σ shear skaleri, $\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma_{ab}\sigma^{ab}$ bağıntısı ile hesaplanır. Bu skaler, Bianchi tip I uzay-zamanı için

$$\sigma^2=\frac{1}{3}\left(\frac{\dot{X}}{X}-\frac{\dot{Y}}{Y}\right)^2 \tag{3.45}$$

şeklindedir. Θ genişleme skaleri olup $\Theta\equiv\frac{1}{3}u^a{}_{;a}$ tanımından, Bianchi tip I uzay-zaman için

$$\Theta = \frac{\dot{X}}{X} + 2\frac{\dot{Y}}{Y} \tag{3.46}$$

bulunur. Buradan, (3.41) eşitliği dikkate alındığında $H = \Theta / 3$ olduğu görülmektedir. (3.41), (3.45) ifadeleri ve (3.43a) Friedmann denkleminden faydalanarak; Hubble parametresi, genişleme skaleri ve shear skalerini ilişkilendiren

$$H^2 = \frac{\sigma^2}{3} + \frac{\kappa c^2}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \tag{3.47}$$

bağıntısı elde edilir. Böylece, (2.12) ile verilen *'kritik yoğunluk'* ve (2.13) *'boyutsuz yoğunluk parametresi'* ifadesi kullanılır ise boyutsuz yoğunluk parametreleri

$$\Omega_\sigma = \frac{\sigma^2}{3H^2}, \quad \Omega_m = \frac{\kappa c^2 \rho}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \tag{3.48}$$

olmak üzere (3.47) denklemi

$$1 = \Omega_\sigma + \Omega_m + \Omega_\Lambda \tag{3.49}$$

haline gelir. (3.44) korunum denkleminde (2.7) durum denklemi kullanıldığında

$$\rho_w = \rho_{w,0} X^{-(1+w)} Y^{-2(1+w)} \tag{3.50}$$

elde edilir. Buradan, w durum denklemi parametresinin değerleri kullanılarak, madde baskın (w_m=0) evrende $\rho_w(a) = \rho_{w,0} X^{-1} Y^{-2}$, ışınım baskın ($w_r = \frac{1}{3}$) evrende $\rho_w(a) = \rho_{w,0} X^{-4/3} Y^{-8/3}$ ve kozmolojik sabit baskın ($w_\Lambda = -1$) evrende $\rho_w(a) = \rho_{w,0}$ olduğu görülür. Burada $\rho_{w,o}$ sabit yoğunluk çarpanıdır.

$\Theta = 3H = 3\dot{a}/a$, $\dot{\Theta}$ ve (2.19) ile verilen q yavaşlama parametresi tanımından bulunan $\dfrac{\ddot{a}}{a} = -qH^2$ ifadesi kullanıldığında

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 = -3H^2 q \tag{3.51}$$

olduğu görülür. (1.33) Raychaudhuri denkleminde, (3.51) eşitliği ve (3.48) boyutsuz yoğunluk parametreleri kullanarak LRS Bianchi tip I uzay-zamanı için yavaşlama parametresi

$$q = \frac{1}{2}(1+3w)\Omega_m - \Omega_\Lambda + 2\Omega_\sigma \tag{3. 52}$$

olarak elde edilir.

Alan denklemlerinin çözümü için; (3.43b) den (3.43c) çıkarılır ise

$$\frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\dot{Y}^2}{Y^2} - \frac{\dot{X}}{X}\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\ddot{X}}{X} = 0 \tag{3.53}$$

olur ve bu eşitliğin bir kere integrasyonu sonucu, c_1 integrasyon sabiti olmak üzere

$$\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{X}}{X} = \frac{c_1}{XY^2} \tag{3.54}$$

bulunur. Bu denklem integre edildiğinde

$$Y = Xc_3 \exp[c_1 \int (XY^2)^{-1} dt] \tag{3.55}$$

olur. Burada c_3 integrasyon sabitidir. LRS Bianchi I uzay-zamanı için uzaysal hacim elemanı $a^3 \equiv V^3 = XY^2$, $k > 0$ ve $n \geq 0$ sabitlerdir. Çözüm için Hubble parametresinin varyasyonu yasası dikkate alınır. Bu yasa ilk olarak FRW uzay-zamanı için Berman tarafından önerilmiştir ve burada yavaşlama parametresinin sabit değer almasına dikkat edilir (Akarsu Ö. ve Kılınç C.B. 2009). Daha sonra bu kanun Kumar ve Sing tarafından anizotropik uzay-zamanlar için de kullanılmıştır (Kumar ve Sing 2007). Bu yasaya göre ortalama Hubble parametresi

$$H = k(XY^2)^{-n/3} \tag{3.56}$$

olarak alınır. n=0 için

$$XY^2 = c_2 e^{3kt} \tag{3.57}$$

ve $n \neq 0$ için

$$XY^2 = \left(nkt + c_4\right)^{3/n} \tag{3.58}$$

kabulleri yapılır. Bu durumda $q = 1 - \dot{H} / H^2$ ivmelenme parametresinin $n \neq 0$ için $q = n - 1$ ve n=0 için $q = -1$ olacak şekilde sabit değerler alır. Bu iki koşul altında çözümler aranacaktır.

3.2.1. *n=0 durumu*

(3.57) kabulü, (3.55) eşitliğinde kullanıldığında

$$Y = c_3 X \exp[-\frac{c_1}{3kc_2} e^{-3kt} + c_0] \tag{3.59}$$

olur. Burada tekrar (3.57) kullanılarak

$$Y = (c_3 c_2)^{1/3} \exp[-\frac{c_1}{9kc_2} e^{-3kt} + kt + \frac{c_0}{3}] \tag{3.60}$$

ve

$$X = \left(\frac{c_2}{c_3{}^2}\right)^{1/3} \exp[\frac{2}{9}\frac{c_1}{k\,c_2}e^{-3kt} + kt - \frac{2}{3}c_0] \tag{3.61}$$

elde edilir. Buradan Hubble parametresi, genişleme skaleri ve shear skaleri sırasıyla

$$H = k = \text{sabit} \tag{3.62}$$

$$\Theta = 3k = \text{sabit} \tag{3.63}$$

$$\sigma = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{c_1}{c_2}e^{-3kt} \tag{3.64}$$

bulunur.

3.2.2. $n \neq 0$ *durumu*

(3.58) ifadesi (3.55) eşitliğinde yerine yazılıp integrasyon yapıldığında

$$Y = c_3 X \exp[\frac{c_1(nkt + c_4)^{1-3/n}}{k(n-3)} + c_0] \tag{3.65}$$

elde edilir ve (3.58) den tekrar yararlanarak X ve Y ifadeleri ayrı ayrı

$$Y = c_3^{1/3}(nkt + c_4)^{1/n} \exp[\frac{c_1(nkt + c_4)^{1-3/n}}{3k(n-3)} + \frac{c_0}{3}] \tag{3.66}$$

ve

$$X = c_3^{-2/3}(nkt + c_4)^{1/n} \exp[-\frac{2c_1(nkt + c_4)^{1-3/n}}{3k(n-3)} - \frac{2}{3}c_0] \tag{3.67}$$

olarak bulunur. Böylece; bu durum için Hubble parametresi, genişleme skaleri ve shear skaleri

$$H = k(nkt + c_4)^{-1} \tag{3.68}$$

$$\Theta = 3k(nkt + c_4)^{-1} \tag{3.69}$$

$$\sigma = -\frac{c_1}{\sqrt{3}}(nkt + c_4)^{-3/n} \tag{3.70}$$

şeklini alır.

4. SONUÇ

Bu çalışmanın ilk bölümünde; kozmolojik evren modelleri kozmolojik prensipler, genel görelilik teorisi (GRT), Brans-Dicke teorisi, Bianchi sınıflaması ve kinematik nicelikler ile ilgili genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde; Friedmann-Robertson-Walker (FRW) uzay-zamanı için GRT çerçevesinde Einstein alan denklemleri (EFE) için genel çözüm elde edilme çalışmaları yapılmıştır. Burada kozmolojik parametrelerin genel ifadeleri irdelenip, kırmızıya kayma, öz uzaklık, Hubble mesafesi ve ışınım uzaklığı kavramları ortaya konulmuştur. (2.1.1) alt bölümünde, (2.4) Friedmann denkleminin sadece eğriliğin olduğu durum irdelenmiş ve eğriliğin olmadığı ($k=0$, $\dot{a}=0$ ve $a=sbt$) durumda uzay-zaman geometrisinin *Minkowski* (düz) metriği ile tanımlı olduğu görülmüştür. Negatif eğrilikli ($k=-1$) boş bir evrenin genişleme ya da büzülme içeren *Milne evreni*ni ifade ettiği belirtilmiştir. Daha sonra kırmızıya kaymanın (2.40) ifadesi de dikkate alınarak (2.42) ve (2.43) öz uzaklık ifadeleri elde edilmiştir. (2.1.2) alt bölümünde uzaysal düz ($k=0$) evrende, (2.4) Friedmann denkleminin çözümünden ölçek çarpanı, Hubble sabiti, Hubble zamanı, kırmızıya kayma, öz uzaklık ve ufuk mesafesinin w durum denklemi parametresine bağlı genel ifadeleri elde edilmiştir. (2.1.3) alt bölümünde durum denklemi parametresi $w=0$ seçilerek sadece madde içeren uzaysal düz evren modeli için (*Einstein-de Sitter Evreni*) kozmolojik parametreler elde edilmiştir. Benzer şekilde (2.1.4) alt bölümünde sadece ışınım ($w=1/3$) ve (2.1.5) bölümünde sadece kozmolojik sabitin ($w=-1$) olduğu durumlar için kozmolojik parametreler bulunmuştur.

Üçüncü bölümde ise, öncelikle FRW uzay-zamanı için Brans-Dicke teorisi çerçevesinde $\phi_{;ab}$, $\Box\phi$ ve T_{ab}^{BD} ifadeleri hesaplanıp, bu nicelikler kullanılarak alan denklemleri elde edilmiştir. *k=0* durumunda yoğunluk parametreleri (3.16) ifadeleri ile verilmiştir. (3.1.1) alt bölümünde sadece eğriliğin olduğu ($\rho_{w,0}=0$) düz evrende (*k*=0) ölçek çarpanı bulunarak kozmolojik parametreler elde edilmiş ve potansiyel $V(\phi)=\lambda\phi^n$ seçilerek $\phi(t)$ skaler potansiyeli için genel çözüm aranmıştır. (3.24) diferansiyel denkleminde *n=1 durumu* için genel çözümü bulunmuş ve böylece skaler alanın zamana açık olarak bağlı ifadesi

$$\phi(t) = t^{\alpha/2}\left(\frac{2K - 2\sqrt{K}\sqrt{K-\beta\, t^2}}{t}\right)^{\sqrt{K}} e^{\left[\sqrt{K-\beta\, t^2}\right]}$$

şeklinde elde edilmiştir. *n=-1 Durumu*nda; $\eta \neq 0$ için $z(t) = K \ln t$ ve $p^2 = -\frac{\beta}{K} e^{\frac{(2-\alpha)\, z}{\sqrt{K}}}$ olmak üzere, $U(t) = V(z) = p(z)\sin q(z)$ değişken dönüşümü sonucunda elde edilen

$$\eta \sin q + \cos q = e^{\frac{1}{\eta}\left[\pm q + \left(1+\eta^2\right) z\right]}$$

eşitliği bulunmaktadır. $\phi(t) = U(t)t^{\alpha/2}$ olduğundan, sıfırdan farklı η değerleri için $\sin q(z)$ ifadesi elde edildiği taktirde $\phi(t)$ skaler alanını belirlemek mümkün olacaktır. Daha sonra (3.2) alt bölümünde LRS Bianchi-I uzay zamanı için GRT çerçevesinde alan denklemleri ve korunum denklemi elde edilmiştir. Shear skaleri, genişleme skaleri, yoğunluk parametreleri ve yavaşlama parametresinin genel ifadeleri belirlenmiştir ve alan denklemlerinin bazı yeni çözümleri bulunmuştur. Burada q ivmelenme parametresi sabit olacak şekilde uzaysal hacim elemanı, *n=0* için (3.55) ve $n \neq 0$ için (3.56) kabulleri yapılmıştır. *n=0* için Hubble parametresi ile genişleme skalerinin sabit olduğu görülmüştür ve shear skaleri (3.64) bulunmuştur. $n \neq 0$ için Hubble parametresi (3.68), genişleme skaleri (3.69), shear skaleri (3.68) olarak hesaplanmıştır.

KAYNAKLAR

AKARSU Ö. and KILINÇ C.B. 2009, 'LRS Bianchi Type I Models with Anisotropic Dark Energy and Constant Deceleration Parameter', arxiv 0807.4867.

CLASS for Physics of the Royal Swedish Academy of Sciences, 2011. 'The Accelerating Universe',http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2011/advanced-physicsprize2011.pdf

ELLIS, G.F.R. and MACCALLUM, M. A. H. 1969.'A Class of Homogeneous Cosmological Models'.Communications in Mathematical Physics, 12, 108.

FRIEDMANN, A.1922."Über die Krümmung des Raumes". Zeitschrift für Physik, 10, 377-386. 1999. 'On The Curvature of Space', General Relativity and Gravitation . 31,12

FRIEDMANN, A. 1924. "Über die Möglichkeiten einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes". Zeitschrift für Physik, 21, 326-332. 1999. 'On The Possibility of a World With Constant Negative Curvature of Space', General Relativity and Gravitation, 31,12

GRON, O. and HERVIK, S.2004. 'Einstein's General Theory of Relativity'. Oslo, Norway & Cambridge, United Kingdom, P.14-17&379.

HUBBLE, E.P. 1926. "Extragalactic nebulae". Astrophys. J. 64, 321-369.

HUBBLE, E.P.1929."A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae". Proc. Nat. Acad. Sci., 15, 168-173.

KUSCH, P. and FOLEY, H.M. 1947. 'The Magnetic Moment of the Electt'on' Phys. Rev. 72 ,1256; 1948.73 ,412; 1948.74 ,250.

KUMAR, S. and SING, C. P. 2007. ‘Anisotropic Bianchi Type-I models with constant deceleration parameter in general relativity’. Astrophys Space Sci.. 312:57-62.

LEMAITRE, G. 1927. “Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques”. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, A47, 49-59. http://adsabs.harvard.edu/abs/1927ASSB...47...49L

LUNDMARK, K. 1925. “The motions and distances of spiral nebulae”. MNRAS,85,865-894. http://adsabs.harvard.edu/abs/1925MNRAS..85..865L

LIDDLE, A.2003. ‘An Introduction To Modern Cosmology’ . University Of Sussex, UK, Second Edition .

LAMB, W.E. 1947. ‘Fine Strncture of the Hydrogen Atoln by a Microwave Method’Reserford R.C., Phys. Rev. 72 , 241.

PENZIAS, A.A. and WILSON, R.W. 1964.“A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s”. Astrophys. J. 142, 419-421.

PERLMUTTER, S., ALDERING, G., GOLDHABER, G., KNOP, R. A., NUGENT, P., CASTRO, P. G., DEUSTUA, S., FABBRO, S., GOOBAR, A., GROOM, D. E., HOOK, I. M., KIM, A. G., KIM, M. Y., LEE, J. C., NUNES, N. J., PAIN, R., PENNYPACKER, C. R. and QUIMBY, R. 1998.‘Measurement of Ω and Λ From 42 High-Redshift Supernovae’.The Astrophysical Journal, 513, 565-586, Berkeley

POLYANIN, A.D, and ZAITSEV,V.F.2000. 'Handbook of Exact Solutions for Ordinari Differantial Equations', CRC Press Company, Boca Raton, Florida 33431, 1-58488-297-2.

RIESS, A.G., FILIPPENKO,A.V., CHALLIS, P., CLOCCHIATTI,A., DIERCKS, A., GARNAVICH, P.M., GILLILAND, R.L., HOGAN, C.J., JHA, S., KIRSHNER, R.P., LEIBUNDGUT, B., PHILLIPS, M.M., REISS, D., SCHMIDT, B.P., SCHOMMER, R.A., SMITH, R.C., SPYROMILIO, J., STUBBS, C., SUNTZEFF, N.B. and TONRY, J. 1998. 'Observational Evidence From Supernovae for an Accelareting Universe and a Cosmological Constant'. The Astronomical Journal, vol.116,1009-1038.

ROBERTSON, H.P.1935."Kinematics and world structure".Astrophys.J. 82,284-301;1936."Kinematics and world structure II". ibid. 83, 187-201; 1936."Kinematics and world structure III". ibid. 83, 257-271. http://adsabs.harvard.edu/abs/1936ApJ....83..257R

RYDEN, B. 2003. 'Introduction to Cosmology'.The Ohio State University.

SEN S.. and SEN A.A. 2001. 'Late Time Acceleration in Brans Dicke Cosmology', Physical Review D, Vol.63,124006

SMOOT, G.F., et.al. 1992. 'Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps', Astrophysical Journal, v.396, p.L1.

STEPHANI, H. , KRAMER, D. , MACCALLUM, M. HOENSELAERS, C. , and HERLT, E. 2003.'Exact Solutions of Einstein's Field Equations'. Cambiridge University Press, ISBN 0-521-46136-7,United Kingdom.P.70.

SCHWARZSCHILD, K. 1916. “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie”. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss, Berlin, 189-196.

SLIPHER, V. 1913. “The radial velocity of the Andromeda nebula”. Lowell Observatory Bulletin, 58**,** vol II:56-57. 1914PA-22-198

WIRTZ, C. 1924.“De Sitters Kosmologie unter der Radialbewegung der Spiralnebel”. Astr. Nachr. 222, 21-26. http://adsabs.harvard.edu/abs/1924AN....222...21W

WALKER, A.G. 1936. “On the Milne’s theory of world-structure”. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 42, 90-127.

ÖZGEÇMİŞ

Işıl Başaran Öz, 1982 yılında Antalya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 1998 yılında Antalya Lisesinden mezun olup, 1998–2005 yılları arasında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümünde Lisans öğrenimini tamamladı. 2009 yılından bu zamana Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.