T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FOURIER DÖNÜŞÜMÜ BİLİNEN BİR FONKSİYONUN TOPLANABİLİRLİK METODLARI İLE OLUŞTURULMASI

Melih ERYİĞİT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANTALYA
1998

FOURİER DÖNÜŞÜMÜ BİLİNEN BİR FONKSİYONUN TOPLANABİLİRLİK METODLARI İLE OLUŞTURULMASI

Melih ERYİĞİT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞUSTOS - 1998

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FOURİER DÖNÜŞÜMÜ BİLİNEN FONKSİYONUN TOPLANABİLİRLİK METODLARI İLE OLUŞTURULMASI

Melih ERYİĞİT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ../../1998 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından .....(......) not takdir edilerek Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

JÜRİ : Doç. Dr. İlham ALİYEV ....
(Danışman)
Prof. Dr. Halil İ. KARAKAŞ ....

Prof. Dr. Doğan ÇOKER ....

ÖZ

FOURİER DÖNÜŞÜMÜ BİLİNEN FONKSİYONUN TOPLANABİLİRLİK METODLARI İLE OLUŞTURULMASI

Melih ERYİĞİT

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Ağustos-1998, 33 Sayfa

Tüm reel eksende Lebesgue anlamında integrallenebilir bir fonksiyonun Fourier dönüşümü verildiğinde fonksiyonun kendisinin oluşturulması meselesi ve benzer şekilde, $[0, 2\pi]$ arlığında integrallenebilir bir fonksiyonun Fourier katsayıları verildiğinde, bu katsayılar vasıtasıyla fonksiyonun kendisinin oluşturulması meselesi Harmonik Analizin önemli problemi olarak ortaya çıkmış ve bir çok ünlü matematikçinin, örneğin, Hardy ve Littlewod, Cesaro, Poisson, Bochner, Riesz, Zygmund'un v.s ilgi odağı olmuştur.

İntegrallenebilir bir fonksiyonun Fourier dönüşümü integrallenebilir olmayabilir. Dolayısıyla, bu durumlarda Fourier dönüşümü vasıtasıyla fonksiyonun kendisini oluşturmak için Ters Fourier dönüşümünü uygulamak mümkün olmayabilir. Fakat fonksiyon hakkında tüm bilgiler, onun bir anlamda duali olan Fourier dönüşümünde bulunduğundan, matematikçiler bu bilgileri Fourier dönüşümünden edinmenin yollarını düşünmüşler ve böylece değişik toplanabilirlik (summability) metodları ortaya çıkmıştır. Bu metodların içinde en ünlüleri Abel-Poisson, Gauss-Weierstrass ve Riesz-Bochner metodlarıdır.

Biz bu çalışmada adı geçen toplanabilirlik metodlarını ayrı ayrı inceleyerek onların Harmonik Analizde oynadıkları önemli rolü ortaya koyduk. Ayrıca tezimizin bulgular kısmında Riesz-Bochner ortalamalarının fonksiyona bir tür pürüzsüzlük noktalarında yakınsama hızını gösterdik.

ANAHTAR KELİMELER : Fourier Dönüşümü, Abel-Poisson Toplanabilirlik, Gauss-Weierstrass Toplanabilirlik, Riesz-Bochner Toplanabilirlik, μ-pürüzsüzlük, Lebesgue noktaları, Yakınsama hızı.

JÜRİ : Doç. Dr. İlham ALİYEV
Prof. Dr. Halil İ. KARAKAŞ
Prof. Dr. Doğan ÇOKER

ABSTRACT

THE RECONSTRUCTION OF A FUNCTION WHOSE FOURIER TRANSFORM IS KNOWN BY MEANS OF SUMMABILITY METHODS

Melih ERYİĞİT

M.S. in Mathematics
Advisor: Doç. Dr. İlham ALİYEV
August, 1998, 33 pages

The question " Given the Fourier transform of a Lebesgue integrable function f, how do we obtain f back again from its Fourier transform, similarly given the Fourier coefficients of a Lebesgue integrable function at $[0, 2\pi]$, how do we obtain f back again from its Fourier coefficients ? " was an important problem of harmonic analysis and its applications, and it has drawn many famous mathematicans' attentions, for example, Hardy and Littlewod, Cesaro, Poisson, Bochner, Riesz, Zygmund etc.

The Fourier transform of a Lebesgue integrable function may not be integrable therefore we could not obtain f back again by inverse Fourier transform of f. In order to get rid of this difficulty, mathematicians reached different summability methods. The most well-known ones of these methods are Abel-Poisson, Gauss-Weierstrass and Riesz-Bochner.

In this work we concentrate on the above mentioned summabilitiy methods. We have olso pointed out their significant role in harmonic analysis In the last section, we study Riesz-Bochner means' convergence rate at some kind of smoothness point of the function in details.

KEY WORDS : The Fourier transform, Poisson-Gauss Summability, Gauss-Weierstrass Summability, Riesz-Bochner Summability , μ-Smoothness, Lebesgue point, Convergence rate.

COMMİTTEE : Doç. Dr. İlham ALİYEV
Prof. Dr. Halil İ. KARAKAŞ
Prof. Dr. Doğan ÇOKER

ÖNSÖZ

Fourier dönüşümü verilen fonksiyonun, çeşitli toplanabilirlik metodlarıyla oluşturulmasının incelendiği bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümünde ilerki bölümlerde kullanılacak olan bazı kavramlar hakkında ön bilgi ve tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde Fourier dönüşümünün giri-şim operatörü ile arasındaki önemli ilişkiler incelenmiş ve Fourier dönüşümü verilen fonksiyonun toplanabilirlik metodlarıyla belirlenmesi için yeterli koşullar verilmiştir. Tezin son bölümünde özel bir toplanabilirlik metodu olan Riesz-Bochner metodu incelenmiş ve Riesz-Bochner ortalamalarının fonksiyona bir tür pürüzsüzlük noktalarında yakınsama hızı belirlenmiştir.

Bu tez çalışması boyunca ilgi ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. İlham ALİYEV' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Tüm reel eksende Lebesgue anlamında integrallenebilen bir fonksiyonun Fourier dönüşümü verildiğinde fonksiyonun kendisinin oluşturulması meselesi Harmonik Analizin ve onun uygulamalarının önemli bir problemi olarak ortaya çıkmıştır.

Bu çalşmada esas olarak, *" $f \in L^1(\mathbf{R^n})$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\widehat{f}$ verildğinde, acaba $\widehat{f}$'den yararlanarak f'yi nasıl elde ederiz?"* sorusuna cevap veren değişik toplanabilirlik (summability) metotları tanıtılmış ve özel olarak *Bochner-Riesz* metodu için Bochner-Riesz ortalamalarının bir tür pürüzsüzlük noktalarında sözkonusu fonksiyona yakınsama hızı incelenmiştir.

1.2. Temel Kavramlar ve Gösterimler

Bu bölümde tez boyunca sıkça kullanılan bazı kavramların tanımı ve gösterimleri verilecektir. Başka özel kavramların tanımı ve gösterimleri, tez boyunca konu içerisinde açıklanacaktır.

$\mathbf{R^n}$ ile n-boyutlu (reel) öklid uzayını ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile bu uzayın elemanlarını göstereceğiz. $x.y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ sayısı $x, y \in \mathbf{R^n}$ nin iç çarpımı, $|x| = \sqrt{x.x}$ sayısı $x \in \mathbf{R^n}$ nin normudur. $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ile $\mathbf{R^n}$' de bilinen Lebesgue ölçümü kastedilmiştir.

$L^p = L^p(\mathbf{R^n}), 1 \leq p < \infty$, ile $\mathbf{R^n}$ üzerinde tanımlı ve $||f||_p = (\int\limits_{\mathbf{R^n}} |f|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$ olan ölçülebilir fonksiyonlar uzayını göstereceğiz. Burada $||f||_p$ sayısına f' in L^p normu denir. $L^\infty = L^\infty(\mathbf{R^n})$ ile de $\mathbf{R^n}$ üzerinde tanımlı ve $||f||_\infty = ess.sup|f(x)| < \infty$ olan fonksiyonlar uzayını göstereceğiz. $C_0 = C_0(\mathbf{R^n})$ ile sonsuzlukta sıfıra giden sürekli fonksiyonlar uzayı gösterilecektir. Ayrıca aksi belirtilmediği takdirde bu tez boyunca tüm fonksiyonlarımız kompleks değerli düşünülecektir. Eğer $\int\limits_{\mathbf{R^n}} f(x)\,dx$ integrali var ve sonlu ise, bu integrale yakınsak, aksi halde ıraksak denir. Ayrıca bir özellik hemen hemen her x için sağlanıyor denildiğinde, bu özelliğin sağlanmadığı x noktaları kümesinin ölçümünün sıfır olduğu anlaşılacaktır.

$\Phi \in C_0(\mathbf{R^n}) \cap L^1(\mathbf{R^n})$ ve $\Phi(0) = 1$ olmak üzere $\int\limits_{\mathbf{R^n}} f(x)\,dx$ integralinin (ıraksak veya yakınsak) Φ-ortalamaları

$$M_{\varepsilon,\Phi}(f) \equiv M_\varepsilon(f) = \int\limits_{\mathbf{R^n}} \Phi(\varepsilon x) f(x)\,dx \ , \ (\varepsilon > 0)$$

şeklinde tanımlanır. Bu takdirde, eğer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M_\varepsilon(f) = l$$

sonlu limiti varsa, (ıraksak) $\int\limits_{\mathbf{R^n}} f(x)\,dx$ integrali l'ye yakınsar denir. Φ fonksiyonunun bu veya başka şekilde seçimi değişik toplanabilirlik (summability) metodları doğuruyor. Örneğin, $\Phi(x) = e^{-|x|}$, $\Phi(x) = e^{-|x|^2}$ ve $\delta > 0$ olmak üzere,

$$\Phi(x) = \Phi_\delta(x) = \begin{cases} (1-|x|^2)^\delta & , \quad |x| \le 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

alındığında, sırası ile klasik Abel, Gauss-Weierstrass ve Bochner-Riesz ortalamaları ve uygun toplanabilirlik (summability) metodları elde ederiz.

Sözkonusu toplanabilirlik metodlarının uygulandığı en önemli problemlerden birisi, f fonksiyonunun, Fourier dönüşümü (ki onu $\widehat{f}$ ile göstereceğiz) $\widehat{f}$ ye göre oluşturulması (restoration) problemidir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMALARI

2.1. Fourier Dönüşümü ve Girişim

Bu kesimde $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ fonksiyonun Fourier dönüşümü ve iki ölçülebilir fonksiyonun girişimi tanımlarını verip, Girişim ve Fourier dönüşümünün önemli özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 2.1.1: $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\widehat{f}(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(t)e^{-2\pi i x.t}\, dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyondur.

Teorem 2.1.2: **(a)** $f \longmapsto \widehat{f}$ dönüşümü $L^1(\mathbf{R}^n)$ den $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ içine doğrusal ve sınırlı bir dönüşümdür. Dahası $||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_1$ olur.

(b) Eğer $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ ise, $\widehat{f}$ düzgün süreklidir.

ispat: **(a)** Sözkonusu dönüşümün doğrusal olduğu açık, sınırlılığı için;

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(x)| &= |\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(t)e^{-2\pi i x.t}\, dt| \\ &\leq \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(t)||e^{-2\pi i x.t}|\, dt \\ &\leq \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(t)|\, dt = ||f||_1. \end{aligned}$$

Dolayısıyla eşitsizliğin sağ tarafı x' den bağımsız olduğu için $ess.sup_x|\widehat{f}(x)| = ||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_1$ olur.

(b) Bunun için $\lim\limits_{y\to 0}\sup\limits_{x}|\widehat{f}(x-y) - \widehat{f}(x)| = 0$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. O halde,

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(x-y) - \widehat{f}(x)| &= |\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(t)e^{-2\pi i(x-y).t}\, dt - \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(t)e^{-2\pi i x.t}\, dt| \\ &= |\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(t)e^{-2\pi i x.t}(e^{2\pi i y.t} - 1)\, dt| \\ &\leq \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(t)||e^{2\pi i y.t} - 1|\, dt. \end{aligned}$$

Buradan Lebesgue'nin integral altında limite geçme teoremini uygularsak ve son eşitsizlikte sağ tarafın x'den bağımsız olduğunu göz önünde tutarsak,

$$\lim_{y\to 0}\sup_x|\widehat{f}(x-y) - \widehat{f}(x)| \leq \int\limits_{\mathbf{R}^n} \lim_{y\to 0}|f(t)||e^{2\pi i y.t} - 1| = 0 \quad \text{olur.}$$

Teorem 2.1.3: (Riemann-Lebesgue): Eğer $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ ise, $|x| \to \infty$ iken $\widehat{f}(x) \to 0$ olur.

İspat: (Stein and Weiss, 1971.)

Bu iki teoremden aşağıdaki sonucu hemen görebiliriz:

Sonuç 2.1.4:$f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $C_0(\mathbf{R}^n)$ sınıfındandır.

Tanım 2.1.5: f ve g gibi $\mathbf{R}^n$ üzerinde tanımlı iki fonksiyonun girişimi (convolution), aşağıdaki integralin yakınsak olduğu x'ler için

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

biçiminde tanımlanır.

Aşağıda, söz konusu girişimin varlığını garanti eden ve Young eşitsizliği olarak bilinen teoremi veriyoruz.

Teorem 2.1.6: (Young Eşitsizliği) $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ ve $g \in L^p(\mathbf{R}^n)(1 \leq p \leq \infty)$ olsun. Bu durumda $(f * g)(x)$ hemen hemen her $x \in \mathbf{R}^n$ için iyi tanımlıdır. Ayrıca, $(f * g) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ ve $||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p$ dır.

İspat: (Folland, 1984)

Önerme 2.1.7: Yukarıdaki teoremin koşullarını sağlayan f ve g için

$$f * g = g * f$$

dir.

İspat: Aşağıda $z = x - y$ dönüşümü uygulanarak,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbf{R}^n} f(z)g(x-z)\,dz = (g * f)(x)$$

olduğu görülür.

Şimdi, harmonik analizde özel bir yeri olan bir teoremi veriyoruz:

Teorem 2.1.8: f ve $g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ olan iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$(f * g)\widehat{\ } = \widehat{f}\widehat{g}.$$

İspat: Teoremin ispatı doğrudan Fourier dönüşümü ve girişim tanımları kullanılarak kolayca yapılabilir.

Tanım 2.1.9: $f(x), \mathbf{R}^n$ üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon ve $h \in \mathbf{R}$ olsun. Bu durumda $\tau_h(f(x))$ ile

$$(\tau_h f)(x) = f(x-h)$$

fonksiyonunu tanımlıyoruz. Bu dönüşüm *kayma* dönüşümü olarak adlandırılır.

Önerme 2.1.10: $f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$ ve $h \in \mathbf{R}$ olsun. Bu durumda,

$$\text{(a)} \quad (\tau_h f)\widehat{\ }(x) = e^{-2\pi i h.x}\widehat{f}(x)$$

$$\text{(b)} \quad (e^{2\pi i h.t} f(t))\widehat{\ }(x) = (\tau_h \widehat{f})(x)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (a)

$$\begin{aligned}(\tau_h f)\widehat{\ }(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} (\tau_h f(t)) e^{-2\pi i x.t}\, dt = \int_{\mathbf{R}^n} f(t-h) e^{-2\pi i x.t}\, dt \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(t) e^{-2\pi i x.(t+h)}\, dt = e^{-2\pi i h.x}\widehat{f}(x);\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(e^{2\pi i h.t} f(t))\widehat{\ }(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i h.t} f(t) e^{-2\pi i x.t}\, dt = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i (x-h).t} f(t)\, dt \\ &= (\tau_h \widehat{f})(x) = \widehat{f}(x-h)\end{aligned}$$

Önerme 2.1.11: Kayma, L^p $(1 \leq p < \infty)$ normuna göre süreklidir. Yani,

$$\lim_{h \to 0} ||\tau_h f - f||_p = 0$$

İspat: (Folland, 1984.)

3. MATERYAL VE METOD

3.1.Toplanabilirlik (Summability) ve Abel Ortalamaları

Bu kesimde toplanabilirlik kavramı ve değişik toplanabilirlik metodlarını vereceğiz. Bunun için önce şöyle bir soruya cevap arayalım:$f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ *fonksiyonunun Fourier dönüşümü* $\widehat{f}$ *verilmiş olsun. Acaba* $\widehat{f}$*'den yararlanarak* f*'yi nasıl elde ederiz?* Fourier serileri ve integralleri teorisinden az çok bilgisi olan bir kişi, bu sorunun cevabı olarak $f(t)$ nin,

$$f(t) = \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x.t}\, dx \tag{3.1.1}$$

integraline eşit olmasını düşünecektir. Fakat $L^1(\mathbf{R}^n)$'den olan $f(x)$ fonksiyonu için $\widehat{f}(x)$ integrallenmeyebilir (Örnek olarak $n = 1$ için f, $[a,b]$ aralığının karakteristik fonksiyonu alınabilir). Dolayısıyla, (3.1.1) integrali ıraksak olabilir. Şimdi yukarıdaki soruya cevap bulmak için, integraller için toplanabilirlik metodlarını kullanacağız. Bunun için ilk olarak Abel metodunu tanıtıyoruz.

Tanım 3.1.2: Her $\varepsilon > 0$ için,

$$A_\varepsilon(f) = A_\varepsilon = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-\varepsilon|x|}\, dx$$

integraline*Abel ortalaması* denir.

$f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ olması durumunda $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx$ olduğu açıktır (Lebesgue'nin majorant yakınsama teoreminden). Diğer yandan, Abel ortalamaları, f fonksiyonu integrallenebilir olmasa bile iyi tanımlı olabilir (Örnek olarak, f'yi sınırlı fonksiyon olarak düşünsek, her $\varepsilon > 0$ için $A_\varepsilon(f)$ iyi tanımlıdır). Hatta bu ortalamaların limiti,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-\varepsilon|x|}\, dx \tag{3.1.3}$$

f Lebesgue anlamında integrallenebilir olmasa bile, var olabilir. Bu söylediklerimizi doğrulayan bir teorem verelim.

Teorem 3.1.4: Her $x > 0$ için $\int_0^x f(t)\, dt$ var olsun ve $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^\infty f(t)\, dt$ sonlu limiti olsun. Bu halde,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} f(x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\varepsilon x} f(x)\,dx &= \int_0^\infty e^{-\varepsilon x}\, d(\int_0^x f(t)\,dt) \\
&= \left[e^{-\varepsilon x}(\int_0^x f(t)\,dt)\right]_{x=o}^{\infty} + \varepsilon \int_0^\infty (\int_0^x f(t)\,dt) e^{-\varepsilon x}\,dx \\
&= \int_0^\infty (\int_0^x f(t)\,dt) e^{-\varepsilon x}\, d(\varepsilon x) = \cdots [\varepsilon x = u] \cdots = \int_0^\infty (\int_0^{u/\varepsilon} f(t)\,dt) e^{-u}\,du
\end{aligned}$$

$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ fonksiyonu $[0,\infty)$ ' da sürekli fonksiyondur ve $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \int_0^\infty f(t)\,dt = c$ sonlu limiti var olduğundan, $\varphi(x)$ fonksiyonu $[0,\infty)$'da sınırlıdır: $\exists M = sabit \ \forall \ x \in [0,\infty)$ için $|\varphi(x)| \le M$.

Öyleyse,

$$|\int_0^{u/\varepsilon} f(t)\,dt| \le M \quad (\forall u \ \text{ ve } \ \forall \varepsilon \ \text{ için})$$

Dolayısıyla, yukarıdaki $\int_0^\infty (\int_0^{u/\varepsilon} f(t)\,dt) e^{-u}\,du$ integraline Lebesgue' nin integral altında limite geçme teoremini uygulayabiliriz. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty (\int_0^{u/\varepsilon} f(t)\,dt) e^{-u}\,du &= \int_0^\infty (\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{u/\varepsilon} f(t)\,dt) e^{-u}\,du \\
&= \int_0^\infty (\int_0^\infty f(t)\,dt) e^{-u}\,du \\
&= (\int_0^\infty f(t)\,dt)(\int_0^\infty e^{-u}\,du) = \int_0^\infty f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki teoremden sonra f mutlak integralinebilir olmadığı halde, (3.1.3) eşitliğinin sağlandığı fonksiyona, $\mathbf{R}^1$' de $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ fonksiyonu örnek gösterilebilir.

Tanım 3.1.5: (3.1.3) limitinin var ve sonlu olduğu durumlarda $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)$ integrali bu limite *Abel toplanabilir* diyoruz.

3.2. Gauss-Weierstrass Ortalamaları

Tanım 3.2.1: Her $\varepsilon > 0$ için

$$G_\varepsilon(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)e^{-\varepsilon|x|^2}\,dx$$

integraline *Gauss-Weierstrass ortalaması* denir.

Tanım 3.2.2: Eğer,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)e^{-\varepsilon|x|^2}\,dx \tag{3.2.3}$$

limiti var ve l'ye eşitse, $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx$, integrali l'ye *Gauss toplanabilir* diyoruz.

İyi bir gözlemle (3.1.3) ve (3.2.3)'ün, $\Phi(x) \in C_0(\mathbf{R}^n)$ ve $\Phi(0) = 1$ olmak üzere,

$$M_{\varepsilon,\Phi}(f) \equiv M_\varepsilon(f) = \int_{\mathbf{R}^n} \Phi(\varepsilon x)f(x)\,dx \tag{3.2.4}$$

formunda yazılabileceğini görebiliriz.

Tanım 3.2.5: Eğer, $\lim_{\varepsilon\to 0} M_{\varepsilon,\Phi}(f) = l$ ise, $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx$, l' ye Φ-toplanabilir denir. $M_{\varepsilon,\Phi}(f)$'ye de integralin Φ- ortalaması diyeceğiz.

Çalışmalarımızda bu $e^{-\varepsilon|x|^2}$ ve $e^{-\varepsilon|x|}$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerine ihtiyacımız olacak. Aşağıda bu dönüşümleri hesaplarken bize yardımcı olacak iki teoremi veriyoruz.

Teorem 3.2.6: $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$'e lineer bir dönüşüm olsun. bu durumda,

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx = |detT| \int_{\mathbf{R}^n} f \circ T(x)\,dx$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (Folland, 1984)

Teorem 3.2.7: $\beta > 0$ için,

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\beta^2/4u}\,du$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Teoremi ispat etmek için

$$\text{(i)}\quad e^{-\beta}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\,dx$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{1}{1+x^2}=\int_0^\infty e^{-(1+x^2)u}\,du$$

eşitliklerinden yararlanacağız. Bu eşitliklerin ikincisinin sağlandığı açık, birincisini ise $e^{-i\beta z/(1+z^2)}$ fonksiyonuna Rezidü Teoremini uygulayarak elde edebiliriz. Böylece,

$$\begin{aligned} e^{-\beta}=\tfrac{2}{\pi}\int_0^\infty \tfrac{\cos\beta x}{1+x^2}\,dx &= \tfrac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\beta x[\int_0^\infty e^{-u}e^{-ux^2}\,du]dx \\ &= \tfrac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}[\int_0^\infty e^{-ux^2}\cos\beta x\,dx]du = \tfrac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}[\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-ux^2}e^{i\beta x}\,dx]du \\ &= \tfrac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}[\pi\int_{-\infty}^\infty e^{-4\pi^2uy^2}e^{-i2\pi\beta y}\,dy]du = \tfrac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}[\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\pi}{u}}e^{-\beta^2/4u}]du \end{aligned}$$

bu teoremi ispatlar.

Teorem 3.2.8: Her $\alpha>0$ için,

$$(e^{-\pi\alpha|x|^2})\widehat{}=\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\pi\alpha|y|^2}e^{-2\pi it.y}\,dy=\alpha^{-n/2}e^{-\pi|t|^2/\alpha}$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-4\pi^2|x|^2}e^{-2\pi it.x}\,dx &= \prod_{i=1}^n\int_{-\infty}^\infty e^{-4\pi^2x_i^2}e^{-2\pi it_ix_i}\,dx_i \\ &= \prod_{i=1}^n \tfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-t_i^2/4}=2^{-n}\pi^{-n/2}e^{-|t|^2/4} \end{aligned}$$

Şimdi, $(\sqrt{\alpha}/2\sqrt{\pi})y=x$ dönüşümü yapılırsa Teorem (3.2.6)'dan istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.9: Her $\alpha>0$ için,

$$(e^{-2\pi\alpha|x|})\widehat{}=\int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi\alpha|y|}e^{-2\pi it.y}\,dy=c_n\frac{\alpha}{(\alpha^2+|t|^2)^{(n+1)/2}}$$

dir. Burada, $c_n=\Gamma[(n+1)/2]/(\pi^{(n+1)/2})$'dir.

İspat: Uygun değişken değiştirilmesi yaparak, ispatı $\alpha=1$ için yapmak yeterli olacaktır. Bu durumda, Teorem (3.2.7) ve (3.2.8)'ü kullanarak,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi\alpha|y|}e^{-2\pi i t.y}\,dy &= \int_{\mathbf{R}^n}[\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \tfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-4\pi^2|y|^2/4u}\,du]e^{-2\pi i t.y}\,dy \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \tfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}[\int_{\mathbf{R}^n} e^{-4\pi^2|y|^2/4u}e^{-2\pi i t.y}\,dy]du \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \tfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}[(\sqrt{\tfrac{u}{\pi}})^n e^{-u|t|^2}]du \\
&= \tfrac{1}{\pi^{(n+1)/2}}\int_0^\infty e^{-u}u^{(n-1)/2}e^{-u|t|^2}\,du \\
&= \tfrac{1}{\pi^{(n+1)/2}}\tfrac{1}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}}\int_0^\infty e^{-s}s^{(n-1)/2}\,ds \\
&= \tfrac{\Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{(n+1)/2}}\tfrac{1}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $e^{-4\pi\alpha|y|^2}$ ve $e^{-2\pi\alpha|y|}$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerini sırasıyla $W(t,\alpha) = (4\pi\alpha)^{-n/2}(e^{-|t|^2/4\alpha}$ ve $P(t,\alpha) = c_n[\alpha/(\alpha^2+|t|^2)^{(n+1)/2}]$ ile göstereceğiz. Bu fonsiyonlardan ilki *" Weierstrass Çekirdeği"*, ikincisi de *"Poisson Çekirdeği"* olarak adlandırılır.

Bundan sonraki çalışmamızda ilk olarak (3.1.1) integralinin Abel ve Gauss-Weierstrass ortalamalarının f'ye yakınsadığını göstereceğiz (hem norma göre, hem de hemen hemen her x için). Bunun için aşağıdaki hazırlıklara ihtiyaç olacaktır:

Teorem 3.2.10: $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ olsunlar. Bu halde,

$$\int_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Fubini Teoremini uygulayarak,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\,dx &= \int_{\mathbf{R}^n}[\int_{\mathbf{R}^n} f(t)e^{-2\pi i t.x}\,dt]g(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^n}[\int_{\mathbf{R}^n} g(x)e^{-2\pi i t.x}\,dx]f(t)\,dt \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} f(t)\widehat{g}(t)\,dt
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2.11 $f, \Phi \in L^1(\mathbf{R}^n)$ ve $\widehat{\Phi} = \varphi$ olsun. Bu halde her $\varepsilon > 0$ için

$$\int_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(x)e^{2\pi i t.x}\Phi(\varepsilon x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x-t)\,dx$$

eşitliği sağlanır. Burada $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ olarak tanımlanmıştır.

İspat: Öncelikle Fourier dönüşümünün direkt tanımını kullanarak $(\Phi(\varepsilon x))\widehat{} = \varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ eşitliğinin sağlandığını kolayca görebiliriz. Şimdi $f(x)$ ve $e^{2\pi i t.x}\Phi(\varepsilon x)$ fonksiyonlarına Teorem (3.2.10)' i uygulayarak ve önerme (2.1.10)'un (b) kısmından

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi i t.x}\Phi(\varepsilon x)\,dx &= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)(e^{2\pi i t.x}\Phi(\varepsilon x))\widehat{}\,dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x-t)\,dx\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

Sonuç 3.2.12: $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ olsun. Bu halde her $\varepsilon > 0$ için,

$$\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi i t.x}e^{-2\pi\varepsilon|x|}\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)P(x-t,\varepsilon)\,dx$$

ve

$$\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi i t.x}e^{-4\pi^2\alpha|x|^2}\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)W(x-t,\varepsilon)\,dx$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: Teorem (3.2.11)'de $\Phi(y) = e^{-2\pi\alpha|y|}$ alarak birinci eşitlik, $\Phi(y) = e^{-4\pi^2\alpha|y|^2}$ alarak ikinci eşitlik görülür.

Lemma 3.2.13: Poisson ve Weierstrass çekirdekleri için

$$\text{(a)} \quad \int_{\mathbf{R}^n} W(x,\alpha)\,dx = 1 \quad \text{her} \quad \alpha > 0\,;$$

$$\text{(b)} \quad \int_{\mathbf{R}^n} P(x,\varepsilon)\,dx = 1 \quad \text{her} \quad \varepsilon > 0\,;$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: Öncelikle uygun değişken değiştirilmesi ile $\int_{\mathbf{R}^n} W(x,\alpha)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} W(x,1)\,dx$ ve $\int_{\mathbf{R}^n} P(x,\varepsilon)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} P(x,1)\,dx$ eşitliklerinin sağlandığını görebiliriz. Yani Lemma'yı $\alpha = 1 = \varepsilon$ için göstermek yeterli olacaktır.

Böylece, (a) için eşitlik $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4}\,dx = 2\sqrt{\pi}$ olmasından hemen görülür (n boyutlu integral, böyle n tane integralin çarpımı olarak yazılabilir). (b)'yi elde etmek için öncelikle şunu belirtmeliyiz ki $1/c_n = (\pi^{(n+1)/2})/\Gamma[(n+1)/2]$ sayısı, $\mathbf{R}^{n+1}$ de birim küre Σ_n'in yüzey alanının yarısıdır. Bu alanı w_n ile gösterip, (b)'nin

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} = \frac{w_n}{2}$$

olduğunu göreceğiz.

Bunun için $r = |x|$, $x' = x/r$; $(x \neq 0)$, $\Sigma_{n-1} = \{x : x \in \mathbf{R^n} \; ; \; |x| = 1\}$; ve $r = tan\theta$ koyarak,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} &= \int_0^\infty [\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{1}{(1+|r|^2)^{(n+1)/2}} dx'] r^{n-1} dr \\
&= w_{n-1} \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+|r|^2)^{(n+1)/2}} dr \\
&= w_{n-1} \int_0^{\pi/2} sin^{n-1}\theta \, d\theta
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. (Yukarıda dx' ile Σ_{n-1} in alan elamanını gösterdik).

Fakat $w_{n-1} sin^{n-1}\theta$, sayısı Σ_{n-1} in $x_n = cos\theta$ hiper düzlemine kısıtlanarak elde edilen, $sin\theta$ yarı çaplı kürenin yüzey alanıdır. Böylece, bu $(n-2)$-boyutlu alanları θ yı $[0, \pi/2]$ arasında değiştirerek "toplarsak" Σ_{n-1}'nin üst yarı düzlemindeki alanını elde ederiz. Yani,

$$w_{n-1} \int_0^{\pi/2} sin^{n-1}\theta \, d\theta = \frac{w_n}{2};$$

bu da istenilen eşitliktir.

Teorem 3.2.14: $\varphi \in L^1(\mathbf{R^n})$, $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) \, dx = 1$ ve her $\varepsilon > 0$ için, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ olsun. Eğer $f \in L^p(\mathbf{R^n})$, $(1 \leq p < \infty)$ veya $f \in C_0(\mathbf{R^n}) \subset L^\infty(\mathbf{R}^n)$ ise $f * \varphi_\varepsilon(x)$ fonksiyonlar ailesi f'ye L_p normunda yakınsar. Yani $\varepsilon \to 0$ iken $||f * \varphi_\varepsilon - f||_p \longrightarrow 0$.

İspat: Öncelikle Teorem (3.2.6)'dan

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\varepsilon(t) \, dt = \int_{\mathbf{R}^n} \varepsilon^{-n} \varphi(\frac{t}{\varepsilon}) \, dt = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(t) \, dt = 1$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Böylece,

$$\begin{aligned}
(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} f(x-t) \varphi_\varepsilon(t) \, dt - \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \varphi_\varepsilon(t) \, dt \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} [f(x-t) - f(x)] \varphi_\varepsilon(t) \, dt.
\end{aligned}$$

Buradan, integraller için Minkowski eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
||f * \varphi_\varepsilon - f||_p &\leq \int_{\mathbf{R}^n} [\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p \, dx]^{1/p} \varepsilon^{-n} |\varphi(\tfrac{t}{\varepsilon})| \, dt \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} [\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-\varepsilon t) - f(x)|^p \, dx]^{1/p} |\varphi(t)| \, dt
\end{aligned}$$

Diğer yandan, $||\tau_{\varepsilon t}f(x)-f(x)|| \leq 2||f||$ olduğundan, Önerme (2.1.11) ve Lebesque'nin integral altında limite geçme teoreminden istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.15: $u(x,\varepsilon) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(t)P(x-t,\varepsilon)\,dt$ ve $s(x,\varepsilon) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(t)W(x-t,\varepsilon)\,dt$, $\varepsilon \to 0$ iken L_p normunda f fonksiyonuna yakınsarlar.

Buradaki $u(x,\varepsilon)$ ve $s(x,\varepsilon)$ fonsiyonlarına sırasıyla f'nin *Poisson integrali* ve *Weierstrass integrali* denir.

İspat: $\Phi(x) = e^{-4\pi^2|x|^2}$ için Teorem (3.2.8) den $\widehat{\Phi}(\varepsilon x) = \varphi_\varepsilon(x) = W(x,\varepsilon^2)$, $\Phi(x) = e^{-2\pi|x|}$ için Teorem (3.2.9)'dan $\widehat{\Phi}(\varepsilon x) = \varphi_\varepsilon(x) = P(x,\varepsilon)$ olduğu gözönüne alınarak ve Lemma (3.2.13) den istenilen sonuç elde edilir.

(3.2.10) ve (3.2.14) Teoremlerinden bu kesimin başındaki sorumuz için aşağıdaki çözümü elde ederiz:

Teorem 3.2.16: Φ ve onun Fourier dönüşümü φ integrallenebilir ve $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$ olsun. Bu durumda $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(t)e^{2\pi it.x}$ integralinin Φ- ortalamaları $f(x)$ fonksiyonuna L^1 normunda yakınsar. Özel olarak bu integralin Abel ve Gauss-Weierstrass ortalamaları $f(x)$ fonksiyonuna L^1 normunda yakınsar.

Gözlem 3.2.17: $s(x,\alpha) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(t)e^{2\pi it.x}e^{-4\pi^2\alpha|t|^2}\,dt$, $\alpha \to 0$ iken $f(x)$ fonksiyonuna L_1 normunda yakınsadığından, bu α'lardan öyle $\{\alpha_k\}$ altdizisi seçebiliriz ki, $s(x,\alpha_k)$ dizisi hemen hemen her x için $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar.

Sonuç 3.2.18: f ve $\widehat{f}$ her ikisi de integrallenebilirse,

$$f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(t)e^{2\pi it.x}\,dt$$

eşitliği hemen hemen her x için sağlanır.

İspat: Gözlem (3.2.17)'den dolayı, $f(x)$ fonsiyonuna hemen hemen her x için yakınsayan bir $s(x,\alpha_k)$ dizisi vardır.

Bu durumda, Lebesgue'nin integral altında limite geçme teoreminden,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\alpha_k\to 0}\int\limits_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(t)e^{2\pi it.x}e^{-4\pi^2\alpha_k|t|^2}\,dt = \int\limits_{\mathbf{R}^n}\lim_{\alpha_k\to 0} \widehat{f}(t)e^{2\pi it.x}e^{-4\pi^2\alpha_k|t|^2}\,dt \\ &= \int\limits_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(t)e^{2\pi it.x}\,dt \end{aligned}$$

diye istenilen eşitlik gösterilir.

Gözlem 3.2.19: Teorem (2.1.2)'den biliyoruz ki, $\widehat{f}$ sürekli bir fonksiyondur. Diğer yandan, eğer $\widehat{f}$ integrallenebilirse, $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(t)e^{2\pi it.x}\,dt$ fonksiyonu da süreklidir (aslında, bu fonksiyon $\widehat{f}(-x)$'e eşittir). Böylece, f'nin değerlerini ölçümü sıfır olan kümede düzenleyerek Sonuç (3.2.18)'deki eşitliğin tüm x'lerde sağlandığını söyleyebiliriz.

Gözlem 3.2.20: Sonuç (3.2.18)'i kullanarak Teorem (3.2.13)'ü uzun hesaplamalar yapmadan ispatlayabiliriz. Bunun için Sonuç (3.2.18)'ü $f(x) = e^{-2\pi\varepsilon|x|}$ fonksiyonuna uygulayarak ve Teorem (3.2.9)'u kullanarak $\int\limits_{\mathbf{R}^n} P(t,\varepsilon)e^{2\pi i t.x}\, dt = e^{-2\pi\varepsilon|x|}$ elde ederiz. Eşitlikte $x = 0$ konursa $\int\limits_{\mathbf{R}^n} P(t,\varepsilon)\, dt = 1$ eşitliği kolayca elde edilir. Aynı yolla (a) şıkkı da gösterilebilir.

Sonuç 3.2.21: $f_1, f_2 \in L^1(\mathbf{R}^n)$ ve her $x \in \mathbf{R}^n$ için $\widehat{f_1}(x) = \widehat{f_2}(x)$ olsun. Bu durumda hemen hemen her x için $f_1(t) = f_2(t)$ eşitliği sağlanır.

İspat: Teorem (3.2.14)'den eğer $\widehat{f}(x) = 0$ ise hemen hemen her x için $f(x) = 0$ olduğu açıktır. Bunu $f = f_1 - f_2$ fonkiyonuna uygulayarak istediğimiz sonucu elde ederiz.

3.3. Lebesgue noktaları ve Yakınsama

Tanım 3.3.1: f, $\mathbf{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}[f(x-t)-f(x)]\,dt=0 \qquad (3.3.2)$$

eşitliğinin sağlandığı x noktalarına f *fonksiyonunun integralinin diferansiyellenebildiği noktalar* denir.

Teorem 3.3.3: Lokal integrallenebilir her fonsiyon için (3.3.2) eşitliği hemen hemen her x noktasında sağlanır.

İspat: (Folland, 1984)

Tanım 3.3.4: f, $\mathbf{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt=0 \qquad (3.3.5)$$

eşitliğinin sağlandığı x noktaları kümesine f*'nin Lebesgue kümesi* denir ve L_f ile gösterilir.

Teorem 3.3.6: f lokal integrallenebilirse, hemen hemen her x için (3.3.5) eşitliği sağlanır.

İspat: Teoremi ispat etmek için önce $c\in\mathbf{C}$ için $g_c(x)=|f(x)-c|$ fonksiyonunu tanımlayalım. f lokal integrallenebilir olduğu için g_c de lokal integrallenebilirdir, böylece $g_c(x)=|f(x)-c|$ fonksiyonuna Teorem (3.3.3)'u uygularsak, ölçümü sıfır olan bir E_c kümesi dışında

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}[g_c(x-t)-g_c(x)]\,dt=0$$

eşitliği veya

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-c|\,dt=w_n|f(x)-c|$$

sağlanır. Burada w_n birim yuvarın hacmidir.

Şimdi R' $\mathbf{C}$, nin yoğun bir alt kümesi olmak üzere, $E=\bigcup_{c\in R}E_c$ kümesini düşünelim. Bu durumda, E kümesinin ölçümünün sıfır olduğu açıktır.

Buradan, eğer $x\in\mathbf{R}^n\backslash E$ ise, (3.3.5) eşitliğinin sağlandığını iddia ediyoruz. Bu iddiayı ispatlamak için; her $\varepsilon>0$ verildiğinde $|f(x)-c|<\frac{\varepsilon}{2w_n}$ olacak şekilde $c\in R$

seçebiliriz. Bu durumda,

$$\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt \leq \frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-c|\,dt$$

$$+\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|c-f(x)|\,dt.$$

Eşitsizliğin sağındaki ilk terim $r \to 0$ için x'in seçiminden dolayı $w_n|f(x)-c|$ sayısına yakınsar (ki bu sayınının da $\frac{\varepsilon}{2}$ den küçük olduğunu biliyoruz). İkinci terim de c'nin seçiminden ($|c-f(x)|<\varepsilon/2w_n$) istenilen kadar küçük yapılabileceğinden, yeterince küçük $r>0$ için

$$\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt<\varepsilon$$

olur ki bu da istenileni ispatlar.

Teorem 3.3.7: $\varphi(x)\in L^1(\mathbf{R}^n)$ olsun ve bu $\varphi(x)$ fonksiyonu için $\psi(x)=ess.\sup\limits_{|t|\geq|x|}|\varphi(t)|$ fonksiyonunu tanımlayalım. Eğer $1\leq p\leq\infty$ için $\psi(x)\in L^1(\mathbf{R}^n)$ ve $f(x)\in L^p(\mathbf{R}^n)$ ise, $f(x)$ fonksiyonunun Lebesgue kümesinden olan her x için (özel olarak f 'nin süreklilik noktalarında) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(f*\varphi_\varepsilon)(x)=f(x)\int\limits_{\mathbf{R}^n}\varphi(t)\,dt$ eşitliği sağlanır. Yani (3.1.1) integrali, Lebesgue kümesindeki her t için $f(t)$ ye Φ-toplanabilirdir.

İspat: (Stein and Weiss, 1970.)

Sonuç 3.3.8: $f(x)\in L^p(\mathbf{R}^n)$ fonksiyonun Poisson ve Gauss-Weierstrass integralleri, $\int\limits_{\mathbf{R}^n}f(t)P(x-t,\varepsilon)\,dt$ ve $\int\limits_{\mathbf{R}^n}f(t)W(x-t,\varepsilon)\,dt$, $\varepsilon\to 0$ iken hemen hemen her x için $f(x)$' e yakınsar.

İspat: Sonucun direkt ispatını Teorem (3.3.7)' den görmek için $\varphi(x)=P(t,1)=c_n[1/(1+|t|^2)^{(n+1)/2}]$ ve $\varphi(x)=W(t,1)=(4\pi)^{-n/2}(e^{-|t|^2/4}$ fonksiyonları için $\psi(x)=ess.\sup\limits_{|t|\geq|x|}|\varphi(t)|$ fonksiyonlarının integrallenebilir olduğunu görmeliyiz. $P(x,1)$ ve $W(x,1)$ fonksiyonları radyal ve $|t|$ nin azalan fonksiyonları oldukları için

$$\psi(x)=\sup_{|t|\geq|x|}P(t,1)=\sup_{|t|\geq|x|}c_n\frac{1}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}}=P(x,1)\in L^1(\mathbf{R}^n)$$

olur. Aynı düşünceyle $\psi(x)=\sup\limits_{|t|\geq|x|}W(t,1)$ fonksiyonunun integrallenebildiği görülür.

Önerme 3.3.9: Eğer $f(x)\in L^1(\mathbf{R}^n)$ fonksiyonu 0 noktasında sürekliyse

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}^n}\widehat{f}(x)e^{-2\pi\varepsilon|x|}\,dx=f(0)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Teorem (3.2.10) 'da $g(x) = \Phi(\varepsilon x) = e^{-2\pi\varepsilon|x|}$ alarak , Teorem (3.2.11) 'i uygulayarak

$$\int_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(x)\Phi(\varepsilon x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\widehat{\Phi}(\varepsilon x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\, dx = (f * \varphi_\varepsilon)(0)$$

olur. Şimdi Teorem (3.3.7) 'den

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f * \varphi_\varepsilon)(0) = f(0)$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 3.3.10: $f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$ ve $\widehat{f}(x) \geq 0$ olsun. Eğer $f(x)$ fonksiyonu 0 noktasında sürekliyse $\widehat{f}(x)$ fonksiyonu integrallenebilirdir ve

$$f(t) = \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(x)e^{2\pi i x\cdot t}\, dx$$

eşitliği hemen hemen her t için sağlanır. Özel olarak

$$f(0) = \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(x)\, dx$$

olur.

İspat: $g_\varepsilon(x) = \widehat{f}(x)e^{-2\pi\varepsilon|x|}$ ailesine $\varepsilon \to 0$ için Fatou Lemmasını uygularsak ($\widehat{f}(x) \geq 0$ olduğunu unutmayalım)

$$\int_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(x)\, dx \leq \underline{\lim} \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(x)e^{-2\pi\varepsilon|x|}\, dx = f(0)$$

dolayısıyla, $\widehat{f}(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$ olduğu ve Sonuç (3.2.18) den

$$f(t) = \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(x)e^{2\pi i x\cdot t}\, dx$$

eşitliği görülür.

Sonuç 3.3.11: Her $\alpha \geq 0$ için

$$\text{(a)} \quad \int_{\mathbf{R}^n} W(x,\alpha)e^{2\pi i x\cdot t}\, dx = e^{-4\pi^2\alpha|t|^2}$$

$$\text{(b)} \quad \int_{\mathbf{R}^n} P(x,\alpha)e^{2\pi i x\cdot t}\, dx = e^{-2\pi\alpha|t|}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: Teorem (3.2.8) , Teorem (3.2.9) ve yukarıdaki önermeden istenilen eşitlikler görülür.

Sonuç 3.3.12: α_1 ve α_2 pozitif reel sayılar olmak üzere,Weierstrass ve Poisson çekirdekleri için,

$$\text{(a)} \quad W(x,\alpha_1+\alpha_2) = \int_{\mathbf{R}^n} W(x-t,\alpha_1)W(t,\alpha_2)\,dt = W_{\alpha_1} * W_{\alpha_2}$$

$$\text{(b)} \quad P(x,\alpha_1+\alpha_2) = \int_{\mathbf{R}^n} P(x-t,\alpha_1)P(t,\alpha_2)\,dt$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (a) için ispat, Sonuç (3.2.21) 'den eşitliğin her iki yanınındaki fonksiyonların Fourier dönüşümlerinin eşit olduğunu göstermekle bitecektir. Bunun için Teorem (2.1.8) 'den

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbf{R}^n} W(.-t,\alpha_1)W(t,\alpha_2)\,dt\right)^{\widehat{}} &= (W(.,\alpha_1))^{\widehat{}}\,(W(.,\alpha_2))^{\widehat{}} \\ &= e^{-4\pi^2\alpha_1|t|^2}e^{-4\pi^2\alpha_2|t|^2} \\ &= e^{-4\pi^2(\alpha_1+\alpha_2)|t|^2} = (W(.,\alpha_1+\alpha_2))^{\widehat{}} \end{aligned}$$

bulunur.

4. BULGULAR

4.1 Bochner-Riesz Toplanabilirlik.

Tezin bu kesiminde integraller için başka bir toplanabilirlik metodu olan Bochner-Riesz metodu tanıtılacak ve bize, daha çok bu bölümün ikinci kesimi için lazım olan Bessel fonksiyonları 'nın asimtotik davranışları incelenecektir.

Tezin (3.1) kesiminde $\Phi \in C_0(\mathbf{R^n}) \bigcap L^1(\mathbf{R^n})$ ve $\Phi(0) = 1$ koşullarını sağlayan Φ fonksiyonu için $\int_{\mathbf{R}^n} h(x)\,dx$ integralinin ϕ-ortalamalarını

$$M_{\varepsilon,\Phi}(h) \equiv M_\varepsilon(h) = \int_{\mathbf{R}^n} \Phi(\varepsilon x) h(x)\,dx$$

olarak tanımlamıştık.

$\Phi(x) = e^{-|x|}$ alarak Abel ortalamaları, $\Phi(x) = e^{-|x|^2}$ alarak Gauss-Weierstrass ortalamaları elde edilmişti. Toplanabilirliğin başka bir önemli metodu da $\delta > 0$ için Φ yi

$$\Phi(x) = \Phi_\delta(x) = \begin{cases} (1-|x|^2)^\delta & , \quad |x| \le 1 \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad |x| > 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

seçerek elde edilir.

Tanım 4.1.2: Yukarıdaki $\Phi_\delta(x) = \Phi(x)$ fonksiyonunun doğurduğu toplanabilirlik metoduna *Bochner-Riesz toplanabilirlik* metodu denir.

Tanım 4.1.3: $\varepsilon = 1/R$ alarak $\int_{\mathbf{R}^n} h(x)\,dx$ integralinin Bochner-Riesz ortalamaları

$$M_{\varepsilon,\Phi}(h) = M_{(1/R),\Phi}(h) = \int_{|x|\le R} \left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right)^\delta h(x)\,dx$$

olarak yazılabilir.

Eğer $f \in L^1(\mathbf{R^n})$, $\widehat{\Phi} = \varphi$ ve $h(x) = \widehat{f}(x)e^{2\pi i x\cdot t}$ ise, bu durumda (bakınız Teorem (3.2.11) $h(x) = \widehat{f}(x)e^{2\pi i x\cdot t}$ fonksiyonunun Bochner-Riesz ortalamaları için

$$S_R^\delta(t,f) = \int_{|x|\le R} \widehat{f}(x)e^{2\pi i x\cdot t}\left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right)^\delta h(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)R^n\varphi(R(x-t))\,dx \qquad (4.1.4)$$

formülünü elde ederiz. Şayet $\widehat{\Phi} = \varphi$ fonksiyonu $L^1(\mathbf{R^n})$ uzayından ise Teorem(3.2.14) 'den S_R^δ nin f ye norma göre yakınsadığını biliyoruz; ek olarak eğer φ Teorem (3.3.7) 'nin hipotezlerini sağlarsa,

$$\lim_{R\to\infty} S_R^\delta(t) = f(t)$$

eşitliğinin hemen hemen her t için sağlandığını biliyoruz. Aşağıda $\delta > ((n-1)/2)$ için , φ nin Teorem (3.2.14) ve Teorem (3.3.7) 'nin hipotezlerini sağladığını göstereceğiz. Bunun için ilk olarak Φ 'nin Fourier dönüşümü $\widehat{\Phi} = \varphi$ yi hesap edeceğiz. $\widehat{\Phi}$ yi hesap etmek için bize yardımcı olacak bazı lemmaları aşağıda veriyoruz.
Not:$(n-1)/2)$ sayısına Bochner-Riesz metodu için *kritik indeks* denir.

Lemma 4.1.5: $\mu > \frac{-1}{2}$ ise J_k bessel fonksiyonları için ([Stein and Weiss, 1971], sf:171)

$$J_{\mu+\nu+1}(t) = \frac{t^{\nu+1}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\int_0^1 J_\mu(ts)s^{\mu+1}(1-s^2)^\nu\,ds$$

eşitliği $\nu > -1$ ve $t > 0$ için sağlanır.

İspat: Lemma ' yı , reel $k > \frac{-1}{2}$ için $J_k(t)$ fonksiyonunun seri gösterimi olan

$$J_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(t/2)^{k+2j}}{j!\Gamma(j+k+1)} \tag{4.1.6}$$

eşitliğini kullanarak ispat edeceğiz. Böylece (4.1.6) yı kullanarak

$$\begin{aligned}
\int_0^1 J_\mu(ts)s^{\mu+1}(1-s^2)^\nu\,ds &= \int_0^1\left[\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(ts/2)^{\mu+2j}}{j!\Gamma(j+\mu+1)}\right]s^{\mu+1}(1-s^2)^\nu\,ds \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(t/2)^{\mu+2j}}{j!\Gamma(j+\mu+1)}\frac{1}{2}\int_0^1 r^{\mu+j}(1-r)^\nu\,dr \\
&= \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{t^{\nu+1}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(t/2)^{\mu+\nu+1+2j}}{j!\Gamma(\mu+\nu+j+2)} \\
&= \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{t^{\nu+1}}J_{\mu+\nu+1}(t)
\end{aligned}$$

olur ki bu da lemmanın ispatını bitirir.

Teorem 4.1.7: $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ fonksiyonu, $n \geq 2$, radyal ise onun Fourier dönüşümü $\widehat{f}$ de radyaldır ve

$$F_0(|x|) = F_0(r) = 2\pi r^{-[(n-2)/2]}\int_0^\infty f_0(s)J_{(n-2)/2}(2\pi rs)s^{n/2}\,ds$$

olmak üzere, $\widehat{f}(x) = F_0(|x|)$ formundadır. Burada $f_0(s) = f(|x|)|_{|x|=s}$ dir

İspat: $r = |x|$, $x = r|x'|$, $s = |u|$ ve $u = su'$ olmak üzere $F_0(r) = \widehat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(u)e^{-2\pi i x.u}\,du = \int_0^\infty f_0(s)\left[\int_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i r s(x'.u')}\,du'\right]s^{n-1}\,ds$ eşitliği elde edilir. Eşitlikte içerideki integrali hesap edelim: Öncelikle $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere $u'.x' = Cos\theta$ alarak θ' yı tanımlayalım. Şimdi, x' ye dik olan $L_\theta = \{u' \in \Sigma_{n-1} : u'.x' = Cos\theta\}$

paralelini düşünelim. Böylece içerideki Σ_{n-1} üzerinden integrali, önce L_θ üzerinden alarak, θ nın, $[0,\pi]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonunu elde ederiz. Bu gerçekleri ve L_θ' nın ölçümünün ($\mathbf{R^{n-1}}$ 'de $Sin\theta$ yarıçaplı kürenin yüzey alanı) $w_{n-2}(Sin\theta)^{n-2}$'ye eşit olduğunu kullanarak, $d\theta'$ L_θ nın yüzey elamanı olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_{n-1}} e^{-2\pi i r s(x' u')}\,du' &= \int_0^\pi \left[\int_{L_\theta} e^{-2\pi i r sCos\theta}\,d\theta'\right] d\theta \\
&= \int_0^\pi e^{-2\pi i r sCos\theta} w_{n-2}(Sin\theta)^{n-2}\,d\theta \\
&= w_{n-2}\int_{-1}^{1} e^{2\pi r s\xi}(1-\xi^2)^{(n-3)/2}\,d\xi \\
&= \frac{2\pi^{(n-1)/2}\Gamma[(n-1)/2]\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma[(n-1)/2]}(\pi r s)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(2\pi r s) \\
&= 2\pi(rs)^{-(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(2\pi r s)
\end{aligned}$$

elde ederiz ki bu da ispatı bitirir.

Not: Bu teoremin $n=1$ için ispatı [Stein and Weiss,1970.] sf:172 (Sonuç:1.2) 'de görülebilir.

Teorem 4.1.8: $\delta > 0$ için,

$$\Phi(x) = \Phi_\delta(x) = \begin{cases} (1-|x|^2)^\delta & , \quad |x| \le 1 \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad |x| > 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\widehat{\Phi}(x) = \pi^{-\delta}\Gamma(\delta+1)|x|^{-[(n/2)+\delta]} J_{n/2+\delta}(2\pi|x|)$$

dir.

İspat: Φ fonksiyonu radyal olduğundan Teorem (4.1.7)'den

$$\widehat{\Phi}(x) = 2\pi|x|^{-[(n-2)/2]}\int_0^1 (1-|s|^2)^\delta J_{(n-2)/2}(2\pi|x|s)s^{n/2}\,ds$$

eşitliği elde edilir. Şimdi Lemma (4.1.5)'i $\nu = \delta$ ve $\mu = (n-2)/2$ alarak son eşitliğe uygularsak

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi}(x) &= 2\pi|x|^{-[(n-2)/2]}(2\pi)^{-\delta-1}2^\delta\Gamma(\delta+1)|x|^{-\delta-1}J_{(n-2)/2+\delta+1}(2\pi|x|) \\
&= \pi^{-\delta}\Gamma(\delta+1)|x|^{-[(n/2)+\delta]}J_{n/2+\delta}(2\pi|x|)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki bu da ispatı bitirir.

Teorem 4.1.9: $m \in (-\frac{1}{2}, \infty)$ olsun. Bu takdirde

$$\text{(a)} \quad r \longrightarrow 0^+ \quad \text{için} \quad J_m(r) \sim cr^m \tag{4.1.10}$$

$$\text{(b)} \quad r \longrightarrow \infty \quad \text{için} \quad J_m(r) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi r}} cos(r - \tfrac{\pi\nu}{2} - \tfrac{\pi}{4}) + O(r^{-3/2})$$

ve dolayısıyla

$$r \longrightarrow \infty \quad \text{için} \quad J_m(r) = O(r^{-1/2}) \tag{4.1.11}$$

asimptotik formülleri sağlanır.

İspat: (a) Yukarıdaki koşullar altında (4.1.6)'dan

$$J_k(r) = (\frac{r}{2})^k \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(r/2)^{2j}}{j!\Gamma(j+k+1)} = (\frac{r}{2})^k (c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^4 + \cdots)$$

ve dolayısıyla

$$\frac{J_k(r)}{(r)^k} = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 r^2 + \tilde{c}_3 r^4 + \cdots$$

elde edilir. Son eşitlikte $r \longrightarrow 0^+$ için limite geçerek istediğimiz sonucu elde ederiz.

(b) Burada bizim için asıl gerekli olan (4.1.11) eşitliği olduğu için ilk kısmın ispatını burada vermiyoruz. Bu ispat (Stein and G.Weiss, 1971. sf:158) 'de bulunabilir.

Sonuç 4.1.12: $\delta > (n-1)/2$ olmak üzere,

$$\Phi(x) = \Phi_\delta(x) = \begin{cases} (1 - |x|^2)^\delta & , \quad |x| \le 1 \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad |x| > 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\widehat{\Phi}(x) = \pi^{-\delta}\Gamma(\delta+1)|x|^{-[(n/2)+\delta]} J_{n/2+\delta}(2\pi|x|)$$

integrallenebilirdir. Yani $\widehat{\Phi}(x) = \varphi \in L^1(\mathbf{R}^n)$'dir.

İspat: $\widehat{\Phi}(x) = \varphi \in C_0(\mathbf{R}^n)$ ve $J_m(t)$, $(m \in (-\frac{1}{2}, \infty)$, $t > 0)$ fonksiyonlarının asimptotik özellikleri göz önünde tutulursa, φ 'nin integrallenebilir olduğunu göstermek için, φ 'nin $|x| \longrightarrow 0$ ve $|x| \longrightarrow \infty$ için nasıl davrandığını incelememiz yeterli olacaktır. Bunun için (4.1.10) ve (4.1.11)'den

$$\widehat{\Phi}(x) \sim \begin{cases} c|x|^{-\frac{n}{2}+\delta}|x|^{-\frac{1}{2}} = |x|^{-\frac{n+1}{2}+\delta} & , \quad |x| \to \infty \\ c|x|^{-\frac{n}{2}-\delta}|x|^{\frac{n}{2}+\delta} = \tilde{c} & , \quad |x| \to 0 \end{cases}$$

olduğunu söyleyebiliriz ki bu da da $\widehat{\Phi}(x) = \varphi \in L^1(\mathbf{R}^n)$ olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1.13: $R > 0$, $\delta > \frac{n-1}{2}$, $\varphi_{(1/R)}(x) = R^n\varphi(Rx)$ ve $S_R^\delta = \varphi_{(1/R)} * f$ olmak üzere eğer $f \in L^p(\mathbf{R^n}), 1 \leq p < \infty$ ise

(a) $||S_R^\delta - f||_p \longrightarrow 0$, $R \to \infty$

(b) $\lim\limits_{R\to\infty} S_R^\delta(x) = f(x)$ eşitlikleri f 'nin tüm Lebesgue noktalarında (yani hemen hemen her x için) sağlanır.

İspat: $\widehat{\Phi}(x) = \varphi(x)$'nin (3.2.14) ve (3.3.7) Teoremlerinin hipotezlerini sağladığını göstermemiz ispatı bitirecektir. Bunun için, Gözlem (3.2.25) ve Sonuç (4.1.12)'den $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx = \Phi(0) = 1$ olduğu görülür. Diğer yandan φ'nin radyal ve C_0 sınıfından olduğu göz önünde tutulursa $\psi(x) = ess \sup\limits_{|t|\geq|x|} |\varphi(t)| = \sup\limits_{|t|\geq|x|} |\varphi(t)| = \varphi(x) \in L^1(\mathbf{R^n})$ olduğu görülür. Böylece ispat için gerekli hipotezlerin sağlandığını göstermiş olduk.

4.2 μ-pürüzsüzlük ve Önemli Sonuçlar

Üçüncü bölümden buraya kadar S_ε^δ-Bochner-Ries ortalamalarının $f(x)$'e noktasal olarak yakınsadığını gösterdik. Bu kesimde esas amacımız S_ε^δ-Bochner-Ries ortalamalarının $f(x)$'e , f nin bir tür pürüzsüzlük (smoothness) noktalarında yakınsama hızını incelemektir. Burada f nin lokal pürüzsüzlüğü özel bir maksimal fonksiyonun terimlerinde ifade edilecektir.

Tanım 4.2.1: $\mu(r)$, $(0,\infty)$ aralığında pozitif, sürekli ve $\lim\limits_{r\to 0}\mu(r) = 0$ özelliklerini sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer lokal integrallenen f fonksiyonu için bir $x_0 \in \mathbf{R^n}$ noktasında

$$m_\mu(x_0) \equiv \sup_{0<r<1} \frac{1}{r^n\mu(r)} \int\limits_{|x|<r} |f(x_0 - x) - f(x_0)|\,dx < \infty \qquad (4.2.2)$$

sağlanırsa, f fonksiyonu $|x_0|$ noktasında μ -pürüzsüzlük (smoothness) özelliğine sahiptir diyeceğiz.

Gözlem 4.2.3: μ -pürüzsüzlük (smoothness) özelliğini sağlayan her nokta f fonksiyonunun Lebesgue noktaları kümesine aittir.

İspat: Tanım (3.3.4) 'ü kullanarak,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{r^n}\int\limits_{|t|<r} |f(x-t) - f(x)|\,dt &= \mu(r)\frac{1}{\mu(r)r^n}\int\limits_{|t|<r} |f(x-t) - f(x)|\,dt \\ &\leq \mu(r)\sup_{0<r<1}\frac{1}{\mu(r)r^n}\int\limits_{|t|<r} |f(x-t) - f(x)|\,dt. \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlikte $r \to 0$ için limite geçerek

$$0 \leq \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int\limits_{|t|<r} |f(x-t) - f(x)|\,dt \leq \lim_{r\to 0}\mu(r)c = 0$$

eşitliği elde edilir ki bu da ispatı bitirir.

Şimdi, bu çalışmanın önemli sonuçlarından ilkini verelim:

Teorem 4.2.4: $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ fonksiyonu bir $x_0 \in \mathbf{R}^n$ noktasında μ-pürüzsüzlük özelliğine sahip olsun. Ayrıca $\delta > \frac{n-1}{2}$ olmak üzere,

$$\lim_{r\to\infty} r^{\frac{n-1}{2}-\delta}\mu(r) = 0 \tag{4.2.5}$$

sağlansın. Bu takdirde, c ve d, ε 'dan bağımsız sabitler olmak üzere

$$|S_\varepsilon^\delta(x_0) - f(x_0)| \le c\varepsilon^{\delta-\frac{n-1}{2}} + d\int_0^\infty \mu(\varepsilon r)r^{\frac{n}{2}-\delta}|J_{\frac{n}{2}+\delta+1}(2\pi r)|\,dr \tag{4.2.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

İlk önce, klasik Hardy-Littlewood Maksimal Fonksiyonunun bir genelleşmesini tanımlayalım, onunla ilgili ve Teorem (4.2.4)'ün ispatında önemli rol oynayacak olan bir Lemma ispatlayalım.

Tanım 4.2.7: Negatif olmayan $\nu(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ ve pozitif $\mu(r)$, $(0 \le r < \infty)$ fonksiyonları verildiğinde

$$(m_{\mu,\nu}\psi)(y) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{\mu(r)r^n}\int_{|x|\le r} |\psi(x,y)||\nu(x)|\,dx \tag{4.2.8}$$

şeklinde tanımlanmış $m_{\mu,\nu}\psi$ fonksiyonuna $\psi(x,y)$, $(x,y) \in \mathbf{R}^n$ fonksiyonunun (μ,ν)-maksimal fonksiyonu diyeceğiz.

$\nu \equiv 1$, $\mu(r) \equiv sabit = \{\mathbf{R}^n$ 'nin birim yuvarının hacmi$\}$ ve $\psi(x,y) = \psi(y-x)$ olması durumunda klasik Hardy-Littlewood Maksimal fonksiyonu (Stein and Weiss , 1971. sf:53) elde edilir.

Lemma 4.2.9: $m_{\mu,\nu}\psi$ maksimal fonsiyonu (4.2.8) 'deki gibi tanımlansın ve diferensiyellenen $\varphi(r)$, $(0 < r < \infty)$ fonksiyonu

$$\lim_{r\to\infty} r^n\mu(r)\varphi(r) = 0 \ \text{ ve } \lim_{r\to 0+} r^n\mu(r)\varphi(r) = 0 \tag{4.2.10}$$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde her $y \in \mathbf{R}^n$ için

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\psi(x,y)\varphi(|x|)|\nu(x)\,dx \le (m_{\mu,\nu}\psi)(y)\int_0^\infty r^n\mu(r)|\varphi'(r)|\,dr \tag{4.2.11}$$

eşitsiziliği sağlanır.

İspat: Lemmanın ispatında Stein ve Weiss'in kitabındaki (sf:64) bazı fikirleri kullanacağız.

Değişkeni, $x = r\theta$, $(0 \leq r < \infty)$, $\theta = x/|x|)$ şeklinde değiştirerek ve $|\theta| = 1$ birim küresinin alan elemanına $d\sigma(\theta)$ diyerek

$$I(y) \equiv \int_{\mathbf{R}^n} |\psi(x,y)\varphi(|x|)|\nu(x)\,dx = \int_0^\infty r^{n-1}\{\int_{|\theta|=1} |\psi(r\theta,y)\varphi(r)|\nu(r\theta)\,d\sigma(\theta)\}dr$$

$$= \int_0^\infty r^{n-1}|\varphi(r)|\{\int_{|\theta|=1} |\psi(r\theta,y)|\nu(r\theta)\,d\sigma(\theta)\}dr$$

elde ederiz. Şimdi, $0 \leq t < \infty$ ve $0 \leq r \leq \infty$ olmak üzere

$$\lambda(t) = \int_{|\theta|=1} |\psi(t\theta,y)|\nu(t\theta)\,d\sigma(\theta) \quad \text{ve} \quad \Lambda(r) = \int_0^r \lambda(t)t^{n-1}\,dt$$

dersek,

$$I(y) = \int_0^\infty r^{n-1}|\varphi(r)|\lambda(r)\,dr = \int_0^\infty |\varphi(r)|\,d\Lambda(r)$$

$$= |\varphi(r)|\Lambda(r)|_0^\infty - \int_0^\infty \Lambda(r) sgn\varphi(r)\varphi'(r)\,dr$$

olur. Öte yandan

$$\Lambda(r) = \int_0^r \lambda(t)t^{n-1}\,dt = \int_{|x|\leq r} |\psi(x,y)|\nu(x)\,dx \leq r^n\mu(r)(m_{\mu,\nu}\psi)(y)$$

eşitsizliğinden ve (4.2.10) koşullarından

$$|\varphi(r)|\Lambda(r)|_0^\infty = 0$$

olur ve buradan da

$$I(y) = -\int_0^\infty \Lambda(r) sgn\varphi(r)\varphi'(r)\,dr \leq \int_0^\infty \Lambda(r)\varphi'(r)\,dr \leq (m_{\mu,\nu}\psi)(y)\int_0^\infty r^n\mu(r)|\varphi'(r)|\,dr$$

elde edilir.

Bu hazırlıktan sonra artık Teorem (4.2.4)' ün ispatını yapabiliriz.

Not: Biz aşağıda $\nu \equiv 1$ alacağız ve bu halde $m_{\mu,\nu}\psi$ simgesi yerine $(m_\mu\psi)$ simgesini kullanacağız:

$$(m_\mu\psi)(y) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{\mu(r)r^n} \int_{|x|\leq r} |\psi(x,y)|\,dx \tag{4.2.12}$$

Teorem 4.2.4 'ün ispatı: $\delta > 0$ olmak üzere

$$\Phi(x) = \Phi_\delta(x) = \begin{cases} (1-|x|^2)^\delta, & |x| \leq 1; \text{ ise} \\ 0, & |x| > 1; \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için, $\varepsilon > 0$ için $\varphi_\varepsilon(|x|) = (\frac{1}{\varepsilon})^n \varphi(\frac{|x|}{\varepsilon})$ olmak üzere Gözlem (3.2.20) ve Teorem (4.1.7) 'den

$$\widehat{\Phi}(x) = \varphi(|x|) \quad \text{ve} \quad \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi_\varepsilon(|x|)\, dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(|x|)\, dx = \Phi(0) = 1$$

olur. Bunu ve S_ε^δ lerin (4.1.4) deki tanımını göz önüne alarak şunları yazabiliriz:

$$\begin{aligned} |S_\varepsilon^\delta(x^0) - f(x^0)| &\leq \int\limits_{|x|\leq 1} |\varphi_\varepsilon(|x|)||f(x^0 - x) - f(x^0)|\, dx \\ &+ \int\limits_{|x|>1} |\varphi_\varepsilon(|x|)||f(x^0 - x) - f(x^0)|\, dx \\ &= A_1(\varepsilon) + A_2(\varepsilon) \end{aligned} \quad \textbf{(4.2.13)}$$

İlk önce Lemma (4.2.9) 'dan yararlanarak $A_1(\varepsilon)$ 'nun tahminini yapalım:

$$\Psi(x, x^0) = \begin{cases} f(x^0 - x) - f(x^0) & , \ |x| \leq 1 \\ 0 & , \ |x| > 1 \end{cases}$$

dersek,

$$A_1(\varepsilon) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\varphi_\varepsilon(|x|)||\Psi(x, x^0)|\, dx$$

olur. $A_1(\varepsilon)$'na, lemmadaki (4.2.11) eşitsizliğini $\nu \equiv 1$ için uygulayarak, (Lemmanın koşullarının sağlandığını daha sonra aşağıda göstereceğiz)

$$A_1(\varepsilon) \leq (m_\mu \Psi)(x_0) \int\limits_0^\infty r^n \mu(r) |\varphi'_\varepsilon(r)|\, dr$$

eşitsizliği elde edilir. f fonksiyonu, teoremin varsayımına göre x_0 noktasında μ-pürüzsüzlük özelliğine sahip olduğundan $(m_\mu \Psi)(x_0) < \infty$ olur ve dolayısıyla, bir $c_1 > 0$ sabiti için,

$$A_1(\varepsilon) \leq c_1 \int\limits_0^\infty r^n \mu(r) |\varphi'_\varepsilon(r)|\, dr \quad \textbf{(4.2.14)}$$

dir.

$$\varphi_\varepsilon(|r|) = (\frac{1}{\varepsilon})^n \varphi(\frac{r}{\varepsilon}) = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\pi^\delta} (\frac{1}{\varepsilon})^n (\frac{r}{\varepsilon})^{(n/2+\delta)} J_{n/2+\delta}(\frac{2\pi r}{\varepsilon})$$

formülündeki Bessel fonksiyonları için iyi bilinen ([Stein and Weiss, 1971], sf:111)

$$(-\frac{1}{t}\frac{d}{dt})(t^{-m} J_m(t)) = t^{-(m+1)} J_{m+1}(t)$$

özdeşliğini kullanarak şunları yazabiliriz:

$$A_1(\varepsilon) \leq c_2 \int\limits_0^\infty r^n \mu(r) (\tfrac{1}{\varepsilon})^n \tfrac{1}{\varepsilon} (\tfrac{r}{\varepsilon})^{(-n/2-\delta)} |J_{n/2+\delta+1}(\tfrac{2\pi r}{\varepsilon})|\, dr$$

$$= c_3 \int_0^\infty \mu(\varepsilon r) r^{n/2-\delta} |J_{n/2+\delta+1}(2\pi r)|\, dr \tag{4.2.15}$$

Şimdi Lemmanın koşullarının sağlandığını gösterelim. Bunun için Bessel fonksiyonlarının (4.1.10) ve (4.1.11) 'deki asimptotik formülleri kullanacağız. $r \to 0$'a gittiğinde, (4.1.10) dan dolayı $r^n \mu(r) \varphi_\varepsilon(r) \sim c_3 r^n \mu(r)$ olur ve sonuncu ifade ise teoremde $\mu(r)$ nin seçilişine göre sıfıra gidiyor. $r \to \infty$'a gittiğinde (4.1.11)'e teoremin (4.2.5) şartına göre $r^n \mu(r) |\varphi_\varepsilon(r)| \leq c_4(\varepsilon) r^n \mu(r) r^{-n/2-\delta} r^{-1/2} = c_4(\varepsilon) \mu(r) r^{(n-1)/2-\delta} \to 0$ ve dolayısıyla, $r^n \mu(r) |\varphi_\varepsilon(r)| \to 0$ dır.

Şimdi de (4.2.13) deki $A_2(\varepsilon)$ ifadesinin tahminini bulalım. $p + q = pq$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$A_2(\varepsilon) \leq |f(x_0)| \int_{|x|>1} |\varphi_\varepsilon(|x|)|\, dx$$

$$+ \left(\int_{|x|>1} |f(x_0 - x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{|x|>1} |\varphi_\varepsilon(x)|^q dx \right)^{1/q} \tag{4.2.16}$$

elde ederiz. $x = r\theta$, $(0 \leq \infty$, $|\theta| = 1)$ dersek,

$$\begin{aligned} \int_{|x|>1} |\varphi_\varepsilon(|x|)|\, dx &= \int_1^\infty r^{n-1} \{ \int_{|\theta|=1} |\varphi_\varepsilon(|x|)|\, d\sigma(\theta)\}\, dr = c_5 \int_1^\infty r^{n-1} |\varphi_\varepsilon(|x|)|\, dr \\ &= c_6 \varepsilon^{-n+1} \int_{1/\varepsilon}^\infty r^{-n/2-\delta} |J_{n/2+\delta}(2\pi r)|\, dr \end{aligned}$$

$J_m(r)$ fonksiyonunun, $r \to \infty$ için (4.1.11) 'deki asimptotunu kullanırsak, sonuncu ifadeden

$$\int_{|x|>1} |\varphi_\varepsilon(|x|)|\, dx \leq c_7 \varepsilon^{-n+1} \int_{1/\varepsilon}^\infty r^{-n/2-\delta} r^{-1/2}\, dr = c_8 \varepsilon^{\delta-(n-1)/2} \tag{4.2.17}$$

olur.

Benzer şekilde, $r \to \infty$ için (4.1.11) deki asimptotik formül kullanılarak

$$\begin{aligned} \left(\int_{|x|>1} |\varphi_\varepsilon(x)|^q dx \right)^{1/q} &= c_9 \varepsilon^{-n} \left(\int_{1/\varepsilon}^\infty |r^{-n/2-\delta} J_{n/2+\delta}(2\pi r)|^q \varepsilon\, dr \right)^{1/q} \\ &\leq c_{10} \varepsilon^{-n+1/q} \left(\int_{1/\varepsilon}^\infty |r^{-(n+1/2+delta)^q}\, dr \right)^{1/q} = c_{11} \varepsilon^{\delta-[(n-1)/2]} \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

elde edilir. Şimdi (4.2.17), (4.2.18) tahminlerini ve

$$\left(\int\limits_{|x|>1} |f(x_0 - x)|^p dx\right)^{1/p} \leq ||f||_{L_p} < \infty$$

olduğunu (4.2.16) 'da gözönüne alarak,

$$A_2(\varepsilon) \leq c_{12}\varepsilon^{\delta-[(n-1)/2]}$$

sonucuna varırız. Nihayet, $A_1(\varepsilon)$ ve $A_2(\varepsilon)$ için bulduğumuz tahminleri (4.2.13) 'de göz önüne alarak teoremin ispatını bitiriyoruz.

Sonuç 3.2.19: Teorem (4.2.4) 'ün koşulları altında $\mu(r) = r^\alpha |\ln r|^\beta$, $(\alpha > 0\ ,\ \beta \geq 0)$ alınırsa, $\delta > \alpha + (n + 1/2)$ sağlandığında

$$|S_\varepsilon^\delta(x_0) - f(x_0)| = O(\varepsilon^\alpha |\ln \varepsilon|^\beta)\ ,\ (\varepsilon \to 0)$$

olur. Özel olarak $\mu(r) = r^\alpha$ için

$$|S_\varepsilon^\delta(x_0) - f(x_0)| = O(\varepsilon^\alpha)\ ,\ (\varepsilon \to 0)$$

olur.

ispat $\mu(r) = r^\alpha |\ln r|^\beta$, $(\alpha > 0\ ,\ \beta \geq 0)$ olsun, δ parametresi üzerine konulmuş $\delta > \alpha + [(n+1)/2]$ koşulunu kullanarak teoremin (4.2.5) koşulunun sağlandğını görmek kolaydır. Şimdi $\mu(r) = r^\alpha |\ln r|^\beta$ için (4.2.6) eşitsizliğinin sağ tarafının üstten tahminini bulalım.

İntegralde $\mu(r) = r^\alpha |\ln r|^\beta$ koyarsak, yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty \mu(\varepsilon r) r^{n/2-\delta} |J_{n/2+\delta+1}(2\pi r) &\leq \varepsilon^\alpha |\ln \varepsilon|^\beta \int\limits_0^\infty r^{\alpha+(n/2)-\delta}\left(1 + \left|\tfrac{\ln r}{\ln \varepsilon}\right|\right)^\beta |J_{n/2+\delta+1}(2\pi r)|\,dr \\ &\leq \varepsilon^\alpha |\ln \varepsilon|^\beta \int\limits_0^\infty r^{\alpha+(n/2)-\delta}(1 + |\ln r|)^\beta |J_{n/2+\delta+1}(2\pi r)|\,dr.\end{aligned}$$

Sonuncu integralin yakınsak olduğunu görelim. Bunun için integral altındaki fonksiyonun (ki ona $I(r)$ diyelim.) $r \to 0$ ve $r \to \infty$ için davranışlarını incelemek yeterli olacaktır. Bessel fonksiyonu $J_m(t)$'nin (4.1.10) ve (4.1.11) deki asimptotlarını gözönüne alırsak, $r \to 0$ için

$$I(r) \sim c_{13} r^{\alpha+n+1} |\ln r|^\beta$$

ve $r \to \infty$ için

$$I(r) \sim c_{14} r^{\alpha+[(n-1)/2]-\delta} |\ln r|^\beta$$

olur. Sonucundan görünüyor ki, $\delta > \alpha + [(n+1)/2]$ olursa $\alpha + [(n-1)/2] - \delta < -1$ olur ve dolayısıyla $I(r)$'nin integrali yakınsak olur. Böylece, $\delta > \alpha + [(n+1)/2]$ eşitsizliğini sağlayan her δ için

$$|S_\varepsilon^\delta(x_0) - f(x_0)| \leq c_{15}\varepsilon^{\delta-[(n-1)/2]} + c_{16}\varepsilon^\alpha |\ln \varepsilon|^\beta \leq c_{17}\varepsilon^\alpha |\ln \varepsilon|^\beta$$

olur.

Sonuç 4.2.20: Teorem' in koşulları altında $\mu(r) = r^{\alpha} \ln^{\beta}(r+1)$, $(\alpha \geq 0 \, , \, \beta \geq 0)$ alınırsa, $\delta > \alpha + \beta + (n + 1/2)$ sağlandığında

$$|S_{\varepsilon}^{\delta}(x_0) - f(x_0)| = O(\varepsilon^{\alpha+\beta}) \, , \, (\varepsilon \to 0)$$

olur.Özel olarak $\mu(r) = \ln^{\beta}(r+1)$, $\beta > 0$ için

$$|S_{\varepsilon}^{\delta}(x_0) - f(x_0)| = O(\varepsilon^{\beta}) \, , \, (\varepsilon \to 0)$$

olur.

İspat: $\mu(r) = r^{\alpha} \ln^{\beta}(r+1)$, $(\alpha \geq 0 \, , \, \beta \geq 0)$ olsun. α, β ve δ parametrelerinin sağladığı $\delta > \alpha + \beta + (n + 1/2)$ koşulunu kullanarak teoremin (4.2.5) koşulunun sağlandığını görmek zor değildir. Şimdi (4.2.6) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integralde $\mu(r) = r^{\alpha} \ln^{\beta}(r+1)$ koyarak

$$\int_0^{\infty} \mu(\varepsilon r) r^{n/2-\delta} |J_{n/2+\delta+1}(2\pi r)\, dr = \int_0^{\infty} \varepsilon^{\alpha} r^{\alpha} \ln^{\beta}(1+\varepsilon r) r^{n/2-\delta} |J_{n/2+\delta+1}(2\pi r)|\, dr$$

Her $t > 0$ için $\ln(1+t) < t$ olduğundan $\beta > 0$ için $\ln^{\beta}(1+\varepsilon r) \leq \varepsilon^{\beta} r^{\beta}$ ve dolayısıyla

$$\int_0^{\infty} \mu(\varepsilon r) r^{n/2-\delta} |J_{n/2+\delta+1}(2\pi r)\, dr \leq \varepsilon^{\alpha+\beta} \int_0^{\infty} r^{\alpha+\beta+(n/2)-\delta} |J_{n/2+\delta+1}(2\pi r)|\, dr$$

Yine Bessel fonksiyonunun $r \to 0$ ve $r \to \infty$ için (4.1.10) ve (4.1.11) 'deki asimptotlarını göz önüne alırsak $\delta > \alpha + \beta + (n + 1/2)$ eşitliğini sağlayan her δ için sonuncu integralin yakınsak olduğunu görebiliriz.

Böylece, $\delta > \alpha + \beta + (n + 1/2)$, $(\alpha \geq 0 \, , \, \beta \geq 0)$ olunca

$$|S_{\varepsilon}^{\delta}(x_0) - f(x_0)| \leq c_{18}\varepsilon^{\delta-[(n-1)/2]} + c_{19}\varepsilon^{\alpha+\beta} = c_{20}\varepsilon^{\alpha+\beta}$$

sağlanır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Fourier dönüşümü bilinen bir fonksiyonun oluşturulmasında kullanılan önemli toplanabilirlik metotlarının incelendiği bu çalışmanın bulgular kısmında Bochner-Riesz oratalamalarının fonksiyona yakınsama hızı incelenmiştir.

Çalışmada da görüleceği gibi (3.1.1.) integralinde, $\Phi(x) = e^{-|x|}$ alarak Abel-Poisson, $\Phi(x) = e^{-|x|^2}$ alarak Gauss-Weierstrass ve

$$\Phi(x) = \Phi_\delta(x) = \begin{cases} (1-|x|^2)^\delta & , \quad |x| \leq 1 \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad |x| > 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

alarak Bochner-Riesz toplanabilirlik metotları oluşturulmuş ve Bochner-Riesz ortalamalarının fonksiyona ait μ-pürüzsüz noktalarında yakınsama hızı incelenmiştir. Burada tartışmaya açık olarak, Teorem (3.3.7) 'nin hipotezlerini sağlayan fonsiyonlar seçilerek değişik toplanabilirlik metotları oluşturabiliriz ve Bochner-Riesz ortalamaları için bulduğumuz fonksiyona yakınsama hızları bu fonksiyonlar için de bulunabilir.

5. ÖZET

Bu çalşmada esas olarak: *"Lebesgue anlamında integrallenen bir fonksiyonunun Fourier dönüşümü verildiğinde, acaba verilen bu dönüşümden yararlanarak fonksiyonun kendisini nasıl elde ederiz?* " sorusuna cevap veren değişik toplanabilirlik (summability) metotları tanıtılmış ve *Bochner-Riesz* metodu için Bochner-Riesz ortalamalarının birtür pürüzsüzlük noktalarında sözkonusu fonksiyona yakınsama hızı incelenmiştir.

Tezin ilk iki bölümünde, Abel, Bochner-Riesz ve Gauss-Weierstrass ortalamalarının fonksiyona noktasal olarak yakınsadıkları ispat edilmiş daha sonra bu ortalamaların fonksiyona yakınsaması için sağlamaları gereken yeterli koşullar daha genel olarak gösterilmiştir.

Ayrıca tezin son bölümünde Bochner-Riesz ortalamalarının fonksiyona yakınsama hızının belirlenmesinde önemli bir rol oynayan Birinci tip Bessel fonksiyonları' nın asimtotik davranışları incelenmiştir.

6. SUMMARY

One of the main problems of Harmonic analysis is the question " *given the Fourier Transform of a Lebesgue integrable function f, how do we obtain f back again from its Fourier transform ?* "

In this work, we introduce some of the summability methods which answer this question.

In the first two parts of this work we prove that Abel-Poisson, Bochner-Riesz and Gauss-Weierstrass means converge to the function and we obtain sufficient conditions for the convergence of more general types of means.

In the last part of this work, we investigate and determine the rate of convergence of the Bochner-Riesz means to the function at some points of smoothness (μ-smoothness).

7. KAYNAKLAR

BOCHNER, S. 1959. Lectures on Fourier Integrals, Princeton University Press, New Jersey, 331 pp.

CONWAY, J.B. 1978. Functions of One Complex Variable, Springer-Verlag Press, New Jersey, 311 pp.

DAVIS, K.M. and CHANG, Y.C. 1987. Lectures on Bochner-Riesz Means. London Mathematics Society Lecture Notes, Cambridge University Press, Cambridge, Series:114.

FOLLAND, G.B. 1984. Real Analysis Modern Techniques and Their Applications, USA, 549 pp.

HÖRMANDER, L. 1961. Estimates for tranlation invariant operators in L^p spaces. Acta Mathematica, 104: 93-140.

STEIN, E.M. 1970. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, New Jersey, 287 pp.

STEIN, E.M. and WEISS, G. 1971. Introduction to Fourier Analysis On Euclidean Spaces, Princeton University Press, New Jersey, 331 pp.

STEIN, E.M. 1993. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, Princeton University Press, New Jersey, 694 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Melih ERYİĞİT, 1971 yılında Aydın' da doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Kuşadası' nda tamamladı. 1992 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 1996 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. Ocak 1997 'de Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Eylül 1996 - Ağustos 1998 tarihleri arasında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Öğremini tamamladı. Halen Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.