T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

HİLBERT MATRİSLERİ VE HANKEL DETERMİNANTLARININ BAZI ÖZEL POLİNOM VE SAYILARI İLE İLİŞKİLERİ

Zehra Selin AŞKAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2020

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

HİLBERT MATRİSLERİ VE HANKEL DETERMİNANTLARININ BAZI ÖZEL POLİNOM VE SAYILARI İLE İLİŞKİLERİ

Zehra Selin AŞKAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2020

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT MATRİSLERİ VE HANKEL DETERMİNANTLARININ BAZI ÖZEL POLİNOM VE SAYILARI İLE İLİŞKİLERİ

Zehra Selin AŞKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez T.C. Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimi tarafindan FYL-2019-4927 nolu proje ile desteklenmiştir.

HAZİRAN 2020

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT MATRİSLERİ VE HANKEL DETERMİNANTLARININ BAZI ÖZEL POLİNOM VE SAYILARI İLE İLİŞKİLERİ

Zehra Selin AŞKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 15/06/2020 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜÇÜKOĞLU

ÖZET

HİLBERT MATRİSLERİ VE HANKEL DETERMİNANTLARININ BAZI ÖZEL POLİNOM VE SAYILARI İLE İLİŞKİLERİ

Zehra Selin AŞKAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Mayıs 2020, 38 sayfa

Bu tezde, Hilbert matrisleri ve Hankel determinantları ile bazı özel polinom ve sayı aileleri arasındaki ilişkiler çalışılmıştır. Bu matrisler ve determinatlar kullanılarak ilgili özel polinomların ve sayıların üreteç fonksiyonlarını içeren temel özellikleri araştırılmış ve bazı ortogonal polinomların birtakım özellikleri verilmiştir. Hilbert matrisleri ve Hankel determinantlarının bazı özellikleri yardımıyla bazı ortogonal polinomlar için rekürans formülleri de verilmiştir. Bazı özel ortogonal polinomlar ile Laplace dağılımı arasındaki ilişkiler araştırılmış ve bu dağılıma ait bazı önemli sonuçlar verilmiştir. Verilen sonuçlar ve bağıntılar yardımıyla, Laplace dağılımı ile Bernoulli sayıları, Bernoulli polinomları ve ikinci tür Euler sayılarını içeren özdeşlikler ve bağıntılar elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların, hem ortogonal polinomların temel teorisinde, hem de olasılık ve istatistik alanlarında uygulanma potansiyeli mevcuttur.

ANAHTAR KELİMELER: Bernoulli sayıları ve polinomları, ikinci tür Euler sayıları ve polinomları, Hankel determinantları, Hermite polinomları, Hilbert matrisleri, Laplace dağılımı, Momentler, Ortogonal polinomlar, Özel sayılar ve polinomlar.

JÜRİ: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜÇÜKOĞLU

ABSTRACT

RELATIONS OF THE HILBERT MATRICES AND THE HANKEL DETERMINANTS WITH SOME SPECIAL POLYNOMIALS AND NUMBERS

Zehra Selin AŞKAN

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
May 2020, 38 pages

In this thesis, relations of the Hilbert matrices and the Hankel determinants with some families of special polynomials and numbers have been studied. Using these matrices and determinants, the basic properties of the related special polynomials and numbers, including the generating functions, have been investigated and also some properties of some orthogonal polynomials have been given. Recurrence formulas are also given for some orthogonal polynomials with the help of some properties of the Hilbert matrices and the Hankel determinants. Relationships between some special orthogonal polynomials and Laplace distribution have been investigated and some important results of this distribution have been given. With the help of the given results and relations, identities and relations including Laplace distribution and Bernoulli numbers, Bernoulli polynomials and second type Euler numbers have been obtained. The results obtained in this thesis study have the potential to be applied both in the basic theory of orthogonal polynomials and in the fields of probability and statistics.

KEYWORDS: Bernoulli numbers and polynomials, Euler numbers and polynomials of the second kind, Hankel determinants, Hermite polynomials, Hilbert matrices, Laplace distribution, Moments, Orthogonal polynomials, Special numbers and polynomials.

COMMITTEE: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK
Prof.Dr. Mustafa ALKAN
Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜÇÜKOĞLU

ÖNSÖZ

Bu tezde, Hilbert matrisleri, Hankel determinantları, Laplace olasılık dağılım fonksiyonu ile bazı özel polinom ve sayı aileleri arasındaki ilişkiler çalışılmıştır. Ayrıca, özel olarak Bernoulli sayıları ve polinomları, ikinci tür Euler sayıları ve polinomları ve bunların üreteç fonksiyonlarını içeren bazı temel özellikleri incelenmiştir. Bu özel sayı ve polinom ailelerinin trigonometrik bağıntıları da incelenmiştir. Bu özel sayı ve polinom ailelerinin sayılar teorisi, analiz ve olasılık ve istatistik alanında kullanılan temel tanımları ve teoremleri de verilmiştir. Ortogonal polinomlar için de bazı tanımlar, bağıntılar, teoremler ve temel rekürans formülleri incelenmiştir. Ayrıca Hilbert matrisleri ve Hankel determinantlarının bazı özellikleri verilmiştir. Hilbert matrisleri ve Hankel determinantları ile ortogonal polinomlar arasındaki ilişkiler de ayrıntılı olarak verilmiştir. Bunlara ek olarak, ortogonal polinomların rekürans formülleri kullanılarak, bazı özel polinomların özellikle Hermite polinomlarının rekürans bağıntısı elde edilmiştir. Bu polinomlar için ortogonallik katsayıları, momentler ve diğer olasılık ve istatistik bağıntıları arasındaki ilişkiler de elde edilmiştir. Dahası, momentler ve monik ortogonal polinomlar arasındaki ilişkiler de verilmiştir. Laplace olasılık dağılımı ve bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla özel sayı ve polinomları içeren bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Literatürde en yaygın olarak kullanılan ortogonal polinomlar, Jacobi polinomları, Laguerre polinomları, Hermite polinomları ve bunların özel durumları olan diğer ortogonal polinom aileleridir. Bunlardan bazıları Gegenbauer polinomları, Chebyshev polinomları ve Legendre polinomlarıdır. Son yıllarda yoğun olarak çalışılan diğer ortogonal polinom ailelerine örnek olarak Jacobi polinomlarının genelleştirmesi olan Wilson polinomları, Meixner–Pollaczek polinomları, Hahn polinomları gibi ortogonal polinom aileleri verilebilir. Bu polinom aileleri teker teker özel olarak incelendiğinde her biri bir uzmanlık alanı gerektirmektedir. Her biri için yüzlerce kaynak, tez ve uygulama literatürde mevcuttur. Bu tezde, bu ortogonal polinom ailelerinden bir kaçı özel olarak incelenmiştir. Bu tezdeki sonuçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

Bu tez, Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma olmak üzere dört ana bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, ortogonal polinomlar, Hilbert matrisleri ve Hankel determinantların önemi ve tarihçesi hakkında kısa bir bilgi verilmiştir ve bunlar ile ilgili yapılan literatür araştırması verilmiştir. Ardından, tez çalışmasının kapsamı kısaca açıklanmıştır.

Kaynak Taraması bölümünde, bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonkiyonları ve özellikleri kaynak taraması ile birlikte verilmiştir. Ayrıca, bu tezde kullanılan bazı trigonometrik bağıntılar, olasılık ve istatistik alanında kullanılan temel tanımlar, teoremler ve formüller verilmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde, ortogonal polinomların temel teorisi ve bazı temel özellikleri verilmiştir. Moment fonksiyonel kavramı, ortogonal polinom dizisi, Hankel determinatı kavramlarının tanımı verilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, Laplace dağılımını içeren bazı temel kavramlar ve tanımlar verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde, monik ortogonal polinom sistemi kullanılarak Hermite polinomlarının rekürans formülü verilmiştir. Ayrıca, Laplace dağılımı ve karakteristik fonksiyon yardımıyla, Bernoulli sayıları, Bernoulli polinomları ve ikinci tür Euler sayılarını içeren bağıntılar ve özdeşlikler elde edilmiştir.

Tezin diğer bölümleri Sonuç, Kaynaklar ve Özgeçmiş ile bitmektedir.

Bu tez çalışması boyunca bilgisini ve desteğini esirgemeyen sayın danışmanım Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e teşekkür ederim ve saygılarımı sunarım. Ayrıca eğitim hayatım boyunca her zaman yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
AKADEMİK BEYAN vi
SİMGELER VE KISALTMALAR vii
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK TARAMASI 4
2.1. Bazı Özel Sayılar, Özel Polinomlar ve Bunların Üreteç Fonksiyonları . . . 4
2.2. Bazı Trigonometrik Bağıntılar 7
2.3. Olasılık ve İstatistik Alanında Kullanılan Bazı Temel Bağıntılar 8
3. MATERYAL VE METOT 10
3.1. Ortogonal Polinomların Temel Teorisi 10
3.2. Moment Fonksiyoneller ve Ortogonallik 11
3.3. Ortogonal Polinom Dizisinin Varlığı ve Hankel Determinantları 13
3.4. Momentler ve Ortogonal Monik Polinomlar Arasındaki Bazı İlişkiler . . . 17
3.5. Laplace Dağılımı 17
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 19
4.1. Temel Rekürans Formülü 19
4.2. Laplace Dağılımı Yardımıyla Elde Edilen Bazı Özdeşlikler 26
5. SONUÇLAR 33
6. KAYNAKLAR 34
ÖZGEÇMİŞ

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "HİLBERT MATRİSLERİ VE HANKEL DETERMİNANTLARININ BAZI ÖZEL POLİNOM VE SAYILARI İLE İLİŞKİLERİ" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

15/06/2020

Zehra Selin AŞKAN

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{C}$	: Karmaşık Sayılar
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar
$B_n(x)$	: Bernoulli polinomları
B_n	: Bernoulli sayıları
$E_n(x)$	: İkinci tür Euler polinomları
E_n	: İkinci tür Euler sayıları
$H_n(x)$	: Hermite polinomları
$\Gamma(x)$	: Gama fonksiyonu
$f(x;\theta,s)$	: Klasik Laplace dağılımı
$f(x;0,1)$	: Standart klasik Laplace dağılımı
δ_{mn}	: Kronecker delta fonksiyonu
$L[f]$	: f fonksiyonunun L moment fonksiyoneli
$[x]$	: Tam değer fonksiyonu

1. GİRİŞ

Ortogonal polinomlar konusunun, Legendre'nin gezegensel hareket konusundaki çalışmalarına kadar dayandığı bilinmektedir. Fakat ortogonal polinomlar ailesinin 19. yüzyılın sonlarında ilk olarak P. L. Chebyshev'in sürekli kesirler üzerindeki çalışmalarıyla ortaya çıktığı görülmüştür. Bu çalışmanın sonrasında, ortogonal polinomlar üzerindeki ilgi artmış ve başta A. A. Markov, T. J. Stieltjes olmak üzere Gábor Szegő, Sergei Bernstein, Naum Akhiezer, Arthur Erdélyi, Yakov Geronimus, Wolfgang Hahn, Theodore Seio Chihara, Mourad Ismail, Waleed Al-Salam ve Richard Askey gibi pek çok matematikçi ve daha birçok araştırmacı bu alanda çalışmıştır.

Ortogonal polinomlar ile ilgili çalışmaların 1990 yılından itibaren artması ve birçok bilim insanına çalışma alanı olması, kısmen Louis de Branges'in Jacobi polinomları üzerinde Askey ve Gasper eşitsizliğini kullanan Bieberbach varsayımı çözümüne bağlıdır. Temel nedenleri ise Pade yaklaşımları, sürekli kesirler, Tauber teoremleri, sayısal analiz, olasılık teorisi, matematiksel istatistik, saçılma teorisi, nükleer fizik, katı hal fiziği, dijital sinyal işleme, elektrik mühendisliği, teorik kimya gibi alanlarda geniş uygulanabilirliklerinde yatmaktadır. Yapılan çalışmalar ile ortogonal polinomların bazı önemli özellikleri araştırılmış ve ortogonal polinomların genel teorisi geliştirilmiştir. Ortogonal polinomları içeren bazı kaynaklar kısaca şu şekilde verilebilir: (Szegő 1939), (Erdélyi 1953), (Askey 1975), (Chihara 1978), (Al-Salam 1990), (Gautschi 2004), (Ismail 2005).

Bu tezde ortogonal polinomların temel teorisi ve bu temel teori kullanılarak elde edilen rekürans formülleri incelenmiştir. Hankel determinantlarının bazı özel polinom ve sayılarla ilişkileri verilmiştir. Hilbert matrisleri ve Hankel determinantlarının bazı özellikleri incelenmiş ve ortogonal polinomlar ile arasındaki ilişkiler verilmiştir. Bernoulli sayıları ve polinomlarının, ikinci tür Euler sayıları ve polinomlarının üreteç fonksiyonları ve bunların bazı özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca, olasılık ve istatistik alanında kullanılan bazı temel bağıntılar ve trigonometrik bağıntılar incelenip Laplace dağılımı ele alınmıştır. Laplace dağılımı ve bazı temel bağıntılar kullanılarak, bu tez çalışmasında kullanılan ve elde edilen sonuçlar Bernoulli sayıları, Bernoulli polinomları ve ikinci tür Euler sayıları ile ilişkilendirilmiştir.

Hankel matrisi ve Hankel dönüşümü Hermann Hankel ile tanınır. Hermann Hankel, 14 Şubat 1839'da Halle, Almanya'da doğmuştur. Karmaşık sayılar teorisi, fonksiyonlar teorisi ve matematik tarihi üzerinde çalışan bir Alman matematikçidir. Möbius, Riemann, Weierstrass ve Kronecker beraber çalışmalar yaptığı matematikçilerdendir. Erlangen ve Tübingen'de yaptığı çalışmalarda silindirik fonksiyonlar teorisi üzerine bir dizi formül üretmiştir. Aritmetiğin temelleri üzerine yaptığı araştırmalar, kuaterniyonlar teorisinin ve genel hiper-kompleks sayı sistemlerinin geliştirilmesini desteklemiştir. Ayrıca, 1868 yılında Alfred Clebsch ve Carl Neumann tarafından kurulan bir Alman matematik araştırma dergisi olan *Mathematische Annalen*'de ortaya çıkan bir dizi makaleye göre, Hankel fonksiyonları veya üçüncü tür Bessel fonksiyonları olarak bilinen fonksiyonlar üzerinde de çalışmalar yapmıştır. Hermann Hankel 29 Ağustos 1873'te Almanya'nın Schramberg şehrinde vefat etmiştir.

Hilbert matrisi ise David Hilbert (1894) ile tanınır. Hilbert başta matematiğin temelleri olmak üzere invaryant teori, varyasyon hesabı, değişmeli cebir, cebirsel sayı teorisi, geometrinin temelleri, operatörlerin spektral teorisi ve integral denklemlere uygulanması, matematiksel fizik gibi daha birçok alanda çalışmalara sahiptir. Ayrıca Hilbert, ispat teorisi ve matematiksel mantığın kurucularından biri olarak bilinir. Hilbert matrisi, matematiğin çeşitli dallarının özellikle operatör teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. Hilbert matrisi simetrik ve pozitif tanımlı olmak üzere Hankel matrisine bir örnektir. Hilbert matrisinin determinantı Stirling'in faktöriyel yaklaşımı kullanılarak, asimptotik olarak hesaplanabilir. Ayrıca, bu matrisin tersi binom katsayıları kullanılarak kapalı formda ifade edilebilir.

Hilbert, Hilbert matrisini yaklaşım teorisinde karşılaştığı aşağıdaki soru üzerine ortaya koymuştur:

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki integrali tanımlayalım:

$$\int_a^b P(x)^2 dx.$$

Bu durumda sıfırdan farklı bir $P(x)$ polinomu bulmak mümkün müdür? Bu integral keyfi olarak alınan herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısından daha küçük olacak şekilde midir?

Hilbert, Hilbert matrislerinin determinantı için kesin bir formül elde eder ve araştırmalar yapar. Bu araştırmalar neticesinde Hilbert, integrasyon aralığının uzunluğu olan $b - a$ uzunluğunun 4 sayısından küçük olması durumunda bahsi geçen sorunun cevabının olumlu olduğu sonucuna varır.

Hilbert matrisleri ve Hankel determinantları matematiğin pek çok alanında yaygın olarak kullanılmaktadır ve bu konuda pek çok matematikçi tarafından birbirinden değerli eserler verilmiştir. Bu matrisler ve determinantlar için bu tezde kullanılan bazı önemli kaynaklar ve yayınlar kısaca şu şekilde verilebilir: Cigler'in "*Some nice Hankel determinants* (2011)" ve "*How to guess and prove explicit formulas for some Hankel determinants* (2013)" makaleleri bu tez için önemli referanslar arasındadır. Bu makalelerde bazı özel ortogonal polinomların Hankel determinantları bazı özel sayılar ile ilişkilendirilmiştir ve bazı bağıntılar, teoremler ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Choi'nin "*Tricks or Treats with the Hilbert Matrix* (1983)" makalesinde Hilbert matrislerinin on temel özelliği verilmiştir ve bu özellikler bazı problemler ile de detaylandırılarak tek tek çözümlendirilmiştir. Bu sebeple bu tez için önemli makalelerden birisidir. Sadjang'ın "*Moments of classical orthogonal polynomials* (2013)" tezinde Hermite polinomlarının momentlerinin genelleştirilmiş hali verilmiştir. Bu genelleştirilmiş haldeki momentler yardımıyla Hankel determinantları ve Hermite polinomları için Zhang ve Chen tarafından verilen "*Matrix inversion using orthogonal polynomials* (2011)" makale de bu tez için önemli makalelerden birisidir. Bu makalede bulgular ve tartışma bölümünde çalışılan Hermite polinomlarının genelleştirilmiş formdaki momentleri matris formunda yazılarak bu momentlerin Hankel determinantları Barnes G-fonksiyonları kullanılarak hesaplanmıştır.

Ayrıca bu tezde Laplace dağılımı için önemli bağıntı ve sonuçlar araştırılırken Kim'in "*Identities of symmetry for type 2 Bernoulli and Euler polynomials* (2019)" makalesi oldukça fayda sağlamıştır.

Bu tez çalışmasında kullanılan ve elde edilen sonuçların matematik, fizik, matematiksel fizik, olasılık ve istatistik teorisi gibi birçok alanda kullanılma potansiyeli vardır.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde tezde kullanılacak olan temel tanımlar, formüller ve bağıntılar verilecektir.

2.1. Bazı Özel Sayılar, Özel Polinomlar ve Bunların Üreteç Fonksiyonları

Bu bölümde bazı özel sayı ve polinom aileleri verilecektir. Bunların üreteç fonksiyonları yardımıyla bu özel sayı ve polinom aileleri için bazı özellikler verilecektir. Ayrıca bu bölümde, Bernoulli sayılarının ve polinomlarının, ikinci tür Euler sayılarının ve polinomlarının ve Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonları ve bunların bazı temel özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1. *$|t| < 2\pi$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, Bernoulli polinomları $B_n(x)$, aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$\frac{t}{e^t-1}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{2.1}$$

(Erdelyi 1953; Carlitz 1968; Abramowitz ve Stegun 1970; Rademacher 1973; Apostol 1976).

(2.1) bağıntısında $x = 0$ ya da $x = 1$ alınırsa,

$$B_n(0) = B_n$$

ya da

$$B_n(1) = B_n$$

elde edilir. Yani, Bernoulli sayıları B_n, aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!} \tag{2.2}$$

(Erdelyi 1953; Carlitz 1968; Abramowitz ve Stegun 1970; Rademacher 1973; Apostol 1976).

(2.1) ve (2.2) bağıntıları ve e^{xt} fonksiyonun Taylor serisi yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Seriler için Cauchy çarpımı formülü yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin her iki tarafında bulunan $\frac{t^n}{n!}$ teriminin katsayıları eşitlenirse, Bernoulli sayıları ile Bernoulli polinomları arasındaki çok iyi bilinen aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k} \tag{2.3}$$

(Erdelyi 1953; Carlitz 1968; Rademacher 1973; Apostol 1976).

(2.3) bağıntısı kullanılarak, birkaç tane Bernoulli polinomu aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \ldots \end{aligned}$$

(2.2) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak, $B_0 = 1$ olmak üzere $n > 1$ için,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k \tag{2.4}$$

olur (Erdelyi 1953; Carlitz 1968; Rademacher 1973; Apostol 1976).(2.4) bağıntısı kullanılarak, birkaç tane Bernoulli sayısı aşağıdaki gibi verilir:

$$B_0 = 1,\ \ B_1 = -\frac{1}{2},\ \ B_2 = \frac{1}{6},\ \ B_3 = 0,\ \ B_4 = -\frac{1}{30},\ \ B_5 = 0, \ldots$$

Burada, $k \geqslant 1$ için

$$B_{2k+1} = 0$$

olur (Erdelyi 1953; Carlitz 1968; Rademacher 1973; Apostol 1976).

(2.1) ve (2.2) bağıntıları kullanılarak,

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = (2^{1-n} - 1)B_n \tag{2.5}$$

elde edilir (Rademacher 1973; Natalini 2003).

Tanım 2.2. *$|t| < \frac{\pi}{2}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, ikinci tür Euler polinomları $E_n(x)$, aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$\frac{2}{e^t + e^{-t}} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{2.6}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Rademacher 1973).

(2.6) bağıntısının sol tarafındaki

$$\frac{2}{e^t + e^{-t}}$$

fonksiyonu ile $\operatorname{sech}(t)$ fonksiyonu arasındaki ilişkiden dolayı, ikinci tür Euler polinomları için aşağıdaki üreteç fonksiyonu da verilebilir:

$$e^{xt} \operatorname{sech}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

(2.6) bağıntısında $x = 0$ alınırsa,

$$E_n(0) = E_n$$

elde edilir. Yani, ikinci tür Euler sayıları E_n, aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\frac{2}{e^t + e^{-t}} = \operatorname{sech}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}, \tag{2.7}$$

(Abramowitz ve Stegun 1970; Rademacher 1973; Simsek 2010; Kim 2008; Kim vd. 2019).

(2.7) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak,

$$E_{2n} = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k} E_{2k} \tag{2.8}$$

elde edilir (Simsek 2010; Kim 2008).

(2.8) bağıntısı kullanılarak, birkaç tane ikinci tür Euler sayısı aşağıdaki gibi verilir:

$$E_0 = 1, \;\; E_1 = 0, \;\; E_2 = -1, \;\; E_3 = 0, \;\; E_4 = 5, \;\; E_5 = 0, \ldots$$

Burada, $k \geqslant 1$ için

$$E_{2k+1} = 0$$

olur (Simsek 2010; Kim 2008).

Tanım 2.3. *Hermite polinomları $H_n(x)$, aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:*

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{2.9}$$

(Rainville 1960; Lebedev 1965; Roman 1984).

(2.9) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak,

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \tag{2.10}$$

elde edilir (Rainville 1960; Lebedev 1965; Roman 1984).

(2.10) bağıntısı kullanılarak, birkaç tane Hermite polinomu aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x, \ldots \end{aligned}$$

2.2. Bazı Trigonometrik Bağıntılar

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan bazı trigonometrik bağıntılar ve ilgili trigonometrik fonksiyonların sonsuz çarpım formülleri verilecektir.

$\sinh(z)$ fonksiyonun sonsuz çarpım formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$\sinh(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{z}{n\pi}\right)^2\right), \tag{2.11}$$

(Conway 1978).

$\cos(z)$ fonksiyonun sonsuz çarpım formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$\cos(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{2z}{(2n-1)\pi}\right)^2\right), \tag{2.12}$$

(Conway 1978).

$\sin(z)$ fonksiyonun sonsuz çarpım formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$\sin(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{n\pi}\right)^2\right), \tag{2.13}$$

(Conway 1978).

2.3. Olasılık ve İstatistik Alanında Kullanılan Bazı Temel Bağıntılar

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan sürekli rasgele değişken, karakteristik fonksiyon, k-ıncı mertebeden moment, moment çıkaran fonksiyon gibi olasılık ve istatistik alanında sıklıkla kullanılan bazı temel kavramların tanımları verilecek ve bunların bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.4. *X bir rasgele değişken olsun. X bir aralıkta ya da birden çok aralıkta her değeri alabiliyorsa, X rasgele değişkenine sürekli rasgele değişken denir (DeGroot ve Schervish 2012; Akdeniz 2016).*

Tanım 2.5. *X, $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanan sürekli rasgele değişken olmak üzere*

i) $f(x) \geq 0$,

ii) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

koşullarını sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir (Lukacs 1970; DeGroot ve Schervish 2012; Akdeniz 2016).

Tanım 2.6. *X, $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rasgele değişken ve $x \in (-\infty, \infty)$ olsun. X sürekli rasgele değişkeninin beklenen değeri veya ortalaması $E[X]$ ile gösterilir ve*

$$E[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

şeklinde tanımlanır (Lukacs 1970; DeGroot ve Schervish 2012; Akdeniz 2016).

Tanım 2.7. *X sürekli rasgele değişken ve X sürekli rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ise, bu olasılık yoğunluk fonksiyonun karakterisik fonksiyonu,*

$$\phi_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanır (Lukacs 1970; DeGroot ve Schervish 2012; Akdeniz 2016).

Tanım 2.8. *$g(X) = X^k$ fonksiyonunun beklenen değerine X rasgele değişkeninin sıfıra göre k-ıncı momenti denir ve bu moment*

$$m_k = E[X^k]$$

şeklinde gösterilir (Lukacs 1970; DeGroot ve Schervish 2012; Akdeniz 2016). $X,\ f(x)$ *olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rasgele değişken olmak üzere,* k*-ıncı mertebeden moment*

$$m_k = E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

şeklinde tanımlanır (Lukacs 1970; DeGroot ve Schervish 2012; Akdeniz 2016).

Tanım 2.9. $X,\ f(x)$ *olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rasgele değişken olmak üzere X sürekli rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu*

$$m_x(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanır (Lukacs 1970; DeGroot ve Schervish 2012; Akdeniz 2016).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, bu tez çalışmasında kullanılan bazı temel tanımlar, teoremler ve formüller hakkında bilgiler verilecektir. Ayrıca, bu tezde uygulanan metotlar ile ilgili temel özellikler verilecektir.

3.1. Ortogonal Polinomların Temel Teorisi

Bu bölümde, ortogonal polinomların temel teorisi hakkında kısa bilgiler ve bu teoriyi içeren bazı temel tanımlar ve bağıntılar verilecektir.

Tanım 3.10. $w(x)$, (a, b) *aralığı üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ve herhangi bir ortogonal polinom sisteminin ağırlık fonksiyonu olsun.* $\forall\ x\epsilon(a, b)$ *için,*

$$w(x) > 0$$

ve buna bağlı olarak

$$\int_a^b w(x)dx > 0 \tag{3.1}$$

olur (Lebedev 1965; Chihara 1978; Ismail 2005).

Tanım 3.11. $n \in \mathbb{N}_0$ *olsun.* $w(x)$ *ağırlık fonksiyonunun momenti* μ_n,

$$\mu_n = \int_a^b x^n w(x)dx, \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır (Lebedev 1965; Chihara 1978; Ismail 2005).

Tanım 3.12. *Terimleri* n. *mertebeden polinomlar olan* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *dizisi verilmiş olsun. Eğer*

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)w(x)dx = 0, \qquad m \neq n \tag{3.3}$$

eşitliği sağlanıyor ise, $\{P_n(x)\}$ *dizisine* (a, b) *aralığında* $w(x)$ *ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal polinom dizisi denir (Lebedev 1965; Chihara 1978; Ismail 2005).*

Tanım 3.13. f *integrallenebilir bir fonksiyonu olsun.* f *fonksiyonun* L *moment fonksiyoneli,*

$$L[f] = \int_a^b f(x)w(x)dx \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $w(x)$ fonksiyonu L moment fonksiyonelinin ağırlık fonksiyonudur ve $n \in \mathbb{N}_0$, $m \neq n$ olmak üzere, (3.2), (3.3) ve (3.4) bağıntılarından

$$L[x^n] = \mu_n, \tag{3.5}$$

$$L[P_m(x)P_n(x)] = 0 \tag{3.6}$$

şeklinde yazılır (Chihara 1978).

Burada L moment fonksiyoneli, lineer bir operatördür.

Yani, her a, $b \in \mathbb{R}$ ve integrallenebilir $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için

$$L[af(x) + bg(x)] = aL[f(x)] + bL[g(x)] \tag{3.7}$$

eşitliği sağlanır. O halde (3.5) ve (3.7) bağıntılarından,

$$L\left[\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right] = \sum_{k=0}^{n} c_k\, \mu_k$$

elde edilir (Chihara 1978).

Sonuç olarak, L lineer operatörü tek değişkenli polinomların oluşturduğu vektör uzayı üzerinde bir lineer fonksiyoneldir.

Tanım 3.14. *$\{P_n(x)\}$, (3.6) bağıntısını sağlayan bir polinomlar dizisi olsun. Ayrıca, bu polinom dizisi*

$$L[P_n^2(x)] \neq 0$$

koşulunu da sağlıyor ise, $\{P_n(x)\}$ dizisine, L fonksiyoneline göre ortogonal polinom dizisi denir (Chihara 1978).

3.2. Moment Fonksiyoneller ve Ortogonallik

Tanım 3.15. *$n \in \mathbb{N}_0$, $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ kompleks sayıların bir dizisi ve L, (3.5) ile verilen bağıntıdaki tek değişkenli polinomların oluşturduğu vektör uzayı üzerinde kompleks değerli bir fonksiyon olarak tanımlı olsun. $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$ ve $\pi_i(x)$ polinomlar olmak üzere (3.4), (3.5), ve (3.7) bağıntılarından*

$$L[\alpha_1\pi_1(x) + \alpha_2\pi_2(x)] = \alpha_1 L[\pi_1(x)] + \alpha_2 L[\pi_2(x)]$$

olduğu görülür. Bu durumda L'ye moment fonksiyonel denir ve (3.5) bağıntısındaki μ_n sayısı ise n. dereceden moment olarak adlandırılır (Chihara 1978).

Tanım 3.16. *$\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ ve $m \neq n$ için $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi,*

i) $P_n(x)$ n. dereceden bir polinomdur

ii) $L[P_m(x)P_n(x)] = 0$

iii) $L[P_n^2(x)] \neq 0$

koşullarını sağlayan bir dizi ise bu diziye bir L moment fonksiyoneline göre ortogonal polinom dizisidir denir (Chihara 1978).

$\{P_n(x)\}$ dizisi, L moment fonksiyoneline göre ortogonal polinom dizisi ise ve buna ilaveten $n \geq 0$ için

$$L[P_n^2(x)] = 1$$

ise $\{P_n(x)\}$, ortonormal polinom dizisi olarak adlandırılır. O halde $P_n(x)$ polinomu, n. dereceden bir polinom ve $m, n \in \mathbb{N}_0$ için

$$L[P_m(x)P_n(x)] = \delta_{mn}$$

ise, $\{P_n(x)\}$ bir ortonormal polinom dizisidir. Burada, δ_{mn} Kronecker delta fonksiyonunu göstermektedir ve

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ 1 & , \quad m = n \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Genel olarak, K_n ortogonallik katsayısı olmak üzere, Tanım 3.16 tanımının ii) ve iii) koşulları kullanılarak

$$L[P_m(x)P_n(x)] = K_n\delta_{mn}, \quad K_n \neq 0$$

eşitliği yazılabilir.

Yine, Tanım 3.16 tanımının ii) ve iii) koşulları kullanılarak

$$\mu_0 \neq 0 \qquad P_0(x) \neq 0$$

elde edilir (Chihara 1978).

Teorem 3.17. *$m \in \mathbb{N}_0$ ve $m = 0, 1, ..., n$ olsun. L moment fonksiyonel ve $\{P_n(x)\}$ bir polinom dizisi olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

a) $\{P_n(x)\}$, L moment fonksiyoneline göre ortogonal polinom dizisidir.

b) $\forall \pi(x)$ *polinomu için*

$$d(\pi(x)) = m < n$$

olmak üzere

$$L[\pi(x)P_n(x)] = 0$$

dır. Diğer durumda yani; $m = n$ *ise*

$$L[\pi(x)P_n(x)] \neq 0$$

dır.

c) $K_n \neq 0$ *olmak üzere*

$$L[x^m P_n(x)] = K_n \delta_{mn}$$

dir (Chihara 1978).

Teorem 3.18. $n \in \mathbb{N}_0$ *ve* $k = 0, 1, ..., n$ *olsun.* $\{P_n(x)\}$, L *moment fonksiyoneline göre ortogonal polinom sistemi olsun.* n. *dereceden her* $\pi(x)$ *polinomu için,*

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$$

olmak üzere

$$c_k = \frac{L[\pi(x)P_k(x)]}{L[P_k^2(x)]},$$

dır (Chihara 1978).

$\{P_n(x)\}$ bir ortogonal polinom sistemi ve k_n, $P_n(x)$ polinomunun başkatsayısı olmak üzere,

$$\hat{P}_n(x) = k_n^{-1} P_n(x) \tag{3.8}$$

dir. Burada $\{\hat{P}_n(x)\}$ monik ortogonal polinom sistemi olur.

3.3. Ortogonal Polinom Dizisinin Varlığı ve Hankel Determinantları

Bu bölümde, Hankel matrisi, Hilbert matrisi ve Hankel determinantının tanımları verilecek ve ortogonal polinom dizisinin varlığı ve Hankel determinantları ile arasındaki ilişkilerden bahsedilecektir.

Tanım 3.19. $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *dizisine karşılık gelen* $n \times n$ *tipindeki bir Hankel matrisi aşağıdaki şekilde verilir:*

$$H_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n-4} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & a_{2n-4} & a_{2n-3} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_{2n-4} & a_{2n-3} & a_{2n-2} \end{bmatrix},$$

(Partington 1988). Örnek olarak genel terimi

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

olan dizi ele alınırsa bu durumda ortaya çıkan Hankel matrisi aşağıdaki şekilde verilir:

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2n-3} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2n-3} & \frac{1}{2n-2} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-3} & \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Bu matris özel olarak Hilbert matrisi olarak adlandırılır (Choi 1983).

Şimdi bir diziye karşılık gelen Hankel determinantlarının tanımı verelim:

Tanım 3.20. $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *dizisinin* k. *mertebeden Hankel determinantları*

$$d_k(n) = \det\{a_{i+j+k}\}_{i,j=0}^{n-1} \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlanır (Cigler 2011).

Sonuç 3.21. *(3.9) matrisinin Hankel determinantını* h_n *ile gösterirsek,*

$$\frac{1}{h_n} = n! \prod_{i=1}^{2n-1} \binom{i}{\left[\frac{i}{2}\right]}$$

olduğu görülür (Yuan 2012).

Teorem 3.22. $\{\mu_{i+j}\}_{i,j=0}^{n}$ *momentler dizisinin determinantları aşağıdaki şekilde verilir:*

$$\Delta_n = \det\{\mu_{i+j}\}_{i,j=0}^{n} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix} \tag{3.11}$$

Bu determinant ortogonal polinom dizisinin varlığı ve Hankel determinantları ile ilişkilendirilir (Chihara 1978).

(3.10) tanımında $\{a_n\}$ dizisi olarak n. dereceden moment dizisi alıp, 0. mertebeden Hankel determinantlarında n yerine $n+1$ yazılırsa, bu determinantın (3.11) determinantına eş değer olduğu görülür.

Teorem 3.23. $\{\mu_n\}$ *moment dizisi ile* L *bir moment fonksiyoneli olsun.* $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere* L *için bir ortogonal polinom dizisinin varlığı için gerekli ve yeterli koşul*

$$\Delta_n \neq 0$$

olmasıdır (Chihara 1978).

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} x^k \tag{3.12}$$

ve $m \leq n$ olmak üzere, Tanım 3.15 kullanılarak

$$\begin{aligned} L\left[x^m P_n(x)\right] &= L\left[\sum_{k=0}^{n} c_{nk} x^{m+k}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_{nk} L[x^{m+k}] \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_{nk} \mu_{m+k} \\ &= K_n \delta_{mn}, \quad K_n \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani;

$$L[x^m P_n(x)] = K_n \delta_{mn} \tag{3.13}$$

dir. Buradan

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} \\ \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \cdots & \mu_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ c_{n2} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

sistemi elde edilir. O halde L moment fonksiyoneline göre bir ortogonal polinom sistemi var ise, (3.13) bağıntısındaki K_n katsayıları tek türlü belirlidir. Dolayısıyla, (3.14) bağıntısının tek bir çözüme sahip olması için $\Delta_n \neq 0$, $(n \geq 0)$ olmalıdır.

Aksine, $\Delta_n \neq 0$ ise $K_n \neq 0$ sabitleri için , (3.14) tek çözüme sahiptir, böylece $P_n(x)$ polinomlarını karşılayan (3.13) eşitliği vardır. Buradan $n \geq 1$ için

$$c_{nn} = \frac{K_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \neq 0 \tag{3.15}$$

olur ve $n = 0$ için

$$\Delta_{-1} = 1$$

olarak tanımlanır.

Sonuç olarak, yukarıdaki koşullar altında, $P_n(x)$, n. dereceden bir polinom olmak üzere, $\{P_n(x)\}$, L ye göre ortogonal polinom sistemidir denir.

Tanım 3.24. *L bir moment fonksiyonel ve $x \in \mathbb{R}^+$ olsun. Her x için $\pi(x)$ polinomu $L[\pi(x)] > 0$ koşulunu sağlıyor ise L ye pozitif tanımlıdır denir.*

Teorem 3.25. *L pozitif tanımlı olsun. O halde L nin momentleri reeldir. Yani uygun ortogonal polinom sistemi reel polinomlardan oluşur.*

Teorem 3.26. *$n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, L fonksiyonelinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul momentlerinin hepsinin reel ve*

$$\Delta_n > 0$$

olmasıdır.

Teorem 3.27. *$n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, L fonksiyonelinin quasi-tanımlı olması için gerek ve yeter koşul*

$$\Delta_n \neq 0$$

olmasıdır.

3.4. Momentler ve Ortogonal Monik Polinomlar Arasındaki Bazı İlişkiler

Bu bölümde, momentler ve ortogonal monik polinomlar arasındaki bazı ilişkiler verilecektir.

Teorem 3.28. *m, $n \in \mathbb{N}_0$ için monik polinom aileleri $d\alpha(x)$ ölçümüne göre ortogonaldir. Yani,*

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)d\alpha(x) = k_n\delta_{mn}. \tag{3.16}$$

Ayrıca, momentler

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\alpha(x) \tag{3.17}$$

olmak üzere, $P_n(x)$ polinomu

$$P_n(x) = \frac{1}{d_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix} \tag{3.18}$$

olarak verilir. Burada

$$d_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.19}$$

dır (Sadjang 2013).

3.5. Laplace Dağılımı

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılan Laplace dağılımını içeren bazı temel kavramlar ve tanımlar verilecektir.

Tanım 3.29. *$x, \theta \in \mathbb{R}$ ve $s \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ olsun. Laplace dağılımı, θ ve s parametrelerine bağlı olarak*

$$f(x;\theta,s) = \frac{1}{2s}e^{-|x-\theta|/s} \tag{3.20}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu ile tanımlanır. Burada θ ve s sırasıyla konum ve ölçek parametreleridir (Johnson 1995; Kotz vd. 2001a,b).

Şimdi bu dağılımın bazı özel durumlarını inceleyelim. Eğer (3.20) bağıntısında verilen denklemde $\theta = 0$ ve $s = 1$ alınırsa,

$$f(x; 0, 1) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

elde edilir ki elde edilen bu fonksiyon Laplace dağılımının standart forma indirgenmiş halinin olasılık yoğunluk fonksiyonudur (Johnson 1995; Kotz vd. 2001a,b).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, tez çalışmasında elde edilen tüm sonuçlar verilmiştir.

4.1. Temel Rekürans Formülü

Bu bölümde, monik ortogonal polinom sistemi kullanılarak, Hermite polinomlarının rekürans formülü verilmiştir.

Teorem 4.30. *$\{P_n(x)\}$, L quasi tanımlı moment fonksiyoneline göre monik ortogonal polinom sistemi olsun. O halde $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, c_n ve $\lambda_n \neq 0$ sabitleri vardır öyle ki*

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x) \tag{4.1}$$

eşitliği sağlanır. Burada,

$$P_{-1}(x) = 0$$

olarak alınabilir. Dahası, L pozitif tanımlı ise c_n reel ve

$$\lambda_{n+1} > 0$$

dır (Chihara 1978).

Teorem 4.31. *(4.1) rekürans formülünü dikkate alarak, $n \geq 1$ için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:*

a)

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \frac{L[P_n^2(x)]}{L[P_{n-1}^2(x)]} \\ &= \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2} \end{aligned}$$

dır.

b) $\lambda_1 = \mu_0 = \Delta_0$ alınır ise,

$$L[P_n^2(x)] = \lambda_1\lambda_2...\lambda_{n+1}$$

dır.

c)

$$c_n = \frac{L[xP_{n-1}^2(x)]}{L[P_{n-1}^2(x)]} \tag{4.2}$$

dir.

d) $P_n(x)$ polinomunda x^{n-1} katsayısı $-(c_1 + c_2 + ... + c_n)$ dir (Chihara 1978).

$\{P_n(x)\}$ monik ortogonal polinom sistemi değil ise sağladığı rekürans formülü

$$P_{n+1}(x) = (A_n x - B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \tag{4.3}$$

şeklindedir. Burada

$$P_n(x) = k_n \hat{P}_n(x),$$

dir ve $\hat{P}_n(x)$ monik polinom olmak üzere, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$A_n = k_n^{-1} k_{n+1}, \tag{4.4}$$

$$B_n = -c_{n+1} k_n^{-1} k_{n+1}, \tag{4.5}$$

ve

$$C_n = \lambda_{n+1} k_{n-1}^{-1} k_{n+1} \tag{4.6}$$

dir. Burada, $k_{-1} = 1$, c_n ve λ_n Teorem 4.30 ile verilen rekürans bağıntısının terimleridir (Chihara 1978).

Örnek 4.32. *Hermite polinomlarının rekürans bağıntısını bulalım.*

Hermite polinomları $H_n(x)$, $(-\infty, \infty)$ aralığında

$$w(x) = e^{-x^2}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} \tag{4.7}$$

eşitliğini sağlar (Lebedev 1965). O halde iyi bilinen momentler formülünden

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx \tag{4.8}$$

olur. Buradan momentler aşağıdaki şekilde bulunurlar:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \sqrt{\pi}, \\ \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ \mu_3 &= 0, \\ \mu_4 &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \\ \mu_5 &= 0, \\ \mu_6 &= \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \\ \mu_7 &= 0, \ldots \end{aligned} \tag{4.9}$$

Yukarıdaki dizide de görüleceği gibi,

$$\mu_{2n+1} = 0 \tag{4.10}$$

dır. Bunlara ek olarak, momentler arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile şöyle verilir:

Teorem 4.33. $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere Hermite polinomlarının momentleri*

$$\mu_n = \frac{1+(-1)^n}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\pi}\frac{(2p)!}{2^{2p}p!} & , \quad n = 2p \\ 0 & , \quad n = 2p+1 \end{cases} \tag{4.11}$$

dir (Sadjang 2013). Burada Γ, gamma fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \tag{4.12}$$

ve $\mathrm{Re}(z) > 0$ *dır.* $n \in N_0$ *için* $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(1) = 0! = 1$ *ve* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ *dir (Srivastava ve Choi 2012)*

İspat (4.8) denkleminde $t = x^2$ değişken değiştirmesi yapalım. Ayrıca (4.12) kullanılırsa μ_n momentleri:

$$
\begin{aligned}
\mu_n &= \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^{0} x^n e^{-x^2} dx \\
&= \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx + (-1)^n \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx \\
&= \frac{1+(-1)^n}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-t} dt \\
&= \frac{1+(-1)^n}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

dir (Sadjang 2013). □

Ayrıca, Hermite polinomlarının momentleri (4.9) ve ortogonallik bağıntısı (4.7) kullanılarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \mu_0 \delta_{mn} \tag{4.13}$$

olarak yazılabilir. Şimdi verilen tanımlar, teoremler ve bağıntıları kullanarak Hermite polinomlarının rekürans bağıntısını elde edelim:

(2.10) ve (3.12) bağıntıları kullanılarak,

$n = 0$ için;

$$H_0(x) = c_{00} = 1$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta_0 = |\mu_0| = \left|\sqrt{\pi}\right| = \sqrt{\pi}$$

ve

$$\Delta_{-1} = 1$$

olduğundan,

$$c_{00} = \frac{K_0 \Delta_{-1}}{\Delta_0}$$

bağıntısında yerine yazılırsa

$$K_0 = \sqrt{\pi} = \mu_0 \tag{4.14}$$

olarak bulunur.

$n = 1$ için;

$$H_1(x) = c_{10} + c_{11}x = 2x$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$c_{11} = \frac{K_1\Delta_0}{\Delta_1}$$

bağıntısında yerine yazılırsa

$$K_1 = \sqrt{\pi} = \mu_0 = K_0$$

olarak bulunur.

$n = 2$ için;

$$\begin{aligned}
H_2(x) &= c_{20} + c_{21}x + c_{22}x^2 \\
&= 4x^2 - 2
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sqrt{\pi} & 0 & \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{\pi}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} & 0 & \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$c_{22} = \frac{K_2\Delta_1}{\Delta_2}$$

bağıntısında yerine yazılırsa

$$K_2 = 2\sqrt{\pi}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde hesaplama yapmaya devam edilirse,

$$\begin{aligned} K_3 &= 6\sqrt{\pi}, \\ K_4 &= 24\sqrt{\pi}, \\ K_5 &= 120\sqrt{\pi}, ... \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece Hermite polinomlarının ortogonallik katsayısı K_n ile momentleri arasındaki ilişki $n \geq 1$ için

$$K_n = nK_{n-1} \tag{4.15}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca, (3.8) bağıntısı kullanılarak,

$n = 0$ için;

$$\hat{P}_0(x) = k_0^{-1} P_0(x)$$

elde edilir. $P_0(x) = 1$ alınırsa, $k_0 = 1$ olarak bulunur.

$n = 1$ için;

$$\hat{P}_1(x) = k_1^{-1} P_1(x)$$

elde edilir. $P_1(x) = 2x$ alınırsa, $k_1 = 2$ olarak bulunur.

$n = 2$ için;

$$\hat{P}_2(x) = k_2^{-1} P_2(x)$$

elde edilir. $P_2(x) = 4x^2 - 2$ alınırsa, $k_2 = 4$ olarak bulunur. O halde

$$k_n = 2^n$$

olur. Buradan elde edilen bu son bağıntı (3.8) bağıntısı ile birleştirilirse

$$\hat{P}_n(x) = 2^{-n} P_n(x)$$

olarak bulunur.

(4.4) bağıntısı kullanılarak,

$$A_n = 2^{-n} 2^{n+1} = 2$$

elde edilir. (4.2) bağıntısı kullanılarak,

$n = 0$ için;

$$c_0 = \frac{L[xP_{-1}^2(x)]}{L[P_{-1}^2(x)]}$$

olur ve $P_{-1}(x) = 0$ ve $P_{-1}^2(x) \neq 0$ olduğundan

$$c_0 = 0$$

olarak bulunur.

$n = 1$ için;

$$c_1 = \frac{L[xP_0^2(x)]}{L[P_0^2(x)]}$$

olur ve buradan

$$c_1 = \frac{L[x]}{L[1]}$$

elde edilir. $\mu_1 = 0$ olduğundan

$$c_1 = 0$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\forall n$ için;

$$c_n = 0$$

olarak bulunur.

$P_{-1}(x) = 0$ ve λ_1 keyfi olduğundan $n \geq 1$ için (4.6) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} C_n &= \lambda_{n+1} k_{n-1}^{-1} k_{n+1} \\ &= 4\frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} C_1 &= 2, \\ C_2 &= 4, \\ C_3 &= 6, ... \end{aligned}$$

olduğundan $n \in \mathbb{N}$ için

$$C_{2n} = 2n$$

olarak bulunur.

O halde $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, Hermite polinomlarının rekürans bağıntısı

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

şeklinde elde edilir.

4.2. Laplace Dağılımı Yardımıyla Elde Edilen Bazı Özdeşlikler

Bu bölümde Laplace Dağılımı ve karakteristik fonksiyonu kavramları kullanılarak Bernoulli sayıları, Bernoulli polinomları ve ikinci tür Euler sayılarını içeren bağıntılar ve özdeşlikler elde edilmiştir.

(2.14) bağıntısı kullanılarak,

$$f(x;0,1) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonunun karakteristik fonksiyonu;

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{itx}e^{x}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} e^{itx}e^{-x}dx \qquad (4.16)\\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{itx+x}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} e^{itx-x}dx\\ &= \frac{1}{t^2+1}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Laplace dağılımı, (Feller 1966), (Kim 2019) ve (Uppuluri 1981) tarafından çalışılmış olup bu tezde referans olarak alınan çalışmalarında olduğu gibi, bağımsız rasgele değişkenlerin var olduğunu varsayarak başlayalım. $X_{1,}X_2, X_3, ...$ bağımsız rasgele değişkenlerinin Laplace dağılımının standart forma indirgenmiş haline sahip olduğunu varsayalım. O halde

$$H = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{k}$$

serisi yakınsaktır (Feller 1966). H rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu

$$\begin{aligned} E[e^{itH}] &= E\left[e^{it\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_K}{K}\right)}\right] \\ &= E\left[e^{it\left(\frac{X_1}{1}+\frac{X_2}{2}+\frac{X_3}{3}\dots\right)}\right] \\ &= E\left[e^{it\frac{X_1}{1}}\right]E\left[e^{it\frac{X_2}{2}}\right]E\left[e^{it\frac{X_3}{3}}\right]\dots E\left[e^{it\frac{X_k}{k}}\right]\dots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}E\left[e^{\left(\frac{X_k}{k}\right)it}\right] \end{aligned} \tag{4.17}$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned} E\left[e^{\left(\frac{X_k}{k}\right)it}\right] &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{it}{k}\right)x}e^{-|x|}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{\left(\frac{it}{k}\right)x}e^{x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{\left(\frac{it}{k}\right)x}e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{it}{k}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{it}{k}}\right) \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{t}{k}\right)^2} \end{aligned} \tag{4.18}$$

olur. (4.17) ve (4.18) bağıntıları kullanılarak

$$E[e^{itH}] = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{t}{k}\right)^2\right)^{-1} \tag{4.19}$$

elde edilir. (2.11) bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{\pi t}{\sinh \pi t} &= \frac{\pi t}{\pi t\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\pi t}{n\pi}\right)^2\right)} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{t}{n}\right)^2\right)^{-1} \end{aligned} \tag{4.20}$$

olarak bulunur. Buradan (4.19) ve (4.20) bağıntıları kullanılırsa

$$E[e^{itH}] = \frac{\pi t}{\sinh \pi t} \tag{4.21}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} E\left[e^{itH}\right] &= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} H^n \frac{(it)^n}{n!}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} E[H^n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mu_n \end{aligned} \tag{4.22}$$

olur. Burada,

$$E[H^n] = \mu_n$$

H rasgele değişkeninin sıfıra göre $n - inci$ momentidir. Diğer yandan (4.21) eşitliğinden

$$\begin{aligned} E[e^{itH}] &= \frac{\pi t}{\sinh \pi t} \\ &= \frac{\pi t}{\frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2}} \\ &= \frac{2\pi t}{e^{2\pi t} - 1} e^{\pi t} \end{aligned} \tag{4.23}$$

elde edilir. (2.1) bağıntısında t yerine $2\pi t$ ve x yerine $\frac{1}{2}$ alınırsa,

$$\frac{2\pi t}{e^{2\pi t} - 1} e^{\pi t} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{1}{2}\right) (2\pi)^n \frac{t^n}{n!} \tag{4.24}$$

olur.

O halde (4.22), (4.23) ve (4.24) bağıntıları kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{t^n}{n!} \mu_n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{1}{2}\right) (2\pi)^n \frac{t^n}{n!} \tag{4.25}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.34. $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere,*

$$\mu_n = i^{-n} 2^n \pi^n B_n \left(\frac{1}{2}\right) \tag{4.26}$$

olarak bulunur.

(4.26) ve (2.5) bağıntıları kullanılarak μ_n momentleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= B_0\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\
\mu_1 &= \frac{1}{i}2\pi B_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\
\mu_2 &= \frac{1}{i^2}(2\pi)^2 B_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{3} \\
\mu_3 &= \frac{1}{i^3}(2\pi)^3 B_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\
\mu_4 &= \frac{1}{i^4}(2\pi)^4 B_4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7\pi^4}{15} \\
\mu_5 &= \frac{1}{i^5}(2\pi)^5 B_5\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Şimdi de,

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k}$$

yakınsak serisini

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{(2k-1)\pi}$$

ve

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2k\pi}$$

olarak ayıralım. Burada $X_1, X_2, X_{3,..}$ bağımsız rastgele değişkenleri standart klasik Laplace dağılımına sahiptir. O halde,

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{(2k-1)\pi}$$

nin karakteristik fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
E[e^{2itY}] &= E\left[e^{2it\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_K}{(2k-1)\pi}\right)}\right] \qquad (4.27) \\
&= E\left[e^{2it\left(\frac{X_1}{\pi}+\frac{X_2}{3\pi}+\frac{X_3}{5\pi}+\ldots\right)}\right] \\
&= E\left[e^{2it\frac{X_1}{\pi}}\right] E\left[e^{2it\frac{X_2}{3\pi}}\right] \ldots E\left[e^{2it\frac{X_k}{(2k-1)\pi}}\right] \ldots \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} E\left[e^{\left(\frac{X_k}{(2k-1)\pi}2it\right)}\right]
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Buradan, (2.15) bağıntısı kullanılarak,

$$E\left[e^{\left(\frac{X_k}{(2k-1)\pi}2it\right)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}e^{\left(\frac{2it}{(2k-1)\pi}\right)x}e^{-|x|}dx \tag{4.28}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{\left(\frac{2it}{(2k-1)\pi}\right)x}e^{x}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}e^{\left(\frac{2it}{(2k-1)\pi}\right)x}e^{-x}dx$$
$$= \left(1+\left(\frac{2t}{(2k-1)\pi}\right)^2\right)^{-1}$$

bulunur. (4.27) ve (4.28) bağıntıları yardımıyla

$$E\left[e^{2itY}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}E\left[Y^n\right]\frac{(2it)^n}{n!} \tag{4.29}$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty}E\left[e^{\left(\frac{X_k}{(2k-1)\pi}2it\right)}\right]$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{2t}{(2k-1)\pi}\right)^2\right)^{-1}$$

elde edilir. Ayrıca, (2.12) bağıntısında t yerine it yazılırsa

$$\cos(it) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{2it}{(2k-1)\pi}\right)^2\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{2t}{(2k-1)\pi}\right)^2\right)$$

olur ve (2.6) bağıntısı kullanılırsa

$$\frac{1}{\cos(it)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{2t}{(2k-1)\pi}\right)^2\right)^{-1} = \frac{2}{e^t+e^{-t}} \tag{4.30}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. (4.29) ve (4.30) bağıntıları kullanılarak

$$E\left[e^{2itY}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}E\left[Y^n\right]\frac{(2it)^n}{n!} \tag{4.31}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\mu_n(2i)^n\frac{t^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.35. *$n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,*

$$\mu_n = E\left[Y^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} Y^n \frac{1}{2} e^{-|Y|} dY = 2^{-n} i^{-n} E_n \tag{4.32}$$

olarak bulunur (Kim 2019).

Şimdi de,

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2k\pi}$$

serisini göz önüne alalım. O zaman, Z nin karakteristik fonksiyonu

$$\begin{aligned} E\left[e^{itZ}\right] &= E\left[e^{it\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{X_K}{2k\pi}\right)}\right] \\ &= E\left[e^{it\left(\frac{X_1}{2\pi}+\frac{X_2}{4\pi}+\frac{X_3}{6\pi}+\ldots\right)}\right] \\ &= E\left[e^{it\frac{X_1}{2\pi}}\right] E\left[e^{it\frac{X_2}{4\pi}}\right] \ldots E\left[e^{it\frac{X_k}{2k\pi}}\right] \ldots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} E\left[e^{\left(\frac{X_k}{2k\pi}\right)it}\right] \end{aligned} \tag{4.33}$$

olarak yazılır. Buradan, (2.15) bağıntısı kullanılarak,

$$\begin{aligned} E\left[e^{\left(\frac{X_k}{2k\pi}\right)it}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{\left(\frac{it}{2k\pi}\right)x} e^{-|x|} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{\left(\frac{it}{2k\pi}\right)x} e^{x} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{\left(\frac{it}{2k\pi}\right)x} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{it}{2k\pi}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{it}{2k\pi}}\right) \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2k\pi}\right)^2} \end{aligned} \tag{4.34}$$

bulunur. (4.33) ve (4.34) bağıntıları yardımıyla

$$\begin{aligned} E\left[e^{itZ}\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[Z^n\right] \frac{(it)^n}{n!} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} E\left[e^{\left(\frac{X_k}{2k\pi}\right)it}\right] \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2k\pi}\right)^2} \end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir.

Ayrıca (2.13) bağıntısı kullanılırsa

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{z}{n\pi}\right)^{2}\right)$$

ve

$$\begin{aligned} 2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{t}{2n\pi}\right)^{2}\right)^{-1} &= \frac{it}{\sin\left(\frac{it}{2}\right)} \\ &= \frac{2t}{e^{t}-1}e^{\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{t}{2n\pi}\right)^{2}\right)^{-1} = \frac{t}{e^{t}-1}e^{\frac{t}{2}} \tag{4.36}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.1) bağıntısında $x=\frac{1}{2}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{t}{e^{t}-1}e^{\frac{t}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty}B_n\left(\frac{1}{2}\right)\frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(2^{1-n}-1)B_n\frac{t^n}{n!} \end{aligned} \tag{4.37}$$

olarak bulunur. Buradan, (4.35), (4.36) ve (4.37) bağıntıları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}E\left[Z^n\right]\frac{(it)^n}{n!} &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{t}{2n\pi}\right)^{2}\right)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(2^{1-n}-1)B_n\frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$'nin katsayıları karşılaştırılırsa, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.36. $n\in\mathbb{N}_0$ *olmak üzere,*

$$E\left[Z^n\right] = i^{-n}\left(2^{1-n}-1\right)B_n \tag{4.38}$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR

Bu tezde, Hankel determinantlarının bazı özel polinom ve sayılarla ilişkileri çalışılmıştır. Hilbert matrisleri ve Hankel determinantlarının bazı özellikleri incelenmiş ve ortogonal polinomlar ile arasındaki ilişkiler verilmiştir. Dahası, ortogonal polinomlar teorisi ve rekürans formülleri kullanılarak, Hermite polinomlarının rekürans bağıntısı elde edilmiştir. Bunlara ek olarak, momentler ve ortogonal monik polinomlar arasındaki bazı ilişkiler verilmiştir. Son olarak, Laplace Dağılımı ve karakteristik fonksiyon yardımıyla Bernoulli sayıları, Bernoulli polinomları ve ikinci tür Euler sayılarını içeren bağıntılar ve özdeşlikler elde edilmiştir. Elde edilen bu bağıntıların bazıları aşağıdaki gibi verilirler:

(3.10) denkleminde (a_n) dizisi olarak $n.$ dereceden moment dizisi alıp, $0.$ mertebeden Hankel determinantlarında n yerine $n+1$ yazıldığı zaman, bu determinantın (3.11) denklemindeki determinanta eş değer olduğu verilmiştir. Böylece ortogonal polinom dizileri ve Hankel determinantları arasındaki önemli bir ilişki elde edilmiştir.

Hermite polinomları $H_n(x)$ için, bu polinomaların sıfırıncı momenti μ_0 kullanılarak (4.13) ortogonallik bağıntısı verilmiştir. Hermite polinomlarının momentlerini hesapladığımızda tek indisli momentlerin sıfır, çift indisli momentlerin ise $\sqrt{\pi}$ nin bir reel katı olduğu görülmüştür.

Ortogonal polinomlar tek türlü belirli ortogonallik katsayısına sahip olmak üzere bu katsayılar bu tezde K_n ile gösterilmiştir. Hermite polinomlarının ortogonallik katsayısı K_n ile momentleri arasındaki ilişki (4.14) ve (4.10) olmak üzere $n \geq 1$ için (4.15) olarak verilmiştir.

μ_n momentleri ve Bernoulli polinomları arasındaki ilişki (4.26) olarak verilmiştir.

μ_n momentleri ve ikinci tür Euler sayıları arasındaki ilişki (4.32) olarak verilmiştir.

Z rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu ile Bernoulli sayıları arasındaki ilişki (4.38) olarak verilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar başta matematik olmak üzere, matematiksel istatistik, matematiksel fizik, olasılık ve istatistik, fizik gibi birçok alanda kullanılma potansiyeli vardır.

6. KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1970. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publication, New York.

Aitchison, J. 1981. Statistical Distributions in Scientific Work: Volume 4 - Models, Structures, and Characterizations. Springer Netherlands, Holland, U.S.A and England, 455.

Akdeniz, F. 2016. Olasılık ve İstatistik, Akademisyen Kitabevi, Ankara.

Al-Salam, W. A. 1990. Orthogonal Polynomials: Theory and Practice. Springer Netherlands, NATO ASI Series 294, 472.

Apostol, T. M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Mathematics, New York-Heidelberg: Springer-Verlag.

Askan, Z. S., Simsek, Y. and Kucukoglu, I. 2020. A Survey on Some Old and New Identities Associated with Laplace Distribution and Bernoulli Numbers. To Appear in Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang).

Askey, R. 1975. Orthogonal Polynomials and Special Functions, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 110.

Barry, P. 2011. Riordan Arrays, Orthogonal Polynomials as Moments, and Hankel Transforms. *Journal of Integer Sequences*, Vol. 14.

Carlitz, L. 1968. Bernoulli numbers. *Fibonacci Quarterly*, 6 (3): 71–85.

Chihara, T. S. 1978. An Introduction to Orthogonal Polynomials. Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris, 249.

Choi, M-D. 1983. Tricks or Treats with the Hilbert Matrix *The American Mathematical Monthly*, 90 (5):301-312.

Cigler, J. 2011. Some nice Hankel determinants. *ArXiv,* 1–45.

Cigler, J. 2013. How to guess and prove explicit formulas for some Hankel determinants. *ArXiv,* 1–27.

Conway, J. B. 1978. Functions of One Complex Variable. Second Edition, Springer, New York, Heidelberg and Berlin.

Çevik, A. 2009. Matris Ortogonal Polinomlarının ve Matris Fonksiyonlarının Bazı Özellikleri. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara, 119. (Doktora tezi)

DeGroot, M. H. and Schervish, M. J. 2012. Probability and Statistics. 4th Edition, Pearson Addison-Wesley, Boston, 893.

Erdelyi, A. 1953. Higher Transcendental Functions. The Bateman Manuscript Project, Vol. I-III. McGraw Hill Book Company, Inc., pp. 35–43, New York.

Feller, W. An introduction to probability theory and its applications. John Wiley & Sons, New York, 1966.

Gautschi, W. 2004. Orthogonal Polynomials Computation and Approximation. Oxford University Press, USA, 301.

Haq, N. S. 2013. Orthogonal Polynomials, Perturbed Hankel Determinants and Random Matrix Models. Doktora Tezi, Imperial College, London, 185. (Doktora tezi)

Jia, Y. B. 2016. Orthogonal Polynomials. (Com S 477/577 Notes), 1–8.

Johnson, N. L., Kotza, S. and Balakrishnan, N. 1995. Continuous Univariate Distributions, Volume 2, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Ismail, M. E. H. 2005. Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 706.

Ismail, M. E. H. 2005. Determinants with orthogonal polynomial entries. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 178 (2005) 255–266.

Kilar, N. and Simsek, N. 2019. Two parametric kinds of Eulerian-type polynomials associated with Euler's formula. Symmetry, 11 (9), 1097: 1–19; doi:10.3390/sym11091097.

Kim, T. 2008. Euler numbers and polynomials associated with zeta functions. *Abstract and Applied Analysis*, 2008, Article ID 581582. doi:10.1155/2008/581582.

Kim, D. S., Kim, H. Y., Kim, D. and Kim, T. 2019. Identities of symmetry for type 2 Bernoulli and Euler polynomials. *Symmetr*y, 11 (5), 613: 1–14.

Kotz, S. T., Kozubowski, J. and Podgorski, K. 2001a. The Laplace distribution and generalization a revisit with new applications, Washington, Reno and Indianapolis.

Kotz, S., Kozubowski, T. J. and Podgórski, K. 2001b. The Laplace Distribution and Generalizations. Springer.

Lebedev, N. N. 1965. Special functions and their applications. Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J.

Lukacs, E. 1970. Characteristic Function. Charles griffin & Company Limited (Second Edition), London.

Natalini, P. and Bernardini, A. A generalization of the Bernoulli polynomials, *Journal of Applied Mathematics* 2003:3, (2003), 155-163. DOI:10.1155/S1110757X03204101.

Nowicki, A. 2017. Some Hankel determinants.

https://www.researchgate.net/publication/320703711

Pillwein, V. 2012. Orthogonal Polynomials and Symbolic Computation. https://www3.risc.jku.at/education/courses/ss2011/ops-sc/main.pdf

Partington, J. R. 1988. An introduction to Hankel operators. Cambridge University Press, 103 p.

Provost, S. B. and Ha, H-T. 2009. On the inversion of certain moment matrices. *Linear Algebra and its Applications* 430 (2009) 2650–2658.

Rademacher, H. 1973. Topics in Analytic Number Theory, Grundlehren Math. Wiss. 169, Springer-Verlag, Berlin.

Rainville, E. D. 1960. Special Functions. The Macmillan Company, New York, 365 p.

Roman, S. 1984. The Umbral Calculus. Academic Press, Inc., New York, 193 p.

Simsek, B. and Simsek, B. 2017. The computation of expected values and moments of special polynomials via characteristic and generating functions, AIP Conference Proceedings 1863:1, (2017). DOI:10.1063/1.4992461

Sadjang, P. N. 2013. Moments of classical orthogonal polynomials, Ph.D thesis, zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr.rer.nat) im Fachbereich Mathematik der Universität Kassel, 98 p.

Simsek, Y. 2010. Special functions related to Dedekind-type DC-sums and their applications. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 17 (4): 495–508.

Simsek, Y. 2019. Formulas for Poisson-Charlier, Hermite, Milne-Thomson and other type polynomials by their generating functions and p-adic integral approach. *RACSAM. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A: Matemáticas,* 113: 931–948.

Simsek, Y. 2018. New families of special numbers for computing negative order Euler numbers and related numbers and polynomials. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 12: 1–35.

Srivastava, H. M. and Choi, J. 2012. Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands.

Steere, H. R. 2012. Orthogonal polynomials and the moment problem. Yüksek Lisans Tezi, Witwatersrand Üniversitesi, Johannesburg, 141.

Szegő, G. 1939. Orthogonal Polynomials. Colloquium Publications. Amricean Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume: XXIII, 431.

Uppuluri, V. R. R. 1981. Some Properties Of The Log-Laplace Distrubition, Mathematics and Statistics Research Department Computer Sciences Division Union Carbide Corporation, Nuclear Division Oak Ridge, Tennessee 37830.

Yuan, Q. 2012. https://qchu.wordpress.com/moments-hankel-determinants-orthogonal-polynomials-motzkin-paths-and-continued-fractions/ [Son erişim tarihi: 18.09.2012].

Zhang, R. and Chen, L-C. 2011. Matrix inversion using orthogonal polynomials. *Arab Journal of Mathematical Sciences* (2011) 17, 11–30.

https://en.wikipedia.org/wiki/Hankel_matrix#References.

https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_matrix#CITEREFHilbert1894

https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_polynomials.

ÖZGEÇMİŞ

ZEHRA SELİN AŞKAN

zehra selin_askan@hotmail.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2013-2017	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya
Yüksek Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2017-2020	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

ESERLER:

1-Askan, Z. S., Simsek, Y. and Kucukoglu, I. A Survey on Some Old and New Identities Associated with Laplace Distribution and Bernoulli Numbers. "To Appear in Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang)".