T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE

Sevda SEZER

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANTALYA
2003

BULANIK CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE

Sevda SEZER

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANTALYA
2003

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE

Sevda SEZER

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 16 / 06 / 2003 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından 90 not takdir edilerek oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Doğan ÇOKER ....
(Danışman)

Prof. Dr. H. İbrahim KARAKAŞ ....

Prof. Dr. Timur KARAÇAY ....

Prof. Dr. Haydar Eş ....

Prof. Dr. Zeki ASLAN ....

Doç. Dr. İlham ALİYEV ....

ÖZET

BULANIK CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE

Sevda SEZER

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Doğan ÇOKER
Haziran 2003, 78 Sayfa

Belirtisiz kümelerin cebire uygulanmasıyla ilgili olarak yapılan bu tez çalışmasında, ilk olarak belirtisiz kümelerle ilgili genel bilginin yanısıra, belirtisiz eşitlik, belirtisiz fonksiyon, bulanık ikili işlem, bulanık grup, bulanık altgrup ve bulanık homomorfizm (Demirci 1999-a, 1999-b) tanımlarına yer verilmiştir. Ayrıca, belirtisiz eşitliklerle ilgili çeşitli özellikler belirlenmiş ve bulanık yarıgruplarda genelleşmiş birleşme özelliğiyle ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Daha sonra, Demirci'nin bulanık altgrup tanımının bir genelleştirilmişi olan, yeni bir bulanık altgrup tanımı verilmiş ve tanıma göre Demirci'nin (1999-b) bulanık altgruplarla ilgili olarak ifade ettiği teorem, önerme ve sonuçların genelleştirilmiş biçimdeki ifadelerinin elde edilebildiği belirlenmiştir. Bunların yanısıra, bulanık normal altgrup, bulanık halka, bulanık althalka, bulanık ideal, bulanık asal ideal, bulanık maksimal ideal, bulanık cisim, bulanık tamlık bölgesi, bulanık izomorfizm kavramlarının tanımları yapılmış ve bunların sahip olduğu özellikler incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Belirtisiz küme, belirtisiz eşitlik, belirtisiz fonksiyon, bulanık ikili işlem, bulanık grup, bulanık normal altgrup, bulanık halka, bulanık ideal, bulanık cisim, bulanık tamlık bölgesi, bulanık izomorfizm.

JÜRİ : Prof. Dr. Doğan ÇOKER

Prof. Dr. H. İbrahim KARAKAŞ

Prof. Dr. Timur KARAÇAY

Prof. Dr. Haydar Eş

Prof. Dr. Zeki ASLAN

Doç. Dr. İlham ALİYEV

ABSTRACT

ON VAGUE ALGEBRAIC STRUCTURES

Sevda SEZER

Ph. D. Thesis in Mathematics
Adviser: Prof. Dr. Doğan ÇOKER
June 2003, 78 Pages

In this thesis work about applications of fuzzy sets on algebra, first a general information about fuzzy sets and then the concepts of fuzzy equality, fuzzy function, vague binary operation, vague group, vague subgroup and vague homomorphism (Demirci 1999-a , 1999-b) are given

In the following chapters, a new concept of vague subgroup is introduced by using the definition of vague group, and some fundamental properties of this vague subgroup are investigated Furthermore, the concepts of vague normal subgroup, vague ring, vague subring, vague ideal, vague prime ideal, vague maximal ideal, vague field, vague integer domain, vague isomorphism are defined and some fundamental properties of these concepts are investigated

KEY WORDS: Fuzzy set, fuzzy equality, fuzzy function, vague binary operation, vague group, vague normal subgroup, vague ring, vague ideal, vague field, vague integer domain, vague isomorphism

COMMİTTEE : Prof. Dr. Doğan ÇOKER

Prof Dr H. İbrahim KARAKAŞ

Prof. Dr. Timur KARAÇAY

Prof. Dr. Haydar Eş

Prof Dr. Zeki ASLAN

Assoc. Prof. Dr. İlham ALİYEV

ÖNSÖZ

Bilgisayar bilgiyi yalnızca "doğru" ya da "yanlış" olarak algılayıp bir ve sıfırdan oluşan değerler halinde işlem yapar. İnsansa, bilgisayarın tersine, kısmi doğrular ya da yanlışlar üzerinden duyularını ve tecrübelerini kullanarak işlemi gerçekleştirir. Bilgisayar için sıcak ya da soğuk vardır ama insan için soğuk, serin, normal, ılık ya da sıcak olabilir. Bilgisayarın sıcak ve soğuktan farklı olarak serin kavramını da tanımlayabilmesi için belirtisiz mantık kullanılır. Belirtisiz mantık bilgisayarın insan gibi davranmasını ve "akıllı" olmasını sağlar (Demirel 1999).

Belirtisiz küme teorisi, Zadeh (1965) tarafından ortaya atılmış, 1965'ten bu yana da Zadeh ve çok sayıda araştırmacı tarafından geliştirilmekte ve pek çok bilimsel alanda uygulanmaya çalışılmaktadır.

Konusu, "Bulanık Cebirsel Yapılar Üzerine" olan bu tez çalışmasında da, belirtisiz kümelerin cebire uygulanması incelenmekte ve bölümlere göre aşağıdaki kavramlara yer verilmektedir.

Birinci bölümde, belirtisiz kümeler hakkında genel bilgi verilmiş, ardından da belirtisiz denklik bağıntısı, belirtisiz eşitlik ve belirtisiz fonksiyon kavramlarının tanımları verilerek, bunların sağladığı özellikler incelenmiştir.

İkinci bölümde, Demirci'nin tanımladığı bulanık grup, bulanık altgrup, bulanık homomorfizmin tanımına ve bunların sahip olduğu özelliklere, ispatsız olarak, yer verilmiştir. Ayrıca, bu bölümde Demirci'nin (1999-b) verdiği bulanık altgrubun bir genelleştirilmişi olan yeni bir bulanık altgrup tanımı yapılmış, sağladığı özellikler incelenmiş ve bu tanım aracılığıyla da bulanık normal altgruplar oluşturulmuştur.

Üçüncü bölümde de, bulanık halka, bulanık ideal, bulanık cisim, bulanık tamlık bölgesi kavramlarının tanımları yapılmış ve bu tanımlar aracılığıyla elde edilen çeşitli teorem, önerme ve sonuçların ifade ispatlarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, bulanık grupların bir kategori oluşturduğu ve bulanık altgrupların bunun bir altkategorisi olduğu elde edilmiştir. Ayrıca, gruplar kategorisi ve bulanık gruplar kategorisi çeşitli yönleriyle karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana zaman ayıran, yardımlarını hiç bir zaman esirgemeyen ve Ocak 2003'te aramızdan ayrılan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Doğan ÇOKER'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, vermiş olduğu yol gösterici fikirleriyle, çalışmalarımda kolaylıklar sağlayan Doç. Dr. Mustafa DEMİRCİ'ye (Akdeniz Üniv. Fen-Ed. Fak.) ve gerek yükseklisans döneminde gerekse doktora çalışmamın ders döneminde danışmanım olan, bilimsel alanda yetişmemde emeği geçen Prof. Dr. Halil İbrahim KARAKAŞ'a (Başkent Üniv.) teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Belirtisiz küme (fuzzy set) kavramı ilk olarak L. Zadeh (1965) tarafından ortaya atılmış, daha sonra da Rosenfeld (1971), klasik bir gruptan yararlanarak, belirtisiz altgrup kavramını tanımlamıştır. Daha sonra bu tanım baz alınarak diğer belirtisiz cebirsel yapıların (belirtisiz normal altgrup, belirtisiz halka, belirtisiz ideal v.b.) bazı tanımları verilmiş, özellikleri incelenmiştir. Hatta günümüzde bile bu tanımdan yararlanılarak yeni tanımlar yapılıp özellikleri incelenmektedir. Demirci de (1999-a, 1999-b), klasik bir ikili işlem yerine bulanık bir ikili işlem kullanarak, bulanık grup (vague group), bulanık altgrup, bulanık homomorfizm kavramlarının tanımlarını yapmış ve bu tanımların klasikteki tanımlardan farklı ve benzer özelliklerini incelemiştir.

Bu tez çalışmasında da, klasik cebirdeki bazı kavramlar, bulanık grubun tanım ve özelliklerinden yararlanılarak genişletilmiş ve ayrıca, yapılan tanımların klasik cebirdeki tanımlardan farklı ve benzer olan özellikleri çeşitli yönleriyle incelenmiştir.

Çalışmalarımız sırasında elde edilen sonuçlardan bazıları XV. Ulusal Matematik Sempozyumu'nda (Sezer 2002) ve Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü Seminerlerinde sunulmuştur. Ayrıca, bu sonuçlardan bazılarının uluslararası dergilere gönderilmesi için çalışmalara başlanmıştır.

1.1. Belirtisiz Kümeler

Bu bölümde belirtisiz küme kavramının ne olduğu açıklanacak ve belirtisiz kümelerle ilgili bazı temel özelliklere yer verilecektir. Bu çalışma boyunca "X bir küme" dendiği zaman; X 'in boş kümeden farklı bir klasik küme olduğu anlaşılacaktır.

Tanım 1.1.1 X bir küme; A, X 'in bir altkümesi olmak üzere

$$\mu_A : X \longrightarrow \{0,1\}, \quad \mu_A(x) := \begin{cases} 1 & , \ x \in A \\ 0 & , \ x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlı μ_A fonksiyonuna A 'nın üyelik (karakteristik) fonksiyonu denir.

Tanımından da anlaşılacağı üzere A 'nın üyelik fonksiyonu; A 'ya ait olan veya olmayan $x \in X$ öğelerinin A 'ya ait olmasını derecelendirmektedir. Yani, $x \in X$ için $\mu_A(x) = 1$ olması x 'in A 'ya kesin olarak ait olduğunu ve $\mu_A(x) = 0$ olması ise, x 'in A 'ya kesin olarak ait olmadığını gösterir.

Günlük hayatta bazen belirsiz tanımlı ifadelerle karşılaşılabilir ve bu nedenle bir objenin bu ifadeleri sağlayıp sağlamadığına karar vermekte güçlük çekilebilir. Örneğin;

$$A := \{n \ : \ n \ , \ 2 \text{ 'den büyük veya eşit bir doğal sayı}\},$$

$$B := \{m \ : \ m \ , \ 2 \text{ 'den çok büyük bir doğal sayı}\}$$

olarak tanımlandığında; verilen herhangi bir doğal sayının A kümesine ait olup olmadığına kesin olarak karar verilebilir olmasına rağmen, bu sayının B 'ye ait olup olmadığı hakkında kesin olarak bir karar verilemez. Bu durumda, verilen sayının B 'ye kesin olarak ait olup olmaması yerine bu sayının B 'ye belirli bir dereceyle ait olmasını belirtmek insani sezgimiz açısından çok daha uygundur. Bu düşünceden hareketle, aşağıda tanımlanan, belirtisiz küme kavramı ortaya çıkmıştır:

Tanım 1.1.2 (Zadeh 1965) X bir küme olmak üzere, X üzerindeki bir A belirtisiz (fuzzy) kümesi $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu ile karakterize edilir.

Verilen herhangi bir $x \in X$ için $\mu_A(x) \in [0,1]$ reel sayısı x 'in A 'ya ait olma derecesini gösterir. $\mu_A(x) = 1$ ise x, A 'ya kesin olarak aittir, $\mu_A(x) = 0$ ise x, A 'ya kesin olarak ait değildir, $\mu_A(x) \in (0,1)$ ise, x 'in A 'ya kesin olarak ait olup olmadığından bahsedilemez fakat x 'in A 'ya $\mu_A(x)$ derecesiyle ait olduğu söylenir.

Yukarıdaki tanımdan da anlaşılacağı üzere, herhangi bir klasik küme bir belirtisiz küme olarak da düşünülebilir.

Zadeh anlamında bir belirtisiz kümenin ifadesi aşağıdaki gibidir. Eğer X sayılabilir bir küme; A, X üzerinde bir belirtisiz küme ise;

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} + \ldots = \sum_{x_i \in X} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

biçiminde, X sayılamaz bir küme ise de A belirtisiz kümesi $A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x}$ biçiminde ifade edilir. (Burada, toplam ve integral işareti sembolik olarak kullanılmaktadır.)

Tanım 1.1.3 (Zadeh 1965) X bir küme; A ve B, X üzerinde belirtisiz kümeler olsun.

a) Eğer, her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise, A, B 'nin bir belirtisiz altkümesidir denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.

b) A ve B 'nin kesişimi $A \cap B$ ile gösterilir ve $\mu_{A \cap B}(x) := min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ olarak tanımlanır.

c) A ve B 'nin birleşimi $A \cup B$ ile gösterilir ve $\mu_{A \cup B}(x) := max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ olarak tanımlanır.

d) A 'nın tümleyeni A^c ile gösterilir ve $\mu_{A^c}(x) := 1 - \mu_A(x)$ olarak tanımlanır.

e) X ve $\emptyset$ belirtisiz kümeleri, sırasıyla, her $x \in X$ için $\mu_A(x) = 1$ ve $\mu_A(x) = 0$ ile tanımlanır.

Klasik kümelerin özel tür belirtisiz kümeler olarak düşünülebilmesinden dolayı, yukarıda tanımlanan altküme, kesişim, birleşim ve tümleyen kavramlarının klasikteki tanımlarla uyuştuğu kolayca görülebilir.

Örnek 1.1.4 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$,

$$A = \frac{0.3}{b} + \frac{1}{c} + \frac{0.7}{d} \quad \text{ve} \quad B = \frac{1}{a} + \frac{0.4}{b} + \frac{0.6}{d} + \frac{0.5}{e}$$

olsun. Bu durumda, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap A^c$ ve $B \cup B^c$ belirtisiz kümeleri aşağıdaki gibi belirlenir:

$$A \cap B = \tfrac{0}{a} + \tfrac{0.3}{b} + \tfrac{0}{c} + \tfrac{0.6}{d} + \tfrac{0}{e} + \tfrac{0}{f} = \tfrac{0.3}{b} + \tfrac{0.6}{d} \ ,$$

$$A \cup B = \tfrac{1}{a} + \tfrac{0.4}{b} + \tfrac{1}{c} + \tfrac{0.7}{d} + \tfrac{0.5}{e} \ ,$$

$$A \cap A^c = \tfrac{0}{a} + \tfrac{0.3}{b} + \tfrac{0}{c} + \tfrac{0.3}{d} + \tfrac{0}{e} + \tfrac{0}{f} = \tfrac{0.3}{b} + \tfrac{0.3}{d} \neq \emptyset \ ,$$

$$B \cup B^c = \tfrac{1}{a} + \tfrac{0.6}{b} + \tfrac{1}{c} + \tfrac{0.6}{d} + \tfrac{0.5}{e} + \tfrac{1}{f} = \tfrac{0.3}{b} + \tfrac{0.6}{d} \neq X \ .$$

Eğer, yukarıdaki A ve B kümeleri klasik kümeler olsaydı $A \cap A^c = \emptyset$ ve $B \cup B^c = X$ olarak bulunacaktı. Bu da, belirtisiz kümeler teorisinin klasik kümeler teorisini içerdiğini, fakat klasik kümeler teorisindeki tüm özelliklerin belirtisiz kümeler teorisinde geçerli olmadığını göstermektedir. Belirtisiz kümelerin sağladığı bazı özelliklere aşağıda ispatsız olarak yer verilmiştir:

Teorem 1.1.5 (Dubois ve Prade 1980) X bir küme ve A, B ve C, X üzerinde belirtisiz kümeler olsunlar. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

a) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, (Değişme Özelliği)

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, (Birleşme Özelliği)

c) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, (İdempotentlik)

d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

e) $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$,

f) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, (De Morgan Özelliği)

g) $(A^c)^c = A$,

h) $(A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) = (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)$,

i) $(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = (A^c \cup B^c) \cap (A \cup B)$,

j) $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup X = X$,

k) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$,

l) A bir klasik küme ise, $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = X$ olur. A bir belirtisiz küme ise, $A \cap A^c \neq \emptyset$, $A \cup A^c \neq X$ olabilir

1.2. Belirtisiz Denklik Bağıntıları

X ve Y birer küme olmak üzere, $X \times Y$ 'nin herhangi bir altkümesine X 'ten Y 'ye bir bağıntıdır denir. Bu tanımın bir benzeri de belirtisiz kümeler için verilebilir:

Tanım 1.2.1 (Zadeh 1965) X_1 , X_2 , ... , X_n boş kümeden farklı klasik kümeler ve A_1 , A_2 , ... , A_n sırasıyla X_1 , X_2 , ... , X_n üzerinde belirtisiz kümeler olsunlar. A_1 , A_2 , ..., A_n belirtisiz kümelerinin $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ şeklinde gösterilen kartezyen çarpımı, $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ klasik kümesinin bir belirtisiz kümesidir ve her $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ için

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) := min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.2.2 (Zadeh 1965) $X \times Y$ üzerinde bir R belirtisiz kümesine X 'ten Y 'ye bir belirtisiz bağıntı denir. R, X 'ten Y 'ye bir belirtisiz bağıntı ve $x \in X$, $y \in Y$ için $\mu_R(x, y) = \alpha$ ise x, y 'ye α derecesiyle bağlıdır denir.

Klasik denklik bağıntısına benzer olarak belirtisiz denklik bağıntısının bir tanımı da aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 1.2.3 (Zadeh 1965) X bir küme olmak üzere, R, $X \times X$ üzerinde bir belirtisiz bağıntı olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için

1) $\mu_R(x, x) = 1$ (Yansıma) ,

2) $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$ (Simetri) ,

3) $min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)\} \leq \mu_R(x, z)$ (Geçişme)

koşulları sağlanıyorsa, R belirtisiz kümesi X üzerinde bir belirtisiz denklik bağıntısıdır denir.

X üzerindeki bir belirtisiz denklik bağıntısına X 'in elemanları arasında bir belirtisiz benzerlik bağıntısı da denir. R, X üzerinde bir belirtisiz denklik (benzerlik) bağıntısı olmak üzere; $x, y \in X$ için $\mu_R(x, y)$ reel sayısına x 'in y 'ye denk (benzer) olma derecesi denir. Ayrıca, $x \in X$ için x 'in R 'ye göre belirtisiz denklik sınıfı $R[x]$ şeklinde gösterilen X üzerinde bir belirtisiz kümedir ve her $z \in X$ için $\mu_{R[x]}(z) := \mu_R(x, z)$ olarak tanımlanır.

1.3. Belirtisiz Eşitlik ve Belirtisiz Fonksiyonlar

Tanım 1.3.1 (Demirci 1999-b) X bir küme olsun. Eğer $E_X : X \times X \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu için $x, y, z \in X$ olmak üzere,

1) $E_X(x,y) = 1 \Longleftrightarrow x = y$,

2) $E_X(x,y) = E_X(y,x)$,

3) $min\{E_X(x,y), E_X(y,z)\} \leq E_X(x,z)$

koşulları sağlanıyorsa E_X fonksiyonuna X üzerinde bir belirtisiz eşitliktir denir, ve $x, y \in X$ için $E_X(x,y)$ değerine x 'in y 'ye eşit olma derecesi adı verilir.

Bundan sonraki gösterimlerimizde "E_X bir belirtisiz eşitlik olsun" denildiğinde, "E_X 'in X üzerinde bir belirtisiz eşitlik olduğu" anlaşılacaktır. Ayrıca, $\wedge$ ve $\vee$ notasyonları, sırasıyla, reel sayılardaki minimum ve maksimum işlemleri yerine kullanılacaktır.

Eğer, $E_X^* : X \times X \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu $E_X^*(x,y) := \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ 0 & , \quad x \neq y \end{cases}$

olarak tanımlandığında X 'in elemanları üzerinde tanımlanan klasik eşitlik fonksiyonunun X üzerinde bir belirtisiz eşitlik olduğu kolayca görülebilir. Bu fonksiyona, X üzerindeki klasik belirtisiz eşitlik de denir.

Tanım 1.3.2 (Demirci 1999-b) X ve Y iki klasik küme, E_X ve E_Y sırasıyla X ve Y üzerinde belirtisiz eşitlikler olsunlar. Eğer $\tilde{o}$, $X \times Y$ üzerinde

F.1) Her $x \in X$ için öyle bir $y \in Y$ vardır ki, $\mu_{\tilde{o}}(x,y) > 0$

F.2) Her $x_1, x_2 \in X$ ve her $y_1, y_2 \in Y$ için

$$\mu_{\tilde{o}}(x_1,y_1) \wedge \mu_{\tilde{o}}(x_2,y_2) \wedge E_X(x_1,x_2) \leq E_Y(y_1,y_2)$$

koşullarını sağlayan bir belirtisiz küme ise, $\tilde{o}$ 'ya E_X ve E_Y belirtisiz eşitliklerine göre X 'ten Y 'ye bir belirtisiz fonksiyondur denir ve $\tilde{o} : X \rightsquigarrow Y$ ile gösterilir. Eğer ek olarak, $\tilde{o}$ belirtisiz fonksiyonu

F.3) Her $x \in X$ için öyle bir $y \in Y$ vardır ki, $\mu_{\tilde{o}}(x,y) = 1$

koşulunu da sağlıyorsa $\tilde{o}$ 'ya X 'ten Y 'ye bir kuvvetli (strong) belirtisiz fonksiyondur denir.

$E_X = E_X^*$, $E_Y = E_Y^*$ ve $\mu_{\tilde{o}}(X \times Y) \subseteq \{0,1\}$ olarak seçilirse, belirtisiz $\tilde{o}$ fonksiyonu bire-bir olarak bir klasik fonksiyona karşılık gelir ve bu tür fonksiyonlara klasik fonksiyon adı verilir.

Aşağıdaki örnekten de anlaşılacağı gibi, klasik bir fonksiyondan yararlanılarak sonsuz çoklukta kuvvetli belirtisiz fonksiyon tanımlanabilir:

Örnek 1.3.3 X ve Y klasik kümeler, $f : X \longrightarrow Y$ klasik bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ reel sayılar öyle ki, $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma < 1$ olmak üzere

$$E_X : X \times X \longrightarrow [0,1] \quad , \quad E_X(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & , \quad x_1 = x_2 \\ \gamma & , \quad x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

$$E_Y : Y \times Y \longrightarrow [0,1] \quad , \quad E_Y(y_1, y_2) := \begin{cases} 1 & , \quad y_1 = y_2 \\ \beta & , \quad y_1 \neq y_2 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{o}} : X \times Y \longrightarrow [0,1] \quad , \quad \mu_{\tilde{o}}(x,y) := \begin{cases} 1 & , \quad f(x) = y \\ \alpha & , \quad f(x) \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlandığında F_2 ve F_3 (dolayısıyla (F_1)) koşulları sağlandığı için $\tilde{o}$, X 'ten Y 'ye bir kuvvetli belirtisiz fonksiyondur.

2. BULANIK GRUPLAR

Zadeh (1965) tarafından "belirtisiz küme" kavramı oluşturulduktan sonra, bu yeni kavramın matematiğin diğer dallarına (cebir, topoloji, analiz v.b.) nasıl uygulanabileceği sorusu üzerinde düşünülmüştür. Bu tezin konusu "Bulanık Cebirsel Yapılar Üzerine" olduğu için, bu çalışmada belirtisiz küme kavramından yararlanılarak cebirsel yapıların nasıl oluşturulabileceği ve ne gibi sonuçlar elde edilebileceği sorusu cevaplandırılmaya çalışılacaktır.

2.1. Bulanık Grupların Tanımı ve Bazı Temel Özellikleri

Cebirde en önemli kavramlardan birisi de grup kavramıdır. Bu kavramın belirtisiz kümelerdeki ilk tanımlarından birisi Rosenfeld tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

Tanım 2.1.1 (Rosenfeld 1971) $< G, . >$ bir grup, $\mu : G \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu her $x, y \in G$ için

$$\mu(x.y) \geq min\{\ \mu(x)\ ,\ \mu(y)\ \} \quad \text{ve} \quad \mu(x) = \mu(x^{-1})$$

ise, μ 'ye G 'nin bir belirtisiz altgrubudur (fuzzy subgroup) denir.

Daha sonra bu tanım baz alınarak diğer belirtisiz cebirsel yapıların (belirtisiz normal altgrup, belirtisiz halka, belirtisiz ideal v.b.) bazı tanımları verilmiş, özellikleri incelenmiştir. Hatta günümüzde bile bu tanımdan yararlanılarak yeni yeni tanımlar yapılıp özellikleri incelenmektedir. (Belirtisiz gruplarla ilgili olarak; Akgül (1988), Anthony ve Sherwood (1979); belirtisiz altgruplarla ilgili olarak Kim (1997), Bhattacharya (1987), Sherwood (1983), Zhang (2001); düzey altgruplarıyla ilgili olarak Das (1981), Ray (1992) ve belirtisiz ideallerle ilgili olarak da Kumar 'ın (1992) çalışmaları bulunmaktadır.)

Yukarıdaki tanımdan da anlaşılacağı gibi, Rosenfeld (1971) yapmış olduğu belirtisiz altgrup tanımında klasik bir ikili işlemden yararlanmıştır. Demirci de "klasik bir ikili işlem" yerine, belirtisiz eşitlik ve belirtisiz fonksiyonlar (1999-a) yardımıyla, bulanık ikili işlem (vague binary operation) adını verdiği bir belirtisiz ikili işlem tanımlayarak, klasik bir küme üzerinde "bulanık grup (vague group)" (1999-b) adını verdiği bir grup yapısı oluşturmuştur. Ayrıca, Demirci ve Çoker (2002) bu konudaki bazı temel özellikleri ve örnekleri veren bir çalışma daha yapmışlardır.

Aşağıda, bulanık ikili işlem, bulanık kapalılık ve geçişlilik kavramlarının tanımına yer verilmektedir:

Tanım 2.1.2 i)(Demirci 1999-b , 2002) $\tilde{o}$, X üzerinde $E_{X\times X}$ ve E_X belirtisiz eşitliklerine göre bir kuvvetli belirtisiz fonksiyon ise, $\tilde{o}$ 'ya $E_{X\times X}$ ve E_X 'e göre X üzerinde bir bulanık ikili işlemdir denir ve $< X, \tilde{o}, E_{X\times X}, E_X >$ ile sembolize edilir. (Bir küme üzerinde bir veya daha fazla bulanık ikili işlem tanımlanmış ise, bu ikili işlemlerle birlikte bu kümeye bir bulanık cebirsel yapıdır denir.)

ii) $\tilde{o}$, X üzerinde bir bulanık ikili işlem; A, X 'in klasik bir altkümesi olsun. Eğer, her $a, b \in A$ ve her $c \in X$ için $\mu_{\tilde{o}}(a,b,c) = 1$ olduğunda $c \in A$ oluyorsa A 'ya $\tilde{o}$ işlemine göre bulanık kapalıdır denir.

iii) Her $a, b, c, d \in X$ için $\mu_{\tilde{o}}(a,b,c) \wedge E_X(c,d) \leq \mu_{\tilde{o}}(a,b,d)$ ise, $\tilde{o}$ bulanık ikili işlemi birinci girdide geçişlidir denir.

iv) Her $a, b, c, d \in X$ için $\mu_{\tilde{o}}(a,b,c) \wedge E_X(b,d) \leq \mu_{\tilde{o}}(a,d,c)$ ise, $\tilde{o}$ bulanık ikili işlemi ikinci girdide geçişlidir denir.

v) Her $a, b, c, d \in X$ için $\mu_{\tilde{o}}(a,b,c) \wedge E_X(a,d) \leq \mu_{\tilde{o}}(d,b,c)$ ise, $\tilde{o}$ bulanık ikili işlemi üçüncü girdide geçişlidir denir. Eğer, $\tilde{o}$ üçüncü girdide geçişli ise, $\tilde{o}$ bulanık ikili işlemi E_X 'e göre genişleyebilirdir de denir.

vi) Her $a, b, c, a', b' \in X$ için

$$\mu_{\tilde{o}}(a,b,c) \wedge E_{X\times X}((a,b),(a',b')) \leq \mu_{\tilde{o}}(a',b',c)$$

ise, $\tilde{o}$ bulanık ikili işlemi $E_{X\times X}$ 'e göre genişleyebilirdir denir.

Kolayca görülebileceği gibi, X üzerindeki her $\tilde{o} : X \times X \rightsquigarrow X$ klasik fonksiyonu $E^*_{X\times X}$ ve E^*_X 'e göre bir bulanık ikili işlemdir ve bu bulanık ikili işlem hem birinci hem ikinci hem de üçüncü girdide geçişlidir.

Aşağıda, bu çalışmanın temelini oluşturan "bulanık grup" kavramının tanımı yer almaktadır:

Tanım 2.1.3 (Demirci 1999-b) G bir küme ve $\tilde{o}$, G üzerinde bir bulanık ikili işlem olsun. Bu durumda,

i) **(BG.1)** $\forall a,b,c,d,m,q,w \in G$ için

$$\mu_{\tilde{o}}(b,c,d) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a,d,m) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a,b,q) \wedge \mu_{\tilde{o}}(q,c,w) \leq E_G(m,w)$$

ise, $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >$ bir bulanık yarıgruptur (vague semigroup) denir.

ii) $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >$ bir bulanık yarıgrup ve

(BG.2) $\forall a \in G$ için $\mu_{\tilde{o}}(e,a,a) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a,e,a) = 1$ olacak şekilde bir $e \in G$ birim elemanı varsa, $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >$ bir bulanık monoiddir denir.

iii) $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >$ bir bulanık monoid ve

(BG.3) $\forall a \in G$ 'nin $\mu_{\tilde{o}}(a^{-1},a,e) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a,a^{-1},e) = 1$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ ters elemanı varsa, $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >$ bir bulanık gruptur (vague group) denir.

iv) $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >$ bir bulanık grup ve

(BG.4) $\forall a,b,m,w \in G$ için

$$\mu_{\tilde{o}}(a,b,m) \wedge \mu_{\tilde{o}}(b,a,w) \leq E_G(m,w)$$

ise, $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >$ bir abelyen bulanık gruptur (abelian vague group) denir.

Bundan sonraki gösterimlerde "$< G, \tilde{o} >$ bir bulanık gruptur" denildiğinde, $E_{G\times G}$ ve E_G sırasıyla $G \times G$ ve G üzerinde tanımlı belirtisiz eşitlikler olmak üzere, "$< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >$ bulanık grubu" anlaşılacaktır.

Eğer, $\tilde{o}$ işlemi $E^*_{G\times G}$ ve E^*_G klasik belirtisiz eşitliklerine göre, $\mu_{\tilde{o}}(G \times G \times G) \subseteq \{0,1\}$ olan bir bulanık ikili işlem ise, $< G, \tilde{o} >$ bulanık grubu klasik durumdaki bir gruba bire-bir olarak karşılık gelir. Bu bulanık gruba bazen klasik grup da denir.

Aşağıdaki örnek ile, verilen bir $< G, o >$ klasik grubundan yararlanılarak sonsuz sayıda bulanık grubun tanımlanabileceği görülmektedir:

Örnek 2.1.4 (Demirci 1999-b) $< G, \circ >$ bir klasik grup, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sabit reel sayılar öyle ki, $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma < 1$. Ayrıca,

$$E_G : G \times G \longrightarrow [0,1] \ , \quad E_G(x,y) := \begin{cases} 1 & , \ x = y \\ \gamma & , \ x \neq y \end{cases}$$

$$E_{G\times G} : (G \times G) \times (G \times G) \longrightarrow [0,1] \ ,$$

$$E_{G\times G}((x,y),(z,w)) := \begin{cases} 1 & , \ (x,y) = (z,w) \\ \beta & , \ (x,y) \neq (z,w) \end{cases}$$

$$\tilde{\circ} : G \times G \rightsquigarrow G \ , \quad \mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z) := \begin{cases} 1 & , \ z = x \circ y \\ \alpha & , \ z \neq x \circ y \end{cases}$$

olsun. Kolayca görülebileceği gibi $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık yarıgruptur; ayrıca $< G, \tilde{\circ} >$ 'nın birim elemanı $< G, \circ >$ 'nun birim elemanı ve $< G, \tilde{\circ} >$ 'daki bir a elemanının tersi $< G, \circ >$ 'daki a elemanının tersiyle aynıdır. Böylece, $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık gruptur. Ayrıca, $< G, \circ >$ değişmeli ise $< G, \tilde{\circ} >$ da değişmelidir. Eğer, $\alpha = \beta = \gamma$ ise, $\tilde{\circ}$; hem birinci hem ikinci hem de üçüncü girdide geçişlidir; eğer, $\alpha < \gamma$ ise de ne birinci, ne ikinci ne de üçüncü girdide geçişlidir.

Önerme 2.1.5 (Demirci 1999-b) $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup olsun. Bu durumda $< G, \circ >$ bir klasik grup olacak şekilde G üzerinde bir $\circ$ ikili işlemi vardır.

Önerme 2.1.5 'de sözü edilen $\circ : G \times G \longrightarrow G$ ikili işlemi

$$a \circ b := c \iff \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) = 1$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada elde edilen $< G, \circ >$ grubuna $< G, \tilde{\circ} >$ 'nın indirgenmiş klasik grubu adı verilir. Bundan sonraki gösterimlerde, bir $< G, \tilde{\circ} >$ bulanık grubunun indirgenmiş klasik grubu $< G, \circ >$ ile sembolize edilecektir.

Ayrıca, bu çalışmada sıkça kullanılacak olan, $a, b, c \in G$ için $\mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) \leq E_G(c, a \circ b)$ eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. Çünkü, (F-2) özelliği gereğince

$$\mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) = \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,a\circ b) \wedge E_{G\times G}((a,b),(a,b)) \leq E_G(c, a \circ b)$$

olmalıdır.

$< G, \tilde{o} >$ bir bulanık yarıgrup ise, (Demirci 2002) 'deki Teorem 5.10.(ii) gereğince, $< G, \circ >$ bir yarıgruptur. Aşağıdaki önerme ve (Demirci 2002) 'deki Teorem 6.1, bu ifadenin tersinin hangi koşullar altında doğru olacağı konusunda bilgi vermektedir.

Önerme 2.1.6 $\tilde{o}$, G üzerinde ikinci ve üçüncü girdide geçişli bir bulanık ikili işlem ve $< G, \circ >$ bir yarıgrup ise, $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık yarıgruptur.

İspat: $\forall a, b, c, d, m, w, q \in G$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ ve $\tilde{o}$ ikinci ve üçüncü girdide geçişli olduğundan,

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{o}}(b, c, d) \quad & \wedge \quad \mu_{\tilde{o}}(a, d, m) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a, b, q) \wedge \mu_{\tilde{o}}(q, c, w) \\
& \leq \quad E_G(b \circ c, d) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a, d, m) \wedge E_G(a \circ b, q) \wedge \mu_{\tilde{o}}(q, c, w) \\
& \leq \quad \mu_{\tilde{o}}(a, b \circ c, m) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a \circ b, c, w) \\
& \leq \quad E_G(a \circ (b \circ c), m) \wedge E_G((a \circ b) \circ c, w) \\
& \leq \quad E_G(m, w)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle, $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık yarıgruptur. □

$\tilde{o}$, G üzerinde ikinci ve üçüncü girdide geçişli olmayan bir bulanık ikili işlem ve $< G, \circ >$ bir yarıgrup ise, $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık yarıgrup olmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnek ile daha iyi anlaşılacaktır:

Örnek 2.1.7 $G := \{1, 2, 3\}$, $E_{G \times G} := E^*_{G \times G}$ ve i 'ler tablodaki satırları, j 'ler de tablodaki sütunları taramak üzere,

$E_G(i,j)$	1	2	3
1	1	.5	.4
2	.5	1	.4
3	.4	.4	1

$\mu_{\tilde{o}}(1,i,j)$	1	2	3
1	1	.5	.4
2	.5	1	.4
3	.4	.4	1

$\mu_{\tilde{o}}(2,i,j)$	1	2	3
1	3	1	.2
2	.1	.1	1
3	1	.1	.15

$\mu_{\tilde{o}}(3,i,j)$	1	2	3
1	.3	.3	1
2	1	.15	.1
3	.15	1	.15

olsun. Bu durumda

$\circ$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

olarak elde edilir. Burada, $\tilde{o}$ 'nın G üzerinde bir bulanık ikili işlem olduğu ve $< G, \circ >$ 'nun bir yarıgrup olduğu, biraz hesaplamayla, kolayca görülebilir. Diğer yandan,

$$\mu_{\tilde{o}}(2,1,2) \wedge E_G(1,2) = 1 \wedge .5 = .5 \not\leq \mu_{\tilde{o}}(2,2,2) = .1$$

ve

$$\mu_{\tilde{o}}(1,1,1) \wedge E_G(1,2) = 1 \wedge .5 = .5 \not\leq \mu_{\tilde{o}}(2,1,1) = 3$$

olduğundan $\tilde{o}$, G üzerinde ikinci ve üçüncü girdide geçişli değildir. Ayrıca,

$$\mu_{\tilde{o}}(1,2,1) \wedge \mu_{\tilde{o}}(1,1,1) \wedge \mu_{\tilde{o}}(1,1,2) \wedge \mu_{\tilde{o}}(2,2,3) = .5 \not\leq E_G(1,3) = .4$$

olduğundan $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık yarıgrup olamaz.

$< G, * >$ bir klasik grup ise, her $a, b, c, d \in G$ için $a * b = a * d \Longleftrightarrow b = d$ ve $a * b = d * b \Longleftrightarrow a = d$ 'dir (Karakaş 1998). Bulanık Kısaltma Kuralı olarak adlandırılan aşağıdaki teorem, bu önermenin bir benzerinin bulanık cebirde de geçerli olduğunu ifade etmektedir:

Teorem 2.1.8 (Demirci 1999-b) $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup olsun. Bu takdirde,

(i) $\mu_{\tilde{o}}(a,b,c) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a,d,c) \leq E_G(b,d) \quad (\forall a,b,c,d \in G)$,

(ii) $\mu_{\tilde{o}}(a,b,c) \wedge \mu_{\tilde{o}}(d,b,c) \leq E_G(a,d) \quad (\forall a,b,c,d \in G)$.

Teorem 2.1.9 (Demirci 1999-b) $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup olsun. Bu takdirde,

(i) Eğer, $\tilde{o}$ bulanık ikili işlemi ikinci girdide geçişli ise, her $a, b \in G$ için $E_G(a,b) = E_G(a^{-1}, b^{-1})$ 'dir.

(ii) Her $a, b, u, v \in G$ için $\mu_{\tilde{o}}(b^{-1}, a^{-1}, u) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a, b, v) \leq E_G(u, v^{-1}) \wedge E_G(v, u^{-1})$ 'dir.

Teorem 2.1.10 (Demirci 1999-b) $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık yarıgrup olsun. Bu takdirde, $< G, \tilde{o} >$ 'nın bir bulanık grup olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in G$ için öyle $x, y \in G$ vardır ki, $\mu_{\tilde{o}}(a, x, b) = \mu_{\tilde{o}}(y, a, b) = 1$'dir.

Teorem 2.1.11 (Demirci 2000) $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup olsun. Eğer, $\tilde{o}$ bulanık ikili işlemi birinci girdide geçişli ise, $E_G(a \circ b, c) = \mu_{\tilde{o}}(a, b, c)$ 'dir.

Teorem 2.1.12 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup ve e, $< G, \tilde{o} >$ 'nın birim elemanı olmak üzere,

1) Eğer $\tilde{o}$ bulanık ikili işlemi üçüncü girdide geçişli ise, her $a, b, x \in G$ için,

(i) $E_G(x \circ a, b) = E_G(x, b \circ a^{-1})$ ve özel olarak, $E_G(x \circ a, e) = E_G(x, a^{-1})$ olur.

(ii) $E_G(a, b) = E_G(a \circ x, b \circ x)$ 'dir.

2) Eğer $\tilde{o}$ bulanık ikili işlemi ikinci girdide geçişli ise, her $a, b, y \in G$ için,

(i) $E_G(a \circ y, b) = E_G(y, a^{-1} \circ b)$ ve özel olarak, $E_G(a \circ y, e) = E_G(y, a^{-1})$ olur.

(ii) $E_G(a, b) = E_G(y \circ a, y \circ b)$ 'dir.

3) Eğer, $\tilde{o}$ bulanık ikili işlemi hem ikinci hem de üçüncü girdide geçişli ise, her $a, b, c, d \in G$ için $E_G(a, b) \wedge E_G(c, d) \leq E_G(a \circ c, b \circ d)$ 'dir.

İspat: 1) (i) $\tilde{\delta}$ üçüncü girdide geçişli olduğu için her $a, b, x \in G$ için

$$E_G(x \circ a, b) = E_G(x \circ a, b) \wedge \mu_{\tilde{\delta}}(x \circ a, a^{-1}, x) \leq \mu_{\tilde{\delta}}(b, a^{-1}, x) \leq E_G(b \circ a^{-1}, x) ,$$

$$E_G(b \circ a^{-1}, x) = E_G(b \circ a^{-1}, x) \wedge \mu_{\tilde{\delta}}(b \circ a^{-1}, a, b) \leq \mu_{\tilde{\delta}}(x, a, b) \leq E_G(x \circ a, b)$$

olduğundan, $E_G(x \circ a, b) = E_G(x, b \circ a^{-1})$ 'dir.

Özel olarak, $b = e$ olarak seçilirse, $E_G(x \circ a, e) = E_G(x, a^{-1})$ eşitliği elde edilir.

(ii) $\tilde{\delta}$, üçüncü girdide geçişli olduğundan, her $a, b, x \in G$ için

$$E_G(a, b) = E_G(a, b) \wedge \mu_{\tilde{\delta}}(b, x, b \circ x) \leq \mu_{\tilde{\delta}}(a, x, b \circ x) \leq E_G(a \circ x, b \circ x),$$

$$E_G(a \circ x, b \circ x) = E_G(a \circ x, b \circ x) \wedge \mu_{\tilde{\delta}}(b \circ x, x^{-1}, b) \leq \mu_{\tilde{\delta}}(a \circ x, x^{-1}, b) \leq E_G(a, b)$$

eşitsizlikleri sağlanacağından, $E_G(a, b) = E_G(a \circ x, b \circ x)$ olduğu elde edilir.

2) (i) $\tilde{\delta}$ ikinci girdide geçişli olduğu için her $a, b, y \in G$ için

$$E_G(a \circ y, b) = E_G(a \circ y, b) \wedge \mu_{\tilde{\delta}}(a^{-1}, a \circ y, y) \leq \mu_{\tilde{\delta}}(a^{-1}, b, y) \leq E_G(y, a^{-1} \circ b) ,$$

$$E_G(y, a^{-1} \circ b) = E_G(y, a^{-1} \circ b) \wedge \mu_{\tilde{\delta}}(a, a^{-1} \circ b, b) \leq \mu_{\tilde{\delta}}(a, y, b) \leq E_G(a \circ y, b)$$

olduğundan, $E_G(y, a^{-1} \circ b) = E_G(a \circ y, b)$ olmalıdır.

Özel olarak, $b = e$ için $E_G(a \circ y, e) = E_G(y, a^{-1})$ eşitliği elde edilir.

(ii) $\tilde{\delta}$, ikinci girdide geçişli olduğundan, her $a, b, y \in G$ için

$$E_G(a, b) = E_G(a, b) \wedge \mu_{\tilde{\delta}}(y, b, y \circ b) \leq \mu_{\tilde{\delta}}(y, a, y \circ b) \leq E_G(y \circ a, y \circ b),$$

$$E_G(y \circ a, y \circ b) = E_G(y \circ a, y \circ b) \wedge \mu_{\tilde{\delta}}(y^{-1}, y \circ b, b) \leq \mu_{\tilde{\delta}}(y^{-1}, y \circ a, b) \leq E_G(a, b)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu da, $E_G(a, b) = E_G(y \circ a, y \circ b)$ olduğunu gösterir.

3) $\tilde{\delta}$, ikinci ve üçüncü girdide geçişli olduğundan, her $a, b, c, d \in G$ için

$$\begin{aligned} E_G(a, b) \wedge E_G(c, d) &= \mu_{\tilde{\delta}}(a, c, a \circ c) \wedge E_G(a, b) \wedge \mu_{\tilde{\delta}}(b, d, b \circ d) \wedge E_G(c, d) \\ &\leq \mu_{\tilde{\delta}}(b, c, a \circ c) \wedge \mu_{\tilde{\delta}}(b, c, b \circ d) \\ &\leq E_G(a \circ c, b \circ d) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. □

Önerme 2.1.13 $\tilde{\circ}$, G üzerinde üçüncü girdide geçişli olan bir bulanık ikili işlem ve $\circ$ ikili işlemi Önerme 2.1.5 'nın ispatındaki gibi tanımlanmak üzere, $< G, \circ >$ bir yarıgrup olsun. Bu durumda, $n \in \mathbb{N}$ ve her $n \geq 2$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in G$ ve $u_1 = a_1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\bigwedge_{i=1}^{n-1} \mu_{\tilde{\circ}}(u_i, a_{i+1}, u_{i+1}) \leq E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n, u_n).$$

İspat: n üzerinde tümevarımla; (F-2) özelliği gereği,

$$\mu_{\tilde{\circ}}(u_1, a_2, u_2) \leq E_G(u_1 \circ a_2, u_2) = E_G(a_1 \circ a_2, u_2)$$

olduğundan, $n = 2$ için istenen eşitsizlik sağlanır. Kabul edelim ki, her $k < n$ için

$$\bigwedge_{i=1}^{k-1} \mu_{\tilde{\circ}}(u_i, a_{i+1}, u_{i+1}) \leq E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_k, u_k)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda; $k = n - 1$ için

$$\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{\circ}}(u_i, a_{i+1}, u_{i+1}) \leq E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_{n-1}, u_{n-1})$$

ve $\tilde{\circ}$, üçüncü girdide geçişli olduğundan,

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i=1}^{n-1} \mu_{\tilde{\circ}}(u_i, a_{i+1}, u_{i+1}) &= \Big(\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{\circ}}(u_i, a_{i+1}, u_{i+1})\Big) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(u_{n-1}, a_n, u_n) \\
&\leq E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_{n-1}, u_{n-1}) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(u_{n-1}, a_n, u_n) \\
&\leq \mu_{\tilde{\circ}}(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_{n-1}, a_n, u_n) \\
&\leq E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n, u_n)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu nedenle, $n \geq 2$ ve $u_1 = a_1$ için

$$\bigwedge_{i=1}^{n-1} \mu_{\tilde{\circ}}(u_i, a_{i+1}, u_{i+1}) \leq E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n, u_n)$$

olmalıdır. □

Önerme 2.1.14 $\tilde{\circ}$, G üzerinde, ikinci ve üçüncü girdide geçişlilik özelliğine sahip, bir bulanık ikili işlem ve $\circ$ ikili işlemi Önerme 2.1.5 'in ispatındaki gibi tanımlanmak üzere, $< G, \circ >$ bir yarıgrup olsun. Bu durumda, $n, p \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq p < n - 1$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, s_1, s_2, \ldots, s_n, t_{p+1}, \ldots, t_n, m \in G$, için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

(1) $t_2 = a_2$ ise,

$$\mu_{\tilde{o}}(a_1, t_n, m) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(t_{i+1}, a_{i+2}, t_{i+2}) \right) \leq E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n, m)$$

(2) $s_1 = a_1$, $t_{p+1} = a_{p+1}$ ve $p > 1$ ise,

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{p-1} \mu_{\tilde{o}}(s_i, a_{i+1}, s_{i+1}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n-p-1} \mu_{\tilde{o}}(t_{p+i}, a_{p+i+1}, t_{p+i+1}) \right) \wedge \mu_{\tilde{o}}(s_p, t_n, m) \leq E_G(a_1 \circ \ldots \circ a_n, m).$$

İspat: (1) Verilen koşullar altında, n üzerinde tümevarımla,

$$\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(t_{i+1}, a_{i+2}, t_{i+2}) \leq E_G(a_2 \circ a_3 \circ \ldots \circ a_n, t_n)$$

eşitsizliğinin sağlandığını görmek zor değildir. Bu eşitsizlikle beraber, $\tilde{o}$ 'nın ikinci girdide geçişli olmasından yararlanılarak,

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{o}}(a_1, t_n, m) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(t_{i+1}, a_{i+2}, t_{i+2}) \right) &\leq \mu_{\tilde{o}}(a_1, t_n, m) \wedge E_G(a_2 \circ a_3 \circ \ldots \circ a_n, t_n) \\
&\leq \mu_{\tilde{o}}(a_1, a_2 \circ a_3 \circ \ldots \circ a_n, m) \\
&\leq E_G(a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ \ldots \circ a_n, m)
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

(2) Diğer yandan, $s_1 = a_1$, $t_{p+1} = a_{p+1}$ ve $p > 1$ ise de, Önerme 2.1.13 'ten,

$$\bigwedge_{i=1}^{p-1} \mu_{\tilde{o}}(s_i, a_{i+1}, s_{i+1}) \leq E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_p, s_p),$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n-p-1} \mu_{\tilde{o}}(t_{p+i}, a_{p+i+1}, t_{p+i+1}) \leq E_G(a_{p+1} \circ a_{p+2} \circ \ldots \circ a_n, t_n)$$

ve $\tilde{o}$, ikinci ve üçüncü girdide geçişli olduğundan;

$$\begin{aligned}
&\left(\bigwedge_{i=1}^{p-1} \mu_{\tilde{o}}(s_i, a_{i+1}, s_{i+1}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n-p-1} \mu_{\tilde{o}}(t_{p+i}, a_{p+i+1}, t_{p+i+1}) \right) \wedge \mu_{\tilde{o}}(s_p, t_n, m) \\
&\leq E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_p, s_p) \wedge E_G(a_{p+1} \circ a_{p+2} \circ \ldots \circ a_n, t_n) \wedge \mu_{\tilde{o}}(s_p, t_n, m) \\
&\leq E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_p, s_p) \wedge \mu_{\tilde{o}}(s_p, a_{p+1} \circ a_{p+2} \circ \ldots \circ a_n, m) \\
&\leq \mu_{\tilde{o}}(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_p, a_{p+1} \circ a_{p+2} \circ \ldots \circ a_n, m) \\
&\leq E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n, m)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. □

Önerme 2.1.15 $\tilde{o}$, G üzerinde, ikinci ve üçüncü girdide geçişlilik özelliğine sahip bir bulanık ikili işlem, $\circ$ ikili işlemi Önerme 2.1.5 'in ispatındaki gibi tanımlanmak üzere, $< G, \circ >$ bir yarıgrup, $n, p, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, r < n-1$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $s_1, s_2, \ldots, s_n$, $t_{p+1}, \ldots, t_n$, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ve $v_{p+1}, \ldots, v_n, m, w \in G$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

(1) Eğer $p = r = 1$ ve $t_2 = a_2 = v_2$ ise,

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{o}}(a_1, t_n, m) \;\; &\wedge \;\; (\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(t_{i+1}, a_{i+2}, t_{i+2})) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a_1, v_n, w) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(v_{i+1}, a_{i+2}, v_{i+2})) \\ &\leq \;\; E_G(m, w).\end{aligned}$$

(2) Eğer $p = 1 < r$, $t_2 = a_2$, $u_1 = a_1$ ve $v_{r+1} = a_{r+1}$ ise,

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{o}}(a_1, t_n, m) \;\; &\wedge \;\; (\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(t_{i+1}, a_{i+2}, t_{i+2})) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{r-1} \mu_{\tilde{o}}(u_i, a_{i+1}, u_{i+1})) \\ &\wedge \;\; (\bigwedge_{i=1}^{n-r-1} \mu_{\tilde{o}}(v_{r+i}, a_{r+i+1}, v_{r+i+1})) \wedge \mu_{\tilde{o}}(u_r, v_n, w) \\ &\leq \;\; E_G(m, w).\end{aligned}$$

(3) Eğer $1 < p, r$ ve $s_1 = u_1 = a_1$, $t_{p+1} = a_{p+1}$, $v_{r+1} = a_{r+1}$ ise,

$$(\bigwedge_{i=1}^{p-1} \mu_{\tilde{o}}(s_i, a_{i+1}, s_{i+1})) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n-p-1} \mu_{\tilde{o}}(t_{p+i}, a_{p+i+1}, t_{p+i+1})) \wedge \mu_{\tilde{o}}(s_p, t_n, m) \wedge$$

$$(\bigwedge_{i=1}^{r-1} \mu_{\tilde{o}}(u_i, a_{i+1}, u_{i+1})) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n-r-1} \mu_{\tilde{o}}(v_{r+i}, a_{r+i+1}, v_{r+i+1})) \wedge \mu_{\tilde{o}}(u_r, v_n, w) \leq E_G(m, w).$$

İspat: (1) Önerme 2.1.14.(1) gereğince

$$\mu_{\tilde{o}}(a_1, t_n, m) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(t_{i+1}, a_{i+2}, t_{i+2})) \leq E_G(a_1 \circ \ldots \circ a_n, m)$$

$$\mu_{\tilde{o}}(a_1, v_n, w) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(v_{i+1}, a_{i+2}, v_{i+2})) \leq E_G(a_1 \circ \ldots \circ a_n, w)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{o}}(a_1, t_n, m) \;\; &\wedge \;\; (\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(t_{i+1}, a_{i+2}, t_{i+2})) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a_1, v_n, w) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(v_{i+1}, a_{i+2}, v_{i+2})) \\ &\leq \;\; E_G(a_1 \circ \ldots \circ a_n, m) \wedge E_G(a_1 \circ \ldots \circ a_n, w) \leq E_G(m, w)\end{aligned}$$

elde edilir.

(**2**) Önerme 2.1.14 'ten,

$$\mu_{\tilde{o}}(a_1, t_n, m) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(t_{i+1}, a_{i+2}, t_{i+2})) \leq E_G(a_1 \circ \ldots \circ a_n, m),$$

$$\begin{aligned}(\bigwedge_{i=1}^{r-1} \mu_{\tilde{o}}(u_i, a_{i+1}, u_{i+1})) \quad \wedge \quad & (\bigwedge_{i=1}^{n-r-1} \mu_{\tilde{o}}(v_{r+i}, a_{r+i+1}, v_{r+i+1})) \wedge \mu_{\tilde{o}}(u_r, v_n, w) \\ \leq \quad & E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n, w)\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{o}}(a_1, t_n, m) \quad \wedge \quad & (\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(t_{i+1}, a_{i+2}, t_{i+2})) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{r-1} \mu_{\tilde{o}}(u_i, a_{i+1}, u_{i+1})) \\ \wedge \quad & (\bigwedge_{i=1}^{n-r-1} \mu_{\tilde{o}}(v_{r+i}, a_{r+i+1}, v_{r+i+1})) \wedge \mu_{\tilde{o}}(u_r, v_n, w) \\ \leq \quad & E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n, m) \wedge E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n, w) \leq E_G(m, w)\end{aligned}$$

'dir.

(**3**) Yine Önerme 2.1.14 gereği,

$$\begin{aligned}(\bigwedge_{i=1}^{p-1} \mu_{\tilde{o}}(s_i, a_{i+1}, s_{i+1})) \quad \wedge \quad & (\bigwedge_{i=1}^{n-p-1} \mu_{\tilde{o}}(t_{p+i}, a_{p+i+1}, t_{p+i+1})) \wedge \mu_{\tilde{o}}(s_p, t_n, m) \\ \leq \quad & E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n, m) \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\bigwedge_{i=1}^{r-1} \mu_{\tilde{o}}(u_i, a_{i+1}, u_{i+1})) \quad \wedge \quad & (\bigwedge_{i=1}^{n-r-1} \mu_{\tilde{o}}(v_{r+i}, a_{r+i+1}, v_{r+i+1})) \wedge \mu_{\tilde{o}}(u_r, v_n, w) \\ \leq \quad & E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n, w)\end{aligned}$$

ve $E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n, m) \wedge E_G(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n, w) \leq E_G(m, w)$ olduğundan, istenen eşitsizlik sağlanır. □

Önerme 2.1.16 õ, G üzerinde ikinci girdide geçişli olan bir bulanık ikili işlem ve ∘ ikili işlemi Önerme 2.1.5 'in ispatındaki gibi tanımlanmak üzere, $< G, \circ >$ bir yarıgrup olsun. Bu durumda, $n \in \mathbb{N}$ ve her $n \geq 2$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in G$ ve $u_1 = a_1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\bigwedge_{i=1}^{n-1} \mu_{\tilde{o}}(a_{i+1}, u_i, u_{i+1}) \leq E_G(a_n \circ a_{n-1} \circ \ldots \circ a_1, u_n)$$

İspat: n üzerinde tümevarımla, (F-2) özelliği gereği,

$$\mu_{\tilde{o}}(a_2, u_1, u_2) \leq E_G(a_2 \circ u_1, u_2) = E_G(a_2 \circ a_1, u_2)$$

olduğundan, $n = 2$ için istenen eşitsizlik sağlanır. Kabul edelim ki, her $k < n$ için istenen eşitsizlik sağlansın. Bu durumda,

$$\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(a_{i+1}, u_i, u_{i+1}) \leq E_G(a_{n-1} \circ a_{n-2} \circ \ldots \circ a_1, u_{n-1})$$

ve $\tilde{o}$, ikinci girdide geçişli olduğundan,

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i=1}^{n-1} \mu_{\tilde{o}}(a_{i+1}, u_i, u_{i+1}) &= \left(\bigwedge_{i=1}^{n-2} \mu_{\tilde{o}}(a_{i+1}, u_i, u_{i+1})\right) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a_n, u_{n-1}, u_n) \\
&\leq E_G(a_{n-1} \circ a_{n-2} \circ \ldots \circ a_1, u_{n-1}) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a_n, u_{n-1}, u_n) \\
&\leq \mu_{\tilde{o}}(a_n, a_{n-1} \circ a_{n-2} \circ \ldots \circ a_1, u_n) \\
&\leq E_G(a_n \circ a_{n-1} \circ \ldots \circ a_1, u_n)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. □

Önerme 2.1.17 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $< G_i, \tilde{o}_i >$ bulanık gruplar,

$$E_{G_1 \times \cdots \times G_n}((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) := \bigwedge_{i=1}^{n} E_{G_i}(x_i, y_i) \ ,$$

$$E_{(G_1 \times \cdots \times G_n) \times (G_1 \times \cdots \times G_n)}((x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), (z_1, \ldots, z_n, t_1, \ldots, t_n)) :=$$
$$\bigwedge_{i=1}^{n} E_{G_i \times G_i}((x_i, y_i), (z_i, t_i))$$

ve

$$\tilde{\bullet} : (G_1 \times \cdots \times G_n) \times (G_1 \times \cdots \times G_n) \rightsquigarrow G_1 \times \cdots \times G_n,$$

$$\mu_{\tilde{\bullet}}((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n)) := \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{o}_i}(a_i, b_i, c_i)$$

olmak üzere $< G_1 \times \cdots \times G_n, \tilde{\bullet}, E_{(G_1 \times \cdots \times G_n) \times (G_1 \times \cdots \times G_n)}, E_{G_1 \times \cdots \times G_n} >$ bir bulanık gruptur.

İspat:

$$R := \mu_{\tilde{\bullet}}((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n)) \ ,$$

$$S := \mu_{\tilde{\bullet}}((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n), (z_1, \ldots, z_n)) \ ,$$

$$T := E_{(G_1\times\cdots\times G_n)\times(G_1\times\cdots\times G_n)}((a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n),(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n))$$

olmak üzere her $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ için

$$R\wedge S\wedge T \le \mu_{\tilde{\circ}_i}(a_i,b_i,c_i)\wedge\mu_{\tilde{\circ}_i}(x_i,y_i,z_i)\wedge E_{G_i\times G_i}((a_i,b_i),(x_i,y_i))\ ,$$

olacağından

$$R\wedge S\wedge T \le \bigwedge_{i=1}^{n} E_{G_i}(c_i,z_i) = E_{G_1\times\cdots\times G_n}((c_1,\ldots,c_n),(z_1,\ldots,z_n))$$

yani (F-2) özelliği sağlanır. Her $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ ve $x_i,y_i\in G_i$ için öyle $x_i\circ_i y_i\in G_i$ vardır ki, $\mu_{\tilde{\circ}_i}(x_i,y_i,x_i\circ_i y_i)=1$ 'dir. Bu nedenle, $\bigwedge_{i=1}^{n}\mu_{\tilde{\circ}_i}(x_i,y_i,x_i\circ_i y_i)=1$ ve dolayısıyla $\mu_{\bullet}((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n),(x_1\circ_1 y_1,\ldots,x_n\circ_n y_n))=1$ olur.

Bulanık Birleşme:

$$\mu_{\bullet}(b,c,d) := \mu_{\bullet}((b_1,\ldots,b_n),(c_1,\ldots,c_n),(d_1,\ldots,d_n))\ ,$$

$$\mu_{\bullet}(a,d,m) := \mu_{\bullet}((a_1,\ldots,a_n),(d_1,\ldots,d_n),(m_1,\ldots,m_n))\ ,$$

$$\mu_{\bullet}(a,b,q) := \mu_{\bullet}((a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n),(q_1,\ldots,q_n))\ ,$$

$$\mu_{\bullet}(q,c,w) := \mu_{\bullet}((q_1,\ldots,q_n),(c_1,\ldots,c_n),(w_1,\ldots,w_n))$$

ve $Y := \mu_{\bullet}(b,c,d)\wedge\mu_{\bullet}(a,d,m)\wedge\mu_{\bullet}(a,b,q)\wedge\mu_{\bullet}(q,c,w)$ olmak üzere, her $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ için

$$Y \le \mu_{\tilde{\circ}_i}(b_i,c_i,d_i)\wedge\mu_{\tilde{\circ}_i}(a_i,d_i,m_i)\wedge\mu_{\tilde{\circ}_i}(a_i,b_i,q_i)\wedge\mu_{\tilde{\circ}_i}(q_i,c_i,w_i) \le E_{G_i}(m_i,w_i)$$

olacağından, $Y \le \bigwedge_{i=1}^{n} E_{G_i}(m_i,w_i) = E_{G_1\times\cdots\times G_n}((m_1,\ldots,m_n),(w_1,\ldots,w_n))$ eşitsizliği sağlanır.

e_i, $< G_i, \tilde{\circ}_i >$ 'nin birim elemanı olmak üzere,

$$\mu_{\bullet}((x_1,\ldots,x_n),(e_1,\ldots,e_n),(x_1,\ldots,x_n)) = \bigwedge_{i=1}^{n}\mu_{\tilde{\circ}_i}(x_i,e_i,x_i)=1$$

$$\mu_{\bullet}((e_1,\ldots,e_n),(x_1,\ldots,x_n),(x_1,\ldots,x_n)) = \bigwedge_{i=1}^{n}\mu_{\tilde{\circ}_i}(e_i,x_i,x_i)=1$$

olacak şekilde $(e_1,\ldots,e_n)\in G_1\times\cdots\times G_n$ vardır.

Ayrıca,

$$\mu_{\tilde{\bullet}}((x_1,\dots,x_n),(x_1^{-1},\dots,x_n^{-1}),(e_1,\dots,e_n)) = \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{o}_i}(x_i,x_i^{-1},e_i) = 1\ ,$$

$$\mu_{\tilde{\bullet}}((x_1^{-1},\dots,x_n^{-1}),(x_1,\dots,x_n),(e_1,\dots,e_n)) = \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{o}_i}(x_i^{-1},x_i,e_i) = 1$$

olduğundan

$$< G_1 \times \cdots \times G_n, \tilde{\bullet}, E_{(G_1\times\cdots\times G_n)\times(G_1\times\cdots\times G_n)}, E_{G_1\times\cdots\times G_n} >$$

bir bulanık gruptur (bu gruba, $< G_i, \tilde{o}_i >$ bulanık gruplarının bulanık dış dolaysız çarpım grubu veya kısaca bulanık çarpım grubu adı verilir. Eğer, $< G_i, \tilde{o}_i >$ abelyen bulanık gruplar ise, bulanık çarpım grubunun da abelyen olacağı açıktır. $< G_i, o_i >$ klasik gruplarının dış dolaysız çarpım grubu, $< G_1 \times \dots \times G_n, \otimes >$ ile gösterilmek üzere; $\tilde{\bullet}$ 'nın tanımı gereği, $< G_1 \times \dots \times G_n, \bullet > = < G_1 \times \dots \times G_n, \otimes >$ olur). □

$Z = X \times Y$ olmak üzere $< Z, \tilde{o}, E_{Z\times Z}, E_Z >$ bir bulanık grup olsun. Bu grubun birim elemanı e_Z ve bir (x,y) elemanının tersi, sırasıyla, $e_Z = (e_X, e_Y)$ ve $(x,y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1})$ biçiminde gösterilsin.

$$E_X(x_1,x_2) := E_Z((x_1,e_Y),(x_2,e_Y))$$

$$E_{X\times X}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := E_{Z\times Z}(((x_1,e_Y),(x_2,e_Y)),((y_1,e_Y),(y_2,e_Y)))$$

$$E_Y(y_1,y_2) := E_Z((e_X,y_1),(e_X,y_2))$$

$$E_{Y\times Y}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := E_{Z\times Z}(((e_X,x_1),(e_X,x_2)),((e_X,y_1),(e_X,y_2)))$$

olarak tanımlandığında, E_X ve $E_{X\times X}$ 'in, sırasıyla, X ve $X \times X$ üzerinde; E_Y ve $E_{Y\times Y}$ 'nin de, sırasıyla, Y ve $Y \times Y$ üzerinde belirtisiz eşitlikler olduğu kolayca görülebilir. Bu bilgilerin ışığı altında, aşağıdaki önerme, iki kümenin kartezyen çarpımı üzerinde alınan bir bulanık gruptan bu kümeler üzerinde bulanık gruplar elde etmenin bir yöntemini vermektedir:

Önerme 2.1.18 Yukarıdaki gösterimler kullanılmak üzere,

$$\tilde{o}_1 : X \times X \rightsquigarrow X\ ,\quad \mu_{\tilde{o}_1}(x_1,x_2,t) := \mu_{\tilde{o}}((x_1,e_Y),(x_2,e_Y),(t,e_Y)),$$

$$\tilde{o}_2 : Y \times Y \rightsquigarrow Y\ ,\quad \mu_{\tilde{o}_2}(y_1,y_2,w) := \mu_{\tilde{o}}((e_X,y_1),(e_X,y_2),(e_X,w))$$

olarak tanımlandığında $< X, \tilde{o}_1, E_{X\times X}, E_X >$ ve $< Y, \tilde{o}_2, E_{Y\times Y}, E_Y >$ birer bulanık gruptur.

İspat: Her $x_1, x_2, u_1, u_2, t_1, t_2 \in X$ için

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{o}_1}(x_1, x_2, t_1) & \wedge \ \mu_{\tilde{o}_1}(u_1, u_2, t_2) \wedge E_{X\times X}((x_1, x_2), (u_1, u_2)) \\
& = \ \mu_{\tilde{o}}((x_1, e_Y), (x_2, e_Y), (t_1, e_Y)) \wedge \mu_{\tilde{o}}((u_1, e_Y), (u_2, e_Y), (t_2, e_Y)) \\
& \wedge \ \ E_{Z\times Z}(((x_1, e_Y), (x_2, e_Y)), ((u_1, e_Y), (u_2, e_Y))) \\
& \leq \ E_Z((t_1, e_Y), (t_2, e_Y)) \ = \ E_X(t_1, t_2)
\end{aligned}$$

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x, y) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 \circ_1 x_2 & = & x \\ y_1 \circ_2 y_2 & = & y \end{array} \right\}$$

tanımları altında

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{o}_1}(x_1, x_2, x_1 \circ_1 x_2) & = \mu_{\tilde{o}}((x_1, e_Y), (x_2, e_Y), (x_1 \circ_1 x_2, e_Y)) \\
& = \mu_{\tilde{o}}((x_1, e_Y), (x_2, e_Y), (x_1, e_Y) \circ (x_2, e_Y)) = 1
\end{aligned}$$

olacağından $\tilde{o}_1$, X üzerinde bir bulanık ikili işlemdir. Ayrıca, $\tilde{o}_1$ 'in X üzerinde bulanık birleşme özelliğine sahip olacağı açıktır ve

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{o}_1}(x, e_X, x) & = \mu_{\tilde{o}}((x, e_Y), (e_X, e_Y), (x, e_Y)) \\
& = \mu_{\tilde{o}}((x, e_Y), (e_X, e_Y), (x \circ_1 e_X, e_Y \circ_2 e_Y)) \\
& = \mu_{\tilde{o}}((x, e_Y), (e_X, e_Y), (x, e_Y) \circ (e_X, e_Y)) \\
& = 1 = \mu_{\tilde{o}_1}(e_X, x, x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{o}_1}(x, x^{-1}, e_X) & = \mu_{\tilde{o}}((x, e_Y), (x^{-1}, e_Y), (e_X, e_Y)) \\
& = \mu_{\tilde{o}}((x, e_Y), (x, e_Y)^{-1}, (e_X, e_Y)) \\
& = 1 = \mu_{\tilde{o}_1}(x^{-1}, x, e_X)
\end{aligned}$$

olduğundan $< X, \tilde{o}_1, E_{X\times X}, E_X >$ bir bulanık gruptur. $< Y, \tilde{o}_2, E_{Y\times Y}, E_Y >$ 'nin de bir bulanık grup olduğu benzer şekilde gösterilebilir. □

Aşağıda tanımlanacak olan $\tilde{o}_{max}$ işlemi, (Demirci 2002) 'deki Teorem 3.11 gereğince, birinci girdide geçişli bir bulanık ikili işlemdir (bir perfect belirtisiz fonksiyondur). Bu nedenle, aşağıdaki önerme, bir bulanık gruptan yararlanılarak bir perfect belirtisiz fonksiyon elde etme hakkında bilgi vermektedir:

Önerme 2.1.19 (Demirci 2000, 2002) $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup ve $\tilde{o}$, G üzerinde ikinci ve üçüncü girdide geçişli olsun. Eğer, $\mu_{\tilde{o}_{max}}(x_1, x_2, y) := E_G(x_1 \circ x_2, y)$

olacak biçimde tanımlanırsa, $< G, \tilde{o}_{max}, E_{G\times G}, E_G >$ bir bulanık grup olur. Bu şekilde tanımlanan $\tilde{o}_{max}$ bulanık ikili işlemi, hem $E_{G\times G}$ 'ye göre hem de E_G 'ye göre genişleyebilirdir.

Klasik bir gruptan hareketle bulanık bir grubun nasıl elde edilebileceği konusunda aşağıdaki önerme yol gösterici olacaktır:

Önerme 2.1.20 (Demirci 2002 , 2003-b) $< G, \circ >$ bir grup olmak üzere, eğer E_G ve $E_{G\times G}$, sırasıyla, G ve $G \times G$ üzerinde her $a, b, c, d \in G$ için

$$E_G(a,b) \leq \bigwedge_{u\in G} E_G(a \circ u, b \circ u) \wedge E_G(u \circ a, u \circ b) \ ,$$

ve

$$E_{G\times G}((a,b),(c,d)) \leq E_G(a \circ b, c \circ d)$$

özelliğini sağlayan belirtisiz eşitlikler ise, $\mu_{\tilde{o}}(a,b,c) := E_G(a \circ b, c)$ olarak tanımlanmak üzere $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >$ bir bulanık gruptur. Ayrıca, $\tilde{o}$ hem E_G 'ye göre hem de $E_{G\times G}$ 'ye göre genişleyebilirdir.

Önerme 2.1.21 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup ve $a \in G$ için

$$a_{\tilde{o}} : G \times G \rightsquigarrow G \ , \quad a_{\mu_{\tilde{o}}}(x,y,z) := \bigvee_{x' \in G} \mu_{\tilde{o}}(a,x,x') \wedge \mu_{\tilde{o}}(x',y,z)$$

olmak üzere, eğer $\tilde{o}$ üçüncü girdide geçişli ise, $a_{\mu_{\tilde{o}}}(x,y,z) = \mu_{\tilde{o}}(a \circ x, y, z)$ 'dir.

İspat: $x' = a \circ x$ için

$$a_{\mu_{\tilde{o}}}(x,y,z) \geq \mu_{\tilde{o}}(a,x,a \circ x) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a \circ x, y, z) = \mu_{\tilde{o}}(a \circ x, y, z)$$

olduğundan, $a_{\mu_{\tilde{o}}}(x,y,z) \geq \mu_{\tilde{o}}(a \circ x, y, z)$ elde edilir. Diğer yandan, her $x' \in G$ için

$$\mu_{\tilde{o}}(a,x,x') \wedge \mu_{\tilde{o}}(x',y,z) \leq E_G(a \circ x, x') \wedge \mu_{\tilde{o}}(x',y,z) \leq \mu_{\tilde{o}}(a \circ x, y, z)$$

olduğundan,

$$a_{\mu_{\tilde{o}}}(x,y,z) = \bigvee_{x' \in G} (\mu_{\tilde{o}}(a,x,x') \wedge \mu_{\tilde{o}}(x',y,z)) \leq \mu_{\tilde{o}}(a \circ x, y, z)$$

dolayısıyla $a_{\mu_{\tilde{o}}}(x,y,z) = \mu_{\tilde{o}}(a \circ x, y, z)$ 'dir. □

Sonuç 2.1.22 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup ve $a \in G$ için

$$a_{\tilde{o}} : G \times G \rightsquigarrow G \ , \quad a_{\mu_{\tilde{o}}}(x,y,z) := \bigvee_{x' \in G} \mu_{\tilde{o}}(x,a,x') \wedge \mu_{\tilde{o}}(x',y,z)$$

olmak üzere, eğer $\tilde{o}$ üçüncü girdide geçişli ise, $a_{\mu_{\tilde{o}}}(x,y,z) = \mu_{\tilde{o}}(x \circ a, y, z)$ 'dir.

İspat: Bunun ispatı, Önerme 2.1.21 'in ispatına benzer şekilde yapılabilir. □

Önerme 2.1.23 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup ve $b \in G$ için

$$\tilde{o}^b : G \times G \rightsquigarrow G \ , \quad {\mu_{\tilde{o}}}^b(x,y,z) := \bigvee_{y' \in G} \mu_{\tilde{o}}(y,b,y') \wedge \mu_{\tilde{o}}(x,y',z)$$

olmak üzere, eğer $\tilde{o}$ ikinci girdide geçişli ise, ${\mu_{\tilde{o}}}^b(x,y,z) = \mu_{\tilde{o}}(x, y \circ b, z)$ 'dir.

İspat: $y' = y \circ b$ için

$${\mu_{\tilde{o}}}^b(x,y,z) \geq \mu_{\tilde{o}}(y,b,y \circ b) \wedge \mu_{\tilde{o}}(x, y \circ b, z) = \mu_{\tilde{o}}(x, y \circ b, z)$$

olduğundan, ${\mu_{\tilde{o}}}^b(x,y,z) \geq \mu_{\tilde{o}}(x, y \circ b, z)$ elde edilir. Diğer yandan, her $y' \in G$ için

$$\mu_{\tilde{o}}(y,b,y') \wedge \mu_{\tilde{o}}(x,y',z) \leq E_G(y \circ b, y') \wedge \mu_{\tilde{o}}(x,y',z) \leq \mu_{\tilde{o}}(x, y \circ b, z)$$

olduğundan,

$${\mu_{\tilde{o}}}^b(x,y,z) = \bigvee_{y' \in G} (\mu_{\tilde{o}}(y,b,y') \wedge \mu_{\tilde{o}}(x,y',z)) \leq \mu_{\tilde{o}}(x, y \circ b, z) \ ,$$

dolayısıyla ${\mu_{\tilde{o}}}^b(x,y,z) = \mu_{\tilde{o}}(x, y \circ b, z)$ 'dir. □

Sonuç 2.1.24 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $b \in G$ için

$$\tilde{o}^b : G \times G \rightsquigarrow G \ , \quad {\mu_{\tilde{o}}}^b(x,y,z) := \bigvee_{y' \in G} \mu_{\tilde{o}}(b,y,y') \wedge \mu_{\tilde{o}}(x,y',z)$$

olmak üzere, eğer $\tilde{o}$ üçüncü girdide geçişli ise, ${\mu_{\tilde{o}}}^b(x,y,z) = \mu_{\tilde{o}}(x, b \circ y, z)$ 'dir.

İspat: Bunun ispatı, Önerme 2.1.23 'ün ispatına benzer şekilde yapılabilir. □

2.2. Bulanık Altgruplar

$< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olmak üzere bundan sonraki gösterimlerimizde; her $a, b, c, d \in A$ için

$$E_A : A \times A \longrightarrow [0,1] \quad \text{ve} \quad E_{A\times A} : (A \times A) \times (A \times A) \longrightarrow [0,1]$$

belirtisiz eşitlikleri, sırasıyla,

$$E_A(a,b) := E_G(a,b) \quad \text{ve} \quad E_{A\times A}((a,b),(c,d)) := E_{G\times G}((a,b),(c,d))$$

ve $\mu_{\tilde{o}|_{A\times A\times A}}(a,b,c) := \mu_{\tilde{o}}(a,b,c)$ olarak kabul edilecektir (eğer herhangi bir karışıklığa neden olmayacaksa da, $\mu_{\tilde{o}|_{A\times A\times A}}$ gösterimi yerine kısaca $\mu_{\tilde{o}}$ gösterimi kullanılacaktır)

Bu bilgilerin ışığı altında, aşağıda bulanık altgrup tanımına ve bu tanımın sağladığı bazı önemli özelliklere yer verilmektedir.

Tanım 2.2.1 (Demirci 1999-b) $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $\emptyset \neq A \subseteq G$ öyle ki A, $\tilde{o}$ bulanık ikili işlemine göre bulanık kapalı ve $< A, \tilde{o}|_{A\times A\times A} >$ bir bulanık grup ise, A 'ya G 'nin bir bulanık altgrubudur denir.

Önerme 2.2.2 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) $\tilde{o}|_{A\times A\times A}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlemdir.

(ii) A, $\tilde{o}$ işlemine göre bulanık kapalıdır.

İspat (i)$\Longrightarrow$ (ii) : $a, b \in A$ ve $c \in G$ için $\mu_{\tilde{o}}(a,b,c) = 1$ olsun. $\tilde{o}|_{A\times A\times A}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlem olduğu için öyle bir $d \in A$ vardır ki,

$$\mu_{\tilde{o}|_{A\times A\times A}}(a,b,d) = 1 = \mu_{\tilde{o}}(a,b,d).$$

Diğer yandan; $\tilde{o}$, G üzerinde bir bulanık ikili işlem ve $\mu_{\tilde{o}}(a,b,c) = 1 = \mu_{\tilde{o}}(a,b,d)$ olduğu için, (F-2) özelliği gereğince, $c = d$, yani $c \in A$ olmalıdır.

(ii)$\Longrightarrow$ (i) : (F-2) özelliği her $x, y, z, a, b, c \in G$ için sağlandığından, x, y, z, $a, b, c \in A$ için de sağlanır. Ayrıca, $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup olduğundan her $a, b \in A$ için öyle bir $c \in G$ vardır ki, $\mu_{\tilde{o}}(a,b,c) = 1$ 'dir. Bulanık kapalılık özelliği gereğince de, $c \in A$ olmalıdır. Bu nedenle, $\tilde{o}|_{A\times A\times A}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlemdir. □

Teorem 2.2.3 (Demirci 1999-b) $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler denktir:

(i) A, G 'nin bir bulanık altgrubudur,

(ii) $\forall a, b \in A, \forall c \in G$ için $\mu_{\tilde{o}}(a, b^{-1}, c) = 1 \Longrightarrow c \in A$ 'dır.

Teorem 2.2.4 (Demirci 1999-b) $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler denktir:

(i) A, G 'nin bir bulanık altgrubudur.

(ii) A, $\tilde{o}$ işlemine göre bulanık kapalı ve her $a \in A$ için $a^{-1} \in A$ 'dır

Sonuç 2.2.5 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $\emptyset \neq A \subseteq G$ ise, aşağıdakiler denktir:

(i) A , G 'nin bir bulanık altgrubudur.

(ii) $\tilde{o}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlem ve her $a \in A$ için $a^{-1} \in A$ 'dır.

İspat: Bunun ispatı, Önerme 2.2.2 ve Teorem 2.2.4 yardımıyla kolayca elde edilebilir. □

Sonuç 2.2.6 (Demirci 1999-b) $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup ve $\{A_j \ : \ j \in J\}$ ailesi G 'nin bulanık altgruplarının boş olmayan bir ailesiyse, $\bigcap\limits_{j \in J} A_j$ de G 'nin bir bulanık altgrubudur.

Tanım 2.2.7 (Demirci 1999-b) $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $\emptyset \neq A \subseteq G$ ve $\{A_j \ : \ j \in J\}$ de A 'yı içeren G 'nin bütün bulanık altgruplarının ailesi olsun. Bu durumda, $\bigcap\limits_{j \in J} A_j$ 'ye G içinde A 'nın ürettiği bulanık altgrup denir ve $< A >$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.8 (Demirci 1999-b) $< G, \tilde{o} >$ ve $< H, \tilde{\star} >$ iki bulanık yarıgrup ve $\Phi : G \to H$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\mu_{\tilde{o}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{\star}}(\Phi(a), \Phi(b), \Phi(c)), \quad \forall a, b, c \in G$$

ise, Φ, $< G, \tilde{o} >$'dan $< H, \tilde{\star} >$ 'ya bir bulanık homomorfizmdir denir.

Önerme 2.2.9 (Demirci 2002) $< G, \tilde{\circ} >$ ve $< H, \tilde{\star} >$ bulanık gruplar ve Φ, $< G, \tilde{\circ} >$'dan $< H, \tilde{\star} >$ 'ya bir bulanık homomorfizm ise, Φ, $< G, \circ >$'dan $< H, \star >$ 'a bir homomorfizmdir.

Aşağıdaki örnek, Önerme 2.2.9 'daki ifadenin tersinin her zaman için doğru olmayabileceğini göstermektedir:

Örnek 2.2.10 $< G, \tilde{\circ} >$, Örnek 2.1.4 'de tanımlandığı gibi ($\alpha > 0$ alınarak); $< G, \tilde{\star} >$ da, Örnek 2.1.4 'de α yerine $\frac{\alpha}{2}$ alınarak elde edilen bulanık gruplar ve $\Phi : G \longrightarrow G$ birim fonksiyon olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda, Φ bir klasik homomorfizm olur, fakat uygun $a, b, c \in G$ için

$$\alpha = \mu_{\tilde{\circ}}(a, b, c) \not\leq \mu_{\tilde{\star}}(\Phi(a), \Phi(b), \Phi(c)) = \mu_{\tilde{\star}}(a, b, c) = \frac{\alpha}{2}$$

olacağından, Φ bir bulanık homomorfizm olamaz.

Önerme 2.2.9 'daki ifadenin tersinin hangi koşullar altında sağlanacağı (Demirci 2002) 'de verilmiştir.

Önerme 2.2.11 (Demirci 1999-b) $< G, \tilde{\circ} >$ ve $< H, \tilde{\star} >$ iki bulanık grup ve $\Phi : G \to H$ bir bulanık homomorfizm olsun. Bu takdirde,

(i) e_G ve e_H sırasıyla $< G, \tilde{\circ} >$ ve $< H, \tilde{\star} >$ 'nın birim elemanları olmak üzere $\Phi(e_G) = e_H$ 'dir.

(ii) Her $a \in G$ için $\Phi(a)^{-1} = \Phi(a^{-1})$ 'dir.

Tanım 2.2.12 (Demirci 1999-b) $< G, \tilde{\circ} >$ ve $< H, \tilde{\star} >$ iki bulanık grup olsun.

(i) $\Phi : G \to H$ bir bulanık homomorfizm olmak üzere $\{g \in G \ : \ \Phi(g) = e_H \}$ klasik kümesine Φ 'nin bulanık çekirdeği denir ve $Çek_b\Phi$ ile gösterilir.

(ii) $f : G \to H$ bir fonksiyon olmak üzere, eğer her $a, b \in G$ için $E_H(f(a), f(b)) \leq E_G(a, b)$ ise f fonksiyonu, E_G ve E_H 'ye göre, bulanık bire-bir (vague injective) fonksiyondur denir.

Klasik durumda bir bulanık bire-bir fonksiyonun bir bire-bir fonksiyon olduğu kolayca görülebilir.

Önerme 2.2.13 (Demirci 1999-b) $< G, \tilde{o} >$, $< H, \tilde{\star} >$ bulanık gruplar, $\Phi : G \to H$ bir bulanık homomorfizm ve e_G de $< G, \tilde{o} >$ 'nın birim elemanı olsun. Bu takdirde,

(i) Φ bire-bir $\Longleftrightarrow$ $Çek_b\Phi = \{e_G\}$.

(ii) $\tilde{o}$ bulanık ikili işlemi birinci girdide geçişli, Φ bulanık bire-bir ve örten bir fonksiyon ise, $\Phi^{-1} : H \to G$ bir bulanık homomorfizmdir.

Tanım 2.2.14 $< G, \tilde{o} >$ ve $< H, \tilde{\star} >$ bulanık yarıgruplar ve $\Phi : G \to H$ bir bulanık homomorfizm olsun. Eğer, Φ bulanık bire-bir, örten ve $\Phi^{-1} : H \to G$ de bir bulanık homomorfizm ise, $\Phi : G \to H$ bir bulanık izomorfizmdir denir.

Tanım gereği, $\Phi : G \to H$ bir bulanık izomorfizm ise, Önerme 2.2.9 'dan Φ bir homomorfizmdir. Ayrıca, Tanım 2.2.12 gereğince Φ bir bire-bir fonksiyondur, Φ 'nin örten olduğu verildiğine göre de $\Phi : G \to H$ bir izomorfizmdir.

Aşağıdaki önerme ile, klasik bir izomorfizmin hangi koşullar altında bir bulanık izomorfizm olacağı incelenmektedir:

Önerme 2.2.15 $< G, \tilde{o} >$ ve $< H, \tilde{\star} >$ bulanık gruplar, $\tilde{o}$ ve $\tilde{\star}$, sırasıyla G ve H üzerinde birinci geçişlilik özelliğine sahip olsun. Eğer, $\Phi : G \to H$, her $a, b \in G$ için $E_G(a,b) = E_H(\Phi(a), \Phi(b))$ olan örten bir homomorfizm ise, $\Phi : G \to H$ bir bulanık izomorfizmdir.

İspat: Verilen özellikler gereği, Φ, $< G, o >$ 'dan $< H, \star >$ 'a; Φ^{-1} de $< H, \star >$ 'dan $< G, o >$ 'ya klasik izomorfizmdir. Dolayısıyla, (Demirci 2002) 'deki Teorem 5.13 gereği Φ ve Φ^{-1} bulanık homomorfizmlerdir. Diğer yandan, her $a, b \in G$ için $E_G(a,b) = E_H(\Phi(a), \Phi(b))$ ve Φ örten olduğundan, Φ, bir bulanık izomorfizmdir. □

Sonuç 2.2.16 $< G, \tilde{o} >$ ve $< H, \tilde{\star} >$ bulanık gruplar, $\Phi : G \to H$ bulanık bire-bir, örten bir bulanık homomorfizm ve $\tilde{o}$ bulanık ikili işlemi birinci girdide geçişli ise, Φ bir bulanık izomorfizmdir.

İspat: Tanım 2.2.14 ve Önerme 2.2.13.(ii) gereğince ispat açıktır. □

Tanım 2.2.17 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, her $a, x, y \in G$ için

$$M^{\tilde{o}}_{(a,.,.)} : G \rightsquigarrow G \ , \ M^{\tilde{o}}_{(a,.,.)}(x, y) := \mu_{\tilde{o}}(a, x, y)$$

$$M^{\tilde{o}}_{(.,a,.)} : G \rightsquigarrow G \ , \ M^{\tilde{o}}_{(.,a,.)}(x, y) := \mu_{\tilde{o}}(x, a, y)$$

olmak üzere; $M^{\tilde{o}}_{(a,.,.)}$ ve $M^{\tilde{o}}_{(.,a,.)}$, G üzerinde kuvvetli belirtisiz fonksiyonlardır. Burada; $M^{\tilde{o}}_{(a,.,.)}$ 'ya $< G, \tilde{o} >$ 'nın bir sol dönüşümü, $M^{\tilde{o}}_{(.,a,.)}$ 'ya da $< G, \tilde{o} >$ 'nın bir sağ dönüşümü denir. Ayrıca,

$LT(G, \tilde{o}) := \{M^{\tilde{o}}_{(a,.,.)} : \ a \in G\}$ kümesi G 'nin sol dönüşümler uzayı ,

$RT(G, \tilde{o}) := \{M^{\tilde{o}}_{(.,a,.)} : \ a \in G\}$ kümesi G 'nin sağ dönüşümler uzayı

olarak adlandırılır.

Önerme 2.2.18 Tanım 2.2.17 'deki gösterimler kullanılmak üzere; eğer

$$\tilde{\bullet} : LT(G, \tilde{o}) \times LT(G, \tilde{o}) \rightsquigarrow LT(G, \tilde{o}) \ , \ \mu_{\tilde{\bullet}}(M^{\tilde{o}}_{(a,.,.)}, M^{\tilde{o}}_{(b,.,.)}, M^{\tilde{o}}_{(c,.,.)}) := \mu_{\tilde{o}}(a, b, c)$$

$$E_{LT(G,\tilde{o})} : LT(G, \tilde{o}) \times LT(G, \tilde{o}) \longrightarrow [0, 1], E_{LT(G,\tilde{o})}(M^{\tilde{o}}_{(a,.,.)}, M^{\tilde{o}}_{(b,.,.)}) := E_G(a, b)$$

$$E_{LT(G,\tilde{o}) \times LT(G,\tilde{o})}((M^{\tilde{o}}_{(a,.,.)}, M^{\tilde{o}}_{(b,.,.)}), (M^{\tilde{o}}_{(c,.,.)}, M^{\tilde{o}}_{(d,.,.)})) := E_{G \times G}((a, b), (c, d))$$

ise, $< LT(G, \tilde{o}), \tilde{\bullet} >$ bir bulanık gruptur. Ayrıca, $< G, \tilde{o} >$ abelyen bulanık grup ise, $< LT(G, \tilde{o}), \tilde{\bullet} >$ da abelyendir.

İspat:

$$R := \mu_{\tilde{\bullet}}(M^{\tilde{o}}_{(a,.,.)}, M^{\tilde{o}}_{(b,.,.)}, M^{\tilde{o}}_{(c,.,.)}) = \mu_{\tilde{o}}(a, b, c),$$

$$S := \mu_{\tilde{\bullet}}(M^{\tilde{o}}_{(x,.,.)}, M^{\tilde{o}}_{(y,.,.)}, M^{\tilde{o}}_{(z,.,.)}) = \mu_{\tilde{o}}(x, y, z),$$

$$T := E_{LT(G,\tilde{o}) \times LT(G,\tilde{o})}((M^{\tilde{o}}_{(a,.,.)}, M^{\tilde{o}}_{(b,.,.)}), (M^{\tilde{o}}_{(x,.,.)}, M^{\tilde{o}}_{(y,.,.)})) = E_{G \times G}((a, b), (x, y))$$

olarak tanımlandığında; $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup olduğu için,

$$R \wedge S \wedge T \leq E_G(c, z) = E_{LT(G,\tilde{o})}(M^{\tilde{o}}_{(c,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(z,\cdot,\cdot)})$$

dir. Ayrıca, her $M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(b,\cdot,\cdot)} \in LT(G, \tilde{o})$ için öyle bir $c \in G$ vardır ki,

$$\mu_{\tilde{o}}(a, b, c) = 1 = \mu_{\tilde{\bullet}}(M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(b,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(c,\cdot,\cdot)})$$

olduğundan; $\tilde{\bullet}$, $LT(G, \tilde{o})$ üzerinde bir bulanık ikili işlemdir. $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup olduğu için $\tilde{\bullet}$ 'nın bulanık birleşme özelliğine sahip olduğu açıktır ve e, $< G, \tilde{o} >$ 'nın birim elemanı olmak üzere,

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(e,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}) = \mu_{\tilde{o}}(a, e, a) = 1 = \mu_{\tilde{o}}(e, a, a) = \mu_{\tilde{\bullet}}(M^{\tilde{o}}_{(e,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)})$$

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(a^{-1},\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(e,\cdot,\cdot)}) = \mu_{\tilde{o}}(a, a^{-1}, e) = 1 = \mu_{\tilde{\bullet}}(M^{\tilde{o}}_{(a^{-1},\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(e,\cdot,\cdot)})$$

olduğundan $< LT(G, \tilde{o}), \tilde{\bullet} >$ bir bulanık gruptur. Eğer, $< G, \tilde{o} >$ bir abelyen bulanık grup ise,

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{\bullet}}(M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(b,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(c,\cdot,\cdot)}) \ \wedge \ \mu_{\tilde{\bullet}}(M^{\tilde{o}}_{(b,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(d,\cdot,\cdot)}) &= \mu_{\tilde{o}}(a, b, c) \wedge \mu_{\tilde{o}}(b, a, d) \\ &\leq E_G(c, d) = E_{LT(G,\tilde{o})}(M^{\tilde{o}}_{(c,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(d,\cdot,\cdot)}) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanacağından $< LT(G, \tilde{o}), \tilde{\bullet} >$ bir abelyen bulanık gruptur. □

Bu bilgilerin ışığı altında aşağıdaki önerme kolayca ispatlanabilir.

Önerme 2.2.19 $f :< G, \tilde{o} > \longrightarrow < LT(G, \tilde{o}), \tilde{\bullet} >$ öyle ki, $f(a) := M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}$ dönüşümü bir bulanık izomorfizmdir.

İspat: Her $a, b, c \in G$ için

$$\mu_{\tilde{o}}(a, b, c) = \mu_{\tilde{\bullet}}(M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(b,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(c,\cdot,\cdot)}) = \mu_{\tilde{\bullet}}(f(a), f(b), f(c))$$

'dir. Ayrıca, $E_{LT(G,\tilde{o})}$'nın tanımı gereğince $E_{LT(G,\tilde{o})}(M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(b,\cdot,\cdot)}) = E_G(a, b)$ olduğundan; f, bulanık bire-bir bir dönüşümdür ve f 'nin örten olduğu açıktır. Bu nedenle,

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(b,\cdot,\cdot)}, M^{\tilde{o}}_{(c,\cdot,\cdot)}) = \mu_{\tilde{o}}(a, b, c) = \mu_{\tilde{o}}(f^{-1}(M^{\tilde{o}}_{(a,\cdot,\cdot)}), f^{-1}(M^{\tilde{o}}_{(b,\cdot,\cdot)}), f^{-1}(M^{\tilde{o}}_{(c,\cdot,\cdot)}))$$

olacağından, f bir bulanık izomorfizmdir. □

Yukarıda sol dönüşümler uzayı için elde edilen önerme ve sonuçların benzerleri sağ dönüşümler uzayı için de elde edilebilir. Bu nedenle,

$$f :< LT(G,\tilde{o}), \tilde{\bullet} > \longrightarrow < RT(G,\tilde{o}), \tilde{\star} > , \; f(M^{\tilde{o}}_{(a,\,,)}) := M^{\tilde{o}}_{(\,,a,)}$$

dönüşümünün bir bulanık izomorfizm olduğu kolayca görülebilir (burada; $\tilde{\star}$, $RT(G,\tilde{o})$ üzerinde $\mu_{\tilde{\star}}(M^{\tilde{o}}_{(\,,a,)}, M^{\tilde{o}}_{(\,,b,)}, M^{\tilde{o}}_{(\,,c,)}) := \mu_{\tilde{o}}(a,b,c)$ biçiminde tanımlanan bulanık ikili işlemdir).

Teorem 2.2.20 (Demirci 1999-b) $< G,\tilde{o} >$ ve $< H,\tilde{\star} >$ iki bulanık grup ve $\Phi : G \to H$ bir bulanık homomorfizm olsun. Bu durumda,

(i) $Çek_b\Phi$ kümesi G 'nin bir bulanık altgrubudur.

(ii) A , G 'nin bir bulanık altgrubu ise, $\Phi(A)$ da H 'nin bir bulanık altgrubudur.

(iii) B , H 'nin bir bulanık altgrubu ise, $\Phi^{-1}(B)$ de G 'nin bir bulanık altgrubudur.

Aşağıda, Tanım 2.2.1 'in bir genellemesi olan ve bundan sonraki tanımlarda taban teşkil edecek olan, ikinci bir bulanık altgrup tanımına yer verilmektedir:

Tanım 2.2.21 $< G,\tilde{o} >$ bir bulanık grup , $\emptyset \neq A \subseteq G$ ve $\tilde{\odot}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlem olsun. Eğer her $a,b,c \in A$ için $\mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{o}}(a,b,c)$ ve $< A, \tilde{\odot}, E_{A\times A}, E_A >$ bir bulanık grup ise, $< A,\tilde{\odot} >$ 'ya, $< G,\tilde{o} >$ 'nın bir bulanık altgrubudur denir, $< A,\tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G,\tilde{o} >$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.1 'e göre eğer, A, $< G,\tilde{o} >$ 'nın bir bulanık altgrubu ise, $< A,\tilde{o} > \overset{v.a}{\leq} < G,\tilde{o} >$ olacağından; Tanım 2.2.21 'in Tanım 2.2.1 'in bir bir genellemesi olduğu elde edilir.

$< G,\tilde{o} >$ bir bulanık grup ve $< A,\tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G,\tilde{o} >$ ise, $< A,\odot > = < A,o >$ ve dolayısıyla $< A,\odot >$ 'nın $< G,o >$ 'nun bir klasik altgrubu, yani

$< A, \odot > \leq < G, \circ >$ olacağı açıktır. Bu nedenle, bulanık altgrupları klasik gruplara indirgendiğinde, bulanık altgrup kavramıyla klasik altgrup kavramının birbirine karşılık geldiği görülmektedir.

$< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup ve $< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$ ise, e_A, e_G sırasıyla, $< A, \tilde{\odot} >$ ve $< G, \tilde{\circ} >$ 'nın birim elemanları olmak üzere $e_A = e_G$ 'dir. Ayrıca, $x \in A$ için x_A^{-1} ve x_G^{-1} sırasıyla x 'in $< A, \tilde{\odot} >$ ve $< G, \tilde{\circ} >$ içindeki tersleri olmak üzere $x_A^{-1} = x_G^{-1}$ 'dir.

Örnek 2.2.22 $G := \mathbf{Z}$, $A := 2\mathbf{Z}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ için $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha < 1$,

$$E_{\mathbf{Z}} : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \longrightarrow [0,1] \ , \ E_{\mathbf{Z}}(u,v) := \begin{cases} 1 & , \ u = v \\ \alpha & , \ u \neq v \end{cases}$$

$E_{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}} := E^*_{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$,

$$E_{2\mathbf{Z}} : 2\mathbf{Z} \times 2\mathbf{Z} \longrightarrow [0,1] \ , \ E_{2\mathbf{Z}}(m,n) := E_{\mathbf{Z}}(m,n),$$

$E_{2\mathbf{Z}\times 2\mathbf{Z}} := E^*_{2\mathbf{Z}\times 2\mathbf{Z}}$, her $x, y, z \in \mathbf{Z}$ için

$$\mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z) := \begin{cases} 1 & , \ x + y = z \\ \beta & , \ x + y \neq z \end{cases}$$

$\forall x, y, z \in 2\mathbf{Z}$ için

$$\mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z) := \begin{cases} 1 & , \ x + y = z \\ \gamma & , \ x + y \neq z \end{cases}$$

olsun. $2\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}$ ve her $a, b, c \in 2\mathbf{Z}$ için $\mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c)$ olduğundan, $< 2\mathbf{Z}, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < \mathbf{Z}, \tilde{\circ} >$ olması için $< 2\mathbf{Z}, \tilde{\odot} >$ ve $< \mathbf{Z}, \tilde{\circ} >$ 'nın birer bulanık grup olduğunu göstermek yeterlidir.

$x, y, z, u, v, t \in \mathbf{Z}$ olmak üzere; $E_{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}((x,y),(u,v)) = 1$ ve $z \neq t$ için ya $\mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z) \neq 1$ ya da $\mu_{\tilde{\circ}}(x,y,t) \neq 1$ 'dir. Bu nedenle;

$$\mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(u,v,t) \wedge E_{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}((x,y),(u,v)) \leq \beta \leq \alpha \leq E_{\mathbf{Z}}(z,t)$$

ve $\mu_{\tilde{\circ}}(x, y, x + y) = 1$ olduğundan $\tilde{\circ}$, $\mathbf{Z}$ üzerinde bir bulanık ikili işlemdir. Ayrıca; her $a, b, c, d, m, q, w \in \mathbf{Z}$ için $m \neq w$ ise, $b + c = d$, $a + d = m$, $a + b = q$, $q + c = w$ eşitliklerden en az birisi sağlanmayacağından

$$\mu_{\tilde{\circ}}(b,c,d) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(a,d,m) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,q) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(q,c,w) \leq \beta \leq \alpha \leq E_{\mathbf{Z}}(m,w)$$

olmalıdır. Dolayısıyla, $<\mathbf{Z},\tilde{\circ}>$ bir bulanık yarıgruptur.

Her $x\in\mathbf{Z}$ için $\mu_{\tilde{\circ}}(x,0,x)=1=\mu_{\tilde{\circ}}(0,x,x)$ ve $\mu_{\tilde{\circ}}(x,-x,0)=1=\mu_{\tilde{\circ}}(-x,x,0)$ olduğu için $<\mathbf{Z},\tilde{\circ}>$ bir bulanık gruptur.

Benzer şekilde $<2\mathbf{Z},\tilde{\odot}>$ 'nın bir bulanık grup olduğu görülebilir. Bu nedenle, $<2\mathbf{Z},\tilde{\odot}>\overset{v.a}{\leq}<\mathbf{Z},\tilde{\circ}>$ olmalıdır.

Önerme 2.2.23 $<G,\tilde{\circ}>$ bir bulanık grup, $<A,\tilde{\odot}>\overset{v.a}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$ ve $<B,\tilde{\bullet}>\overset{v.a}{\leq}<A,\tilde{\odot}>$ olsun. Bu durumda, $<B,\tilde{\bullet}>\overset{v.a}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$ 'dır.

İspat: $<A,\tilde{\odot}>\overset{v.a}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$ ve $<B,\tilde{\bullet}>\overset{v.a}{\leq}<A,\tilde{\odot}>$ ise, $B\subseteq A\subseteq G$, her $x,y,z\in B$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,z)\leq\mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z)\leq\mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z)$ 'dir. Ayrıca, $<B,\tilde{\bullet}>$ bir bulanık grup olduğu için de, $<B,\tilde{\bullet}>\overset{v.a}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$ olmalıdır. □

Önerme 2.2.24 $<G,\tilde{\circ}>$ bir bulanık grup, $<A,\tilde{\odot}>\overset{v.a}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$, $<B,\tilde{\bullet}>\overset{v.a}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$ ve $\tilde{\star}$, $A\cup B$ üzerinde bir bulanık ikili işlem olsun. Bu durumda,

$$<A\cup B,\tilde{\star}>\overset{v.a}{\leq}<G,\tilde{\circ}>\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{ll}\textbf{(i)} & \mu_{\tilde{\star}}(a,b,c)\leq\mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c)\ ,\ \forall a,b,c\in A\cup B\\ \textbf{(ii)} & A\subseteq B \text{ veya } B\subseteq A.\end{array}$$

İspat ($\Longrightarrow$): $<A\cup B,\tilde{\star}>\overset{v.a}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$ olduğundan her $x,y,z\in A\cup B$ için $\mu_{\tilde{\star}}(a,b,c)\leq\mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c)$ 'dir. Ayrıca, $<A,\odot>\leq<G,\circ>$, $<B,\bullet>\leq<G,\circ>$ ve $<A\cup B,\star>\leq<G,\circ>$ olduğundan, klasik cebirden, $A\subseteq B$ veya $B\subseteq A$ olmalıdır (Karakaş 1998).

($\Longleftarrow$): Genelliği kaybetmeden, $B\subseteq A$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $\tilde{\star}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlem olur öyle ki, her $x,y,z\in A$ için $\mu_{\tilde{\star}}(x,y,z)\leq\mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z)$ 'dir. Bu nedenle birleşme özelliği sağlanır. Ayrıca, $<A,\tilde{\odot}>\overset{v.a}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$ olduğu için $e\in A$ ve her $x\in A$ için $x^{-1}\in A$ olduğundan

$$<A\cup B,\tilde{\star}>=<A,\tilde{\star}>\overset{v.a}{\leq}<G,\tilde{\circ}>$$

olmalıdır. □

Sonuç 2.2.25 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$, $< B, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq}$ $< G, \tilde{o} >$ olsun. Bu durumda,

$$< A \cup B, \tilde{o} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} > \Longleftrightarrow A \subseteq B \text{ veya } B \subseteq A$$

'dır.

İspat: İspat, Önerme 2.2.24 'ten kolayca elde edilebilir. □

Aşağıdaki Önerme 2.2.26, Sonuç 2.2.27 ve Önerme 2.2.28 'den; Tanım 2.2.1 'in Tanım 2.2.21 'in bir özel durumu olduğu elde edilmektedir:

Önerme 2.2.26 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Bu durumda $\tilde{\odot}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlem olmak üzere aşağıdaki denklik sağlanır:

$$< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} > \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \textbf{(i)} & \mu_{\tilde{o}}(a, b^{-1}, c) = 1 \Longrightarrow c \in A \ , \ \forall a, b \in A \ , \ \forall c \in G, \\ \textbf{(ii)} & \mu_{\tilde{\odot}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{o}}(a, b, c) \ , \ \forall a, b, c \in A. \end{array}$$

İspat ($\Longrightarrow$): $a, b \in A$ ve $c \in G$ için $\mu_{\tilde{o}}(a, b^{-1}, c) = 1$ olsun. $b \in A$ için $b^{-1} \in A$ ve $\tilde{\odot}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlem olduğundan öyle bir $s \in A$ vardır ki, $\mu_{\tilde{o}}(a, b^{-1}, s) = 1$ 'dir. Bu durumda, (F-2) özelliğinden

$$1 = \mu_{\tilde{o}}(a, b^{-1}, s) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a, b^{-1}, c) \wedge E_{G \times G}((a, b^{-1}), (a, b^{-1})) \leq E_G(s, c),$$

yani $c = s \in A$ 'dır. Diğer yandan, $< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ olduğundan (ii) özelliğinin sağlanacağı açıktır.

($\Longleftarrow$): $< A, \tilde{\odot} >$ 'nın bir bulanık grup olduğunu göstermek ispatı bitirir. Bulanık birleşme özelliği G 'nin tüm elemanları için sağlandığından A 'nın elemanları için de sağlanır. $a \in A$ ve e, $< G, \tilde{o} >$ 'nın birim elemanı olmak üzere, $\mu_{\tilde{o}}(a, a^{-1}, e) = 1$ olduğundan $e \in A$ ve $\mu_{\tilde{o}}(e, a^{-1}, a^{-1}) = 1$ olduğu için de, $a^{-1} \in A$ 'dır. Bu nedenle, $< A, \tilde{\odot} >$ bir bulanık grup, dolayısıyla $< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ 'dır. □

Sonuç 2.2.27 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Bu durumda,

$$< A, \tilde{o} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} > \Longleftrightarrow \text{Her } a, b \in A \ , \ c \in G \text{ için } \mu_{\tilde{o}}(a, b^{-1}, c) = 1 \text{ ise, } c \in A \text{ 'dır.}$$

İspat: Bunun ispatı Önerme 2.2.26 'dan kolayca görülebilir. □

Önerme 2.2.28 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. Bu durumda; $\tilde{\odot}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlem olmak üzere aşağıdaki denklik sağlanır:

$$< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} > \iff \begin{array}{ll} (i) & \forall x \in A \text{ için } x^{-1} \in A \\ (ii) & \mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{o}}(a,b,c)\ ,\ \forall a,b,c \in A \end{array}$$

İspat $(\Longrightarrow)$: İspatın bu yönü, Tanım 2.2.21 gereği, aşikar.

$(\Longleftarrow)$: Tanım 2.2.21 gereği $< A, \tilde{\odot} >$ 'nın bir bulanık altgrup, hipotez gereği de $e \in A$ olduğunu göstermek ispatı bitirir. $x \in A$ için $x^{-1} \in A$ olduğundan, öyle bir $s \in A$ vardır ki, $\mu_{\tilde{\bullet}}(x, x^{-1}, s) = 1 \leq \mu_{\tilde{o}}(x, x^{-1}, s)$ 'dir. Bu da, (F-2) özelliği gereği, $s = e$, yani $e \in A$ demektir. □

Sonuç 2.2.29 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $\emptyset \neq A \subseteq G$ ve $\tilde{o}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlem ise aşağıdaki denklik sağlanır:

$$< A, \tilde{o} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} > \iff \forall x \in A \text{ için } x^{-1} \in A.$$

İspat: Önerme 2.2.28 'den kolayca görülebilir. □

Sonuç 2.2.30 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup; e, G 'nin birim elemanı ve $\tilde{\bullet}$, G üzerinde her $a, b, c \in G$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{o}}(a,b,c)$ koşulunu sağlayan bir bulanık ikili işlem olsun. Bu durumda, $< \{e\}, \tilde{o} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ ve $< G, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ 'dır.

İspat : $e^{-1} = e \in \{e\}$ ve her $x \in G$ için $x^{-1} \in G$ olduğundan, Önerme 2.2.28 gereği $< \{e\}, \tilde{o} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ ve $< G, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ 'dır. □

Sonuç 2.2.31 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, her $j \in J$ için $< A_j, \tilde{\bullet}_j > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ olsun. Eğer $\tilde{\star}$, $\bigcap_{j \in J} A_j$ üzerinde, her $x, y, z \in \bigcap_{j \in J} A_j$ için $\mu_{\tilde{\star}}(x,y,z) \leq \bigwedge_{j \in J} \mu_{\tilde{\bullet}_j}(x,y,z)$ koşulunu sağlayan bir bulanık ikili işlem ise, $< \bigcap_{j \in J} A_j, \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < A_j, \tilde{\bullet}_j >$ 'dir.

İspat: Önerme 2.2.28 'deki (i) ve (ii) koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir:

(i) $x \in \bigcap_{j\in J} A_j$ ise, $x \in A_j (\forall j \in J)$ 'dir ve $< A_j, \tilde{\bullet}_j > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ olduğu için de $x^{-1} \in A_j$, dolayısıyla, $x^{-1} \in \bigcap_{j\in J} A_j$ 'dir.

(ii) $\tilde{\star}$ 'ın tanımı gereği, her $x, y, z \in \bigcap_{j\in J} A_j$ için $\mu_{\tilde{\star}}(x,y,z) \leq \mu_{\tilde{\bullet}_j}(x,y,z)$ 'dir. □

Sonuç 2.2.32 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$, $< B, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ ve $\tilde{\star}$, $A \cap B$ üzerinde bir bulanık ikili işlem olsun. Eğer, her $x, y, z \in A \cap B$ için $\mu_{\tilde{\star}}(x,y,z) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,z) \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z)$ ise, $< A\cap B, \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < A, \tilde{\odot} >$ ve $< A\cap B, \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < B, \tilde{\bullet} >$ 'dır.

İspat: Bunun ispatı Sonuç 2.2.31 'in özel bir durumudur. □

Sonuç 2.2.33 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup; A, G 'nin boş kümeden farklı sonlu elemanlı bir altkümesi ve $\tilde{\odot}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlem olsun. Bu durumda aşağıdaki denklik sağlanır:

$$< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} > \iff \text{her } a, b, c \in A \text{ için } \mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{o}}(a,b,c).$$

İspat ($\Longrightarrow$): Aşikar.

($\Longleftarrow$): $\tilde{\odot}$, A üzerinde bir bulanık ikili işlem olduğundan, her $x, y \in A$ için $x \circ y \in A$ 'dır. Bu nedenle, $< A, \circ > \leq < G, \circ >$ 'dur (Karakaş 1998). Dolayısıyla, her $x \in A$ için $x^{-1} \in A$ olacağından, Önerme 2.2.28 gereğince, $< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ olmalıdır. □

Önerme 2.2.34 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup ve $< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ olsun. Eğer $A \subseteq B \subseteq G$, her $x \in B$ için $x^{-1} \in B$ ve

$$\tilde{\star} : B \times B \rightsquigarrow B \quad , \quad \mu_{\tilde{\star}}(x,y,z) := \begin{cases} \mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z) & , \quad x, y, z \in A \\ \mu_{\tilde{o}}(x,y,z) & , \quad \text{aksi durumda} \end{cases}$$

bir bulanık ikili işlem ise, $< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < B, \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ 'dır.

Ayrıca,

$$\tilde{\star} : B \times B \rightsquigarrow B \quad , \quad \mu_{\tilde{\star}}(x,y,z) := \begin{cases} \mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z) & , \ x,y,z \in A \\ E_G(x \odot y, z) & , \ \text{aksi durumda} \end{cases}$$

bir bulanık ikili işlem ise, yine $< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < B, \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$ 'dır.

İspat: Bunun ispatı, Önerme 2.2.28 gereğince, aşikardır. □

Önerme 2.2.35 $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup, $< G, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$ ve $< G, \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$ olsun. Bu takdirde; $< G, \tilde{\bullet} \vee \tilde{\star} >$ bulanık grubu $< G, \tilde{\circ} >$ 'nın

$$< G, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\bullet} \vee \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$$

ve

$$< G, \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\bullet} \vee \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$$

özelliğine sahip bir bulanık altgrubudur. Ayrıca, $< G, \tilde{\odot} >$ bu özelliğe sahip bir bulanık altgrup ise $< G, \tilde{\bullet} \vee \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\odot} >$ 'dır, yani $< G, \tilde{\bullet} \vee \tilde{\star} >$, $< G, \tilde{\circ} >$ 'nın istenen özelliğe sahip en küçük bulanık altgrubudur. (Burada, her $a, b, c \in G$ için $\mu_{\tilde{\bullet} \vee \tilde{\star}}(a,b,c) := (\mu_{\tilde{\bullet}} \vee \mu_{\tilde{\star}})(a,b,c) = \mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c) \vee \mu_{\tilde{\star}}(a,b,c)$ olarak tanımlanmaktadır.)

İspat: Her $a, b, c, x, y, z \in G$ için

$$\begin{aligned} (\mu_{\tilde{\bullet}} \vee \mu_{\tilde{\star}})(a,b,c) & \wedge \ (\mu_{\tilde{\bullet}} \vee \mu_{\tilde{\star}})(x,y,z) \wedge E_{G \times G}((a,b),(x,y)) \\ & \leq \ \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z) \wedge E_{G \times G}((a,b),(x,y)) \\ & \leq \ E_G(c,z) \end{aligned}$$

'dir. Ayrıca, $a, b \in G$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c) = \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) = \mu_{\tilde{\star}}(a,b,c) = 1$ olacak şekilde $c \in G$ vardır. Bu nedenle, $\mu_{\tilde{\star}}(a,b,c) \vee \mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c) = 1$ olacağından, $\tilde{\star} \vee \tilde{\bullet}$, G üzerinde bir bulanık ikili işlemdir. Bu nedenle, Önerme 2.2.28 'den

$$< G, \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\star} \vee \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$$

ve

$$< G, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\star} \vee \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$$

'dır. Kabul edelim ki, bir $< G, \tilde{\odot} >$ bulanık altgrubu için $< G, \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$ ve $< G, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$ olsun. Bu durumda, her $a, b, c \in G$ için $\mu_{\tilde{\star}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{\odot}}(a, b, c)$ ve $\mu_{\tilde{\bullet}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{\odot}}(a, b, c)$ olacağından $\mu_{\tilde{\star}\vee\tilde{\bullet}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{\odot}}(a, b, c)$, yani $< G, \tilde{\star}\vee\tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\odot} >$ olmalıdır. Bu da, istenen özelliğe sahip en küçük bulanık altgrubun $< G, \tilde{\star}\vee\tilde{\bullet} >$ olduğunu kanıtlar. □

Önerme 2.2.36 $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup ve her $j \in J$ için $< H_j, \tilde{\circ}_j > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$ olsun. Bu durumda, $< G, \circ >$ içinde $\bigcup_{j \in J} H_j$ 'nin ürettiği altgrup $H := < \bigcup_{j \in J} H_j >$ olmak üzere

$$\tilde{\bullet}_j : H \times H \rightsquigarrow H \ , \quad \mu_{\tilde{\bullet}_j}(x, y, z) := \begin{cases} \mu_{\tilde{\circ}_j}(x, y, z) & , \quad x, y, z \in H_j \\ E_G^*(x \circ y, z) & , \quad \text{aksi durumda} \end{cases}$$

ise,

$$< H_j, \tilde{\circ}_j > \overset{v.a}{\leq} < H, \bigvee_{j \in J} \tilde{\bullet}_j > \overset{v.a}{\leq} < H, \tilde{\circ} >$$

olur. Ayrıca, $< H, \tilde{\circ} >$ 'nın, her $j \in J$ için $< H_j, \tilde{\circ}_j >$ 'leri bulanık altgrup olarak kabul eden, en küçük bulanık altgrubu $< H, \bigvee_{j \in J} \tilde{\bullet}_j >$ 'dir. (Bu grup, $< H_j, \tilde{\circ}_j >$ 'lerin $< G, \tilde{\circ} >$ içinde ürettiği bulanık altgrup olarak adlandırılır.)

İspat: Önerme 2.2.28 'den $< H_j, \tilde{\circ}_j > \overset{v.a}{\leq} < H, \tilde{\bullet}_j > \overset{v.a}{\leq} < H, \tilde{\circ} >$ 'dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \bigvee_{j \in J} \mu_{\tilde{\bullet}_j}(a, b, c) \ \wedge \ \bigvee_{j \in J} \mu_{\tilde{\bullet}_j}(x, y, z) \wedge E_{G \times G}((a, b), (x, y)) & \\ \leq \ \mu_{\tilde{\circ}}(a, b, c) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(x, y, z) \wedge E_{G \times G}((a, b), (x, y)) & \\ \leq \ E_G(c, z) & \end{aligned}$$

ve $a, b \in H$ için $\bigvee_{j \in J} \mu_{\tilde{\bullet}_j}(a, b, a \circ b) = 1$ olduğundan, $\bigvee_{j \in J} \tilde{\circ}_j$, H üzerinde bir bulanık ikili işlemdir. Önerme 2.2.28 gereğince de,

$$< H_j, \tilde{\circ}_j > \overset{v.a}{\leq} < H, \bigvee_{j \in J} \tilde{\bullet}_j > \overset{v.a}{\leq} < H, \tilde{\circ} >$$

olduğu görülür.

Kabul edelim ki, $< H, \tilde{\star} >$ bir bulanık grup ve

$$< H_j, \tilde{\circ}_j > \overset{v.a}{\leq} < H, \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < H, \tilde{\circ} >$$

olsun. Bu durumda, $a, b, c \in H$ için, eğer $a, b, c \in H_j$ olacak şekilde bir $j \in J$ varsa, $\mu_{\tilde{\circ}_j}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\bullet}_j}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\star}}(a,b,c)$ ve dolayısıyla, $\bigvee_{j\in J} \mu_{\tilde{\bullet}_j}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\star}}(a,b,c)$ olacaktır. Eğer $a \circ b = c$ ise, $1 = \mu_{\tilde{\bullet}_j}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\star}}(a,b,c) = 1$ ve son olarak, eğer $a \circ b \neq c$ ise de, $0 = \mu_{\tilde{\bullet}_j}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\star}}(a,b,c)$ olacağından, $< H, \bigvee_{j\in J} \tilde{\bullet}_j > \overset{v.a}{\leq} < H, \tilde{\star} >$ elde edilir. Bu da ispatı bitirir. $\square$

Sonuç 2.2.37 $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup, $j \in J$ için H_j, H ve $\tilde{\bullet}_j$ Önerme 2.2.36 'daki gibi olsun. Bu takdirde,

$$\tilde{\star}_j : H \times H \rightsquigarrow H \ , \quad \mu_{\tilde{\star}_j}(x,y,z) := \begin{cases} \mu_{\tilde{\circ}_j}(x,y,z) & , \quad x, y, z \in H_j \\ \mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z) & , \quad \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$< H_j, \tilde{\circ}_j > \overset{v.a}{\leq} < H, \bigvee_{j\in J} \tilde{\bullet}_j > \overset{v.a}{\leq} < H, \bigvee_{j\in J} \tilde{\star}_j > \overset{v.a}{\leq} < H, \tilde{\circ} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$$

'dır.

İspat: Bunun ispatı, Önerme 2.2.36 kullanılarak, kolayca elde edilebilir. $\square$

Önerme 2.2.38 $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup ve

$$\mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>} := \{ < A, \tilde{\bullet} > : < A, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} > \}$$

olmak üzere, $\mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>}$ kümesi bulanık altgrup olma bağıntısına göre kısmi sıralı bir kümedir ve bu küme bir tam latistir.

İspat: Her $< A, \tilde{\bullet} > \in \mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>}$ için $< A, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < A, \tilde{\bullet} >$,

$< A, \tilde{\bullet} >, < B, \tilde{\star} > \in \mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>}$ için $< A, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < B, \tilde{\star} >$ ve $< B, \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < A, \tilde{\bullet} >$ ise, $< A, \tilde{\bullet} > = < B, \tilde{\star} >$,

$< A, \tilde{\bullet} >, < B, \tilde{\star} >, < C, \tilde{\odot} > \in \mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>}$ için $< A, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < B, \tilde{\star} >$ ve $< B, \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < C, \tilde{\odot} >$ ise Önerme 2.2.23 gereğince $< A, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < C, \tilde{\odot} >$ olacağından $\mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>}$ kümesi, bulanık altgrup olma bağıntısına göre, kısmi sıralı bir kümedir.

$j \in J$ için $< A_j, \tilde{\circ}_j > \in \mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>}$ olsun. Bu durumda, $A := \bigcap_{j \in J} A_j$ ve

$$\tilde{\bullet} : A \times A \rightsquigarrow A \ , \quad \mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c) := \bigwedge_{j \in J} \mu_{\tilde{\circ}_j}(a,b,c)$$

olarak tanımlandığında; $< A, \tilde{\bullet} > \in \mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>}$ ve her $j \in J$ için $< A, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < A_j, \tilde{\circ}_j >$ 'dir ve tanımı gereği bu özelliğe sahip en büyük bulanık altgrup $< A, \tilde{\bullet} >$ 'dır. Dolayısıyla, $\mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>}$ 'nın keyfi bir altkümesinin infimumu $\mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>}$ 'ya aittir.

Diğer yandan, Her $j \in J$ için $< A_j, \tilde{\circ}_j > \in \mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>}$ olsun. Bu durumda, $A :=< \bigcup_{j \in J} A_j >$ ve

$$\tilde{\bullet}_j : A \times A \rightsquigarrow A \ , \quad \mu_{\tilde{\bullet}_j}(a,b,c) := \begin{cases} \mu_{\tilde{\circ}_j}(a,b,c) & , \ a,b,c \in A_j \\ E^*_G(a \circ b, c) & , \ \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olmak üzere, her $j \in J$ için $< A_j, \tilde{\circ}_j > \overset{v.a}{\leq} < A, \bigvee_{j \in J} \tilde{\bullet}_j > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$ 'dır ve Önerme 2.2.36 gereğince, istenen özelliğe sahip en küçük bulanık altgrup $< A, \bigvee_{j \in J} \tilde{\bullet}_j >$ 'dır. Buradan, $\mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>}$ 'nın keyfi bir altkümesinin supremumunun $\mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>}$ 'ya ait olduğu görülür. ($\mathcal{S}_{<G,\tilde{\circ}>}$ 'nın en küçük ve en büyük elemanının sırasıyla, $< \{e\}, \tilde{\circ} >$ ve $< G, \tilde{\circ} >$ olduğu açıktır.) □

Tanım 2.2.39 $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup, $S \subseteq G$, $H :=< S >$; $\tilde{\star}$, S üzerinde her $a,b,c \in S$ için $\mu_{\tilde{\star}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c)$ özelliğine sahip bir belirtisiz fonksiyon ve

$$T := \{< H, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} > : \ \mu_{\tilde{\star}}(x,y,z) \leq \mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z) \ , \ \forall x,y,z \in S\}$$

olarak tanımlanmak üzere, $\tilde{\bullet} : H \times H \rightsquigarrow H$ belirtisiz fonksiyonu şöyle tanımlansın: her $x,y,z \in H$ için

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,z) := \bigwedge \{\mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z) : < H, \tilde{\odot} > \in T\}.$$

Bu durumda, $< H, \tilde{\bullet} >$ bulanık altgrubu $(S, \tilde{\star})$ 'nın $< G, \tilde{\circ} >$ içinde ürettiği bulanık altgrup olarak adlandırılır ve $< (S, \tilde{\star}) > =< H, \tilde{\bullet} >$ ile gösterilir.

$< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup ve $x \in G$ için $\mu_{\tilde{\circ}}(x,x,x) = \alpha$ olsun. $0 \leq \beta \leq \alpha$ olmak üzere

$$\tilde{\star} : \{x\} \times \{x\} \rightsquigarrow \{x\} \ , \ \mu_{\tilde{\star}}(x,x,x) = \beta$$

için $(\{x\},\hat{\star})$ 'nın $< G,\hat{o} >$ içinde ürettiği bulanık altgrup belirlenmek istenirse: Tanım 2.2.39 'in gösterimleriyle, $\bigcap_{\{x\}\subseteq H\leq G} H = < x >$ ve $\tilde{\bullet} :< x > \times < x > \rightsquigarrow < x >$ öyle ki, her $a,b,c \in < x >$ için

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c) = \begin{cases} 1 & , \ \mu_{\hat{o}}(a,b,c) = 1 \\ \beta & , \ \mu_{\hat{o}}(a,b,c) < 1 \text{ ve } a = b = c = x \\ 0 & , \ \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$< (\{x\},\hat{\star}) > = << x >,\tilde{\bullet} >$$

olduğu elde edilir. Burada, $\beta = 0$ olması durumunda $(\{x\},\hat{\star})$ 'ın ürettiği bulanık altgrubun; $< G,\hat{o} >$ 'nın indirgenmiş klasik grubu içinde $\{x\}$ 'in ürettiği klasik altgruba karşılık gelen bulanık altgrup olduğu görülmektedir.

Önerme 2.2.40 $< G,\hat{o} >$ bir bulanık grup, $S \subseteq G$, $H := < S >$; $\hat{\star}$, S üzerinde her $a,b,c \in S$ için $\mu_{\hat{\star}}(a,b,c) \leq \mu_{\hat{o}}(a,b,c)$ özelliğini sağlayan bir belirtisiz fonksiyon ve

$$\tilde{\bullet} : H \times H \rightsquigarrow H \ , \ \mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c) := \begin{cases} 1 & , \ \mu_{\hat{o}}(a,b,c) = 1 \\ \mu_{\hat{\star}}(a,b,c) & , \ a,b,c \in S \text{ ve } \mu_{\hat{o}}(a,b,c) < 1 \\ 0 & , \ \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda; $(S,\hat{\star})$ 'nın $< G,\hat{o} >$ içinde ürettiği bulanık altgrup $< H,\tilde{\bullet} >$ 'dır.

İspat: Bunun ispatı, Tanım 2.2.39 gereğince, aşikardır. □

Teorem 2.2.20, Tanım 2.2.21 'e göre aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

Önerme 2.2.41 $< G,\hat{o} >$, $< H,\hat{\star} >$ bulanık gruplar ve $\Phi : G \longrightarrow H$ bir bulanık homomorfizm olsun.

(a) $Çek_b\Phi$ üzerinde tanımlanan $\hat{\odot}$ bulanık ikili işlemi için

$$\mu_{\hat{\odot}}(x,y,z) \leq \mu_{\hat{o}}(x,y,z) \ , \ \forall x,y,z \in Çek_b\Phi$$

koşulu sağlanıyorsa, $< Çek_b\Phi, \tilde{\circledcirc} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ 'dır.

(b) $< A, \tilde{\circledcirc} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ ve $\tilde{\bullet}$, $\Phi(A)$ üzerinde bir bulanık ikili işlem öyle ki, her $x, y, z \in \Phi(A)$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(x, y, z) \leq \mu_{\tilde{\star}}(x, y, z)$ olsun. Bu durumda, $< \Phi(A), \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < H, \tilde{\star} >$ 'dır.

(c) $< B, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < H, \tilde{\star} >$ ve $\tilde{\circledcirc}$, $\Phi^{-1}(B)$ üzerinde bir bulanık ikili işlem öyle ki, her $x, y, z \in \Phi^{-1}(B)$ için $\mu_{\tilde{\circledcirc}}(x, y, z) < \mu_{\tilde{o}}(x, y, z)$ olsun. Bu durumda, $< \Phi^{-1}(B), \tilde{\circledcirc} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ 'dır.

İspat: İspatı yapmak için Önerme 2.2.28 'deki iki koşulun sağlandığını göstermek yeterlidir.

(a) (i) $x \in Çek_b\Phi \Longrightarrow \Phi(x) = e_H \Longrightarrow \Phi(x^{-1}) = (\Phi(x))^{-1} = e_H \Longrightarrow x^{-1} \in Çek_b\Phi$

(ii) Hipotez gereği, her $x, y, z \in Çek_b\Phi$ için $\mu_{\tilde{\circledcirc}}(x, y, z) \leq \mu_{\tilde{o}}(x, y, z)$ 'dir.

Bu nedenle, $< Çek_b\Phi, \tilde{\circledcirc} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ 'dır.

(b) (i) $x \in \Phi(A) \Longrightarrow \exists a \in A \ni \Phi(a) = x$ ve $a^{-1} \in A \Longrightarrow \Phi(a^{-1}) = x^{-1} \in \Phi(A)$

(ii) Hipotez gereği, her $x, y, z \in \Phi(A)$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(x, y, z) \leq \mu_{\tilde{\star}}(x, y, z)$ 'dır.

Bu nedenle, $< \Phi(A), \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < H, \tilde{\star} >$ 'dır.

(c) (i) $x \in \Phi^{-1}(B) \Longrightarrow \exists a \in B \ni \Phi(x) = a$ ve $a^{-1} \in B$

$$\Longrightarrow \Phi(x^{-1}) = (\Phi(x))^{-1} = a^{-1} \in B \Longrightarrow x^{-1} \in \Phi^{-1}(B).$$

(ii) Hipotez gereği, her $x, y, z \in \Phi^{-1}(B)$ için $\mu_{\tilde{\circledcirc}}(x, y, z) \leq \mu_{\tilde{o}}(x, y, z)$ 'dir.

Bu nedenle, $< \Phi^{-1}(B), \tilde{\circledcirc} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ 'dır. □

Önerme 2.2.41 'deki (b) ve (c) şıklarının tersleri her zaman için doğru olmayabilir. aşağıdaki örnek bunu kanıtlamaktadır:

Örnek 2.2.42 $G := {}^{*}\mathbf{Z}_4$; $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha < 1$ olsun. Ayrıca; $E_{\mathbf{Z}_4} : \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_4 \rightarrow [0, 1]$ öyle ki;

$$E_{\mathbf{Z}_4}(u, v) := \begin{cases} 1 & , \quad u = v \\ \alpha & , \quad u \neq v \end{cases}$$

$E_{\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_4} := E^*_{\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_4}$, $\tilde{\circ} : \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_4 \rightsquigarrow \mathbf{Z}_4$ öyle ki

$$\mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z) := \begin{cases} 1 & , \quad x+y \equiv z \ (mod\ 4) \\ \beta & , \quad x+y \not\equiv z \ (mod\ 4) \end{cases}$$

$H := \mathbf{Z}_2$; $E_{\mathbf{Z}_2}(u,v) := E_{\mathbf{Z}_4}(u,v)$, $E_{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2} := E^*_{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2}$, $\tilde{\star} : \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \rightsquigarrow \mathbf{Z}_2$ öyle ki

$$\mu_{\tilde{\star}}(x,y,z) := \begin{cases} 1 & , \quad x+y \equiv z \ (mod\ 2) \\ \gamma & , \quad x+y \not\equiv z \ (mod\ 2). \end{cases}$$

$\Phi : \mathbf{Z}_4 \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ fonksiyonu her $x \in \mathbf{Z}_4$ için $\Phi(x) = 0$ olarak tanımlansın ve $A := \{0,1\}$ olsun. Bu durumda, her $x,y,z \in \mathbf{Z}_4$ için $\mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z) \leq \mu_{\tilde{\star}}(\Phi(x),\Phi(y),\Phi(z)) = 1$ olduğundan Φ bir bulanık homomorfizmdir. Ayrıca, $\Phi(A) = \{0\} \subseteq \mathbf{Z}_2$ ve $< \Phi(A), \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < \mathbf{Z}_2, \tilde{\star} >$ 'dır. Fakat, $< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < \mathbf{Z}_4, \tilde{\circ} >$ olacak şekilde A üzerinde hiç bir $\tilde{\odot}$ bulanık ikili işlemi tanımlanamaz. Aksi durumda; öyle bir $s \in \{0,1\}$ vardır ki, $1 = \mu_{\tilde{\odot}}(1,1,s) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(1,1,s) < \mu_{\tilde{\circ}}(1,1,2) = 1$ çelişkisi elde edilir. Bu da, Teorem 2.2.11 'deki (b) şıkkının tersinin her zaman için doğru olmadığını gösterir.

$G := \mathbf{Z}_2$, $H := \mathbf{Z}_4$ ve $\alpha, \beta, \gamma, E_{\mathbf{Z}_2}, E_{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2}, E_{\mathbf{Z}_4}, E_{\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_4}$ yukarıda tanımlandığı gibi olmak üzere; $\tilde{\circ} : \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \rightsquigarrow \mathbf{Z}_2$ öyle ki;

$$\mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z) := \begin{cases} 1 & , \quad x+y \equiv z \ (mod\ 2) \\ \beta & , \quad x+y \not\equiv z \ (mod\ 2) \end{cases}$$

$\tilde{\star} : \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_4 \rightsquigarrow \mathbf{Z}_4$ öyle ki;

$$\mu_{\tilde{\star}}(x,y,z) := \begin{cases} 1 & , \quad x+y \equiv z \ (mod\ 4) \\ \gamma & , \quad x+y \not\equiv z \ (mod\ 4) \end{cases}$$

$\Phi : \mathbf{Z}_2 \longrightarrow \mathbf{Z}_4$ fonksiyonu her $x \in \mathbf{Z}_2$ için $\Phi(x) = 0$ olarak tanımlansın ve $B := \{0,1\}$ olsun. Bu takdirde, Φ bir bulanık homomorfizmdir. Ayrıca, $\Phi^{-1}(B) = \{0,1\} = \mathbf{Z}_2$ ve $< \Phi^{-1}(B), \tilde{\circ} > = < \mathbf{Z}_2, \tilde{\circ} > \overset{v.a}{\leq} < \mathbf{Z}_2, \tilde{\circ} >$ 'dır. Fakat, $< B, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < \mathbf{Z}_4, \tilde{\star} >$ olacak şekilde B üzerinde hiç bir $\tilde{\bullet}$ bulanık ikili işlemi tanımlanamaz. Aksi durumda; öyle bir $s \in \{0,1\}$ vardır ki, $1 = \mu_{\tilde{\bullet}}(1,1,s) \leq \mu_{\tilde{\star}}(1,1,s) < \mu_{\tilde{\star}}(1,1,2) = 1$ çelişkisi elde edilir. Bu da, Teorem 2.2.11 'in (c) şıkkının tersinin her zaman için doğru olmadığını gösterir.

Tanım 2.2.43 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup ve $r \in [0,1]$ olmak üzere

$$S_r := \{(x,y,z) : \mu_{\tilde{o}}(x,y,z) \geq r\}$$

kümesi, $G \times G \times G$ 'nin r-düzey altkümesi olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.44 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup ve her $r \in [0,1]$ için

$$\tilde{o}_r : G \times G \rightsquigarrow G \ , \quad \mu_{\tilde{o}_r}(a,b,c) := \begin{cases} \mu_{\tilde{o}}(a,b,c) & , \ (a,b,c) \in S_r \\ 0 & , \ \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olmak üzere $< G, \tilde{o}_r > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ 'dır. Bu grup, $< G, \tilde{o} >$ 'nın bulanık r-düzey altgrubu olarak adlandırılır.

Aşağıdaki önerme sayesinde, klasik gruptan farklı bir bulanık altgruptan, sayılabilir sonsuz sayıda bulanık altgrup elde edilebileceği görülmektedir:

Önerme 2.2.45 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $< A, \tilde{\odot} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ olsun. Bu durumda,

$$\tilde{\star}_n : A \times A \rightsquigarrow A \ , \quad \mu_{\tilde{\star}_n}(x,y,z) := \begin{cases} 1 & , \ \mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z) = 1 \\ \frac{\mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z)}{n} & , \ \textit{aksi durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlanmak üzere, $< A, \tilde{\star}_n > \overset{v.a}{\leq} < A, \tilde{\odot} >$ 'dır.

İspat: $\forall a,b,c,x,y,z \in A$ için

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{\star}_n}(a,b,c) \wedge \mu_{\tilde{\star}_n}(x,y,z) \ \wedge \ & E_{A\times A}((a,b),(x,y)) \\ \leq \ & \mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \wedge \mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z) \wedge E_{G\times G}((a,b),(x,y)) \\ \leq \ & E_G(c,z) = E_A(c,z) \end{aligned}$$

ve $\tilde{\star}_n$ 'nin tanımı gereği her $a,b \in A$ için $\mu_{\tilde{\star}_n}(a,b,c) = 1$ olacak şekilde $c \in G$ bulunabilmesi nedeniyle; $\tilde{\star}_n$, A üzerinde bir bulanık ikili işlemdir. Bu nedenle, Önerme 2.2.28 gereği $< A, \tilde{\star}_n > \overset{v.a}{\leq} < A, \tilde{\odot} >$ olmalıdır. □

2.3. Bulanık Normal Altgruplar

Tanım 2.3.1 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup ve $< N, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{o} >$ olsun. Eğer her $x \in G$ ve her $n \in N$ için

$$\mu_{\tilde{o}}(x, n, s) \wedge \mu_{\tilde{o}}(\overline{n}, x, t) \leq E_G(s, t) \ , \quad \forall s, t \in G$$

olacak şekilde x ve n 'ye bağlı bir $\overline{n} \in N$ varsa; $< N, \tilde{\bullet} >$, $< G, \tilde{o} >$ 'nın bir bulanık normal altgrubudur denir ve $< N, \tilde{\bullet} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{o} >$ ile gösterilir.

Eğer, $E_G := E_G^*$, $E_{G\times G} := E_{G\times G}^*$, her $x, y, z \in G$ için $\mu_{\tilde{o}}(x, y, z) \in \{0, 1\}$ ve $< N, \tilde{\bullet} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{o} >$ ise, $N \trianglelefteq G$ 'dir. Çünkü, $x \in G$, $n \in N$ için

$$\mu_{\tilde{o}}(x, n, s) \wedge \mu_{\tilde{o}}(\overline{n}, x, t) \leq E_G(s, t) \ , \quad \forall s, t \in G$$

olacak şekilde $\overline{n} \in N$ vardır. $s = x \circ n$, $t = \overline{n} \circ x$ için

$$1 = \mu_{\tilde{o}}(x, n, x \circ n) \wedge \mu_{\tilde{o}}(\overline{n}, x, \overline{n} \circ x) \leq E_G(x \circ n, \overline{n} \circ x) \Longrightarrow x \circ n = \overline{n} \circ x$$

olmalıdır. Bu da, $N \trianglelefteq G$ olduğunu gösterir. Yani, bu özel seçimle bulanık normal altgrup kavramı klasik cebirde bilinen normal altgrup kavramına karşılık gelmektedir.

Önerme 2.3.2 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $< N, \tilde{\bullet} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{o} >$ ise, $< N, \bullet > \trianglelefteq < G, \circ >$ olur.

İspat: $< N, \tilde{\bullet} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{o} >$ olduğundan her $x \in G$ ve her $n \in N$ için öyle bir $\overline{n} \in N$ vardır ki,

$$\mu_{\tilde{o}}(x, n, s) \wedge \mu_{\tilde{o}}(\overline{n}, x, t) \leq E_G(s, t) \quad \forall s, t \in G$$

'dir. $s = x \circ n$, $t = \overline{n} \circ x$ için $x \circ n = \overline{n} \circ x$, yani $x \circ n \circ x^{-1} = \overline{n} \in N$ olacağından, $< N, \bullet > \trianglelefteq < G, \circ >$ olmalıdır. □

Önerme 2.3.3 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup; e, $< G, \tilde{o} >$ 'nın birim elemanı, $\tilde{\bullet} : G \times G \rightsquigarrow G$ bir bulanık ikili işlem öyle ki, her $x, y, z \in G$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(x, y, z) \leq \mu_{\tilde{o}}(x, y, z)$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

(a) $< \{e\}, \tilde{o} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{o} >$ **(b)** $< G, \tilde{\bullet} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{o} >$

İspat: **(a)** Sonuç 2.2.30 'dan $<\{e\},\tilde{\circ}> \overset{v.a}{\leq} <G,\tilde{\circ}>$ 'dır. Diğer yandan, $x \in G$ ve $\overline{n} = e \in \{e\}$ olmak üzere,

$$\mu_{\tilde{\circ}}(x,e,s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(e,x,t) \leq E_G(x,s) \wedge E_G(x,t) \leq E_G(s,t), \ \forall s,t \in G$$

olduğundan, $<\{e\},\tilde{\circ}> \overset{v.n}{\trianglelefteq} <G,\tilde{\circ}>$ 'dır.

(b) Önerme 2.2.30 'dan $<G,\tilde{\bullet}> \overset{v.a}{\leq} <G,\tilde{\circ}>$ 'dır. $x,n \in G$ için $\overline{n} = x \circ n \circ x^{-1}$ olmak üzere, her $s,t \in G$ için

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{\circ}}(x,n,s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(\overline{n},x,t) &= \mu_{\tilde{\circ}}(x,n,s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(x \circ n \circ x^{-1},x,t) \\ &\leq E_G(x \circ n,s) \wedge E_G(x \circ n,t) \\ &\leq E_G(s,t) \end{aligned}$$

olduğundan, $<G,\tilde{\bullet}> \overset{v.n}{\trianglelefteq} <G,\tilde{\circ}>$ 'dır. □

Sonuç 2.3.4 Tanım 2.2.43 'teki gösterimler kullanılmak üzere, $<G,\tilde{\circ}_r> \overset{v.n}{\trianglelefteq} <G,\tilde{\circ}>$ 'dır.

İspat: Bunun ispatı, Önerme 2.3.3.(b) gereğince açıktır. □

Önerme 2.3.5 $<G,\tilde{\circ}>$ bir abelyen bulanık grup ve $<N,\tilde{\bullet}> \overset{v.a}{\leq} <G,\tilde{\circ}>$ ise, $<N,\tilde{\bullet}> \overset{v.n}{\trianglelefteq} <G,\tilde{\circ}>$ 'dır.

İspat: $x \in G$, $n \in N$ için $\overline{n} := n$ olarak tanımlanmak üzere,

$$\mu_{\tilde{\circ}}(x,n,s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(\overline{n},x,t) = \mu_{\tilde{\circ}}(x,n,s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(n,x,t) \leq E_G(s,t) \ , \ \ \forall s,t \in G$$

olduğundan, $<N,\tilde{\bullet}> \overset{v.n}{\trianglelefteq} <G,\tilde{\circ}>$ olmalıdır. □

Önerme 2.3.6 $<G,\tilde{\circ}>$ bir bulanık grup, $<G,\circ>$ 'nun merkezi $M(G)$ olmak üzere, eğer $<M(G),\tilde{\bullet}> \overset{v.a}{\leq} <G,\tilde{\circ}>$ ise, $<M(G),\tilde{\bullet}> \overset{v.n}{\trianglelefteq} <G,\tilde{\circ}>$ olur.

İspat: $x \in G$ ve $n \in M(G)$ için $x \circ n = n \circ x$ olduğu gözönüne alınacak olursa; $\overline{n} := n$ ve her $s,t \in G$ için

$$\mu_{\tilde{o}}(x,n,s)\wedge\mu_{\tilde{o}}(\overline{n},x,t) = \mu_{\tilde{o}}(x,n,s)\wedge\mu_{\tilde{o}}(n,x,t) \le E_G(x o n,s)\wedge E_G(n o x,t) \le E_G(s,t),$$

yani $< M(G), \tilde{\bullet} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{o} >$ olur. □

Aşağıdaki önerme, bir bulanık normal altgruplar ailesinin kesişiminin yine bir bulanık normal altgrup olduğunu ifade etmektedir:

Önerme 2.3.7 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $j \in J$ için $< N_j, \tilde{o}_j > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{o} >$ olsun. Bu durumda; $\tilde{\star}$, $\bigcap_{j \in J} N_j$ üzerinde her $a,b,c \in \bigcap_{j \in J} N_j$ için $\mu_{\tilde{\star}}(a,b,c) \le \bigwedge_{j \in J} \mu_{\tilde{o}_j}(a,b,c)$ özelliğini sağlayan bir bulanık ikili işlem ise, $< \bigcap_{j \in J} N_j, \tilde{\star} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{o} >$ 'dır.

İspat: $N := \bigcap_{j \in J} N_j$ için, Sonuç 2.2.31 'den $< N, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\le} < G, \tilde{o} >$ 'dır. Bu durumda,

$$x \in G, n \in N \Longrightarrow \exists \overline{n}_j \in N_j \ni \mu_{\tilde{o}}(x,n,s)\wedge\mu_{\tilde{o}}(\overline{n}_j,x,t) \le E_G(s,t) \ ,\forall s,t \in G.$$

Özel olarak, $s = x \circ n$, $t = \overline{n}_j \circ x$ için $x \circ n = \overline{n}_j \circ x, (\forall j \in J)$, yani $\overline{n}_j = x \circ n \circ x^{-1}$ olduğundan $\overline{n} := \overline{n}_j$ olarak tanımlandığında,

$$\mu_{\tilde{o}}(x,n,s)\wedge\mu_{\tilde{o}}(\overline{n},x,t) \le E_G(s,t) \ , \quad \forall s,t \in G$$

elde edilir. Bu nedenle, $< \bigcap_{j \in J} N_j, \tilde{\star} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{o} >$ olmalıdır. □

Önerme 2.3.8 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $\tilde{o}$ üçüncü girdide geçişli ve $< N, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\le} < G, \tilde{o} >$ olsun. Bu durumda, $< N, \tilde{\bullet} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{o} >$ olması için gerek ve yeter koşul her $x \in G$, her $n \in N$ için x ve n 'ye bağlı öyle bir $\overline{n} \in N$ vardır ki,

$$\mu_{\tilde{o}}(x,n,s)\wedge\mu_{\tilde{o}}(s,x^{-1},t) \le E_G(t,\overline{n}) \ , \quad \forall s,t \in G$$

olmasıdır.

İspat ($\Longrightarrow$): $x \in G$, $n \in N$ için $x \circ n = \overline{n} \circ x$, yani $\overline{n} = x \circ n \circ x^{-1}$ olacak şekilde $\overline{n} \in N$ vardır. Bu nedenle, her $s, t \in G$ için

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{\circ}}(x,n,s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(s,x^{-1},t) &\leq E_G(x \circ n, s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(s,x^{-1},t) \\
&\leq \mu_{\tilde{\circ}}(x \circ n, x^{-1}, t) \\
&\leq E_G(x \circ n \circ x^{-1}, t) \\
&= E_G(\overline{n}, t).
\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$): $x \in G$, $n \in N$ ve $s := x \circ n$, $t := x \circ n \circ x^{-1}$ için $\overline{n} = t = x \circ n \circ x^{-1} \in N$, yani $x \circ n = \overline{n} \circ x$ olacak şekilde $\overline{n} \in N$ vardır. Bu nedenle, her $s, t \in G$ için,

$$\mu_{\tilde{\circ}}(x,n,s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(\overline{n},x,t) \leq E_G(x \circ n, s) \wedge E_G(\overline{n} \circ x, t) \leq E_G(s,t)$$

olduğundan, $< N, \tilde{\bullet} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{\circ} >$ 'dır. □

Önerme 2.3.9 $< G, \tilde{\circ} >$, $< H, \tilde{\star} >$ bulanık gruplar, $f : G \longrightarrow H$ bir bulanık homomorfizm olsun. Bu durumda; $\tilde{\bullet}$, $Çek(f)$ üzerinde bir bulanık ikili işlem ve her $x, y, z \in Çek(f)$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,z) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z)$ ise, $< Çek(f), \tilde{\bullet} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{\circ} >$ 'dır.

İspat: $n \in Çek(f)$, $x \in G$ için $x \circ n \circ x^{-1} \in Çek(f)$ 'dir. Çünkü,

$$f(x \circ n \circ x^{-1}) = f(x) \star f(n) \star f(x^{-1}) = f(x) \star f(x^{-1}) = f(x \circ x^{-1}) = f(e_G) = e_H .$$

$\overline{n} := x \circ n \circ x^{-1}$ için

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{\circ}}(x,n,s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(\overline{n},x,t) &= \mu_{\tilde{\circ}}(x,n,s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(x \circ n \circ x^{-1}, x, t) \\
&\leq E_G(x \circ n, s) \wedge E_G(x \circ n \circ x^{-1} \circ x, t) \\
&\leq E_G(s,t) \,, \quad \forall s, t \in G
\end{aligned}$$

olduğundan, $< Çek(f), \tilde{\bullet} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{\circ} >$ 'dır. □

Aşağıdaki önerme ile, bir bulanık normal grubun bulanık homomorfizm altındaki görüntüsünün yine bir bulanık normal altgrup olduğu görülmektedir:

Önerme 2.3.10 $< G, \tilde{\circ} >$, $< H, \tilde{\star} >$ bulanık gruplar, $f : G \longrightarrow H$ bir bulanık homomorfizm ve $< N, \tilde{\bullet} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{\circ} >$ olsun. Bu durumda; $\tilde{\bullet}$, $f(N)$ üzerinde bir bulanık ikili işlem ve her $x, y, z \in f(N)$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,z) \leq \mu_{\tilde{\star}}(x,y,z)$ ise, $< f(N), \tilde{\bullet} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < f(G), \tilde{\star} >$ 'dır.

İspat: $x \in f(N)$ için öyle bir $n \in N$ vardır ki, $f(n) = x$ ve $n^{-1} \in N$ 'dir. $f(n^{-1}) = x^{-1} \in f(N)$ olacağından, Önerme 2.2.28 gereğince, $< f(N), \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < f(G), \tilde{\star} >$ olmalıdır. Diğer yandan, $x' \in f(G)$ için öyle bir $x \in G$ vardır ki $f(x) = x'$, $n' \in f(N)$ için öyle bir $n \in N$ vardır ki $f(n) = n'$ eşitlikleri sağlanır. $< N, \tilde{\bullet} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{o} >$ olduğu için de, öyle bir $\overline{n} \in N$ vardır ki,

$$\mu_{\tilde{o}}(x, n, s) \wedge \mu_{\tilde{o}}(\overline{n}, x, t) \leq E_G(s, t), \ \forall s, t \in G$$

ve dolayısıyla, $x \circ n = \overline{n} \circ x$ 'dir. Burada, $\overline{n}' := f(\overline{n}) \in f(N)$ olmak üzere, $f(x \circ n) = f(\overline{n} \circ x)$ ve buradan $x' \star n' = \overline{n}' \star x'$ olacağından,

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{\star}}(x', n', s') \wedge \mu_{\tilde{\star}}(\overline{n}', x', t') &\leq E_H(x' \star n', s') \wedge E_H(\overline{n}' \star x', t') \\ &\leq E_H(s', t') \ , \ \forall s', t' \in f(G) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir, bu da ispatı bitirir. □

Önerme 2.3.11 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup; $M(G)$, $< G, o >$ 'nun merkezi ve

$$M_{\tilde{o}}(G) := \{a \ : \forall x, y, z, w \in G \ ; \ \mu_{\tilde{o}}(a^{-1}, x^{-1}, y) \wedge \mu_{\tilde{o}}(y, a, z) \wedge \mu_{\tilde{o}}(z, x, w) \leq E(w, e)\}$$

olmak üzere $M_{\tilde{o}}(G) \subseteq M(G)$ 'dir. Eğer $\tilde{o}$ üçüncü girdide geçişli ise, $M(G) = M_{\tilde{o}}(G)$ 'dir. (Burada tanımlanan $M_{\tilde{o}}(G)$ kümesine $< G, \tilde{o} >$ 'nın bulanık merkezi adı verilir.)

İspat: $a \in M_{\tilde{o}}(G)$ ise, $y := a^{-1} \circ x^{-1}$, $z := y \circ a = a^{-1} \circ x^{-1} \circ a$ ve $w := z \circ x = a^{-1} \circ x^{-1} \circ a \circ x$ için

$$1 = \mu_{\tilde{o}}(a^{-1}, x^{-1}, y) \wedge \mu_{\tilde{o}}(y, a, z) \wedge \mu_{\tilde{o}}(z, x, w) \leq E_G(w, e) \Longrightarrow w = e \Longrightarrow x \circ a = a \circ x$$

olacağından $a \in M(G)$ çıkar.

Eğer, $\tilde{o}$ üçüncü girdide geçişli ise, $a \in M(G)$ için $a^{-1} \circ x^{-1} \circ a \circ x = e, (\forall x \in G)$ olacağından

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{o}}(a^{-1}, x^{-1}, y) \wedge \mu_{\tilde{o}}(y, a, z) \wedge \mu_{\tilde{o}}(z, x, w) &\leq E_G(y, a^{-1} \circ x^{-1}) \wedge \mu_{\tilde{o}}(y, a, z) \wedge \mu_{\tilde{o}}(z, x, w) \\ &\leq \mu_{\tilde{o}}(a^{-1} \circ x^{-1}, a, z) \wedge \mu_{\tilde{o}}(z, x, w) \\ &\leq E_G(z, a^{-1} \circ x^{-1} \circ a) \wedge \mu_{\tilde{o}}(z, x, w) \\ &\leq \mu_{\tilde{o}}(a^{-1} \circ x^{-1} \circ a, x, w) \\ &\leq E_G(w, a^{-1} \circ x^{-1} \circ a \circ x) \\ &= E_G(w, e) \Longrightarrow a \in M_{\tilde{o}}(G) \end{aligned}$$

olmalıdır. Bu nedenle, $M(G) = M_{\tilde{o}}(G)$ 'dir. □

Aşağıdaki örnekle, $\tilde{o}$ 'nın üçüncü girdide geçişli olmaması durumunda $M(G) \neq M_{\tilde{o}}(G)$ olabileceği görülmektedir:

Örnek 2.3.12 $G = \mathbb{R}^+$, $\alpha \in [0,1)$ ve her $x, y, u, v \in G$ için

$$E_G(x,y) := \begin{cases} 1 & , \ x = y \\ \alpha \vee (\frac{1}{x} \wedge \frac{1}{y}) & , \ x \neq y, \ x, y \geq 1 \\ 0 & , \ aksi\ durumda \end{cases}$$

$$E_{G\times G}((x,y),(u,v)) := \begin{cases} 1 & , \ (x,y) = (u,v) \\ \alpha \vee (\frac{1}{x^2} \wedge \frac{1}{y^2} \wedge \frac{1}{u^2} \wedge \frac{1}{v^2}) & , \ (x,y) \neq (u,v), \ x, y, u, v \geq 1 \\ 0 & , \ aksi\ durumda \end{cases}$$

ve

$$\tilde{o} : G \times G \rightsquigarrow G \ , \ \mu_{\tilde{o}}(x,y,z) := \begin{cases} 1 & , \ z = x.y \\ \alpha.(\frac{1}{x} \wedge \frac{1}{y} \wedge \frac{1}{z}) & , \ z \neq x.y \ ; \ x, y, z \geq 1 \\ 0 & , \ aksi\ durumda \end{cases}$$

olmak üzere $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık gruptur (Demirci ve Çoker 2002). Burada, $\mu_{\tilde{o}}(4, \frac{1}{2}, 2) \wedge E_G(4,5) \not\leq \mu_{\tilde{o}}(5, \frac{1}{2}, 2)$ olduğundan; $\tilde{o}$, G üzerinde üçüncü girdide geçişli değildir. Ayrıca, $\frac{1}{2} \in M(G) = \mathbb{R}^+$ olmasına rağmen $\frac{1}{2} \notin M_{\tilde{o}}(G)$ 'dir. Çünkü,

$$\mu_{\tilde{o}}(2,4,6) \wedge \mu_{\tilde{o}}(6, \frac{1}{2}, 3) \wedge \mu_{\tilde{o}}(3, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}) > E_G(\frac{3}{4}, 1)$$

'dir.

Önerme 2.3.13 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $< H, \tilde{\star} > \leq < G, \tilde{o} >$,

$$M(H_\circ) := \{a \in G : \forall h \in H, a \circ h = h \circ a\},$$

$$M(H_{\tilde{o}}) := \{a \in G : \forall h \in H, \forall s, t \in G \text{ için } \mu_{\tilde{o}}(a, h, s) \wedge \mu_{\tilde{o}}(s, a^{-1}, t) \leq E_G(h,t)\}$$

olsun. Bu durumda, $M(H_{\tilde{o}}) \subseteq M(H_\circ)$ 'dır. Eğer $\tilde{o}$ üçüncü girdide geçişli ise, $M(H_\circ) = M(H_{\tilde{o}})$ 'dır.

İspat: $a \in M(H_{\tilde{o}})$ ve her $x \in H$ için

$$1 = \mu_{\tilde{o}}(a, x, a \circ x) \wedge \mu_{\tilde{o}}(a \circ x, a^{-1}, a \circ x \circ a^{-1}) \leq E_G(x, a \circ x \circ a^{-1})$$

$$\Longrightarrow a \circ x \circ a^{-1} = x \Longrightarrow a \circ x = x \circ a$$

olduğundan, $a \in M(H_\circ)$ olmalıdır.

Şimdi üçüncü girdide geçişlilik olduğunu varsayalım. $a \in M(H_\circ)$ ise, her $x \in H$ için $a \circ x \circ a^{-1} = x$ ve $\tilde{o}$ üçüncü girdide geçişli olduğundan:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{o}}(a, x, s) \wedge \mu_{\tilde{o}}(s, a^{-1}, t) &\leq E_G(s, a \circ x) \wedge \mu_{\tilde{o}}(s, a^{-1}, t) \leq \mu_{\tilde{o}}(a \circ x, a^{-1}, t) \\ &\leq E_G(t, a \circ x \circ a^{-1}) = E_G(t, x) \\ &\Longrightarrow a \in M(H_{\tilde{o}}) \end{aligned}$$

bulunur. Sonuçta, $M(H_\circ) = M(H_{\tilde{o}})$ elde edilir. □

Önerme 2.3.14 $< G, \tilde{o} >$ bir bulanık grup, $< H, \tilde{\star} > \overset{f,g}{\leq} < G, \tilde{o} >$,

$$N(H_\circ) := \{a \in G : \forall h \in H, a \circ h \circ a^{-1} \in H\},$$

$$N(H_{\tilde{o}}) := \{a \in G : \forall h \in H, \exists \overline{h} \in H, \forall s, t \in H \ ; \ \mu_{\tilde{o}}(a, h, s) \wedge \mu_{\tilde{o}}(\overline{h}, a, t) \leq E_G(s, t)\}$$

olsun. Bu takdirde, $N(H_\circ) = N(H_{\tilde{o}})$ 'dır.

İspat: $a \in N(H_{\tilde{o}})$ olsun. Her $h \in H$ için öyle bir $\overline{h} \in H$ vardır ki, $s := a \circ h$, $t := \overline{h} \circ a$ için,

$$\begin{aligned} 1 = \mu_{\tilde{o}}(a, h, s) \wedge \mu_{\tilde{o}}(\overline{h}, a, t) \leq E_G(s, t) &\Longrightarrow s = t \Longrightarrow a \circ h = \overline{h} \circ a \\ &\Longrightarrow \overline{h} = a \circ h \circ a^{-1} \in H \end{aligned}$$

olur. Böylece, $N(H_{\tilde{o}}) \subseteq N(H_\circ)$ elde edilir.

Diğer yandan, $a \in N(H_\circ)$ ve $h \in H$ için öyle bir $\overline{h} \in H$ vardır ki, $\overline{h} = a \circ h \circ a^{-1}$ 'dir.

$$\begin{aligned} a \in N(H_\circ) \Longrightarrow \mu_{\tilde{o}}(a, h, s) \wedge \mu_{\tilde{o}}(\overline{h}, a, t) &\leq E_G(a \circ h, s) \wedge E_G(\overline{h} \circ a, t) \\ &\leq E_G(a \circ h, s) \wedge E_G(a \circ h \circ a^{-1} \circ a, t) \\ &\leq E_G(s, t) \end{aligned}$$

olur. Böylece, $N(H_\circ) \subseteq N(H_{\tilde{\circ}})$ bulunur. Bu nedenle, $N(H_{\tilde{\circ}}) = N(H_\circ)$ 'dır. □

Yukarıda tanımlanan $N(H_\circ)$ kümesi; klasik cebirde bilinen H altgrubunun G içindeki normalleştiricisinden başka bir şey değildir. Bu nedenle, $N(H_\circ) \trianglelefteq G$ 'dir ve tanımı gereği H 'yi kapsayan en büyük normal altgrup $N(H_\circ)$ 'dır. Dolayısıyla, $N(H_{\tilde{\circ}}) \leq G$ 'dir ve

$$< H, \tilde{\star} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < N(H_{\tilde{\circ}}), \tilde{\circ} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$$

olacağı açıktır, bu bulanık altgruba $< H, \tilde{\star} >$ 'nın $< G, \tilde{\circ} >$ içindeki bulanık normalleyicisi denir. Ayrıca, burada

$$< H, \tilde{\star} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < K, \tilde{\circ}_k > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} > \Longrightarrow K \subseteq N(H_{\tilde{\circ}})$$

'dır ve özel olarak, $< H, \tilde{\star} > \overset{v.n}{\trianglelefteq} < G, \tilde{\circ} >$ olması için gerek ve yeter şartın $N(H_{\tilde{\circ}}) = G$ olacağı açıktır.

Önerme 2.3.15 $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup, $< H, \tilde{\star} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$,

$$N(H_\circ) := \{a \in G : \forall h \in H, a \circ h \circ a^{-1} \in H\},$$

$$N'(H_{\tilde{\circ}}) := \{a \in G : \forall h \in H, \exists \overline{h} \in H, \forall s, t \in G; \mu_{\tilde{\circ}}(a, h, s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(s, a^{-1}, t) \leq E_G(t, \overline{h})\}$$

olsun. Bu takdirde, $N'(H_{\tilde{\circ}}) \subseteq N(H_\circ)$ 'dur. Eğer, $\tilde{\circ}$ 'nın üçüncü girdiye göre geçişlilik özelliği varsa da, $N(H_\circ) = N'(H_{\tilde{\circ}})$ 'dır.

İspat: $a \in N'(H_{\tilde{\circ}})$ ve $h \in H$ için $s := a \circ h$, $t := s \circ a^{-1} = a \circ h \circ a^{-1}$ olarak tanımlandığında öyle bir $\overline{h} \in H$ vardır ki

$$1 = \mu_{\tilde{\circ}}(a, h, s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(s, a^{-1}, t) \leq E_G(t, \overline{h}) \Longrightarrow \overline{h} = t = a \circ h \circ a^{-1} \in H$$

çıkar. Buradan, $N'(H_{\tilde{\circ}}) \subseteq N(H_\circ)$ elde edilir.

Diğer yandan, $\tilde{\circ}$ 'nın üçüncü girdiye göre geçişlilik özelliği varsa da,

$$\begin{aligned} a \in N(H_\circ) \Longrightarrow \mu_{\tilde{\circ}}(a, h, s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(s, a^{-1}, t) &\leq E_G(a \circ h, s) \wedge \mu_{\tilde{\circ}}(s, a^{-1}, t) \\ &\leq \mu_{\tilde{\circ}}(a \circ h, a^{-1}, t) \\ &\leq E_G(a \circ h \circ a^{-1}, t) \\ &= E_G(\overline{h}, t) \\ &\Longrightarrow a \in N'(H_{\tilde{\circ}}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $N(H_\circ) \subseteq N'(H_{\tilde{\circ}})$ çıkar. Bu durumda, $N(H_\circ) = N'(H_{\tilde{\circ}})$ eşitliği elde edilir. □

Önerme 2.3.16 $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup, $< N, \tilde{\bullet} > \overset{v.a}{\leq} < G, \tilde{\circ} >$ olsun. Eğer, $< N, \bullet >$ abelyen ve $< G, \circ >$ abelyen değil ise, $< N, \tilde{\bullet} >$ abelyen fakat $< G, \tilde{\circ} >$ abelyen olmayan bir bulanık gruptur.

İspat: $< G, \circ >$ abelyen olmadığı için, (Demirci 2002) 'deki Teorem 5.10 gereği, $< G, \tilde{\circ} >$ abelyen olamaz. Diğer yandan, her $x, y, s, t \in N$ için $x \circ y = y \circ x$ olduğundan

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(x, y, t) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(y, x, s) \leq E_N(x \circ y, t) \wedge E_N(y \circ x, s) \leq E_N(s, t)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da, $< N, \tilde{\bullet} >$ 'nın bir abelyen bulanık grup olduğunu gösterir.
□

Önerme 2.3.17 $< G, \tilde{\circ} >$ bir bulanık grup ve $< N, \circ > \trianglelefteq < G, \circ >$ olsun. Bu durumda, $g \in G$ için

$$g \circ N := \{g \circ n : \ n \in N\}, \quad G/N := \{g \circ N : \ g \in G\}$$

ve $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma < 1$ olmak üzere;

$$E_{G/N} : G/N \times G/N \longrightarrow [0,1], \ E_{G/N}(a \circ N, b \circ N) := \begin{cases} 1 & , \ a \circ b^{-1} \in N \\ \gamma & , \ \text{aksi durumda} \end{cases}$$

$$E_{G/N \times G/N} : (G/N \times G/N) \times (G/N \times G/N) \longrightarrow [0,1],$$

$$E_{G/N \times G/N}((a \circ N, b \circ N), (x \circ N, y \circ N)) := \begin{cases} 1 & , \ a \circ x^{-1}, \ b \circ y^{-1} \in N \\ \beta & , \ \text{aksi durumda} \end{cases}$$

$\tilde{\star} : G/N \times G/N \rightsquigarrow G/N$ öyle ki,

$$\mu_{\tilde{\star}}(a \circ N, b \circ N, c \circ N) := \begin{cases} 1 & , \ a \circ b \circ c^{-1} \in N \\ \alpha & , \ \text{aksi durumda} \end{cases}$$

ise, $< G/N, \tilde{\star} >$ bir bulanık gruptur. Ayrıca, $< G, \tilde{\circ} >$ bir abelyen bulanık grup ise, $< G/N, \tilde{\star} >$ da bir abelyen bulanık gruptur.

İspat: Her $a \circ N, b \circ N \in G/N$ için, $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq E_{G/N}(a \circ N, b \circ N)$ olduğundan, (F-2) özelliği için $\mu_{\tilde{\star}}(x \circ N, y \circ N, z \circ N) = \mu_{\tilde{\star}}(a \circ N, b \circ N, c \circ N) = E_{G/N \times G/N}((x \circ N, y \circ N), (a \circ N, b \circ N)) = 1$ durumunu incelemek yeterlidir. Bu durumda,

$$z \circ N = (x \circ y) \circ N = (x \circ N) \circ (y \circ N) = (a \circ N) \circ (b \circ N) = (a \circ b) \circ N = c \circ N$$

olacağından,

$$\begin{aligned} 1 = \mu_{\tilde{\star}}(x \circ N, y \circ N, z \circ N) \ & \wedge \ \mu_{\tilde{\star}}(a \circ N, b \circ N, c \circ N) \\ & \wedge \ E_{G/N \times G/N}((x \circ N, y \circ N), (a \circ N, b \circ N)) \\ & \leq \ E_{G/N}(z \circ N, c \circ N) = 1 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, her $x \circ N, y \circ N \in G/N$ için $\mu_{\tilde{\star}}(x \circ N, y \circ N, (x \circ y) \circ N) = 1$ olduğundan; $\tilde{\star}$, G/N üzerinde bir bulanık ikili işlemdir. Birleşme özelliği için

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{\star}}(b \circ N, c \circ N, d \circ N) &= \mu_{\tilde{\star}}(a \circ N, d \circ N, m \circ N) \\ &= \mu_{\tilde{\star}}(a \circ N, b \circ N, q \circ N) \\ &= \mu_{\tilde{\star}}(q \circ N, c \circ N, w \circ N) = 1 \end{aligned}$$

durumunu incelemek yeterlidir. Bu durumda, $(b \circ c) \circ N = d \circ N$ ve $(a \circ d) \circ N = m \circ N$ eşitlikleri sağlanacağından,

$$m \circ N = (a \circ (b \circ c)) \circ N = ((a \circ b) \circ c) \circ N = w \circ N$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} 1 = \mu_{\tilde{\star}}(b \circ N, c \circ N, d \circ N) \ & \wedge \ \mu_{\tilde{\star}}(a \circ N, d \circ N, m \circ N) \\ & \wedge \ \mu_{\tilde{\star}}(a \circ N, b \circ N, q \circ N) \wedge \mu_{\tilde{\star}}(q \circ N, c \circ N, w \circ N) \\ & \leq \ E_{G/N}(m \circ N, w \circ N) = 1 \end{aligned}$$

olduğundan birleşme özelliği sağlanır. Diğer yandan, $a \circ N \in G/N$ ve e, $< G, \tilde{o} >$ 'nın birim elemanı olmak üzere,

$$\mu_{\tilde{\star}}(a \circ N, e \circ N, a \circ N) = 1 = \mu_{\tilde{\star}}(e \circ N, a \circ N, a \circ N)$$

ve

$$\mu_{\tilde{\star}}(a \circ N, a^{-1} \circ N, e \circ N) = 1 = \mu_{\tilde{\star}}(a^{-1} \circ N, a \circ N, e \circ N)$$

eşitlikleri sağlandığından $< G/N, \tilde{\star} >$ bir bulanık grup olmalıdır.

$< G, \tilde{o} >$ bir abelyen bulanık grup ve $a \circ N, b \circ N, s \circ N, t \circ N \in G/N$ olsun. Bu durumda,

$$\mu_{\tilde{\star}}(a \circ N, b \circ N, s \circ N) = \mu_{\tilde{\star}}(b \circ N, a \circ N, t \circ N) = 1$$

ise, $s \circ N = (a \circ b) \circ N = (b \circ a) \circ N = t \circ N$ olacağından,

$$1 = \mu_{\tilde{\star}}(a \circ N, b \circ N, s \circ N) \wedge \mu_{\tilde{\star}}(b \circ N, a \circ N, t \circ N) \leq E_{G/N}(s \circ N, t \circ N) = 1$$

olmalıdır. Bu da, $< G/N, \tilde{\star} >$ bulanık grubunun abelyen olduğunu gösterir. □

3. BULANIK HALKALAR VE BULANIK CİSİMLER

3.1. Bulanık Halkalar

Bundan sonraki gösterimlerimizde, $< \mathcal{H}, \tilde{o}, \tilde{\bullet}, E_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}, E_{\mathcal{H}} >$ sıralı beşlisi ile, $\mathcal{H}$ 'nin bir küme olduğu, $\tilde{o}$ ve $\tilde{\bullet}$ 'nın da, $\mathcal{H}$ üzerinde $E_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ ve $E_{\mathcal{H}}$ belirtisiz eşitliklerine göre bulanık ikili işlemler olduğu, ifade edilecektir. Aşağıdaki Tanım 3.1.1 ve Tanım 3.1.2, sırasıyla, Demirci (2002) 'deki Tanım 7.1 ve Tanım 7.12 'nin özel bir durumuna karşılık gelmektedir.

Tanım 3.1.1 $< \mathcal{H}, \tilde{o}, \tilde{\bullet}, E_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}, E_{\mathcal{H}} >$ bulanık cebirsel yapısı verilmiş olsun. Eğer her $x, y, z, t, a, b, c, d \in \mathcal{H}$ için

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,a)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(x,z,b)\wedge\mu_{\tilde{o}}(a,b,c)\wedge\mu_{\tilde{o}}(y,z,d)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(x,d,t) \leq E_{\mathcal{H}}(t,c)$$

ise, $< \mathcal{H}, \tilde{o}, \tilde{\bullet} >$ sıralı üçlüsünün sol dağılma özelliği vardır, denir. Eğer

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(x,z,a)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(y,z,b)\wedge\mu_{\tilde{o}}(a,b,c)\wedge\mu_{\tilde{o}}(x,y,d)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(d,z,t) \leq E_{\mathcal{H}}(t,c)$$

ise, $< \mathcal{H}, \tilde{o}, \tilde{\bullet} >$ sıralı üçlüsünün sağ dağılma özelliği vardır, denir.

Tanım 3.1.2 $< \mathcal{H}, \tilde{o}, \tilde{\bullet}, E_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}, E_{\mathcal{H}} >$ bulanık cebirsel yapısı için, eğer aşağıdaki üç özellik sağlanıyorsa $< \mathcal{H}, \tilde{o}, \tilde{\bullet} >$, $E_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ ve $E_{\mathcal{H}}$ belirtisiz eşitliklerine göre, bir bulanık halkadır, denir:

(BH 1) $< \mathcal{H}, \tilde{o} >$ bir abelyen bulanık grup,

(BH 2) $< \mathcal{H}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık yarıgrup,

(BH 3) $< \mathcal{H}, \tilde{o}, \tilde{\bullet} >$ 'nın sol ve sağ dağılma özelliği var.

Eğer, $< \mathcal{H}, \tilde{o}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık halka ve

(BH 4) $\forall x \in \mathcal{H}$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(x, e_{\tilde{\bullet}}, x) = 1 = \mu_{\tilde{\bullet}}(e_{\tilde{\bullet}}, x, x)$

olacak şekilde $e_{\tilde{\bullet}} \in \mathcal{H}$ varsa $< \mathcal{H}, \tilde{o}, \tilde{\bullet} >$ 'ya birimli bulanık halka,

(BH 5) $\forall x, y, s, t \in \mathcal{H}$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,s) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(y,x,t) \leq E_{\mathcal{H}}(s,t)$

ise de, $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'ya değişmeli bulanık halka denir.

Bundan sonraki gösterimlerde, $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık halka ise, $< \mathcal{H}, \tilde{\circ} >$ 'nın birim elemanı $0_{\mathcal{H}}$ veya 0 ile, $< \mathcal{H}, \tilde{\bullet} >$ 'nın birim elemanı da $1_{\mathcal{H}}$ veya 1 ile sembolize edilecektir. Ayrıca, $x \in \mathcal{H}$ için $-x$ ile x 'in $< \mathcal{H}, \tilde{\circ} >$ 'daki tersi; x^{-1} ile de x 'in $< \mathcal{H}, \tilde{\bullet} >$ 'daki tersi (eğer varsa) temsil edilecektir.

Önerme 3.1.3 (Demirci 2002 , 2003) $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir (birimli , değişmeli) bulanık halka ise $< \mathcal{H}, \circ, \bullet >$ bir (birimli, değişmeli) halkadır.

Tanım 3.1.4 $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık halka olsun. $A \subseteq \mathcal{H}$ ve her $a, b, c \in A$ için $\mu_{\tilde{\oplus}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c)$ ve $\mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c)$ ve $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$ bir bulanık halka ise $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$, $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'nın bir bulanık althalkasıdır denir, $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ ile gösterilir.

Bir altkümenin bir bulanık althalka olup olmadığını araştırırken tanımdaki tüm koşullara bakmağa gerek olmadığı açıktır. Aşağıdaki önerme, hangi koşullara bakılacağını belirtmektedir:

Önerme 3.1.5 $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık halka, $A \subseteq \mathcal{H}$ ve $\tilde{\oplus}$, $\tilde{\odot}$ A üzerinde bulanık ikili işlemler olsun. Bu takdirde, aşağıdaki denklik sağlanır:

$$< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} > \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & < A, \tilde{\oplus} > \overset{v.a}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ} > \\ \text{(ii)} & \mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c) \ , \quad \forall a,b,c \in A. \end{array}$$

İspat ($\Longrightarrow$): İspatın bu yönü, Tanım 3.1.4 gereği, aşikar.

($\Longleftarrow$): (i) ve (ii) 'den her $a, b, c \in A$ için $\mu_{\tilde{\oplus}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c)$ ve $\mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c)$ 'dir. Ayrıca, yine (i) 'den dolayı $(BH1)$ koşulu sağlanır. Diğer yandan, her $a, b, c \in A$ için $\mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c)$ ve $< \mathcal{H}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık yarıgrup olduğu için, $< A, \tilde{\odot} >$ bir bulanık yarıgrup olacağından $(BH2)$ koşulu sağlanır. Son olarak, $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'nın sol ve sağ dağılma özelliği olduğundan, $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$ için $(BH3)$ koşulu da sağlanır. Bu nedenle, $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'dır. $\square$

Sonuç 3.1.6 $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık halka ve $j \in J = \{1, 2, ..., n\}$ için $< A_j, \tilde{\oplus}_j, \tilde{\odot}_j > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ olsun. Bu durumda, $A := \bigcap_{j \in J} A_j$, $\tilde{\oplus}$ ve $\tilde{\odot}$, A üzerinde her $a, b, c \in A$ için

$$\mu_{\tilde{\oplus}}(a,b,c) \leq \bigwedge_{j \in J} \mu_{\tilde{\oplus}_j}(a,b,c) \quad \text{ve} \quad \mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \leq \bigwedge_{j \in J} \mu_{\tilde{\odot}_j}(a,b,c)$$

olacak şekilde bulanık ikili işlemler ise, $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'dır.

İspat: $< A_j, \tilde{\oplus}_j, \tilde{\odot}_j > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ olduğundan Önerme 3.1.5 'ten $< A_j, \tilde{\oplus}_j > \overset{v.a}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ} >$ dolayısıyla, Sonuç 2.2.31 'den $< A, \tilde{\oplus} > \overset{v.a}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ} >$ 'dır. Diğer yandan; $\tilde{\odot}$ 'nın tanımı gereği her $a, b, c \in A$ için $\mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c)$ olduğundan, Önerme 3.1.5 gereği, $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'dır. □

Sonuç 3.1.7 $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık halka, $\tilde{\odot}$ ve $\tilde{\oplus}$, $\mathcal{H}$ üzerinde bulanık ikili işlemler öyle ki, her $x, y, z \in \mathcal{H}$ için $\mu_{\tilde{\oplus}}(x,y,z) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(x,y,z)$, $\mu_{\tilde{\odot}}(x,y,z) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,z)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(a) $< \{0\}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ **(b)** $< \mathcal{H}, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$

İspat: **(a)** Sonuç 2.2.30 'dan $< \{0\}, \tilde{\circ} > \overset{v.a}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ} >$ olduğundan, Önerme 3.1.5 gereği, $< \{0\}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'dır.

(b) Sonuç 2.2.30 'dan $< \mathcal{H}, \tilde{\oplus} > \overset{v.a}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ} >$ ve her $a, b, c \in G$ için, $\mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c)$ olduğundan, Önerme 3.1.5 'den, $< \mathcal{H}, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'dır. □

Önerme 3.1.8 $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık halka olsun. Bu durumda, her $x, y, z, m, n, w \in \mathcal{H}$ için,

(1) $\mu_{\tilde{\bullet}}(x, 0, m) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(0, x, n) \leq E_{\mathcal{H}}(m, n)$

(2) $\mu_{\tilde{\bullet}}(x, -y, m) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(-x, y, n) \leq E_{\mathcal{H}}(m, n)$

Ayrıca, $\tilde{\circ}$ ikinci girdide geçişli ise,

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(x, -y, m) \wedge \mu_{\tilde{\bullet}}(x, y, n) \leq E_{\mathcal{H}}(m, -n),$$

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(-x,y,m)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,n)\leq E_{\mathcal{H}}(m,-n)$$

olur.

(**3**) $\mu_{\tilde{\bullet}}(-x,-y,m)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,n)\leq E_{\mathcal{H}}(m,n)$.

(**4**) $\tilde{\circ}$, ikinci ve üçüncü girdide geçişli olsun.

(i) Eğer $\tilde{\bullet}$ işlemi üçüncü girdide geçişli ise,

$$\mu_{\tilde{\circ}}(x,-y,u)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(u,z,m)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(x,z,v)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(y,z,t)\wedge\mu_{\tilde{\circ}}(v,-t,n)\leq E_{\mathcal{H}}(m,n).$$

(ii) Eğer $\tilde{\bullet}$ bulanık ikili işlemi ikinci girdide geçişli ise,

$$\mu_{\tilde{\circ}}(y,-z,u)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(x,u,m)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,v)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(x,z,t)\wedge\mu_{\tilde{\circ}}(v,-t,n)\leq E_{\mathcal{H}}(m,n).$$

(**5**) $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ bir birimli bulanık halka ise, $\mu_{\tilde{\bullet}}(-1,a,-a)=1=\mu_{\tilde{\bullet}}(-1,-1,1)$ 'dir.

İspat (1): $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ bir bulanık halka olduğu için $<\mathcal{H},\circ,\bullet>$ bir halkadır. Bu nedenle, her $x\in\mathcal{H}$ için $0\bullet x=x\bullet 0=0$ 'dır. Dolayısıyla, her $m,n\in\mathcal{H}$ için,

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(x,0,m)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(0,x,n)\leq E_{\mathcal{H}}(x\bullet 0,m)\wedge E_{\mathcal{H}}(0\bullet x,n)\leq E_{\mathcal{H}}(0,m)\wedge E_{\mathcal{H}}(0,n)\leq E_{\mathcal{H}}(m,n)$$

bulunur.

(**2**) $<\mathcal{H},\circ,\bullet>$ bir halka olacağından, her $x,y\in\mathcal{H}$ için $x\bullet(-y)=(-x)\bullet y=-(x\bullet y)$ 'dir. Dolayısıyla; her $m,n\in\mathcal{H}$ için,

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(x,-y,m)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(-x,y,n)\leq E_{\mathcal{H}}(x\bullet(-y),m)\wedge E_{\mathcal{H}}((-x)\bullet y,n)\leq E_{\mathcal{H}}(m,n)$$

olur. Şimdi $\tilde{\circ}$ 'nın ikinci girdide geçişli olduğunu varsayalım. Ayrıca, Teorem 2.1.9 gereğince $E_{\mathcal{H}}(x\bullet y,n)=E_{\mathcal{H}}(-(x\bullet y),-n)$ olacağından,

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{\bullet}}(x,-y,m)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(x,y,n) &\leq E_{\mathcal{H}}(x\bullet(-y),m)\wedge E_{\mathcal{H}}(x\bullet y,n)\\ &= E_{\mathcal{H}}(-(x\bullet y),m)\wedge E_{\mathcal{H}}(-(x\bullet y),-n)\\ &\leq E_{\mathcal{H}}(m,-n)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde\bullet}(-x,y,m)\wedge\mu_{\tilde\bullet}(x,y,n) &\leq E_{\mathcal{H}}((-x)\bullet y,m)\wedge E_{\mathcal{H}}(x\bullet y,n)\\ &= E_{\mathcal{H}}(-(x\bullet y),m)\wedge E_{\mathcal{H}}(-(x\bullet y),-n)\\ &\leq E_{\mathcal{H}}(m,-n)\end{aligned}$$

olmalıdır.

(**3**) $$\begin{aligned}\mu_{\tilde\bullet}(-x,-y,m)\wedge\mu_{\tilde\bullet}(x,y,n) &\leq E_{\mathcal{H}}((-x)\bullet(-y),m)\wedge E_{\mathcal{H}}(x\bullet y,n)\\ &= E_{\mathcal{H}}(x\bullet y,m)\wedge E_{\mathcal{H}}(x\bullet y,n)\\ &\leq E_{\mathcal{H}}(m,n).\end{aligned}$$

(**4**) **(i)** $\tilde\circ$ ikinci ve üçüncü girdide geçişli, $\tilde\bullet$ da girdide geçişli ise, Teorem 2.1.9 gereğince her $x,y,z,t\in\mathcal{H}$ için $E_{\mathcal{H}}(y\bullet z,t)=E_{\mathcal{H}}(-(y\bullet z),-t)$ ve $E_{\mathcal{H}}((x\circ(-y))\bullet z,m)=E_{\mathcal{H}}((x\bullet z)\circ(-(y\bullet z)),m)$ 'dir.

$$\alpha:=\mu_{\tilde\circ}(x,-y,u)\wedge\mu_{\tilde\bullet}(u,z,m)\wedge\mu_{\tilde\bullet}(x,z,v)\wedge\mu_{\tilde\bullet}(y,z,t)\wedge\mu_{\tilde\circ}(v,-t,n)$$

olarak tanımlanmak üzere,

$$\begin{aligned}\alpha &\leq E_{\mathcal{H}}(x\circ(-y),u)\wedge\mu_{\tilde\bullet}(u,z,m)\wedge E_{\mathcal{H}}(x\bullet z,v)\wedge E_{\mathcal{H}}(y\bullet z,t)\wedge\mu_{\tilde\circ}(v,-t,n)\\ &\leq E_{\mathcal{H}}(x\circ(-y),u)\wedge\mu_{\tilde\bullet}(u,z,m)\wedge E_{\mathcal{H}}(x\bullet z,v)\wedge E_{\mathcal{H}}(-(y\bullet z),-t)\wedge\mu_{\tilde\circ}(v,-t,n)\\ &\leq \mu_{\tilde\bullet}((x\circ(-y)),z,m)\wedge E_{\mathcal{H}}(x\bullet z,v)\wedge E_{\mathcal{H}}(-(y\bullet z),-t)\wedge\mu_{\tilde\circ}(v,-t,n)\\ &\leq E_{\mathcal{H}}((x\circ(-y))\bullet(z),m)\wedge E_{\mathcal{H}}(x\bullet z,v)\wedge\mu_{\tilde\circ}(v,-(y\bullet z),n)\\ &\leq E_{\mathcal{H}}((x\circ(-y))\bullet z,m)\wedge\mu_{\tilde\circ}(x\bullet z,-(y\bullet z),n)\\ &\leq E_{\mathcal{H}}((x\circ(-y))\bullet z,m)\wedge E_{\mathcal{H}}((x\bullet z)\circ(-(y\bullet z)),n)\\ &\leq E_{\mathcal{H}}(m,n)\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

(ii) $\tilde\circ$, ikinci ve üçüncü girdide geçişli, $\tilde\bullet$ da ikinci girdide geçişli ise, Teorem 2.1.9 gereğince her $x,y,z,t\in\mathcal{H}$ için $E_{\mathcal{H}}(x\bullet z,t)=E_{\mathcal{H}}(-(x\bullet z),-t)$ ve ayrıca $E_{\mathcal{H}}(x\bullet(y\circ(-z)),m)=E_{\mathcal{H}}((x\bullet y)\circ(-(x\bullet z)),m)$ olacağından;

$$\beta:=\mu_{\tilde\circ}(y,-z,u)\wedge\mu_{\tilde\bullet}(x,u,m)\wedge\mu_{\tilde\bullet}(x,y,v)\wedge\mu_{\tilde\bullet}(x,z,t)\wedge\mu_{\tilde\circ}(v,-t,n)$$

olarak tanımlanmak üzere,

$$\begin{aligned}\beta &\le E_{\mathcal{H}}(y\circ(-z),u)\wedge\mu_{\tilde{\bullet}}(x,u,m)\wedge E_{\mathcal{H}}(x\bullet y,v)\wedge E_{\mathcal{H}}(x\bullet z,t)\wedge\mu_{\tilde{\circ}}(v,-t,n)\\ &\le \mu_{\tilde{\bullet}}(x,y\circ(-z),m)\wedge E_{\mathcal{H}}(x\bullet y,v)\wedge E_{\mathcal{H}}(x\bullet z,t)\wedge\mu_{\tilde{\circ}}(v,-t,n)\\ &\le E_{\mathcal{H}}(x\bullet(y\circ(-z)),m)\wedge E_{\mathcal{H}}(x\bullet y,v)\wedge\mu_{\tilde{\circ}}(v,-(x\bullet z),n)\\ &\le E_{\mathcal{H}}(x\bullet(y\circ(-z)),m)\wedge\mu_{\tilde{\circ}}(x\bullet y,-(x\bullet z),n)\\ &\le E_{\mathcal{H}}(x\bullet(y\circ(-z)),m)\wedge E_{\mathcal{H}}((x\bullet y)\circ(-(x\bullet z)),n)\\ &\le E_{\mathcal{H}}(m,n)\end{aligned}$$

olmalıdır.

(**5**) $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ bir birimli bulanık halka ise, $<\mathcal{H},\circ,\bullet>$ bir birimli halka olacağından, her $a\in\mathcal{H}$ için $-1\bullet a=-a$ 'dır. Bu da, $\mu_{\tilde{\bullet}}(-1,a,-a)=1$ olduğunu gösterir. Burada, $a=-1$ için de, $\mu_{\tilde{\bullet}}(-1,-1,1)=1$ eşitliği elde edilir. □

3.2. Bulanık İdealler

Tanım 3.2.1 $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ bir bulanık halka ve $<A,\tilde{\oplus},\tilde{\odot}>\overset{v.h}{\le}<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ olsun. Eğer her $a\in A$ ve her $h,t,s\in\mathcal{H}$ için

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(a,h,t)=1\Longrightarrow t\in A$$

ve

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(h,a,s)=1\Longrightarrow s\in A$$

ise; $<A,\tilde{\oplus},\tilde{\odot}>$, $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ 'nın bir bulanık idealidir denir, $<A,\tilde{\oplus},\tilde{\odot}>\overset{v.i}{\le}<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ ile gösterilir.

Önerme 3.2.2 $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ bir bulanık halka, $A\subseteq\mathcal{H}$, $\tilde{\oplus}$ ve $\tilde{\odot}$, A üzerinde bulanık ikili işlemler olsun. Bu takdirde,

$$<A,\tilde{\oplus},\tilde{\odot}>\overset{v.i}{\le}<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>\iff\begin{array}{l}\textbf{(i)}\ <A,\tilde{\oplus}>\overset{v.a}{\le}<\mathcal{H},\tilde{\circ}>\\ \textbf{(ii)}\ \mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c)\le\mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c),\forall a,b,c\in A\\ \textbf{(iii)}\ \mu_{\tilde{\bullet}}(a,h,t)=1\Longrightarrow t\in A\\ \textbf{(iv)}\ \mu_{\tilde{\bullet}}(h,a,s)=1\Longrightarrow s\in A,\forall a\in A,\forall s,t\in\mathcal{H}\end{array}$$

'dir.

İspat ($\Longrightarrow$): İspatın bu yönü, bulanık idealin tanımı gereği, açıktır

($\Longleftarrow$): Önerme 3.1.5 'ten $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'dır. Ayrıca, (iii) ve (iv) özellikleri nedeniyle, bulanık ideal tanımındaki koşullar sağlanır. Bu da, $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ olduğunu ispatlar. □

Önerme 3.2.3 $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık halka olmak üzere, eğer $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ ise; $< A, \oplus, \odot >$, $< \mathcal{H}, \circ, \bullet >$ 'nın bir idealidir.

İspat: $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ ise, $< A, \oplus, \odot >$, $< \mathcal{H}, \circ, \bullet >$ 'nın bir alt-halkasıdır. Diğer yandan, her $h \in \mathcal{H}$ ve $a \in A$ için $\mu_{\tilde{\circ}}(h, a, h \circ a) = 1 = \mu_{\tilde{\circ}}(a, h, a \circ h)$ olduğundan bulanık idealin tanımı gereği $h \circ a, a \circ h \in A$ olmalıdır. Bu da, $< A, \oplus, \odot >$ 'nın $< \mathcal{H}, \circ, \bullet >$ 'nın bir ideali olduğunu gösterir. □

Önerme 3.2.4 $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık ideal olmak üzere; $< \{0\}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ ve $< \mathcal{H}, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'dır. (Burada, $\tilde{\oplus}$ ve $\tilde{\odot}$, $\mathcal{H}$ üzerinde bulanık ikili işlemlerdir öyle ki, her $a, b, c \in \mathcal{H}$ için $\mu_{\tilde{\oplus}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{\circ}}(a, b, c)$ ve $\mu_{\tilde{\odot}}(a, b, c) \leq \mu_{\tilde{\bullet}}(a, b, c)$ 'dir.)

İspat: Sonuç 3.1.7 'den $< \{0\}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'dır ve ayrıca, her $h, s, t \in \mathcal{H}$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(0, h, s) = 1$ ise, $s = 0 \bullet h = 0 \in \{0\}$; $\mu_{\tilde{\bullet}}(h, 0, t) = 1$ ise, $t = h \bullet 0 = 0 \in \{0\}$ olduğu için $< \{0\}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'dır.

Yine Sonuç 3.1.7 'den $< \mathcal{H}, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'dır, ayrıca her $a, h, s, t \in H$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(a, h, s) = 1$ ise, $s = a \bullet h \in \mathcal{H}$ ve $\mu_{\tilde{\bullet}}(h, a, t) = 1$ ise $t = h \bullet a \in \mathcal{H}$ olduğundan $< \mathcal{H}, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ olmalıdır. □

Önerme 3.2.5 $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık halka, $j \in J$ için $< A_j, \tilde{\oplus}_j, \tilde{\odot}_j > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ olsun. Bu durumda, her $j \in J$ için $< \bigcap_{j \in J} A_j, \tilde{\oplus}_j, \tilde{\odot}_j > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'dır. Ayrıca, $\tilde{\oplus}$ ve $\tilde{\odot}$, $\bigcap_{j \in J} A_j$ üzerinde bulanık ikili işlemler öyle ki, her $a, b, c \in \bigcap_{j \in J} A$ için $\mu_{\tilde{\oplus}}(a, b, c) \leq \bigwedge_{j \in J} \mu_{\tilde{\circ}_j}(a, b, c)$ ve $\mu_{\tilde{\odot}}(a, b, c) \leq \bigwedge_{j \in J} \mu_{\tilde{\bullet}_j}(a, b, c)$ ise, $< \bigcap_{j \in J} A_j, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ olur.

İspat: Sonuç 3.1.6 'dan $< \bigcap_{j\in J} A_j, \tilde{\oplus}_j, \tilde{\odot}_j > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ ve $< \bigcap_{j\in J} A_j, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.h}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'dır. Diğer yandan, $a \in \bigcap_{j\in J} A_j$ ve $h, s, t \in \mathcal{H}$ için

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(a, h, t) = 1 \Longrightarrow t \in A_j\ ,\ \ j \in J \Longrightarrow t \in \bigcap_{j\in J} A_j,$$

$$\mu_{\tilde{\bullet}}(h, a, s) = 1 \Longrightarrow s \in A_j\ ,\ \ j \in J \Longrightarrow s \in \bigcap_{j\in J} A_j$$

olduğu için $< \bigcap_{j\in J} A_j, \tilde{\oplus}_j, \tilde{\odot}_j > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ ve $< \bigcap_{j\in J} A_j, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ olmalıdır. □

Tanım 3.2.6 $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık halka ve $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ olsun. Eğer $\tilde{\bullet}$ bulanık ikili işlemi $\mathcal{H} \setminus A$ üzerinde de bir bulanık ikili işlem ise, $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$, $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'nın bir bulanık asal idealidir denir.

Eğer, $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$ ideali $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'nın bir bulanık asal ideali ise $< A, \oplus, \odot >$, $< \mathcal{H}, \circ, \bullet >$ 'nın bir asal idealidir.

Önerme 3.2.7 $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık halka ve $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.i}{\leq} < \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) $< A, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} >$, $< \mathcal{H}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'nın bir bulanık asal idealidir,

(ii) her $z \in A$ ve her $x, y \in \mathcal{H} \setminus A$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(x, y, z) < 1$ 'dir.

İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii): Kabul edelim ki, uygun bir $z \in A$ ve $x, y \in \mathcal{H} \setminus A$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(x, y, z) = 1$ olsun. Bu durumda, bulanık asal ideal tanımı gereğince $\tilde{\bullet}$, $\mathcal{H} \setminus A$ üzerinde bir bulanık ikili işlem olduğu için öyle bir $t \in \mathcal{H} \setminus A$ vardır ki, $\mu_{\tilde{\bullet}}(x, y, t) = 1$ 'dir. Bu da, belirtisiz fonksiyonun tanımı gereği $z = t$, yani $z \in \mathcal{H} \setminus A$ çelişkisini verir.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): $\tilde{\bullet}$, $\mathcal{H}$ üzerinde bir bulanık ikili işlem olduğundan, $a, b \in \mathcal{H} \setminus A$ için öyle bir $c \in \mathcal{H}$ vardır ki, $\mu_{\tilde{\bullet}}(a, b, c) = 1$ 'dir. (ii) koşulu gereğince $c \in A$ olamayacağından, $c \in \mathcal{H} \setminus A$ olmalıdır. □

Tanım 3.2.8 $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ bir bulanık halka, $M \subset \mathcal{H}$ ve $<M,\tilde{\oplus},\tilde{\odot}> \overset{v.i}{\leq} <\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ olsun. Eğer $N \subset \mathcal{H}$ olmak üzere,

$$<M,\tilde{\oplus},\tilde{\odot}> \subset <N,\tilde{\ominus},\tilde{\star}> \subset <\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$$

olacak şekilde $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ 'nın $<N,\tilde{\ominus},\tilde{\star}>$ bulanık ideali yoksa, $<M,\tilde{\oplus},\tilde{\odot}>$ 'ya $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ 'nın bir maksimal bulanık idealidir denir. (Burada, $<M,\tilde{\oplus},\tilde{\odot}> \subset < N,\tilde{\ominus},\tilde{\star}>$ gösterimi; $M \subset N$ $(M \neq N)$, $\mu_{\tilde{\oplus}}(a,b,c) < \mu_{\tilde{\ominus}}(a,b,c)$, $\mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) < \mu_{\tilde{\star}}(a,b,c)$, $(a,b,c \in M)$ özelliklerinden en az birisinin sağlandığı anlamında kullanılmıştır.)

Önerme 3.2.9 $<M,\tilde{\oplus},\tilde{\odot}>$, $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ 'nın bir maksimal bulanık ideali ise, $<M,\oplus,\odot>$ da $<\mathcal{H},\circ,\bullet>$ 'nın bir maksimal idealidir.

İspat: Önerme 3.2.3 'ten $<M,\tilde{\oplus},\tilde{\odot}> \overset{v.i}{\leq} <\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ ise $<M,\oplus,\odot>$, $<\mathcal{H},\circ,\bullet>$ 'nın bir idealidir. Kabul edelim ki; $<M,\oplus,\odot>$, $<\mathcal{H},\circ,\bullet>$ 'nın bir maksimal ideali olmasın. Bu durumda, $M \subset N \subset \mathcal{H}$ olacak şekilde N ideali vardır ve dolayısıyla

$$<M,\tilde{\oplus},\tilde{\odot}> \subset <N,\tilde{\circ},\tilde{\bullet}> \overset{v.i}{\leq} <\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$$

olmasını gerektirir ki, bu da $<M,\tilde{\oplus},\tilde{\odot}>$ 'nın bir maksimal ideal olmasıyla çelişir.
□

Önerme 3.2.10 $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ 'nın maksimal bulanık idealleri; M, $<\mathcal{H},\circ,\bullet>$ 'nın bir maksimal ideali olmak üzere, $<M,\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ ideallerinden ibarettir.

İspat: M, $<\mathcal{H},\circ,\bullet>$ 'nın bir maksimal ideali olmak üzere, Önerme 3.2.9 'dan, $<M,\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$, $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ 'nın bir maksimal bulanık idealidir. Eğer, $<N,\tilde{\ominus},\tilde{\star}>$, $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ 'nın bir maksimal bulanık ideali ise, Önerme 3.2.9 gereğince, N, $<\mathcal{H},\circ,\bullet>$ 'nın bir maksimal ideali olacağından ve her zaman için

$$<N,\tilde{\ominus},\tilde{\star}> \overset{v.i}{\leq} <N,\tilde{\circ},\tilde{\bullet}> \overset{v.i}{\leq} <\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$$

sağlanacağından; $<\mathcal{H},\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ 'nın maksimal bulanık ideallerinin, M, $<\mathcal{H},\circ,\bullet>$ 'nın bir maksimal ideali olmak üzere $<M,\tilde{\circ},\tilde{\bullet}>$ 'dan ibaret olduğu görülür. □

3.3. Bulanık Cisimler

Aşağıdaki Tanım 3.3.1, Demirci (2003) 'deki Tanım 2.23 'ün özel bir durumuna karşılık gelmektedir.

Tanım 3.3.1 $< \mathcal{F}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ birimli, değişmeli bir bulanık halka; 0 ve 1 sırasıyla $\tilde{\circ}$ ve $\tilde{\bullet}$ bulanık ikili işlemlerine göre birim elemanlar olsun. Bu durumda, eğer her $a \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(a, b, 1) = 1 = \mu_{\tilde{\bullet}}(b, a, 1)$ olacak şekilde $b \in \mathcal{F}$ varsa, $< \mathcal{F}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık cisimdir denir.

Önerme 3.3.2 (Demirci 2003) $< \mathcal{F}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık cisim ise, $< \mathcal{F}, \circ, \bullet >$ bir cisimdir.

Bilindiği üzere; klasik cebirde bir $\mathcal{F}$ cisminin idealleri $\{0\}$ ve $\mathcal{F}$ 'den ibarettir. Yani herhangi bir cismin idealleri yalnızca iki tanedir. Bulanık cisimler için bu durum biraz daha farklıdır:

Örnek 3.3.3 $a, b, c, x, y, \alpha, \beta, \gamma, \eta, \in \mathbb{R}$ öyle ki, $0 \leq \eta \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha < 1$

$$E_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \ , \ E_{\mathbb{R}}(a,b) := \begin{cases} 1 & , \ a = b \\ \alpha & , \ a \neq b \end{cases}$$

$$E_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}((a,b),(x,y)) := \begin{cases} 1 & , \ (a,b) = (x,y) \\ \beta & , \ (a,b) \neq (x,y) \end{cases}$$

$$\tilde{\circ} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R} \ , \ \mu_{\tilde{\circ}}(a,b,c) := \begin{cases} 1 & , \ a + b = c \\ \gamma & , \ a + b \neq c \end{cases}$$

$$\tilde{\bullet} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R} \ , \ \mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,c) := \begin{cases} 1 & , \ a.b = c \\ \eta & , \ a.b \neq c \end{cases}$$

olmak üzere, $< \mathbb{R}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık cisimdir. Bu durumda, $\nu, \delta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \nu \leq \gamma$ ve $0 \leq \delta \leq \eta$ olmak üzere,

$$\tilde{\oplus} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R} \ , \ \mu_{\tilde{\oplus}}(a,b,c) := \begin{cases} 1 & , \ a + b = c \\ \nu & , \ a + b \neq c \end{cases}$$

$$\tilde{\odot} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R} \ , \ \mu_{\tilde{\odot}}(a,b,c) := \begin{cases} 1 & , \ a.b = c \\ \delta & , \ a.b \neq c \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, $< \mathbb{R}, \tilde{\oplus}, \tilde{\odot} > \overset{v.i}{\leq} < \mathbb{R}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ olur. Bu da, bir bulanık cismin bulanık ideallerinin sayısının sonlu olması gerekmediğini ifade eder.

Tanım 3.3.4 $< \mathcal{T}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ birimli, değişmeli bir bulanık halka; 0 ve 1 sırasıyla $\tilde{\circ}$ ve $\tilde{\bullet}$ bulanık ikili işlemlerine göre birim elemanlar olsunlar. Bu durumda, eğer her $a, b \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$ için $\mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,0) \neq 1$ ise, $< \mathcal{T}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık tamlık bölgesidir denir.

Önerme 3.3.5 $< \mathcal{T}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık tamlık bölgesi ise, $< \mathcal{T}, \circ, \bullet >$ bir tamlık bölgesidir.

İspat: $< \mathcal{T}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık tamlık bölgesi olsun. Bu durumda, Önerme 3.1.3 gereğince $< \mathcal{T}, \circ, \bullet >$ aynı zamanda bir birimli değişmeli halka ve $a, b \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$ için $\mu_{\tilde{\circ}}(a,b,0) \neq 1$ olduğundan $a \bullet b \neq 0$ olmalıdır. Bu da, $< \mathcal{T}, \circ, \bullet >$ 'nun bir tamlık bölgesi olduğunu gösterir. □

Önerme 3.3.6 $< \mathcal{F}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık cisim ise, $< \mathcal{F}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık tamlık bölgesidir.

İspat: $< \mathcal{F}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık cisim ise $< \mathcal{F}, \circ, \bullet >$ bir cisim, dolayısıyla bir tamlık bölgesidir (Karakaş 1998). Bu nedenle, her $a, b \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ için $a \bullet b \neq 0$ 'dır. Bu da, $\mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,0) \neq 1$ olduğunu gösterir. □

Önerme 3.3.7 $< \mathcal{T}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ sonlu elemanlı bir bulanık tamlık bölgesi ise, $< \mathcal{T}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ bir bulanık cisimdir.

İspat: $< \mathcal{T}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ sonlu elemanlı bir bulanık tamlık bölgesi ise, Önerme 3.3.5 gereğince $< \mathcal{T}, \tilde{\circ}, \bullet >$ sonlu elemanlı bir tamlık bölgesidir. Klasik cebirden bilindiği üzere, her sonlu tamlık bölgesi bir cisim olduğu için (Karakaş 1998), $< \mathcal{T}, \circ, \bullet >$ aynı zamanda bir cisimdir. Bu nedenle, her $a \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$ için öyle bir $b \in \mathcal{T}$ vardır ki, $a \bullet b = 1 = b \bullet a$ 'dır. Dolayısıyla, $\mu_{\tilde{\bullet}}(a,b,1) = 1 = \mu_{\tilde{\bullet}}(b,a,1)$ olacak şekilde $b \in \mathcal{T}$ vardır. Bu da, $< \mathcal{T}, \tilde{\circ}, \tilde{\bullet} >$ 'nın bir bulanık cisim olduğunu gösterir. □

4. BULANIK GRUPLAR KATEGORİSİ

4.1. Kategorilerle İlgili Bazı Temel Tanımlar

Bulanık grupların kategorisini incelemeden önce, aşağıda Wong (1976) 'da yer alan, kategori, altkategori, fonktör ve kategorilerin izomorfizmi gibi kategorilerle ilgili bazı temel kavramların tanımlarına yer verilmektedir.

Tanım 4.1.1 Elemanları X, Y, Z, ... ile gösterilen ve nesneler diye adlandırılan bir $\mathcal{C}$ topluluğu; her $(X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ için elemanlarına morfizmler denilen ve $\mathcal{M}(X, Y)$ ile gösterilen ayrık kümeler verilmiş olsun. Eğer $f \in \mathcal{M}(X, Y)$ bir morfizm ise, $f : X \longrightarrow Y$ ile gösterilsin. Ayrıca, her X, Y, $Z \in \mathcal{C}$ için bir

$$\circ : \mathcal{M}(Y, Z) \times \mathcal{M}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{M}(X, Z)$$

dönüşümü verilsin (burada, $\circ(f, g) := f \circ g$ ile gösterilir ve bu dönüşüm f ve g morfizmlerinin bileşke fonksiyonu olarak adlandırılır). Eğer, bu verilenler aşağıdaki iki koşulu sağlarsa, $\mathcal{C}$ nesneler topluluğuna bu morfizmler ve bileşke fonksiyonu ile birlikte bir kategori denir:

($\mathbf{K_1}$) Her $X, Y, Z, T \in \mathcal{C}$ ve $f \in \mathcal{M}(Z, T), g \in \mathcal{M}(Y, Z), h \in \mathcal{M}(X, Y)$ için $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

($\mathbf{K_2}$) Her $X \in \mathcal{C}$ için öyle bir $1_X \in \mathcal{M}(X, X)$ vardır ki, her $f \in \mathcal{M}(X, Y)$ ve her $g \in \mathcal{M}(Y, X)$ için $f \circ 1_X = f$, $1_X \circ g = g$ 'dir.

$\mathcal{C}$ bir kategori ise, yukarıda tanımlanan 1_X morfizmi tek türlü belirlidir. Çünkü, eğer verilen özellikleri sağlayan bir 1_X^* morfizmi varsa, (K_2) 'den $1_X^* = 1_X \circ 1_X^* = 1_X$ elde edilir. Bu da, 1_X 'in tek olduğunu gösterir. Bu nedenle, 1_X 'e X 'in birim morfizmi adı verilir.

Tanım 4.1.2 $\mathcal{C}$ bir kategori, $\mathcal{M}_C$, $\mathcal{C}$ 'nin tüm morfizmler kümesi; $\mathcal{S}$ de, $\mathcal{C}$ 'nin bazı nesnelerinden ve bazı morfizmlerinin bir topluluğu olsun. Bu durumda, $\mathcal{M}_S$, $\mathcal{S}$ 'deki morfizmler kümesi olmak üzere,

(i) $X \in \mathcal{S}$ ise, $1_X \in \mathcal{M}_S$,

(ii) $f : X \longrightarrow Y$ morfizmi $\mathcal{M}_S$ 'ye ait ise, $X, Y \in \mathcal{S}$,

(iii) $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow Z$ morfizmleri $\mathcal{M}_S$ 'ye ait ise, $g \circ f \in \mathcal{M}_S$

koşulları sağlanıyorsa, $\mathcal{S}$ 'ye $\mathcal{C}$ 'nin bir altkategorisidir denir.

Altkategori tanımından anlaşılacağı üzere, bir altkategori aynı zamanda bir kategoridir. Aşağıda, kategoriler arasında ilişki kurmada önemli bir yere sahip olan fonktör tanımına yer verilmektedir:

Tanım 4.1.3 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{K}$ kategoriler, $\mathcal{M}_C$ ve $\mathcal{M}_K$ sırasıyla, $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{K}$ 'nın morfizmler kümesi olsunlar. Eğer

($\mathbf{F_1}$) her $X \in \mathcal{C}$ için $X' = \mathcal{F}(X)$ olacak şekilde bir tek $X' \in \mathcal{K}$ var,

($\mathbf{F_2}$) $\mathcal{M}_C$ 'nin her $f : X \longrightarrow Y$ morfizmi için öyle bir $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{M}_K$ vardır ki, $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ ve

(a) $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$ **(b)** $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$

ise, $\mathcal{F}$ 'ye $\mathcal{C}$ 'den $\mathcal{K}$ 'ya bir fonktördür denir ve $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.4 Tanım 4.1.3 'ün gösterimleriyle, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ bir fonktör olsun.

(1) Eğer her $X, Y \in \mathcal{C}$ ve her $f, g : X \longrightarrow Y \in \mathcal{M}_C$ için $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$ olduğunda $X = Y$ ve $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$ olduğunda $f = g$ ise, $\mathcal{F}$ bire-bir bir fonktördür denir.

(2) Eğer

(i) her $X' \in \mathcal{K}$ için öyle bir $X \in \mathcal{C}$ vardır ki, $X' = \mathcal{F}(X)$,

(ii) her $X, Y \in \mathcal{C}$ ve $\mathcal{M}_K$ 'nın her $f' : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ morfizmi için öyle bir $f : X \longrightarrow Y \in \mathcal{M}_C$ vardır ki, $f' = \mathcal{F}(f)$ ise, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ örten bir fonktördür denir.

(3) Eğer, $\mathcal{F}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ bire-bir ve örten bir fonktör ise, $\mathcal{F}$ fonktörü bir izomorfizmdir ve bu durumda $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{K}$ kategorileri izomorftur denir, $\mathcal{C} \cong \mathcal{K}$ ile gösterilir.

4.2. Bulanık Gruplar Kategorisi

$\mathcal{G}$ nesneleri klasik gruplar, morfizmleri grup homomorfizmleri ve bileşke işlemi fonksiyon bileşke işlemi olan bir küme ise, $\mathcal{G}$ kümesi bu morfizmler ve bileşke işlemiyle birlikte bir kategoridir ve bu kategori gruplar kategorisi olarak adlandırılır (Hungerford 1989).

Bu bölümde öncelikle; "nesneleri bulanık monoidler (gruplar), morfizmleri bulanık homomorfizmler ve bileşke işlemi fonksiyon bileşke işlemi olan bir $\mathcal{B}$ kümesi acaba bir kategori midir?" sorusu cevaplandırılacaktır. Daha sonra da, "bulanık gruplar kategorisi ile gruplar kategorisi arasında ne gibi bir ilişki vardır? Acaba bu kategoriler birbirine izomorf mudur?" soruları cevaplandırılacaktır.

Örnek 4.2.1 $\mathcal{B}_m := \{ < G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >$ bir bulanık monoid$\}$,
$< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >, < G', \tilde{\bullet}, E_{G'\times G'}, E_{G'} > \in \mathcal{B}_m$ için,

$$\mathcal{M}_m(G, G') := \{ f \mid f : G \longrightarrow G' \text{ bulanık homomorfizm}\}$$

$$\mathcal{M}_m := \{ f \mid < G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >, < G', \tilde{\bullet}, E_{G'\times G'}, E_{G'} > \in \mathcal{B}_m, f : G \longrightarrow G' \text{ bul. hom.}\}$$

olarak tanımlansın. Ayrıca, $G, G', G'' \in \mathcal{B}_m$ için

$$\circ : \mathcal{M}_m(G', G'') \times \mathcal{M}_m(G, G') \longrightarrow \mathcal{M}_m(G, G''), \quad \circ(f, g) := f \circ g$$

olmak üzere,

(K$_1$) $G, G', G'', G''' \in \mathcal{B}_m$, $f \in \mathcal{M}_m(G'', G''')$, $g \in \mathcal{M}_m(G', G'')$ ve $h \in \mathcal{M}_m(G, G')$ ise, f, g, h bulanık homomorfizmleri klasik fonksiyonlar olduğundan bileşke işlemi, yani $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ sağlanır.

(K$_2$) $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G > \in \mathcal{B}_m$ için $1_G : G \longrightarrow G$ birim dönüşümü G 'den G 'ye bir bulanık homomorfizm olduğundan her $f \in \mathcal{M}_m(G, G')$ ve her $g \in \mathcal{M}_m(G', G)$ için $f \circ 1_G = f$ ve $1_G \circ g = g$ eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle, $\mathcal{B}_m$ bir kategoridir, bu kategoriye bulanık monoidler kategorisi adı verilir.

Örnek 4.2.2 $\mathcal{B} := \{< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G > \ | \ < G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >$ bir bulanık grup$\}$,

$< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >, < G', \tilde{\bullet}, E_{G'\times G'}, E_{G'} > \in \mathcal{B}$ için,

$$\mathcal{M}(G, G') := \{ \ f \ | f : G \longrightarrow G' \ \text{ bulanık homomorfizm}\}$$

$\mathcal{M} := \{f | < G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >, < G', \tilde{\bullet}, E_{G'\times G'}, E_{G'} > \in \mathcal{B}, f : G \longrightarrow G'$ bul. hom.$\}$

$G, G', G'' \in \mathcal{B}$ ve $\circ : \mathcal{M}(G', G'') \times \mathcal{M}(G, G') \longrightarrow \mathcal{M}(G, G'')$ için $\circ(f, g) := f \circ g$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

(K$_1$) $f \in \mathcal{M}(G'', G''')$, $g \in \mathcal{M}(G', G'')$ ve $h \in \mathcal{M}(G, G')$ ise f, g, h bulanık homomorfizmleri klasik fonksiyonlar olduğundan bileşke işlemi sağlanır, yani $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ 'dir.

(K$_2$) $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G > \in \mathcal{B}$ için $1_G : G \longrightarrow G$ birim dönüşümü G 'den G 'ye bir bulanık homomorfizm olduğundan her $f \in \mathcal{M}(G, G')$ ve her $g \in \mathcal{M}(G', G)$ için $f \circ 1_G = f$ ve $1_G \circ g = g$ eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle, $\mathcal{B}$ kümesi yukarda tanımlanan morfizmler ve bileşke işlemiyle birlikte, bir kategoridir, bu kategoriye bulanık gruplar kategorisi denir.

Örnek 4.2.3 $\mathcal{B}_A := \{ \ < G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G > \ $ bir abelyen bulanık grup $\}$
$< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >, < G', \tilde{\bullet}, E_{G'\times G'}, E_{G'} > \in \mathcal{B}_A$ için,

$$\mathcal{M}(G, G') := \{ \ f \ | f : G \longrightarrow G' \ \text{ bulanık homomorfizm}\}$$

$\mathcal{M}_A := \{f | < G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >, < G', \tilde{\bullet}, E_{G'\times G'}, E_{G'} > \in \mathcal{B}_A, f : G \longrightarrow G'$ bul. hom.$\}$

olmak üzere;

(i) $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G > \in \mathcal{B}_A$ ise 1_G, G 'den G 'ye bulanık birim homomorfizmi $\mathcal{M}_A$ 'ya aittir,

(ii) $f : G \longrightarrow G' \in \mathcal{M}_A$ ise, $\mathcal{M}_A$ 'nın tanımı gereği, G ve G' bulanık abel grupları olacağı için bu gruplar $\mathcal{B}_A$ 'ya aittir,

(iii) $f : G' \longrightarrow G''$ ve $g : G \longrightarrow G'$ morfizmleri $\mathcal{M}_A$ 'ya ait ise, $f \circ g : G \longrightarrow G''$ bileşke fonksiyonu da bir bulanık homomorfizm olduğundan $f \circ g \in \mathcal{M}_A$ 'dır.

Bu nedenle; $\mathcal{B}_A$, $\mathcal{B}$ 'nin bir altkategorisidir, bu kategoriye de abelyen bulanık gruplar kategorisi adı verilir.

Örnek 4.2.4 $\mathcal{B}^* := \{< G, \tilde{o}, E^*_{G\times G}, E^*_G > \mid < G, \tilde{o}, E^*_{G\times G}, E^*_G >$ bir bulanık grup$\}$,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}^*} := \{ f :< G, \tilde{o}, E^*_{G\times G}, E^*_G >, < G', \tilde{\bullet}, E^*_{G'\times G'}, E^*_{G'} > \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}^*},$$
$$f : G \longrightarrow G' \text{ bulanık homomorfizm}\}$$

olmak üzere (burada, $E^*_{G'\times G'}$ ve $E^*_{G'}$ klasik belirtisiz eşitliklerdir),

(i) $< G, \tilde{o}, E^*_{G\times G}, E^*_G > \in \mathcal{B}^*$ ise, 1_G, G 'den G 'ye bulanık birim homomorfizmi $\mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}$ 'a aittir,

(ii) $f : G \longrightarrow G' \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}$ ise, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}$ 'nın tanımı gereği, bu gruplar $\mathcal{B}^*$ 'a aittir,

(iii) $f : G' \longrightarrow G''$ ve $g : G \longrightarrow G'$ morfizmleri $\mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}$ 'a ait ise, $f \circ g : G \longrightarrow G''$ bileşke fonksiyonu da bir bulanık homomorfizm olduğundan $f \circ g \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}$ 'dır.

Bu nedenle; $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{B}$ 'nin bir altkategorisidir bu kategoriye de $\mathcal{B}$ 'nin indirgenmiş kategorisi adı verilir.

Örnek 4.2.5 Örnek 4.2.2 'deki $\mathcal{B}$ bulanık gruplar kategorisi, Örnek 4.2.1 'deki $\mathcal{B}_m$ bulanık monoidler kategorisinin bir altkategorisidir.

Şimdi, gruplar kategorisi $\mathcal{G}$ 'den bulanık gruplar kategorisi $\mathcal{B}$ 'ye bir fonktör bulalım: $\mathcal{M}_G$ ve $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ sırasıyla $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{B}$ 'nin morfizmleri kümesi olmak üzere,

$\mathcal{F} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{B}$; $< G, \circ > \in \mathcal{G}$, $f \in \mathcal{M}_G$ için,

$$\mu_{\tilde{o}}(x, y, z) := \begin{cases} 1 & , \quad x \circ y = z \\ 0 & , \quad x \circ y \neq z \end{cases}$$

olmak üzere, $\mathcal{F}(< G, \circ >) :=< G, \tilde{o}, E^*_{G\times G}, E^*_G >$ ve $\mathcal{F}(f) := f$ olarak tanımlandığında,

$(\mathbf{F_1})$ $< G, \circ > \in \mathcal{G}$ için $\mathcal{F}(< G, \circ >) :=< G, \tilde{o}, E^*_{G\times G}, E^*_G > \in \mathcal{B}$ 'dir,

$(\mathbf{F_2})$ $f :< G, \circ > \longrightarrow < G'', \bullet >$ bir grup homomorfizmi ise,

$$\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(< G, \circ >) \longrightarrow \mathcal{F}(< G', \bullet >)$$

(a) $\mathcal{F}(1_{< G, \circ >}) = 1_{< G, \circ >} = 1_{\mathcal{F}(< G, \circ >)}$

(b) $\mathcal{F}(f \circ g) = f \circ g = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ olduğundan yukarıda tanımlanan $\mathcal{F} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{B}$ bir fonktördür.

Şimdi de, $\mathcal{F}$ 'nin bire-bir ve örtenliğini araştıralım:

Bire-birlik: $< G, \circ >, < G', \bullet > \in \mathcal{G}$ ve $f, g :< G, \circ > \longrightarrow < G', \bullet >$ homomorfizmler olsun. Eğer

$$\mathcal{F}(< G, \circ >) = \mathcal{F}(< G', \bullet >) \Longrightarrow G = G' \ , \quad \mu_{\tilde{\circ}} = \mu_{\tilde{\bullet}} \Longrightarrow < G, \circ > = < G', \bullet > .$$

Ayrıca

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g) : \mathcal{F}(< G, \circ >) \longrightarrow \mathcal{F}(< G', \bullet >)$$

ise,

$$f = g :< G, \tilde{\circ}, E^*_{G \times G}, E^*_G > \longrightarrow < G', \tilde{\bullet}, E^*_{G' \times G'}, E^*_{G'} >$$

olacağından, $\mathcal{F}$ bire-bir bir fonktördür.

Örtenlik:

(i) $< G, \tilde{\circ}, E_{G \times G}, E_G > \in \mathcal{B}$ için eğer $E_G \neq E^*_G$ ise, her $< G, \circ > \in \mathcal{G}$ için

$$\mathcal{F}(< G, \circ >) \neq < G, \tilde{\circ}, E_{G \times G}, E_G >$$

olacağından, $\mathcal{F}$ bir örten fonktör değildir.

$\mathcal{F}$ örten olacak şekilde $\mathcal{B}$ 'nin bir altkategorisi aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

$\mathcal{B}^*$, Örnek 4.2.4 'teki gibi tanımlanmak üzere,

$$\mathcal{F} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{B}^* \text{ için } \mathcal{F}(< G, \circ >) = < G, \tilde{\circ}, E^*_{G \times G}, E^*_G > \in \mathcal{B}^*$$

olacağından,

(i) $< G, \tilde{\circ}, E^*_{G \times G}, E^*_G > \in \mathcal{B}^*$ için öyle bir $< G, \circ > \in \mathcal{G}$ vardır ki, $\mathcal{F}(< G, \circ >) = < G, \tilde{\circ}, E^*_{G \times G}, E^*_G >$ 'dır.

(ii) $< G, \circ >, < G', \bullet > \in \mathcal{G}$ ve $f' : \mathcal{F}(< G, \circ >) \longrightarrow \mathcal{F}(< G', \bullet >)$ bir bulanık homomorfizm olsun. Bu durumda, f' aynı zamanda bir homomorfizm olacağından $f := f'$ biçiminde tanımlandığında $f' = f = \mathcal{F}(f)$ eşitliği sağlanmış olur. Bu da,

$\mathcal{F}$ 'nin örtenliğini, dolayısıyla $\mathcal{F} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{B}^*$ 'ın bir izomorfizm, yani $\mathcal{G} \cong \mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$ olduğunu ifade eder.

Bulanık gruplar kategorisi $\mathcal{B}$ 'den gruplar kategorisi $\mathcal{G}$ 'ye bir fonktör, aşağıdaki gibi bulunabilir:

$\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{G}$, $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G > \in \mathcal{B}$, $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ için

$$\circ : G \times G \longrightarrow G \ , \quad \circ(x,y) := z \text{ öyle ki } \mu_{\tilde{o}}(x,y,z) = 1$$

olmak üzere; $\mathcal{F}(< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >) :=< G, \circ >$ ve $\mathcal{F}(f) := f$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

($\mathbf{F_1}$) $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G > \in \mathcal{B}$ için $\mathcal{F}(< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >) =< G, \circ > \in \mathcal{G}$ 'dir.

($\mathbf{F_2}$) $f :< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G > \longrightarrow < G', \tilde{\bullet}, E_{G'\times G'}, E_{G'} >$ bir bulanık homomorfizm ise,

(a) $\mathcal{F}(1_{<G,\tilde{o},E_{G\times G},E_G>}) = 1_{<G,\tilde{o},E_{G\times G},E_G>} = 1_{\mathcal{F}(<G,\tilde{o},E_{G\times G},E_G>)}$

(b) $\mathcal{F}(f \circ g) = f \circ g = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ olur.

Bu nedenle, yukarıda tanımlanan $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{G}$ bir fonktördür.

$\mathcal{F}$ 'nin bire-bir ve örtenliğini araştıralım:

Bire-birlik: $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >, < G', \tilde{\bullet}, E_{G'\times G'}, E_{G'} > \in \mathcal{B}$, $\mathcal{F}(< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >) = \mathcal{F}(< G, \tilde{\bullet}, E_{G'\times G'}, E_{G'} >)$ ise, $< G, \circ >=< G', \bullet >$ olabilir, ama bu her zaman için

$$< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >=< G', \tilde{\bullet}, E_{G'\times G'}, E_{G'} >$$

eşitliğini gerektirmediği için (Örnek 2.1.4), $\mathcal{F}$ bire-bir bir fonktör değildir.

Örtenlik: **(i)** $< G, \circ > \in \mathcal{G}$ için öyle bir $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G > \in \mathcal{B}$ vardır ki

$$\mathcal{F}(< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >) =< G, \circ >$$

olur.

(ii) $< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >, < G', \tilde{\bullet}, E_{G'\times G'}, E_{G'} > \in \mathcal{B}$ ve

$$f' : \mathcal{F}(< G, \tilde{o}, E_{G\times G}, E_G >) \longrightarrow \mathcal{F}(< G', \tilde{\bullet}, E_{G'\times G'}, E_{G'} >),$$

yani $f' :< G, \circ > \longrightarrow < G', \bullet >$, $\mathcal{G}$ 'nin bir morfizmi olsun. Bu durumda, Örnek 2.1.4 gereğince, her f' homomorfizmi bir bulanık homomorfizm olamayacağı için $f' = \mathcal{F}(f) = f$ eşitliği sağlanmaz. Bu nedenle, $\mathcal{F}$ örten değildir. Fakat; $\mathcal{B}^*$, Örnek 4.2.4 'teki gibi tanımlanmak üzere, $\mathcal{F}$ 'nin $\mathcal{B}^*$ 'dan $\mathcal{G}$ 'ye bir izomorfizm olacağı açıktır.

SONUÇ

Bu çalışmanın ilk kısmında belirtisiz eşitliklerle ilgili çeşitli özellikler belirlenmiş ve bulanık yarıgruplarda genelleşmiş birleşme özelliğiyle ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, bir bulanık grubun sol dönüşümler uzayının (sağ dönüşümler uzayının) uygun bir bulanık ikili işlemle beraber bir bulanık grup oluşturduğu ve bu iki grubun birbirine bulanık izomorf olduğu görülmüştür.

Daha sonra, Demirci 'nin (1999-b) tanımladığı bulanık altgrubun bir genelleştirilmişi olan yeni bir bulanık altgrup tanımı verilmiş ve sağladığı özellikler incelenmiştir. Bu özelliklere göre, Demirci'nin (1999-b) bulanık altgruplarla ilgili olarak ifade ettiği teorem, önerme ve sonuçların genelleştirilmiş biçimdeki ifadelerinin elde edilebildiği belirlenmiştir.

Ayrıca, bir bulanık grubun tüm bulanık altgruplarından oluşan kümenin bir tam latis olduğu ve bir bulanık grubun en azından sayılabilir sonsuz sayıda bulanık altgruba sahip olduğu elde edilmiştir.

Bulanık gruplarla ilgili olarak bugüne kadar yapılan çalışmalarda, bulanık normal altgrup, bulanık normalleştirici, bulanık ideal (asal, maksimal), bulanık cisim ve bulanık tamlık bölgesi kavramları ele alınmamıştır. Bu çalışmada, sözü edilen kavramlar tanımlanmış; bu tanımların klasikte sağlanan bazı özelliklere sahip olup olmadığı araştırılmış ve bu konuda olumlu sonuçlar gözlenmiştir. Son olarak da, bulanık gruplar kategorisi incelenmiş ve klasik gruplar kategorisinin bulanık gruplar kategorisinin bir altkategorisine izomorf olduğu elde edilmiştir.

Klasik cebir oldukça geniş bir alana sahip olduğu için; doğaldır ki, bir tez çalışmasında, tüm cebirsel yapıların tek tek bulanık cebirdeki karşılığının ifade edilmesi ve bunların sağladığı özelliklerin belirlenmesi mümkün değildir. Bu nedenle, burada ancak klasik cebirdeki grup, altgrup, normal altgrup, halka, ideal, cisim, tamlık bölgesi v.b. gibi temel kavramların tanım ve özellikleri bulanık cebire taşınmak istenmiş, sahip olduğu bazı önemli özellikler incelenmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarda da, diğer cebirsel kavramlar (permutasyon grupları, Sylow grupları, modüller v.b.) tanımlanıp sahip olduğu özellikler araştırılacaktır. Hatta, burada elde edilen sonuçların benzerleri, özel bir integral değişmeli cl-monoid olan $([0,1], \leq, \wedge)$ yerine, genel bir integral değişmeli cl-monoid (Demirci 2002, 2003, 2003-b) üzerinde incelenecektir.

KAYNAKLAR

AKGÜL, M. 1988. Some properties of fuzzy groups. *JMAA*, 133, 93-100.

ANTHONY, J. M. and SHERWOOD, H. 1979. Fuzzy groups redefined. *JMAA*, 69, 124-130.

BHATTACHARYA, P. 1987. Fuzzy subgroups: Some characterizations. *JMAA*, 128, 241-252.

DAS, P.S. 1981. Fuzzy groups and level subgroups. *JMAA*, 84, 264-269.

DEMİRCİ, M. 1999-a. Fuzzy functions and their fundamental properties. *FSS*, 106, 239-246

DEMİRCİ, M. 1999-b. Vague groups. *JMAA*, 230, 142-156

DEMİRCİ, M. 2000. Fuzzy functions and their applications. *JMAA*, 252, 495-517

DEMİRCİ, M. and ÇOKER, D. 2002. Remarks on vague groups. *J. Fuzzy Math*, vol. 10, issue 3, pp. 657-668

DEMİRCİ, M. 2002. Fundamentals of M-vague algebra and M-vague arithmetic operations, *Int. J. Uncertainty, Fuzziness and knowledge-Based Systems*, 10, 25-75.

DEMİRCİ, M. 2003. Foundations of fuzzy functions and vague algebra based on many-valued equivalence relations, Part II: Vague Algebraic Notions, *Int. J. General Systems* (To appear).

DEMİRCİ, M. 2003-b. Foundations of fuzzy functions and vague algebra based on many-valued equivalence relations, Part III: Constructions of Vague Algebraic Notions and vague arithmetic operations, *Int. J. General Systems* (To appear).

DEMİREL, O. 1999. Bulanık Mantık. *Bilim ve Teknik*, 385, 78-80.

DOBOİS, D. and PRADE, H. 1980. Fuzzy Sets and Systems. Academic Press, 393 pp, New York.

HUNGERFORD, T. W. 1989. Algebra. Springer-Verlag, 502 pp, New York.

KARAKAŞ, H.İ. 1998. Soyut Cebire Giriş. Matematik Vakfı Yayını, 175 s, Ankara.

KIM, J.G. 1997. Some characterizations of fuzzy subgroups. *FSS*, 87, 243-249.

RAY, S. 1992. Analysis of the level subgroups of a fuzzy group. *FSS*, 51, 323-331.

ROSENFELD, A. 1971. Fuzzy groups. *JMAA*, 35, 512-517.

SHERWOOD, H. 1983. Products of fuzzy subgroups. *FSS*, 11, 79-89.

SEZER, S. 2002. Bulanık Cebirsel Yapılar Üzerine. *XV. Ulusal Matematik Sempozyumu*, 66, Mersin.

WONG, C.K. 1976. Categories of fuzzy sets and fuzzy topological spaces. *JMAA*, 53, 704-714.

ZADEH, L.A. 1968. Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.

ZHANG, Y. 2001. Some properties of fuzzy subgroups. *FSS*, 119, 427-438.

ÖZGEÇMİŞ

Sevda SEZER, Bitlis'te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 1990 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1994 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 1994-Ocak 1997 yılları arasında, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Ocak 1997 tarihinde aynı enstitüde Doktora öğrenimine başladı. Halen, Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.