T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

LAPLACE-BESSEL DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN DOĞURDUĞU B-BMO (BOUNDED MEAN OSCILLATION) UZAYLARI ÜZERİNE

Güldane YILDIZ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

TEMMUZ 2021

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

LAPLACE-BESSEL DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN DOĞURDUĞU B-BMO (BOUNDED MEAN OSCILLATION) UZAYLARI ÜZERİNE

Güldane YILDIZ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

TEMMUZ 2021

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LAPLACE-BESSEL DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN DOĞURDUĞU B-BMO (BOUNDED MEAN OSCILLATION) UZAYLARI ÜZERİNE

Güldane YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

Bu tez 14/07/2021 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN (Danışman)
Doç. Dr. Sinem SEZER EVCAN
Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

LAPLACE-BESSEL DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN DOĞURDUĞU B-BMO (BOUNDED MEAN OSCILLATION) UZAYLARI ÜZERİNE

Güldane YILDIZ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Temmuz 2021; 53 sayfa

Bu tezimizde

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial^2}{\partial x_n} \right), \ (v > 0, x_n > 0)$$

Laplace-Bessel diferansiyel operatörünü göz önüne aldık.

Bu çalışmanın amacı Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B tarafından doğurulan B-BMO uzaylarını araştırmaktır.

ANAHTAR KELİMELER: BMO uzayı , Genelleşmiş kayma, Laplace-Bessel diferansiyel operatörü, B-BMO uzayı.

JÜRİ: Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Doç. Dr. Sinem SEZER EVCAN
Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ABSTRACT

ON THE B-BMO(BOUNDED MEAN OSCILLATION) SPACES GENERATED BY LAPLACE-BESSEL DIFFERENTIAL OPERATOR

Güldane YILDIZ

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

July 2021; 53 pages

In the thesis, we consider Laplace-Bessel differential operator

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial^2}{\partial x_n} \right),\ (\nu > 0,\ x_n > 0).$$

The aim of this study is to investigate B-BMO spaces generated by the Laplace-Bessel differential operator Δ_B.

KEYWORDS: BMO spaces, Laplace-Bessel differential operator, Generalized translation, B-BMO spaces.

COMMITTEE: Assoc.Prof.Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN
Assoc.Prof.Dr. Sinem SEZER EVCAN
Assoc.Prof.Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial^2}{\partial x_n} \right), \ (\nu > 0, \ x_n > 0)$$

Fourier-Bessel Harmonik analizinin önemli diferansiyel operatörlerinden biridir. Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu B-BMO (Bounded Mean Oscillation) uzayı ilk defa 2000 yılında V.S. Guliev tarafından tanımlanmış ve V.S. Guliev ve ekibi tarafından Fourier-Bessel Harmonik analizindeki birçok çalışmada kullanılmıştır. Bu konuyla ilgili literatür incelendiğinde B-BMO uzayının tanımı dışında sahip olduğu diğer özelliklerin yer almadığını görülmüştür.

Dolayısıyla bu tez çalışmasında klasik BMO uzaylarının sahip olduğu özelliklerin Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu B-BMO uzaylarında da geçerli olup-olmadığı araştırılmıştır.

Çalışmamız boyunca kıymetli zamanını ve değerli bilgilerini benden esirgemeyen sevgili danışmanım Sayın Doç. Dr. Simten Bayrakçı Doğan'a ve bölüm hocalarıma, maddi manevi destekleyen sevgili Aileme, bu süreçte yanımda olan arkadaşlarıma ve degerli bilgilerini paylaşan Ar. Gör. Çağla Sekin'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans olarak sunduğum "Laplace-Bessel Diferansiyel Operatorünün Doğurduğu B-BMO (Bounded Mean Oscillation) Uzayları Üzerine" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

14/07/2021

Güldane YILDIZ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n_+$	: Sonuncu değişkeni pozitif, n-boyutlu Reel sayılar kümesi
$B(x,r)$	: $x-$merkezli, $r>0$ yarıçaplı yuvar
$\lvert E\rvert$	: E kümesinin Lebesque ölçümü
$\lvert E\rvert_\nu$	: E kümesinin ağırlıklı Lebesque ölçümü
$f \circledast g$	: f ile g 'nin genelleşmiş girişimi

Kısaltmalar:

BMO	:	$BMO\,(\mathbb{R}^n)$
$B\text{-}BMO$	:	$B\text{-}BMO\,(\mathbb{R}^n)$

1. GİRİŞ

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü, ($\nu > 0$, $x_n > 0$)

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial^2}{\partial x_n} \right)$$

şeklinde tanımlanır. Bu diferansiyel operatör ilk n-1 değişkene Laplace diferansiyel operatörü, sonuncu değişkene de Bessel diferansiyel operatörünün uygulandığı bir "hibrit" diferansiyel operatördür.

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B ile birçok matematikçi çok sayıda çalışmalar yapmıştır. Bunlardan bazıları Kipriyanov (1967), Klyuchantsev (1970), Lofstrom ve Peetre (1969), Lyakhov (1983), Stempak (1986), Trimèche (1997), Gadjiev, Aliev, Rubin, Bayrakci, Sezer (1988, 1998, 2002, 2008), Guliev, Hasanov (2000, 2006) dir.

Klasik BMO uzayı yani, salınımlarının ortalamaları sınırlı fonksiyonlar uzayı John ve Nirenberg tarafından 1961 yılında tanımlanmıştır. Ardından, Fefferman (1971) BMO uzayının, Hardy uzayının duali olduğunu kanıtlamıştır. Son 50 yılda bir çok matematikçi BMO uzayları ile çalışmıştır, (Feffeman ve Stein(1972)).

Bu uzaylar, Fourier Harmonik analizin önemli problemlerinden biri olan operatörlerin Lebesgue uzaylarında sınırlılıklarının incelenmesinde önemli rol oynamaktadır. BMO uzayından olan fonksiyonlar ile L_∞ uzayından olan fonksiyonlar birbirine çok benzerlikler göstermektedir. BMO uzayı L_∞ uzayını kesin kapsar. Yani, BMO uzayından olup L_∞ uzayına ait olmayan fonksiyon vardır. Bundan dolayı L_p ile L_∞ arasındaki birçok interpolasyon L_p ile BMO uzayı arasında daha iyi çalışır.

Örneğin, klasik singular (tekil) integraller L_∞ uzayından L_∞ uzayına sınırlı etki göstermezken, L_∞ uzayından BMO uzayına sınırlı etki gösterir. Ayrıca BMO uzayından olan fonksiyonlar yavaş artar ve logaritmik hızdadır. Bu fonksiyonlar L_∞ uzayından olan fonsiyonlar için temsilci konumundadır. Bundan başka, BMO uzayı, klasik çekirdekli girişim tipli olmayan singular integral operatörlerin L_2-sınırlılığının incelenmesinde önemli rol oynamaktadır (Grafakos(2009); Stein(1993,2005)).

Bu tez çalışmasının amacı, Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B nin doğurduğu B-BMO uzaylarının incelemektir. B-BMO uzayının tanımı ilk defa V.S. Guliev (2000) tarafından verilmiştir. Fakat literatürde B-BMO uzayının özellikleri ile ilgili teoremler bulunmamaktadır. Dolayısıyla bu tez çalışması ile hem literatürdeki eksikliği kapatmayı hem de bir sonraki akademik çalışmalarımız için gerekli alt yapıyı oluşturmayı amaçlamaktayız.

Tez, Kaynak taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma ve Sonuç bölümlerinden oluşmaktadır. Kaynak taraması bölümünde bize gerekli olan analizin temel kavramları verilmiştir. Materyal ve Metot bölümünde klasik BMO uzayları detaylı bir şekilde incelenmiş, John-Nirenberg eşitsizliği ifade edilip bazı önemli sonuçlarına yer verilmiştir.

Bulgular kısmında ise öncelikle Bessel diferansiyel operatörü ve onun ürettiği genelleşmiş kaymanın (Bessel kayması) tanımı ve özellikleri sonra da Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B ve onun doğurduğu genelleşmiş kayma ve özellikleri çalışılmıştır.

Ayrıca bu kısımda bizim için gerekli olacak B-Poisson çekirdeği ve B-Poisson integraline de yer verilmiştir. Bulgular ve Tartışma kısmının son bölümünde tezin amacı olan B-BMO uzayının tanımı verilip özellikleri incelenmiştir. Sonuç bölümünde ise bulunan sonuçlar derlenmiştir.

2. KAYNAK TARAMASI

Tezin bu kısmında ileride bizim için gerekli olacak reel analizin bazı temel tanım ve teoremleri ifade edilmektedir. Teoremlerin ispatlarına yanlarında verilen kaynaklardan ulaşılabilir. Temel tanımlar için Folland (1984) ve Grafakos $(2008-2009)$ kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 2.1. *n-boyutlu Öklid uzayı*

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$$

ve $E \subset \mathbb{R}^n$ *ölçülebilir kümesinin Lebesque ölçümü* $|E|$ *olsun.*

$\mathbb{R}^n$ *de* $x-$*merkezli* $r > 0$ *yarıçaplı (açık) yuvar*

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ *de* f *ve* g *Lebesque ölçülebilir fonksiyonları için*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \quad f(x) \neq g(x)\}| = 0$$

ise f *ile* g *fonksiyonlarına hemen hemen heryerde eşit fonksiyonlar denir.*

$$f = g \;\; h.h.x \in \mathbb{R}^n$$

ile gösterilir.

Tanım 2.2. *(Folland (1984))* $\mathbb{R}^n$ *'de ölçülebilir fonksiyonların lineer, normlu* L_p-*Lebesque uzayı*

$$L_p = L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \right\}$$

ile tanımlanır. Burada $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$ *şeklindedir.*

Ayrıca $p = \infty$ *için* L_∞ *uzayı*

$$L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \|f\|_\infty < \infty\}$$

dir. Burada

$$\|f\|_\infty = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{ess\sup} |f(x)| = \inf\{\lambda > 0 : |\{x : |f(x)| > \lambda\}| = 0\}$$

dir.

Tanım 2.3. $\mathbb{R}^n$ *'de local(yerel) integrallenebilen fonksiyonlar kümesi*

$$L^1_{loc} = L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \int\limits_K |f(x)|\, dx < \infty, \forall K \subset \mathbb{R}^n,\ \ K \textit{ kompakt} \right\}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.4. *(Folland (1984))* ***(Fubini Teoremi)*** $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *ve* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ $\sigma-$*sonlu ölçüm uzayları,* $\mu \times \nu$ *ise* $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ *üzerinde* μ *ve* ν *nin çarpımı olsun. Eğer* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\mu \times \nu$ *ölçümüne göre integrallenebilir ise* $h.h.x \in X$ *için* $\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)$ *ve* $h.h.y \in Y$ *için* $\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)$ *integralleri sonludur ve*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.5. *(Folland (1984))* ***(Hölder Eşitsizliği)*** $f \in L_p$, $g \in L_q$, $1 \leq p, q < \infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *olsun. Bu durumda*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

dir.

Teorem 2.6. *(Folland (1984))* ***(Minkowski Eşitsizliği)*** f *ve* $g \in L_p$, $1 \leq p < \infty$ *olsun. Bu durumda*

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Teorem 2.7. *(Folland (1984))* ***(İntegraller İçin Minkowski Eşitsizliği)***

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ *ve* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ $\sigma-$*sonlu ölçüm uzayları ve* $\varphi(x,y)$, $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ *ölçülebilir fonksiyon ve* $p \geq 1$ *olmak üzere integraller için Minkowski eşitsizliği*

$$\left(\int\limits_X \left(\int\limits_Y |\varphi(x,y)|\, d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int\limits_Y \left(\int\limits_X |\varphi(x,y)|^p\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y)$$

biçimindedir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. BMO Uzayı (Bounded Mean Oscillation) Temel Özellikleri

Tezin bu bölümünde klasik BMO uzayının tanımı, özellikleri ve önemli teoremleri ispatları ile verilmektedir. Ayrıca bu teoride önemli bir yeri olan John-Nirenberg eşitsizliği ve bazı sonuçları ifade edilmektedir. Detaylar için Grafakos (2009) kaynağına bakılabilir.

Tanım 3.8. *(Grafakos(2009)) BMO uzayı*

$$BMO = BMO\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{ f : f \in L^1_{loc} \text{ ve } \|f\|_{BMO} < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{Q} \frac{1}{|Q|} \int_{Q} |f(x) - f_Q|\, dx$$

ve

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_{Q} f(x)\, dx \;\; (f_Q - sabit)$$

ile tanımlanır. Burada $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ kenarları koordinat eksenlerine paralel küplerdir.

Teorem 3.9. *BMO uzayı normlu lineer uzaydır.*

İspat Herhangi $f, g \in BMO, \alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\alpha f + g \in BMO$ olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle $(f+g)_Q$ ifadesini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} (f+g)_Q &= \frac{1}{|Q|} \int_{Q} (f(x) + g(x))\, dx \\ &= \frac{1}{|Q|} \int_{Q} f(x)\, dx + \frac{1}{|Q|} \int_{Q} g(x)\, dx = f_Q + g_Q. \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_{Q} \left|(f+g)(x) - (f+g)_Q\right| dx &= \frac{1}{|Q|} \int_{Q} |(f(x) + g(x)) - (f_Q + g_Q)|\, dx \\ &= \frac{1}{|Q|} \int_{Q} |(f(x) - f_Q) + (g(x) - g_Q)|\, dx \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \int_{Q} |f(x) - f_Q|\, dx + \frac{1}{|Q|} \int_{Q} |g(x) - g_Q|\, dx \end{aligned}$$

olur ve eşitsizliğin her iki yanından Q lar üzerinden supremum alınırsa

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q (f(x)+g(x))\,dx \le \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|\,dx + \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |g(x)-g_Q|\,dx$$

eşitsizliği ve

$$\|f+g\|_{BMO} \le \|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}$$

elde edilir. Buradan $\|f\|_{BMO} < \infty$ ve $\|g\|_{BMO} < \infty$ olduğundan $\|f+g\|_{BMO} < \infty$ dir. Bu ise $f+g \in BMO$ demektir. Ayrıca

$$(\alpha f)_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q \alpha f(x)\,dx = \alpha f_Q$$

olduğundan ve

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\alpha f(x) - (\alpha f)_Q\right| dx = \frac{1}{|Q|}\int_Q |\alpha f(x) - \alpha f_Q|\,dx = |\alpha|\,\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|\,dx$$

eşitliğinden Q lar üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned}\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\alpha f(x) - (\alpha f)_Q\right| dx &= \sup_Q |\alpha|\,\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|\,dx \\ \|\alpha f\|_{BMO} &= |\alpha|\,\|f\|_{BMO}\end{aligned}$$

olur. Yani, $\alpha f \in BMO$ dur. Dolayısıyla BMO lineer uzaydır.

Bununla birlikte $\|f\|_{BMO}$ fonksiyonunun norm olmasının iki koşulu (üçgen eşitsizliği ve skaler ile çarpım) da çıkmıştır. Şimdi $\|f\|_{BMO} = 0$ olsun. Yani,

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|\,dx = 0.$$

Buradan $\forall x \in Q$ için $f = f_Q -$sabit çıkar. $f = 0$ olmak zorunda değildir. Yani, yarınormdur fakat norm olarak kabul edilir. BMO uzayında sabite eşit olan fonksiyonlara tek bir fonksiyon gibi bakılır. Ayrıca $c-$sabit olmak üzere $\|c\|_{BMO} = 0$ dır. Şöyle ki

$$(c_Q) = \frac{1}{|Q|}\int_Q c\,dx = c\frac{1}{|Q|}\,|Q| = c$$

ve

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |c-c|\,dx = 0 \Rightarrow \|c\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |c-c|\,dx = 0.$$

Dolayısıyla BMO uzayı normlu lineer uzaydır. □

Teorem 3.10. *BMO uzayı L_∞ uzayını kesin kapsar. Yani, $L_\infty \subsetneqq BMO$ dur ve*

$$\|f\|_{BMO} \leq 2\|f\|_\infty$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f \in L_\infty$ olsun. $\|f\|_\infty = ess\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty$ olduğunu biliyoruz. Şimdi

$$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q f(x)\,dx$$

ve

$$\begin{aligned} |f_Q| &\leq \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x)|\,dx \\ &\leq \left(ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|\right)\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q 1dx \\ &= \left(ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|\right)\frac{1}{|Q|}|Q| = \|f\|_\infty \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x)-f_Q|\,dx &\leq \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x)|\,dx + \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f_Q|\,dx \\ &\leq \left(ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|\right)\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q 1dx + \left(ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|\right)\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q 1dx \\ &= \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin her iki yanından Q lar üzerinden supremum alırsak

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x)-f_Q|\,dx \leq 2\|f\|_\infty$$

buluruz. Yani, $f \in BMO$ dur. Kapsamanın kesin oldugunu yani, BMO uzayından olup L_∞ uzayından olmayan fonksiyon örneğini ileride vereceğiz. □

$\mathbb{R}^n$ de local integrallenebilen bir fonksiyonun BMO uzayından olup-olmadığını belirleyen iyi bir teknik teoremi aşağıda ifade edelim.

Teorem 3.11. *$\mathbb{R}^n$ de kenarları koordinat eksenlerine paralel her Q küpü için öyle bir c_Q sabiti vardır ki*

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c_Q|\, dx \leq A, \quad (A > 0) \tag{3.1}$$

ise $f \in BMO$ dir. Ayrıca

$$\|f\|_{BMO} \leq 2A$$

dir.

İspat Herhangi $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ küpü için (3.1) sağlanacak şekilde c_Q sabiti ve $A > 0$ var olsun. Şimdi $|c_Q - f_Q|$ ifadesini bulalım:

$$\begin{aligned}
|c_Q - f_Q| &= \left| c_Q - \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)\, dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q c_Q dx - \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)\, dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q (c_Q - f(x))\, dx \right| \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |c_Q - f(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Bu son eşitsizlik göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c_Q|\, dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q |c_Q - f_Q|\, dx \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c_Q|\, dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q |c_Q - f(x)|\, dx \\
&= \frac{2}{|Q|} \int_Q |f(x) - c_Q|\, dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her iki taraftan Q lar üzerinden supremum alınırsa

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx \leq 2 \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c_Q|\, dx \leq 2A$$

bulunur. Yani $f \in BMO$ dur. □

Teorem 3.12. *$f \in BMO$ olsun. Bu durumda*

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leq \sup_{Q}\inf_{c_Q}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx \leq \|f\|_{BMO} \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat Önce

$$\sup_{Q}\inf_{c_Q}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx \leq \|f\|_{BMO}$$

eşitsizliğini görelim.

$$\inf_{c_Q}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx \leq \frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-f_Q|\,dx$$

eşitsizliğinin her iki yanından Q lar üzerinden supremum alırsak

$$\sup_{Q}\inf_{c_Q}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx \leq \sup_{Q}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-f_Q|\,dx = \|f\|_{BMO}$$

elde edilir. Şimdi

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leq \sup_{Q}\inf_{c_Q}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx$$

eşitsizliğini görelim. Bunun için

$$|c_Q - f_Q| = \left|\frac{1}{|Q|}\int_{Q}c_Q dx - \frac{1}{|Q|}\int_{Q}f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx$$

$$|f(x)-f_Q| \leq |f(x)-c_Q| + |c_Q - f_Q| \leq |f(x)-c_Q| + \frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-f_Q|\,dx &\leq \frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx + \frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx \\
&\leq \frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx + \frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx \\
&\leq 2\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx
\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitsizliğin her iki tarafından c_Q lar üzerinden infimum ve ardından Q lar üzerinden supremum alınırsa

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leq \sup_{Q}\inf_{c_Q}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx$$

elde edilir. □

Teorem 3.13. $f \in BMO,\ h \in \mathbb{R}^n$ $\tau^h f(x) = f(x-h)$ *olmak üzere* $\tau^h f \in BMO$ *dir. Ayrıca*

$$\left\|\tau^h f\right\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

eşitliği sağlanır.

İspat Öncelikle

$$\begin{aligned}\left(\tau^h f\right)_Q &= \frac{1}{|Q|}\int_{Q}\tau^h f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{|Q|}\int_{Q} f(x-h)\,dx \\ &= \cdots y = x-h,\ dx = dy \cdots \\ &= \frac{1}{|Q|}\int_{Q} f(y)\,dy = f_Q\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_{Q}\left|\tau^h f(x) - \left(\tau^h f\right)_Q\right| dx &= \int_{Q}|f(x-h)-f_Q|\,dx \\ &= \cdots y = x-h,\ dx = dy\ \cdots \\ &= \int_{Q}|f(y)-f_Q|\,dy\end{aligned}$$

olduğundan

$$\left\|\tau^h f\right\|_{BMO} = \sup_{Q}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}\left|\tau^h f(x) - \left(\tau^h f\right)_Q\right| dx$$

$$= \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_Q| \, dx$$

$$= \|f\|_{BMO}$$

elde edilir. □

Teorem 3.14. $f \in BMO,\ \lambda > 0$ *ve* $\delta^\lambda f(x) = f(\lambda x)$ *olmak üzere*

$$\left\|\delta^\lambda f\right\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

dir.

İspat

$$\left\|\delta^\lambda f\right\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \left|\delta^\lambda f(x) - \left(\delta^\lambda f\right)_Q\right| dx$$

olduğundan öncelikle $\left(\delta^\lambda f\right)_Q$ ifadesini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\left(\delta^\lambda f\right)_Q &= \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \left(\delta^\lambda f\right)(x) \, dx = \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q f(\lambda x) \, dx \\
&= \cdots y = \lambda x,\ dy = \lambda dx, \left|\tilde{Q}\right| = \lambda |Q| \cdots \\
&= \frac{1}{\lambda |Q|} \int\limits_{\tilde{Q}} f(y) \, dy \\
&= \frac{1}{\left|\tilde{Q}\right|} \int\limits_{\tilde{Q}} f(y) \, dy = (f)_{\tilde{Q}} .
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \left|\left(\delta^\lambda f\right)(x) - \left(\delta^\lambda f\right)_Q\right| dx &= \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \left|f(\lambda x) - f_{\tilde{Q}}\right| dx \\
&= \cdots y = \lambda x,\ dy = \lambda dx \cdots \\
&= \frac{1}{\lambda |Q|} \int\limits_{\tilde{Q}} \left|f(y) - f_{\tilde{Q}}\right| dy
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\left|\tilde{Q}\right|}\int\limits_{\tilde{Q}}\left|f(y)-f_{\tilde{Q}}\right|dy$$

olur. Şimdi bu son eşitsizliğin her iki yanından küpler üzerinden supremum alınırsa

$$\left\|\delta^{\lambda}f\right\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$

elde edilir. □

Teorem 3.15. *$f \in BMO$ olsun. Buradan*

$$\||f|\|_{BMO} \leq 2\|f\|_{BMO}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $f \in BMO$ olsun. (3.2) eşitsizliğini göz önüne alalım:

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leq \sup_{Q}\inf_{c_Q}\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f(x)-c_Q|\,dx.$$

Bu eşitsizlikte f yerine $|f|$ ve c_Q yerine $|f_Q|$ yazalım ve ters üçgen eşitsizliği uygulayalım. Böylece

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\||f|\|_{BMO} &\leq \sup_{Q}\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}\left||f(x)|-|f_Q|\right|dx\\ &\leq \sup_{Q}\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f(x)-f_Q|\,dx\\ &= \|f\|_{BMO}\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\||f|\|_{BMO} \leq 2\|f\|_{BMO}$$

olur. □

Teorem 3.16. *$f, g \in BMO$ olsun. Buradan*

$$\|\max(f,g)\|_{BMO} \leq \frac{3}{2}\left(\|f\|_{BMO}+\|g\|_{BMO}\right)$$

ve

$$\|\min(f,g)\|_{BMO} \leq \frac{3}{2}\left(\|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada

$$\max(f,g) = \frac{|f-g| + (f+g)}{2} \ \textit{ve} \ \min(f,g) = \frac{(f+g) - |f-g|}{2}$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned}\max(f,g) &= \frac{|f-g| + (f+g)}{2} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(|f| + |g| + f + g\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\|\max(f,g)\|_{BMO} \leq \frac{1}{2}\left(\||f|\|_{BMO} + \||g|\|_{BMO} + \|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 3.15 ’e göre

$$\|\max(f,g)\|_{BMO} \leq \frac{3}{2}\left(\|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}\right)$$

olur. Benzer şekilde

$$\|\min(f,g)\|_{BMO} \leq \frac{1}{2}\left(\||f|\|_{BMO} + \||g|\|_{BMO} + \|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}\right)$$

ve Teorem 3.15 ’e göre

$$\|\min(f,g)\|_{BMO} \leq \frac{3}{2}\left(\|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}\right)$$

bulunur.

BMO uzayının tanımında Q, $\mathbb{R}^n$ de kenarları koordinat eksenlerine paralel küp olarak alınır. Aşağıdaki teorem BMO uzayının normunun yuvarlar üzerinden de alınabileceğini gösterir. Yani bu teorem ile yuvarlar ve küpler üzerinden alınan normların birbirine denk olduğunu görmekteyiz. Aşağıda yuvarlar üzerinden alınan norm $\|f\|_{BMO-yuvar}$ şeklinde ifade edilmiştir. □

Teorem 3.17. *Öyle c_n ve C_n pozitif sabitleri vardır ki herhangi $f \in BMO$ için*

$$c_n \|f\|_{BMO} \leq \|f\|_{BMO-yuvar} \leq C_n \|f\|_{BMO}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $Q = [-r, r]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ küpünü alalım. B de Q küpünü içeren en küçük yuvar olsun. Bu durumda Q küpünün hacmi (Lebesgue ölçümü) $|Q| = 2^n r^n$ ve v_n- birim yuvarın ölçümü olmak üzere B yuvarının hacmi (Lebesgue ölçümü) $|B| = v_n r^n$dir. Ayrıca Teorem 3.12 'de c_Q olarak f_B alalım. Yani,

$$\|f\|_{BMO} \leq 2\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_B|\, dx$$

eşitsizliğini kullanacağız. Burada $f_B = \frac{1}{|B|} \int\limits_B f(x)\, dx$ dir. Öncelikle

$$\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_B|\, dx$$

ifadesiyle başlayalım.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_B|\, dx &\leq \frac{|B|}{|Q|\,|B|} \int\limits_B |f(x) - f_B|\, dx \\ &= \frac{v_n r^n}{2^n r^n} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |f(x) - f_B|\, dx \\ &= \frac{1}{2^n} v_n \frac{1}{|B|} \int\limits_B |f(x) - f_B|\, dx \end{aligned}$$

eşitsizliğinden Q lar üzerinden ve B–yuvarları üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned} \|f\|_{BMO} &\leq 2\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(x) - f_B|\, dx \\ &\leq \frac{2}{2^n} v_n \frac{1}{|B|} \int\limits_B |f(x) - f_B|\, dx \\ &\leq \frac{1}{c_n} \|f\|_{BMO-yuvar} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi ters eşitsizliği göstermek için B yuvarını kapsayan bir Q küpü seçelim. $|Q| = 2^n r^n$ ve $|B| = v_n r^n$ olduğundan

$$\frac{1}{|B|}\int\limits_{B}|f(x)-f_B|\,dx \le \frac{|Q|}{|B|}\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f(x)-f_B|\,dx$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafından supremum alınıp (3.2) eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\|f\|_{BMO-yuvar} &\le \frac{2\,2^n r^n}{v_n r^n}\|f\|_{BMO}\\ &= \frac{2^{n+1}}{v_n}\|f\|_{BMO}\\ &= C_n\|f\|_{BMO}\end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek 3.18. *$L_\infty \subset BMO$ olduğunu bilinmektedir. $L_\infty \subsetneqq BMO$ olduğunu görmek için BMO dan olan L_∞ uzayında olmayan fonksiyona örnek verelim. $\mathbb{R}^n$ de*

$$f(x) = \log|x|$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon BMO uzayına aittir. Bunu görmek için Teorem 3.11 'den yararlanacağız. Ayrıca

$$\delta^\lambda f = f(\lambda x)$$

olmak üzere

$$\|f\|_{BMO} = \left\|\delta^\lambda f\right\|_{BMO}$$

eşitliği de bilinmektedir. Bu eşitlikte λ yerine $e^{C_{x_0,R}}$ alalım. Böylece

$$f(\lambda x) = \log\left|e^{C_{x_0,R}}x\right| = \log e^{C_{x_0,R}}|x| = C_{x_0,R} + \log|x|$$

ve

$$|f(\lambda x) - C_{x_0,R}| = |C_{x_0,R} + \log|x| - C_{x_0,R}| = |\log|x||$$

olur. Burada B yuvarı, $B = \{x : |x-x_0| \le R, x_0 \in \mathbb{R}^n\}$ şeklindedir. Dolayısıyla $\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - C_{x_0}$ integraline bakmak yerine $\frac{1}{|B|}\int_B |\log|x||\,dx$ integraline bakmak yeterlidir. Şimdi

$$\frac{1}{|B|}\int\limits_{B}|\log|x||\,dx = \frac{1}{R^n v_n}\int\limits_{|x-x_0|\le R}|\log|x||\,dx$$

integralinde değişken değiştirerek

$$\frac{1}{v_n}\int\limits_{|x-x_0|\leq 1}|\log|x||\,dx$$

integralini elde ederiz. Bu integrali iki durumda inceleyeceğiz:

1. $|x_0|\leq 2$ *için*

$$\frac{1}{v_n}\int\limits_{|x-x_0|\leq 1}|\log|x||\,dx\leq\frac{1}{v_n}\int\limits_{|x|\leq 3}|\log|x||\,dx\leq c\log 3,\ c\text{-sabit}$$

bulunur.

2. $|x_0|\geq 2$ *için* $C_{x_0,R}=\log|x_0|$ *alalım. Buradan*

$$\frac{1}{v_n}\int\limits_{|x-x_0|\leq 1}|\log|x|-\log|x_0||\,dx=\frac{1}{v_n}\int\limits_{|x-x_0|\leq 1}\left|\log\frac{|x|}{|x_0|}\right|dx$$

olur.

$$\left|\log\frac{|x|}{|x_0|}\right|\leq\log\frac{3}{2}$$

oldugundan

$$\frac{1}{v_n}\int\limits_{|x-x_0|\leq 1}\left|\log\frac{|x|}{|x_0|}\right|dx\leq c\log\frac{3}{2}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{v_n}\int\limits_{|x-x_0|\leq 1}\log\frac{|x|}{|x_0|}dx\leq c\log\frac{3}{2}$$

elde ederiz. Dolayısıyla 1), 2) ve Teorem 3.11 'den fonksiyonun BMO uzayına ait olduğunu elde ederiz. Ayrıca

$$\|f\|_\infty=ess\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\log|x||$$

ifadesi sonlu değildir. Yani, f, $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *uzayına ait değildir.*

Örnek 3.19. $\mathbb{R}$ *de*

$$h(x)=\begin{cases}\log\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun BMO$(\mathbb{R})$ *uzayına ait olmadığını görelim.* $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ *olmak üzere*

$$h_{(-\varepsilon,\varepsilon)}=\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}h(x)\,dx=\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{0}^{\varepsilon}\log\frac{1}{x}dx$$

$$= \quad \cdots y = \frac{1}{x},\ dy = -\frac{1}{x^2}dx \cdots$$

$$= \quad -\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\infty}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\log y}{y^2}dy$$

$$= \quad \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\log y}{y^2}dy$$

dir. Bu son integrale kısmi integrasyon uygulayalım: $u = \log y$, $du = \frac{1}{y}dy$, $dv = \frac{1}{y^2}dy$, $v = -\frac{1}{y}$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} h_{(-\varepsilon,\varepsilon)} &= \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\log A}{A} + \frac{1}{2\varepsilon}\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\frac{1}{\varepsilon}}^{A}\frac{1}{y^2}dy\right] \\ &= \lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{2\varepsilon}\left(-\frac{\log A}{A} + \frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon}}\right) + \frac{1}{2\varepsilon}\left(-\frac{1}{A}+\varepsilon\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left|h(x) - h_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\right|dx \geq \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{0}\left|h_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\right|dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{2\varepsilon}\frac{1}{2}\left(1+\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon\right] = \infty$$

elde edilir. Bu ise $f \notin BMO(\mathbb{R})$ *demektir.*

Teorem 3.20. $f \in BMO$ *ve* $B(x_0, r)$ *herhangi bir yuvar olsun. Bu durumda*

***1.** Herhangi* $m \in \mathbb{N}$ *için*

$$\left|f_{B(x_0,r)} - f_{2^m B(x_0,r)}\right| \leq 2^n m \|f\|_{BMO} \tag{3.3}$$

dir.

***2.** Herhangi* $\delta > 0$ *için öyle bir* $C_{n,\delta}$ *sabiti vardır ki*

$$r^\delta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|f(x) - f_{B(x_0,r)}\right|}{(r+|x-x_0|)^{n+\delta}}dx \leq C_{n,\delta}\|f\|_{BMO} \tag{3.4}$$

dir.

İspat

1. $B(x_0,r)$ yuvarının hacmi $|B(x_0,r)| = r^n v_n$ ve $a>0$ için

$$aB(x_0,r) = \{x : |x-x_0| < ar\}$$

olduğundan $2^m B$ yuvarının yarıçapı $2^m r$ ve $2^m B(x_0,r)$ yuvarının hacmi

$$|2^m B(x_0,r)| = (2^m r)^n v_n$$

dir. Şimdi $m=1$ için

$$\begin{aligned}
\left|f_{B(x_0,r)} - f_{2B(x_0,r)}\right| &= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\left|\int\limits_{B(x_0,r)} f(x)\,dx - f_{2B(x_0,r)}\right|, \ f_{2B(x_0,r)} - \text{sabit} \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\left|\int\limits_{B(x_0,r)} f(x)\,dx - \int\limits_{B(x_0,r)} f_{2B(x_0,r)} dx\right| \\
&= \frac{2^n}{2^n|B(x_0,r)|}\left|\int\limits_{B(x_0,r)} \left(f(x) - f_{2B(x_0,r)}\right) dx\right| \\
&= \frac{2^n}{2^n v_n r^n}\left|\int\limits_{B(x_0,r)} \left(f(x) - f_{2B(x_0,r)}\right) dx\right| \\
&\le \frac{2^n}{|2B(x_0,r)|}\left|\int\limits_{2B(x_0,r)} \left(f(x) - f_{2B(x_0,r)}\right) dx\right|, \ (B(x_0,r) \subseteq 2B(x_0,r)) \\
&\le 2^n \|f\|_{BMO}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\forall\, m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\left|f_{B(x_0,r)} - f_{2^m B(x_0,r)}\right| &\le \left|f_{B(x_0,r)} - f_{2B(x_0,r)}\right| + \cdots + \left|f_{2^{m-1}B(x_0,r)} - f_{2^m B(x_0,r)}\right| \\
&\le 2^n \|f\|_{BMO} + 2^n \|f\|_{BMO} + \cdots + 2^n \|f\|_{BMO} \\
&\le 2^n m \|f\|_{BMO}
\end{aligned}$$

olur.

2. Öncelikle

$$I = r^{\delta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|f\left(x\right) - f_{B(x_0,r)}\right|}{\left(r + |x - x_0|\right)^{n+\delta}} dx$$

integralinde değişken değiştirme uygulayalım: $y = \dfrac{x - x_0}{r}$, $dx = r^n dy$. Böylece

$$I = \frac{r^{\delta}}{r^{\delta} r^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|f\left(yr + x_0\right) - f_{B(x_0,r)}\right|}{\left(1 + |y|\right)^{n+\delta}} dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|f\left(x\right) - f_{B(x_0,r)}\right|}{\left(1 + |x|\right)^{n+\delta}} dx$$

elde edilir. Şimdi $\mathbb{R}^n$'ni

$$\mathbb{R}^n = B\left(x_0, r\right) \cup \left(2B\left(x_0, r\right) \setminus B\left(x_0, r\right)\right) \cup \left(4B\left(x_0, r\right) \setminus 2B\left(x_0, r\right)\right) \cup \cdots$$

şeklinde ayıralım. Kolaylık için $B = B\left(x_0, r\right)$ yazalım. Buradan

$$I = \int\limits_{B} \frac{\left|f\left(x\right) - f_B\right|}{\left(1 + |x|\right)^{n+\delta}} dx + \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^{k+1}B \setminus 2^k B} \frac{\left|f\left(x\right) - f_B\right|}{\left(1 + |x|\right)^{n+\delta}} dx$$

olur ve üçgen eşitsizliğinden

$$I \leq \int\limits_{B} \frac{\left|f\left(x\right) - f_B\right|}{\left(1 + |x|\right)^{n+\delta}} dx + \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^{k+1}B \setminus 2^k B} \frac{\left|f(x) - f_{2^{k+1}B}\right| + \left|f_{2^{k+1}B} - f_B\right|}{(1+|x|)^{n+\delta}} dx$$

bulunur. Buradan $\frac{1}{(1+|x|)^{n+\delta}} < \frac{1}{2^{k(n+\delta)}}$, $\frac{1}{(1+|x|)^{n+\delta}} < 1$ olduğundan ve (3.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} I &\leq \int\limits_{B} \left|f\left(x\right) - f_B\right| dx + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(n+\delta)}} \int\limits_{2^{k+1}B} \left(\left|f\left(x\right) - f_{2^{k+1}B}\right| + \left|f_{2^{k+1}B} - f_B\right|\right) dx \\ &\leq \frac{v_n}{v_n} \int\limits_{B} \left|f\left(x\right) - f_B\right| dx + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(n+\delta)} \left(\int\limits_{2^{k+1}B} \left|f\left(x\right) - f_{2^{k+1}B}\right| dx + \int\limits_{2^{k+1}B} \left|f_{2^{k+1}B} - f_B\right| dx \right) \end{aligned}$$

$$\leq \quad v_n \|f\|_{BMO} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(n+\delta)} \times$$

$$\times \left(\frac{2^{n(k+1)} v_n}{2^{n(k+1)} v_n} \int\limits_{2^{k+1}B} |f(x) - f_{2^{k+1}B}| \, dx + (k+1) 2^n \|f\|_{BMO} v_n 2^{n(k+1)} \right)$$

$$\leq \quad v_n \|f\|_{BMO} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(n+\delta)} \left(2^{n(k+1)} v_n \|f\|_{BMO} + (k+1) \|f\|_{BMO} v_n 2^n 2^{n(k+1)} \right)$$

$$= \quad v_n \|f\|_{BMO} + v_n \|f\|_{BMO} \left(2^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\delta}} + 2^{2n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^{k\delta}} \right)$$

$$= \quad C_{n,\delta} \|f\|_{BMO}$$

elde edilir. □

Teorem 3.21. *Öyle bir C_n sabiti vardır ki her $f \in BMO$ için*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) - (P_t * f)(y)| \, P_t(x-y) \, dx \leq C_n \|f\|_{BMO} \tag{3.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $P_t(x)$ Poisson çekirdeğidir ve

$$P_t(x) = \frac{t}{\left(t^2 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad t > 0$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $(P_t * f)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(x) \, dx$, (Stein;Weiss(1971)) dir.

İspat

1.Adım Öncelikle $B_t = B(y,t) = \{x : |x-y| \leq t\}$, $t > 0$ olmak üzere (3.5) eşitsizliğinde $(P_t * f)(y)$ yerine f_{B_t} yazalım ve

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_{B_t}| \, P_t(x-y) \, dx \leq c_n \|f\|_{BMO}$$

eşitsizliğini gösterelim. Bunun için

$$\frac{1}{\left(t^2+|x-y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \leq \frac{1}{t^{n+1}} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{\left(t^2+|x-y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{1}{2^{k(n+1)} t^{n+1}}$$

eşitsizliklerini kullanacağız.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_{B_t}| P_t(x-y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t\,|f(x) - f_{B_t}|}{\left(t^2 + |x-y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} dx$$

$$\leq \int_{B_t} \frac{t\,|f(x) - f_{B_t}|}{\left(t^2 + |x-y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} dx + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}B_t/2^k B_t} \frac{t\left(|f(x) - f_{2^{k+1}B_t}| + |f_{2^{k+1}B_t} - f_{B_t}|\right)}{\left(t^2 + |x-y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} dx$$

$$\leq \int_{B_t} \frac{|f(x) - f_{B_t}|}{t^n} dx + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}B_t} \frac{2^{-k(n+1)}}{t^n} \left(|f(x) - f_{2^{k+1}B_t}| + |f_{2^{k+1}B_t} - f_{B_t}|\right) dx$$

$$= \frac{v_n}{v_n t^n} \int_{B_t} |f(x) - f_{B_t}|\,dx + \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-k(n+1)}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{2^{n(k+1)} v_n}{2^{n(k+1)} v_n t^n} \int_{2^{k+1}B_t} |f(x) - f_{2^{k+1}B_t}| + (k+1)\,2^n \|f\|_{BMO} \tfrac{1}{t^n} 2^{(k+1)n} t^n v_n dx \right)$$

$$\leq v_n \|f\|_{BMO} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(n+1)} \left(v_n 2^{n(k+1)} \|f\|_{BMO} + (k+1)\,2^n 2^{n(k+1)} v_n \|f\|_{BMO} \right)$$

$$= v_n \|f\|_{BMO} + v_n \|f\|_{BMO} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(n+1)} 2^{(k+1)n} \left(1 + 2^n (k+1)\right)$$

$$= c_n \|f\|_{BMO}$$

elde edilir ve her iki yandan supremum alınırsa

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_{B_t}| P_t(x-y)\,dx \leq c_n \|f\|_{BMO}$$

istenilen eşitsizlik bulunur.

2.Adım $\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x)\,dx = 1$ olduğundan

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(P_t * f)(y) - f_{B_t}| P_t(x-y)\,dx = |(P_t * f)(y) - f_{B_t}| \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|(P_t * f)(y) - f_{B_t}\right| \\
&= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(x)\,dx - f_{B_t}\right| \\
&= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(x)\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_{B_t} P_t(x-y)\,dx\right| \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|f(x) - f_{B_t}\right| P_t(x-y)\,dx \\
&\leq d_n \|f\|_{BMO}
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece 1.Adım ve bu son eşitsizlik kullanılarak

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|f(x) - (P_t * f)(y)\right| P_t(x-y)\,dx \leq
$$

$$
\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\left|f(x) - f_{B_t}\right| P_t(x-y) + \left|(P_t * f)(y) - f_{B_t}\right| P_t(x-y)\right) dx
$$

$$
\leq c_n \|f\|_{BMO} + d_n \|f\|_{BMO} \leq C_n \|f\|_{BMO}
$$

elde edilir. Burada $C_n = \max\{c_n, d_n\}$ dir. □

Teorem 3.22. *Öyle bir c_n sabiti vardır ki $\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için*

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^{n+1}} dx < \infty
$$

ise $f \in BMO$ ve

$$
\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|f(x) - (P_t * f)(y)\right| P_t(x-y)\,dx \geq c_n \|f\|_{BMO}
$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$
A = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|f(x) - (P_t * f)(y)\right| P_t(x-y)\,dx
$$

diyelim. $|x-y| \leq t$ için

$$P_t(x-y) \geq t\left(2t^2\right)^{\frac{n+1}{2}} = t^{-n} c_n$$

dir. Çünkü $t^2 + |x-y|^2 < t^2 + t^2 = 2t^2$ dir. Buradan

$$\left(t^2 + |x-y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}} < \left(2t^2\right)^{\frac{n+1}{2}} = 2^{\frac{n+1}{2}} t^{n+1}$$

elde edilir. Böylece

$$A \geq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) - (P_t * f)(y)| \, P_t(x-y)\, dx \geq \frac{c_n}{t^n} \int\limits_{|x-y| \leq t} |f(x) - (P_t * f)(y)|\, dx$$

ve

$$\frac{1}{v_n t^n} \int\limits_{|x-y| \leq t} |f(x) - (P_t * f)(y)|\, dx \leq \frac{A}{c_n v_n}$$

olur. Bu son eşitsizliğin her iki yanından $B = B(y,t) = \{x : |x-y| \leq t\}$ yuvarı üzerinden supremum alınırsa

$$\sup_B \frac{1}{|B|} \int\limits_{|x-y| \leq t} |f(x) - (P_t * f)(y)|\, dx \leq \frac{A}{c_n v_n}$$

ve Teorem 3.11 uygulanırsa

$$\|f\|_{BMO} \leq \frac{2A}{c_n v_n} \text{ yani } A \geq c_n \|f\|_{BMO}$$

elde edilir. □

3.2. John-Nirenberg Eşitsizliği ve Bazı Sonuçları

Aşağıda BMO uzaylarında önemli bir eşitsizlik olan John-Nirenberg eşitsizliğini ifade edilmiştir. John-Nirenberg eşitsizliği sonuçları itibariyle çok önemlidir.

Teorem 3.23. *Her $f \in BMO$ fonksiyonu, her Q küpü ve her $\alpha > 0$ için*

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \alpha\}| \leq e\,|Q|\, e^{-A\alpha/\|f\|_{BMO}};\ A = (2^n e)^{-1}$$

eşitsizliği sağlanır, (Grafakos(2009)).

John-Nirenberg eşitsizliğinden BMO uzayına ait her fonksiyonun üstel integrallenebilir olduğu elde edilir. Aşağıdaki sonuç bununla ilgilidir.

Sonuç 3.24. *$f \in BMO$ olsun. Her $\gamma < \frac{1}{2^n e}$ ve her $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ küpü için*

$$\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q e^{\frac{\gamma\left|f(x)-f_Q\right|}{\|f\|_{BMO}}}dx \leq 1 + \frac{2^n e^2 \gamma}{1-2^n e\gamma}$$

dir.

İspat Herhangi $f \in BMO, \gamma < \frac{1}{2^n e}$ ve $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ küpünü alalım. $f \in BMO$ olduğundan

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x) - f_Q|\, dx < \infty$$

dir. Bu ispatta dağılım fonksiyonunu kullanacağız. Dağılım fonksiyonu $d_f(\alpha) = |\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}|$ ile tanımlanır. Ayrıca φ, $[0,\infty)$ aralığında artan, $\varphi(0) = 0$, türevlenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\int\limits_X \varphi(|f|) = \int\limits_0^\infty \varphi'(\alpha)\, d_f(\alpha)\, d\alpha$$

eşitsizliği sağlanır, (Folland(1984)). Bu eşitlikte φ olarak $\varphi(t) = e^t - 1$ ve X kümesi olarak da Q küpünü alalım. Böylece

$$\begin{aligned}
\int\limits_Q \left(e^{|f(x)|} - 1\right) dx &= \int\limits_0^\infty e^\alpha \left|\{x \in Q : |f(x)| > \alpha\}\right| d\alpha \\
\int\limits_Q e^{|f(x)|} dx - |Q| &= \int\limits_0^\infty e^\alpha \left|\{x \in Q : |f(x)| > \alpha\}\right| d\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_Q e^{|f(x)|} dx &= |Q| + \int\limits_0^\infty e^\alpha \left|\{x \in Q : |f(x)| > \alpha\}\right| d\alpha \\
\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q e^{|f(x)|} dx &= 1 + \frac{1}{|Q|}\int\limits_0^\infty e^\alpha \left|\{x \in Q : |f(x)| > \alpha\}\right| d\alpha
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi f yerine

$$f(x) = \frac{\gamma\,|f(x) - f_Q|}{\|f\|_{BMO}}$$

alalım. Buradan

$$\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q e^{\frac{\gamma\left|f(x)-f_Q\right|}{\|f\|_{BMO}}} dx = 1 + \frac{1}{|Q|}\int\limits_0^\infty e^\alpha \left|\left\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \frac{\alpha\,\|f\|_{BMO}}{\gamma}\right\}\right| d\alpha$$

olur. Bu son eşitliğe John-Nirenberg eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\frac{\gamma\left|f(x)-f_Q\right|}{\|f\|_{BMO}}}dx &\leq 1+\frac{1}{|Q|}\int_0^\infty e^{\alpha}e\,|Q|\,e^{-\frac{1}{2^ne}\frac{1}{\|f\|_{BMO}}\frac{\alpha\|f\|_{BMO}}{\gamma}}d\alpha \\
&= \cdots 2^ne\gamma<1,\ c=\frac{1}{2^ne\gamma}>1\ \cdots \\
&= 1+e\int_0^\infty e^{\alpha}e^{-c\alpha}d\alpha \\
&= 1+e\int_0^\infty e^{(1-c)\alpha}d\alpha \\
&= 1+\tfrac{e}{1-c}\left(\lim_{G\to\infty}e^{(1-c)G}-e^0\right),\ \ 1-c<0 \\
&= 1+\frac{e}{1-c}=1+\frac{2^ne\gamma}{1-2^ne\gamma}
\end{aligned}$$

istenilen eşitsizlik elde edilir. □

Sonuç 3.25. *$f\in BMO$ olsun. $0<p<\infty$ için öyle $B_{p,n}$ sabiti vardır ki*

$$\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq B_{p,n}\|f\|_{BMO}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat Dağılım fonksiyonu için

$$\int_X\varphi(|f|)\,dx=\int_0^\infty\varphi'(\alpha)\,d_f(\alpha)\,d\alpha$$

eşitliğini tekrar göz önüne alalım. Burada φ olarak $\varphi(t)=t^p$, f olarak $|f(x)-f_Q|$ alalım. Böylece John-Nirenberg eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_Q|f(x)-f_Q|^p\,dx &= \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\left|\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}\right|d\alpha \\
&\leq \int_0^\infty p\alpha^{p-1}e\,|Q|\,e^{\frac{-A\alpha}{\|f\|_{BMO}}}d\alpha,\ A=(2^ne)^{-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x)-f_Q|^p\,dx &\leq \tfrac{1}{|Q|}\int\limits_0^\infty p\alpha^{p-1}e\,|Q|\,e^{\frac{-A\alpha}{\|f\|_{BMO}}}d\alpha \\
&= ep\int\limits_0^\infty \alpha^{p-1}e^{\frac{-A\alpha}{\|f\|_{BMO}}}d\alpha \\
&= \cdots\beta=\frac{A\alpha}{\|f\|_{BMO}},\ \alpha=\frac{\beta\,\|f\|_{BMO}}{A},\ d\beta=\frac{A}{\|f\|_{BMO}}d\alpha\cdots \\
&= ep\int\limits_0^\infty \frac{\beta^{p-1}\,\|f\|_{BMO}^{p-1}}{A^{p-1}}e^{-\beta}\frac{\|f\|_{BMO}}{A}d\beta \\
&= ep\frac{\|f\|_{BMO}^p}{A^p}\int\limits_0^\infty \beta^{p-1}e^{-\beta}d\beta \\
&= ep\frac{\|f\|_{BMO}^p}{A^p}\Gamma(p)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\Gamma(p)$ Gamma fonksiyonudur. Son olarak bu eşitsizliğin iki yanından p.dereceden kök ve $Q\subseteq\mathbb{R}^n$ küpü üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned}
\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x)-f_Q|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\frac{ep}{A^p}\,\|f\|_{BMO}^p\,\Gamma(p)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= B_{p,n}\,\|f\|_{BMO},\ B_{p,n}=\left(\frac{ep}{A^p}\Gamma(p)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

biçiminde istenilen eşitsizlik elde edilir. □

Aşağıdaki sonuç ile BMO uzayında norm olarak

$$\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q |f(x)-f_Q|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},1<p<\infty$$

ifadesini de alabileceğimizi göreceğiz. Bunun için denk norm tanımını hatırlayalım:

$$c_1\,\|\cdot\|_1\leq\|\cdot\|_2\leq c_2\,\|\cdot\|_1$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ varsa $\|\cdot\|_1$ ile $\|\cdot\|_2$ normlarına denk norm denir ve $\|\cdot\|_1\approx\|\cdot\|_2$ ile gösterilir. Şimdi sonucu görelim.

Sonuç 3.26. $1 \leq p < \infty$ *için*

$$\sup_{Q}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f(x)-f_{Q}|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \approx \|f\|_{BMO}$$

dir.

İspat Sonuç 3.25 'ye göre $0 < p < \infty$ için

$$\sup_{Q}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f(x)-f_{Q}|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_{1}\|f\|_{BMO} \tag{3.6}$$

dir. $p = 1$ için $\|f\|_{BMO}$ normudur. Şimdi

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{Q}\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f(x)-f_{Q}|\,dx$$

integraline $1 < p < \infty$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f(x)-f_{Q}|\,dx &\leq \frac{1}{|Q|}\left(\int\limits_{Q}|f(x)-f_{Q}|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{Q}1dx\right)^{\frac{1}{q}} \;;\; \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \\
&= \frac{1}{|Q|}\left(\int\limits_{Q}|f(x)-f_{Q}|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}|Q|^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{|Q|^{1-\frac{1}{q}}}\left(\int\limits_{Q}|f(x)-f_{Q}|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f(x)-f_{Q}|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her iki taraftan supremum alınırsa

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{Q}\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f(x)-f_{Q}|\,dx \leq \sup_{Q}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f(x)-f_{Q}|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.7}$$

elde edilir. Dolayısıyla $1 < p < \infty$ olmak üzere (3.6) ve (3.7) eşitsizliklerinden

$$\|f\|_{BMO} \leq \sup_{Q}\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_{Q}|f(x)-f_{Q}|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_{1}\|f\|_{BMO}$$

bulunur. Bu ise

$$\sup_{Q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(x)-f_{Q}|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\approx\|f\|_{BMO}\,,\ 1\leq p<\infty$$

demektir. □

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında esas amacımız Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu B-BMO uzayının tanımını verip, özelliklerini incelemek, John-Nirenberg eşitsizliğini ifade etmektir. Bunun için ilk olarak Bessel diferansiyel operatörünün ve onun doğurduğu genelleşmiş kayma operatörü ifade edilmiştir. Ardından Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ve onun ürettiği genelleşmiş kayma operatörü incelenmiştir.

4.1. Bessel Diferansiyel Operatörü

Fourier-Bessel Harmonik analizinde Bessel diferansiyel operatörü olarak bilinen ve aşağıda tanımlanan diferansiyel operatör önemli rol oynamaktadır:

$$B_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\nu}{t}\frac{d}{dt},\ 0 < t < \infty,\ v > 0.$$

$\Phi = \Phi(x, y)$ olmak üzere

$$\begin{cases} B_x\Phi = B_y\Phi & ,\quad 0 < x,\ y < \infty \\ \Phi|_{x=0} = f(y) & ,\quad \frac{\partial}{\partial x}\Phi|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

sınır-değer probleminin çözümü

$$\Phi(x, y) = \frac{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(v)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta}\right) \sin^{2\nu-1}\theta d\theta$$

şeklindedir, (Delsarte (1938), Levitan (1951)). Bu çözüm $G^y f(x)$ ile gösterilirse

$$G^y f(x) = \frac{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(v)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta}\right) \sin^{2\nu-1}\theta d\theta \tag{4.8}$$

ile tanımlanan operatöre Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu genelleşmiş kayma operatörü veya Bessel kayması denir. Ayrıca

$$\int\limits_0^\pi \sin^{2\nu-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(v)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)}$$

olduğundan (4.8) de $f = 1$ alınırsa $G^y 1 = 1$ olur.

Bundan başka, (4.8) ifadesinde $\theta = \pi - \alpha$, $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ şeklinde değişken değiştirirsek $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ ve $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ olduğundan

$$\begin{aligned} G^y f(x) &= \frac{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(v)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha}\right) \sin^{2\nu-1}\alpha d\alpha \\ &= G^{-y} f(x) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu özellik Öklid kaymasında yoktur.

Şöyle ki Öklid kaymasında $\tau^y f(x) = f(x+y)$ fakat $\tau^{-y} f(x) = f(x-y)$ dir. Diğer taraftan (4.8) eşitliğindeki simetriden dolayı $G^y f(x) = G^x f(y)$ dir. Bu özelliğin Öklid kaymasında da sağlandığı açıktır: $\tau^y f(x) = f(x+y) = f(y+x) = \tau^x f(y)$.

Bu tez çalışmasının amacı genelleşmiş kayma operatörü T^y 'nin doğurduğu B-BMO uzayları ile çalışmak olduğundan bu kısımın ileride gerekli olacak tanım ve kavramları verilmektedir.

Genelleşmiş kayma operatörü G^y 'nin bilinen bazı özellikleri aşağıdaki gibidir (Levitan(1951)):

a. Lineerlik: $G^y(\alpha f(x) + g(x)) = \alpha G^y f(x) + G^y g(x)$, $\alpha-$skaler;

b. Pozitiflik: $f \geq 0$ ise $G^y f(x) \geq 0$ olur;

c. $|G^y f(x)| \leq G^y |f(x)| \leq \sup\limits_{x \geq 0} |f(x)|$;

d. $G_x^y G_x^z f(x) = G_x^z G_x^y f(x)$ ve $G_y^z G_x^y f(x) = G_x^z G_x^y f(x)$. Burada $G_x^y f(x)$, $G^y f(x)$ demektir. İlk eşitlik önce x'e z kayması ve sonra da x'e y kayması vermek ile, önce x'e y kayması ve sonra da x'e z kayması vermenin aynı sonuca getirdiğini söyler. Öklid kaymasıda bu özellik $f(x+y+z) = f(x+z+y)$ şeklindedir. İkinci eşitlik ise önce x'e y ve sonra da y'ye z kayması vermek ile, önce x'e y ve sonra da x'e z kayması vermenin aynı olduğudur.

e. g ve f fonksiyonları $[0, \infty)$'da ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\int_0^\infty |f(t)| \, t^{2\nu} dt < \infty \text{ ve } \int_0^\infty |g(t)| \, t^{2\nu} dt < \infty$$

dir ve

$$\int_0^\infty G^y f(x) \, g(y) \, y^{2\nu} dy = \int_0^\infty f(y) \, G^y g(x) \, y^{2\nu} dy \tag{4.9}$$

eşitliği sağlanır. Özel halde $g = 1$ alınırsa

$$\int_0^\infty G^y f(x) \, y^{2\nu} dy = \int_0^\infty f(y) \, y^{2\nu} dy$$

olur. Yukarıdaki (4.9) eşitliği klasik Öklid kaymasının doğurduğu girişim operatörünün genelleşmiş kayma için benzeridir. Yani, genelleşmiş girişim

$$(f \circledast g)(x) = \int_0^\infty G^y f(x) \, g(y) \, y^{2\nu} dy$$

ile tanımlanırsa (4.9) eşitliği $f \circledast g = g \circledast f$ demektir.

4.2. Laplace-Bessel Diferansiyel Operatörü

Fourier-Bessel harmonik analizinin önemli diferansiyel operatörlerinden birisi de Laplace-Bessel diferansiyel operatörüdür. Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial^2}{\partial x_n} \right), \ (\nu > 0)$$

şeklinde tanımlanır. Burada ilk $n-1$ değişkene Laplace diferansiyel operatörü, sonuncu değişkene de Bessel diferansiyel operatörü uygulanmıştır. Dolayısıyla Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B bir "hibrit" operatördür.

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B 'ye karşılık gelen genelleşmiş kayma operatörü de

$$T^y \varphi(x) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \varphi\left(x' - y'; \sqrt{(x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2)}\right) \sin^{2\nu-1} \alpha d\alpha,$$

şeklinde tanımlanır.

Bessel diferansiyel operatörü tanımı gereğince

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n), \ x_n \geq 0\}$$

uzayını göz önüne alalım. $\mathbb{R}_+^n$ uzayında tanımlı ağırlıklı Lebesque uzayı da $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}\left(\mathbb{R}_+^n\right) = \{f : f, \mathbb{R}_+^n \text{ da ölçülebilir fonksiyon, } \|f\|_{p,\nu} < \infty\},$$

$$\|f\|_{p,\nu} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p \, x_n^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanır. Burada $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ dir. Ayrıca $p = \infty$ için

$$L_\infty \equiv L_{\infty,v}\left(\mathbb{R}_+^n\right) = \{f : f, \mathbb{R}_+^n \text{ da ölçülebilir fonksiyon, } \|f\|_\infty < \infty\},$$

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x \in \mathbb{R}_+^n} |f(x)|$$

dir.

Genelleşmiş kayma operatörünün doğurduğu "genelleşmiş girişim" operatörü ise

$$(\varphi \circledast \psi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(y) T^y \psi(x) y_n^{2\nu} dy,$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathbb{R}_+^n$ da tanımlı Schwartz 'ın test fonksiyonları uzayı $S(\mathbb{R}_+^n)$ olmak üzere $\varphi \in S(\mathbb{R}_+^n)$ fonksiyonunun Fourier-Bessel dönüşümü

$$(F_\nu \varphi)(z) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(x) e^{-i\langle x', z' \rangle} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n z_n) x_n^{2\nu} dx$$

ve tersi

$$(F_\nu^{-1}\varphi)(z) = c_\nu(n)(F_\nu \varphi)(-z)$$

şeklindedir. Burada $\langle x', z' \rangle = x_1 z_1 + \cdots + x_{n-1} z_{n-1}$ ve

$$c_\nu(n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1} 2^{2\nu-1} \Gamma^2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \tag{4.10}$$

dir. Ayrıca $j_p(t)$, ($t > 0$, $p > -\frac{1}{2}$) fonksiyonu Bessel 'in 1.tip normalleştirilmiş fonksiyonudur ve Bessel fonksiyonu $J_p(t)$ ile ilişkisi de

$$J_p(t) = \frac{j_p(t) t^p}{2^p \Gamma(p+1)}, \;\; j_p(0) = 1, \; j_p'(0) = 0$$

şeklindedir (Levitan 1951).

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B 'nin doğurduğu B-Poisson çekirdeği (yarıgrubu) $e^{-\alpha|y|}$, ($y \in \mathbb{R}_+^n, \; \alpha > 0$) fonksiyonunun Fourier-Bessel dönüşümü olarak tanımlanır. B-Poisson çekirdeği $P_\nu(x, \alpha)$ 'nın açık ifadesi (Aliev-Bayrakci(1998)) tarafından verilmiştir. Burada bu hesaplamalara tekrar yer verilmektedir.

Öncelikle aşağıdaki eşitlikleri göz önünde alalım:

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{-\beta^2/4t} dt, \quad \text{(Stein-Weiss(1971), syf.6)}$$

ve

$$F_\nu(e^{-\alpha|x|^2})(t) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \pi^{\frac{n-1}{2}} \alpha^{-\frac{n+2\nu}{2}} e^{-\frac{|t|^2}{4\alpha}}, \quad \text{(Aliev(1987))}.$$

Buradan Fubini teoremine göre

$$F_\nu(e^{-|x|})(z) \;\; = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-|x|} e^{-i\langle x', z' \rangle} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n z_n) x_n^{2\nu} dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{-|x|^2/4t} dt \right) e^{-i\langle x', z' \rangle} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n z_n) x_n^{2\nu} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-|x|^2/4t} e^{-i\langle x', z' \rangle} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n z_n) x_n^{2\nu} dx \right) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \pi^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{4t}\right)^{-\frac{n+2\nu}{2}} e^{-|z|^2 t} dt \\
&= \int\limits_0^\infty \pi^{\frac{n}{2}-1} 2^{n+2\nu-1} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) e^{-t(|z|^2+1)} t^{\frac{n+2\nu-1}{2}} dt \\
&= \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{n+2\nu}{2}} (|z|^2+1)^{-\frac{n+2\nu+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right) \left(\sqrt{c_\nu(n)}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca

$$
F_\nu(f(\lambda y))(x) = \lambda^{-n-2\nu} (F_\nu(f(y)) \left(\frac{x}{\lambda}\right), (\lambda > 0)
$$

eşitliğini de görelim:

$$
\begin{aligned}
F_\nu(f(\lambda y))(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(\lambda y) e^{-i\langle y', x' \rangle} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) y_n^{2\nu} dy \\
&= \cdots \lambda y = z, \lambda^n dy = dz \cdots \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(z) e^{-i\left\langle \frac{z}{\lambda}', x' \right\rangle} j_{\nu-\frac{1}{2}} z \left({}_n \frac{x_n}{\lambda}\right) \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2\nu} d\frac{z}{\lambda^n} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(z) e^{-i\left\langle z', \frac{x}{\lambda}' \right\rangle} j_{\nu-\frac{1}{2}} z \left({}_n \frac{x_n}{\lambda}\right) (z_n)^{2\nu} \lambda^{-2\nu-n} dz \\
&= \lambda^{-2\nu-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(z) e^{-i\left\langle z', \frac{x}{\lambda}' \right\rangle} j_{\nu-\frac{1}{2}} z \left({}_n \frac{x_n}{\lambda}\right) (z_n)^{2\nu} dz \\
&= \lambda^{-2\nu-n} (F_\nu f(y)) \left(\frac{x}{\lambda}\right).
\end{aligned}
$$

Böylece

$$
F_\nu(e^{-\alpha|y|})(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{n+2\nu}{2}} \left(\sqrt{c_\nu(n)}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right) \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{n+2\nu}{2}} \frac{\alpha}{(|x|^2+|\alpha|^2)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}}
$$

olarak bulunur. Bu son eşitliği dikkate alarak B-Poisson çekirdeği

$$P_\nu(x,\alpha) = d_\nu(n)\frac{\alpha}{\left(|x|^2+|\alpha|^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}}$$

ile tanımlanır. Burada

$$d_\nu(n) = c_\nu(n)\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{\frac{n+2\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right) \tag{4.11}$$

dir. $P_\nu(x;\alpha)$ 'nin aşağıdaki özellikleri kolayca gösterilmektedir. Şöyle ki

1.

$$F_\nu(P_\nu(\cdot;\alpha))(x) = e^{-\alpha|x|}.$$

Bu eşitliği görmek için her iki taraftan ters Fourier-Bessel dönüşümü alalım. Böylece

$$F_\nu^{-1}\left(F_\nu(P_\nu(\cdot;\alpha))(x)\right)(z) \quad = \quad F^{-1}(e^{-\alpha|x|})$$

ve

$$\begin{aligned} P_\nu(\cdot;\alpha) &= c_\nu(n)(F_\nu(e^{-\alpha|x|})(-z) \\ &= d_\nu(n)\frac{\alpha}{\left(|x|^2+|\alpha|^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}} \\ &= P_\nu(x;\alpha) \end{aligned}$$

olur.

2.

$$\|P_\nu(\cdot;\alpha)\|_{1,\nu} = 1\ ,\ \forall\alpha>0$$

dir. Bunun için

$$\begin{aligned} F_\nu\left(P_\nu(\cdot;\alpha)\right)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|P_\nu(y;\alpha)|\,e^{-i\langle y',x'\rangle}j_{\nu-\frac{1}{2}}(y_nx_n)y_n^{2\nu}dy \\ &= e^{-\alpha|x|} \end{aligned}$$

eşitliğinde $x=0$ yazalım. Buradan

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n}|P_\nu(y;\alpha)|\,y_n^{2\nu}dy = 1\ ,\ \forall\alpha>0$$

elde edilir.

3. B-Poisson çekirdeğinin yarı grup özelliği ise şöyledir:

$$P_\nu(x;\alpha+\beta) = P_\nu(x;\alpha) \circledast P_\nu(x;\beta) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} P_\nu(y;\alpha) T_x^y P_\nu(x;\beta)\, y_n^{2\nu} dy.$$

Bu ise

$$\begin{aligned} F_\nu(P_\nu(x;\alpha+\beta)) &= e^{-\alpha|x|} e^{-\beta|x|} \\ &= F_\nu(P_\nu(x;\alpha))\, F_\nu(P_\nu(x;\beta)) \\ &= F_\nu(P_\nu(x;\alpha) \circledast P_\nu(x;\beta)) \end{aligned}$$

eşitliğinden elde edilir.

B-Poisson integrali (yarı-grubu)

$$(V_\alpha f)(x) = v(x;\alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(y)\, T_x^y P_\nu(x;\alpha)\, y_n^{2\nu} dy.$$

ile tanımlanır (Aliev, Bayrakci (1998)). B-Poisson integrali aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür ve bunu görmek zor değildir:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \Delta_B(x)\right) v(x;\alpha) = 0 \\ v(x;\alpha)\,|_{\alpha=0} = f(x)\,. \end{cases}$$

Yarı-grup özelliği ise

$$V_\alpha V_\beta = V_{\alpha+\beta}\ (0 < \alpha,\ \beta < \infty)$$

şeklindedir. Bu eşitliği görmek için her iki yandan Fourier-Bessel dönüşümü alınır. Böylece

$$\begin{aligned} F_\nu(V_{\alpha+\beta} f) &= F_\nu(f \circledast P_\nu(x;\alpha+\beta)) \\ &= F_\nu(f)\, F_\nu(P_\nu(x;\alpha+\beta)) \\ &= F_\nu(f)\, F_\nu(P_\nu(x;\alpha))\, F_\nu(P_\nu(x;\beta)) \\ &= F_\nu(f \circledast P_\nu(x;\alpha))\, F_\nu(P_\nu(x;\beta)) \\ &= F_\nu(V_\alpha f)\, F_\nu(P_\nu(x;\beta)) \\ &= F_\nu(V_\beta V_\alpha f) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.27. *$\varphi \in L_{1,\nu}$ radial fonksiyon ve $\psi(r) = \varphi \underset{|x|=r}{|}$, $(0 < r < \infty)$ negatif olmayan ve $[0, \infty)$ da azalan fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall f \in L_{p,\nu}$, $(1 \leq p \leq \infty)$ için*

$$\sup_{\varepsilon>0} |(f \circledast \varphi_\varepsilon)(x)| \leq \|\varphi\|_{1,\nu} M_f(x)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n-2\nu}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$, (Aliev, Bayrakci(1998)).

Bu teoremin bir sonucu olarak B-Poisson integrali $V_\alpha f$, $\alpha > 0$ için aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 4.28. *$V_\alpha f$, $f \in L_{p,\nu}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ fonksiyonunun B-Poisson integrali olmak üzere*

$$\sup_{\alpha>0} |(V_\alpha f)(x)| \leq M_f(x) \tag{4.12}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat Yukarıdaki teoremde

$$\varphi_\varepsilon(x) = P_\nu(x;\varepsilon) = \varepsilon^{-n-2\nu} P_\nu\left(\frac{x}{\varepsilon};1\right)$$

alınırsa istenilen eşitsizlik elde edilir. □

Bu kesimi son olarak B-Poisson integralinin $L_{p,\nu}-$ uzaylarından sınırlılığını göstererek bitireceğiz. Detaylar için (Aliev ve Bayrakci (1998)) makalesine bakılabilir.

Teorem 4.29. *$f \in L_{p,\nu}$, $1 \leq p \leq \infty$, fonksiyonunun B-Poisson integrali $V_\alpha f$, $\alpha > 0$ olmak üzere*

$$\|V_\alpha f\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat İntegraller için Minkowski eşitsizliği göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\|V_\alpha f\|_{p,\nu} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |V_\alpha f(x)|^p x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \left|\int_{\mathbb{R}^n_+} f(y)\, T_x^y \left(P_\nu(x;\alpha)\right) y_n^{2\nu} dy\right|^p x_n^{2\nu} dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(y)|^p \left| T^y_x \left(P_\nu(x;\alpha)\right)\right|^p y_n^{2\nu} dy \right) x_n^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(y)|^p \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left| T^y_x \left(P_\nu(x;\alpha)\right)\right|^p x_n^{2\nu} dx y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(y)|^p y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{p,\nu}$$

elde edilir. □

4.3. B-BMO Uzayı

Bu kesimde Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B tarafından doğurulan veya başka bir ifade ile genelleşmiş kaymanın ürettiği B-BMO uzayının tanımı ifade edilip özellikleri incelenecektir.

Öncelikle bazı kavramları tanımlayalım. Öklid uzayını göz önüne alalım. $E \subseteq \mathbb{R}^n_+$ olmak üzere E kümesinin Lebesque ölçümü $|E|_\nu = \int\limits_E x_n^{2\nu} dx$ ile tanımlanır. Ayrıca $\mathbb{R}^n_+$ uzayında x-merkezli $r > 0$ yarıçaplı yuvar

$$E(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n_+ : |x-y| < r\}$$

olmak üzere bu yuvarın Lebesque ölçümü

$$|E(x,r)|_\nu = r^{n+2\nu} \omega(n,r)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\omega(n,r) = |E_1|_\nu = \int\limits_{E(0,1)} x_n^{2\nu} dx \ \text{ ve } E_r = E(0,r)$$

dir. Ayrıca $\mathbb{R}^n_+$ da local integrallenebilen fonksiyonların lineer uzayını da $L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ile gösterilmektedir.

B-BMO uzayının tanımı aşağıdaki gibi Guliev (2000) tarafından verilmiştir. Bundan sonraki özellikleri bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlardır.

Tanım 4.30.

$$B\text{-}BMO = B\text{-}BMO\left(\mathbb{R}_+^n\right) = \{f \in L_1^{loc}\left(\mathbb{R}_+^n\right) : \|f\|_{B\text{-}BMO} < \infty\},$$

$$\|f\|_{B\text{-}BMO} = \sup_{\substack{r>0 \\ x\in\mathbb{R}_+^n}} \frac{1}{|E_r|_\nu} \int_{E_r} |T^y f(x) - f_{E_r}(x)|\, y_n^{2\nu} dy$$

ile tanımlı normlu lineer uzaya B-BMO uzayı denir. Burada

$$f_{E_r}(x) = \frac{1}{|E_r|_\nu} \int_{E_r} T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy$$

dir. Aşağıda B-BMO uzayının normlu lineer uzay olduğu gösterilmektedir.

Teorem 4.31. *B-BMO lineer uzaydır. Yani,* $\forall f, g \in B\text{-}BMO$ *ve* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için*

$$\alpha f + g \in B\text{-}BMO$$

dir.

İspat Herhangi $f, g \in B\text{-}BMO$ ve herhangi $\alpha \in \mathbb{R}$ alalım. Öncelikle genelleşmiş kayma T^y 'nin lineer olduğunu görelim:

$$\begin{aligned} T^y(\alpha f + g)(x) &= \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi (\alpha f + g)\left(x' - y'; \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{2\nu-1}\alpha d\alpha \\ &= \alpha T^y f(x) + T^y g(x). \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} (\alpha f + g)_{E_r}(x) &= \frac{1}{|E_r|_\nu} \int_{E_r} T^y(\alpha f + g)(x)\, y_n^{2\nu} dy \\ &= \alpha \frac{1}{|E_r|_\nu} \int_{E_r} T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy + \frac{1}{|E_r|_\nu} \int_{E_r} T^y g(x)\, y_n^{2\nu} dy \\ &= \alpha f_{E_r}(x) + g_{E_r}(x). \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\frac{1}{|E_r|_\nu} \int_{E_r} \left|T^y(\alpha f + g)(x) - (\alpha f + g)_{E_r}(x)\right| y_n^{2\nu} dy \leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x) - f_{E_r}(x)| \, y_n^{2\nu} dy + \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y g(x) - g_{E_r}(x)| \, y_n^{2\nu} dy$$

eşitsizliğin her iki yanından supremum alınırsa

$$\|\alpha f + g\|_{B\text{-}BMO} \leq \alpha \|f\|_{B\text{-}BMO} + \|g\|_{B\text{-}BMO} < \infty$$

elde edilir. Bu ise $(\alpha f + g) \in B\text{-}BMO$ demektir. □

Teorem 4.32. *B-BMO uzayı, $\|f\|_{B\text{-}BMO}$ normu ile normlu lineer uzaydır.*

İspat Norm olma koşullarını kontrol edelim. $f = 0$ için $\|f\|_{B\text{-}BMO} = 0$ olduğu açıktır. Bundan başka $\|f\|_{B\text{-}BMO} = 0$ ise f fonksiyonu $f = 0$ fonksiyonuna denk fonksiyonlardır. Bundan başka $\|\alpha f\|_{B\text{-}BMO} = |\alpha| \, \|f\|_{B\text{-}BMO}$ eşitliği ve norm için üçgen eşitsizliği ise yukarıdaki ispat içindeki çalışmadan görülür. □

Teorem 4.33. *$L_\infty \subsetneqq B\text{-}BMO$ ve $\|f\|_{B\text{-}BMO} \leq 2 \|f\|_\infty$ dur.*

İspat $f \in L_\infty$ olsun. Öncelikle $|T^y f(x)| \leq \|f\|_\infty$ olduğunu görelim:

$$\begin{aligned} |T^y f(x)| &\leq \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi \left| f\left(x' - y'; \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right)\right| \sin^{2\nu-1}\alpha d\alpha \\ &\leq ess \sup_{x \in \mathbb{R}_+^n} |f(x)| \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi \sin^{2\nu-1}\alpha d\alpha = \|f\|_\infty . \end{aligned}$$

Ayrıca

$$|f_{E_r}(x)| \leq \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x)| \, y_n^{2\nu} dy \leq \|f\|_\infty$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x) - f_{E_r}(x)| \, y_n^{2\nu} dy &\leq \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x)| \, y_n^{2\nu} dy + \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |f_{E_r}(x)| \, y_n^{2\nu} dy \\ &\leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty \\ &= 2 \|f\|_\infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin iki yanından x ve r üzerinden supremum alınırsa

$$\|f\|_{B\text{-}BMO} \leq 2\,\|f\|_{\infty}$$

bulunur. Bu kapsama kesindir. B-BMO uzayında olup, L_{∞} da olmayan fonksiyon vardır.
□

Teorem 4.34. *Öyle bir $c_{x,r}$ sabiti vardır ki*

$$\sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n_+}} \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x) - c_{x,r}|\, y_n^{2\nu} dy \leq A, \quad A > 0$$

ise $f \in B\text{-}BMO$ ve $\|f\|_{B\text{-}BMO} \leq 2A$ dir.

İspat Öncelikle

$$|T^y f(x) - f_{E_r}(x)| \leq |T^y f(x) - c_{x,r}| + |c_{x,r} - f_{E_r}(x)|$$

ve

$$\begin{aligned} |c_{x,r} - f_{E_r}(x)| &= \left| c_{x,r} - \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy \right| \\ &\leq \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x) - c_{x,r}|\, y_n^{2\nu} dy \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x) - f_{E_r}(x)|\, y_n^{2\nu} dy \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x) - c_{x,r}|\, y_n^{2\nu} dy + \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |c_{x,r} - f_{E_r}(x)|\, y_n^{2\nu} dy \\ &\leq \frac{2}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x) - c_{x,r}|\, y_n^{2\nu} dy \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitsizliğin her iki tarafından supremum alınırsa

$$\sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n_+}} \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x) - f_{E_r}(x)|\, y_n^{2\nu} dy \leq \sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n_+}} \frac{2}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x) - c_{x,r}|\, y_n^{2\nu} dy \leq 2A$$

elde edilir. Dolayısıyla $f \in B\text{-}BMO$ ve $\|f\|_{B\text{-}BMO} \leq 2A$ elde edilir. □

Teorem 4.35. *$f \in B\text{-}BMO$ olsun. Buradan*

$$\frac{1}{2}\left\|f\right\|_{B\text{-}BMO} \leq \inf_{c}\sup_{\substack{r>0 \\ x\in\mathbb{R}_{+}^{n}}} \frac{1}{\left|E_{r}\right|_{\nu}}\int\limits_{E_{r}}\left|T^{y}f\left(x\right)-c_{x,r}\right|y_{n}^{2\nu}dy \leq \left\|f\right\|_{B\text{-}BMO} \tag{4.13}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat Öncelikle

$$\inf_{c}\frac{1}{\left|E_{r}\right|_{\nu}}\int\limits_{E_{r}}\left|T^{y}f\left(x\right)-c_{x,r}\right|y_{n}^{2\nu}dy \leq \frac{1}{\left|E_{r}\right|_{\nu}}\int\limits_{E_{r}}\left|T^{y}f\left(x\right)-f_{E_{r}}\left(x\right)\right|y_{n}^{2\nu}dy$$

eşitsizliğin her iki tarafından supremum alınırsa

$$\inf_{c}\sup_{\substack{r>0 \\ x\in\mathbb{R}_{+}^{n}}} \frac{1}{\left|E_{r}\right|_{\nu}}\int\limits_{E_{r}}\left|T^{y}f\left(x\right)-c_{x,r}\right|y_{n}^{2\nu}dy \leq \left\|f\right\|_{B\text{-}BMO}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\left|c_{x,r}-f_{E_{r}}\left(x\right)\right| &= \left|\frac{1}{\left|E_{r}\right|_{\nu}}\int\limits_{E_{r}}c_{x,r}y_{n}^{2\nu}dy-\frac{1}{\left|E_{r}\right|_{\nu}}\int\limits_{E_{r}}T^{y}f\left(x\right)y_{n}^{2\nu}dy\right| \\ &\leq \frac{1}{\left|E_{r}\right|_{\nu}}\int\limits_{E_{r}}\left|T^{y}f\left(x\right)-c_{x,r}\right|y_{n}^{2\nu}dy\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\frac{1}{\left|E_{r}\right|_{\nu}}\int\limits_{E_{r}}\left|T^{y}f\left(x\right)-f_{E_{r}}\left(x\right)\right|y_{n}^{2\nu}dy \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\left|E_{r}\right|_{\nu}}\int\limits_{E_{r}}\left|T^{y}f\left(x\right)-c_{x,r}\right|y_{n}^{2\nu}dy+\frac{1}{\left|E_{r}\right|_{\nu}}\int\limits_{E_{r}}\left|f_{E_{r}}\left(x\right)-c_{x,r}\right|y_{n}^{2\nu}dy \\ &\leq \frac{2}{\left|E_{r}\right|_{\nu}}\int\limits_{E_{r}}\left|T^{y}f\left(x\right)-c_{x,r}\right|y_{n}^{2\nu}dy\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin her iki yanından önce infimum, sonra supremum alınırsa

$$\frac{1}{2}\left\|f\right\|_{B\text{-}BMO} \leq \inf_{c}\sup_{\substack{r>0 \\ x\in\mathbb{R}_{+}^{n}}} \frac{1}{\left|E_{r}\right|_{\nu}}\int\limits_{E_{r}}\left|T^{y}f\left(x\right)-c_{x,r}\right|y_{n}^{2\nu}dy$$

elde edilir. □

Teorem 4.36. *$f \in B\text{-}BMO$, $\lambda > 0$ olmak üzere $\left(\delta^{\lambda} f\right)(x) = f(\lambda x)$ olsun. Bu durumda*

$$\left\|\delta^{\lambda} f\right\|_{B\text{-}BMO} = \|f\|_{B\text{-}BMO}$$

dir.

İspat B-BMO normu tanımına göre

$$\left\|\delta^{\lambda} f\right\|_{B\text{-}BMO} = \sup_{\substack{r>0 \\ x\in\mathbb{R}^n_+}} \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} \left| T^y\left(\delta^{\lambda} f\right)(x) - \left(\delta^{\lambda} f\right)_{E_r}(x)\right| y_n^{2\nu} dy$$

dir. Bunun için öncelikle $\left(\delta^{\lambda} f\right)_{E_r}$ 'yi hesaplayalım. Genelleşmiş kayma tanımına göre

$$T^y\left(\delta^{\lambda} f\right)(x) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi \left(\delta^{\lambda} f\right)\left(x'-y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2}\right) \sin^{2\nu-1}\alpha d\alpha$$

$$= \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(\lambda x' - \lambda y', \sqrt{(\lambda x_n)^2 - 2(\lambda x_n)(\lambda y_n)\cos\alpha + (\lambda y_n)^2}\right) \sin^{2\nu-1}\alpha d\alpha$$

$$= T^{\lambda y} f(\lambda x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left(\delta^{\lambda} f\right)_{E_r}(x) &= \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} T^y\left(\delta^{\lambda} f\right)(x)\, y_n^{2\nu} dy \\
&= \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} T^{\lambda y} f(\lambda x)\, y_n^{2\nu} dy \\
&= \cdots z = \lambda y,\ dz = \lambda^n dy,\ z_n^{2\nu} = \lambda^{2\nu} y_n^{2\nu} \cdots \\
&= \frac{1}{|E_r|_\nu} \frac{1}{\lambda^{n+2\nu}} \int\limits_{\lambda E_r} T^z f(\lambda x)\, z_n^{2\nu} dz \\
&= (f)_{\lambda E_r}(\lambda x)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} \left| T^y\left(\delta^{\lambda} f\right)(x) - \left(\delta^{\lambda} f\right)_{E_r}(x)\right| y_n^{2\nu} dy =$$

$$= \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} \left| T^{\lambda y} f(\lambda x) - (f)_{\lambda E_r}(x) \right| y_n^{2\nu} dy$$

$$= \cdots z = \lambda y,\ dz = \lambda^n dy,\ z_n^{2\nu} = \lambda^{2\nu} y_n^{2\nu} \cdots$$

$$= \frac{1}{|\lambda E_r|_\nu} \int\limits_{\lambda E_r} \left| T^{z} f(\lambda x) - (f)_{\lambda E_r}(\lambda x) \right| z_n^{2\nu} dz$$

eşitliğinin her iki yanından supremum alınırsa

$$\left\| \delta^\lambda f \right\|_{B\text{-}BMO} = \|f\|_{B\text{-}BMO}$$

eşitliği elde edilir. □

Önerme 4.37. *$f \in B\text{-}BMO$ olsun. $E_r = E(0,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < r\}$ ve $|E_r|_\nu = r^{n+2\nu}\omega(n,\nu)$ olmak üzere $E_r \subseteq E_s$ ise*

$$|f_{E_r}(x) - f_{E_s}(x)| \leq \left(\frac{s}{r}\right)^{n+2\nu} \|f\|_{B\text{-}BMO}$$

dir.

İspat $f_{E_r}(x) = \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|f_{E_r}(x) - f_{E_s}(x)| &= \left| \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy - f_{E_s}(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} \left(T^y f(x) - f_{E_s}(x) \right) y_n^{2\nu} dy \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x) - f_{E_s}(x)|\, y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_s} |T^y f(x) - f_{E_s}(x)|\, y_n^{2\nu} dy \\
&= \frac{|E_s|_\nu}{|E_r|_\nu} \frac{1}{|E_s|_\nu} \int\limits_{E_s} |T^y f(x) - f_{E_s}(x)|\, y_n^{2\nu} dy \\
&= \left(\frac{s}{r}\right)^{n+2\nu} \|f\|_{B\text{-}BMO}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.38. *$f \in B\text{-}BMO$ olsun. Bu durumda herhangi $m \in \mathbb{N}$ için*

$$\left|f_{E_r}(x) - f_{E_{2^m r}}(x)\right| \leq 2^{n+2\nu} m \left\|f\right\|_{B\text{-}BMO}, \; v > 0$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $m = 1$ olsun. Önerme 4.37 'e göre

$$\left|f_{E_r}(x) - f_{E_{2r}}(x)\right| \leq \left(\frac{2r}{r}\right)^{n+2\nu} \left\|f\right\|_{B\text{-}BMO} = 2^{n+2\nu} \left\|f\right\|_{B\text{-}BMO}$$

elde edilir. Buradan $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left|f_{E_r}(x) - f_{E_{2^m r}}(x)\right| &\leq \left|f_{E_r}(x) - f_{E_{2r}}(x)\right| + \cdots + \left|f_{E_{2^{m-1} r}}(x) - f_{E_{2^m r}}(x)\right| \\ &\leq 2^{n+2\nu} \left\|f\right\|_{B\text{-}BMO} + \cdots + 2^{n+2\nu} \left\|f\right\|_{B\text{-}BMO} \\ &= 2^{n+2\nu} m \left\|f\right\|_{B\text{-}BMO} \end{aligned}$$

bulunur. □

Teorem 4.39. *$f \in B\text{-}BMO$ ve $V_t f = f \circledast P_\nu(\cdot; t)$ fonksiyonu da f 'nin B-Poisson integrali olsun. Bu durumda*

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}_+^n \\ t > 0}} \int_{\mathbb{R}_+^n} \left|T^y f(x) - V_t f(x)\right| P_\nu(y,t)\, y_n^{2\nu} dy \leq c(n,\nu) \left\|f\right\|_{B\text{-}BMO}$$

olacak şekilde $c(n,\nu)$ sabiti vardır.

İspat $f \in B\text{-}BMO$ olsun. B-Poisson integralinin

$$(V_t f)(x) = f \circledast P_\nu(x,t) = \int_{\mathbb{R}_+^n} T^y f(x)\, P_\nu(y,t)\, y_n^{2\nu} dy$$

olduğunu ve B-Poisson çekirdeğinin de

$$P_\nu(y,t) = d_\nu(n) \frac{t}{\left(t^2 + |y|^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}}$$

biçiminde bir ifadeye sahip olduğunu biliyoruz. Buradaki $d_\nu(n)$ katsayısı (4.11) de verilmiştir.

Öncelikle

$$|T^y f(x) - V_t f(x)| \leq |T^y f(x) - f_{E_t}(x)| + |V_t f(x) - f_{E_t}(x)|$$

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |T^y f(x) - V_t f(x)| P_\nu(y,t) y_n^{2\nu} dy &\leq \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)| P_\nu(y,t) y_n^{2\nu} dy + \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |V_t f(x) - f_{E_t}(x)| P_\nu(y,t) y_n^{2\nu} dy \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{4.14}$$

elde ederiz. Şimdi I_1 ve I_2 ifadelerini aşağıda hesaplayalım.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)| P_\nu(y,t) y_n^{2\nu} dy = d_\nu(n) \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{t\,|T^y f(x) - f_{E_t}(x)|}{\left(t^2 + |y|^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}} y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \int\limits_{E_t} \frac{t\,|T^y f(x) - f_{E_t}(x)|}{\left(t^2 + |y|^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}} y_n^{2\nu} dy + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^{k+1}E_t / 2^k E_t} \frac{t\left(|T^y f(x) - f_{2^{k+1}E_t}(x)| + |f_{2^{k+1}E_t} - f_{E_t}(x)|\right)}{\left(t^2 + |y|^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}} y_n^{2\nu} dy \\
&\leq \frac{1}{t^{n+2\nu}} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)| y_n^{2\nu} dy + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(n+2\nu+1)} \left(\frac{1}{t^{n+2\nu}} \int\limits_{2^{k+1}E_t} |T^y f(x) - f_{2^{k+1}E_t}(x)| y_n^{2\nu} dy + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{t^{n+2\nu}} |f_{2^{k+1}E_t}(x) - f_{E_t}| \, 2^{(k+1)(n+2\nu)} \omega(n,\nu) t^{n+2\nu} \right) \\
&\leq \omega(n,\nu) \|f\|_{B\text{-}BMO} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(n+2\nu+1)} \times \\
&\quad \times \left[2^{(k+1)(n+2\nu)} \omega(n,v) \|f\|_{B\text{-}BMO} + 2^{(k+1)(n+2\nu)} \omega(n,\nu)(k+1) 2^{n+2\nu} \|f\|_{B\text{-}BMO} \right]
\end{aligned}$$

$$= \omega(n,\nu)\|f\|_{B\text{-}BMO} + \omega(n,v)\|f\|_{B\text{-}BMO}\left(2^{n+2\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} + 2^{2(n+2\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}\right)$$

$$\leq c(n,\nu)\|f\|_{B\text{-}BMO}$$

bulunur. Ayrıca $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} P_\nu(y,t)\, y_n^{2\nu} dy = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |V_t f(x) - f_{E_t}(x)|\, P_\nu(y,t)\, y_n^{2\nu} dy \\ &= |V_t f(x) - f_{E_t}(x)| \\ &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} T^y f(x)\, P_\nu(y,t)\, y_n^{2\nu} dy - f_{E_t}(x)\right| \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|\, P_\nu(y,t)\, y_n^{2\nu} dy \\ &\leq c(n,\nu)\|f\|_{B\text{-}BMO} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece I_1 ve I_2 tahminleri (4.14) de kullanılırsa ve ardından her iki yandan supremum alınırsa

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n_+ \\ t>0}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |T^y f(x) - V_t f(x)|\, P_\nu(y,t)\, y_n^{2\nu} dy \leq c(n,\nu)\|f\|_{B\text{-}BMO}$$

elde edilir. □

Aşağıdaki teorem ile yukarıdaki ifadenin ters eşitsizliği için yeterli bir koşul vereceğiz.

Teorem 4.40. *$f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ olsun. Eğer*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|T^y f(x)|}{(1+|y|)^{n+2\nu+1}} y_n^{2\nu} dy < \infty$$

ise $f \in B\text{-}BMO$ dir ve

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n_+ \\ t>0}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |T^y f(x) - V_t f(x)|\, P_\nu(y,t)\, y_n^{2\nu} dy \geq c(n,\nu)\|f\|_{B\text{-}BMO}$$

olacak şekilde $c(n,\nu)$ *sabiti vardır. Burada* $V_t f$, f *'nin B-Poisson integrali ve* $P_\nu(y,t)$ *ise B-Poisson çekirdeğidir.*

İspat

$$A = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n_+ \\ t>0}} \int_{\mathbb{R}^n_+} |T^y f(x) - V_t f(x)| \, P_\nu(y,t) \, y_n^{2\nu} dy$$

diyelim. Teoremin hipotezindeki koşula göre $A > 0$ dir.

Ayrıca $y \in E_t$, $|y| < t$ için

$$P_\nu(y,t) \le \frac{d_\nu(n)\, t}{\left(t^2 + |y|^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}} \le \frac{d_n}{t^{n+2\nu}}$$

eşitsizliği sağlanır. Çünkü $\left(t^2+|y|^2\right)^{\frac{n+2\nu+1}{2}} \le 2^{\frac{n+2\nu+1}{2}} t^{n+2\nu}$ dir.

Böylece

$$A \ge \int_{\mathbb{R}^n_+} |T^y f(x) - V_t f(x)| \, P_\nu(y,t) \, y_n^{2\nu} dy \ge \frac{c_1(n,\nu)}{t^{n+2\nu}} \int_{E_t} |T^y f(x) - V_t f(x)| \, y_n^{2\nu} dy$$

olur. Yani,

$$\frac{1}{t^{n+2\nu}} \int_{E_t} |T^y f(x) - V_t f(x)| \, y_n^{2\nu} dy \le c_2(n,\nu) A$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki yanı $\frac{1}{\omega(n,v)}$ ile çarpılıp supremum alınırsa

$$\frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_\nu} |T^y f(x) - V_t f(x)| \, y_n^{2\nu} dy \le c_3(n,\nu) A$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi de Teorem 4.34 göz önüne alınırsa $f \in B\text{-}BMO$,

$$\|f\|_{B\text{-}BMO} \le 2c_3(n,\nu) A$$

ve

$$A \ge c(n,\nu) \|f\|_{B\text{-}BMO}$$

elde edilir. □

Klasik BMO uzaylarındaki en önemli eşitsizlik John-Nirenberg eşitsizliğidir. Genelleşmiş kaymanın doğurduğu B-BMO uzaylarında da John-Nirenberg eşitsizliğini ispatlamak mümkündür. İspat klasik halde olduğu gibi yapılır.

Teorem 4.41. *(**John-Nirenberg eşitsizliği**) Her $f \in B\text{-}BMO$, her E_t yuvarı ve her $\alpha > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\left|\{x \in E_t : |T^y f(x) - f_{E_t}(x)| > \alpha\}\right|_\nu \leq e\,|E_t|_\nu\, e^{-A\alpha/\|f\|_{B\text{-}BMO}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $A > 0$ dir.

Son olarak B-BMO uzaylarında John-Nirenberg eşitsizliği göz önüne alınarak aşağıdaki teorem ispatlanmaktadır. Bu teorem ile B-BMO uzayının normuna denk bir norm elde edilir.

Teorem 4.42. *$f \in B\text{-}BMO$ olsun. Bu durumda $1 \leq p < \infty$ olmak üzere*

$$c\,\|f\|_{B\text{-}BMO} \leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}_+^n \\ t>0}} \left(\frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p\, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq d\,\|f\|_{B\text{-}BMO}$$

olacak şekilde $c = c(n, v, p) > 0$ ve $d = d(n, v, p) > 0$ sabitleri vardır.

İspat $f \in B\text{-}BMO$ olsun. Sonuç 3.24 'deki dağılım fonksiyonuna göre ve John-Nirenberg eşitsizliği göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\int_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p\, y_n^{2\nu} dy &= \int_0^\infty p\alpha^{p-1} \left|\{x \in E_t : |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p > \alpha\}\right|_\nu d\alpha \\
&\leq \int_0^\infty p\alpha^{p-1} e\,|E_t|_\nu\, e^{-A\alpha/\|f\|_{B\text{-}BMO}} d\alpha,\ (A > 0 \text{ sabit})
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Gamma fonksiyonu $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|E_t|_\nu} \int_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p\, y_n^{2\nu} dy &\leq pe \int_0^\infty \alpha^{p-1} |E_t|_\nu\, e^{-A\alpha/\|f\|_{B\text{-}BMO}} d\alpha \\
&= \cdots \beta = \frac{A\alpha}{\|f\|_{B\text{-}BMO}},\ d\beta = \frac{A}{\|f\|_{B\text{-}BMO}} d\alpha \cdots \\
&= c_1 \|f\|_{B\text{-}BMO}^{p-1} \|f\|_{B\text{-}BMO} \int_0^\infty \beta^{p-1} e^{-\beta} d\beta \\
&= d^p \|f\|_{B\text{-}BMO}^p
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece bu son eşitsizliğin her iki yanından $\frac{1}{p}$ kök ve ardından supremum alınırsa

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}_+^n \\ t>0}} \left(\frac{1}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq d \, \|f\|_{B\text{-}BMO}$$

olur.

Ayrıca $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < \infty$ olmak üzere Hölder eşitsizliği göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)| \, y_n^{2\nu} dy &\leq \left(\int\limits_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{E_t} y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int\limits_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}} |E_t|_\nu^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)| \, y_n^{2\nu} dy &\leq \frac{|E_t|_\nu^{\frac{1}{q}}}{|E_t|_\nu} \left(\int\limits_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitsizliğin her iki yanından supremum alınırsa

$$\|f\|_{B\text{-}BMO} \leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}_+^n \\ t>0}} \left(\frac{1}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir. □

Böylece B-BMO uzayının normu $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{B\text{-}BMO} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}_+^n \\ t>0}} \left(\frac{1}{|E_t|_\nu} \int\limits_{E_t} |T^y f(x) - f_{E_t}(x)|^p \, y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde ifade edilir. B-BMO uzayı ile olan çalışmalarda bu norm daha kullanışlı olacaktır.

5. SONUÇLAR

$$B\text{-}BMO = B\text{-}BMO\left(\mathbb{R}^n_+\right) = \{f \in L_1^{loc}\left(\mathbb{R}^n_+\right) : \|f\|_{B\text{-}BMO} < \infty\},$$
$$\|f\|_{B\text{-}BMO} = \sup_{\substack{r>0 \\ x\in\mathbb{R}^n_+}} \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x) - f_{E_r}(x)|\, y_n^{2\nu} dy$$

ile tanımlı normlu lineer uzaya B-BMO uzayı denir. Burada

$$f_{E_r}(x) = \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} T^y f(x)\, y_n^{2\nu} dy$$

dir. Aşağıda B-BMO uzayının normlu lineer uzayı ile tanımlanır (Guliev(2000)).

Bu tez çalışmamızda aşağıdaki sonuçlara ulaştık.

$L_\infty \subsetneqq B\text{-}BMO$ ve $\|f\|_{B\text{-}BMO} \leq 2\|f\|_\infty$ dir.

Teorem 5.43. *Öyle bir $c_{x,r}$ sabiti vardır ki*

$$\sup_{\substack{r>0 \\ x\in\mathbb{R}^n_+}} \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x) - c_{x,r}|\, y_n^{2\nu} dy \leq A, \quad A > 0$$

ise $f \in B\text{-}BMO$ ve $\|f\|_{B\text{-}BMO} \leq 2A$ dir.

Teorem 5.44. *$f \in B\text{-}BMO$ olsun. Buradan*

$$\frac{1}{2}\|f\|_{B\text{-}BMO} \leq \inf_c \sup_{\substack{r>0 \\ x\in\mathbb{R}^n_+}} \frac{1}{|E_r|_\nu} \int\limits_{E_r} |T^y f(x) - c_{x,r}|\, y_n^{2\nu} dy \leq \|f\|_{B\text{-}BMO}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 5.45. *$f \in B\text{-}BMO$, $\lambda > 0$ olmak üzere $\left(\delta^\lambda f\right)(x) = f(\lambda x)$ olsun. Bu durumda*

$$\left\|\delta^\lambda f\right\|_{B\text{-}BMO} = \|f\|_{B\text{-}BMO}$$

dir.

Önerme 5.46. *$f \in B\text{-}BMO$ olsun. $E_r = E(0,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < r\}$ ve $|E_r|_\nu = r^{n+2\nu}\omega(n,\nu)$ olmak üzere $E_r \subseteq E_s$ ise*

$$|f_{E_r}(x) - f_{E_s}(x)| \leq \left(\frac{s}{r}\right)^{n+2\nu} \|f\|_{B\text{-}BMO}$$

dir.

Teorem 5.47. *$f \in B\text{-}BMO$ olsun. Bu durumda $m \in \mathbb{N}$ için*

$$\left|f_{E_r}(x) - f_{E_{2^m r}}(x)\right| \leq 2^{n+2\nu} m \left\|f\right\|_{B\text{-}BMO}, \, v > 0$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 5.48. *$f \in B\text{-}BMO$ ve $V_t f = f \circledast P_\nu(\cdot;t)$ fonksiyonu da f 'nin B-Poisson integrali olsun. Bu durumda*

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n_+ \\ t>0}} \int_{\mathbb{R}^n_+} \left|T^y f(x) - V_t f(x)\right| P_\nu(y,t)\, y_n^{2\nu} dy \leq c(n,\nu) \left\|f\right\|_{B\text{-}BMO}$$

olacak şekilde $c(n,\nu)$ sabiti vardır.

Teorem 5.49. *$f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ olsun. Eğer*

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\left|T^y f(x)\right|}{(1+|y|)^{n+2\nu+1}} y_n^{2\nu} dy < \infty$$

ise $f \in B\text{-}BMO$ dir ve

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n_+ \\ t>0}} \int_{\mathbb{R}^n_+} \left|T^y f(x) - V_t f(x)\right| P_\nu(y,t)\, y_n^{2\nu} dy \geq c(n,\nu) \left\|f\right\|_{B\text{-}BMO}$$

olacak şekilde $c(n,\nu)$ sabiti vardır. Burada $V_t f$, f 'nin B-Poisson integrali ve $P_\nu(y,t)$ ise B-Poisson çekirdeğidir.

Teorem 5.50. ***(John-Nirenberg eşitsizliği)*** *Her $f \in B\text{-}BMO$, her E_t yuvarı ve her $\alpha > 0$ için*

$$\left|\left\{x \in E_t : \left|T^y f(x) - f_{E_t}(x)\right| > \alpha\right\}\right|_\nu \leq e \left|E_t\right|_\nu e^{-A\alpha/\|f\|_{B\text{-}BMO}}, \quad (A > 0 \text{ sabit})$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 5.51. *$f \in B\text{-}BMO$ olsun. Bu durumda $1 \leq p < \infty$ olmak üzere*

$$c\left\|f\right\|_{B\text{-}BMO} \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n_+ \\ t>0}} \left(\frac{1}{\left|E_t\right|_\nu} \int_{E_t} \left|T^y f(x) - f_{E_t}(x)\right|^p y_n^{2\nu} dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq d \left\|f\right\|_{B\text{-}BMO}$$

olacak şekilde $c = c(n,v,p) > 0$ ve $d = d(n,v,p) > 0$ sabitlari vardır.

6. KAYNAKLAR

Aliev, I.A.,Rubin, B.,Sezer, S., Uyhan, S.B., *Composite Wavelet transforms: Applications and Perspectives; Radon Transforms, Geometry and Wavelets; Contemporary Mathematic*, AMS, Providence, RI, 464,2008,1-25.

Aliev, I.A. and Bayrakci, S.1998. *On inversion of B-elliptic potential sassociated with the Laplace-Bessel differential operator, Fract. Calc. Appl. Anal.*, (4):365-384.

Aliev, I.A. and Bayrakci, S.2002. *On inversion of Bessel potentials associated with the Laplace-Bessel differential operator, Acta Math.Hungar,* 95(1-2):125-145.

Delsarte, J. 1938. *Sur une extension de la formule de Taylor. J. Math. Pure Appl,* 17:213-231.

C. Fefferman, 1971. *Characteristions of bounded mean oscillations, Bull Amer. Math. Soc.* , 77, 587-588.

C. Fefferman and E. M. Stein, 1972. H_p *spaces of several variables, Acta Math.* 129, 137-193.

Folland, G.B. 1984. Real Analysis Modern Tecniquies and Their Applications. John Wiley and Sons, New York, pp.350.

Gadjiev, A. D. and Aliev, I. A. 1988. *Riesz and Bessel potentials generated by a generalized transtion and their inverses. In Proc. IV All-Union Winter Conf., Theory of functions and approximation,* Saratov (Russia) $47-53$ pp.

Guliev, V.S. 2000. *Some Properties of the anisotropic Riesz-Bessel potential. Anal. Math.,* 26: 99-118

Guliev, V.S. and Hasanov J. J. 2006. *Sobolev-Morrey type inequality for Riesz potentials, associated with the Laplace-Bessel differential operator. Fract. Calc. Appl. Anal.*, 9(1):17-32.

Grafakos, L.2009. Modern Fourier Analysis, Second Edition, Springer, New York, pp.153.

John, F. and Nirenberg, L. 1961, *On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math.* , (14):415-426.

Klyuchantsev, M.I. 1970. *On singular integrals generated by the generalized shift operator, Sibirsk.Mat.Zh.*,(11):810-821.

Kipriyanov, I. A. 1967. *Fourier–Bessel transforms and imbedding theorems for weight classes. Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova*, $89 : 130 - 213$.

Levitan, B.M. 1951. *Bessel function expansions in series and Fourier integrals, Uspekhi Mat.Nauk.*, (6):102-143.

Lofstrom, J. and Peetre, J. 1969. *Approximation Theorems connected with generalized translation,Math.Ann.*,(181):255-268.

Lyakhov, L.N. 1983. *On classes of spherical functions and singular psedo differential operators, Dokl.Akad.Nauk*, (272):781-784.

Stein, E.M. and Weiss, G. 1971. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton UniversityPress, Princeton, New Jersey, pp.297.

Stein, E.M. 1993. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, pp.695.

Stein, E.M.2005. Real Analysis: Measure Theory, Integration, Hilbert spaces, Princeton Lectures in Analysis III, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, pp.402.

Stempak, K.1986. *La théorie de Littlewood-Paley pour la transformation de Fourier-Bessel.CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 303(1) :15-18.

Trimeche, K.1997. *Inversion of the Lions transmutation operators using generalized wavelets. Appl.Comput.Harmon.Anal.*,(4):97-112.

ÖZGEÇMİŞ

Güldane YILDIZ

guldaneyldz33@gmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2019-2021	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans 2015-2019	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya